

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

Bakalářská práce

Řízení Trojkolového vozíku

Plzeň, 2013

Jan Holub

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejíž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

.....

Vlastnoruční podpis

Poděkování

Touto cestou bych chtěl poděkovat vedoucímu bakalářské práce, panu Prof.Ing.Miloši Schlegelovi,CSc., za odborné vedení, poskytnuté rady a materiály potřebné pro řešení této práce. Dále bych rád poděkoval své rodině za podporu během studia.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá popisem koncepcí trojkolových vozíků. Jejím cílem je seznámení se základními variantami konstrukcí, sestavení matematického modelu a návržení funkčního řídicího systému.

Práce popisuje návrh vhodných modelů a implementaci dvou základních variant vozíků. Jedná se o typy s diferenciálním podvozkem a s Ackermanovým podvozkem s předním říditelným kolem a dvěma poháněnými zadními koly. Dále se práce zabývá návrhem vhodného řízení tak, aby byl splněn požadavek sledování zadané trajektorie. Algoritmy řízení i matematické modely byly implementovány v programovém prostředí MATLAB-Simulink.

Klíčová slova

MATLAB, Simulink, vozík s Ackermanovým podvozkem, vozík s diferenciálním podvozkem, matematický model, trajektorie

Abstract

This thesis gives an overview of three-wheeled vehicle concepts. It provides a description of the basic construction versions, mathematical models and control systems.

Suitable models for implementation of two basic constructions are presented. A model with differential chassis and a model with Ackerman chassis with controllable front wheel and two rear drive wheels are considered. The next part deals with development the control algorithm for tracking the desirable trajectories. The control algorithms and the mathematical models has been implemented in the MATLAB/Simulink software.

Keywords

MATLAB, Simulink, vehicle with Ackerman chassis, vehicle with differential chassis, mathematical model, trajectory

Obsah

1. Úvod	1
2. Základní pojmy	2
3. Rozdělení trojkolových vozíků	3
3.1 Vozík s diferenciálním podvozkem	3
3.2 Vozík s tzv. Ackermanovým podvozkem.....	3
4. Sledování zadané trajektorie	4
4.1 Určení požadovaných úhlových rychlostí	4
5. Matematický model vozíku s diferenciálním řízením.....	7
5.1 Matematický model	7
5.1.1 Dynamika podvozku	8
5.1.2 Určení algebraických rovnic popisujících vazbu mezi otáčkami motorů a pohybem podvozku	10
5.1.3 Kinematický model	11
5.1.4 Výpočet trajektorie ostatních bodů podvozku.....	15
5.1.5 Celkový model	16
6. Generování požadované trajektorie.....	19
7. Odezvy systému na požadované úhlové rychlosti.....	21
7.1 Odezva kinematické části systému na požadované úhlové rychlosti	22
7.2 Odezva kinematické a dynamické části na požadované úhlové rychlosti	24
7.2.1 Řízení dynamické části systému	25
7.2.2 Odezvy řízeného systému na požadované úhlové rychlosti ω_L^* a ω_P^* :.....	28
7.2.3 Odezvy řízeného dynamického systému s navazující kinematickou částí na požadované úhlové rychlosti ω_L^* a ω_P^*	29
7.3 Návrh řízení s vnější zpětnou vazbou.....	31
7.3.1 Odezvy celkového řízeného systému na požadované úhlové rychlosti	35
8. Vozík s tzv. Ackermanovým podvozkem	37
8.1 Určení požadovaného natočení předního kola Ackermanova podvozku	38
8.2 Určení odpovídajících úhlových rychlostí.....	39
8.3 Odezvy systému na požadované trajektorie	40
8.3.1 Odezvy systému na úhlové rychlosti ω_L a ω_P odpovídající požadovanému úhlu natočení předního kola Φ a požadované rychlosti středu vozíku v	42
9. Závěr.....	44

Literatura

Seznam obrázků

obr.(1) Nákres diferenciálu	2
obr.(2) Vozík s diferenciálním podvozkem.....	3
obr.(3) Vozík s Ackermanovým podvozkem-první varianta	3
obr.(4) Vozík s Ackermanovým podvozkem-druhá varianta.....	4
obr.(5) Pohyb vozíku po oskulační kružnici	5
obr.(6) Umístění těžiště na podvozku vozíku.....	8
obr.(7) Zobrazení sil a momentů působících na podvozek	8
obr.(8) Obrázek podobnosti trojúhelníků pro výpočet posuvné rychlosti v_T v těžišti	10
obr.(9) Souřadnice středu vozíku a úhlu natočení.....	11
obr.(10) Pomocné vektory určené změnami poloh	12
obr.(11) Určení aktuální hodnoty úhlu natočení θ	13
obr.(12) Rozložení bodů podvozku	15
obr.(13) Rozdělení matematického modelu	18
obr.(14) Generátor požadované trajektorie	19
obr.(15) Použité trajektorie pro testování modelů.....	20
obr.(16) Schéma zapojení generátoru trajektorie s výpočtem požadovaných úhlových rychlostí v MATLAB/Simulink	21
obr.(17) Schéma zapojení pro testování kinematické části systému na vstupní úhlové rychlosti.....	22
obr.(18) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část).....	23
obr.(19) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část).....	23
obr.(20) Porovnání požadované lineární a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část).....	23
obr.(21) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část).....	24
obr.(22) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část).....	24
obr.(23) Blokové schéma regulátoru dynamické části systému.....	26
obr.(24) Schéma zapojení pro testování řízené dynamické části systému na vstupní úhlové rychlosti	27
obr.(25) Porovnání požadované a výstupní úhlové rychlosti z řízené dynam.části systému (pro konstantní trajektorii)	28
obr.(26) Porovnání požadované a výstupní úhlové rychlosti z řízené dynam.části systému (pro lineární trajektorii).....	28

obr.(27) Porovnání požadované a výstupní úhlové rychlosti z řízené dynam.části systému (pro konstantní trajektorii)	29
obr.(28) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)	29
obr.(29) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)	30
obr.(30) Porovnání požadované lineární a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)	30
obr.(31) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)	30
obr.(32) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)	31
obr. (33) Blokové schéma celkového zapojení modelu	32
obr. (34) Schéma zapojení celého řízeného systému v programovém prostředí MATLAB/Simulink	34
obr. (35) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém).....	35
obr. (36) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém).....	35
obr. (37) Porovnání požadované lineární a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém).....	36
obr. (38) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém)	36
obr. (39) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém).....	36
obr. (40) Pohyb vozíku s Ackermanovým podvozkem po oskulační kružnici	37
obr. (41) Určení požadovaného natočení předního kola	38
obr. (42) Schéma zapojení v programovém prostředí MATLAB/Simulink pro určení vstupních úhlových rychlostí do systému	40
obr. (43) Celkový model v programovém prostředí MATLAB/Simulink pro Ackermanův podvozek.....	41
obr. (44) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, průběh požadovaného úhlu natočení předního kola Φ (pro celkový systém)	42

obr. (45) Porovnání požadované lineární a výsledné trajektorie, průběh požadovaného úhlu natočení předního kola Φ (pro celkový systém)	42
obr. (46) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, průběh požadovaného úhlu natočení předního kola Φ (pro celkový systém)	42

Seznam tabulek:

tab. (1) Tabulka zvolených parametrů systému	21
--	----

1. Úvod

Cíle bakalářské práce lze rozdělit do tří částí: seznámení se základními konstrukčními prvky trojkolových vozíků, odvození matematického modelu a návržení funkčního řízení pro sledování požadované trajektorie.

V první části jsou stručně popsány základní varianty uspořádání trojkolových vozíků využívaných např. v robotice, nebo v reálných konstrukcích. Jsou zde popsány možnosti a rozsahy pohybu modelu i nejčastější využití.

Odvození matematického modelu bylo provedeno pro vozík s diferenciálním řízením. Samotné odvození vychází z fyzikálních vlastností zvolených konstrukcí. Z rovnic popisující model trojkolového vozíku byl sestaven systém, který se skládá ze dvou částí. Dynamická část je tvořena pohybovými rovnicemi popisujícími závislost posuvné a otáčivé rychlosti zvoleného bodu na momentech působících na hnací kola. Druhou část tvoří kinematické rovnice popisující závislosti mezi posuvnou a otáčivou rychlostí zvoleného bodu a otáčkami motorů.

Odvozené rovnice popisující systém vozíku tvoří stavový model. Implementace modelu byla provedena v programovém prostředí MATLAB a v jeho nadstavbě Simulink, jež slouží pro simulaci a modelování dynamický systémů.

Řízení systému je rozděleno na dvě části. Vnitřní smyčka řízení reguluje dynamickou část modelu. O regulaci odchylek požadované trajektorie od výsledné se stará vnější heuristicky odvozené řízení. Implementace řízení byla opět provedena v programovém prostředí MATLAB/Simulink, kde byla pomocí simulací ověřena funkčnost navržených řízení. V závěru práce je popsán způsob řízení vozíku s Ackermanovým podvozkem.

2. Základní pojmy

V této části bakalářské práce jsou vysvětleny pojmy používané v následujících textech práce.

Řiditelnost [6]

Systém (A,B) , $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ je říditelný, jestliže pro libovolný počáteční stav x_0 existuje řízení $u(t)$ na konečném časovém intervalu, které převádí stav x_0 do počátku stavového prostoru.

Pozorovatelnost [6]

Uvažujeme lineární t-invariantní systém

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

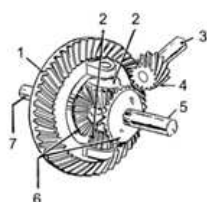
Systém (A,B,C,D) (respektive dvojici (C,A)) nazýváme pozorovatelný, jestliže libovolný počáteční stav x_0 v čase 0 lze rekonstruovat ze známého vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ na intervalu $[0, t_1]$ pro libovolný čas $t_1 > 0$.

Holonomní/neholonomní vozidla [4]

Vozidlo nazýváme holonomní pokud se počet stupňů volnosti rychlostí shoduje s počtem stupňů volnosti pozice, tzn. holonomní vozidlo může měnit svoji rychlost nezávisle na všech směrech. Příkladem holonomního vozidla je vznášedlo.

V této práci se zabýváme popisem a řízením vozíků s diferenciálním a Ackermanovým podvozkem. Oba tyto typy jsou příklady neholonomního vozidla, protože jejich pohyb je možný pouze ve směru kolmém k ose kol.

Diferenciál



obr. (1) Návrh diferenciálu
1 – talířové kolo, 2 – sateitní kola,
3 – vstupní hřídel, 4 – kuželové kolo,
5 a 7 – výstupní hřídele, 6 – planetové kolo

Diferenciál je mechanické zařízení pracující na principu planetové převodovky. Zařízení slouží k rozdělení poměru otáček na výstupních hřídelích. Při pohybu vozidla po kružnici se musí vnitřní kolo vozidla pohybovat pomaleji než kolo vnější. Diferenciál rozděluje kroutcí (hnací) moment na jednotlivé hřídele v poměru rychlostí otáčení kol tak, aby nedocházelo k prokluzu či ke smyku. Nevýhodou použití mechanického zařízení je ztráta výkonu vlivem tření ozubení. Jednoduchý návrh diferenciálu je zobrazen na obr. (1).

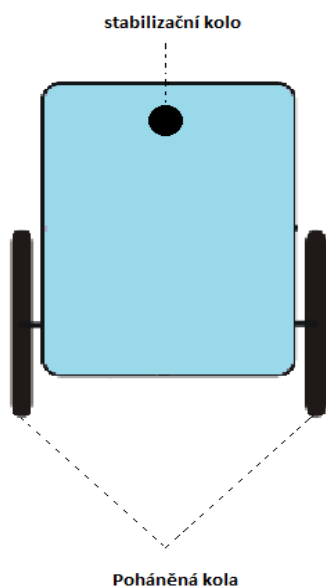
Úkolem bakalářské práce je navrhnout řízení (vhodně volit rychlosti) otáček motorů kol v takovém poměru, aby nedocházelo k prokluzu, nebo ke smyku vozíku. Algoritmus řízení plní funkci diferenciálu.

3. Rozdělení trojkolových vozíků tato kapitola vychází z [3] a [4]

Jedním z úkolů této práce je popis koncepcí trojkolových vozíků. Mezi nejpoužívanější typy trojkolových vozíků (robotů) patří robot s diferenciálním podvozkem a robot s tzv. Ackermanovým podvozkem.

3.1 Vozík s diferenciálním podvozkem

Patrně nejjednodušším typem trojkolového rozložení podvozku je robot s diferenciálně řízenými koly. Jedná se o neholonomní typ vozidla, protože jeho pohyb je možný pouze ve směru kolmém k ose kol. Základním rysem tohoto uspořádání jsou dvě nezávisle poháněná



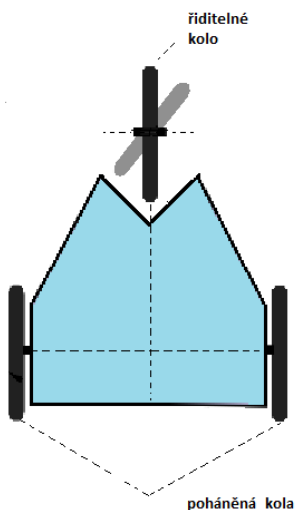
kola a jedno volně otočné viz obr. (2), nepoháněné a neřízené směrové kolo vpředu (nebo také vzadu), které slouží ke stabilizaci a bývá často realizováno jako třecí element či kolo s dvěma stupni volnosti. Pokud se obě poháněná kola pohybují stejnou rychlostí a stejným směrem, pohybuje se robot po přímce. Vyšší rychlost jednoho z kol způsobí pohyb robotu po kružnici.

Největší výhodou této koncepce je manévrovatelnost. Robot je schopen otáčet se na místě kolem svého středu mezi nápravami. Tento bod uvažujeme jako referenční. Tato vlastnost je výhodou oproti koncepci s Ackermanovým podvozkem, kde otáčení na místě není možné. Otáčení na místě lze realizovat tak, že se poháněná kola točí stejně rychle, ale opačným směrem.

obr. (2) Vozík s diferenciálním podvozkem

V praxi se nejčastěji využívá válcový tvar, což ještě více eliminuje možnost uvíznutí. Pro svoji jednoduchou konstrukci, z ní vyplívající ceny a relativně snadnému řízení, bývá toto uspořádání hojně využíváno

3.2 Vozík s tzv. Ackermanovým podvozkem



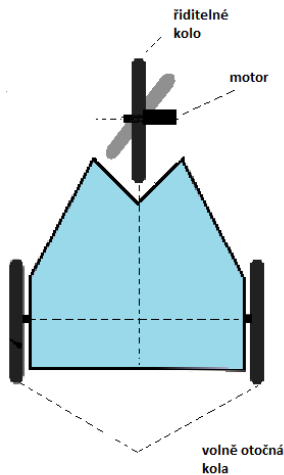
obr. (3) Vozík s Ackermanovým podvozkem - první varianta

Tento neholonomní typ tříkolového uspořádání podvozku se používá ve dvou variantách. První z nich je koncepce, ve které jsou zadní kola hnaná motory (s diferenciálním řízením) a přední kolo je říditelné, natáčecí a bez pohonu. Druhou variantou jsou zadní volně otočná kola (bez motorů) a přední poháněné a zároveň natáčecí kolo.

Nejprve se zaměříme na první variantu s hnanými zadními koly a s předním natáčecím kolem znázorněné na obr. (3), které je ve směru pohybu pasivně odvalováno. Natočení předního říditelného kola určuje směr pohybu. Pokud je natočení kola nulové,

pohybuje se robot po přímce. Nenulové natočení naopak způsobí pohyb po kružnici.

Mezi výhody tohoto uspořádání patří snadné řízení, kdy lze pomocí rychlostí kol a natočení řízeného kola určovat směr a rychlost jízdy vozíku. Hlavní nevýhodou podvozku je, že není možné, aby došlo k otočení na místě jako u předchozího uspořádání. V komplikovaných prostředích, ve kterých se robot pohybuje, může dojít k uvíznutí. V těchto úzkých a jinak náročných prostorech, proto bývá složitější řešení autonomního řízení.



obr. (4) Vozík s Ackermanovým podvozkem - druhá varianta

U druhé varianty uspořádání podvozku je přední kolo říditelné a zároveň motoricky poháněné. Zadní kola se volně (neřízeně) otáčejí ve směru určeném předním kolem. Toto uspořádání je patrné z obr. (4). Vozík se pohybuje po přímce za předpokladu, že má přední kolo nulové natočení. Při nenulovém natočení lze pozorovat pohyb po kružnici. Princip pohybu je tedy shodný jako u první varianty. Hlavní výhodou druhé varianty je to, že není zapotřebí použití diferenciálu.

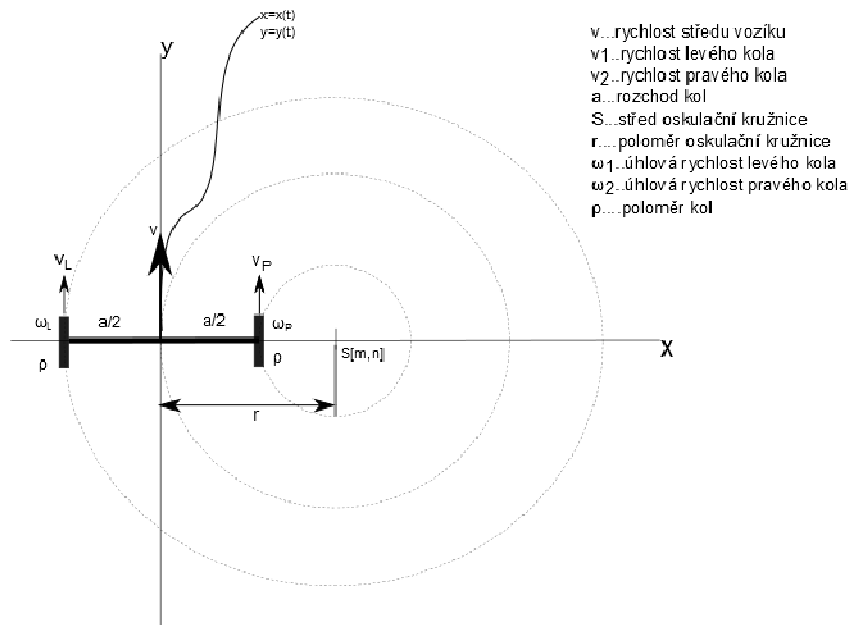
V praxi se Ackermanův podvozek využívá u větších vozidel a také v těžším terénu, kde má lepší průchodnost než podvozek s diferenciálním řízením.

4. Sledování zadané trajektorie tato kapitola vychází z [5]

Úkolem řídicích systémů pro ovládání vozíků je sledování zadané trajektorie. Požadovaná trajektorie je zadána jako křivka v parametrickém tvaru: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Křivka určuje vozíku jeho dráhu. Pro návrh regulátorů použité regulační smyčky je zapotřebí znalost hodnoty úhlových rychlostí jednotlivých kol. Ze zadané trajektorie lze určit požadované rychlosti levého kola ω_L a pravého kola ω_P odpovídající požadované cestě následujícím způsobem.

4.1 Určení požadovaných úhlových rychlostí

Při odvození odpovídajících úhlových rychlostí uvažujeme, že pro každý bod rovinné křivky lze určit jeho oskulační kružnici. Střed trojkolového vozíku sleduje požadovanou křivku. Pro každý okamžik můžeme uvažovat pohyb vozíku po kružnici, jejíž střed je dán středem oskulační kružnice S o souřadnicích $[m, n]$ viz obr (5):



- v ... rychlost středu vozíku
- v_L ... rychlost levého kola
- v_P ... rychlost pravého kola
- a ... rozchod kol
- S ... střed oskulační kružnice
- r ... poloměr oskulační kružnice
- ω_1 ... úhlová rychlost levého kola
- ω_2 ... úhlová rychlost pravého kola
- ρ ... poloměr kol

obr. (5) Pohyb vozíku po oskulační kružnici

Vzdálenost středu vozíku od středu S určuje poloměr oskulační kružnice r . Levé i pravé kolo se pohybují kolem totožného středu S , se stejnou úhlovou rychlostí ω , ale po jiném poloměru. O rozměru poloměrů od středu S rozhoduje použitá délka zadní nápravy. Rozdílná vzdálenost od středu způsobí, že kolo, které se pohybuje po větším poloměru má vyšší rychlost, než vnitřní kolo s nižším poloměrem. Rychlosti kol v_L a v_P popisují následující rovnice:

$$v_L = \Omega * \left(r + \frac{a}{2}\right) \quad (1)$$

$$v_P = \Omega * \left(r - \frac{a}{2}\right) \quad (2)$$

Rychlosti v_L a v_P lze psát jako součin úhlové rychlosti kola ω a poloměru kola ρ :

$$v_L = \omega_L * \rho \quad (3)$$

$$v_P = \omega_P * \rho \quad (4)$$

Dosazením rovnic (3) a (4) do rovnic (1), (2) získáváme:

$$\omega_L * \rho = \Omega * \left(r + \frac{a}{2}\right) \quad (5)$$

$$\omega_P * \rho = \Omega * \left(r - \frac{a}{2}\right) \quad (6)$$

Rychlost pohybu středu vozíku po křivce v volíme konstantní, nebo proměnnou.

Vztah rychlosti v a úhlové rychlosti ω popisuje následující rovnice:

$$v = \Omega * r \quad (7)$$

Po vyjádření úhlové rychlosti ω z předchozího vztahu a následném dosazení do rovnic (5), (6):

$$\omega_L * \rho = \frac{v}{r} * \left(r + \frac{a}{2} \right) \quad (8)$$

$$\omega_P * \rho = \frac{v}{r} * \left(r - \frac{a}{2} \right) \quad (9)$$

Poloměr oskulační kružnice v bodě křivky r a souřadnice středu $S [m, n]$ jsou určeny jako:

$$r = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}} \quad [\text{m}] \quad (10)$$

$$m = x + \dot{y} \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}} \quad [\text{m}] \quad (11)$$

$$n = y - \dot{x} \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}} \quad [\text{m}] \quad (12)$$

Do vztahů (8), (9) dosadíme rovnici (10):

$$\omega_L * \rho = v * \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} * \left(\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}} + \frac{a}{2} \right) \quad (13)$$

$$\omega_P * \rho = v * \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} * \left(\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}} - \frac{a}{2} \right) \quad (14)$$

Po úpravě získáváme vztahy pro požadované úhlové rychlosti:

$$\omega_L = \frac{v + \frac{v*a*(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{2*(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}}{\rho} \quad [\text{rad/s}] \quad (15)$$

$$\omega_P = \frac{v - \frac{v*a*(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{2*(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}}{\rho} \quad [\text{rad/s}] \quad (16)$$

5. Matematický model vozíku s diferenciálním řízením

tato kapitola vychází z [1]

Při sestavování popisu dynamického chování trojkolového vozíku s diferenciálním řízením uvažujeme požadavek na sestavení matematického modelu popisujícího trajektorii zvoleného bodu vozíku v závislosti na momentech kol. Součástí popisu je i přepočítání trajektorie zvoleného bodu na trajektorii bodů, u kterých dochází ke styku s rovinou pohybu. Při odvozování dynamiky modelu uvažujeme, že hnací moment motoru vyvolá otáčení daného kola, které následně způsobí rovinný křivočarý pohyb podvozku. Rovinný pohyb rozložíme na součet pohybu otáčivého (rotaci) a pohybu posuvného (translaci). Z těchto pohybových rovnic lze určit jednoznačně nejen pohyb vybraného bodu, ale i pohyb ostatních bodů podvozku. Sestavení kinematických pohybových rovnic pohybující se soustavy vychází ze sil souvisejících s křivočarým pohybem. Z Coriolisovy věty popisující děje z hlediska pozorovatele umístěného v pohybující se soustavě (relativní děje) získáváme:

$$\vec{F} - \underbrace{m * \frac{d\vec{v}_T}{dt}}_{\text{setrvačná síla}} - \underbrace{m * \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times r}_{\text{síla Eulerova}} - \underbrace{2 * m * \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{síla Coriolisova}} - \underbrace{m * \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{síla odstředivá}} = 0 \quad (17)$$

kde v_T je okamžitá posuvná rychlost zvoleného bodu

ω je okamžitá úhlová rychlost zvoleného bodu

F je reálná síla působící na hmotný bod o hmotnosti m ve vzdálenosti r od osy otáčení.

Hodnoty jednotlivých sil obsažených ve vztahu Coriolisovy věty jsou konkretizovány v kapitole 5.1.1 dle aktuálního provedení a vlastností podvozku. Kromě sil vznikajících křivočarým pohybem je potřeba uvažovat síly vznikající při pohybu reálného tělesa. Jedná se o odporové síly (ztráty). U těchto sil předpokládáme, že jsou úměrné rychlosti pohybu. Výsledkem dynamické části jsou pohybové rovnice popisující okamžitou posuvnou rychlost v_T a úhlovou rychlost ω vybraného bodu v závislosti na hnacích momentech poháněných kol.

Zvolení bodu, pro který určujeme posuvnou a úhlovou rychlost, ovlivňuje tvar uvažovaných rovnic i složitost výsledného modelu. V našem případě uvažujeme sledovaný bod v těžišti ležící uprostřed spojnice mezi hnanými koly. Takto zvolený sledovaný bod umožňuje relativně snadný přepočet okamžitých rychlostí hnacích kol na pohybové rovnice zvoleného bodu a následné dopočítání dráhy ostatních bodů podvozku.

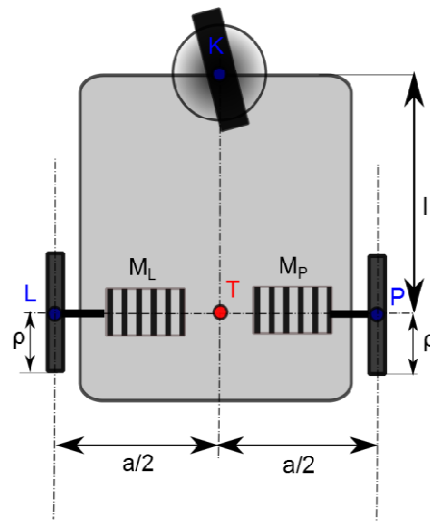
5.1 Matematický model

Matematický model vychází ze zvoleného uspořádání trojkolového vozíku. V tomto případě uvažujeme nezávislé ovládání každého motoru (diferenciální řízení). Popis modelu vozíku lze rozdělit na dvě relativně nezávislé části. První část obsahuje popis dynamiky podvozku. Je

tvořena pohybovými rovnicemi popisujícími závislost posuvné a otáčivé rychlosti zvoleného bodu na momentech působících na hnací kola. V druhé části jsme našli rovnice závislosti mezi posuvnou a otáčivou rychlostí zvoleného bodu a otáčkami motorů.

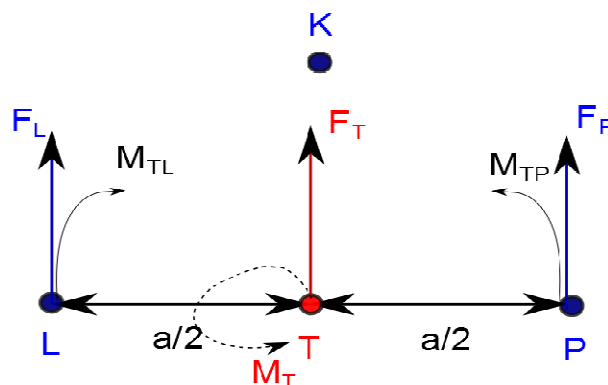
5.1.1 Dynamika podvozku

Dynamiku podvozku popisuje vektor posuvné rychlosti v_T ve zvoleném bodě a rotace tohoto vektoru s úhlovou rychlostí ω . Pomocí těchto veličin bude později dopočítávána trajektorie libovolných bodů podvozku. Pozorovaný bod byl zvolen v těžišti nacházejícím se uprostřed spojnice hnacích kol viz obr. (6).



obr. (6) Umístění těžiště na podvozku vozíku

Jako první výchozí rovnici volíme bilanci jednotlivých sil působících na podvozek. Předpokládáme, že síly F_L a F_P působící na podvozek v místech, kde dochází ke kontaktu levého (L) a pravého (P) kola s podložkou, lze nahradit jedinou silou F_T a kroutícím momentem M_T působícím ve zvoleném bodě-těžišti. Situace je znázorněna na obr. (7), kde lze pozorovat uspořádání podvozku.



obr. (7) Zobrazení sil a momentů působících na podvozek

Je patrné, že obě síly F_L a F_P působí vždy rovnoběžně. Trojkolový vozík je dále charakterizován poloměrem poháněných kol ρ , hmotností m , momentem setrvačnosti J a polohou těžiště určenou parametry a a l .

V této části budou uvedeny vztahy pro síly působící v bodě styků kol s podložkou. Síla F_x působící v bodě x , kde dochází ke styku s podložkou, závisí na momentu příslušného motoru M_x a nepřímo na poloměru kola ρ . Získáváme vztah:

$$F_x = \frac{M_x}{\rho}$$

Moment M_{TX} , kterým působí kolo x na střed otáčení podvozku ve zvoleném bodě (těžišti) závisí na síle F_x a na ramenní působící síle $a/2$:

$$M_{TX} = F_x * \frac{a}{2}$$

Z obr. (7) je patrné, že síly F_L a F_P působí vždy rovnoběžně, zatímco jimi vyvolané momenty M_{TL} a M_{TP} vždy proti sobě.

Pohybové rovnice vycházejí ze vztahu (17). Tuto Coriolisovu větu konkretizujeme pro dané uspořádání podvozku. Jako sledovaný bod uvažujeme těžiště vozíku, jehož poloha se nemění vzhledem k ose otáčení-> Coriolisova síla je rovna nule. Také není potřeba uvažovat sílu odstředivou, jejíž vliv se neprojeví, uvažujeme-li podvozek jako tuhé těleso nahrazené hmotným bodem (těžištěm). Pro zvolený bod v těžišti vozíku platí, že při rotačním pohybu osa otáčení prochází těžištěm, a proto moment vyvolaný Eulerovou silou je nulový. V posuvném pohybu uvažujeme pouze setrvačnou sílu F_s , která působí opačným směrem, než okamžitá působící síla F . Setrvačná síla se projeví i při rotaci, což je způsobeno tím, že nahrazujeme těžištěm tělesa celé tuhé těleso, které má při rotaci kolem osy kolmé na rovinu pojezdu a umístěné v těžišti moment setrvačnosti J .

Pro síly určující posuvný pohyb uvažujeme kromě setrvačné síly F_s také odporovou sílu F_o posuvného pohybu úměrnou posuvné rychlosti v . Rovnici sil lze psát ve tvaru:

$$F_L + F_P + F_o + F_s = 0$$

$$\frac{M_L}{\rho} + \frac{M_P}{\rho} - k_v * v_T - m * \frac{d v_T}{dt} = 0 \quad [kg * m * s^{-2}] \quad (18)$$

kde m [kg] je hmotnost vozíku
 k_v [kg*s⁻¹] je koeficient odporu posunu
 M_L [kg*m²*s⁻²] je moment levého pohonu
 M_P [kg*m²*s⁻²] je moment pravého pohonu
 v_T [m* s⁻¹] je posuvná rychlost

ρ [m] je poloměr hnacích kol

Při sestavování bilance momentů uvažujeme kromě setrvačného momentu ještě moment M_O vyvolaný odporem při rotaci a úměrný rychlosti rotace ω .

$$M_{TL} + M_{TP} + M_O + M_S = 0$$

$$-\frac{M_L}{\rho} * \frac{a}{2} + \frac{M_P}{\rho} * \frac{a}{2} - k_\omega * \omega - J \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad [kg * m^2 * s^{-2}] \quad (19)$$

kde a [m] rozchod kol

k_ω [kg*m²*s⁻¹] koeficient odporu otáčení podvozku

J [kg*m²] moment setrvačnosti

ω [s⁻¹] úhlová rychlost otáčení v těžišti

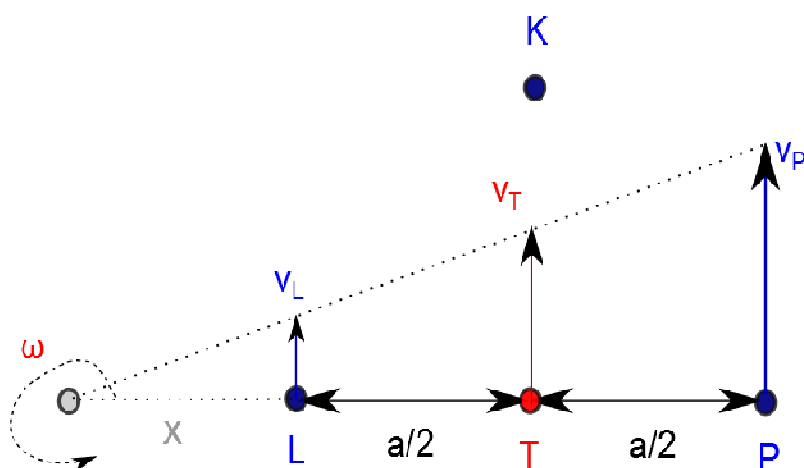
5.1.2 Určení algebraických rovnic popisujících vazbu mezi otáčkami motorů a pohybem podvozku

Následující rovnice popisují vazbu mezi otáčkami obou motorů a rychlostí pohybu a otáčení podvozku vozíku. Tato vazba je pevně dána konstrukčním řešením pohonu a podvozku.

Předpokládáme, že obě hnací kola mají stejný poloměr ρ a jejich obvodové rychlosti v_L a v_P závisí na úhlových rychlostech ω_L a ω_P poháněných kol:

$$v_L = \rho * \omega_L \qquad v_P = \rho * \omega_P$$

Pro určení hodnoty posuvné rychlosti v_T v těžišti a úhlové rychlosti otáčení ω vyjdeme z obr. (8).



obr. (8) Obrázek podobnosti trojúhelníků pro výpočet posuvné rychlosti v_T v těžišti

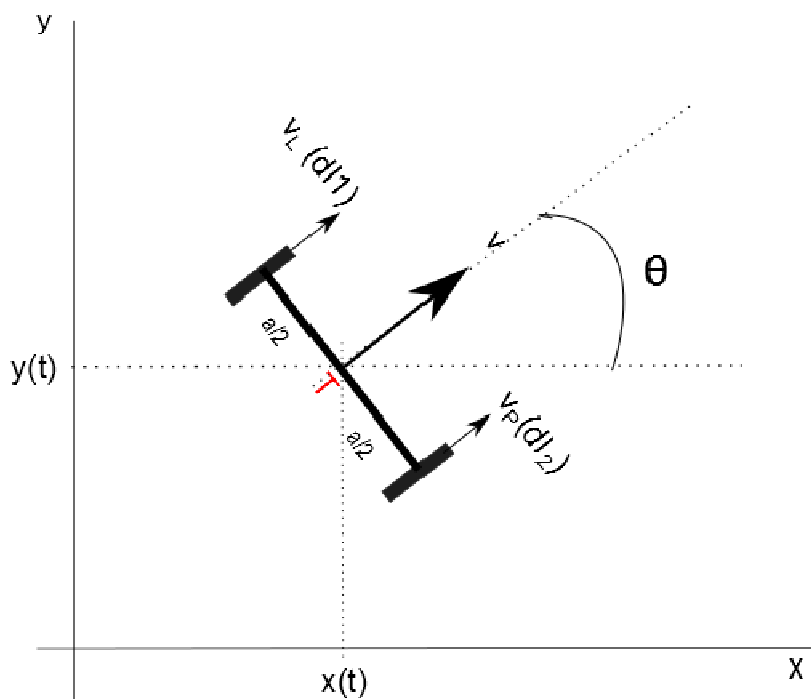
Uvažujeme podmínku, že obě poháněná kola mají shodnou osu otáčení, tedy jejich obvodové rychlosti jsou rovnoběžné. Z obr. (8) je patrné vzájemné umístění míst, kde ve skutečnosti působí obvodové rychlosti v_L a v_P (hnací kola L a P) a těžiště T , ve kterém chceme určit posuvnou rychlost v_T a úhlovou rychlost ω tak, aby měly shodný účinek s působením obvodových rychlostí poháněných kol. S využitím podobnosti trojúhelníků viz obr. (8) lze přepočítat obvodové rychlosti kol na rychlost v_T v těžišti T a na úhlovou rychlost otáčení ω :

$$v_T = \frac{v_L \cdot \frac{a}{2} + v_P \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} = \frac{a}{a} * \rho * \omega_L + \frac{a}{a} * \rho * \omega_P = \frac{\frac{a}{2} * (\rho \omega_L + \rho \omega_P)}{a} = \frac{\rho \omega_L + \rho \omega_P}{2} \text{ [m/s]} \quad (20)$$

$$\omega = \frac{v}{x + \frac{a}{2}} = \frac{v_P - v_L}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} = \frac{\rho * \omega_P - \rho * \omega_L}{a} \text{ [rad/s]} \quad (21)$$

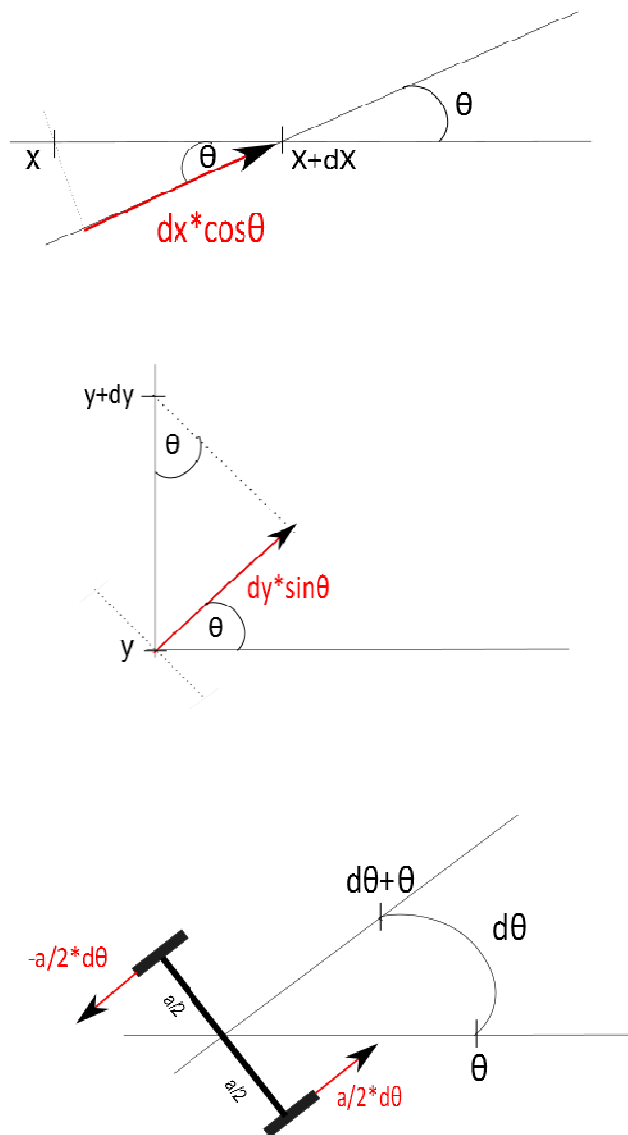
5.1.3 Kinematický model

Pro odvození kinematických vztahů uvažujeme jako vstupní veličiny systému úhlové rychlosti hnacích kol vozíku. Na výstupu získáváme aktuální pozici x , y zvoleného těžiště T a aktuální úhel θ natočení vozíku viz obr. (9)



obr. (9) Souřadnice středu vozíku a úhlu natočení

Posuvné rychlosti v_L a v_P způsobují změnu polohy středu nápravy a změnu natočení vozíku. Pro jednotlivá kola vozíku lze určit vektory, které jsou dány součtem změn poloh těžiště v osách x , y viz obr. (10) a změnou natočení vozíku θ obr. (10)



obr. (10) Pomocné vektory určené změnami poloh

Vektory mají shodnou orientaci s vektorem posuvné rychlosti jednotlivých kol. Vektor podélného pohybu levého kola dl_l je roven součtu vektorů daných změnami souřadnic x , y a změnou úhlu natočení θ . Kladná změna natočení způsobuje záporný pohyb levého kola.

Dostáváme vztah:

$$dl_1 = dx * \cos\theta + dy * \sin\theta - \frac{a}{2} d\theta \quad (22)$$

Rychlost levého kola v_L lze určit derivací vektoru dl_1 podle času:

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{dx}{dt} * \cos\theta + \frac{dy}{dt} * \sin\theta - \frac{a}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (23)$$

Získáváme:

$$v_L = \dot{x} * \cos\theta + \dot{y} * \sin\theta - \frac{a}{2} * \dot{\theta} \quad (24)$$

Shodným způsobem určíme vztah pro pravé kolo:

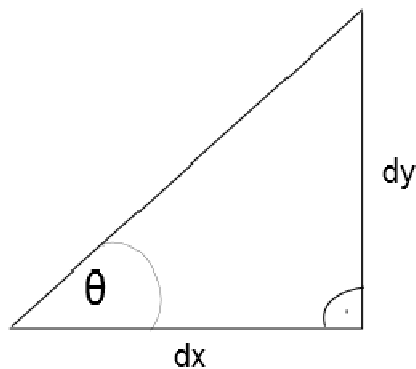
$$dl_2 = dx * \cos\theta + dy * \sin\theta + \frac{a}{2} d\theta \quad (25)$$

V tomto případě způsobuje kladná změna natočení kladný pohyb pravého kola. Opět derivujeme rovnici podle času:

$$\frac{dl_2}{dt} = \frac{dx}{dt} * \cos\theta + \frac{dy}{dt} * \sin\theta + \frac{a}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (26)$$

$$v_P = \dot{x} * \cos\theta + \dot{y} * \sin\theta + \frac{a}{2} * \dot{\theta} \quad (27)$$

Při pohybu vozíku se mění polohy v osách x a y . Pohybuje-li se vozík po kružnici, dochází ke změně orientace (natočení) vozíku θ . Pro získání aktuální hodnoty natočení využijeme vztah pro tangentu úhlu, vycházející z obr. (11), jež se určí jako podíl protilehlé strany úhlu θ , v našem případě změna souřadnice středu na ose y (dy), a přilehlé strany (změna na ose x dx).



obr. (11) Určení aktuální hodnoty úhlu natočení θ

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

Tangens θ lze psát jako podíl : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Zlomek rozšíříme:

$$\frac{\frac{dy}{dt} * dt}{\frac{dx}{dt} * dt} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

a upravíme do tvaru:

$$\dot{y} * \cos\theta - \dot{x} * \sin\theta = 0 \quad (28)$$

Rychlosti v_L a v_P lze psát jako součin úhlových rychlostí poháněných kol a poloměru kola. Po dosazení do rovnic (24) a (27) dostáváme soustavu 3 diferenciálních rovnic popisujících vazbu mezi úhlovými rychlostmi pohonů a posuvným pohybem:

$$\omega_L * \rho = \dot{x} * \cos\theta + \dot{y} * \sin\theta - \frac{a}{2} * \dot{\theta} \quad (29)$$

$$\omega_P * \rho = \dot{x} * \cos\theta + \dot{y} * \sin\theta + \frac{a}{2} * \dot{\theta} \quad (30)$$

$$\dot{y} * \cos\theta - \dot{x} * \sin\theta = 0 \quad (31)$$

Ze soustavy rovnic vyjádříme vztahy pro \dot{x} , \dot{y} a $\dot{\theta}$. Ze vztahu (31) po vyjádření \dot{x} a dosazení do vztahů (29) a (30) dostáváme:

$$\dot{y} \frac{(\cos\theta)^2}{\sin\theta} + \dot{y} * \sin\theta - \frac{a}{2} \dot{\theta} = \rho * \omega_L \quad (32)$$

$$\dot{y} \frac{(\cos\theta)^2}{\sin\theta} + \dot{y} * \sin\theta + \frac{a}{2} \dot{\theta} = \rho * \omega_P \quad (33)$$

Rovnice (32) a (33) sečteme a vyjádříme $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{\rho * \omega_P - \rho * \omega_L}{a} \quad (34)$$

Dosazením vztahu (34) do vztahu (33) a vyjádření \dot{y} :

$$\dot{y} = \frac{\rho * \omega_L + \rho * \omega_P}{2} * \sin\theta \quad (35)$$

A dosazením vztahu (35) do (31) získáme po vyjádření \dot{x} :

$$\dot{x} = \frac{\rho * \omega_L + \rho * \omega_P}{2} * \cos\theta \quad (36)$$

Dostáváme 3 kinematické rovnice, ze kterých lze určit aktuální polohu středu vozíku a jeho aktuální natočení:

$$\dot{x} = \frac{\rho*\omega_L + \rho*\omega_P}{2} * \cos\theta \quad [\text{m/s}] \quad (37)$$

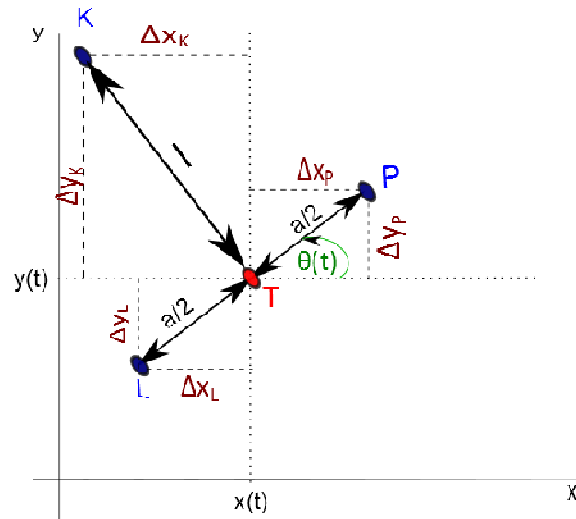
$$\dot{y} = \frac{\rho*\omega_L + \rho*\omega_P}{2} * \sin\theta \quad [\text{m/s}] \quad (38)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\rho*\omega_P - \rho*\omega_L}{a} \quad [\text{rad/s}] \quad (39)$$

5.1.4 Výpočet trajektorie ostatních bodů podvozku

Pro určení aktuální polohy bodů, kde dochází ke styku všech tří kol (L, P, K) podvozku s pojezdovou rovinou, je potřeba znát umístění těchto bodů. Uvažované rozložení je znázorněno na obr. (12) Z geometrických rozměrů určíme rovnice relativní polohy bodů vzhledem ke zvolenému těžišti v závislosti na úhlu natočení.

Relativní polohy Δx_L a Δy_L bodu L , Δx_P a Δy_P bodu P a Δx_K a Δy_K bodu K jsou závislé na úhlu natočení viz obr. (12)



obr. (12) Rozložení bodů podvozku

a popsány rovnicemi:

$$\Delta x_L = -\frac{a}{2} \sin\theta, \quad \Delta y_L = -\frac{a}{2} \cos\theta \quad (40)$$

$$\Delta x_P = \frac{a}{2} \sin\theta, \quad \Delta y_P = \frac{a}{2} \cos\theta \quad (41)$$

$$\Delta x_K = -l \sin\theta, \quad \Delta y_K = l \cos\theta \quad (42)$$

Při znalosti aktuální polohy zvoleného těžiště jsou aktuální polohy bodů podvozku určeny vztahy:

$$x_L = x + \Delta x_L = x - \frac{a}{2} \sin \theta \quad (43)$$

$$y_L = y + \Delta y_L = y - \frac{a}{2} \cos \theta \quad (44)$$

$$x_P = x + \Delta x_P = x + \frac{a}{2} \sin \theta \quad (45)$$

$$y_P = y + \Delta y_P = y + \frac{a}{2} \cos \theta \quad (46)$$

$$x_K = x + \Delta x_K = x - l \sin \theta \quad (47)$$

$$y_K = y + \Delta y_K = y + l \cos \theta \quad (48)$$

5.1.5 Celkový model

Celkový model je tvořen dvěma diferenciálními rovnicemi, pro 4 stavové veličiny, jednoznačně popisujícími chování levého a pravého motoru i chování podvozku a dvěma algebraickými rovnicemi popisujícími mechanickou vazbu mezi otáčkami obou motorů (ω_L a ω_P) a pohybem podvozku (v_T, ω). Stavové veličiny jsou závislé na časových průbězích momentů levého M_L a pravého M_P motoru. Souřadnice polohy zvoleného bodu (těžiště - T) podvozku x, y a úhel natočení vozíku θ jsou popsány pomocí dalších 3 diferenciálních rovnic závislých na úhlových rychlostech ω_L a ω_P .

Z předchozích částí odvozování modelu získáváme:

2 lineární dynamické rovnice tvořené pohybovými rovnicemi popisující závislost posuvné a otáčivé rychlosti zvoleného bodu na momentech působících na hnací kola:

$$\frac{M_L}{\rho} + \frac{M_P}{\rho} - k_v * v_T - m * \frac{d v_T}{dt} = 0 \quad (49)$$

$$- \frac{M_L}{\rho} * \frac{a}{2} + \frac{M_P}{\rho} * \frac{a}{2} - k_\omega * \omega - J \frac{d \omega}{dt} = 0 \quad (50)$$

a 2 algebraické rovnice popisující vazbu mezi otáčkami motorů a rychlostmi pohybu a otáčení těžiště podvozku:

$$v_T = \frac{\rho \omega_L + \rho \omega_P}{2} \quad (51)$$

$$\omega = \frac{\rho * \omega_P - \rho * \omega_L}{a} \quad (52)$$

Tyto 2 dynamické rovnice a 2 algebraické rovnice se 4 stavovými veličinami představují matematický popis dynamického chování ideálního diferenciálně řízeného vozíku s uvažováním ztrát závislých na otáčkách nebo rychlosti. Vstupem do systému jsou momenty M_L a M_P .

Z kinematiky modelu jsme dále získali 3 nelineární kinematické rovnice popisující vztahy mezi úhlovými rychlostmi motorů a polohou středu podvozku:

$$\dot{x} = \frac{\rho*\omega_L + \rho*\omega_P}{2} * \cos\theta \quad (53)$$

$$\dot{y} = \frac{\rho*\omega_L + \rho*\omega_P}{2} * \sin\theta \quad (54)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\rho*\omega_P - \rho*\omega_L}{a} \quad (55)$$

Po dosažení algebraických rovnic (51) a (52) do dynamických rovnic (49) a (50) se stavový prostor redukuje na dvě stavové veličiny ω_L a ω_P :

$$\frac{M_L}{\rho} + \frac{M_P}{\rho} - k_v * \frac{\rho\omega_L + \rho\omega_P}{2} - m * \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho\omega_L + \rho\omega_P}{2} \right) = 0 \quad (56)$$

$$-\frac{M_L}{\rho} * \frac{a}{2} + \frac{M_P}{\rho} * \frac{a}{2} - k_\omega * \frac{\rho*\omega_P - \rho*\omega_L}{a} - J \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho*\omega_P - \rho*\omega_L}{a} \right) = 0 \quad (57)$$

Vypočtením časových derivací vztahů (56) a (57) dostáváme:

$$\frac{M_L}{\rho} + \frac{M_P}{\rho} - k_v * \frac{\rho}{2} (\omega_L + \omega_P) - m * \frac{\rho}{2} (\dot{\omega}_L + \dot{\omega}_P) = 0 \quad (58)$$

$$-\frac{M_L}{\rho} * \frac{a}{2} + \frac{M_P}{\rho} * \frac{a}{2} - k_\omega * \frac{\rho}{a} (\omega_L + \omega_P) - J \frac{\rho}{a} (\dot{\omega}_P - \dot{\omega}_L) = 0 \quad (59)$$

Ze vztahů (58) a (59) vyjádříme vztahy pro veličiny $\dot{\omega}_P$ a $\dot{\omega}_L$, které reprezentují derivace úhlových rychlostí levého a pravého kola:

$$\dot{\omega}_L + \dot{\omega}_P = \frac{2*M_L}{\rho^2*m} + \frac{2*M_P}{\rho^2*m} - \frac{k_v}{m} (\omega_L + \omega_P) \quad (60)$$

$$\dot{\omega}_P - \dot{\omega}_L = -\frac{a*M_L*\frac{a}{2}}{\rho^2*J} + \frac{a*M_P*\frac{a}{2}}{\rho^2*J} - \frac{k_\omega}{J} (\omega_P - \omega_L) \quad (61)$$

Nejprve vyjádříme ze vztahu (61) veličinu $\dot{\omega}_P$ a dosadíme do vztahu (60). Poté, po matematických úpravách získáváme vztah pro veličinu $\dot{\omega}_L$ reprezentující derivaci úhlové rychlosti levého kola:

$$\dot{\omega}_L = \frac{a^2*m+4J}{4*\rho^2*m*J} * M_L + \frac{4J-a^2*m}{4*\rho^2*m*J} M_P + \frac{k_\omega*m-k_v*J}{2*m*J} \omega_P - \frac{k_\omega*m+k_v*J}{2*m*J} \omega_L \quad (62)$$

Zpětným dosazením rovnice (62) do (61) dostáváme po matematických úpravách vztah veličiny $\dot{\omega}_P$ reprezentující derivaci úhlové rychlosti pravého kola:

$$\dot{\omega}_P = \frac{4J-a^2*m}{4*\rho^2*m*J} * M_L + \frac{4J+a^2*m}{4*\rho^2*m*J} M_P - \frac{k_\omega*m+k_v*J}{2*m*J} \omega_P + \frac{k_\omega*m-k_v*J}{2*m*J} \omega_L \quad (63)$$

Výsledný model závislosti výstupních veličin dynamické části modelu na vstupních proměnných lze přepsat do formy standardního stavového modelu v maticové formě jako:

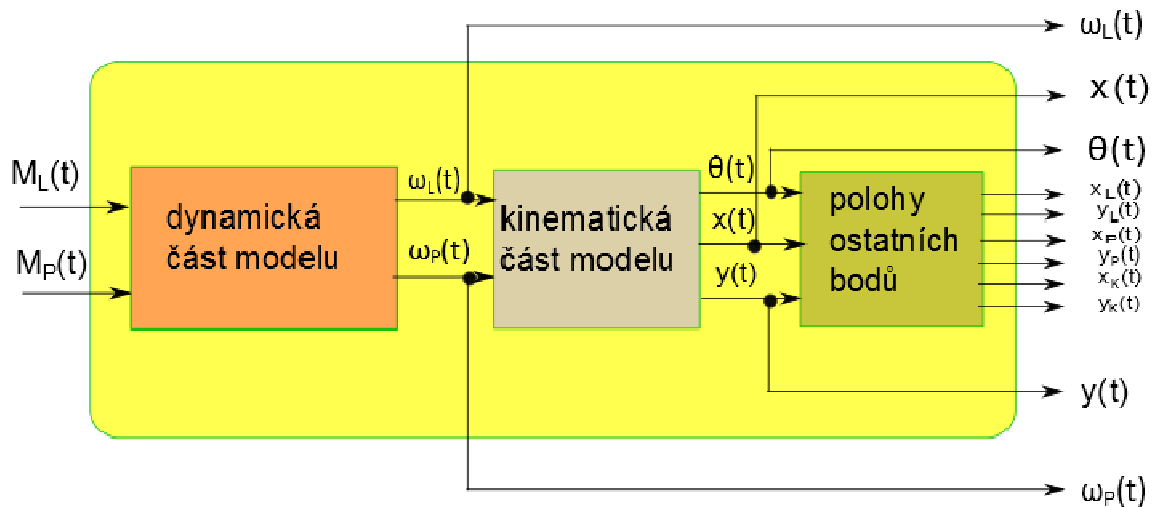
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_L(t) \\ \dot{\omega}_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_\omega*m+k_v*J}{2*m*J} & \frac{k_\omega*m-k_v*J}{2*m*J} \\ \frac{k_\omega*m-k_v*J}{2*m*J} & -\frac{k_\omega*m+k_v*J}{2*m*J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L(t) \\ \omega_P(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4J+a^2*m}{4*\rho^2*m*J} & \frac{4J-a^2*m}{4*\rho^2*m*J} \\ \frac{4J-a^2*m}{4*\rho^2*m*J} & \frac{4J+a^2*m}{4*\rho^2*m*J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_L(t) \\ M_P(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_L(t) \\ \omega_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L(t) \\ \omega_P(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_L(t) \\ M_P(t) \end{bmatrix} \quad (64)$$

Matematický model jsme rozdělili na tři sériově zapojené části, jak je ukázáno na obr. (13)



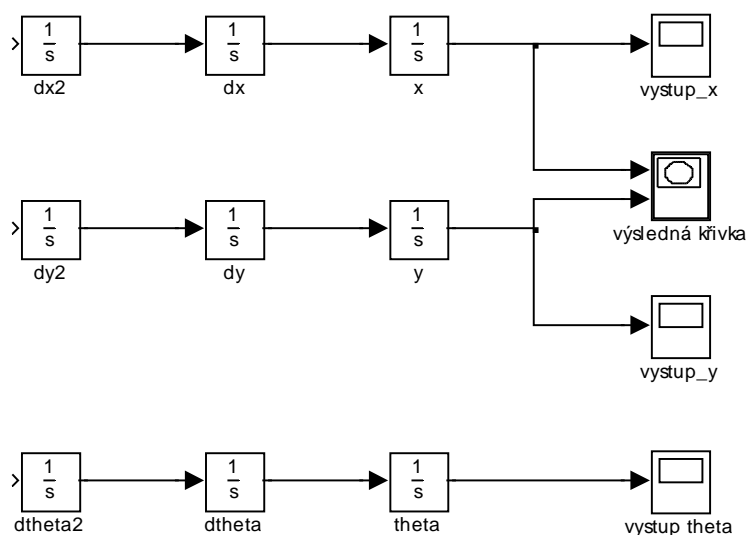
obr. (13) Rozdělení matematického modelu

Z pohledu návrhu řízení jsou akčními veličinami řídicí signály M_L a M_P . Úhlové rychlosti levého ω_L a pravého kola ω_P jsou výstupními veličinami dynamické části modelu. Tyto veličiny jsou vstupy do navazující kinematické části modelu, jež má výstupy souřadnice x , y polohy zvoleného bodu a úhel natočení podvozku vozíku θ . Poslední částí je výpočet souřadnic polohy dalších bodů podvozku.

6. Generování požadované trajektorie

Požadovaná trajektorie může být zadávána v parametrickém tvaru $x = x(t)$, $y = y(t)$. U této volby je známa celá trajektorie, nebo lze určovat aktuální hodnoty poloh pomocí generátoru vytvořeného v programovém prostředí MATLAB/Simulink. V každém kroku simulace jsou generovány aktuální veličiny x , y a θ , udávající požadovanou trajektorii vozíku. V této bakalářské práci využijeme generátor trajektorie, z důvodu snazšího určení aktuální odchylky požadované veličiny od skutečné. Určení správné hodnoty odchylky bude využito pro vnější řízení veličin x , y a θ .

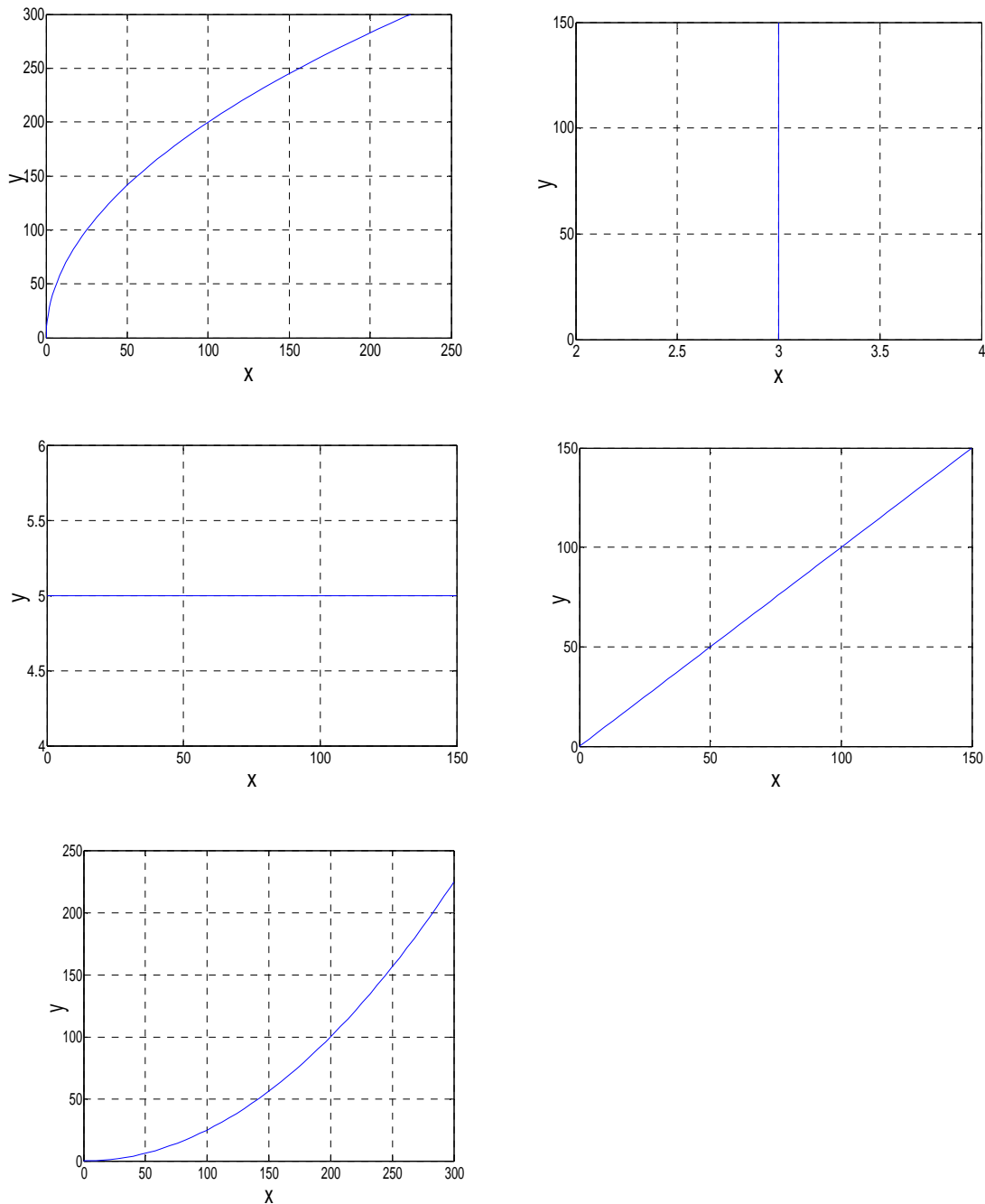
Generátor trajektorie je tvořen bloky integrátor z knihovny Simulink viz obr. (14).



obr. (14) Generátor požadované trajektorie

Použitím jednoho integrátoru jsme schopni generovat konstantní průběhy veličin, při zapojení druhého integrátoru průběhy lineární, třetím integrátorem kvadratické průběhy atd. Pro námi zvolené testovací křivky je zapotřebí použití tří integrátorů. Hodnoty veličin x a y určující aktuální požadovanou polohu středu vozíku volíme libovolně. Úhel natočení vozíku naopak volíme tak, aby byl natočený ve směru trajektorie. Kontrola správného natočení byla provedena pomocí vztahu $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, kde x a y jsou generované polohy středu vozíku.

Příklady použitých trajektorií sloužících k testování modelů jsou znázorněny na obr. (15).

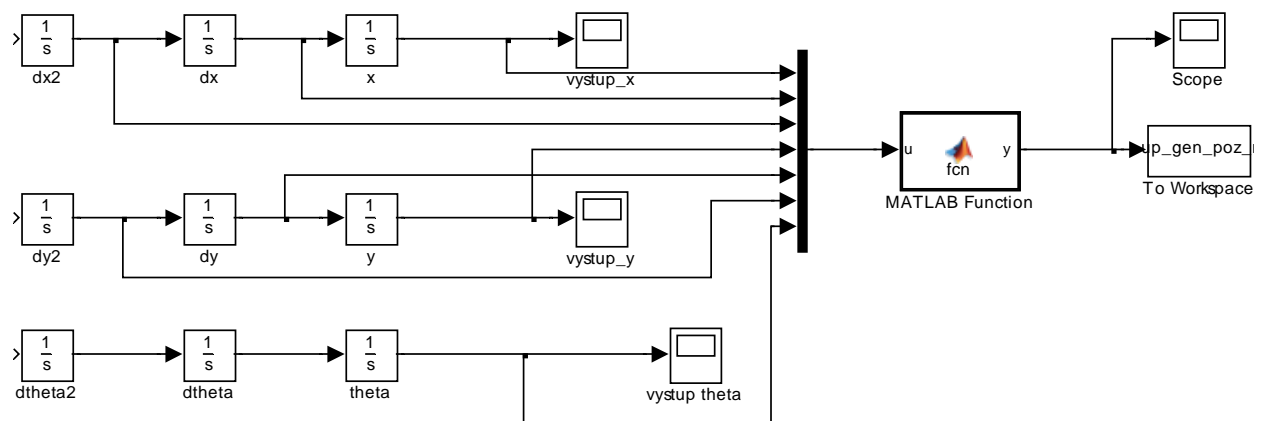


obr. (15) Použité trajektorie pro testování modelů

Použité trajektorie slouží k otestování funkčnosti modelu a navrženého řízení. U používaných modelů máme jako vstupní veličiny do systému požadované rychlosti. Generátor požadované trajektorie musí obsahovat výpočet požadovaných rychlostí jednotlivých kol v_L^* a v_P^* . Určení požadovaných rychlostí z požadované trajektorie je popsáno v kapitole 4.1. Pro výpočet požadovaných rychlostí lze nastavit rychlost středu vozíku na požadovanou konstantní hodnotu, nebo se rychlost vozíku určuje výpočtem tak, aby se poloha středu vozíku shodovala s aktuální hodnotou požadované trajektorie v každém časovém okamžiku simulace. Za

předpokladu, že známe předem požadovanou dráhu, můžeme nastavit konstantní rychlost středu vozíku. Vozík se za těchto podmínek pohybuje po požadované dráze touto rychlostí. V této práci používáme generování požadované polohy pomocí generátoru trajektorie, využijeme tedy dopočítávání rychlosti středu vozíku. Rychlost středu vozíku v může být proměnná.

V programovém prostředí MATLAB/Simulink využíváme na výpočet požadovaných rychlostí z požadované trajektorie blok Matlab function, obsahující vztahy popsané v kapitole 4.1. Schéma zapojení je zobrazeno na obr. (16).



obr. (16) Schéma zapojení generátoru trajektorie s výpočtem požadovaných úhlových rychlostí v MATLAB/Simulink

7. Odezvy systému na požadované úhlové rychlosti

Pro generované požadované úhlové rychlosti ω_L^* a ω_P^* ověříme, jak na ně budou reagovat jednotlivé části systému.

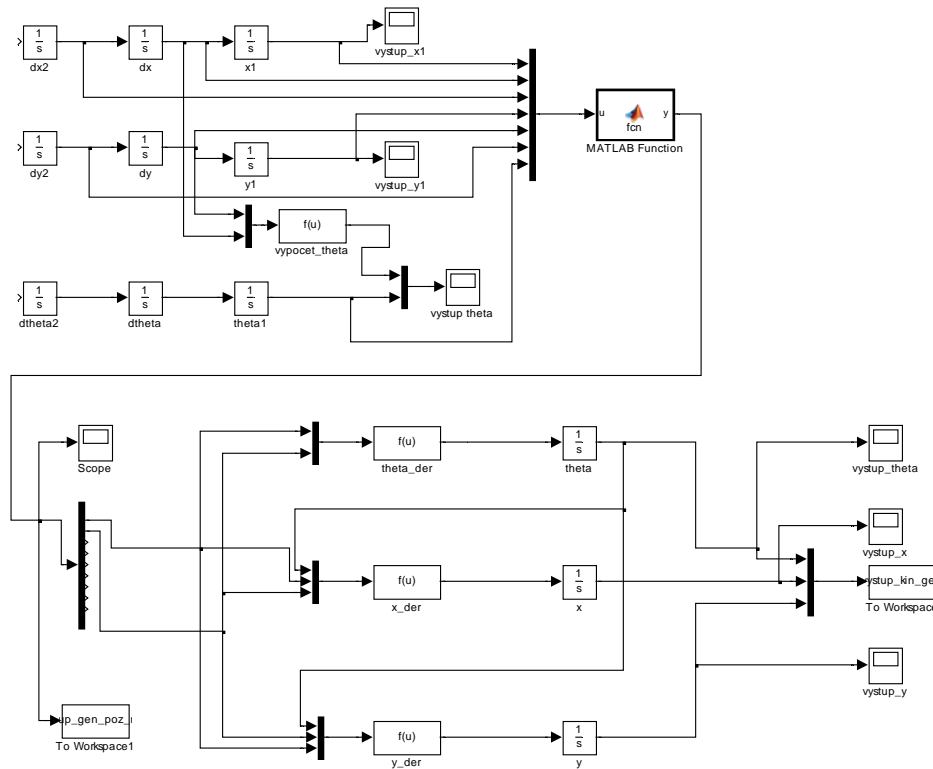
Pro testování systému bylo zapotřebí zvolit hodnoty parametrů (konstant) systému, pro které se budou simulace provádět. Zvolené hodnoty jsou znázorněny v tab. (1) a jejich volba vychází z [1].

Označení	Hodnota	Rozměr	Význam
m	2.25	kg	Celková hmotnost vozíku
a	0.8	m	Délka zadní nápravy
J	0.55	kg*m ²	Moment setrvačnosti
ρ	0.05	m	Poloměr poháněného kola
k_v	0.1	kg/s	Koeficient odporu posuvné rychlosti vozíku
k_ω	1.35	kg*m ² /s	Koeficient odporu otáčivé rychlosti vozíku

tab. (1) Tabulka zvolených parametrů systému

7.1 Odezva kinematické části systému na požadované úhlové rychlosti

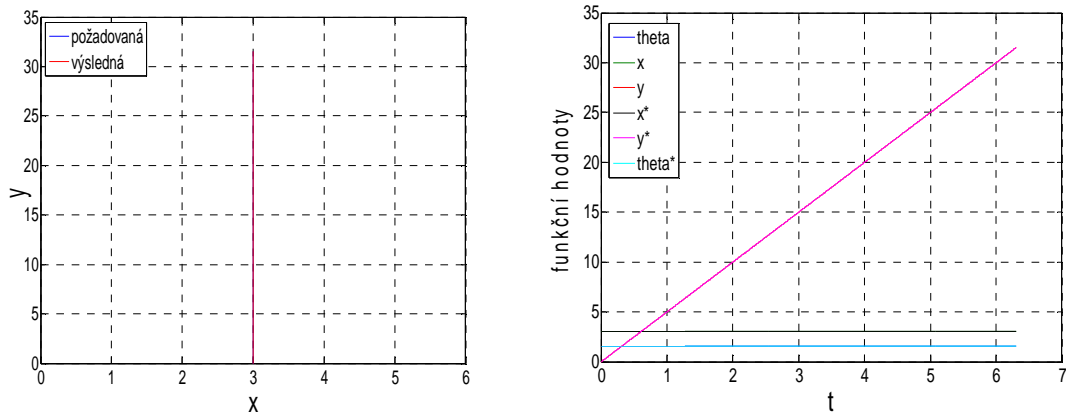
Nejprve ověříme, jaké budou reakce kinematické části systému, jehož rovnice jsou odvozené v kapitole 5.1.3, pokud na vstup přivedeme požadované úhlové rychlosti ω_L^* a ω_P^* z generátoru trajektorie. Schéma zapojení v Matlab/Simulink viz obr. (17).



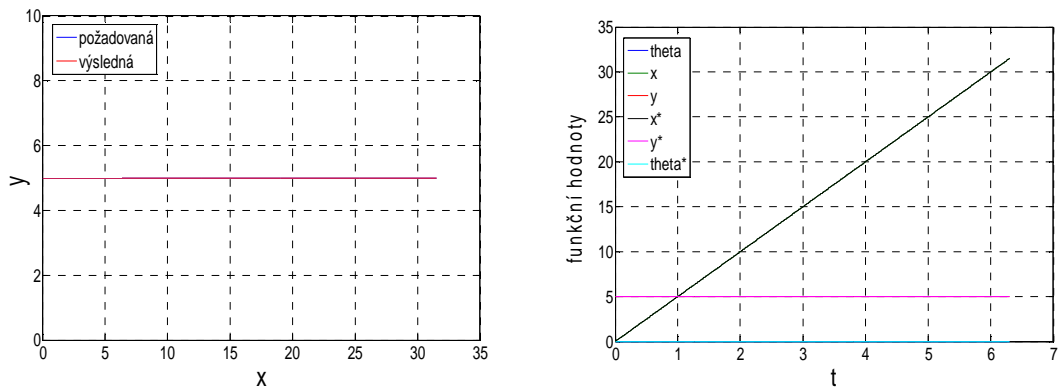
obr. (17) Schéma zapojení pro testování kinematické části systému na vstupní úhlové rychlosti

Pro požadované úhlové rychlosti ω_L^* a ω_P^* odpovídající požadovaným trajektoriím uvedeným v kapitole 6. jsme získali výstupní trajektorie vozíku. V následujících grafech lze pozorovat porovnání vstupní (požadované) trajektorie s trajektorií výstupní, po které se vozík pohybuje a výstupní hodnoty systému x , y a θ .

Odezvy odpovídající požadovaným konstantním trajektoriím znázorněné na obr. (18) a (19):

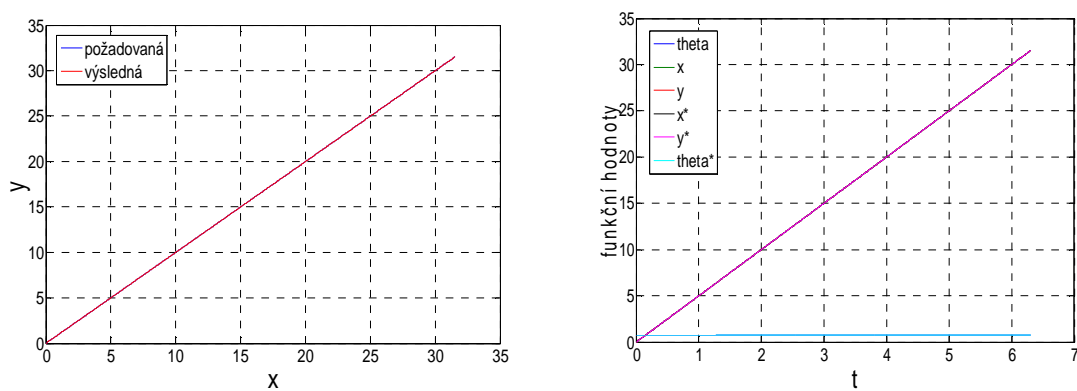


obr. (18) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část)



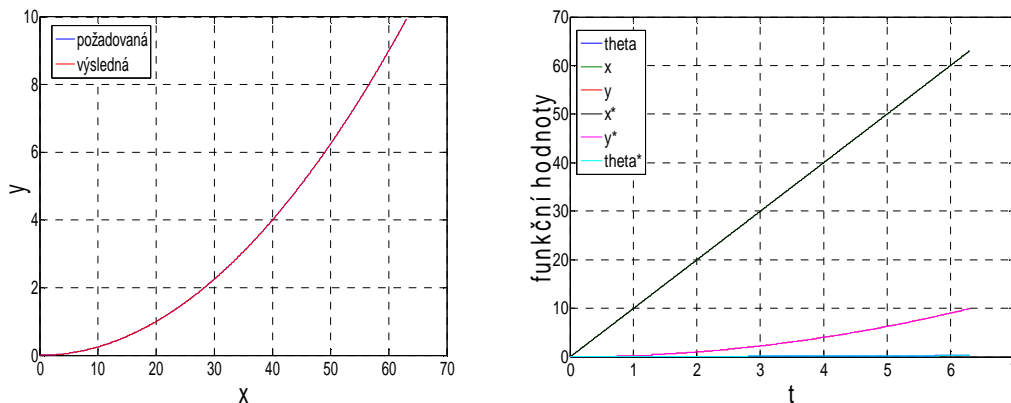
obr. (19) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část)

Odezvy odpovídající požadované lineární trajektorii znázorněné na obr. (20):

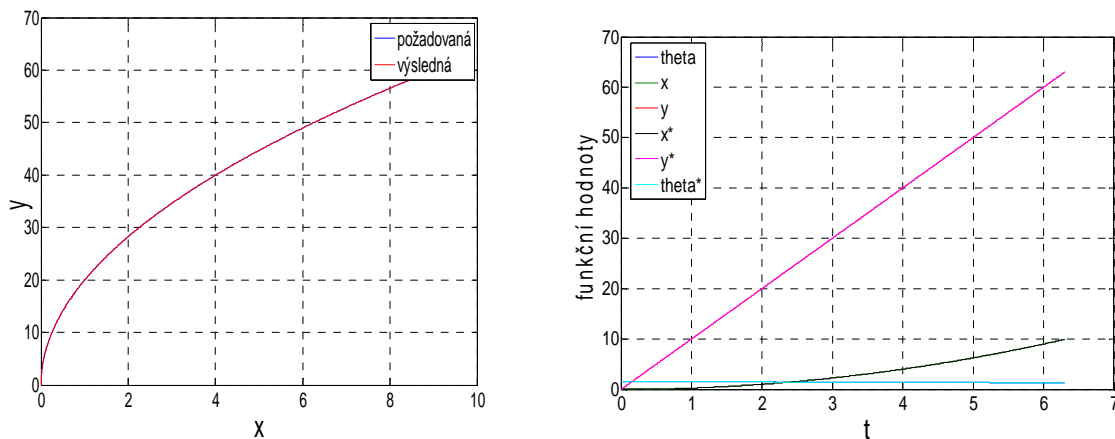


obr. (20) Porovnání požadované lineární a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část)

Odezvy odpovídající požadovaným kvadratickým trajektoriím znázorněné na obr. (21) a (22):



obr. (21) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část)



obr. (22) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro kinematickou část)

Z výsledných charakteristik je patrné, že po přivedení úhlových rychlostí odpovídajících požadované trajektorii na vstup systému, naměříme na jeho výstupu trajektorii shodující se s požadavkem. V následujících krocích je nutné zajistit, aby rychlosti ω_L a ω_P vstupující do kinematické části systému odpovídali požadovaným úhlovým rychlostem ω_L^* a ω_P^* .

7.2 Odezva kinematické a dynamické části na požadované úhlové rychlosti

V této části práce přivádíme vstupní požadované rychlosti nejprve na dynamický systém, na jehož výstupu dostáváme úhlové rychlosti jednotlivých kol ω_L a ω_P , které jsou vstupními hodnotami do kinematické části. Vstupem do dynamické části systému jsou momenty kol M_L a M_P , proto musíme navrhnout řízení dynamické části systému. Použitý regulátor bude mít na vstupu odchylky výstupních úhlových rychlostí (ω_L , ω_P) od požadovaných (ω_L^* , ω_P^*) a na

výstupu momenty daných kol (M_L , M_P). Je potřeba splnit požadavek, abychom na výstupu regulátoru volili momenty kol na vstup dynamického systému tak, aby se hodnota požadovaných rychlostí shodovala s hodnotou na výstupu dynamického systému.

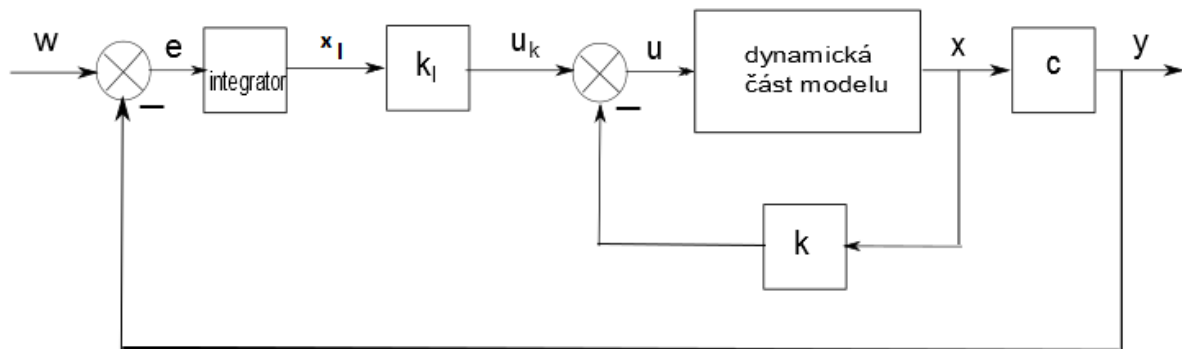
7.2.1 Řízení dynamické části systému tato kapitola vychází z [2]

Před samotným návrhem řízení dynamické části systému je potřeba nejprve ověřit, zda je systém říditelný. Ověříme i jeho pozorovatelnost. Pro ověření říditelnosti ověřujeme podmínku, že matice říditelnosti daného systému musí mít plnou řádkovou hodnost, aby byl systém říditelný. Toto pravidlo jsme ověřili pomocí funkcí *ctrb* a *rank* v programovém prostředí MATLAB. Matice říditelnosti měla řádkovou hodnost dva, což odpovídá dynamickému systému. Systém je říditelný.

Aby byl systém pozorovatelný, musí mít odpovídající matice pozorovatelnosti plnou sloupcovou hodnost. Ověření bylo provedeno pomocí funkcí *obsv* a *rank* v MATLABu. Matice pozorovatelnosti měla sloupcovou hodnost dva, odpovídající dynamickému systému. Z ověření plyne, že dynamický systém je říditelný i pozorovatelný.

Po ověření říditelnosti a pozorovatelnosti je popsán návrh řízení dynamické části. Pro návrh řízení požadujeme, aby regulovaná veličina sledovala v ustáleném stavu obecný průběh referenčního signálu $w(t)$. Pro splnění tohoto požadavku bylo zvoleno řízení pomocí stavového regulátoru s integrací. Stavový regulátor nezvyšuje řád systému, ale zavedením zpětné vazby obsahující měřitelný stav vynásobený řádkovou maticí k (matice konstantních parametrů stavového regulátoru) dochází ke změně matice dynamiky. Volbou řádkové matice k lze měnit vlastní čísla matice dynamiky A , a tedy i póly odpovídajícího charakteristického polynomu. Nuly systému volit nelze. Podmínkou libovolné umístitelnosti pólů je říditelnost systému, kterou jsme ověřili výše.

Samotný stavový regulátor reguluje stavové proměnné systému do nuly. Pro sledování požadované hodnoty w je zapotřebí přivádět kompenzační řízení u_k . Pro námi zvolený regulátor přidáváme integraci regulační odchylky zavedené vnější zpětnou vazbou od regulovaného výstupu. Do otevřené regulační smyčky je zaveden astatismus, zaručující přesnost regulace na konstantní hodnotu. Blokové schéma regulátoru dynamické části systému je zřejmé z obr. (23)



obr. (23) Blokové schéma regulátoru dynamické části systému

Výpočet konstantních hodnot řádkové matice k parametrů stavového regulátoru a integrační konstanty k_I :

Do dynamického systému:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (65)$$

dosadíme řízení:

$$u(t) = -k * x(t) + k_I * x_I(t) \quad (66)$$

kde k je řádková matice parametrů stavového regulátoru a k_I integrační konstanta.

Získáváme uzavřený systém s rozšířeným vektorem stavu po dosazení (66) do (65):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B * k & B * k_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (67)$$

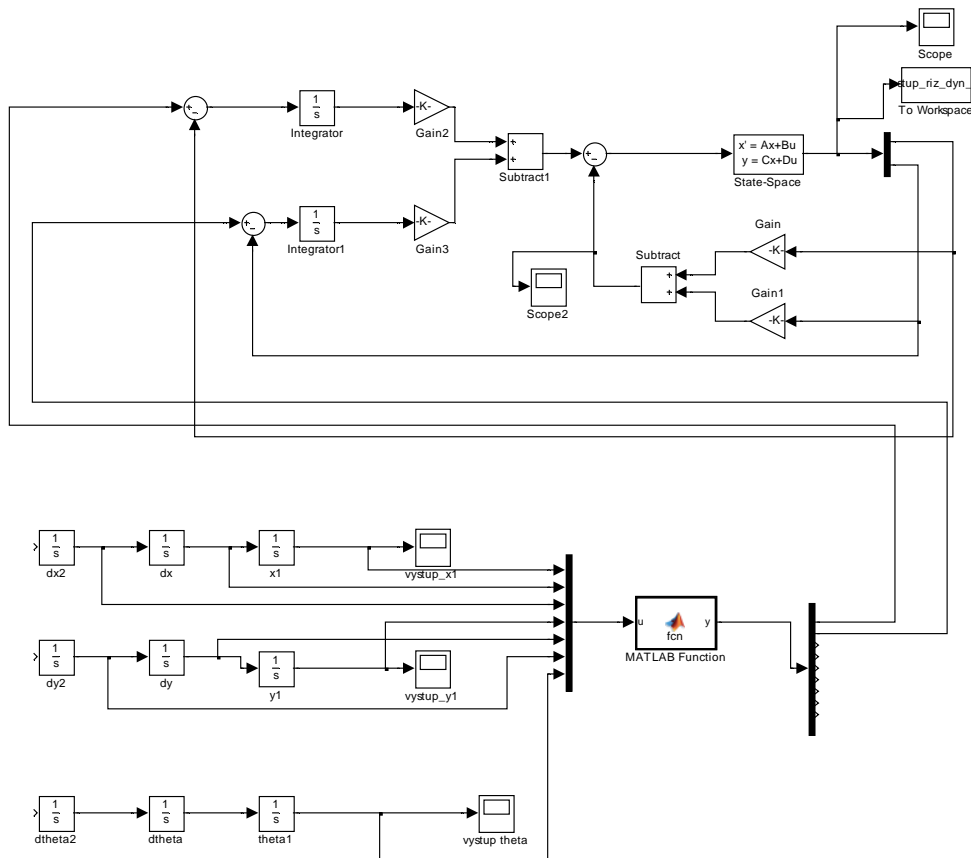
$$y(t) = [C \ 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} \quad (68)$$

Výpočet konstantních čísel matice parametrů a integrační konstanty podle požadovaných vlastních čísel $P = [-22 \ -21 \ -20 \ -19]$ matice dynamiky jsme provedli pomocí funkce *place* v programovém prostředí MATLAB.

$$k = \begin{bmatrix} 0.5101 & -0.1054 \\ -0.1024 & 0.5243 \end{bmatrix}$$

$$k_I = \begin{bmatrix} 18.6834 & -4.1191 \\ -3.9009 & 19.7285 \end{bmatrix}$$

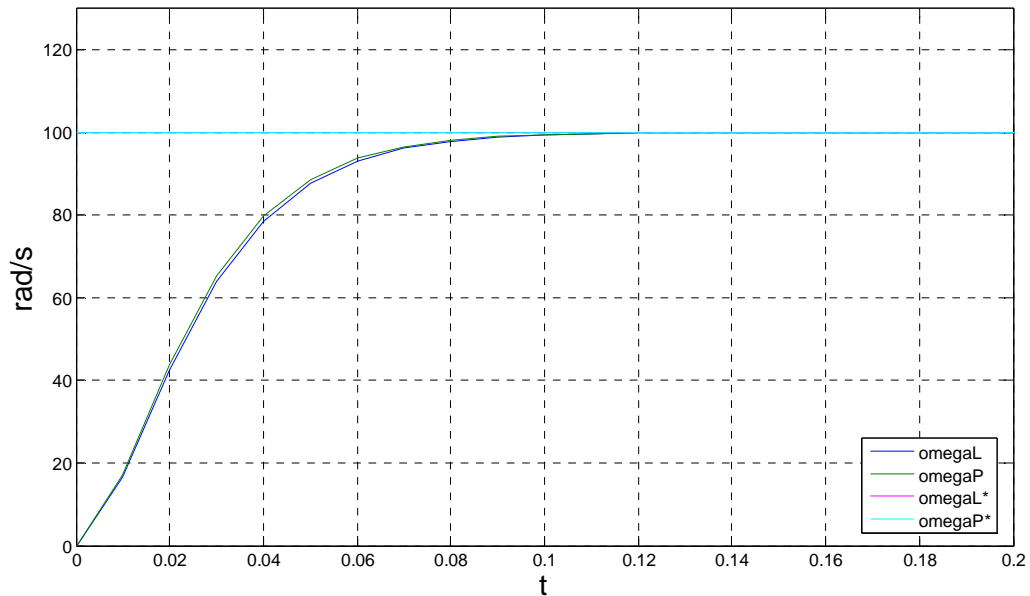
Vypočítané hodnoty byly dosazeny do získaného uzavřeného systému s rozšířeným vektorem (67), a poté bylo ověřeno pomocí funkce *eig* v MATLABu, že se požadovaná vlastní čísla shodují s vlastními čísly matice dynamiky tohoto uzavřeného systému. Výsledné zapojení v MATLAB/Simulink je patrné z obr. (24)



obr. (24) Schéma zapojení pro testování řízené dynamické části systému na vstupní úhlové rychlosti

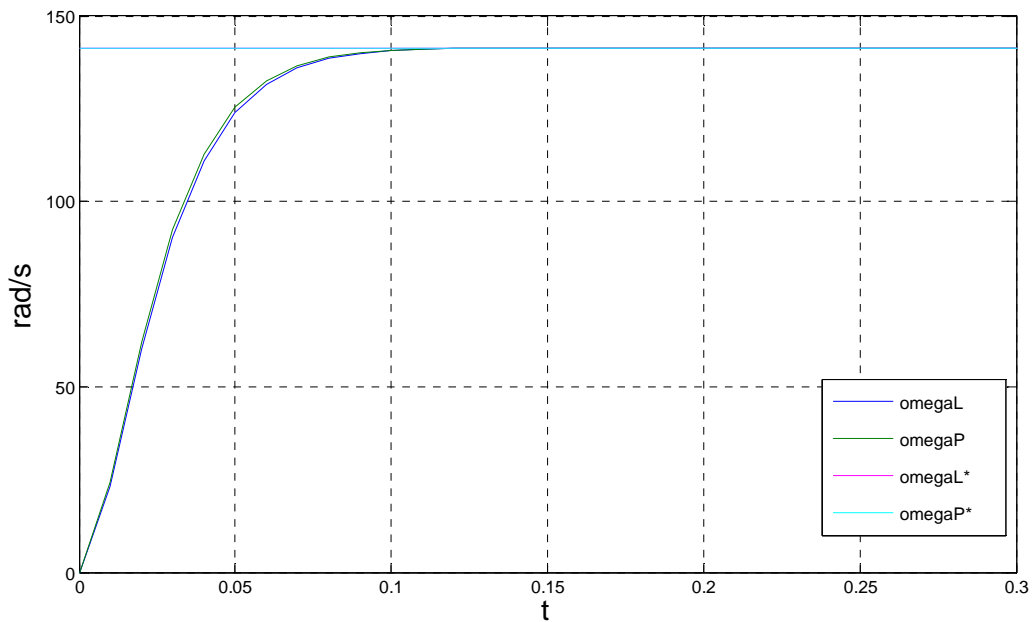
7.2.2 Odezvy řízeného systému na požadované úhlové rychlosti ω_L^* a ω_P^* :

Požadované konstantní trajektorie znázorněné na obr. (25):



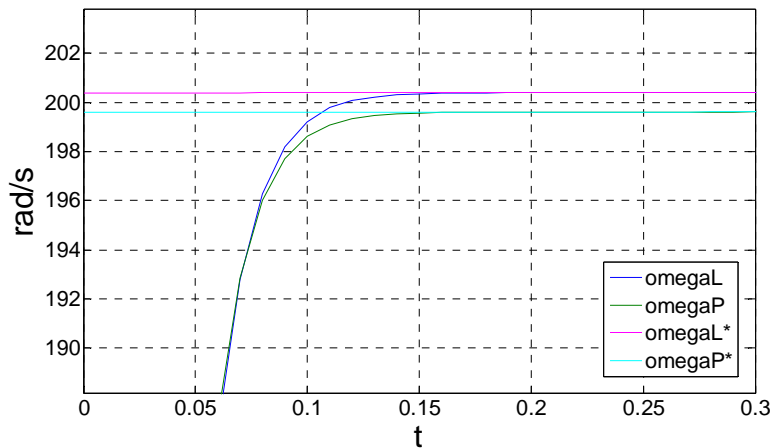
obr. (25) Porovnání požadované a výstupní úhlové rychlosti z řízené dynam. části systému (pro konstantní trajektorii)

Požadované lineární trajektorie znázorněné na obr. (26):



obr. (26) Porovnání požadované a výstupní úhlové rychlosti z řízené dynam. části systému (pro lineární trajektorii)

Požadované kvadratické trajektorie znázorněné na obr. (27):



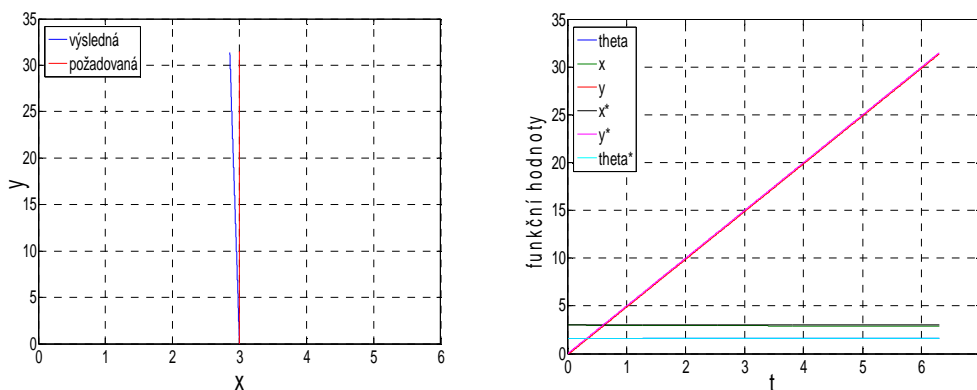
obr. (27) Porovnání požadované a výstupní úhlové rychlosti z řízené dynam. části systému (pro kvadratickou trajektorii)

Ze simulovaných charakteristik je patrná funkce regulátoru, který po určitém čase způsobí sledování požadovaných úhlových rychlostí.

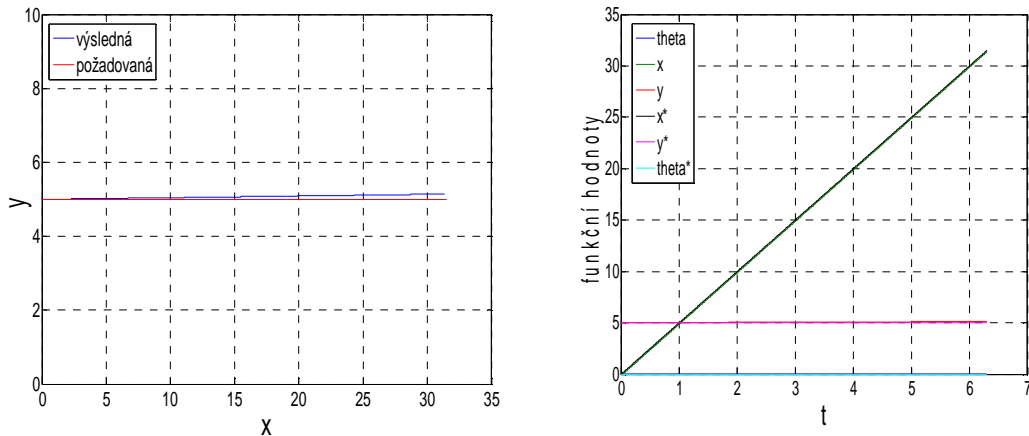
Po otestování řízení dynamické části došlo k ověření reakcí řízeného dynamického systému společně s navazující kinematickou částí. Vstupem do systému jsou požadované souřadnice žádané trajektorie x^* , y^* a θ^* a výstupem souřadnice polohy středu vozíku x , y a úhel natočení θ .

7.2.3 Odezvy řízeného dynamického systému s navazující kinematickou částí na požadované úhlové rychlosti ω_L^* a ω_P^*

Odezvy odpovídající požadovaným konstantním trajektoriím znázorněné na obr. (28) a (29):

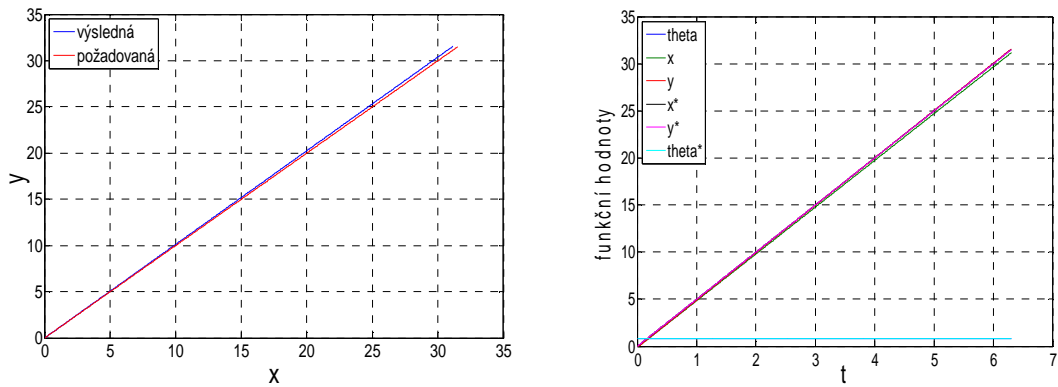


obr. (28) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)



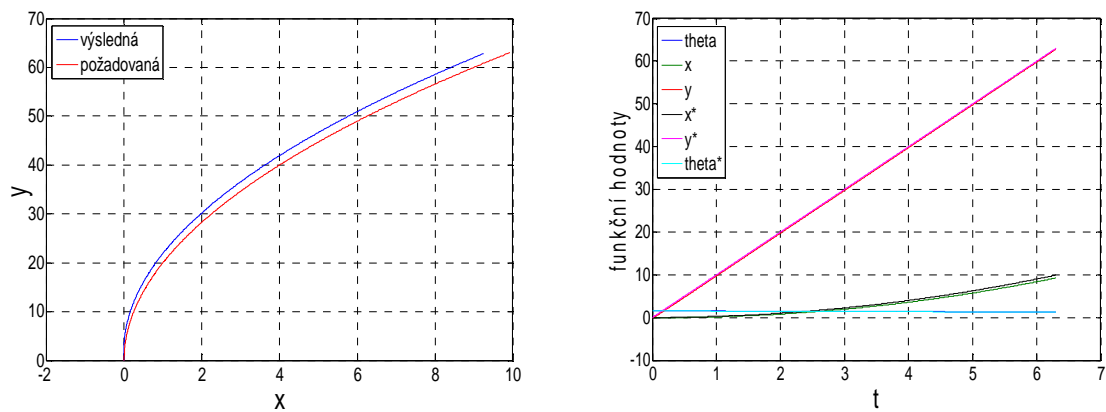
obr. (29) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)

Odezvy odpovídající požadované lineární trajektorii znázorněné na obr. (30):

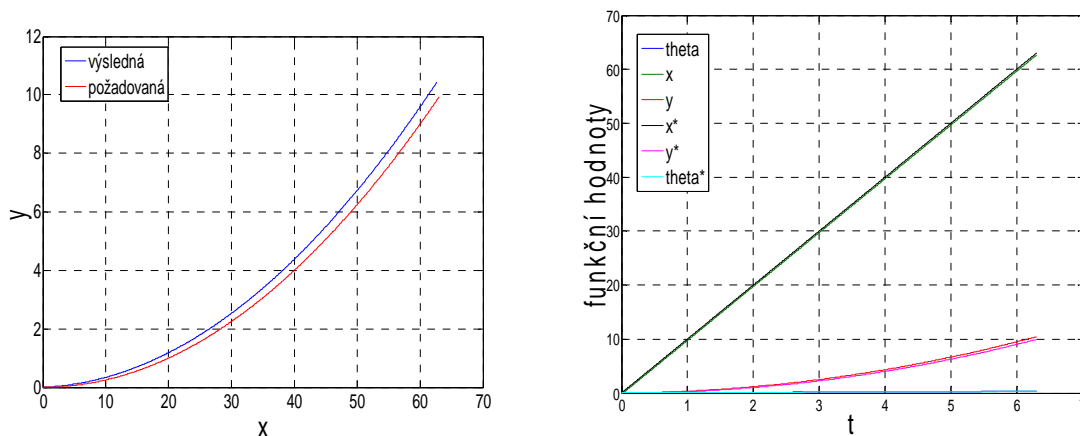


obr. (30) Porovnání požadované lineární a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)

Odezvy odpovídající požadovaným kvadratickým trajektoriím znázorněné na obr. (31) a (32):



obr. (31) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)



obr. (32) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, porovnání požadovaných a výsledných hodnot x , y a θ (pro řízenou dynamickou část s kinematickou částí)

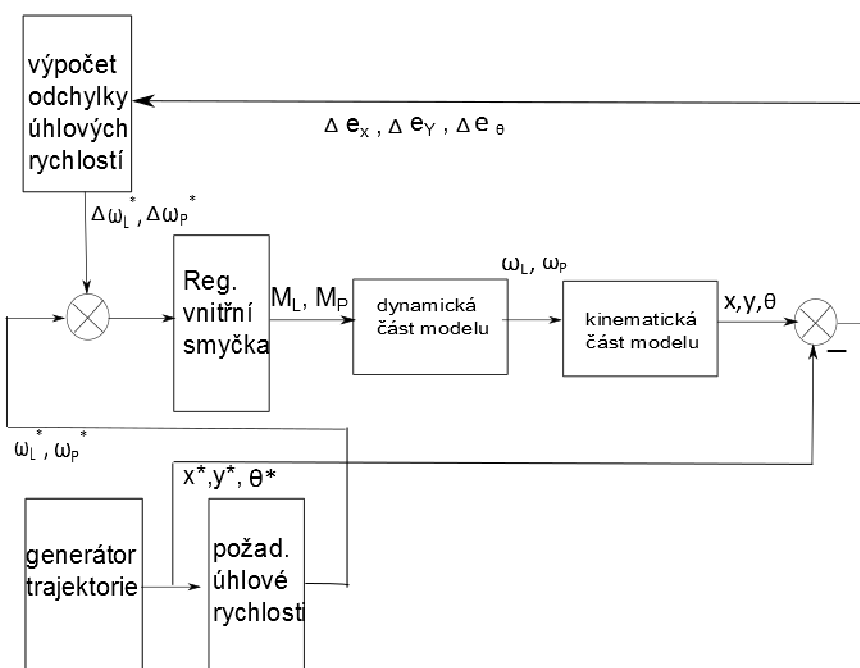
Na předchozích odezvách můžeme pozorovat, že požadované hodnoty žádané trajektorie neodpovídají zcela přesně hodnotám výsledné polohy středu trojkolového vozíku. Tuto odchylku způsobuje regulátor dynamické části, který má rozdílné přechodové děje pro levé a pro pravé kolo. Drobné odchylky jsou patrné v charakteristikách odezev řízení dynamické části v závislosti na požadovaných rychlostech obr. (25) - obr. (27). Obě rychlosti kol se ustálí na shodné hodnotě, ale rychlost jednoho z kol dosáhne této úrovně nepatrně rychleji. Vzhledem k této situaci dojde k chybě v natočení vozíku, který se bude s narůstajícím časem simulace vzdalovat od požadované trajektorie.

7.3 Návrh řízení s vnější zpětnou vazbou

Abychom odstranili chybu popsanou v kapitole 7.2.3, je nutné navrhnout řízení vnější smyčky, které bude regulovat odchylky výstupních hodnot polohy středu vozíku a jeho natočení od požadovaných hodnot zadané (generované) trajektorie. Řízení je navrženo tak, aby na svém výstupu generovalo odchylky $\Delta\omega_L^*$ a $\Delta\omega_P^*$ vstupních požadovaných rychlostí přiváděných na vstup řízeného dynamického systému dle aktuálních odchylek e_x , e_y a e_θ požadovaných hodnot od skutečných hodnot polohy vozíku.

Řízení odstraňující odchylky poloh má své opodstatnění i pro reálné trojkolové vozíky, u kterých může dojít k drobným změnám natočení vlivem rozdílného podkladu pod jednotlivými koly, ke změně natočení vlivem drobné překážky např. nerovnost podkladu, po kterém se vozík pohybuje atd. Tyto chyby lze pomocí odchylek $\Delta\omega_L^*$ a $\Delta\omega_P^*$ na výstupu vnějšího řízení odstranit, a pohybovat se tak po zadané trajektorii.

Celkové zapojení regulované soustavy s vnější regulační smyčkou bylo navrženo dle obr. (33).



obr. (33) Blokové schéma celkového zapojení modelu

Odvození řízení pomocí vnější zpětné vazby, jehož vstupem jsou odchylky požadovaných veličin od skutečných e_x , e_y a e_θ a výstupem odchylky úhlových rychlostí $\Delta\omega_L^*$ a $\Delta\omega_P^*$ vstupujících do řízeného dynamického systému, jsme provedli heuristicky. Při návrhu bylo vycházeno z chyby, kterou způsobuje nepřesné natočení vozíku viz kapitola 7.2.3. Základní myšlenkou se stal fakt, že pokud bude odchylka natočení vozíku nulová, bude vozík sledovat požadovanou trajektorii. Výpočet odchylek úhlových rychlostí $\Delta\omega_L^*$ a $\Delta\omega_P^*$ je tedy převážně závislý na aktuální odchylce natočení e_θ . Pokud je odchylka úhlu natočení kladná znamená to, že se pravé kolo vozíku pohybuje rychleji a způsobuje odchýlení vozíku doleva od požadované trajektorie. Je tedy zapotřebí úhlovou rychlost levého kola ω_L zvýšit, nebo naopak snížit úhlovou rychlost ω_P kola pravého. V našem případě jsme zvolili, že při kladné odchylce natočení vozíku e_θ zvýšíme požadovanou úhlovou rychlost levého kola ω_L^* , zvýší se i rychlost skutečná ω_L . Čím je odchylka natočení vyšší, tím více zvyšujeme úhlovou rychlost levého kola. Experimentálně bylo zjištěno, že při odchylce $e_\theta = 0,003$ rad je potřeba volit odchylku požadované úhlové rychlosti levého kola $\Delta\omega_L^* = 1$ rad/s. Vypočtenou hodnotu odchylky $\Delta\omega_L^*$ závislé na odchylce od požadovaného úhlu natočení e_θ získáme následovně:

$$\Delta\omega_L^* = \frac{e_\theta}{0,003} * 1 \text{ [rad/s]} \quad (69)$$

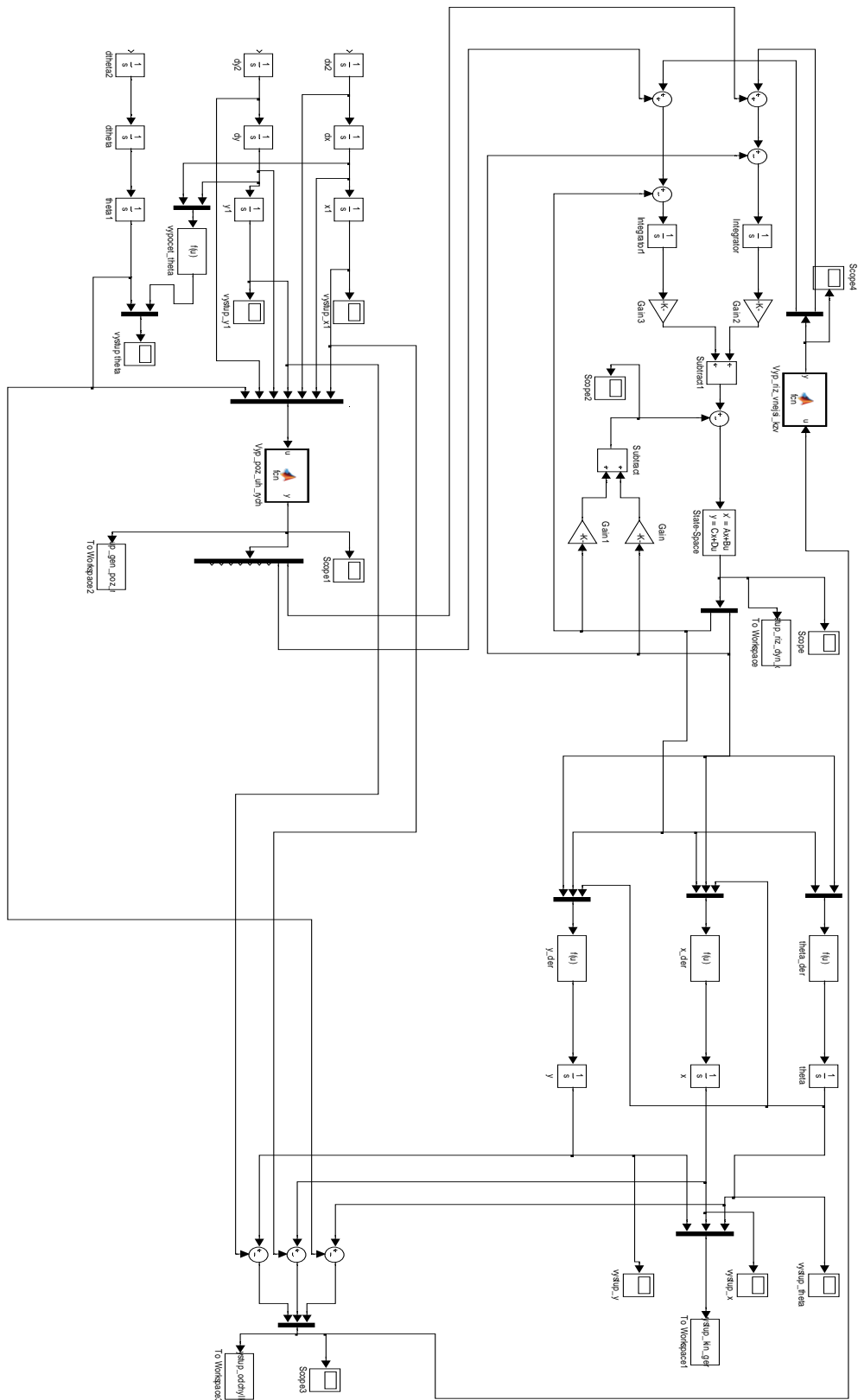
S narůstající úhlovou rychlostí levého kola klesá odchylka e_θ a tím klesá i vypočtená odchylka požadované úhlové rychlosti $\Delta\omega_L^*$. Při nulové odchylce požadované úhlové rychlosti kol neměníme.

Záporná odchylna úhlu natočení znamená, že se rychleji pohybuje kolo levé. V souladu s kladnou odchylkou zvyšujeme požadovanou úhlovou rychlost kola pravého ω_P^* . Zvýšení skutečné úhlové rychlosti ω_P opět způsobí, že se odchylna od požadovaného úhlu natočení e_θ bude snižovat.

Vypočtenou hodnotu odchylky $\Delta\omega_P^*$ závislé na odchylce od požadovaného úhlu natočení e_θ získáme následovně:

$$\Delta\omega_P^* = \frac{|e_\theta|}{0.003} * 1 \text{ [rad/s]} \quad (70)$$

Získané hodnoty odchylek jednotlivých kol $\Delta\omega_L^*$ a $\Delta\omega_P^*$ ze vztahů (69) a (70) přivádíme na vstup řízené dynamické části systému. Schéma zapojení celého řízeného systému v programovém prostředí MATLAB/Simulink je patrné na obr. (34). Samotný výpočet odchylek jednotlivých kol je realizován blokem MATLAB function.



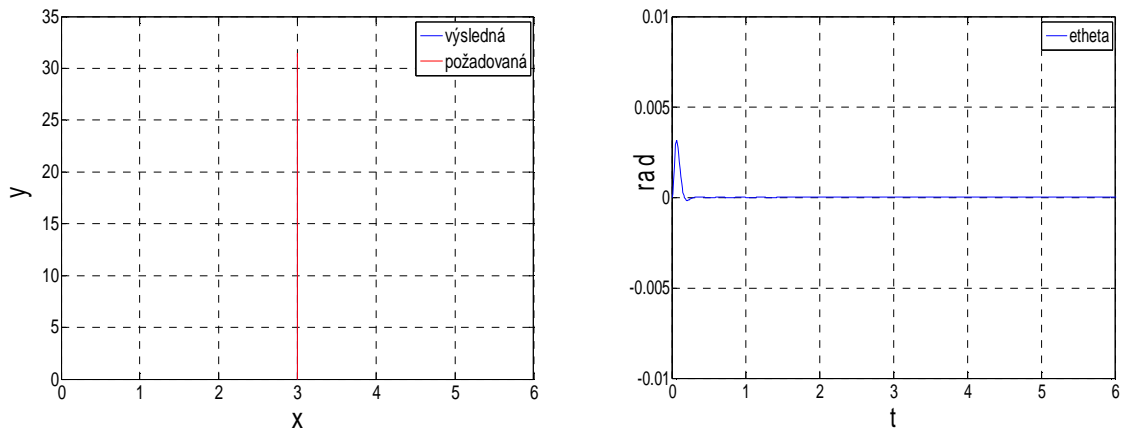
obr. (34) Schéma zapojení celého řízeného systému v programovém prostředí MATLAB/Simulink

7.3.1 Odezvy celkového řízeného systému na požadované úhlové rychlosti

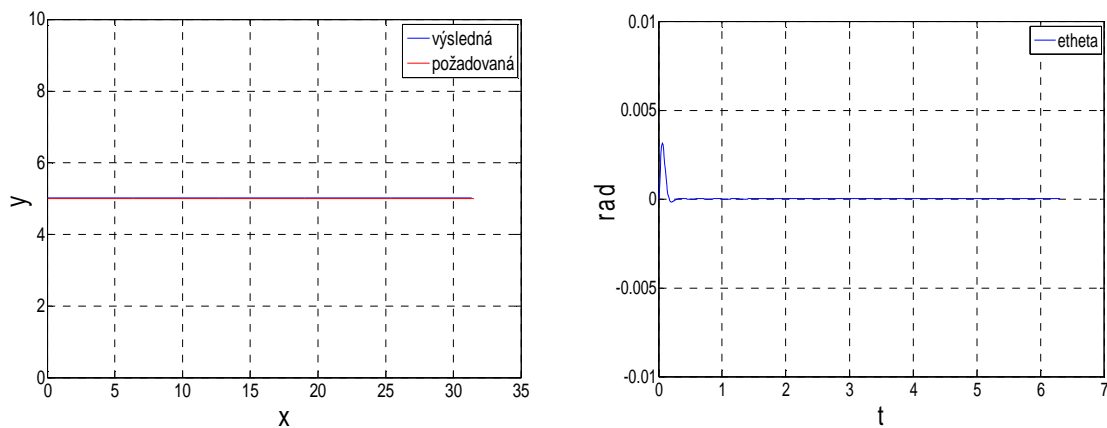
Funkčnost heuristicky odvozeného řízení v celkovém řízeném systému jsme ověřili pomocí simulace v programovém prostředí MATLAB/Simulink.

Testování bylo provedeno pro požadované trajektorie znázorněné na obr. (15).

Odezvy odpovídající požadovaným konstantním trajektoriím znázorněné na obr. (35) a (36):

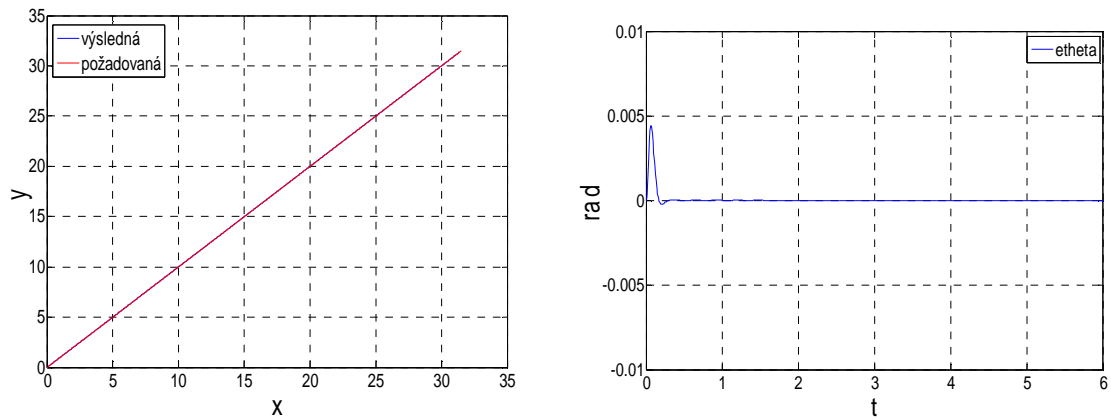


obr. (35) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém)



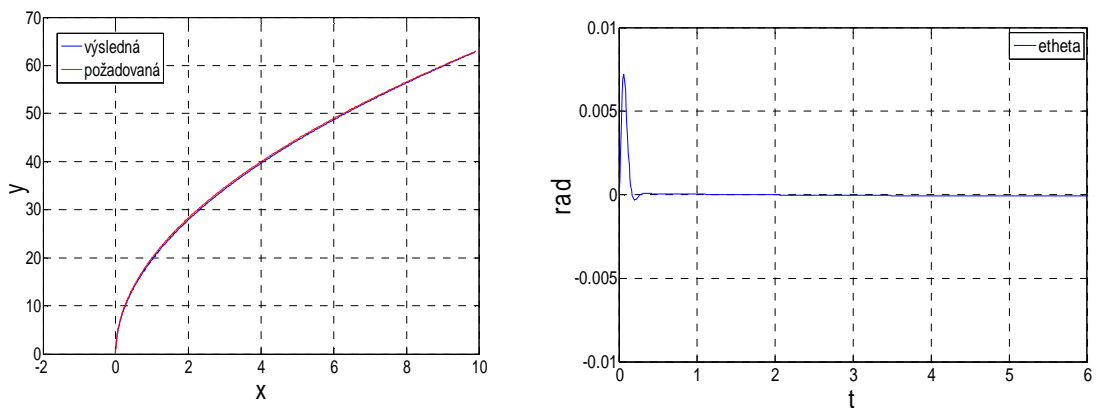
obr. (36) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém)

Odezvy odpovídající požadované lineární trajektorii znázorněné na obr. (37):

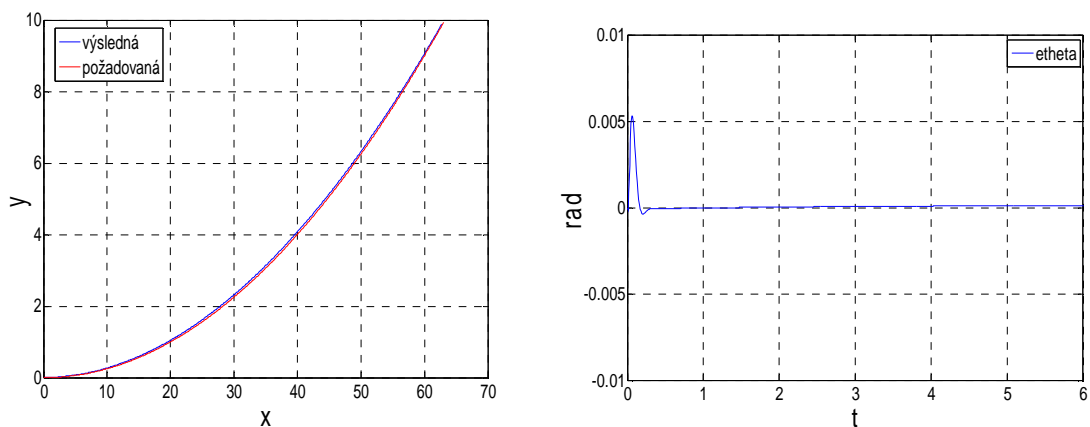


obr. (37) Porovnání požadované lineární a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém)

Odezvy odpovídající požadovaným kvadratickým trajektoriím znázorněné na obr. (38) a (39):



obr. (38) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém)



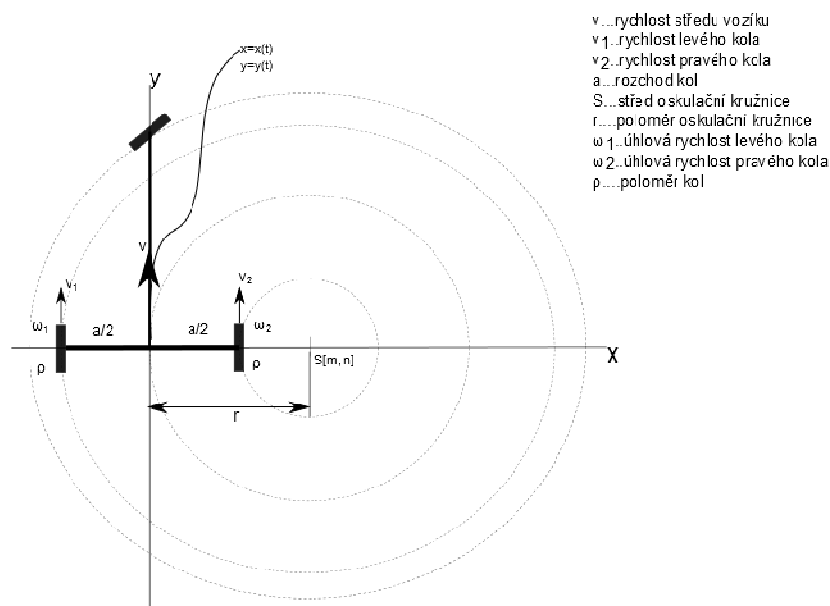
obr. (39) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, průběh odchylky požadovaného úhlu natočení $e\theta$ (pro celkový systém)

Z charakteristik znázorněných na obr. (35) – obr. (39) lze pozorovat, že po zapojení heuristicky odvozeného řízení, které má na vstupu hodnoty odchylek e_x , e_y a e_θ a na výstupu odchylky požadovaných úhlových rychlostí $\Delta\omega_L^*$ a $\Delta\omega_P^*$, výsledná trajektorie trojkolového vozíku s diferenciálním řízením sleduje požadovanou trajektorii a nevzdaluje se od ní, jako v případě, kdy jsme řídili pouze dynamickou část systému v kapitole 7.2.

Z charakteristik průběhů odchylek požadovaného úhlu natočení e_θ na obr. (35) – obr. (39) je zřejmé, že odchylku způsobenou chybou natočení vnitřního řízení dynamické části systému přivede vnější heuristické řízení do nuly. Výsledná trajektorie modelu pak sleduje požadovanou trajektorii.

8. Vozík s tzv. Ackermanovým podvozkem tato kapitola vychází z [4] a [5]

Trojkolové uspořádání vozíku s tzv. Ackermanovým podvozkem má za úkol, podobně jako u případu s diferenciálním řízením, sledovat svým středem zadní nápravy, určené souřadnicemi x a y , požadovanou trajektorii. Podobně jako v kapitole 4 uvažujeme, že pro každý bod rovinné křivky lze určit oskulační kružnici se středem S o souřadnicích $[m, n]$. Pro požadavek, aby střed vozíku sledoval požadovanou trajektorii uvažujeme, že se v každém okamžiku vozík pohybuje po kružnici, jejíž střed je určen středem oskulační kružnice S a její poloměr odpovídá poloměru odpovídající oskulační kružnice r . Danou situaci lze pozorovat na obr. (40).



obr. (40) Pohyb vozíku s Ackermanovým podvozkem po oskulační kružnici

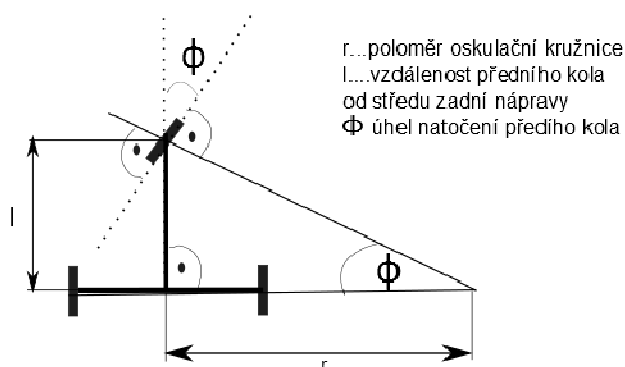
Podobně jako u vozíku s diferenciálním podvozkem v kapitole 4. se levé i pravé kolo zadní nápravy pohybují kolem totožného středu určeného středem oskulační kružnice S se stejnou

úhlovou rychlostí ω , ale po různém poloměru. Rozdíl mezi poloměry určuje použitá délka zadní nápravy a .

8.1 Určení požadovaného natočení předního kola Ackermanova podvozku

V případě diferenciálního podvozku, se přední kolo natáčelo libovolně a vozík byl řízen pomocí pohonu zadních kol. U Ackermanova podvozku naopak natočením předního kola řídíme jeho pohyb a hodnoty úhlových rychlostí jednotlivých kol ω_L a ω_P se volí tak, aby nedocházelo k prokluzu jednotlivých kol.

Určení vhodného natočení předního kola Φ dle požadované trajektorie je dáno poloměrem odpovídající oskulační kružnice r a vzdáleností předního kola od středu zadní nápravy l a znázorněno na obr. (41).



obr. (41) Určení požadovaného natočení předního kola

Z obr. (41) můžeme snadno určit vztah pro tangentu úhlu natočení předního kola Φ :

$$\tan \Phi = \frac{l}{r} \quad (71)$$

Do vztahu (71) dosadíme vztah pro poloměr oskulační kružnice (10):

$$\tan \Phi = \frac{l * (\dot{x}\dot{y} - \dot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (72)$$

A vyjádříme hodnotu požadovaného úhlu natočení Φ :

$$\Phi = \arctan \frac{l * (\dot{x}\dot{y} - \dot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} [\text{rad}] \quad (73)$$

8.2 Určení odpovídajících úhlových rychlostí

Úhlové rychlosti jednotlivých poháněných kol ω_L a ω_P volíme dle požadovaného úhlu natočení Φ proto, aby nedocházelo k prokluzu kol.

Pro výpočet odpovídající úhlové rychlosti ω_L vycházíme ze vztahu požadovaného úhlu natočení Φ (71) a ze vztahu pro rychlost levého kola (8):

$$\tan \Phi = \frac{1}{r} \quad (74)$$

$$\omega_L * \rho = \frac{v}{r} * \left(r + \frac{a}{2} \right) \quad (75)$$

Ze vztahu (74) si vyjádříme vztah pro poloměr oskulační kružnice r :

$$r = \frac{1}{\tan \Phi} \quad (76)$$

a po dosazení do vztahu (75) získáváme vztah pro volbu odpovídající úhlové rychlosti levého kola ω_L :

$$\omega_L = \frac{v + \frac{v*a*\tan\Phi}{2*l}}{\rho} \quad [\text{rad/s}] \quad (77)$$

Výpočet odpovídající úhlové rychlosti ω_P vychází také ze vztahu (71) a ze vztahu pro rychlost pravého kola (9):

$$\tan \Phi = \frac{1}{r} \quad (78)$$

$$\omega_P * \rho = \frac{v}{r} * \left(r - \frac{a}{2} \right) \quad (79)$$

Ze vztahu (78) si vyjádříme vztah pro poloměr oskulační kružnice r :

$$r = \frac{1}{\tan \Phi} \quad (80)$$

a po dosazení do vztahu (79) získáváme vztah pro volbu odpovídající úhlové rychlosti pravého kola ω_P :

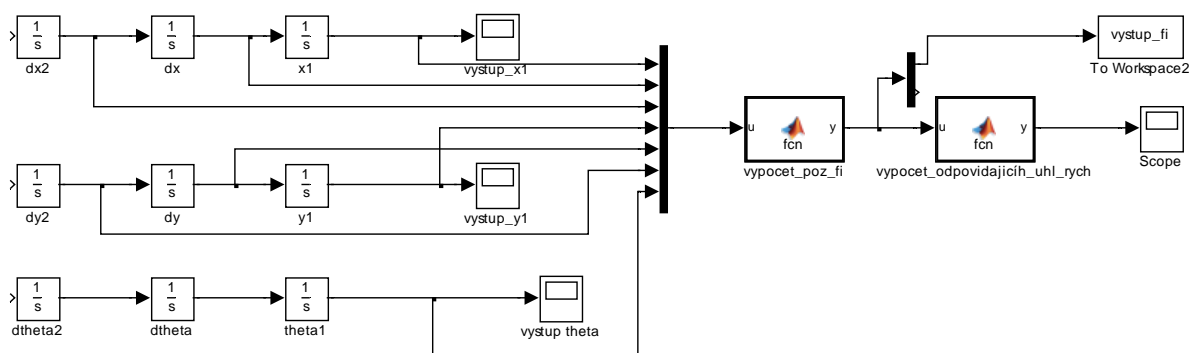
$$\omega_P = \frac{v - \frac{v*a*\tan\Phi}{2*l}}{\rho} \quad [\text{rad/s}] \quad (81)$$

8.3 Odezvy systému na požadované trajektorie

Funkčnost vztahů pro vozík s Ackermanovým podvozkem byla ověřena podobně jako u vozíku s diferenciálním podvozkem, kde se požadované úhlové rychlosti určovali přímo z generované trajektorie. V případě Ackermanova uspořádání se z generované trajektorie určí nejprve požadované natočení předního řiditelného kola Φ ze vztahu (73) a rychlost středu vozíku v . Rychlost středu vozíku lze určit ze znalosti rychlostí v jednotlivých osách \dot{x} a \dot{y} . Aktuální hodnoty těchto rychlostí lze získat z generátoru trajektorie. Vztah (82) pro aktuální rychlost v středu vozíku vypočítáme pomocí Pythagorovy věty.

$$v = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \text{ [m/s]} \quad (82)$$

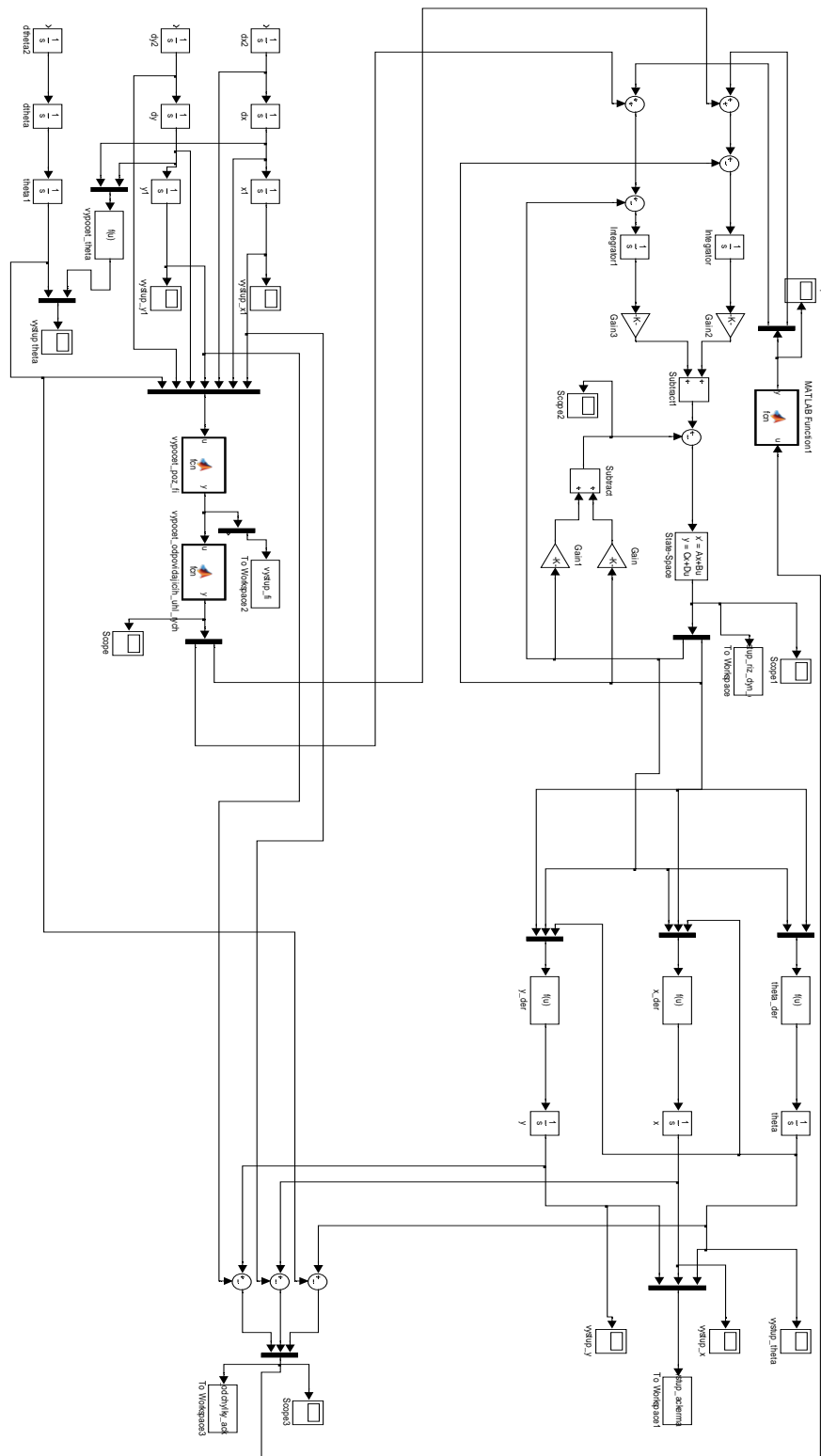
Po určení požadovaných hodnoty natočení Φ a rychlosti v dojde k výpočtu odpovídajících úhlových rychlostí ω_L a ω_P pomocí vztahů (77) a (81). Jeden blok MATLAB function použitý na výpočet požadovaných rychlostí pro případ diferenciálního řízení ve schématu znázorněném na obr. (16) nahradíme dvěma bloky, z nichž první bude dle vstupů z generátoru trajektorie určovat aktuální hodnotu natočení předního kola Φ a aktuální rychlost středu v . Druhý blok bude z požadovaných hodnot Φ a v určovat odpovídající úhlové rychlosti hnacích kol ω_L a ω_P . Schéma zapojení v programovém prostředí MATLAB/Simulink pro případ vozíku s Ackermanovým podvozkem je zobrazeno na obr. (42).



obr. (42) Schéma zapojení v programovém prostředí MATLAB/Simulink pro určení vstupních úhlových rychlostí do systému

Ověření funkčnosti daného zapojení otestujeme na matematickém modelu odvozeném v kapitole 5. tak, že odpovídající úhlové rychlosti ω_L a ω_P získané na výstupu druhého bloku MATLAB function přivedeme na vstup matematického modelu. Výsledná trajektorie vozíku na výstupu systému by se opět měla shodovat s požadovanou trajektorií. Parametry modelu se shodují s hodnotami použitými při testování diferenciálního podvozku popsanych v tab.(1). Dále je nutné přidat parametr vzdálenosti předního kola od středu zadní nápravy l , jehož hodnota byla zvolena pro testování: $l=0.2$ [m]

Celkový model v programovém prostředí MATLAB/Simulink pro Ackermanův podvozek je znázorněn na obr. (43).

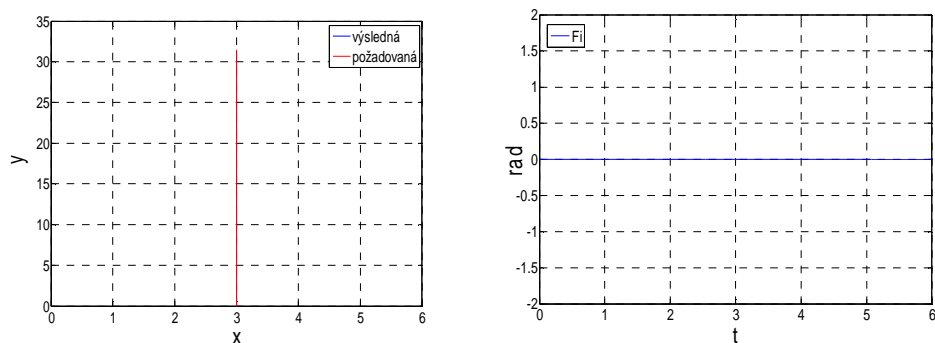


obr. (43) Celkový model v programovém prostředí MATLAB/Simulink pro Ackermanův podvozek

8.3.1 Odezvy systému na úhlové rychlosti ω_L a ω_P odpovídající požadovanému úhlu natočení předního kola Φ a požadované rychlosti středu vozíku v

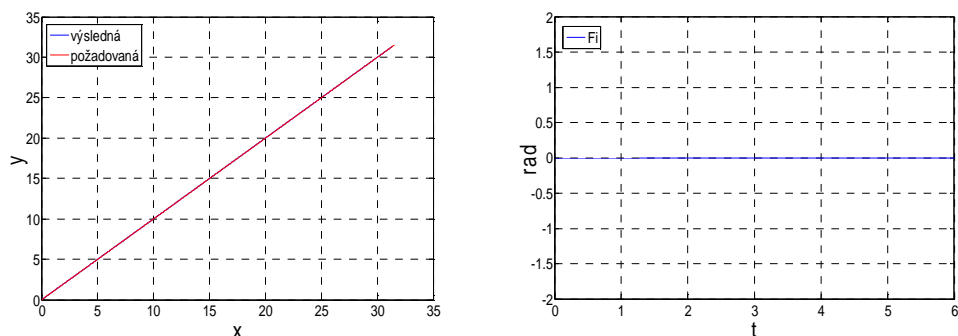
Testování bylo provedeno pro jednu konstantní, jednu lineární a jednu kvadratickou požadovanou trajektorii.

Odezvy odpovídající požadované konstantní trajektorii znázorněné na obr. (44):



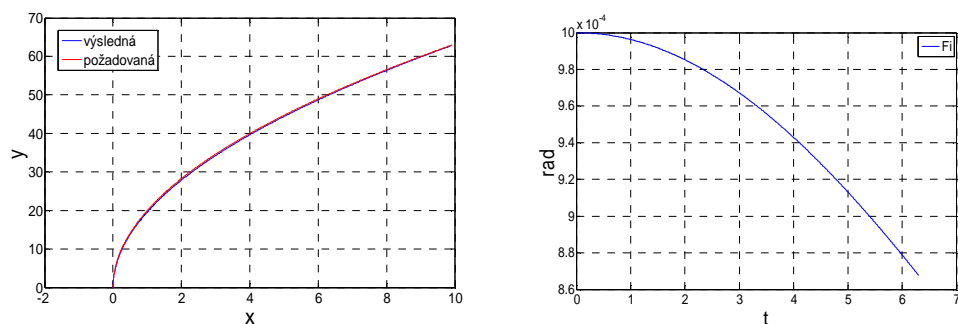
obr. (44) Porovnání požadované konstantní a výsledné trajektorie, průběh požadovaného úhlu natočení předního kola Φ (pro celkový systém)

Odezvy odpovídající požadované lineární trajektorii znázorněné na obr. (45):



obr. (45) Porovnání požadované lineární a výsledné trajektorie, průběh požadovaného úhlu natočení předního kola Φ (pro celkový systém)

Odezvy odpovídající požadované kvadratické trajektorii znázorněné na obr. (46):



obr. (46) Porovnání požadované kvadratické a výsledné trajektorie, průběh požadovaného úhlu natočení předního kola Φ (pro celkový systém)

Z výsledných odezev zobrazených na obr. (44) – obr. (46) lze pozorovat, že se požadovaná trajektorie shoduje s trajektorií výslednou. Střed vozíku se pohybuje po zadané trase. Na charakteristikách průběhu požadovaného úhlu natočení předního kola Φ je patrné, že se pro požadované lineární a konstantní trajektorie hodnota úhlu Φ nemění, zatímco pro trajektorii kvadratickou ke změně úhlu Φ dochází. Tyto výsledky se shodují s předpoklady.

Při použití vnějšího řízení, jehož odvození je provedeno v kapitole 7.3, dochází pomocí kladné zpětné vazby k úpravám hodnot požadovaných úhlových rychlostí. Pro případ Ackermanova podvozku se hodnoty úhlových rychlostí jednotlivých kol neshodují s hodnotami úhlových rychlostí odpovídajících aktuálnímu natočení předního kola, přední kolo proto musí začít prokluzovat.

9. Závěr

V úvodu bakalářské práce byly popsány základní konstrukce pro různé varianty trojkolového uspořádání vozíku. Základní popis rozložení jednotlivých podvozků jsme rozšířili o popis možností pohybu jednotlivých variant, a také o jejich reálné využití.

Druhá část bakalářské práce se zabývá odvozením matematického modelu pro variantu vozíku s diferenciálním řízením. Matematický model jsme rozdělili na dvě relativně nezávislé části. První částí je část dynamická, jež je tvořena pohybovými rovnicemi popisujícími závislost posuvné a otáčivé rychlosti zvoleného bodu na momentech působících na hnací kola. Druhou část tvoří kinematické rovnice popisující závislosti mezi posuvnou a otáčivou rychlostí zvoleného bodu a otáčkami motorů. Matematické rovnice tvořící matematický model jsme převedli do standardního stavového popisu.

Dále práce popisuje implementaci odvozených rovnic v programovém prostředí MATLAB a v jeho nadstavbě Simulink, který jsme použili pro simulaci a modelování daného systému.

Řízení systému jsme rozdělili na dvě části. Nejprve bylo navrženo řízení dynamické části systému pomocí stavového regulátoru s integrací. Po návrhu byla pro zvolené požadované trajektorie provedena simulace v programovém prostředí MATLAB/Simulink, kde jsme zjistili, že řízení vnitřní dynamické části nezaručuje sledování zadané trajektorie. Z tohoto důvodu bylo navrženo heuristické řízení, které podle odchylek požadovaných hodnot trajektorie od výsledného pohybu vozíku reguluje požadované úhlové rychlosti levého a pravého poháněného kola tak, aby odchylky trajektorií byly nulové. Funkčnost vnějšího řízení byla ověřena simulací.

V závěru práce je popsán rozdíl mezi výpočtem požadovaných úhlových rychlostí přímo z generované trajektorie, který je použitý u vozíku s diferenciálním podvozkem, a výpočtem požadovaného úhlu natočení předního kola, který určuje odpovídající úhlové rychlosti. Druhý způsob byl využit u vozíku s Ackermanovým podvozkem.

Literatura

- [1] DUŠEK, F.; HONC, D.; KOTYK, J. *Dynamický model a simulace chování mobilního robotu*. Pardubice, 2011. 15 s. Odborný článek. Univerzita Pardubice. KŘP FEI.
- [2] MELICHAR, J. *Lineární systémy 2*. Plzeň, 2011. 117 s. Učební text. Západočeská univerzita. Fakulta aplikovaných věd.
- [3] NOVÁK, J. *Mobilní roboty – pohony, senzory, řízení*. Praha, 2005. 248 s. ISBN 80-7300-141-1.
- [4] PASEKA, T. *Návrh a realizace autonomního robotu pro kategorii IEEE Micromouse*. Brno, 2006. 87 s. Diplomová práce. VUT v Brně. Fakulta strojního inženýrství.
- [5] REKTORYS, K. *Přehled užití matematiky 1*. Praha, 1995. 720 s. ISBN 80-85849-92-5.
- [6] SCHLEGEL, M. *Lineární t-invariantní (LTI) stavový model: teorie 1*. Plzeň, 2007. 22 s. Učební text. Západočeská univerzita. Fakulta aplikovaných věd.