

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

Bakalářská práce

Návrh simulačního modelu a řízení kvadrotorové helikoptéry

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 20. srpna 2013

.....
vlastnoruční podpis

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá návrhem nelineárního modelu kvadrotorové helikoptéry v $\mathbf{SO}(3)$. Nejprve je popsána kvadrotorová helikoptéra a její základní vlastnosti. Dále jsou odvozeny vztahy pro určení polohy kvadrotoru v \mathbb{R}^3 . Dále je vytvořen nelineární matematický model a nelineární model pomocí bloků *Simscape/SimMechanics*. Následně je matematický model linearizován a je na něj navrženo řízení stability pomocí PD regulátorů. Následně je otestována regulace na jednotlivých modelech.

Klíčová slova

kvadrotorová helikoptéra, $\mathbf{SO}(3)$, matematický model, linearizace, PD regulátor, model v *SimMechanics*

Abstract

This bachelor thesis is focused on design of nonlinear model of quadrotor helicopter in $\mathbf{SO}(3)$. At first the quadrotor helicopter and its basic attributes are revealed. Then they are derived relations for attitude estimation of quadrotor in \mathbb{R}^3 . After that nonlinear mathematical model and nonlinear model with blocks from the *SimMechanics* library are created. In the next step mathematical model is linearized and stabilization control with PD controllers is designed. Finally the control is tested on particular models.

Keywords

quadrotor helicopter, $\mathbf{SO}(3)$, mathematical model, linearization, PD controller, *SimMechanics* model

Obsah

1	Úvod	1
2	Kvadrotorová helikoptéra	2
2.1	Popis letounu	2
2.2	Historie	2
3	Návrh modelu	5
3.1	Princip pohybu kvadrotorové helikoptéry v prostoru	5
3.2	Matematický model	8
3.2.1	Způsoby popisu prostoru	8
3.2.2	Kinematika	14
3.2.3	Dynamika	15
3.2.4	Základní aerodynamické jevy	16
3.2.5	Další aerodynamické jevy	17
3.2.6	Kompletní matematický model	18
3.3	Model na základě bloků <i>SimMechanics</i>	19
3.3.1	Knihovna <i>SimMechanics</i>	19
3.3.2	Model prostředí	20
3.3.3	Model kvadrotorové helikoptéry	20
3.3.4	Schémata a nastavení modelu	21
4	Návrh řízení	25
4.1	Princip řízení kvadrotoru	25
4.2	Návrh regulátoru pro řízení rotace kvadrotoru	27
4.3	Návrh regulátoru pro řízení letové výšky	28
4.4	Simulace	29
4.4.1	Parametry modelu a regulátorů	29
4.4.2	Simulace řízeného matematického modelu kvadrotorové helikoptéry s rotační maticí e^{Ω_x}	30
4.4.3	Simulace řízeného matematického modelu kvadrotorové helikoptéry s rotační maticí R	31

4.4.4	Simulace řízeného modelu se <i>SimMechanics</i>	34
4.4.5	Porovnání výstupů u jednotlivých modelů	34
5	Závěr	43

Seznam symbolů

A	Inerciální soustava
B	Soustava kvadrotoru
Ω	Vektor složený z Eulerových úhlů
Ω^*	Požadované natočení kvadrotorové helikoptéry
ω_i	Úhlová rychlost rotoru i
Ω_x	Rotační matice v $\mathfrak{so}(3)$
ϕ, θ, ψ	Eulerovy úhly
e_Ω	Regulační odchylka pro regulátor $F_{R\Omega}$
F	Síly působící na kvadrotorovou helikoptéru
f	Další aerodynamické síly
F_V	Přepočet výstupů regulátorů na požadované otáčky rotorů kvadrotorové helikoptéry
$F_{R\Omega}$	Regulátor rotace kvadrotorové helikoptéry
F_{Rz}	Regulátor udržující požadovanou výšku kvadrotorové helikoptéry
G	Gravitační síla
I	Matice setrvačnosti kvadrotorové helikoptéry
I_M	Moment setrvačnosti rotoru
k_M	Koeficient točivého momentu
k_T	Koeficient tahu rotoru

- $K_{D,\Omega}$ Parametr derivační složky PD regulátoru $F_{R\Omega}$
- $K_{D,z}$ Parametr derivační složky PD regulátoru F_{Rz}
- $K_{P,\Omega}$ Parametr proporcionální složky PD regulátoru $F_{R\Omega}$
- $K_{P,z}$ Parametr proporcionální složky PD regulátoru F_{Rz}
- l Vzdálenost od středu kvadrotoru ke středu rotoru
- m Hmotnost kvadrotorové helikoptéry
- M_i Točivý moment rotoru i
- r Průvodič
- T_i Tah rotoru i
- x', y', z' Souřadný systém v soustavě kvadrotorové helikoptéry
- x, y, z Souřadný systém v inerciální soustavě

1 Úvod

Cílem této práce je seznámit čtenáře s druhem helikoptéry, který se nazývá kvadrotorová helikoptéra. Jedná se o helikoptéru ze skupiny multirotorů. V poslední době se jedná o velmi oblíbenou a rozšířenou platformu UAV¹.

Boom použití kvadrotorových helikoptér v oblasti UAV je způsoben zejména díky levné elektronice (používá se k řízení, případně ke sběru a vyhodnocování dat ze sensorů) a jednoduché konstrukci. Dále je kvadrotor velmi oblíbený kvůli svojí univerzálnosti. Lze ho osadit nejrůznějšími senzory a tak ho lze používat např. při pozorování policií či armádou, při sběru dat na nepřístupných místech, ale například i fotografie kvůli vytváření netradičních snímků.

Smyslem práce je ukázat čtenáři, jak vytvořit simulační modely kvadrotorové helikoptéry. Budou představeny dva typy modelů. První model je vytvořen na základě fyzikálního modelu a druhý model je sestaven pomocí bloků z knihovny *Simscape/SimMechanics* v prostředí *Simulink*.

Po přečtení druhé kapitoly by měl čtenář vědět co je kvadrotorová helikoptéra, znát její základní části a vědět něco málo o její historii. Ze třetí kapitoly by se měl dozvědět o základních principech pohybu kvadrotoru, o několika způsobech popisu prostoru a také by měl být schopen navrhnout matematický model kvadrotorové helikoptéry na základě dynamických a kinematických vztahů. Také by se měl dozvědět o aerodynamických jevech, které mohou ovlivnit chování kvadrotoru. Dále by měl být schopen sestavit model kvadrotorové helikoptéry pomocí knihovny *Simscape/SimMechanics*.

Ve čtvrté kapitole se čtenář dozví o principech řízení kvadrotoru, o problematice návrhu řízení a měl by být po přečtení schopen navrhnout stabilizační řízení kvadrotoru, které se bude skládat z přepočtu tahu a momentů kvadrotoru na úhlovou rychlost rotorů a dvou PD regulátoru, které se budou starat o řízení výšky a náklonu. Bude také schopen odvodit vztahy, které budou potlačovat zrychlení kvadrotoru při horizontálním pohybu. Na konci kapitoly se čtenář dočte o simulaci na řízených modelech kvadrotorové helikoptéry v prostředí *Simulink*.

¹unmanned aerial vehicle = bezpilotní letoun

2 Kvadrotorová helikoptéra

V této části bude vysvětleno, co to je kvadrotorová helikoptéra. Budou popsány její prvky (z čeho se skládá). Dále budou zmíněny její výhody a základní principy. Nakonec bude stručně uvedena historie této helikoptéry.

2.1 Popis letounu

Kvadrotorová helikoptéra (nazývána též quadrotor, tetracopter nebo quadcopter, případně v češtině kvadrotor či čtyřtulka) je druh multirotoru¹. Kvadrotorová helikoptéra je tedy holonomická (je schopna řízeného pohybu ve všech šesti stupních volnosti). Základní stavba kvadrotorové helikoptéry (viz obrázek 2.1) se skládá z křížového rámu a čtyř rotorů (většinou jsou jako pohony použity BLDC elektromotory²), které jsou umístěny na koncích kříže a jsou k tělu kvadrotoru zafixovány. Sousedící vrtule jsou roztáčeny opačným směrem. Rozdělením směru rotace je umožněna říditelnost helikoptéry v prostoru. Vzhledem k tomuto faktu není potřeba jako u klasických helikoptér stabilizačního rotoru nebo jako u „NOTARů³“ stabilizačních trysek.

2.2 Historie

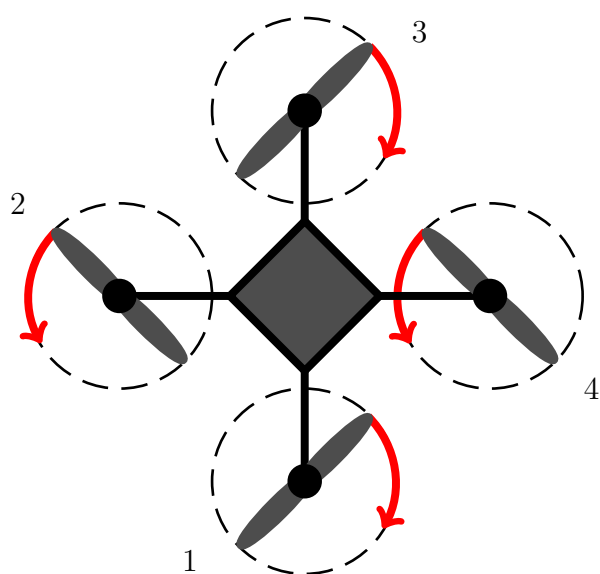
Historie kvadrotorové helikoptéry sahá do první poloviny 20. století [1, 8]. V této době se lidé snažili vynalézt letoun, který by byl schopen kolmého startu. Různě se experimentovalo se stavbou helikoptéry a tak se mezi prvními stroji, které byly schopné kolmého startu, objevila i kvadrotorová helikoptéra.

Roku 1922 postavil ruský imigrant George de Bothezat na zakázku americké armády kvadrotorovou helikoptéru (nazývanou „flying octopus“). Tato helikoptéra [3] absolvovala v roce 1922 několik úspěšných letů. Nakonec byl ale projekt přerušen kvůli malému výkonu, neobratnosti stroje, velikosti fi-

¹helikoptéra, která se pohybuje ve vzduchu pomocí tří a více rotorů

²bezkartáčové stejnosměrné elektromotory

³NO Tail Rotor - helikoptéra, která nemá na konci ocasu stabilizační vrtuli, ale její stabilizace a řízení náklonu se provádí pomocí trysek



Obrázek 2.1: Kvadrotorová helikoptéra s označením směru rotace rotorů

nančních nákladů a zájmu o vírníky (autogyra). Většímu zájmu o kvadrotorové helikoptéry se dostává až v poslední době.



Obrázek 2.2: De Bothezatova helikoptéra. Zdroj: viz [3, str. 125]

3 Návrh modelu

Cílem této kapitoly je vytvořit dva modely kvadrotorové helikoptéry. Proces vytváření modelů se nazývá modelování. Během modelování se reálnému zařízení přiřazuje podle určitých kritérií model [16].

Nejprve budou v této kapitole popsány principy, na jejichž základě se kvadrotorová helikoptéra pohybuje, poté bude popsán postup vytváření matematického modelu a dále postup vytváření modelu ze *SimMechanics*.

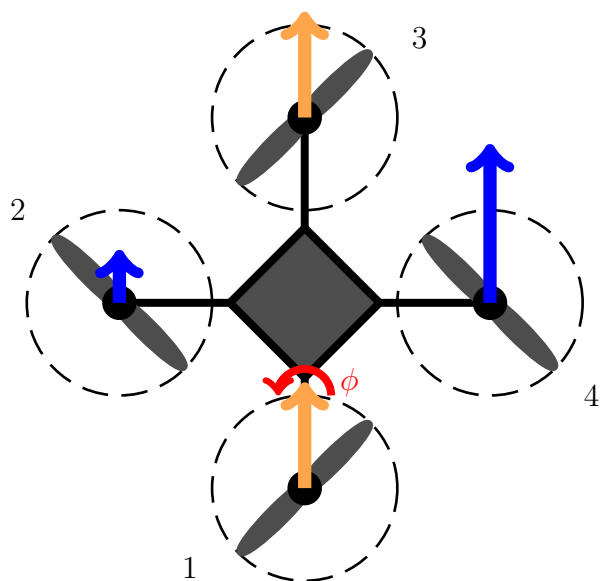
3.1 Princip pohybu kvadrotorové helikoptéry v prostoru

Zde bude popsán způsob, kterým se kvadrotorová helikoptéra pohybuje a jak k tomuto pohybu dochází. Změna polohy kvadrotorové helikoptéry se provádí pomocí změny otáček jednotlivých rotorů (viz obrázky 3.1, 3.2, 3.3). Tento princip umožňuje jednoduchou konstrukci a nízké náklady na stavbu helikoptéry.

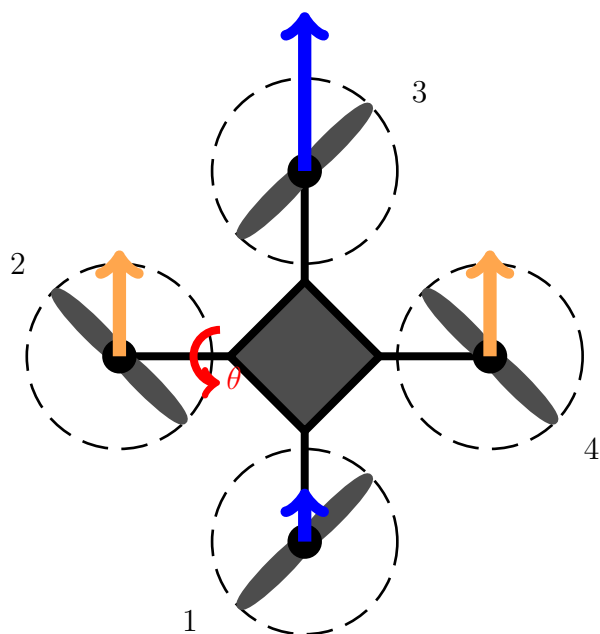
Každý rotor generuje za chodu tah T_i (což je síla, která ideálně působí kolmo na směr rotace) a točivý moment M_i .

Budeme-li uvažovat, že všechny rotory jsou stejné a při stejných otáčkách (resp. úhlové rychlosti ω_i) produkují stejný tah a točivé momenty, tak se momenty vzájemně vyruší (kvadrotorová helikoptéra neprovádí rotační pohyb). Pokud mají rotory stejné otáčky a na helikoptéru nepůsobí žádné vnější vlivy kromě gravitační síly G (např. vítr), potom se helikoptéra pohybuje pouze vertikálně, tedy stoupá nebo klesá (v závislosti na gravitační síle G a vyprodukovaném tahu rotorů).

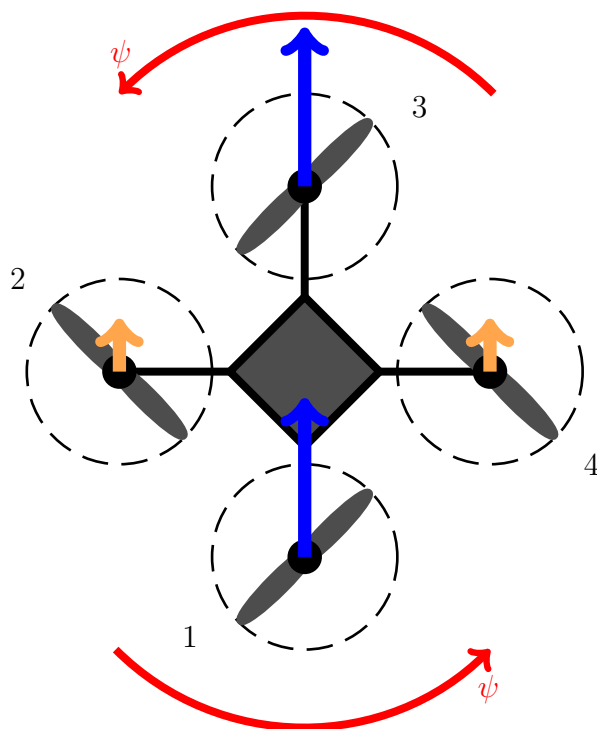
Pokud ale otáčky rotorů nejsou stejné, dochází k rotačnímu pohybu helikoptéry. Rotaci lze popsat pomocí Eulerových úhlů ϕ , θ a ψ . Tyto úhly odpovídají základním pohybům helikoptéry. Jedná se o systém RPY (ϕ - roll („náklon“ - viz obrázek 3.1), θ - pitch („sklon“ - viz obrázek 3.2), ψ - yaw („otočení“ - viz obrázek 3.3)).



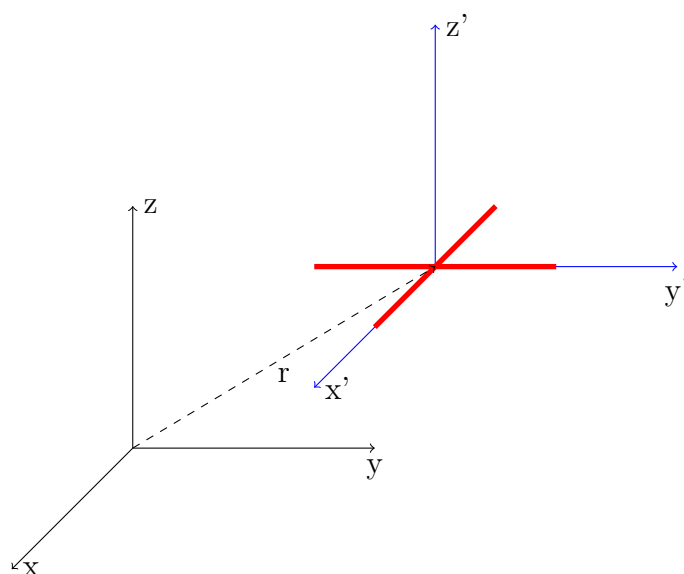
Obrázek 3.1: Rotace kvadrotorové helikoptéry v závislosti na rozdílu otáček rotorů 2 a 4



Obrázek 3.2: Rotace kvadrotorové helikoptéry v závislosti na rozdílu otáček rotorů 1 a 3



Obrázek 3.3: Rotace kvadrotorové helikoptéry v závislosti na rozdílu otáček rotorů 1 + 3 a 2 + 4



Obrázek 3.4: Zobrazení souřadnicového systému kvadrotorové helikoptéry

3.2 Matematický model

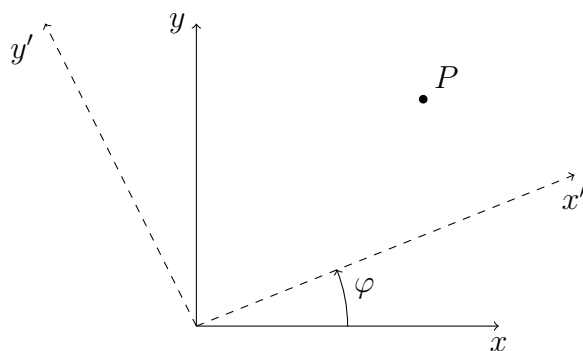
V této části budou popsány postupy pro vytvoření matematického modelu kvadrotorové helikoptéry. Nejprve budou ukázány různé metody popisu prostoru. Bude ukázán jejich princip a výhody i nevýhody. Dále budou sestaveny dynamické rovnice modelu, popsány některé aerodynamické jevy a nakonec bude vyjádřen model kvadrotorové helikoptéry.

3.2.1 Způsoby popisu prostoru

Pohyb kvadrotorové helikoptéry v prostoru je popsán pomocí pravotočivé kartézské soustavy souřadnic (viz obrázek 3.4).

Dále je nutné určit vztahy pro popis polohy v \mathbb{R}^3 . Tyto vztahy umožňují přepočítání mezi souřadným systémem soustavy kvadrotoru (viz obrázek 3.4 - osy x' , y' , z') a souřadným systémem inerciální soustavy (viz obrázek 3.4 - osy x , y , z). Poloha kvadrotoru je popsána průvodičem r .

Pro popis těchto vztahů se při modelování nejčastěji používají tři standardní postupy. Jsou jimi popis pomocí rotační matice, kvaternionů a spe-



Obrázek 3.5: Ukázka rotace v ploše

ciální ortogonální skupiny.

Eulerovy úhly

Nejprve bude představen popis prostoru Eulerovy úhly. Přepočítání podle Eulerových úhlů [15] je prováděno na základě rotací kolem jednotlivých os. Ve 3D prostoru máme tyto osy tři (většinou popsány x , y , z). Rotace kolem os je popsána rotačními maticemi. Dále si ukážeme odvození těchto matic a následný přepočítání.

Pro názornost si nejdříve ukážeme odvození rotační matice v ploše (viz obrázek 3.5). Na obrázku je vyobrazen bod P . Polohu bodu P známe pouze v souřadném systému x' , y' . My ale potřebujeme znát polohu daného bodu v souřadném systému x , y . Vidíme, že osy jsou pootočený o úhel φ .

Na základě těchto znalostí můžeme snadno odvodit následující vztah:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dále už jen stačí přepsat vztah 3.1 do maticového tvaru:

$$r^P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R r'^P \quad (3.2)$$

Z maticového tvaru (rovnice 3.2) jsme získali matici R , která je rotační maticí v ploše. Při odvození rotační matice ve 3D postupujeme obdobně.

Rozdíl je v tom, že v prostoru je poloha bodu určena souřadnicemi, které se skládají ze tří hodnot ($r = [x, y, z]^T$ a $r' = [x', y', z']^T$), a rotace souřadnicového systému je určena třemi úhly (standardně ϕ, θ, ψ).

Dále jsou popsány rotační matice, které popisují rotace kolem os x, y , a z :

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Přepočtení souřadnic bodu můžeme získat postupným používáním matic R_x, R_y, R_z (viz 3.3, 3.4, 3.5), ale také můžeme z těchto matic vytvořit jednu matici, kterou budeme při přepočtu používat. Záleží na pořadí rotací (při jiné kombinaci vznikne jiná matice). Standardně se používá systém RPY (tedy „roll“ - „pitch“ - „yaw“, odpovídá úhlům $\phi - \theta - \psi$). Matici R_{RPY} získáme takto (pro zkrácení je použit zápis $\cos = c$ a $\sin = s$):

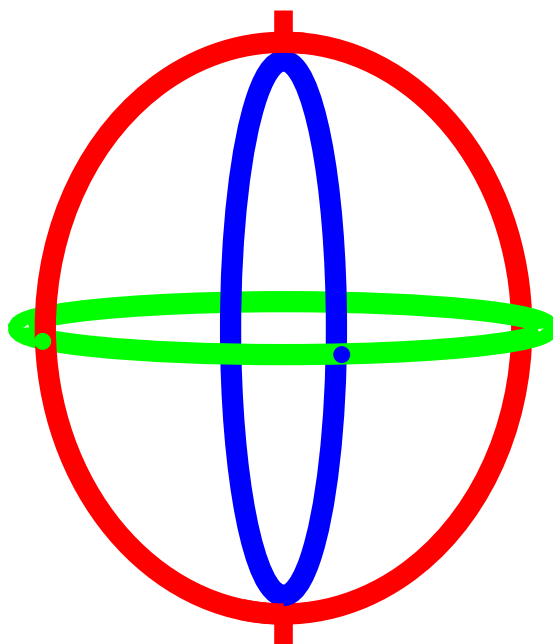
$$\begin{aligned} R_{RPY} &= R_z R_y R_x \\ R_{RPY} &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Přepočtení vztah při použití matice z 3.6:

$$r = R_{RPY} r' \quad (3.7)$$

Tato metoda popisu má ale jeden velký nedostatek a tím je přítomnost jevu jménem *gimbal lock*.

Gimbal lock (nebo též „blokace Kardanova závěsu“ [6]) je jev, kdy dojde ke ztrátě jednoho stupně volnosti (v 3D prostoru se vyskytuje standardně šest stupňů volnosti - tři pro rotaci a tři pro translaci). Kardanův závěs je



Obrázek 3.6: Situace, kdy jsou všechny závěsy nezávislé

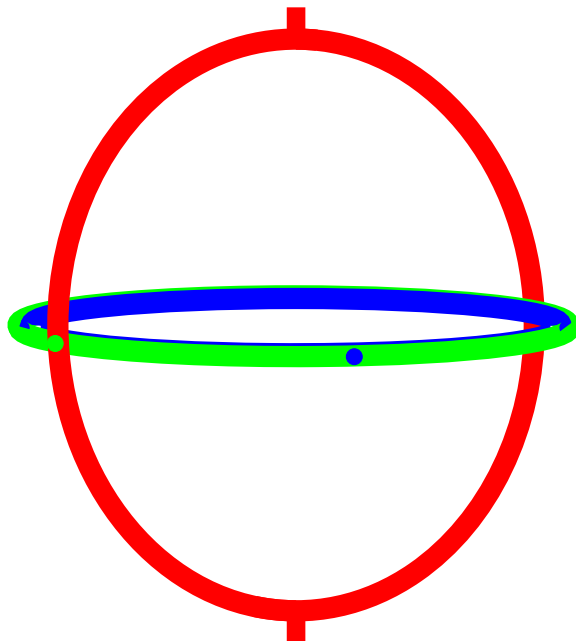
vidět na obrázku 3.6. Je to Kardanův závěs se třemi osami rotace, dohromady tedy poskytují kruhy (jednotlivé závěsy) tři stupně volnosti. Ztráta jednoho stupně volnosti je vyobrazena na obrázku 3.7. Tato ztráta byla způsobena pootočením modrého kruhu o 90° . V případě na obrázku 3.7 lze vyvodit, že pokud se pootočí červený kruh, změní s ním i rotace, kterou symbolizuje modrý kruh, tzn. že jsme přišli o jeden stupeň volnosti.

Kvaterniony

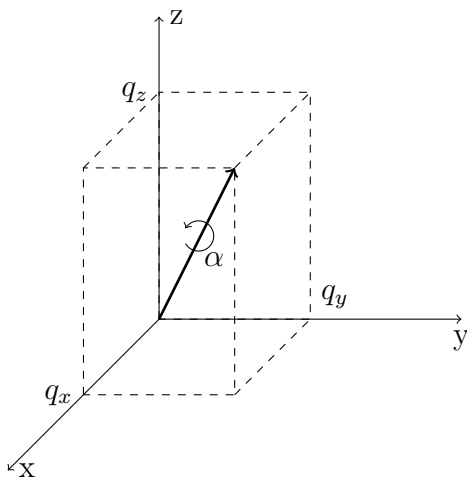
Dále si předvedeme přepočítání na základně kvaternionů. Je efektivnější než u Eulerových úhlů, ale jeho největší výhoda je, že zde odpadá problém s *gimbal lockem*. Kvaternion je složen z reálné složky a tří komplexních jednotek (v komplexních číslech je pouze jedna). To je dostatečný počet pro zapsání rotace v \mathbb{R}^3 . Komplexní složky jsou označeny písmeny i , j , k ($q_r + q_x i + q_y j + q_z k$).

Poloha bodu pomocí kvaternionu je tedy popsána takto (zakresleno také na obrázku 3.8):

$$p = [x \ y \ z \ q_r \ q_x \ q_y \ q_z]^T$$



Obrázek 3.7: Situace, kdy nastává ztráta jednoho stupně volnosti



Obrázek 3.8: Znázornění kvaternionu při popisu rotace v \mathbb{R}^3 (rotace o úhel α je dána hodnotou q_r)

Hodnoty x, y, z popisují translaci a hodnoty q_r, q_x, q_y, q_z popisují naklonění a pootočení bodu. Pro popis polohy se používá normovaný jednotkový kvaternion. To znamená, že platí následující vztah:

$$\sqrt{q_r^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = 1$$

V případě potřeby pro kvaterniony existují jak přepočty z vektoru, tak i z Eulerových úhlů (viz [2]). Nevýhodou je, že poloha je popsána sedmi hodnotami (tři pro translaci a čtyři pro rotaci).

Speciální ortogonální grupa

Zatím jsme si ukázali dva popisy rotace v prostoru. První, popis pomocí Eulerových úhlů, trpí blokací Kardanova závěsu. Druhý způsob je vyjádřen pomocí normovaného jednotkového kvaternionu, kde je ale nevýhodou jeho přeúčtení (rotace je popsána čtyřmi hodnotami). Proto se dále budeme zabývat popisem, který oba výše zmíněné neduhy nemá.

Jde o popis pomocí speciální ortogonální grupy, která je Lieovou grupou. V trojrozměrném prostoru je tato grupa označována jako $\mathbf{SO}(3)$ [2, 11, 12]. Je podgrupou grupy $\mathbf{O}(3)$ a její determinant je roven jedné. K $\mathbf{SO}(3)$ existuje odpovídající Lieova algebra, která je označována jako $\mathfrak{so}(3)$. Algebra $\mathfrak{so}(3)$ je třídimenzionální vektorový prostor a její báze je tvořena těmito prvky:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Přičemž platí tyto vztahy:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_3, X_1] = -X_2,$$

kde [...] je bilineární zobrazení „závorka“ z $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ do $\mathfrak{so}(3)$, které je definováno jako $[X, Y] = XY - YX$.

Grupa $\mathbf{SO}(3)$ je složena z podgrup $e^{\phi X_1}$, $e^{\theta X_2}$, $e^{\psi X_3}$, které mají stejný tvar jako matice z rovnic 3.3, 3.4 a 3.5, a odpovídají rotacím kolem os x , y a z . Rotaci můžeme vytvořit součinem těchto matic a proto může být v $\mathfrak{so}(3)$ popsána maticí Ω_x 3.11, která je symetrická podle hlavní diagonály. Převodní vztah mezi $\mathbf{SO}(3)$ a $\mathfrak{so}(3)$ lze vyjádřit pomocí exponenciálních a logaritmických map.

$$\Omega_x = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 & -\psi & \theta \\ \psi & 0 & -\phi \\ -\theta & \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Exponenciální mapa slouží k převodu z $\mathfrak{so}(3)$ do $\mathbf{SO}(3)$, tedy k převodu z Eulerových úhlů do rotační matice 3×3 . Tento vztah nejlépe popisuje Rodriguesův vzorec 3.12, kde Ω_x je vyjádřena ve vztahu 3.11 a $\Phi = |\Omega|$, kde $\Omega = [\phi \theta \psi]^T$.

$$e^\Omega = e^{\Omega_x} = I_3 + \frac{\sin \Phi}{\Phi} \Omega_x + \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi^2} \Omega_x^2 \quad (3.12)$$

K převodu opačným směrem, tedy z $\mathbf{SO}(3)$ do $\mathfrak{so}(3)$, slouží logaritmická mapa. Převod je popsán Rodriguesovým rotačním vzorcem 3.13, kde R je rotační matice 3×3 , $tr(R)$ je vektor s čísly, která se nacházejí na hlavní diagonále matice R a Ω je vytvořena z matice $\ln(R)$, která odpovídá matici Ω_x ze vztahu 3.11.

$$\begin{aligned} \ln(R) &= \frac{1}{2 \sin \Phi} (R - R^T) \\ \cos \Phi &= \frac{tr(R) - 1}{2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.2 Kinematika

V této části budou popsány vztahy pro převod ze souřadného systému soustavy kvadrotoru do souřadného systému inerciální soustavy.

V části 3.2.1 byly popsány postupy, kterými lze matematicky vyjádřit rotaci pevného tělesa. Na základě závěrů, které byly vyvozeny ve výše zmíněné části, vyplývá, že bude výhodné použít pro popis rotace kvadrotorové helikoptéry matematickou grupu $\mathbf{SO}(3)$.

Pro přehlednost označíme inerciální soustavu jako A a soustavu kvadrotoru jako B . Lineární poloha B vzhledem k A je popsána průvodičem $r = [x, y, z]^T$ (viz obrázek 3.4). Natočení B vzhledem k A je popsáno pomocí Eulerových úhlů $\Omega = [\phi, \theta, \psi]^T$. Pro převod vektoru z A do B je nutné přenásobit vektor rotační maticí, která byla definována v rovnici 3.12.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = e^{\Omega_x} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.2.3 Dynamika

V této části budou popsány základní dynamické vlastnosti kvadrotorové helikoptéry [5, 9]. Budou zde sestaveny Newton-Eulerovy rovnice, které popisují základní vlastnosti pro pohyb helikoptéry.

Pro sestavení rovnic jsou potřeba tyto parametry: hmotnost kvadrotorové helikoptéry m , matice setrvačnosti I . Matice I má následující tvar:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Kvůli specifickému tvaru kvadrotorové helikoptéry můžeme pro zjednodušení říci, že její tělo je symetrická struktura se čtyřmi rameny, která jsou připojena na x-ové a y-ové ose.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Newton-Eulerovy rovnice mají tento tvar:

$$m\ddot{r} = Gz + e^{\Omega_x} F \quad (3.15)$$

$$I\ddot{\Omega} = -\dot{\Omega} \times I\dot{\Omega} + M \quad (3.16)$$

G je gravitační síla a F jsou síly, které působí na kvadrotor. Ω a Ω_x byly již definovány v části 3.2.1. M jsou momenty, které působí na helikoptéru.

3.2.4 Základní aerodynamické jevy

Níže budou popsány základní aerodynamické jevy, které mají zásadní vliv na chování kvadrotorové helikoptéry. Tyto jevy budou popsány jako síly a momenty.

Základní aerodynamické jevy závisí zejména na otáčkách, resp. úhlové rychlosti ω_i jednotlivých rotorů, hustotě vzduchu a tvaru rotorů. Jako první je definován vztah pro tah rotoru i .

$$T_i = K_T \rho A_{r_i} r_i^2 \omega_i^2 \quad (3.17)$$

Tah je produkován jako síla, která ideálně působí ve směru osy rotoru i , tedy podle osy z' . K_T je koeficient tahu, který je závislý na tvaru rotoru a jeho profilu, ρ je hustota vzduchu, r_i je poloměr rotoru a ω_i je úhlová rychlost rotoru. Pro zjednodušení je tah rotoru i definován jako součin koeficientu tahu k_T a kvadrátu úhlové rychlosti.

$$T_i = k_T \omega_i^2 \quad (3.18)$$

Podobně lze popsat i točivý moment M_i , který je vytvářen rotorem. Moment lze popsat pomocí koeficientu (v tomto případě k_M), kvadrátu úhlové rychlosti rotoru i , momentu setrvačnosti rotoru I_M a derivace úhlové rychlosti rotoru i .

$$M_i = k_M \omega_i^2 + I_M \dot{\omega}_i \quad (3.19)$$

Koeficienty k_T a k_M se dají poměrně snadno zjistit z experimentu na rotoru, který bude na kvadrotorové helikoptěře použit. Celkový tah kvadrotorové helikoptéry lze jednoduše vyjádřit jako sumu tahů všech čtyř rotorů.

$$T = \sum_{i=1}^N |T_i| = k_T \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \quad (3.20)$$

Celkový tah je nejvýznamnější, ale ne jedinou složkou sil, které ovlivňují pohyb kvadrotorové helikoptéry. Celková síla F by se tedy dala popsat následovně:

$$F = Tz' + f \quad (3.21)$$

f v rovnici 3.21 zastupuje další aerodynamické jevy, které budou popsány v části 3.2.5.

Jako další část dynamiky kvadrotorové helikoptéry je potřeba popsat celkový točivý moment M , který způsobuje rotaci kvadrotorové helikoptéry kolem rotačních os.

$$M = \begin{bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$M_\phi = lk_T(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \quad (3.23)$$

$$M_\theta = lk_T(-\omega_1^2 + \omega_3^2) \quad (3.24)$$

$$M_\psi = \sum_{i=1}^4 M_i = \sum_{i=1}^4 (k_M \omega_i^2 + I_M \dot{\omega}_i) \quad (3.25)$$

l je délka ramena kvadrotorové helikoptéry (vzdálenost od středu helikoptéry ke středu rotoru). Rovnice 3.23 a 3.24 jsou platné pouze, pokud je splněn předpoklad, že sousední ramena spolu svírají pravé úhly a mají stejnou délku.

3.2.5 Další aerodynamické jevy

V této části budou popsány další aerodynamické jevy. Při návrhu řízení malé kvadrotorové helikoptéry, která je určena k letu ve vnitřních prostorech, lze tyto jevy zanedbat (nezahrnout do modelu), ale mohou být důležité pro správné pochopení chování této helikoptéry a je nutné s nimi počítat při konstrukci velkého stroje nebo při letu ve vysoké rychlosti.

Třepotání listu rotoru

Třepotání listu rotoru (tzv. „blade flapping“) je jev, ke kterému dochází při horizontálním translačním pohybu rotoru. List, který se pohybuje ve směru letu má vyšší rychlost vůči vzduchu, proto má větší tah a dochází k ohybu listu směrem nahoru. List, který se pohybuje opačným směrem má naopak nižší relativní rychlost a tak dochází k ohybu dolů. To znamená, že za jednu otáčku rotoru kmitne každý list nahoru a dolů.

Kvůli tomu je nutné, aby konce rotoru byly zejména u velkých helikoptér pružné a docházelo k ohybu listů. Pokud by listy nebyly pružné, síla by se přenesla na mechanické vibrace a mohl by se poškodit rotor nebo dokonce samotný letoun. Kvadrotorová helikoptéra, jejíž rotory mají dostatečně pružné

listy, je stabilnější. Stabilita je způsobena tím, že je letoun kvůli ohýbání listů rotoru naklápěn proti směru pohybu.

Indukovaný odpor

Indukovaný odpor (tzv. „induced drag“) působí proti pohybu rotoru a je závislý na relativním větru¹ a úhlu náběhu listu rotoru². Indukovaný odpor je silný v nízkých otáčkách (při pomalém pohybu listu rotoru).

Poruchy v proudění vzduchu

S poruchami proudění je nutné počítat při letu ve venkovních prostorech, kde se mění povětrnostní podmínky (jde např. o nárazový vítr nebo různé větrné víry). Není možné je jednoduše zahrnout do modelu a proto je nutné pro outdoorové kvadrotory navrhnout robustní řízení.

3.2.6 Kompletní matematický model

V této části bude představen matematický model kvadrotorové helikoptéry, který byl vytvořen na základě rovnic z 3.2.3, do kterých byly dosazeny vztahy z 3.2.4.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{\Omega_x} \frac{T}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = I^{-1} \left(- \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{\phi} \\ I_{yy}\dot{\theta} \\ I_{zz}\dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} lk_T(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ lk_T(-\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ \sum_{i=1}^4 -1^{i+1}k_M\omega_i^2 \end{bmatrix} \right) \quad (3.27)$$

U momentu M_ψ je zanedbána složka $I_M\dot{\omega}_i$, jelikož setrvačnost rotorů nemá větší vliv na přesnost modelu a -1^{i+1} je do vztahu přidána kvůli zohlednění

¹zdánlivý vítr, který má směr proti pohybu listu rotoru

²úhel, který svírá tětíva listu rotoru s vektorem, který udává směr relativního větru

směru rotace každého rotoru (určuje směr působení momentu). Do modelu nebyly zahrnuty aerodynamické síly f , které jsou zmíněny v části 3.2.5. Rovnice 3.15 byla vydělena m a po této úpravě byl získán vztah pro zrychlení kvadrotoru 3.26. Rovnice 3.16 byla vynásobena inverzní maticí setrvačnosti I^{-1} a byl získán vztah vyjadřující úhlové zrychlení kvadrotoru 3.27.

3.3 Model na základě bloků *SimMechanics*

V této části se budeme věnovat popisu modelu pomocí nástroje *SimMechanics*. Nejprve bude představen samotný *SimMechanics*, poté budou popsány části modelu kvadrotorové helikoptéry a jejich parametry. Tento model je vytvořen zejména kvůli porovnání s matematickým modelem, který byl vytvořen v části 3.2.

3.3.1 Knihovna *SimMechanics*

Knihovna bloků *SimMechanics* se nachází v programu *MATLAB*. Je integrována do prostředí *Simulink* a je částí většího balíku *Simscape*, který obsahuje několik knihoven pro modelování (např. hydraulických a elektronických systémů).

Modelování pomocí *SimMechanics* [4] je založeno na principu práce se soustavou tuhých těles, která jsou propojena vzájemnými vazbami. Při modelování tedy není potřeba zabývat se odvozováním pohybových rovnic. Model se vytváří tak, že se pouze zadávají geometrické vlastnosti těles a vazby mezi nimi.

Výhodou integrace s prostředím *Simulink* je, že můžeme propojovat modely v *SimMechanics* s jinými modely, které nejsou v *SimMechanics* vytvořeny. Této vlastnosti bude využito při vytváření modelu kvadrotorové helikoptéry, jelikož její tělo bude vytvořeno pomocí několika tuhých těles v *SimMechanics*, ale silové a momentové působení rotorů bude popsáno ve standardních blocích *Simulinku*.

3.3.2 Model prostředí

Základem modelu je blok *Machine Environment*, ve kterém lze popsat prostředí pro simulaci (např. vektor gravitace, dimenzi, způsob řešení, zaokrouhlování a vizualizaci modelu).

Část, která je připojena na *Machine Environment*, je blok *Ground*, ve kterém lze definovat polohu země a umožnit připojení pomyslného spoje (tzv. *Joint*) mezi tělesem a zemí. V knihovně je více druhů spojů. Mezi základní spoje patří *Prismatic*, který umožňuje translační pohyb tělesa po jedné ose, a *Revolute*, který umožňuje rotační pohyb tělesa kolem jedné osy. Oba bloky poskytují tělesu jeden stupeň volnosti.

Kvadrotorová helikoptéra má však šest stupňů volnosti (tři pro translaci a tři pro rotaci) a tak je nutné použít spoj, který nám tolik stupňů poskytne. Potřebné vlastnosti má blok *Six-DoF*. Na tento blok již můžeme navázat bloky typu *Body*.

3.3.3 Model kvadrotorové helikoptéry

Kvůli podobnosti s matematickým modelem budeme uvažovat, že helikoptéra se skládá z pěti těles. Jedno těleso je střed kvadrotoru a čtyři zbylé bychom mohli považovat za motory/zakončení ramen. Ramena helikoptéry uvažujeme pevná, tedy neohebná.

Základem kvadrotoru je tedy jeho střed a proto je do modelu přidán blok typu *Body*, který zastupuje těleso. Tento blok je pojmenován pro přehlednost *centre*. Před prací s blokem je nejprve potřeba nastavit počet portů, které bude mít. První port je potřeba pro spojení *Six-DoF*, další čtyři pro připojení ramen a poslední pro připojení senzorů, které zjišťují úhlovou rychlost a zrychlení tělesa *centre*.

Na blok *centre* jsou připojeny čtyři části, které znázorňují ramena a rotory kvadrotoru. Rameno je znázorněno vždy pevným spojením typu *Joint*, který se nazývá *Weld* („svár“) a blokem *Body*, které je jeho zakončením. Bloky *Weld* a *Body* jsou označeny číslovkou, která koresponduje s číslem rotoru.

Rotor i je znázorněn jako subsystém *Force and torque*, který je složen z rovnic působících sil a momentů. Rovnice vycházejí ze vztahů 3.18 a 3.19. Tah je síla, kterou produkuje rotor ve směru osy z' a je popsán takto:

$T_i = k_T \omega_i^2$. Moment, který rotor vytváří kolem osy z' je popsán stejně jako v matematickém modelu zjednodušeně $M_i = k_M \omega_i^2$ a přenásoben podle směru rotace rotoru. Vstupní hodnota tohoto subsystému jsou otáčky za minutu daného rotoru.

Subsystémy *Force and torque* působí na tělesa *Body* skrze bloky *Body Actuator*, které dokáží na dané těleso přenášet v určitém směru moment a sílu.

Jak je zmíněno výše, na blok *centre* je ještě připojen senzor, na jehož výstupu jsou okamžité hodnoty zrychlení a úhlové rychlosti. Tento senzor je zastoupen blokem *Body Sensor*.

3.3.4 Schémata a nastavení modelu

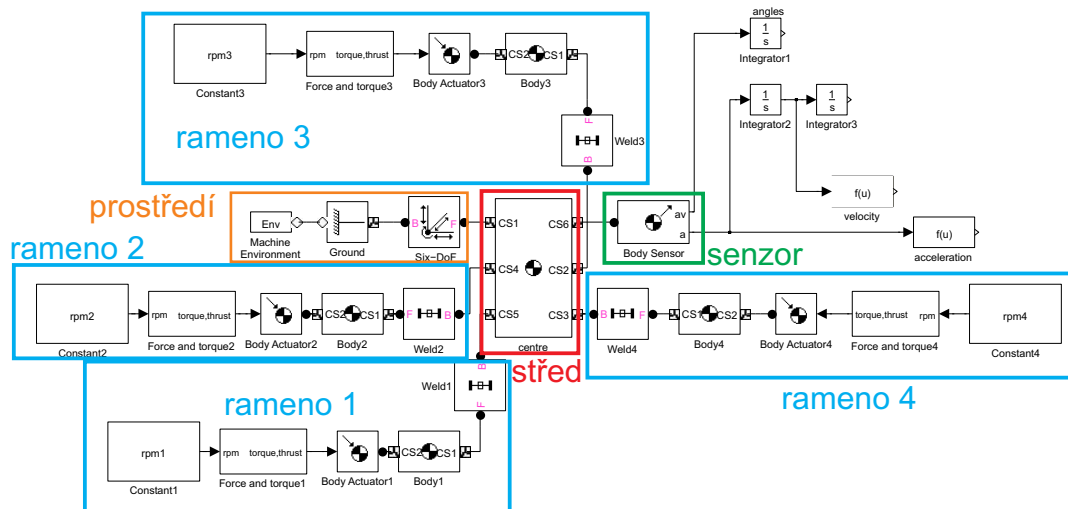
V částech 3.3.2 a 3.3.3 byly popsány části ze kterých se skládá model kvadrotorové helikoptéry v *SimMechanics* a jejich vzájemné propojení. Zde budou uvedena upravená schémata modelu, která byla vytvořena na základě zobrazení modelu v *Simulinku*, a nastavení modelu.

Schémana modelu

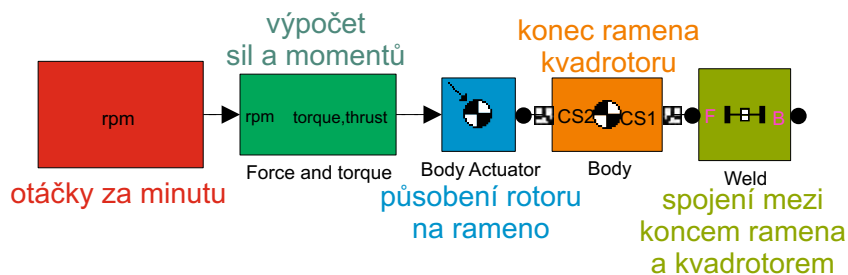
Schémana na obrázku 3.9 zobrazuje celý model. Jsou v něm barevně označeny celky, které byly popsány v části 3.3.2 a 3.3.3. Na schématu jsou také znázorněny bloky, které jsou připojeny na senzor a na jejich výstupech jsou signály s rychlostí, polohou, skalárem rychlosti a úhlem kvadrotoru.

Na dalším schématu na obrázku 3.10 jsou popsány bloky, které znázorňují rameno kvadrotoru. Tato část je připojena skrze spojení *Weld* ke středu kvadrotoru.

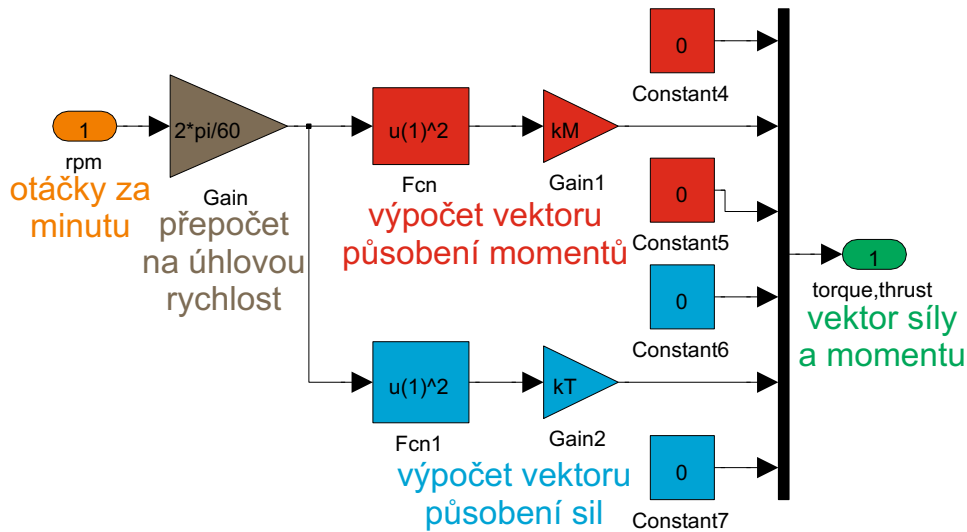
Poslední schéma je na obrázku 3.11 a popisuje subsystém *Force and torque*, jež vypočítává na základě otáček za minutu rotoru momenty a síly, které daný rotor vytváří. Na obrázku je výpočet sil a momentů rotoru, který se točí po směru hodinových ručiček. Pokud bychom chtěli výpočet pro opačný směr, museli bychom do bloku *Gain1* dosadit místo konstanty kM konstantu přenásobenou -1 , tedy $-kM$.



Obrázek 3.9: Schéma celého modelu v *SimMechanics*, kde jsou barevně označeny a popsány základní části



Obrázek 3.10: Schéma ramena kvadrotoru v *SimMechanics*



Obrázek 3.11: Schéma subsystému *Force and torque* z modelu v *SimMechanics*

Nastavení modelu

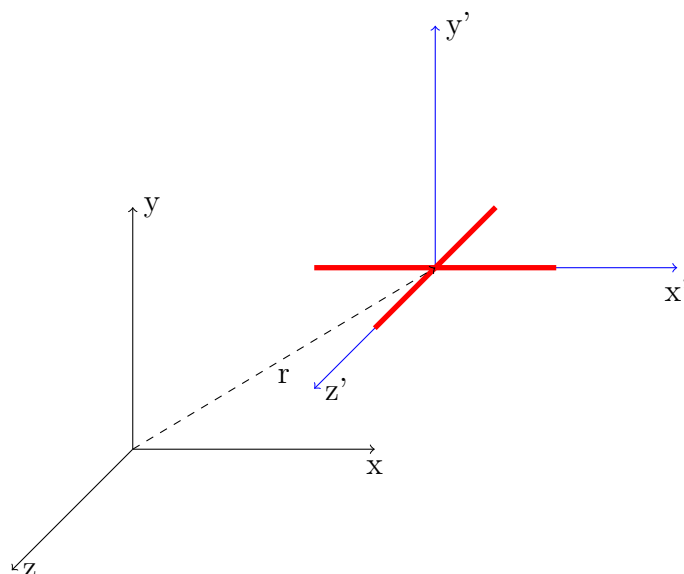
Výše bylo ukázáno jak má model vypadat, z kterých bloků se skládá a jak mají být pospojovány do sebe. V této části bude popsáno nastavení modelu tak, aby fungoval srovnatelně s matematickým modelem z části 3.2.

Nejprve je nutné poukázat na to, že má *SimMechanics* v původním nastavení jinak popsané osy, než je tomu u matematického modelu. Pro zjednodušení tvorby modelu se nastavení nebude měnit. Popis os bude zohledněn při simulaci v části ?? a hodnoty z modelu v *SimMechanics* budou převedeny do stejného popisu, jako má matematický model (viz obrázek 3.4). Pro názornost je souřadnicový systém, který je použitý v *SimMechanics* zakreslen na obrázku 3.12.

Kvůli tomuto nastavení působí gravitační síla G v modelu po ose y . Momenty rotorů a jejich tah působí kolem a po ose y' . Dále musí mít matice setrvačnosti I odlišný tvar než u matematického modelu. Pokud necháme hodnoty I_{xx} , I_{yy} a I_{zz} stejné, tak musí mít matice následující tvar:

$$I = \begin{bmatrix} I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} \end{bmatrix}$$

Ramena kvadrotoru mají souřadnice dané také jinak, tedy např. rotor č. 1



Obrázek 3.12: Souřadnicový systém kvadrotorové helikoptéry v *SimMechanics*

se nachází na souřadnicích $[0 \ 0 \ l]$ a č. 2 na $[0 \ -l \ 0]$ relativně od středu kvadrotoru v souřadnicovém systému kvadrotoru.

Aby byla u modelu zachována podobnost s matematickým modelem, tak je matice setrvačnosti I a hmotnost m přiřazena do tělesa *center*, tedy do středu kvadrotoru.

Tělesa na konci ramen mají hmotnost rovnou nule a jejich matice setrvačnosti je rovna nulové matici 3×3 , jde tedy pouze o nehmotné body, na které působí síla a moment, které jsou dále přenášeny na hmotný střed kvadrotoru.

Na výstupu senzoru je měřitelné zrychlení v jednotkách $m \cdot s^{-2}$ a úhlová rychlost v $rad \cdot s^{-1}$.

4 Návrh řízení

V této kapitole bude na základě matematického modelu z části 3.2 navrženo řízení kvadrotorové helikoptéry. Výsledný regulátor by měl být schopen stabilizace kvadrotorové helikoptéry. Nejprve bude navržen regulátor, který řídí rotaci kvadrotoru a poté bude navržen regulátor, který se bude starat o udržení kvadrotoru v určité výšce. Nakonec budou provedeny simulace na regulovaném matematickém modelu a na regulovaném simulačním modelu s bloky *SimMechanics*.

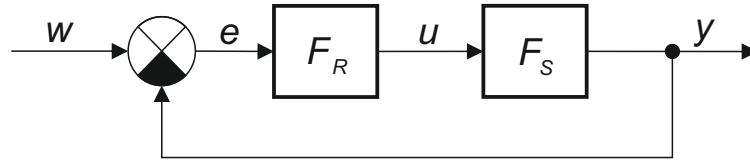
4.1 Princip řízení kvadrotoru

Problém řízení kvadrotoru je v tom, že vstupy systému jsou pouze čtyři (úhlová rychlost rotorů), ale chceme jimi řídit pohyb helikoptéry v šesti rozměrech (tři osy rotace a tři osy translace). Takový systém je tzv. „underactuated“.

Z popisu v části 3.1 a 3.2.4 vyplývá, že tah rotoru T je síla, která působí ve směru z' . Dále bylo popsáno, že rotaci kolem tří os lze ovlivňovat momenty M . Tah T je popsán v rovnici 3.20 a moment M je popsán vztahem 3.22. Z těchto vztahů lze vypožorovat, že jsou závislé na úhlové rychlosti rotorů. Na jejich základě lze tedy sestavit soustavu rovnic. Rovnice má následující tvar:

$$\begin{bmatrix} T \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_T & k_T & k_T & k_T \\ 0 & -lk^T & 0 & -lk^T \\ -lk_T & 0 & lk_T & 0 \\ k_M & -k_M & k_M & -k_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ze vztahu 4.1 je možné podle úhlových rychlostí rotorů ω_i a parametrů kvadrotoru l , k_T a k_M dopočítat jednotlivé momenty a tah. Úpravou lze ale získat vztah opačný, tedy výpočet požadované úhlové rychlosti rotorů, který



Obrázek 4.1: Regulační schéma

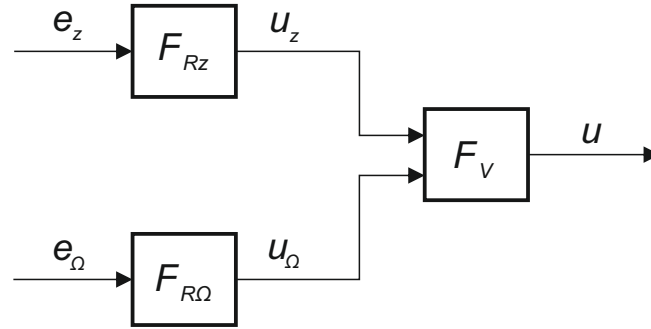
bude užitečný pro řízení kvadrotoru.

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4k_T} & 0 & -\frac{1}{2lk_T} & \frac{1}{4k_M} \\ \frac{1}{4k_T} & -\frac{1}{2lk_T} & 0 & -\frac{1}{4k_M} \\ \frac{1}{4k_T} & 0 & \frac{1}{2lk_T} & \frac{1}{4k_M} \\ \frac{1}{4k_T} & \frac{1}{2lk_T} & 0 & -\frac{1}{4k_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Úlohu stabilizace kvadrotorové helikoptéry lze rozdělit na dvě části. První část je řízení rotace kvadrotoru tak, aby úhly ψ a θ byly nulové. Další část je řízení polohy tak, aby helikoptéra vystoupala do požadované výšky (osa z) a dále výšku udržovala.

Regulační schéma je popsáno na obrázku 4.1. Jde o regulační schéma se zápornou zpětnou vazbou, kde F_R je regulátor, F_S řízený systém (v našem případě model kvadrotorové helikoptéry), w požadovaná veličina, e regulační odchylka, u řízení a y je výstup řízeného systému F_S .

Na obrázku 4.2 jsou části, ze kterých se skládá regulátor F_R . Blok, který je označený jako F_V , je přepočítání signálu na požadované otáčky rotorů (byl zmíněn výše v této části). $F_{R\Omega}$ je regulátor, který má na vstupu odchylku e_Ω a na výstupu signál u_Ω , který obsahuje požadovaný moment M . Požadovanou výšku udržuje regulátor F_{Rz} . Na jeho vstupu je odchylka e_z . Na výstupu je signál u_z , což je požadovaný tah T .

Obrázek 4.2: Schéma regulátoru F_R

4.2 Návrh regulátoru pro řízení rotace kvadrotoru

V této části bude navržen PD regulátor $F_{R\Omega}$, který bude řídit rotaci kvadrotorové helikoptéry. PD regulátor je složen z proporcionální a derivační složky. Derivační složka je složena z derivace vstupního signálu, který je vynásoben parametrem K_D . V našem případě označíme parametr jako $K_{D,\Omega}$. Proporcionální složka se skládá ze vstupního signálu a parametru K_P . V regulátoru rotace bude označena jako $K_{P,\Omega}$.

Nejprve je potřeba určit regulační odchylku, která je vstupem regulátoru. Odchylku rotace lze popsat jako

$$e_{\Omega_x} = \frac{1}{2}((e^{\Omega_x^*})^T e^{\Omega_x} - (e^{\Omega_x})^T e^{\Omega_x^*}), \quad (4.3)$$

kde Ω_x je aktuální natočení a Ω_x^* je požadované. e^{Ω_x} je rotační matice, která byla použita v matematickém modelu. Výsledné e_{Ω_x} by mělo být ve formě symetrické matice která popisuje rotaci z e^{Ω_x} do $e^{\Omega_x^*}$. Pro lineární regulátor je potřeba regulační odchylku e_{Ω_x} linearizovat. Tato linearizace bude provedena pro úhly ϕ a θ a úhlové rychlosti, které se blíží nule.

Pro potřeby linearizace lze rozdělit rotaci e^{Ω_x} na rotaci kolem osy z' $e^{\Omega_x}(\psi)$ a kolem x' a y' $e^{\Omega_x}(\phi, \theta)$. Následně můžeme provést linearizaci pro $(\psi, \phi, \theta) = (\psi_0, 0, 0)$. Výsledkem linearizace je

$$e^{\Omega_x} = e^{\Omega_x}(\psi_0 + \Delta\psi)e^{\Omega_x}(\Delta\phi, \Delta\theta) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & \Delta\theta \cos \psi + \Delta\phi \sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi & \Delta\theta \sin \psi - \Delta\phi \cos \psi \\ -\Delta\theta & \Delta\phi & 1 \end{bmatrix},$$

kde $\psi = \psi_0 + \Delta\psi$ a pokud dosadíme za rotační matice linearizovaný vztah, tak zjistíme, že regulační odchylka e_{Ω_x} má tvar

$$e_{\Omega_x} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\psi & -\Delta\theta \\ -\Delta\psi & 0 & \Delta\phi \\ \Delta\theta & -\Delta\phi & 0 \end{bmatrix}.$$

Tento tvar je podobný matici 3.11 a lze jej zapsat jako vektor. Výsledná odchylka bude vzhledem k tomuto faktu počítána jako rozdíl požadovaných úhlů Ω^* a aktuálních úhlů Ω , tedy

$$e_{\Omega} = \begin{bmatrix} \phi^* - \phi \\ \theta^* - \theta \\ \psi^* - \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Následně je možné sestavit regulátor $F_{R\Omega}$, který má tvar

$$u_{\Omega} = -K_{P,\Omega}e_{\Omega} - K_{D,\Omega}\dot{e}_{\Omega}. \quad (4.5)$$

Regulátor $F_{R\Omega}$ pracuje s odchylkou v soustavě kvadrotoru a je určen pro menší úhlové odchylky a úhlovou rychlost blížící se nule. Pokud bychom chtěli kvadrotorovou helikoptéru řídit za jiných podmínek, bylo by potřeba navrhnout jiný regulátor.

4.3 Návrh regulátoru pro řízení letové výšky

Další požadavek pro stabilizaci kvadrotorové helikoptéry je udržovat požadovanou výšku (tedy stálou polohu na ose z). To znamená, že $\dot{z} = \ddot{z} = 0$. Na řízení výšky bude použit regulátor F_{Rz} , který bude také PD regulátorem. Pro jeho návrh musíme tentokrát provést linearizaci rovnice 3.27. Linearizace bude provedena pro $r = r^*$, $\phi = \theta = 0$, $\psi = \psi^*$, $\dot{r} = 0$ a $\dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$ při vstupu $u_z = mg$ a $u_{\Omega} = 0$.

Výsledek linearizace je

$$\ddot{x} = g(\Delta\theta \cos \psi^* + \Delta\phi \sin \psi^*), \quad (4.6)$$

$$\ddot{y} = g(\Delta\theta \sin \psi^* - \Delta\phi \cos \psi^*), \quad (4.7)$$

$$\ddot{z} = \frac{u_z}{m} - g. \quad (4.8)$$

Na základě lineárních rovnic jsme schopni sestavit regulátor F_{Rz} .

$$u_z = m(g + \ddot{z}^* + K_{D,z}(\dot{z}^* - \dot{z}) + K_{P,z}(z^* - z)) \quad (4.9)$$

Tento regulátor ovlivňuje pouze tah rotorů a tím stoupání kvadrotoru. $K_{D,z}$ a $K_{P,z}$ jsou parametry regulátoru F_{Rz} . Z lineárních rovnic 4.6 a 4.7 ale můžeme vyjádřit i vztah, který bude na základě zrychlení \ddot{x} a \ddot{y} vypočítávat požadovaný úhel ϕ^* a θ^* tak, aby zrychlení na ose x a y bylo nulové.

$$\phi^* = \frac{1}{g}((\ddot{x}^* - \ddot{x}) \sin \psi^* - (\ddot{y}^* - \ddot{y}) \cos \psi^*), \quad (4.10)$$

$$\theta^* = \frac{1}{g}((\ddot{x}^* - \ddot{x}) \cos \psi^* + (\ddot{y}^* - \ddot{y}) \sin \psi^*), \quad (4.11)$$

kde ψ^* je požadované natočení kolem osy z' a za $\Delta\phi$ a $\Delta\theta$ bylo dosazeno ϕ^* a θ^* . Pokud chceme, aby byla zrychlení na osách x a y nulová, tak musíme za \ddot{x}^* a \ddot{y}^* v rovnicích 4.10 a 4.11 dosadit nulu. Přes tyto hodnoty bychom mohli také řídit let kvadrotorové helikoptéry požadovaným směrem.

4.4 Simulace

V této části bude proveden test regulátoru na třech modelech. První model je matematický a je implementovaný v prostředí *Simulink* na základě rovnic 3.26 a 3.27. Druhý model je také matematický a vychází z předešlého modelu. Od předchozího modelu se odlišuje tím, že místo rotační matice $e^{\Omega x}$ používá rotační matici R , která byla popsána ve vztahu 3.6. Poslední model je vytvořen pomocí knihovny *Simscape/SimMechanics* a byl popsán v části 3.3.

Test bude proveden jako simulaci v prostředí *Simulink*. Cílem simulace bude zaznamenat chování jednotlivých modelů s řízením $F_{R\Omega}$ a F_{Rz} po dobu 3 s pro počáteční podmínky $\Omega_0 = [\pi/6, \pi/4, \pi/8]^T$ a $r_0 = [0, 0, 0]^T$ a požadované hodnoty $\psi^* = \pi/4$ rad a $z^* = 2$ m. Po dobu simulace bude zaznamenán regulovaný vstup u , který odpovídá požadovaným otáčkám rotorů v modelu, a hodnoty Ω a r .

4.4.1 Parametry modelu a regulátorů

Než bude spuštěna simulace, tak je potřeba určit hodnoty parametrů pro model kvadrotoru a pro parametry regulátoru. Hodnoty pro model jsou v ta-

parametr	hodnota	jednotky
g	9,81	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
m	0,468	kg
l	0,225	m
k_T	$2,980 \cdot 10^{-6}$	
k_M	$1,140 \cdot 10^{-7}$	
I_{xx}	$4,856 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
I_{yy}	$4,856 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
I_{zz}	$8,801 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

Tabulka 4.1: Hodnoty parametrů kvadrotorové helikoptéry.

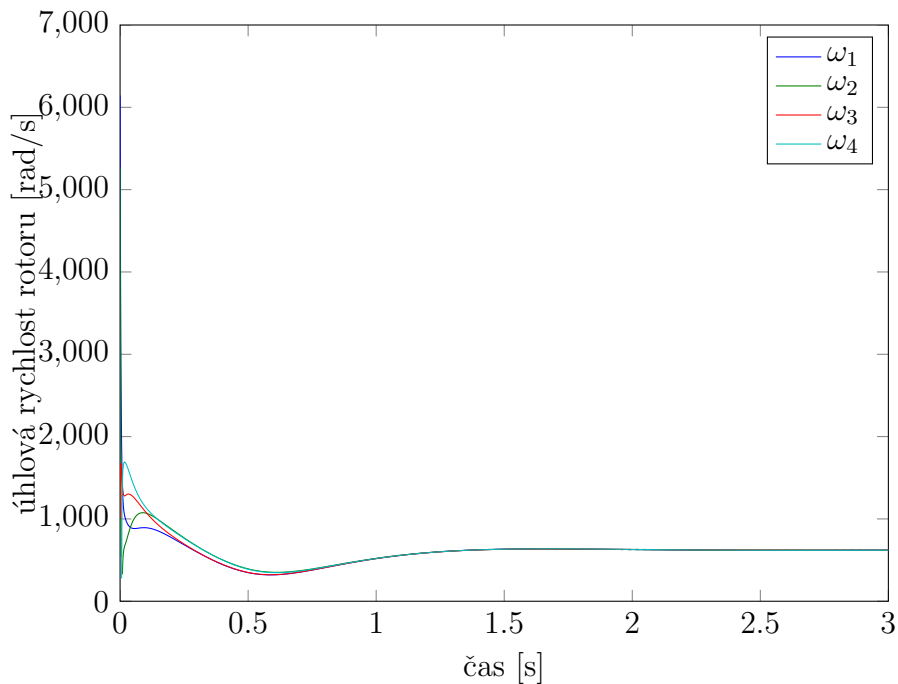
parametr	hodnota
$K_{D,\Omega}$	3
$K_{P,\Omega}$	15
$K_{D,z}$	5
$K_{P,z}$	15

Tabulka 4.2: Hodnoty parametrů PD regulátorů $F_{R\Omega}$ a F_{Rz} .

bulce 4.1 a byly převzaty z [9]. Hodnoty pro regulátor byly určeny experimentálně řadou simulací na matematickém modelu kvadrotorové helikoptéry a nacházejí se v tabulce 4.2. Nastavení regulátoru bylo provedeno s požadavkem, aby regulátor $F_{R\Omega}$ bez překmitu doreguloval postupně úhly ϕ , θ a ψ o hodnotu $\pi/4$, tedy 45° za dobu 2 s s odchylkou v řádu 10^{-5} rad. Regulátor F_{Rz} byl nastaven tak, aby řídil stoupaní z 0 m do 1 m s požadavkem, že dojde pouze k mírnému překmitu a doba regulace bude při odchylce v řádu 10^{-3} trvat 2 s.

4.4.2 Simulace řízeného matematického modelu kvadrotorové helikoptéry s rotační maticí $e^{\Omega x}$

Jako první byly provedeny simulace na matematickém modelu s rotační maticí $e^{\Omega x}$. Výsledky simulace jsou na obrázcích 4.3, 4.4 a 4.5. Na obrázku 4.3 lze vypořadovat, že má řízení velmi rychlý náběh. To je způsobeno nastavením regulátoru pro rychlou regulaci. Můžeme vypořadovat, že přibližně v čase 0,5 s dochází k ustalování otáček všech čtyř rotorů. Na obrázku 4.4 je vidět, že kvadrotor vystoupá do výšky 2 m (osa z) a zejména na ose x je pozorovatelné, že zrychlení je po ustálení nulové a kvadrotor se pohybuje

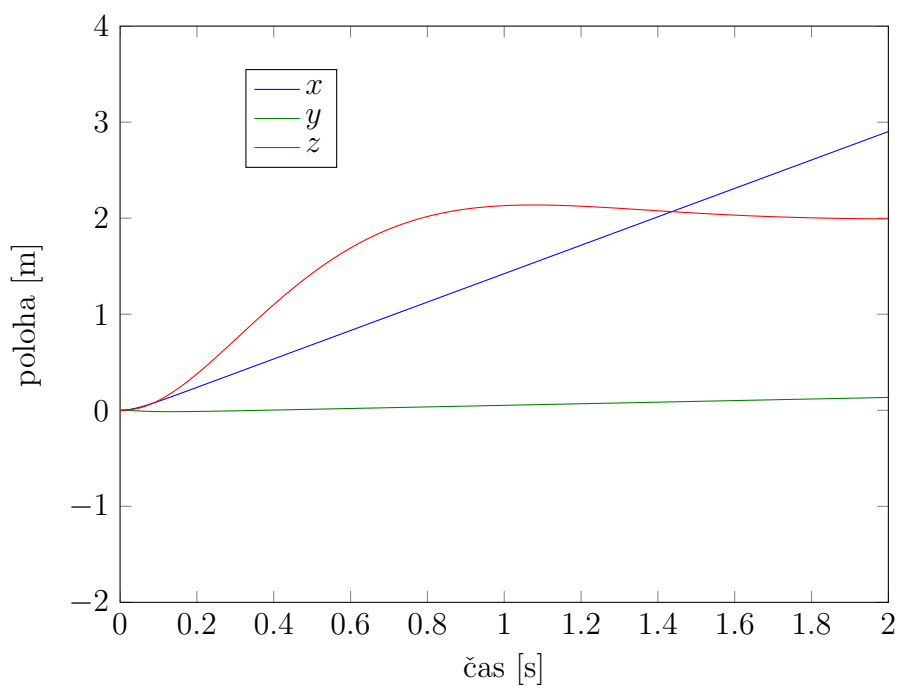


Obrázek 4.3: Řízení kvadrotoru při simulaci na mat. modelu

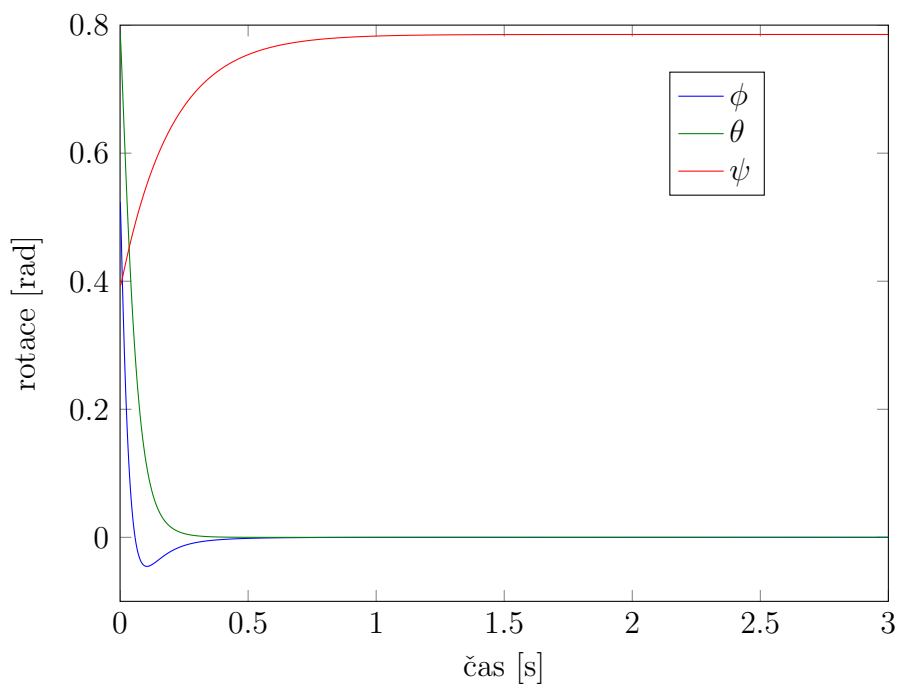
pouze setrvačností s konstantní rychlostí \dot{x} . Na obrázku 4.5 je vyobrazena rotace v matematickém modelu kvadrotorové helikoptéry. Její změna na požadované hodnoty probíhá velmi rychle. Je to způsobeno zejména tím, že byl regulátor $F_{R\Omega}$ nastaven na regulaci s větší odchylkou.

4.4.3 Simulace řízeného matematického modelu kvadrotorové helikoptéry s rotační maticí R

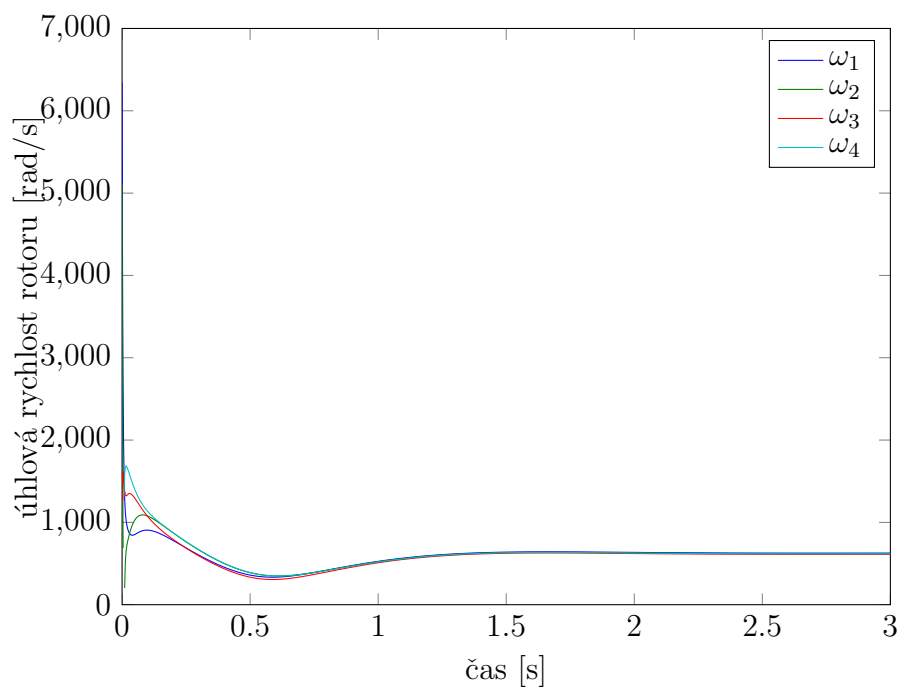
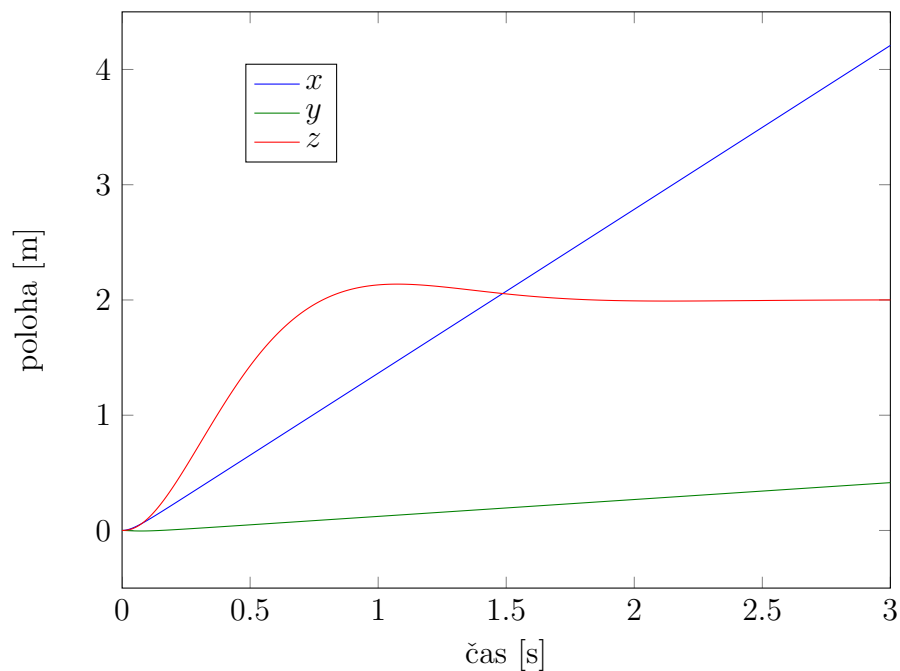
Další simulace je provedena na řízeném matematickém modelu kvadrotorové helikoptéry s rotační maticí R (viz rovnice 3.6). Výsledné grafy se nacházejí na obrázcích 4.6, 4.7, 4.8. Regulace úhlů proběhla rychleji než v předchozí simulaci (bez výrazného překmitu na úhlu ϕ). Požadovaná výška byla také dosažena rychleji, ale za cenu větší rychlosti na ose x .

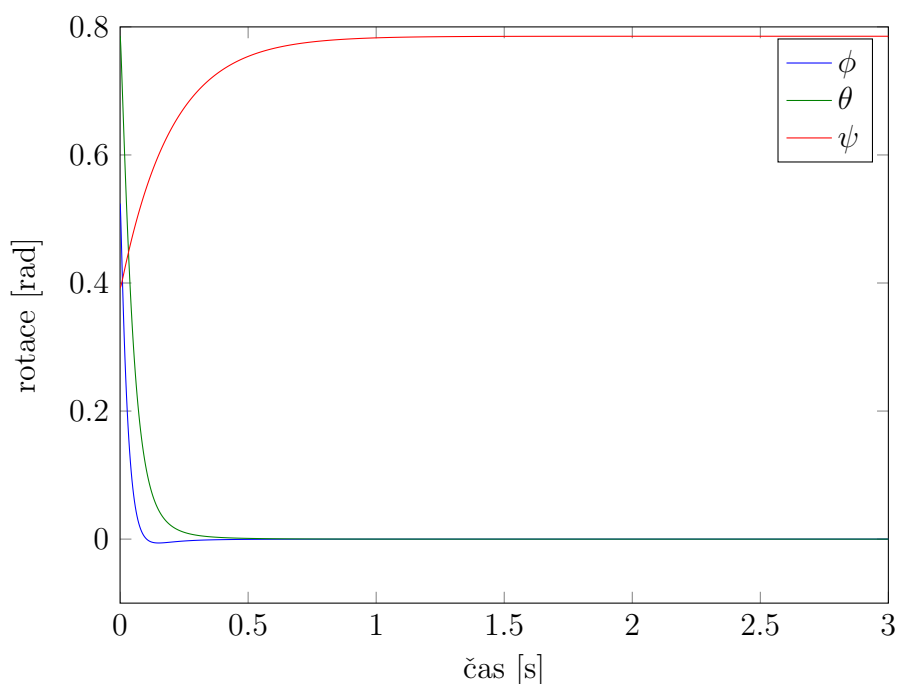


Obrázek 4.4: Poloha kvadrotoru při simulaci na mat. modelu



Obrázek 4.5: Natočení kvadrotoru při simulaci na mat. modelu

Obrázek 4.6: Řízení kvadrotoru při simulaci na mat. modelu s rot. maticí R Obrázek 4.7: Poloha kvadrotoru při simulaci na mat. modelu s rot. maticí R



Obrázek 4.8: Natočení kvadrotoru při simulaci na mat. modelu s rot. maticí R

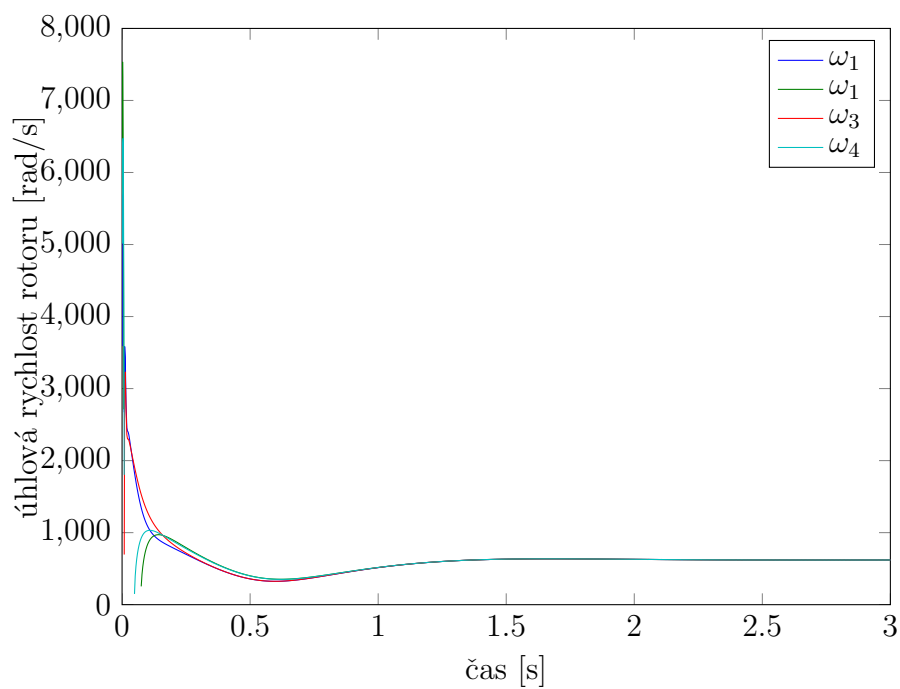
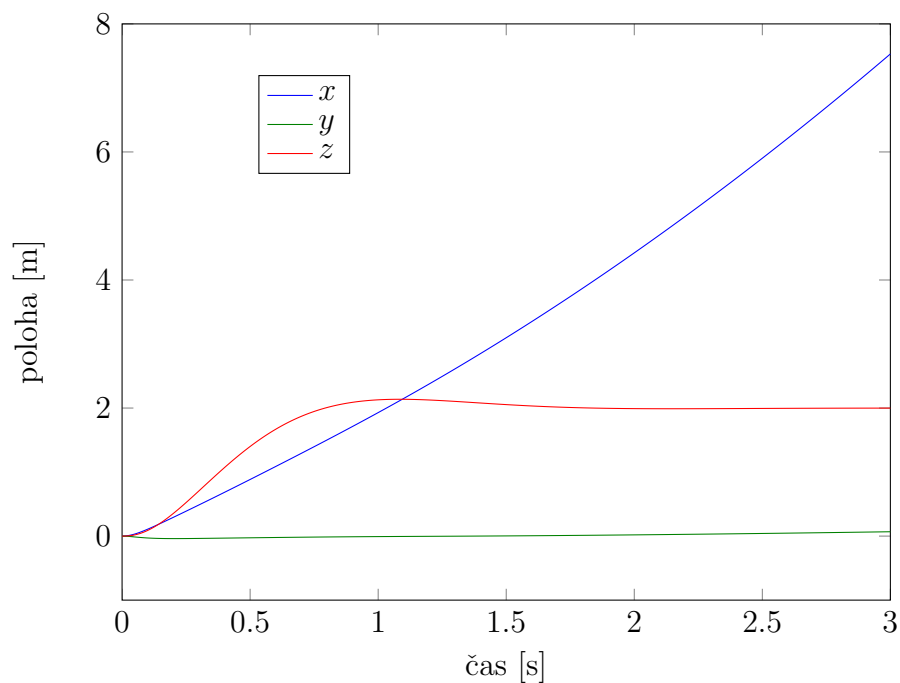
4.4.4 Simulace řízeného modelu se *SimMechanics*

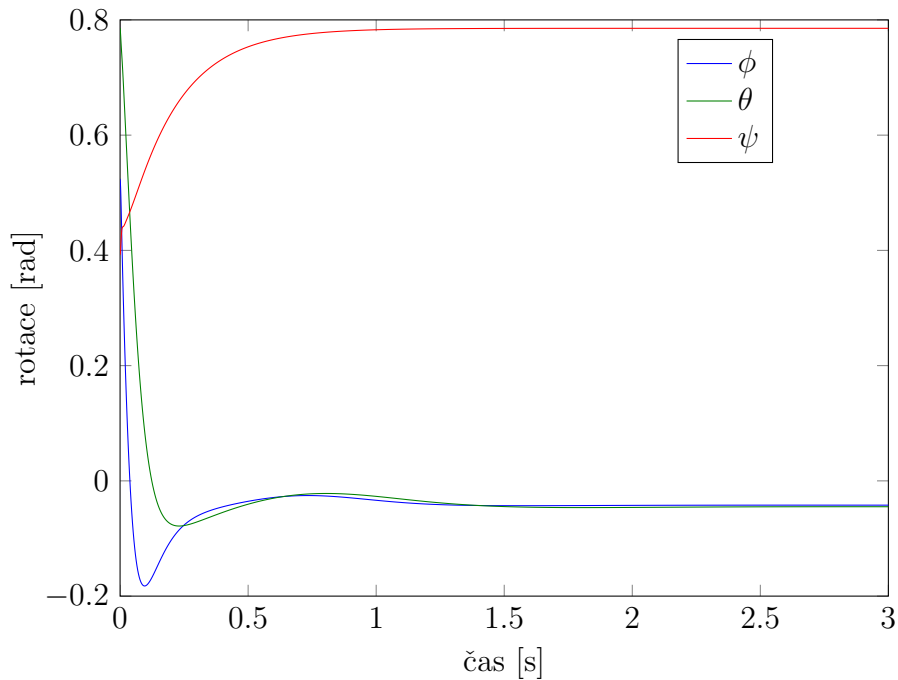
Poslední simulace je provedena na řízeném modelu vytvořeném pomocí knihovny *SimMechanics*. Výsledky simulace jsou vyobrazeny na obrázcích 4.9, 4.10, 4.11. Na obrázku 4.10 lze vypořadovat, že pohyb po ose x neprobíhá s konstantní rychlostí. Kvůli tomu byla při simulaci v daném směru uražena větší vzdálenost. Na obrázku 4.11 je vidět, že na ϕ dochází k výraznému překmitu. I přes tyto odchylky ale regulátor pracuje s modelem v *SimMechanics* uspokojivě.

4.4.5 Porovnání výstupů u jednotlivých modelů

V této části budou navzájem porovnány výstupy z jednotlivých simulací. Výstupy budou porovnány na základě absolutní hodnoty rozdílu vždy po dvojicích.

Na obrázcích 4.12, 4.13 a 4.14 je uveden rozdíl v poloze kvadrotoru. Rozdíl na ose z je na všech obrázcích po chvíli nulový. Je to způsobeno tím, že jsou

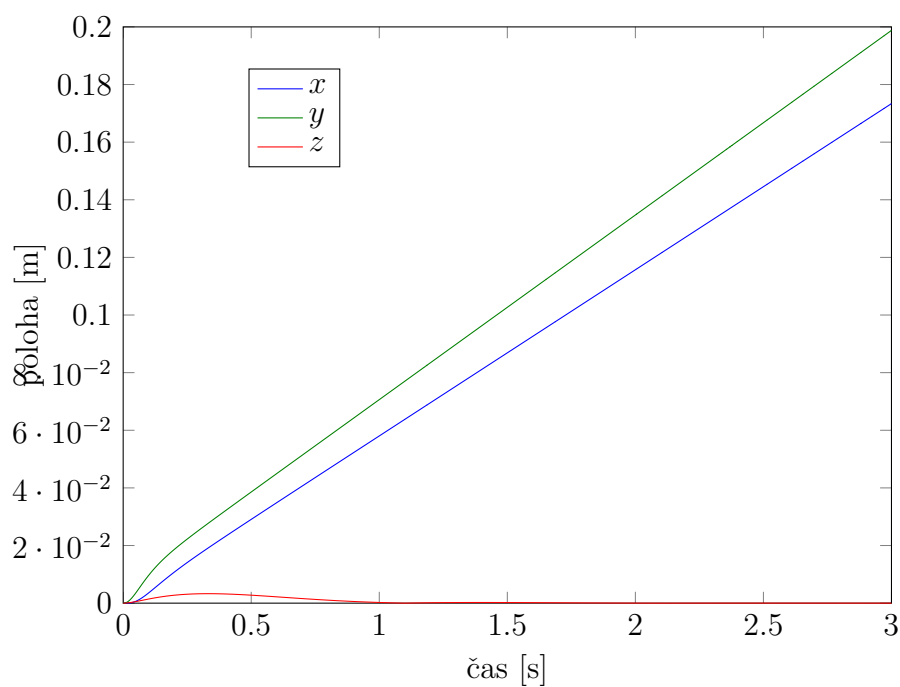
Obrázek 4.9: Řízení kvadrotoru při simulaci na modelu v *SimMechanics*Obrázek 4.10: Poloha kvadrotoru při simulaci na modelu v *SimMechanics*



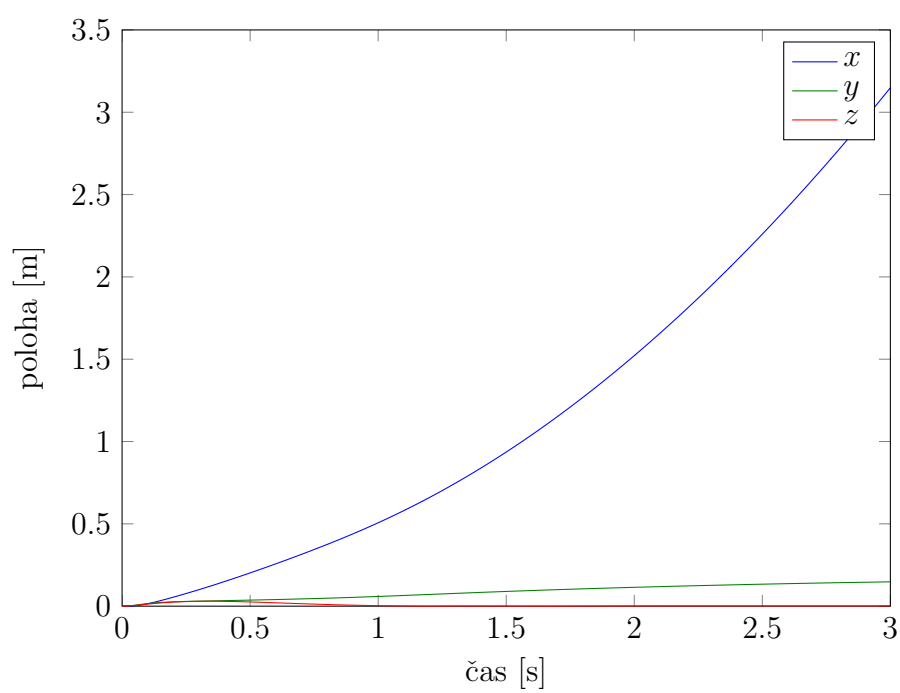
Obrázek 4.11: Rotace kvadrotoru při simulaci na modelu v *SimMechanics*

všechny modely regulovány na této ose na stejnou hodnotu. Při porovnání dvou matematických modelů (obrázek 4.12) vidíme, že rozdíl na ose x a y roste lineárně, což znamená, že se modely na osách vzdalují konstantní rychlostí. Jak už bylo řečeno, pohyb na osách x a y je regulováno pouze na základě zrychlení a to pouze nepřímo přes regulátor $F_{R\Omega}$. To znamená, že malá odchylka ve zrychlení na začátku může způsobit rozdíl v poloze obou modelů. Odchylka při porovnání mat. modelů s modelem v *SimMechanics* (obrázky 4.13 a 4.14) je zejména na ose x nelineární. To může být způsobeno odlišnou vnitřní dynamikou modelu a nebo odlišným přepočtem rotace.

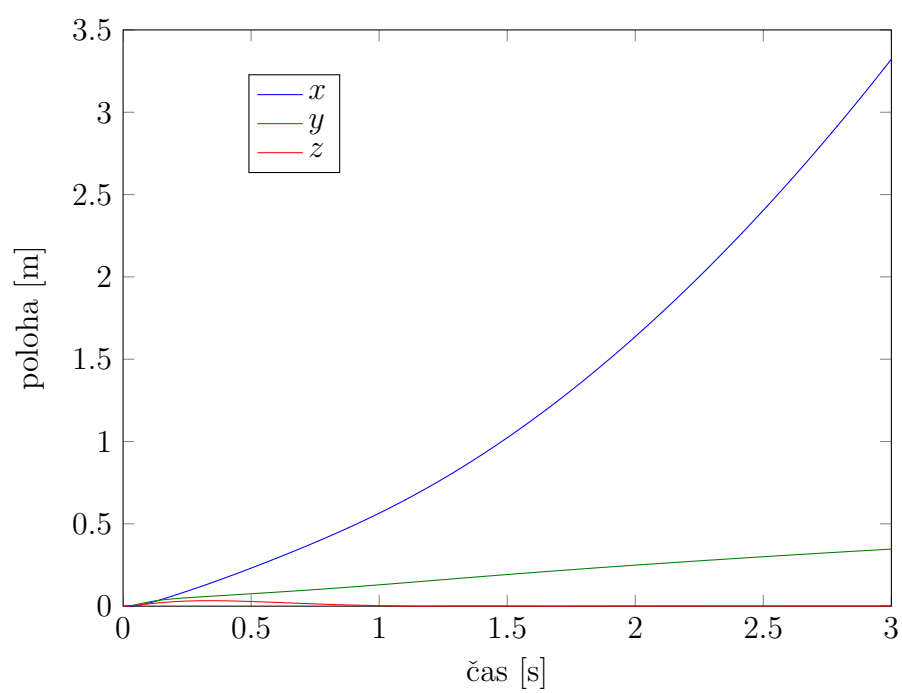
Na obrázcích 4.15, 4.16 a 4.17 je prezentován rozdíl v rotaci kvadrotoru. V tomto případě jsou všechny hodnoty řízeny regulátorem a tak nejsou odchylky tak velké. Při porovnání matematických modelů (obrázek 4.15) pozorujeme rozdíl na počátku simulace, poté je vše odregulováno na požadované hodnoty a tak se rozdíl blíží k nule. Jinak je tomu při porovnání se *SimMechanics* modelem. Rozdíl je při porovnání s oběma matematickými modely podobný a můžeme pozorovat, že se odchylka po čase ustálí kolem hodnoty $4 \cdot 10^{-2}$, což je přibližně $2,3^\circ$. Budeme-li předpokládat, že úhly ϕ a θ byly doregulovány k nulovým hodnotám, pak je kvadrotor v modelu v *SimMechanics* odchýlen od požadované polohy o $2,3^\circ$. Jelikož se regulátor snaží

Obrázek 4.12: Rozdíl polohy mat. modelu s maticí e^{Ω_x} a R

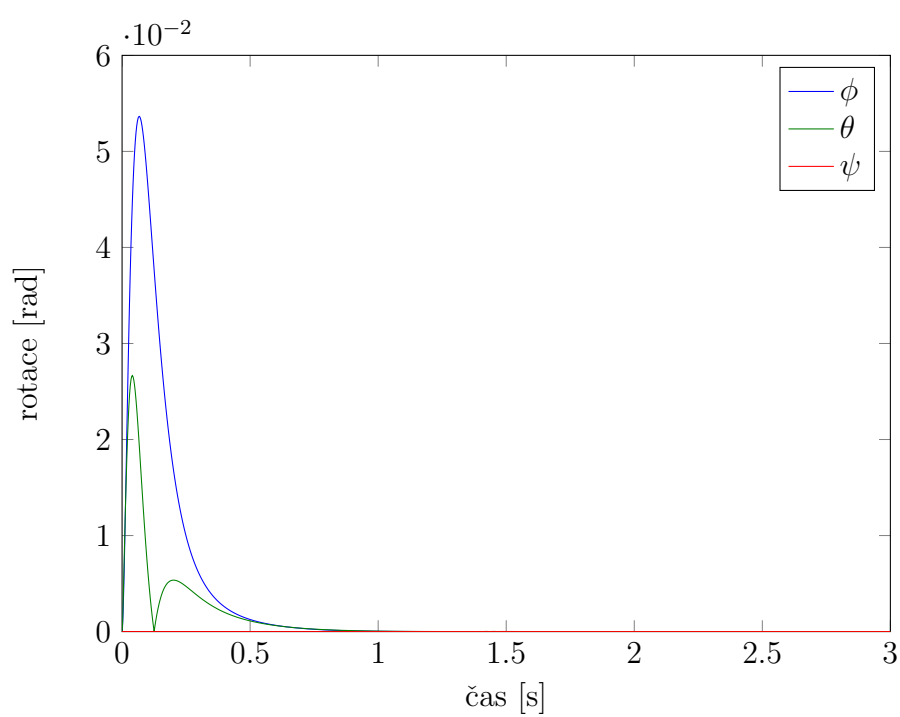
kompenzovat výšku větším tahem rotorů, dochází pravděpodobně ke zrychlení osách x a y . Důvody pro rozdíl v náklonu jsou tedy stejné jako pro rozdíl v poloze.

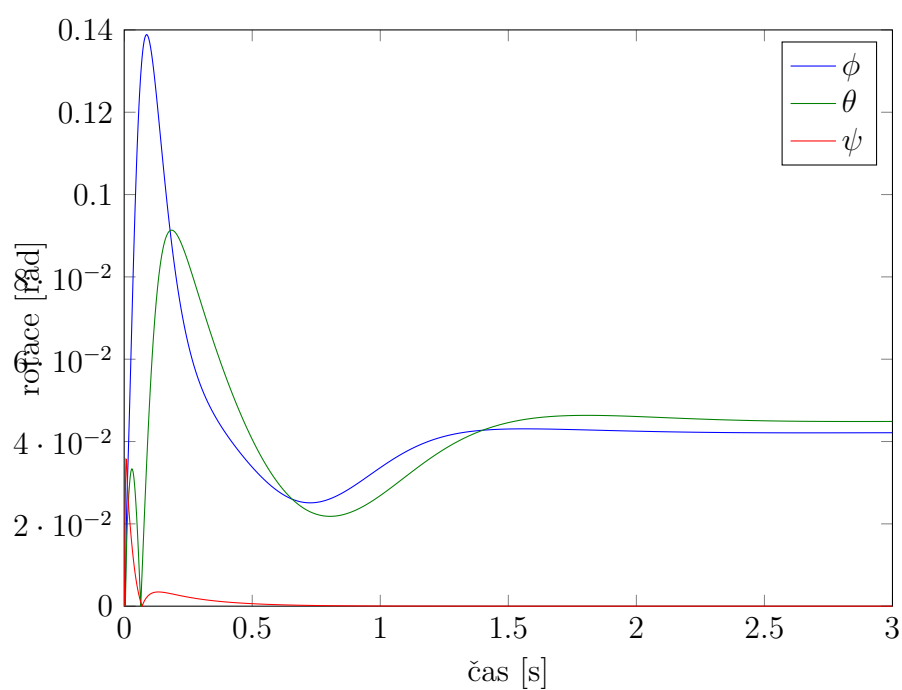


Obrázek 4.13: Rozdíl polohy mat. modelu s maticí e^{Ω_x} a modelu v *SimMechanics*

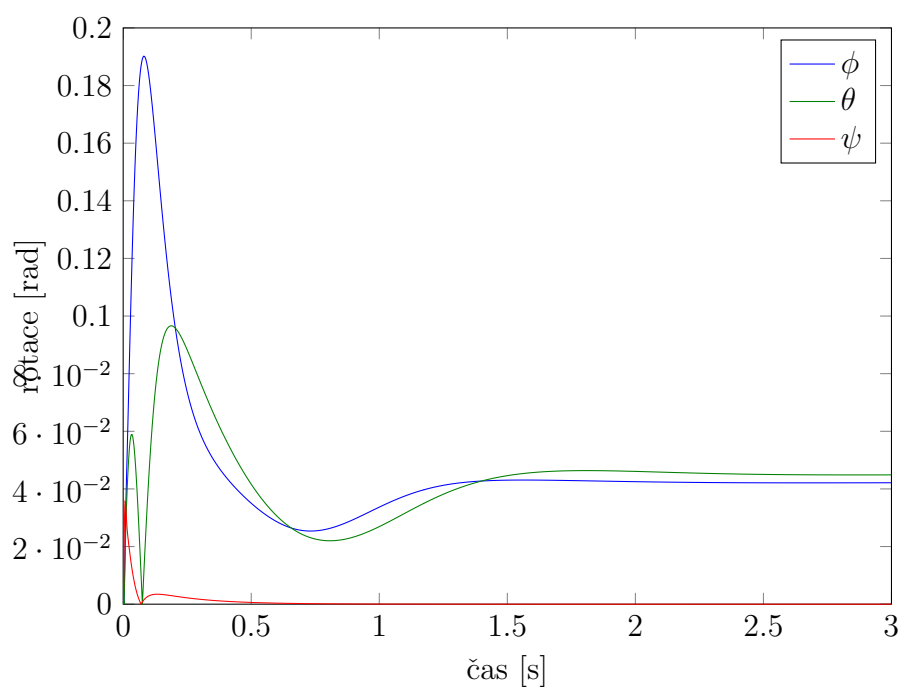


Obrázek 4.14: Rozdíl polohy mat. modelu s maticí R a modelu v *SimMechanics*

Obrázek 4.15: Rozdíl úlohy mat. modelu s maticí e^{Ω_x} a R



Obrázek 4.16: Rozdíl rotace mat. modelu s maticí e^{Ω_x} a modelu v *SimMechanics*



Obrázek 4.17: Rozdíl rotace mat. modelu s maticí R a modelu v *SimMechanics*

5 Závěr

V této práci byl představen druh helikoptéry nazývaný kvadrotorová helikoptéra. Byly předvedeny některé způsoby popisu rotace v \mathbb{R}^3 , které byly využity v matematickém modelu. Dále byly popsány vlastnosti kvadrotoru zejména z hlediska řízení. Na základě těchto vlastností byl popsán matematický model a model s bloky knihovny *SimMechanics*, který může posloužit k ověření matematického modelu. U obou modelů lze měnit parametry podle naměřených hodnot z reálného kvadrotoru. Na základě matematického modelu jsme schopni vytvořit řízení pro kvadrotorovou helikoptéru.

Model v *SimMechanics* má správnou funkčnost i přes to, že při jeho návrhu byly zadány pouze základní dynamické vztahy v podobě silového a momentového působení jednotlivých rotorů a výsledné chování kvadrotorové helikoptéry bylo ponecháno čistě na popisu kvadrotoru pomocí tuhých těles. Oba modely je možné jednoduše doplnit např. namodelováním pokročilých aerodynamických jevů.

Návrh řízení byl zaměřen na stabilizaci kvadrotorové helikoptéry. Stabilizační regulátory byly vytvořeny na základě matematického modelu a jednalo se o regulátory typu PD. Regulátory byly pro potřeby simulace nastaveny na rychlé řízení. Při návrhu byly také popsány vztahy, které na základě požadovaného zrychlení na osách x a y vypočítávají potřebné úhly ϕ^* a θ^* . Tyto vztahy lze s úspěchem využít i pro řízení letu podle dané trajektorie. Výsledný regulátor byl otestován při simulacích v prostředí *Simulink* a splnil požadavky, které na něj byly kladeny.

Zdrojové soubory vytvořeného dokumentu, část použité literatury a soubory vytvořené v prostředí *Simulink* jsou přiloženy na CD.

Postupy, které jsou popsány v této práci, poslouží při konstrukci kvadrotorové helikoptéry a aplikaci navrženého řízení. Také je možné využít poznatky z $\mathbf{SO}(3)$ a dynamiky matematického modelu k návrhu univerzálnějšího nelineárního regulátoru, který by dokázal kvadrotor řídit i za obtížnějších podmínek nebo k vytvoření složitějšího matematického modelu.

Literatura

- [1] BENNETT, Ellsworth. Why Don't We Fly Straight Up?. *Popular Science*. New York: Time4 Media, 1928, č. 2, 43, 44, 125. Dostupné z: <http://books.google.cz/books?id=VycDAAAAMBAJ>
- [2] BLANCO, José-Louis. *A tutorial on SE(3) transformation parameterizations and on-manifold optimization*. Malaga: University of Malaga, 2010, 57 s. Dostupné z: http://mapir.isa.uma.es/~jlblanco/papers/jlblanco2010geometry3D_techrep.pdf
- [3] *Flight International: The Aircraft Engineer & Airships*. Sutton: Reed Business Information Ltd, 1923, roč. 15, č. 9. ISSN 0015-3710. Dostupné z: <http://www.flightglobal.com/pdfarchive/view/1923/1923%20-%200125.html>
- [4] GREPL, Robert. *Modelování mechatronických systémů v Matlab Sim-Mechanics*. 1. vyd. Praha: BEN - technická literatura, 2007, 151 s. ISBN 978-80-7300-226-8.
- [5] *IEEE robotics*. New York: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2012, roč. 19, č. 3. ISSN 1070-9932.
- [6] Gimbal Angles, Gimbal Lock, and a Fourth Gimbal for Christmas. JONES, Eric M. a Paul FJELD. *NASA* [online]. 2000 [cit. 2013-05-01]. Dostupné z: <http://www.hq.nasa.gov/alsj/gimbals.html>
- [7] LEE, Taeyoung, Melvin LEOKY a N. Harris MCCLAMROCH. *Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3)*. 2010. Dostupné z: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=5717652&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D5717652

- [8] LEISHMAN, Gordon J. A History of Helicopter Flight. In: *The University of Maryland* [online]. 2000 [cit. 2013-03-28]. Dostupné z: <http://terpconnect.umd.edu/~leishman/Aero/history.html>
- [9] LUUKKONEN, Teppo. *Modelling and control of quadrocopter*. Espoo: Aalto University, 2011. Dostupné z: <http://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11.pdf>
- [10] MELICHAR, Jiří. *Lineární systémy*. Učební text. Plzeň: Západočeská univerzita, 2011.
- [11] MURRAY, Richard M, Zexiang LI a S. Shankar SATRY. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. Boca Raton: CRC Press, 1993, 456 s. ISBN 08-493-7981-4.
- [12] PRAVDA, Vojtěch. Maticové Lieovy grupy a Lieovy algebry. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2007, s. 219-230. ISSN 0032-2423. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141361/PokrokyMFA_52-2007-3_6.pdf
- [13] PULS, Tim a Andreas HEIN. 3D trajectory control for quadrocopter. In: ON, RSJ International Conference. *2010 ieee/rsj international conference on intelligent robots and systems*. New York: Ieee Press Books, 2010, s. 640-645. ISBN 2153-0858ISSN 978-1-4244-6674-0. DOI: 10.1109/IROS.2010.5650249. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=5650249>
- [14] THE E-VOLO CORPORATION (GMBH). *E-volo* [online]. [2011] [cit. 2013-03-28]. Dostupné z: <http://www.e-volo.com/>
- [15] THIBAUT, Carl. Kinematics, Rotations and Euler Angles. In: *University of New Brunswick* [online]. 2010 [cit. 2013-05-01]. Dostupné z: <http://www.ece.unb.ca/COBRA/Resources/Kinematics,%20Rotations%20and%20Euler%20Angles.pdf>
- [16] TŮMA, František. *Kybernetika*. 8. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010, 119 s. ISBN 978-80-7043-945-6.