

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Experimentální modální analýza nosníku a numerická verifikace získaných
vlastních veličin**

Plzeň, 2013 Pavel Vrátník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval sám, za pomoci vedoucího práce. Při práci jsem využil literaturu uvedenou v seznamu zdrojů a literatury nebo informace z volně dostupných zdrojů.

V Plzni dne

Pavel Vrátník

Poděkování

Tímto bych rád vyjádřil poděkování všem, kteří mi během práce pomáhali. Především děkuji svému vedoucímu bakalářské práce Prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi za cenné rady, připomínky a konzultace, bez kterých by tato práce nevznikla. Dále Ing. Josefu Káňovi za dva roky trpělivosti při výuce základů experimentální modální analýzy a Luboši Smolíkovi za pomoc při provádění experimentální části této práce. V další a neposlední řadě bych rád poděkoval své přítelkyni za toleranci a pochopení a rodičům za vytrvalou podporu během studia.

Pavel Vrátník

Obsah

1. Úvod	6
2. Shrnutí znalostí nutných k provedení a vyhodnocení modální analýzy	7
2.1 Předpoklady modální analýzy	7
2.2 Základní pojmy a jevy	9
Mechanické chvění	9
Vlastní frekvence a rezonance	9
Vlastní tvar kmitu	9
Modální analýza	10
Frekvenční přenosová funkce	10
Koherence	11
Autospektrum	11
Křížové spektrum	12
Určení frekvenční přenosové funkce	12
3. Fourierova transformace	14
3.1 Diskrétní Fourierova transformace	14
3.2 Spojitá Fourierova transformace	14
4. Akcelerometr	17
5. Experimentální modální analýza a porovnání s MKP výpočty	18
5.1 Nosník	18
5.2 Deska s neznámými okrajovými podmínkami	25
6. Identifikace vetknuté desky	33
Popis MKP prvku	33
Odvození matice tuhosti a hmotnosti prvku	34
Popis modelu	40

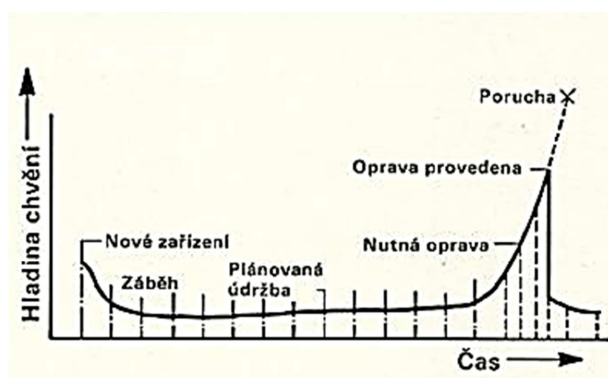
Formulace optimalizační úlohy	41
Získané údaje	42
Zhodnocení výsledků	46
7. Závěr	48
Přílohy	49
Použitá literatura	50

1. Úvod

Modální analýza je jedna z metod dynamiky, která slouží k vyšetřování kmitavých vlastností, chování mechanických struktur, ale také k diagnostice stavebních či strojních konstrukcí. Tato metoda užívá možnosti rozkladu kmitavého pohybu na dílčí (též modální, vlastní) příspěvky, jejichž superpozicí vzniká pohyb výsledný. Každý tento příspěvek je charakterizován vlastní frekvencí, vlastním tvarem kmitu a příslušným vlastním tlumením tvaru kmitu. Určením těchto výsledných modálních vlastností systému lze získat úplný dynamický popis mechanické soustavy.

Při provozu jsou stroje, stavební konstrukce atp. vystaveny působení různých dynamických sil vyvolávajících mechanické kmitání. Nebezpečí nastává v momentě, kdy jsou budící frekvence shodné, případně blízké vlastním frekvencím. Tento stav se nazývá rezonanční a je charakteristický kritickým rozkmitáním konstrukce, při kterém (v případě uvažování netlumené soustavy) roste amplituda nade všechny meze a součást je dynamicky namáhána. To může způsobovat nadměrnou hlučnost zařízení, snížit životnost stroje, nebo vést až k jeho poškození. Cílem při konstrukci tedy je vhodnou volbou parametrů zajistit, aby provozní pásmo frekvencí konstrukce bylo dostatečně daleko od rezonančních frekvencí.

U většiny strojních zařízení lze již dlouho před vlastní poruchou pozorovat změny provozního stavu. Těmto indikátorům ve velké většině případů patří intenzivní mechanické chvění, které je možné měřit a tedy používat jako ukazatele provozního stavu stroje. Provádění údržby a oprav na základě nepřetržitého sledování provozního stavu umožňuje provádět opravy až v případě, kdy monitorované chvění ukazuje jejich nezbytnost, namísto standardní pravidelné údržby, která se provádí v pravidelných intervalech (určených podle odhadu minimální životnosti jednotlivých součástí). Tímto přístupem lze snížit celkový počet i dobu trvání odstávek stroje k nutné údržbě. Za hodnoty chvění, které signalizují nutný zásah, se běžně pokládají hodnoty o 6-10 dB nad normální hladinou chvění (dvou- až trojnásobek hodnot provozních vibrací).



Obr. 1 - typický časový průběh hladiny chvění stroje

Cílem této bakalářské práce je vytvořit ucelený dokument shrnující základní poznatky o provádění experimentální analýzy, vytvoření MKP modelů a následné porovnání získaných výsledků. Analýza se bude provádět na třech různých objektech-ocelové desce o rozměrech 730x430x2 mm, ocelovém nosníku o rozměrech 1008x30x10 mm a hliníkovém nosníku o rozměrech 730x29,5x3mm za různých okrajových podmínek.

2. Shrnutí znalostí nutných k provedení a vyhodnocení modální analýzy

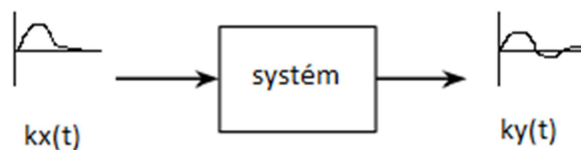
2.1 Předpoklady modální analýzy

Při zkoumání kmitání mechanické soustavy pomocí modální analýzy, je nutné přijmout určité zjednodušující předpoklady.

Základní předpoklad je, že modelovaný systém je lineární. Lineární systém je takový, u kterého předpokládáme, že velikost odezvy systému na buzení je přímo úměrná velikosti tohoto buzení.

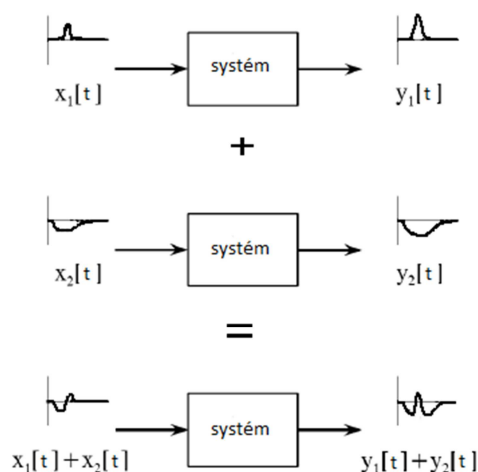
Z předpokladu linearitý systému vyplývají následující vlastnosti:

- **Superpozice** – nezávisí na pořadí při skládání dílčích budících účinků. V praxi má tato vlastnost velký význam, jelikož nám umožňuje rozložit složitou vstupní informaci do lineární kombinace jednodušších (elementárních) funkcí. Lineární kombinací odezev systému na tyto elementární funkce dostaneme zpětně celkovou odezvu systému na původní složité budící signál.
- **Homogenita** – Systém je homogenní, pokud změna amplitudy vstupu způsobí obdobnou změnu amplitudy na výstupu, lze zapsat: $kx(t) \rightarrow ky(t)$



Obr.2 - Homogenita

- **Aditivita** – systém je aditivní, pokud dva přidané vstupy projdou systémem, aniž by se vzájemně ovlivňovaly, lze zapsat: $x_1(t) + x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$

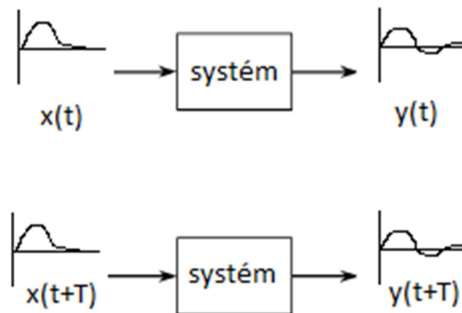


Obr.3 - Aditivita

- **Reciprocita** – z předpokladu symetrie vyplývá, že při buzení v bodě A a snímání odezvy v bodě B, dostaneme shodný přenos systému jako v případě záměny těchto bodů, tedy místo buzení a snímání odezvy je volně zaměnitelné

Další akceptované předpoklady:

- **Kauzalita** – mechanický systém zůstává v klidu, dokud není donucen vnější silou tento stav změnit
- **Stabilita** – systém po odeznění budících účinků přejde do stabilního stavu
- **Časová invariance** – dynamické vlastnosti mechanické soustavy jsou s časem neměnné



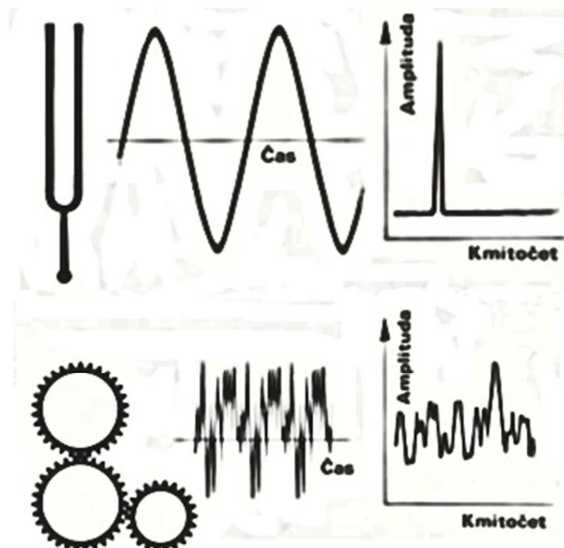
Obr.4 - časově invariantní systém

2.2 Základní pojmy a jevy

Mechanické chvění

Chvění je kmitavý pohyb pevných těles kolem určité, zpravidla rovnovážné polohy. Počet plných cyklů kmitavého pohybu za *sekundu* se nazývá **frekvence** (kmitočet) a vyjadřuje se v *Hz* (hertz).

Kmitavý pohyb vykonává např. těleso zavěšené na pružině, písty v motoru apod. Kmitavý pohyb může obsahovat pouze jednu složku (např. ladička), nebo se skládá z většího počtu složek charakterizovanými různými frekvencemi (např. pohyb pístu nebo ozubených kol). S narůstajícím počtem dílčích kmitavých pohybů se stává časový záznam výchylek nepřehledný a není z něj možné určit vlastní frekvence. V tomto případě lze určit jednotlivé složky ze závislosti amplitud na frekvenci (tento proces se nazývá frekvenční nebo také kmitočtová analýza).



Obr 5. - ukázka kmitavých pohybů o různé složitosti

Provedení dekompozice složitého signálu v časové oblasti lze například Fourierovou transformací. (dalšími možnostmi jsou např. Impulsí, skoková dekompozice atd.)

Vlastní frekvence a rezonance

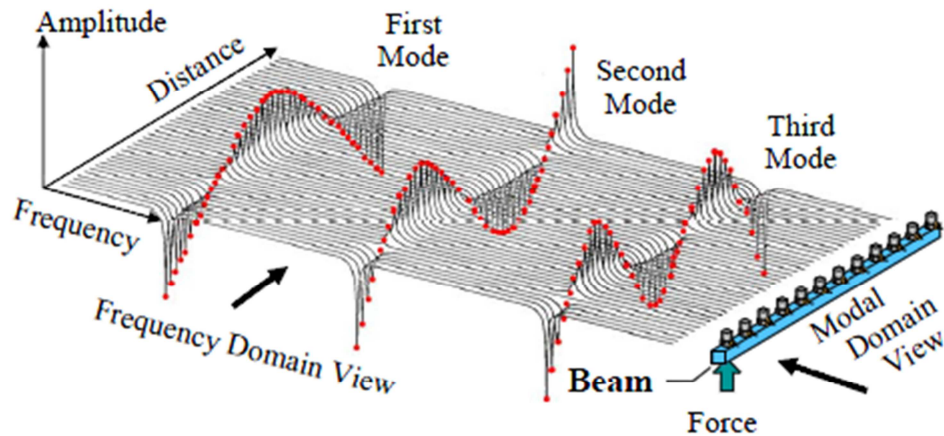
Rezonance je schopnost systému kmitat při určitých frekvencích buzení s větší amplitudou než při jiných. Tyto určité frekvence se nazývají vlastní, rezonance tedy nastává v případě, že budící frekvence je blízká vlastní frekvenci systému. ($\eta \cong 1$)

Vlastní tvar kmitu

Vlastní tvar je tvar deformace, který převládá při buzení na příslušné vlastní frekvenci. Vlastní tvar nelze prakticky pozorovat či jinak experimentálně registrovat. Je to abstraktní matematický parametr popisující odpovídající deformaci tak, jak by příslušný tvar kmitání existoval sám o sobě, tj. odděleně od ostatních vidů kmitání odpovídající mechanické soustavy. Výsledný kmitavý pohyb vzniká superpozicí těchto dílčích kmitavých pohybů.

Modální analýza

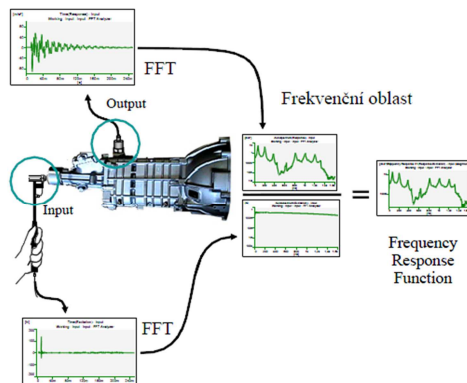
Modální analýza kmitavých systémů je určení vlastních tvarů kmitu (v případě diskrétních modelů vlastních vektorů, v případě kontinuí vlastních funkcí) a vlastních čísel (korespondujících s vlastními frekvencemi). To je možné provést simulační cestou (vytvoření matematického modelu a řešení problému vlastních čísel) nebo experimentální cestou (určení vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitu na základě měření odezvy systému na předem zvolené buzení).



Obr.6 – Modální analýza kmitajícího nosníku (zdroj: [5])

Frekvenční přenosová funkce

Při experimentální modální analýze je cílem určit experimentální model, který je sestaven na základě měření frekvenčních odezví (soustředěných právě do matice frekvenčních přenosových funkcí \mathbf{H}). Podstatou jejího experimentálního určení je měření dynamického průběhu budící síly $\mathbf{F}(t)$ a průběhu odezvy zkoumané soustavy na toto buzení $\mathbf{X}(t)$. Frekvenční přenosová funkce je definována jako podíl Fourierových obrazů těchto funkcí ($\mathbf{X}(\omega)=\mathbf{H}(\omega)\mathbf{F}(\omega)$). Frekvenční odezva popisuje základní vlastnosti systému nezávisle na budící síle.



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}} = \frac{\text{pohyb}}{\text{síla}} = \frac{\text{odezva}}{\text{buzení}}$$

Obr. 7 - frekvenční přenosová funkce[5.]

Z tohoto vztahu vyplývá, že tato veličina vyjadřuje dynamickou poddajnost zkoumané soustavy (v případě, že odezva je zaznamenána jako výchylka). V případě použití odezvy v rychlosti resp. zrychlení mluvíme o pohyblivosti resp. inertanci. Z definice přenosové

funkce plyne, že poddajnost, pohyblivost a inertance jsou stejně jako výchylka, rychlost a zrychlení vázány algebraickými vztahy a je tedy možné z naměřených dat jedné z těchto veličin určit zbývající.

Fyzikální interpretaci této komplexní funkce (frekvenční přenosová funkce je určena absolutní hodnotou $|\mathbf{H}(\omega)|$ a fází $\varphi(\omega)$) si lze představit tak, že sinusová vstupní síla o frekvenci ω vyvolává sinusový pohyb systému o téže frekvenci ω , pouze amplituda pohybu systému (výstupu) je násobena $|\mathbf{H}(\omega)|$ a rovněž se zde projevuje fázové zpoždění $\varphi(\omega)$ výstupu za vstupem.

Jelikož zkoumané systémy považujeme za lineární, lze libovolné vstupní i výstupní spektrum považovat za součet sinusových složek, tedy Frekvenční přenosová funkce popisující dynamické vlastnosti zkoumaného systému nezávisí na charakteru vstupních nebo výstupních signálů. Z tohoto důvodu je možné např. měřit frekvenční přenosové funkce pomocí buzení harmonickými, ale i impulsovými či náhodnými signály.

Koherence

Koherence $\gamma(\omega^2)$ je funkce určující míru linearitu mezi vstupními a výstupními signály zkoumaného systému. Tuto funkci lze definovat za pomoci skutečnosti, že druhá mocnina absolutní hodnoty vzájemného spektra (též křížového spektra, cross-spectrum) vstupního a výstupního signálu je menší než součin vlastních spekter (též auto-spectrum) těchto signálů, pokud alespoň jedno toto spektrum obsahuje nekoherentní šum. Tuto skutečnost lze zapsat jako: $|G_{XF}(\omega)|^2 \leq |G_{XX}(\omega)| \cdot |G_{FF}(\omega)|$. Platnost této nerovnosti je způsobena eliminací nekoherentního šumu v procesu průměrování při zjišťování auto-spektra. Koherence se používá k odhalování možných chyb získaných vstupních a výstupních signálů a jejich příslušných spekter. Za pomoci výše uvedené nerovnosti lze zavést definici *koherence*:

$$\gamma(\omega^2) = \frac{|G_{XF}(\omega)|^2}{|G_{XX}(\omega)| \cdot |G_{FF}(\omega)|}$$

$$0 \leq \gamma(\omega^2) \leq 1$$

Výše uvedené mezní hodnoty koherence odpovídají měření čistého signálu neovlivněného šumem (hodnota 1) a měření pouze samotného šumu (hodnota 0).

Veličiny $G_{XF}(\omega)$, $G_{XX}(\omega)$ a $G_{FF}(\omega)$ se nazývají křížové spektrum, auto-spektrum odezvy a *auto-spektrum* budící síly. Za předpokladu znalosti těchto spekter lze matematicky určit hledané odhady frekvenční charakteristiky zkoumaného systému a koherenci přenosu.

Auto-spektrum

Výkonová spektrální hustota $S_x(\omega)$ (zkráceně auto-spektrum) může být definována pomocí tzv. Wiener-Chinčinových vztahů:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Kde $R_x(\tau)$ je autokorelační funkce. Tato funkce je pro stacionární signál funkcí vzájemného posunutí ve dvou různých časových okamžicích $R_x(\tau) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(t_2 - t_1)$. Pro shodné statistické momenty až do druhého řádu se autokorelační funkce vypočte ze střední hodnoty součinu dvou vzájemně časově posunutých signálů jedné realizace

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt \right)$$

Křížové spektrum

Obdobně jako jsou auto-spektrum a autokorelační funkce příslušné signálu $x(t)$, lze pomocí Wiener-Chinčinových vztahů analogicky definovat veličinu příslušnou dvojici signálů (vstupní signál $x(t)$ a výstupní signál $y(t)$). Takto vzniklé spektrum se nazývá křížové.

Wiener-Chinčinovy vztahy pro křížové spektrum:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Autokorelační funkce: $R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t + \tau) dt \right)$

Určení frekvenční přenosové funkce

Budeme-li uvažovat lineární dynamický systém s jedním vstupním signálem $x(t)$ a jedním výstupním signálem $y(t)$, pak lze vztah mezi těmito signály zapsat ve tvaru:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Fourierovou transformací této konvoluce dostaneme:

$$Y(\omega) = H_{xy}(j\omega)X(\omega)$$

Kde $H_{xy}(j\omega)$ je frekvenční přenosová funkce v proměnné $j\omega$.

Z konvoluce rovněž vyplývá tzv. Wiener-Hopfova rovnice:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_x(\tau - t)h(t)dt$$

Dále mezi auto-spektry, křížovými spektry a přenosovou funkcí platí vztah:

$$H_{xy}(j\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{yx}(\omega)}$$

Modul přenosové funkce lze určit jako:

$$|H_{xy}(j\omega)|^2 = H_{xy}(j\omega)H_{xy}(-j\omega) = \frac{S_{xy}(\omega) S_{yy}(-\omega)}{S_{xx}(\omega) S_{yx}(-\omega)} = \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

3. Fourierova transformace

3.1 Spojitá Fourierova transformace

V praxi je výhodné pracovat s harmonickými funkcemi $e^{i\omega t}$, neboť jsou snadno realizovatelné a mají vhodné matematické vlastnosti. Za určitých podmínek lze každou funkci vyjádřit jako součet nebo integraci konečného počtu harmonických funkcí. Každá z těchto harmonických funkcí bude mít jinou váhu a fázový posun (oba parametry jsou zahrnuty do komplexní váhové funkce). Tato Váhová funkce tedy udává, jaké parametry je třeba zvolit, aby bylo možné z harmonických funkcí zpětně sestavit funkci původní. Váhová funkce (spektrum) bývá označována jako Fourierova transformace. Tato transformace tedy umožňuje vyjádřit frekvenční obsah časového signálu. Dalšími výhodami této transformace je převod konvoluce na násobení, což umožňuje pro zkoumanou soustavu zavést přenosovou funkci, dále lze ze signálu odstranit části s různými frekvencemi, což lze využít např. při potlačování šumu.

Fourierova transformace, pojmenovaná po Josephu Fourierovi, je transformace funkce popisující obraz v jiných proměnných. Speciálně uvažujme trigonometrickou Fourierovu transformaci, která jako bázové funkce používá $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ nebo v komplexním tvaru $e^{i\omega t}$. Tato transformace je definována jako:

$$G(\omega) = F\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt$$

Inverzní Fourierovu transformaci definujeme jako:

$$g(t) = F^{-1}\{G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Takto definovaná Fourierova transformace není pro praktické použití příliš vhodná, neboť ne vždy existuje analytické řešení výše uvedeného definičního vztahu, je tedy nutné úlohu řešit přechodem ke konečné sumaci a v případě řešení Fourierovy transformace na digitálním počítači dochází ke vzorkování spojitého signálu, pracujeme tak s diskrétními hodnotami. K určení spektra ze vzorků signálu či signálu ze vzorků spektra se používají numerické metody známé jako Diskrétní Fourierova transformace (DFT).

3.2 Diskrétní Fourierova transformace

Diskrétní Fourierovy transformace pracuje se vzorky funkce $f(t)$ v diskrétních časových okamžicích vzájemně posunutých o periodu vzorkování T (vzorkování je většinou ekvidistantní). Diskrétní Fourierovu transformaci dostaneme formálním nahrazením integrálu integrálním součtem:

$$X_k = \sum_{n=1}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{k}{N} n}$$

Inverzní transformace je definována:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} X_k e^{2\pi i \frac{k}{N} n}$$

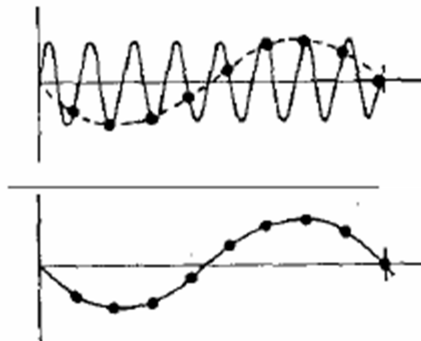
Výpočet Diskrétní Fourierova transformace podle definičního vztahu vyžaduje N^2 komplexních součinů a součtů, je tedy pro praktické výpočty velice pomalá. V roce 1965 byl vyvinut algoritmus FFT (Fast Fourier transform), který časovou náročnost značně snížil.

Při provádění Fourierovy transformace je třeba zohlednit několik jevů, které mohou závažně zkreslit získané výsledky. Tyto jevy jsou důsledkem diskretizace a nutnosti omezení délky časového signálu.

Mezi tyto jevy patří:

- Aliasing
- Chyba únikem
- Vliv oken
- Průměrování
- Filtrování
- Frekvenční lupa

Aliasing - je projevem diskretizace původně spojitého časového signálu. Při malé vzorkovací frekvenci se vyšší frekvence projevují jako frekvence nízké.

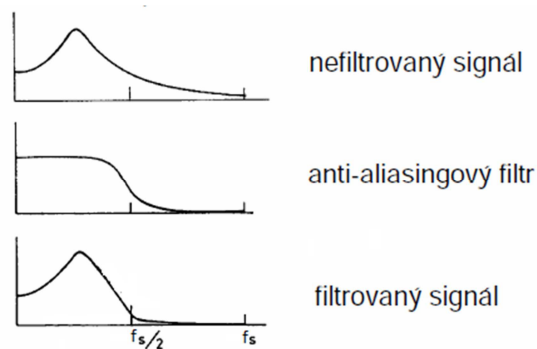


Obr. 8 - Aliasing

V horní části obrázku 14 je zobrazen vysokofrekvenční signál, který je vzorkován nižší vzorkovací frekvencí, je tedy vyhodnocen jako nízkofrekvenční. Toto chybné nastavení, nejenže neumožní prozkoumat spektrum pro vyšší frekvence, ale zároveň zkreslí i spektrum frekvencí nižších, pro jejichž korektní prozkoumání by byla vzorkovací frekvence dostačující.

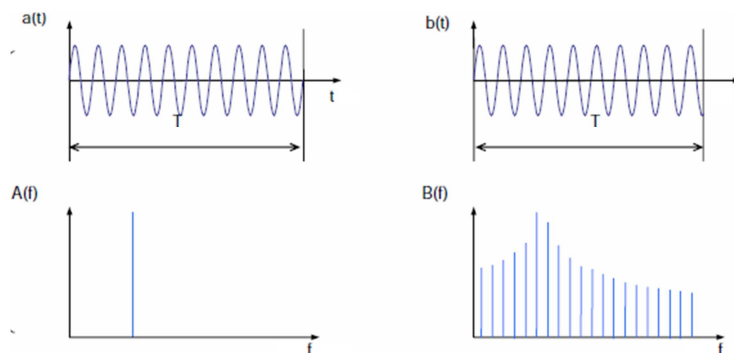
Nejvyšší frekvence, která může být ve spektru obsažena, je rovna Nyquistově frekvenci $f_{max} = \frac{f_s}{2} = \frac{N}{2T}$, kde f_s je vzorkovací frekvence, N je počet diskrétních hodnot a T je délka vzorku. Frekvence vyšší než Nyquistova jsou pak již zrcadleny do frekvencí nižších než f_{max} . Dalším parametrem je frekvenční rozlišení $\Delta f = \frac{f_s}{N}$.

Pro potlačení Aliasingu se používají anti-aliasingové filtry. Jedná se o nízkofrekvenční filtry, které zkoumaný signál modulují tak, aby frekvence blízké a vyšší než Nyquistova byly potlačeny. Tyto filtry jsou standartní součástí analyzátorů.

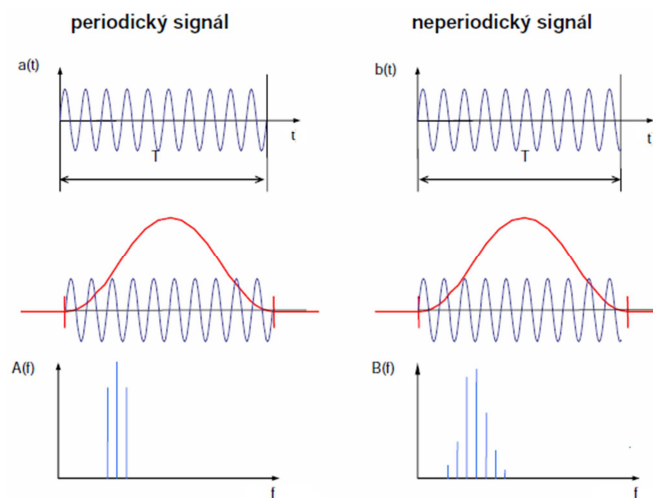


Obr. 9 - vliv anti-aliasingového filtru na zkoumaný signál

Chyba únikem (leakage) - Tato chyba vzniká v případě, kdy zpracovávaný signál není periodický. Energie spektra unikne do okolních frekvencí blízkých frekvenci skutečné. Takto vzniklá chyba se minimalizuje použitím váhových oken, které signál upravují tak, aby únik byl co nejmenší.



Obr. 10 - „únik“ energie do okolních frekvencí



Obr. 12- Použití Hahnova okna

Problematika zpracování signálu je detailněji popsána v [2], [10], [12].

4. Akcelerometr

Základním prvkem akcelerometru je výřez z uměle polarizované piezoelektrické keramické hmoty, vykazující výrazný piezoelektrický jev. Podstatou tohoto jevu je vznik elektrického náboje na stěnách výřezu piezoelektrického materiálu při jeho mechanickém namáhání. Takto generovaný elektrický náboj je přímo úměrný velikosti mechanické síly, která na akcelerometr působí.

- **Citlivost**- Citlivost je jeden z nejdůležitějších parametrů akcelerometru. Ideální snímač by již při působení malé síly na piezoelektrický člen generoval co největší elektrický signál. Ovšem zde je třeba udělat první kompromis, neboť pro splnění tohoto požadavku je zapotřebí použít velký piezoelektrický člen, tím pádem akcelerometr bude poměrně těžký a rozměrný. Namísto použití velkého piezoelektrického členu je výhodnější použít předzesilovač signálu, ten umožní měření i slabých vibrací.
- **Hmotnost**- Při měření lehkých a křehkých konstrukcí je třeba uvažovat i vlastní hmotnost akcelerometru. Tato přídatná hmota může výrazně ovlivnit amplitudy a frekvence mechanických kmitů soustavy. Podle obecně platného pravidla nemá být hmotnost akcelerometru větší než 1/10 dynamické hmoty zkoumaného objektu.
- **Dynamický rozsah**- Dynamický rozsah je frekvenční rozsah, ve kterém je závislost mezi velikostí zrychlení a výstupního napětí lineární. Dolní mez je stanovena elektrickým šumem použitého vybavení (předzesilovač, spojovací kabely). Horní mez je stanovena mechanickou pevností snímače.
- **Pracovní frekvenční rozsah**- Tento rozsah určuje, na jakém frekvenčním rozsahu měřených vibrací bude akcelerometr pracovat jako lineární měnič. Spodní hranice ve většině případů nebude činit problém- je značně menší než 1Hz. Horní hranice je dána vlastní frekvencí akcelerometru.

Upevnění snímače

Způsob upevnění snímače je jeden z nejvíce přesnost ovlivňujících faktorů. Nedokonalým upevněním snímače dochází ke snížení jeho vlastní frekvence a tedy ke snížení horní meze pracovního frekvenčního rozsahu.

- **Upevnění pomocí šroubu** - Tento způsob upevnění je jedním z nejužších možností spojení akcelerometru a zkoumaného objektu. Pracovní frekvenční rozsah je snížen pouze na 31kHz, což je velice blízko ideálu (32kHz). Nicméně konstrukce objektu ne vždy umožňuje použití upevňovacích šroubů.
- **Včelí vosk** - Akcelerometr lze upevnit pomocí tenké vrstvy včelího vosku. Toto spojení snižuje horní mez pracovního frekvenčního rozsahu na 29kHz. Vosk je ovšem použitelný pouze do teplot okolo 40°C, v okolí této teploty vosk začíná měknout.
- **Pojivo** - k upevnění lze použít i různá lepidla, epoxydové pryskyřice, kyanoakryláty. Výhodou těchto pojiv je jejich nezávislost na okolních podmínkách, ale podstatná nevýhoda jejich použití je významné snížení pracovního frekvenčního rozsahu.
- **Magnet** - Magnet významně sníží pracovní frekvenční rozsah akcelerometru, zhruba na 7kHz.

5. Experimentální modální analýza a porovnání s MKP výpočty

5.1 Nosník

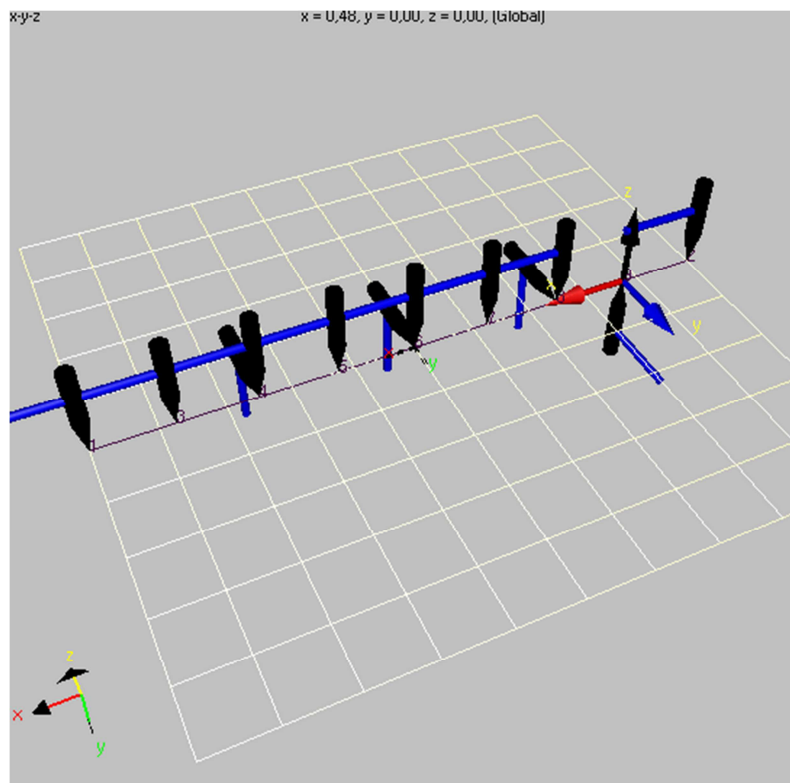
Předmětem zkoumání byl ocelový nosník o rozměrech 1008x30x10 mm, který byl volně zavěšen na gumových postrojích. Při měření bylo použito následující vybavení:

rázové budící kladívko typ 8202

akcelerometr typ 4506B

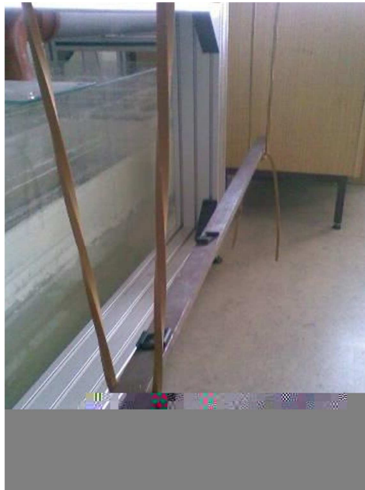
hardware a software (*Pulse*, *ME Scope*, *Front-end*) potřebný k analýze

V software *Pulse* byl nosník modelován jako 1D prut a byl rovnoměrně rozdělen na 9 uzlů. Použitý frekvenční rozsah byl 0-800Hz. Zkoumání chování ve vyšších frekvencích vzhledem k diskretizaci modelu již nemá smysl, neboť vyšší vlastní frekvence a příslušné vlastní tvary kmitají již velmi komplikovaně a námi zvolená diskretizace nosníku není schopna kvalitně chování nosníku popsat. 1D prut je v tomto případě dostačující k plnohodnotnému popisu chování zkoumaného tělesa v nižších frekvencích, tento model je schopný zaznamenat jak podélné tak příčné kmity. Projevení torzních kmitů, vzhledem k parametrům zkoumaného tělesa, očekáváme až u buzení o vyšších frekvencích. Akcelerometr byl umístěn pevně v bodě 9. V bodech 1.-8. byl nosník buzen pomocí rázového kladívka kolmo k ose nosníku (ve směru -Z), v bodě 9. byl buzen ve směru +Z. V bodech 4., 6., 8. byl navíc nosník následně buzen v příčném směru (ve směru Y). Buzení v příčném směru je nutné pro získání přenosových funkcí, jejichž vyhodnocením získáme příčné vlastní tvary a k nim příslušné vlastní frekvence.



Obr.13 - model nosníku v software *Pulse* s vyznačenými body buzení a umístění akcelerometru

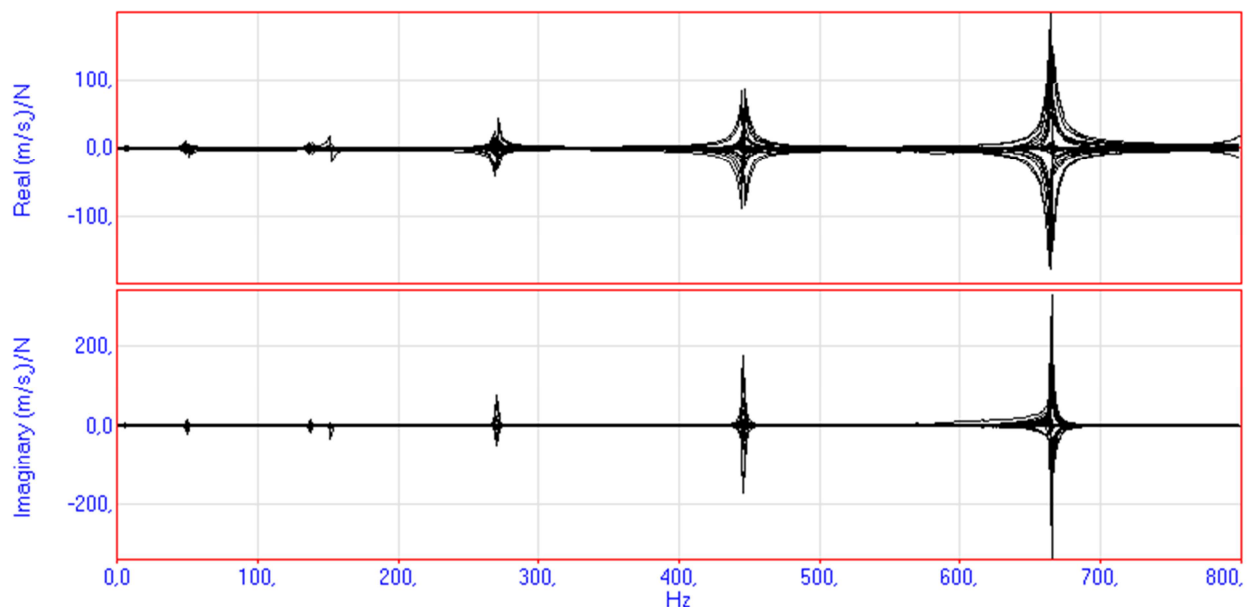
Pokud by se výpočtovým modelem prokázalo, že vlastní frekvence, kterým odpovídají vlastní tvary kmitající torzně, patří do zvoleného frekvenčního rozsahu, ve kterém zkoumáme chování nosníku, bylo by nutné vzít tuto skutečnost v potaz a upravit model nosníku v software *Pulse*. V tomto případě by již bylo nutné nosník modelovat alespoň jako 2D prvek a zároveň by bylo nutné určit přenosové funkce mezi body, které neleží na ose nosníku. Toho lze docílit několika způsoby, např. umístěním akcelerometru mimo osu nosníku, nebo přidáním několika bodů buzení, které rovněž nebudou ležet v ose nosníku.



Obr.14 - zkoumaný nosník zavěšený na gumových postrojích

Experimentální modální analýza

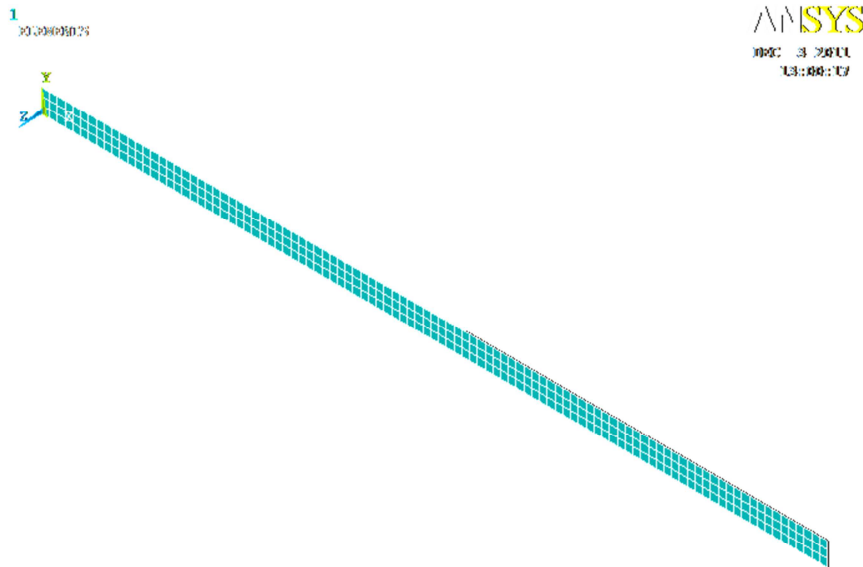
Vytvoření modelu v software *Pulse* bylo již popsáno výše. Analýzou naměřených dat, která byla provedena v software *ME Scope* byly získány vlastní tvary a vlastní frekvence zobrazené na stranách 21-24.



Obr.15- Reálná a imaginární část frekvenčních přenosových funkcí

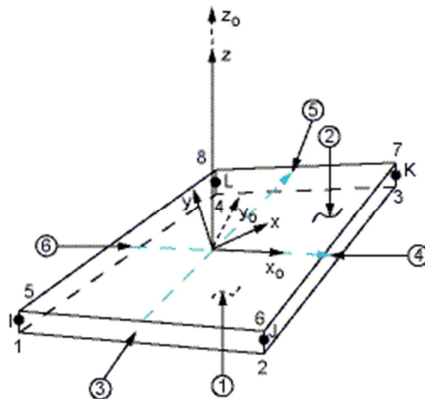
MKP model

MKP model byl vytvořen v software *Ansys*. Těleso bylo modelováno pomocí prvků *Shell181*, tedy bylo modelováno jako 2D.



Obr.16 - MKP model nosníku

Vzhledem k rozměrům nosníku vyvstává otázka, zda je stále vhodné použít pro modelování v software *Ansys 13* prvky *Shell 181*. Tento typ prvku je vhodný pro analýzu tenkých struktur. Vzhledem k rozšiřování MKP modelu nastává situace, kdy poměr šířky k výšce prvku je 1:1. Validitu výsledků získaných pomocí těchto prvků pro jistotu ověříme použitím prvků typu *Solid*. prvek *Shell 181* je čtyř-uzlový prvek se šesti stupni volnosti v každém uzlu: posuny a rotace ve směru os X, Y, Z.



Obr.17 - Geometrie prvku Shell 181

Porovnání výsledků získaných experimentálně a pomocí MKP výpočtů

Vlastní frekvence [Hz] při rozsahu frekvence 0-800 Hz

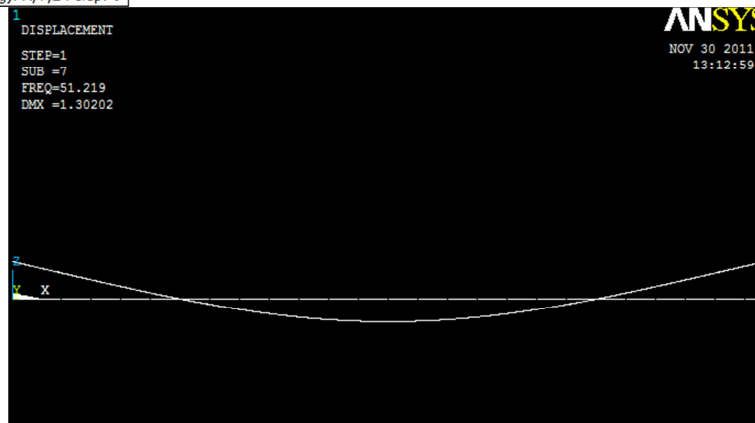
Experimentálně [Hz]	MKP model – shell181 [Hz]	MKP model-Solid185 [Hz]
49,9	51,06	51.221
138	140,72	141.18
152	144,49	153.24
270	275,81	276.77
---	396,56	420.23
446	455,83	457.50
665	680,77	683.43

• **Vlastní tvary**

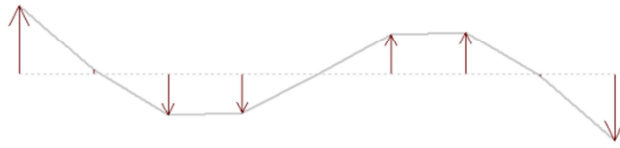
Right (+Y): 49,9 Hz



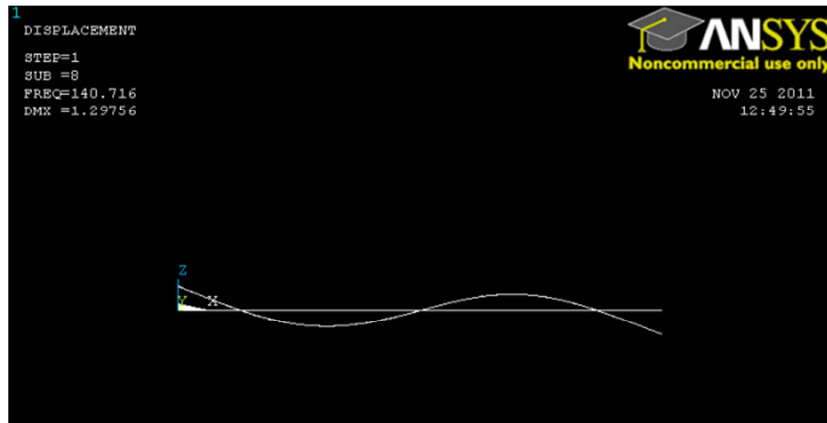
Amp: 1,0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: 0



Right (+Y): 138, Hz



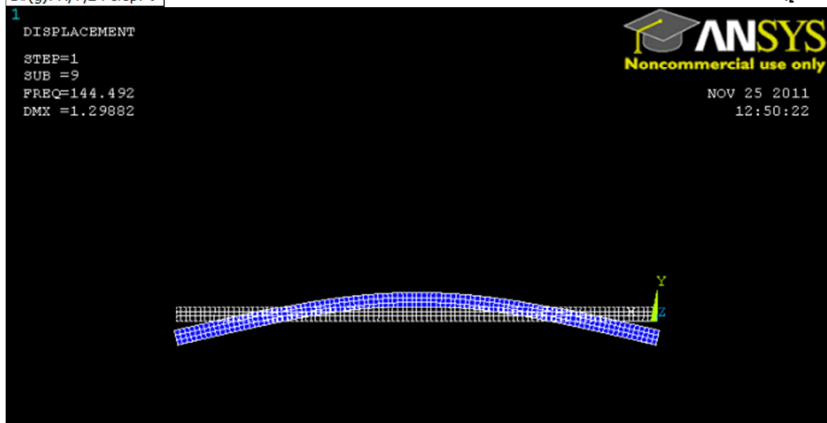
Amp: 1,0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: 0



Bottom (-Z): 152, Hz



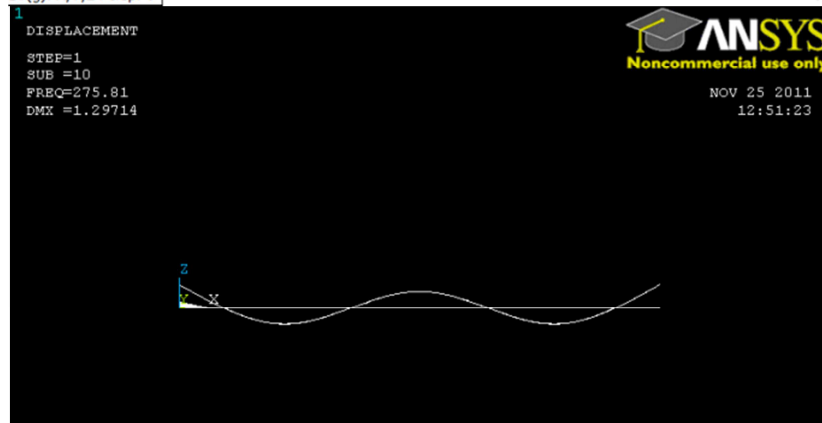
Amp: 1,0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: 0



Right (+Y): 270, Hz



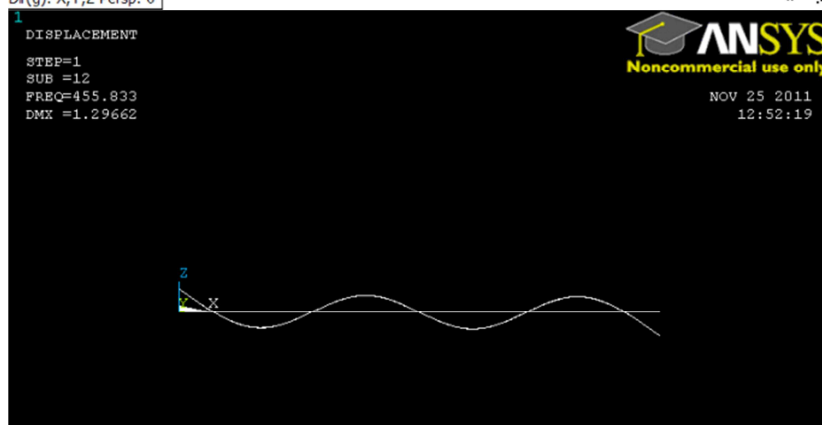
Amp: 1,0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: 0



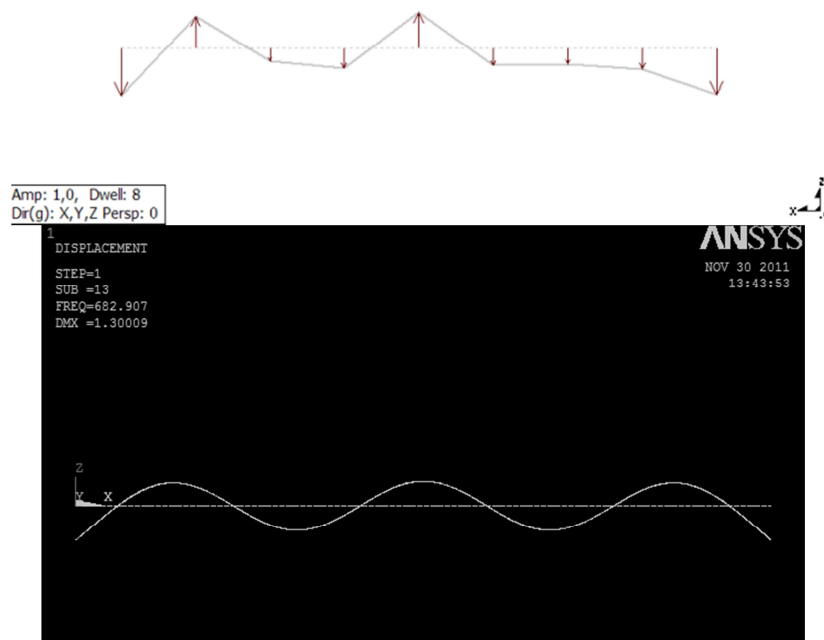
Right (+Y): 446, Hz



Amp: 1,0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: 0



Right (+Y): 665, Hz



Obr.18-porovnání prvních sedmi experimentálně zjištěných vlastních tvarů

Vyhodnocení výsledků

Výsledky modelu, vytvořeného v software *Ansys 13*, se experimentálně podařilo ověřit. Vlastní tvary příslušných vlastních frekvencí si vizuálně odpovídají a frekvence získané experimentálně a MKP výpočty si jsou poměrně blízké. Díky absenci okrajových podmínek, které jsou při modelování, na rozdíl od reálného tělesa, vždy ideální, se do výsledků získaných měření zanesla malá chyba. Závěrem lze říci, že modální parametry počítačového modelu vytvořeného v software *Ansys 13* odpovídají reálnému tělesu.

Pro vlastní frekvence 49,9 Hz, 138Hz, 270Hz, 446Hz a 665Hz odpovídající vlastní tvary kmitají kolmo na osu nosníku. Pro vlastní frekvenci 152Hz a 776,72Hz nosník kmitá příčně. Při experimentálním měření se nepodařilo zjistit vlastní frekvenci 396,56 Hz, na které dominuje příčné kmitání. Torzní kmitý se díky parametrům nosníku projevují až při buzení o frekvencích nad 900Hz. Při takto vysokých frekvencích je již měření poměrně nepřesné, navíc konfigurace měřicího aparátu neumožňuje zaznamenání torzních kmitů (buzení i měření odezvy probíhalo v ose nosníku).

5.2 Deska s neznámými okrajovými podmínkami

Předmětem zkoumání byla ocelová deska o rozměrech 730x430x2 mm, která byla po celém obvodu vetknuta do tuhého rámu. Hloubka zapuštění byla 15mm. Při měření bylo použito následující vybavení:

rázové budící kladívko typ 8202

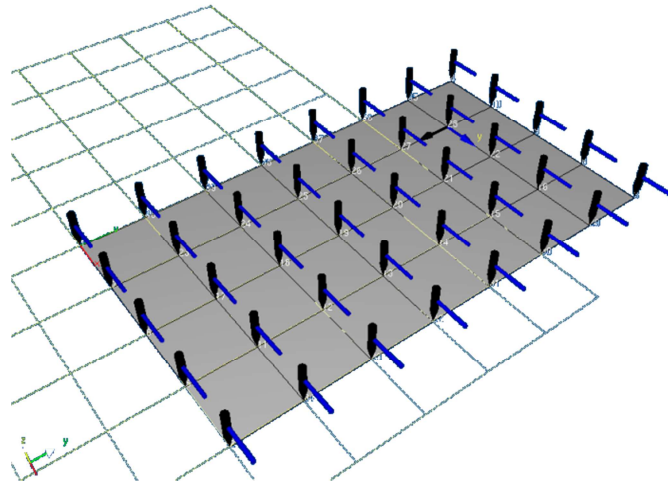
akcelerometr typ 4506B

hardware a software (*Pulse*, *ME Scope*, *Front-end*) potřebný k analýze



Obr.24 -deska vetknutá mezi hranoly

V software *Pulse* byla deska modelována jako 2D prvek o rozměrech 700x400mm (výška, která je značně menší než zbývající dva rozměry nebyla při vytváření modelu uvažována, model byl tedy vytvářen jako tenkostěnný). Vetknutí bylo uvažováno jako ideální, zapuštění nebylo uvažováno. Deska byla diskretizována na rovnoměrnou síť tvořenou 8 body po délce a 5-ti body po šířce (VIZ. Obr. 25). Cílem je určení několika prvních vlastních frekvencí a příslušných vlastních tvarů, k jejichž popisu takto zvolená diskretizace sítě postačuje. Rovněž umístění akcelerometru bylo voleno tak, aby se nenacházel ani v kmitně, ani v uzlu několika prvních očekávaných vlastních tvarů charakteristických pro vetknutou desku. Akcelerometr byl tedy umístěn v bodě 28. Případné umístění v kmitně nebo uzlu by vedlo k znehodnocení naměřených dat a tedy ke značné nepřesnosti měření. Jeho umístění v kmitně by mohlo vést např. k přetížení akcelerometru i při malém buzení a naopak při umístění poblíž uzlu by se nemuselo podařit dosáhnout aktivační úrovně akcelerometru. V ostatním bodech vytvořené sítě bylo provedeno buzení pomocí rázového kladívka ve směru osy $-Z$ (VIZ Obr. 25).

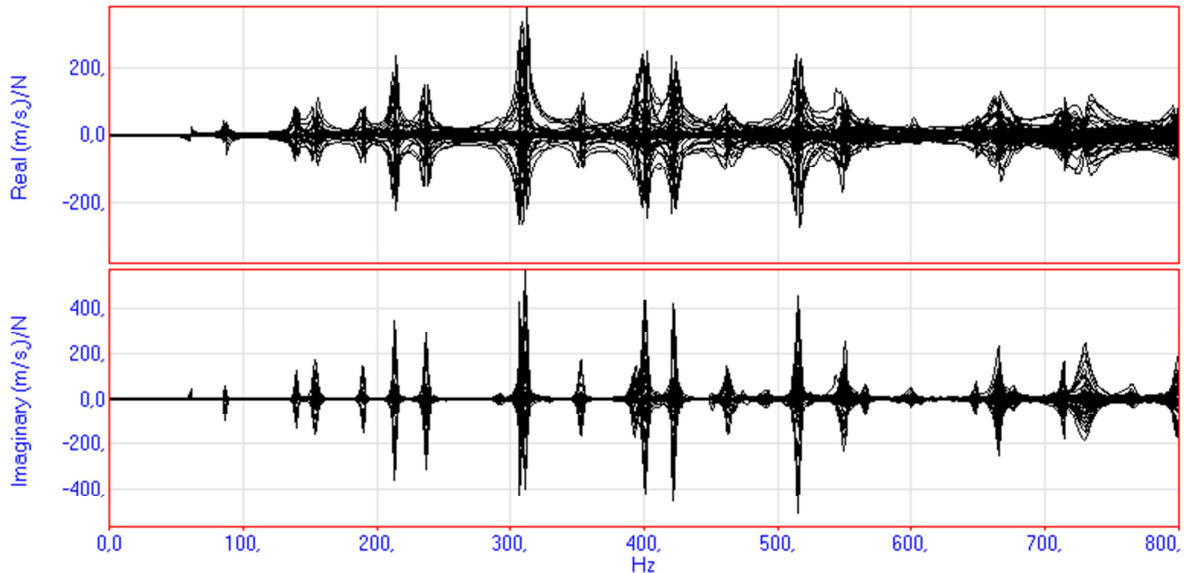


Obr.25 - model desky vytvořený v software Pulse

Uvažované vetknutí je předpokládáno jako ideální, tj. krajním bodům byly odebrány všechny stupně volnosti. Nicméně reálné vetknutí se ideálnímu různou mírou blíží. Pro ověření naměřených dat je třeba provést několik MKP výpočtů s různými okrajovými podmínkami.

Experimentální modální analýza desky

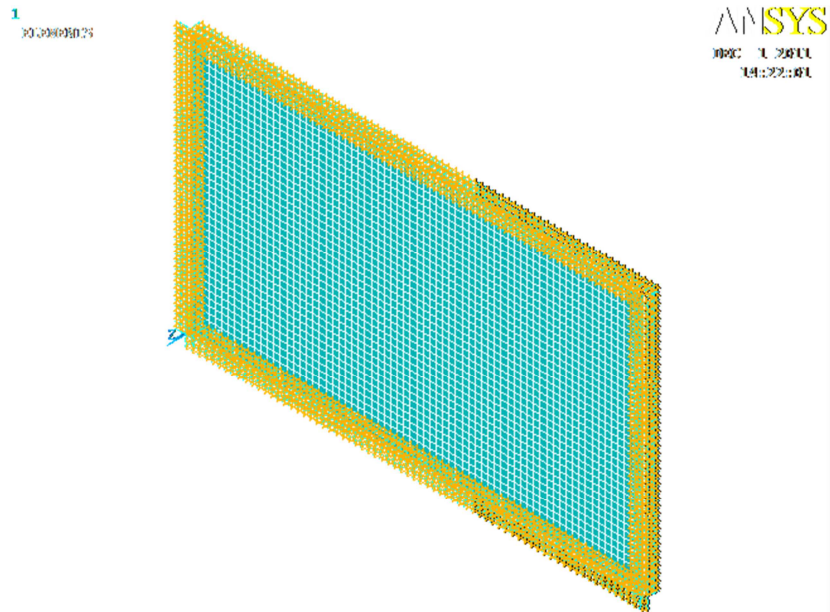
Vytvoření modelu v software *Pulse* bylo již popsáno výše. Analýzou naměřených dat, která byla provedena v software *ME Scope*, byly získány vlastní tvary a vlastní frekvence uvedené níže (str. 28-32).



Obr.26 - Reálná a imaginární část frekvenčních přenosových funkcí

MKP model

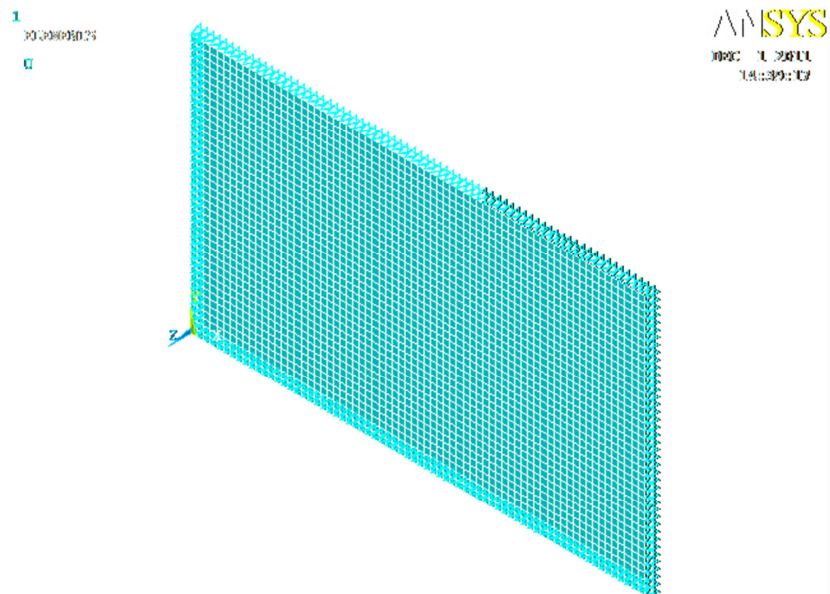
- **Vetknutá deska:**



Obr.27 -vetknutá deska

V tomto MKP modelu byla deska o rozměrech 700x400x2 mm vetknuta v okrajových uzlech (uzlům na okrajích byly odebrány všechny stupně volnosti).

- **Podepřená deska:**

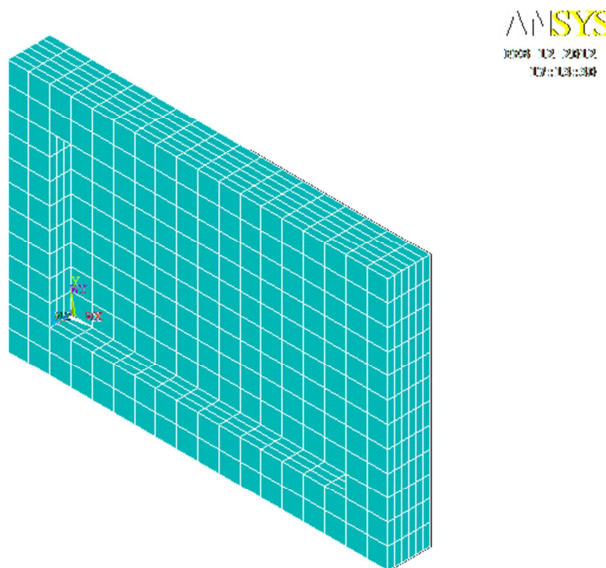


Obr.28-podepřená deska

V tomto MKP modelu byla deska o rozměrech 700x400x2 mm podepřena v obvodových uzlech (uzlům na okrajích byl odebrán 1 stupeň volnosti-posun ve směru Z).

- **Deska s vetknutým rámem**

Z důvodu idealizace vetknutí při vytváření MKP modelu vetknuté desky byl vytvořen další model s cílem přiblížit se více naměřeným datům. Deska byla modelována o skutečných rozměrech (730x430x2 mm), včetně vetknutého přesahu 1,5 cm po celém obvodu. Přesah byl vetknut mezi dva hranoly, jejichž plochám byly odebrány všechny stupně volnosti. Tento model umožňuje deformaci v místě styku desky a hranolů a měl více odpovídat realitě.

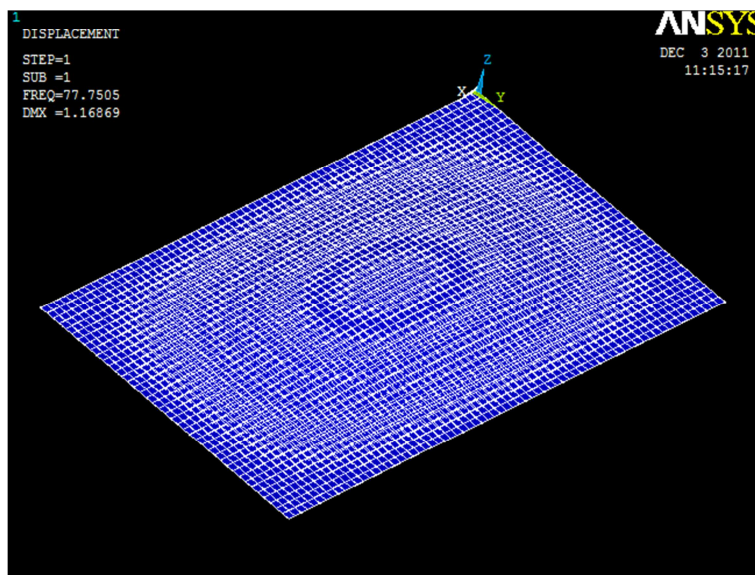
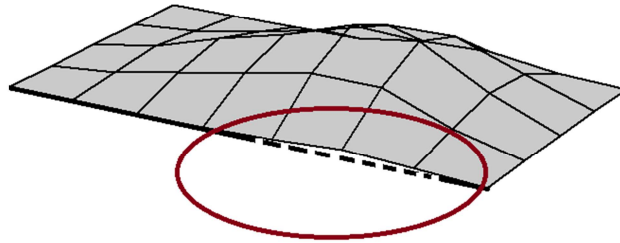


Obr.29 - MKP model desky včetně rámu

Srovnání výsledků

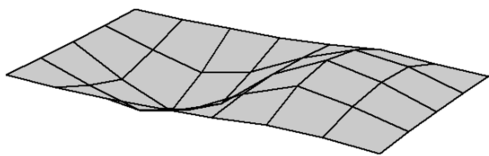
Vlastní frekvence [Hz] pro frekvenční rozsah 0-400 Hz			
Experiment	MKP model- Vetknutá deska	MKP model- Podepřená deska	MKP model- deska s rámem
61	77.751	39.920	77,169
87,3	108.52	69.400	107,83
140	162.37	118.64	161,32
155	198.39	130.49	196,35
190	227.57	159.91	225,49
213	238.43	187.78	236,63
237	277.82	209.06	275,53
307	335.92	277.02	332,84
311	349.88	278.07	347,03
353	381.47	282.33	376,16

3DView: 61, Hz

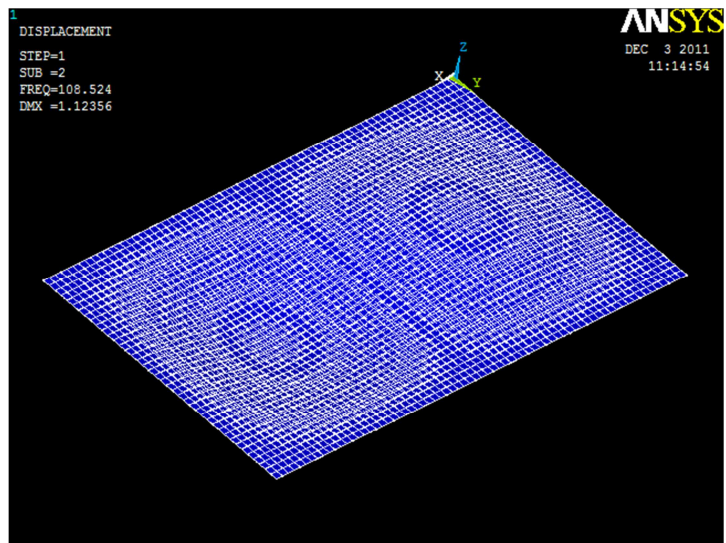


Obr.30- srovnání prvního vlastního tvaru

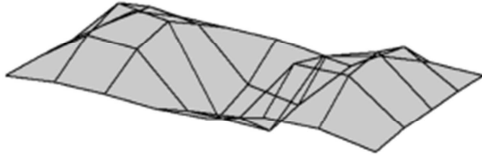
3DView: 87,3 Hz



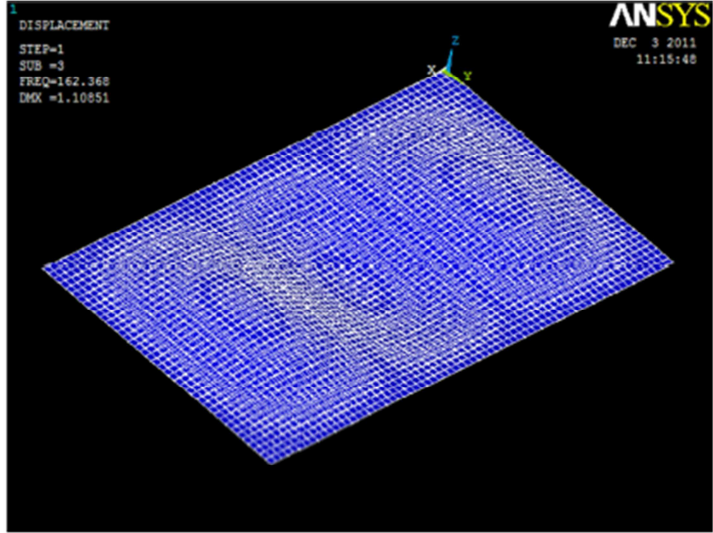
Amp: 1,0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: +10



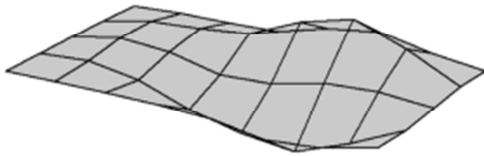
3DView: 140, Hz



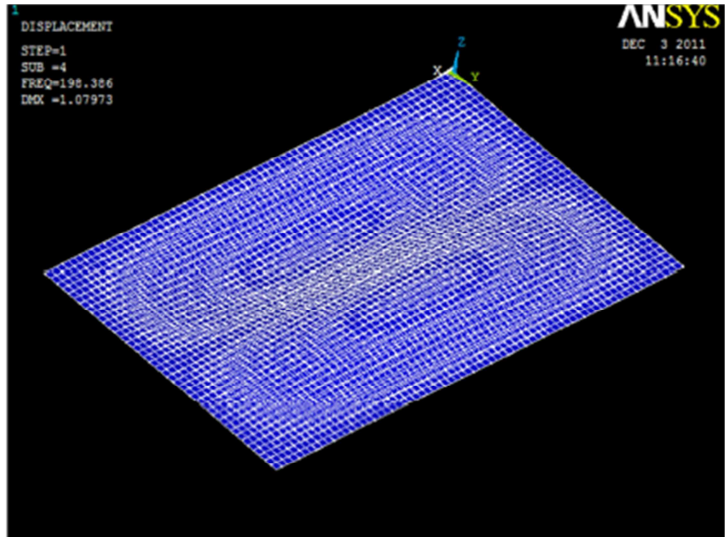
Amp: 1.0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z, Persp: +10



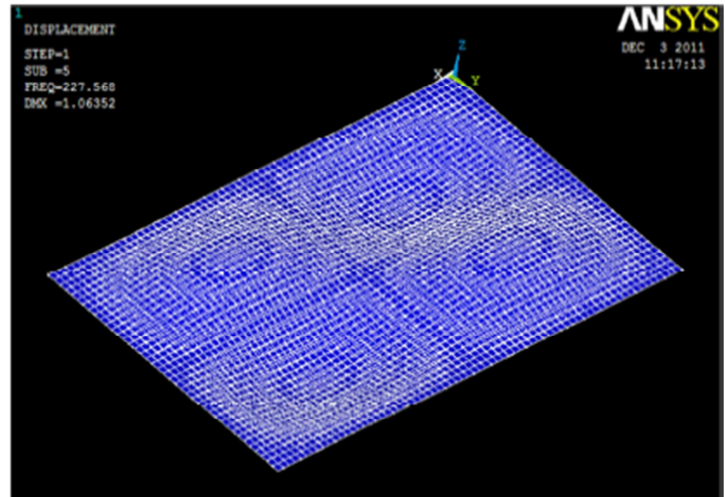
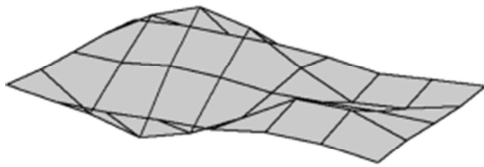
3DView: 155, Hz



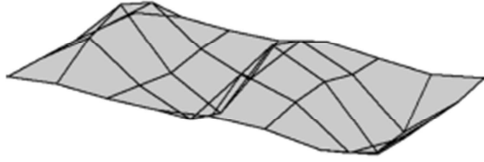
Amp: 1.0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z, Persp: +10



3DView: 190, Hz

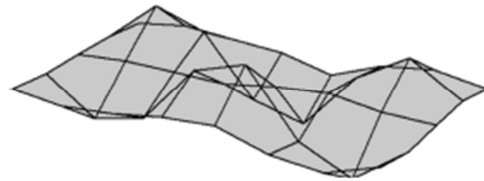


3DView: 213, Hz



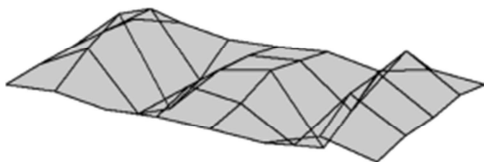
Amp: 1.0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: +10

3DView: 237, Hz

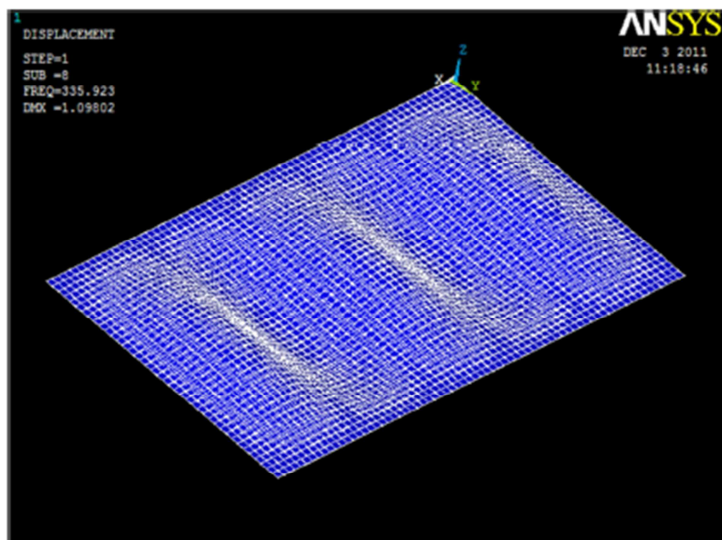
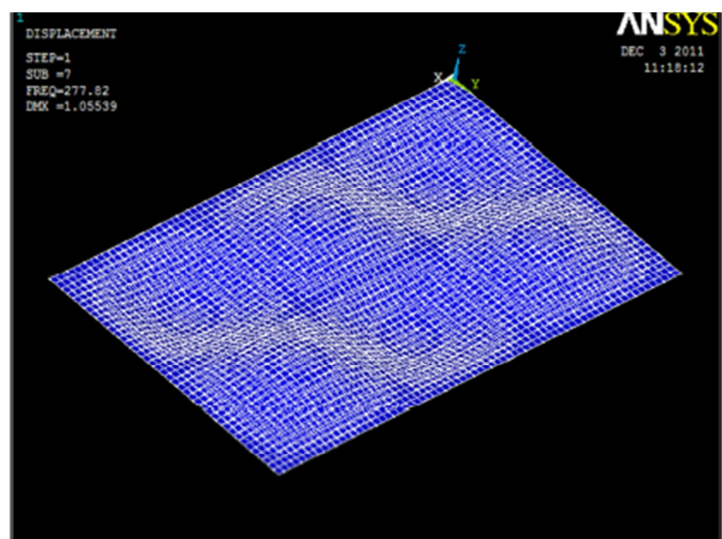
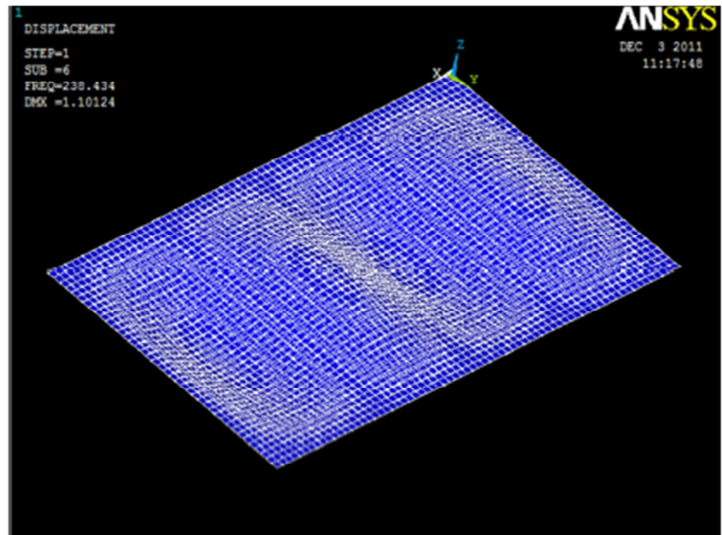


Amp: 1.0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: +10

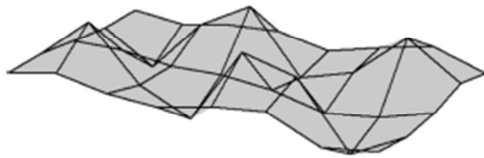
3DView: 307, Hz



Amp: 1.0, Dwell: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: +10

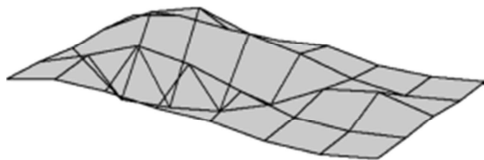


3DView: 311, Hz

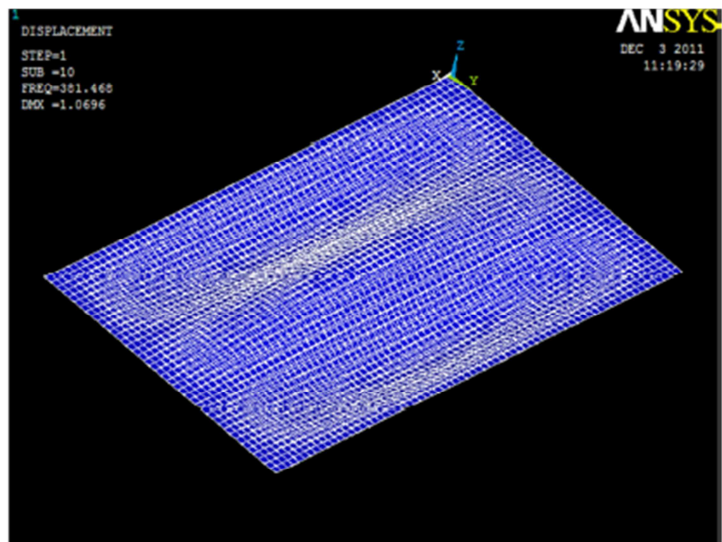
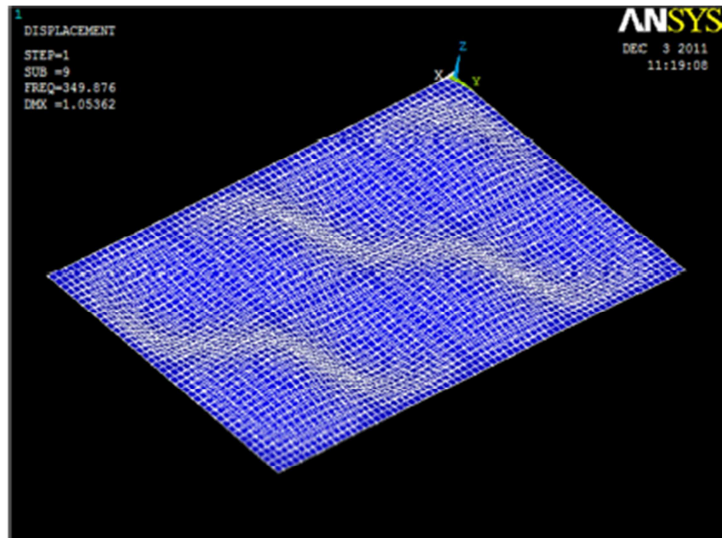


Amp: 1,0, Dveř: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: +10

3DView: 353, Hz



Amp: 1,0, Dveř: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: +10



Obr.31 –Porovnání vyšších vlastních tvarů

Vyhodnocení výsledků

Tvary experimentálně určených vlastních kmitů (výše porovnáváno prvních 10) odpovídají předpokládaným tvarům charakteristickým pro vetknutou desku. Z vyhodnocení naměřených dat v software *ME Scope* je patrné, že vetknutí desky se neblíží ideálnímu. Jak je vidět z prvního vlastního tvaru (*obr.30*) i následujících vlastních tvarů okrajové body, které by měly být vetknuty, poměrně značně kmitají (zvýrazněno na *obr.30*).

Dále je u prvního vlastního tvaru (*obr.30*) dobře patrné, že není symetrický jak by tomu bylo v idealizovaném případě. Tento jev lze rovněž pozorovat na zobrazení dalších vlastních tvarů. Posunutí deformace je dobře patrné např. u prvního příčného tvaru kmitu. Tato nesymetričnost je s největší pravděpodobností způsobena nedokonalostí vetknutí. Dalšími důvody způsobujícími nehomogenitu desky samotné mohou být např. nepřesnosti při výrobě, vystavení tepelným a elektrickým vlivům, mechanickému namáhání atp.

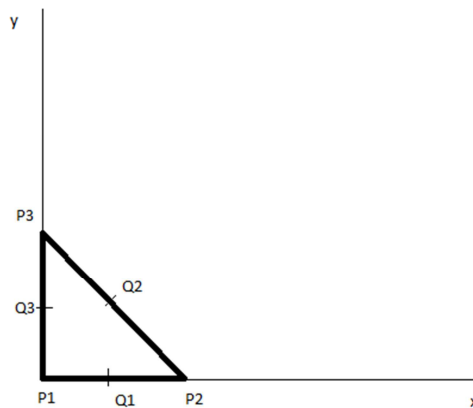
Za předpokladu, že je deska homogenní, je možné docílit přesnějších výsledků experimentu opakováním měření na desce, kde bylo zlepšeno vetknutí.

6. Identifikace vetknuté desky

Jak bylo výše uvedeno, modální analýzou vetknuté desky provedenou v software *Ansys* se ukázalo, že tento výpočtový model je nevyhovující. Z tohoto důvodu je třeba provést identifikaci jiným způsobem. V software *Matlab* bude vytvořen a optimalizován MKP model. Cílem této optimalizace bude dosáhnout shody vlastních frekvencí a příslušných vlastních tvarů zjištěných experimentální modální analýzou.

Popis deskového prvku

Pro sestavení optimalizačního modelu bude použit trojúhelníkový prvek s 21 parametry popisujícími průhyb desky (6 parametrů je lokalizováno v uzlových bodech a 1 parametr ve středu strany trojúhelníku). Volba parametrů zaručuje spojitost až do druhé derivace průhybu v uzlech trojúhelníkového prvku a spojitost derivací ve směru normál ve středech stran. Tento prvek vznikl modifikací prvku odvozeného v ^[13].



Obr.32 - Normalizovaný konečný trojúhelníkový prvek

Vektor těchto parametrů lze zapsat jako:

$$\mathbf{q}_e = [w^{(1)}, w_x^{(1)}, w_y^{(1)}, w_{xx}^{(1)}, w_{xy}^{(1)}, w_{yy}^{(1)}, w^{(2)}, w_x^{(2)}, w_y^{(2)}, w_{xx}^{(2)}, w_{xy}^{(2)}, w_{yy}^{(2)}, w^{(3)}, w_x^{(3)}, w_y^{(3)}, w_{xx}^{(3)}, w_{xy}^{(3)}, w_{yy}^{(3)}, w_n^{(4)}, w_n^{(5)}, w_n^{(6)}]^T$$

Kde:

$$w^{(1)} = w(P1)$$

$$w_{xx}^{(1)} = \frac{\delta^2 w(P3)}{\delta x \delta x}$$

$$w_n^{(5)} = \frac{\delta w(Q2)}{\delta n}$$

Odvození matice tuhosti a hmotnosti prvku

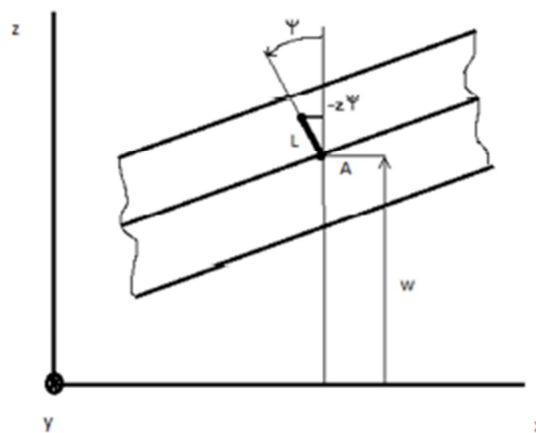
Při odvození matice tuhosti a hmotnosti prvku vyjdeme z konstitutivních vztahů pro rovinnou napjatost na desce:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

poměrná přetvoření vyjádříme z geometrie deformace



Obr. 33 – deformace části desky

Posun bodu L ve směru x lze vyjádřit ve tvaru (za předpokladu, že ψ je malý):

$$u = -z w_x$$

pro posun ve směru y platí

$$v = v_{0x} - z w_y$$

kde označíme

$$w_x = \frac{\delta w}{\delta x} = \psi$$

$$w_y = \frac{\delta w}{\delta y} = \vartheta$$

Pomocí posunutí lze vyjádřit prvky tenzoru deformace:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x} = -z w_{xx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} = -zw_{yy}$$

$$\gamma_{xy} = -2zw_{xy}$$

což lze zapsat jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z) = (-z\mathbf{I})\mathbf{p}$$

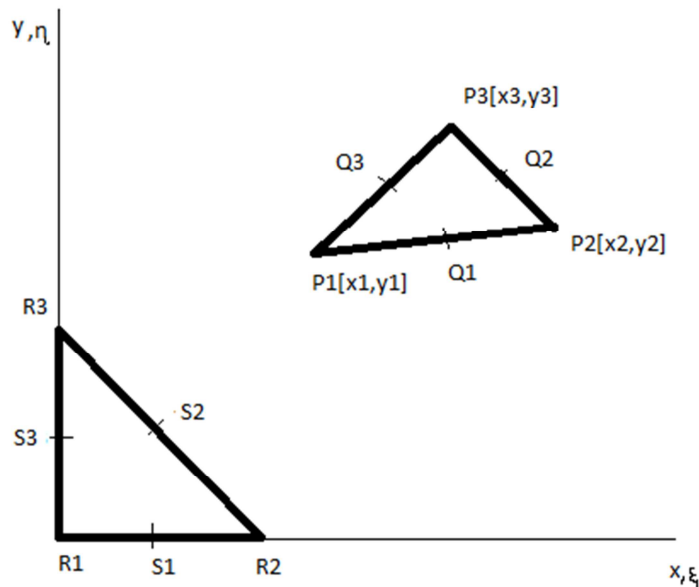
kde \mathbf{I} je jednotková matice a $\mathbf{p} = [w_{xx}, w_{yy}, 2w_{xy}]^T$

vektor napětí lze za použití výše uvedených vztahů zapsat jako $\boldsymbol{\sigma}(z) = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \mathbf{E}(-z\mathbf{I})\mathbf{p}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E} & \nu\tilde{E} & 0 \\ \nu\tilde{E} & \tilde{E} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

kde $\tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$

Níže je zobrazen obecný trojúhelníkový prvek, jehož vrcholy mají souřadnice $[x_i \ y_i]$, který je transformován na normalizovaný trojúhelníkový prvek tvořený vrcholy P1, P2 a P3 určených souřadnicemi $[\xi_i \ \eta_i]$.



Obr.34 – Normalizovaný konečný trojúhelníkový prvek

mezi souřadným systémem x, y a ξ, η platí následující transformační vztahy:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta = x_1 + \bar{x}_2\xi + \bar{x}_3\eta$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta = y_1 + \bar{y}_2\xi + \bar{y}_3\eta$$

kde:

$$\bar{x}_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\bar{y}_i = y_i - y_{i-1}$$

Za použití těchto vztahů můžeme vektor \mathbf{p} přepsat do tvaru $\mathbf{p} = \mathbf{R}_e \mathbf{p}^*$, což lze maticově zapsat:

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \\ \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \\ 2 \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J_e|^2} \begin{bmatrix} \bar{y}_3^2 & -2\bar{y}_2\bar{y}_3 & \bar{y}_2^2 \\ \bar{x}_3^2 & -2\bar{x}_2\bar{x}_3 & \bar{x}_2^2 \\ -2\bar{x}_2\bar{y}_3 & 2(\bar{x}_3\bar{y}_2 + \bar{y}_3\bar{x}_2) & -2\bar{x}_2\bar{y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 w^*}{\delta \xi^2} \\ \frac{\delta^2 w^*}{\delta \xi \delta \eta} \\ 2 \frac{\delta^2 w^*}{\delta \eta^2} \end{bmatrix}$$

kde $|J_e|^2$ je kvadrát jakobiánu výše uvedené transformace pro jeden prvek zvolíme 21 parametrů popisujících průhyb desky:

$$\mathbf{q}_e = [w^{(1)}, w_x^{(1)}, w_y^{(1)}, w_{xx}^{(1)}, w_{xy}^{(1)}, w_{yy}^{(1)}, w^{(2)}, w_x^{(2)}, w_y^{(2)}, w_{xx}^{(2)}, w_{xy}^{(2)}, w_{yy}^{(2)},$$

$$w^{(3)}, w_x^{(3)}, w_y^{(3)}, w_{xx}^{(3)}, w_{xy}^{(3)}, w_{yy}^{(3)}, w_n^{(4)}, w_n^{(5)}, w_n^{(6)}]^T$$

$$w^{(1)} = w(P1)$$

$$w_{xx}^{(1)} = \frac{\delta^2 w(P3)}{\delta x \delta x}$$

$$w_n^{(5)} = \frac{\delta w(Q2)}{\delta n}$$

Takto zvolené parametry zaručují spojitost až do druhých derivací průhybu ve vrcholech prvku a spojitost prvních derivací ve směru normál ve středech stran.

uzlové parametry lze vyjádřit pomocí normalizovaných souřadnic:

$$\mathbf{q}_e^* = [w^{*(1)}, w_\xi^{*(1)}, w_\eta^{*(1)}, w_{\xi\xi}^{*(1)}, w_{\eta\eta}^{*(1)}, w^{*(2)}, \dots, w_{\eta\eta}^{*(3)}, w_\eta^{*(4)}, w_\eta^{*(5)}, w_\xi^{*(6)}]^T$$

průhyb v normalizovaných souřadnicích (budeme aproximovat pomocí polynomu, který obsahuje rovněž 21 konstant) lze napsat ve tvaru $w^*(\xi) = \mathbf{g}(\xi) \mathbf{a}$ kde:

$$\mathbf{g}(\xi) = [1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \eta^3, \xi^4, \xi^3\eta, \xi^2\eta^2, \xi\eta^3, \eta^4, \xi^5, \xi^4\eta, \xi^3\eta^2, \xi^2\eta^3, \xi\eta^4, \eta^5]$$

Konstanty vektoru \mathbf{a} nemají fyzikální význam a proto je budeme chtít nahradit parametry prvku obsaženými ve vektoru \mathbf{q}_e .

průhyb a jeho derivace ve vrcholových bodech R1, R2, R3 a P1, P2, P3, vyjádřený v normalizovaných souřadnicích (\mathbf{w}^*) lze vyjádřit pomocí průhybu v původních souřadnicích (\mathbf{w}) jako $\mathbf{w}^{*(i)} = \mathbf{T} \mathbf{w}^{(i)}$, kde $i = 1, 2, 3$ (pro 1-3 vrchol). Tento vztah lze rozepsat:

$$\begin{bmatrix} w^{*(i)} \\ w_{\xi}^{*(i)} \\ w_{\eta}^{*(i)} \\ w_{\xi\xi}^{*(i)} \\ w_{\xi\eta}^{*(i)} \\ w_{\eta\eta}^{*(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2\bar{y}_2 & \bar{y}_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_2\bar{x}_3 & \bar{x}_2\bar{y}_3 + \bar{x}_3\bar{y}_2 & \bar{y}_2\bar{y}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_3^2 & 2\bar{x}_3\bar{y}_3 & \bar{y}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(i)} \\ w_x^{(i)} \\ w_y^{(i)} \\ w_{xx}^{(i)} \\ w_{xy}^{(i)} \\ w_{yy}^{(i)} \end{bmatrix}$$

poslední tři prvky vektoru \mathbf{q}_e^* vyjádříme pomocí parametrů skutečného trojúhelníku:

$$\begin{bmatrix} w_{\eta}^{*(4)} \\ w_n^{*(5)} \\ w_{\xi}^{*(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) & \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{y}_2 + \bar{y}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x^{(4)} \\ w_y^{(4)} \\ w_x^{(5)} \\ w_y^{(5)} \\ w_x^{(6)} \\ w_y^{(6)} \end{bmatrix}$$

tuto soustavu lze zkráceně zapsat jako $\mathbf{w}_n^* = \mathbf{T}_1 \mathbf{w}_Q$

Prvky vektoru \mathbf{w}_Q nejsou obsaženy ve vektoru parametrů \mathbf{q}_e , a proto je pomocí prvků tohoto vektoru nutné vektor \mathbf{w}_Q vyjádřit. Toho částečně docílíme tak, že vektor \mathbf{w}_Q vyjádříme pomocí derivací průhybu ve směru normál $w_{n_{jk}}^{(i)}$ (jsou obsaženy ve vektoru parametrů \mathbf{q}_e) a derivací ve směru obvodových souřadnic $w_{s_{jk}}^{(i)}$. Toto vyjádření lze zapsat jako $\mathbf{w}_Q = \mathbf{T}_2 \mathbf{w}_{ns}$ kde:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{12} & -\sin\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_{12} & \cos\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_{23} & -\sin\alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha_{23} & \cos\alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{13} & -\sin\alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_{13} & \cos\alpha_{13} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{ns} = \begin{bmatrix} w_{s_{12}}^{(4)} \\ w_{n_{12}}^{(4)} \\ w_{s_{23}}^{(5)} \\ w_{n_{23}}^{(5)} \\ w_{s_{13}}^{(6)} \\ w_{n_{13}}^{(6)} \end{bmatrix}$$

Kde úhly α_{jk} jsou úhly, které svírá daná strana mezi uzly P_j a P_k skutečného trojúhelníka. Nyní je potřeba vyjádřit derivaci průhybu ve směru obvodové souřadnice s_{jk} pomocí parametrů w v uzlech P_j a P_k . Předpokládejme, že průhyb ve směru s lze aproximovat polynomem 5. stupně $w(s)$. Jako konstanty tohoto polynomu zvolme $w(0)$, $w'(0)$, $w''(0)$, $w(1)$, $w'(1)$, $w''(1)$, kde l značí délku příslušné strany trojúhelníka.

derivace průhybu podle s ve středu strany tedy bude ve tvaru:

$$w''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{32} (w_l'' - w_0'') - \frac{7}{16} (w_0' - w_l') + \frac{15}{8l} (w_l - w_0)$$

Tuto derivaci průhybu podle s , bude nutné vyjádřit v souřadnicích x a y . Pro skutečný trojúhelník platí: $x = s_{jk} \cos \alpha_{jk}$ a $y = s_{jk} \sin \alpha_{jk}$.

za použití těchto vztahů lze určit vektor $w_{ns} = T_3 q_e$ ve tvaru:

$$w_{ns} = \begin{bmatrix} w_{s_{12}}^{(4)} \\ w_{n_{12}}^{(4)} \\ w_{s_{23}}^{(5)} \\ w_{n_{23}}^{(5)} \\ w_{s_{13}}^{(6)} \\ w_{n_{13}}^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & b_{12} & \mathbf{0}_{16} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{16} & \mathbf{0}_{16} & \mathbf{0}_{16} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{16} & a_{23} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{16} & \mathbf{0}_{16} & \mathbf{0}_{16} & 0 & 1 & 0 \\ a_{13} & \mathbf{0}_{16} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{16} & \mathbf{0}_{16} & \mathbf{0}_{16} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q_e$$

kde $\mathbf{0}_{16} = [0,0,0,0,0,0]$

$$a_{ij} = \left[-\frac{15}{8l_{ij}}, -\frac{7}{16} \cos \alpha_{ij}, -\frac{7}{16} \sin \alpha_{ij}, -\frac{l_{ij}}{32} \cos^2 \alpha_{ij}, -\frac{l_{ij}}{16} \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ij}, -\frac{l_{ij}}{32} \sin^2 \alpha_{ij} \right]$$

$$b_{ij} = \left[\frac{15}{8l_{ij}}, -\frac{7}{16} \cos \alpha_{ij}, -\frac{7}{16} \sin \alpha_{ij}, \frac{l_{ij}}{32} \cos^2 \alpha_{ij}, \frac{l_{ij}}{16} \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ij}, \frac{l_{ij}}{32} \sin^2 \alpha_{ij} \right]$$

zkombinováním výše uvedených vztahů lze docílit vyjádření vztahu mezi parametry normalizovaného trojúhelníka a parametry skutečného trojúhelníka ve tvaru:

$$w_n^* = T_1 T_2 T_3 q_e$$

pak lze zkompletovat vyjádření vektor q_e^* :

$$\mathbf{q}_e^* = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{*(1)} \\ \mathbf{w}^{*(2)} \\ \mathbf{w}^{*(3)} \\ \mathbf{w}^{*(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,3} \\ \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{T} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,3} \\ \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{T} & \mathbf{0}_{6,3} \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(1)} \\ \mathbf{w}^{(2)} \\ \mathbf{w}^{(3)} \\ \mathbf{w}_n \end{bmatrix} = \mathbf{L}_e \mathbf{q}_e$$

kde:

$$\mathbf{L}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,3} \\ \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{T} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,3} \\ \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{T} & \mathbf{0}_{6,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3$$

a $\mathbf{0}_{i,j}$ je nulová matice o i řádcích a j sloupcích

průhyb v normalizovaných souřadnicích $\mathbf{w}^*(\xi) = \mathbf{g}(\xi) \mathbf{a}$ budeme chtít vyjádřit pomocí vektoru hledaných parametrů \mathbf{q}_e

po úpravách dostáváme $\mathbf{w}^*(\xi) = \mathbf{g}(\xi) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{q}_e$

matice \mathbf{S} bude zobrazena v příloze

nyní lze určit vektor \mathbf{p}^* :

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\xi\xi}^*(\xi) \\ \mathbf{w}_{\xi\eta}^*(\xi) \\ \mathbf{w}_{\eta\eta}^*(\xi) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\xi) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}_e^*$$

$$\text{kde } \mathbf{G}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\xi\xi}(\xi) \\ \mathbf{g}_{\xi\eta}(\xi) \\ \mathbf{g}_{\eta\eta}(\xi) \end{bmatrix} \text{ obsahuje druhé derivace vektoru } \mathbf{g}(\xi)$$

nyní již lze za použití vztahu $\mathbf{p} = \mathbf{R}_e \mathbf{p}^*$ přepsat vztahy pro poměrné prodloužení a napětí na desce do tvaru:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z) = -z \mathbf{I} \mathbf{R}_e \mathbf{G}(\xi) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{q}_e$$

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \mathbf{E}(-z \mathbf{I}) \mathbf{R}_e \mathbf{G}(\xi) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}_e \mathbf{q}_e$$

matice tuhosti elementu $\mathbf{K}_e = \mathbf{L}_e^T [\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 d_{ij,e} \mathbf{A}_{i,j}] \mathbf{L}_e$

matice tuhosti elementu $\mathbf{M}_e = |J_e| 2\rho h \mathbf{L}_e^T \mathbf{A} \mathbf{L}_e$

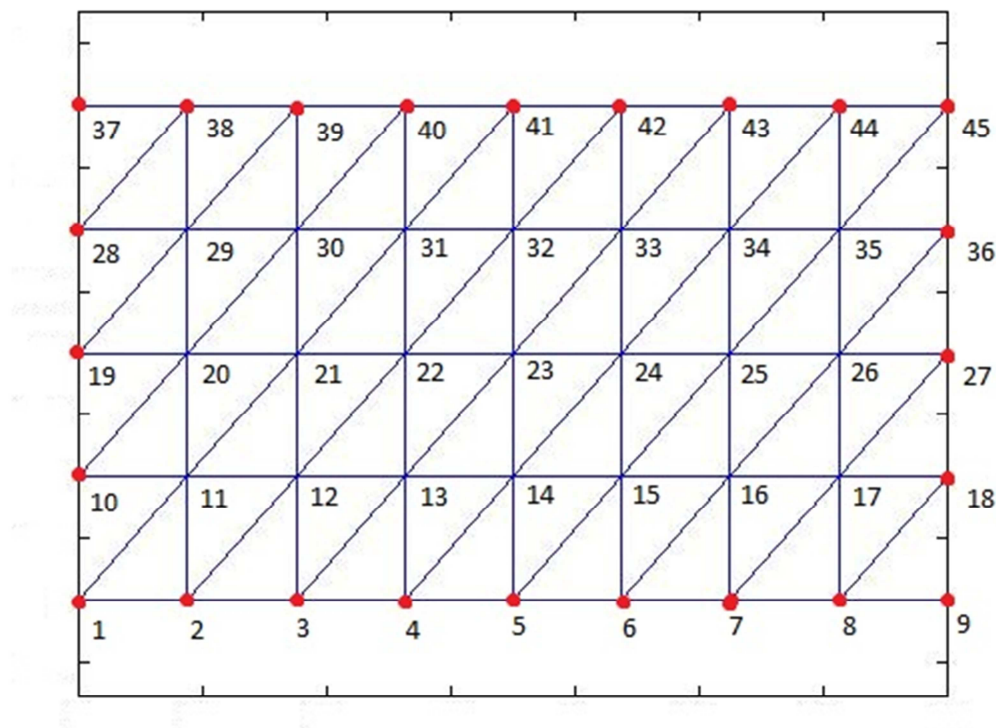
$$\text{kde } \mathbf{A} = \mathbf{S}^{-T} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathbf{g}^T(\xi) \mathbf{g}(\xi) d\xi d\eta \mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{D}_e = |J_e| \mathbf{R}_e^T \frac{2h^3}{3} \mathbf{E} \mathbf{R}_e$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} \nu & 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2} \nu & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0,5E}{1+\nu} \end{bmatrix}$$

Popis modelu

Model složený z výše popsaných konečných prvků lze zobrazit jako síť těchto prvků, kde jako optimalizační parametry byly zvoleny přidané fiktivní tuhosti - pružiny, jejichž hodnoty budou v průběhu identifikace optimalizovány. Tyto tuhosti byly přidány do globální matice tuhosti na pozice odpovídající průhybu a prvním derivacím průhybu každého obvodového uzlu sítě (viz. níže červeně vyznačené obr. č. 35.). Cílem optimalizace bude dosažení co nejlepší shody vlastních frekvencí a tvarů zjištěných experimentálně s frekvencemi a tvary výpočtového modelu. Optimalizačních parametrů bude 72 (v každém zvýrazněném uzlu sítě konečných prvků zobrazené v obr. č. 35 jsou, jak již bylo výše zmíněno, 3 optimalizační parametry). Model byl uvažován jako homogenní, a proto jsou všechny materiálové konstanty shodné pro každý konečný prvek.



Obr.35 - síť konečných prvků s očíslovanými uzly

Formulace optimalizační úlohy

Jak bylo výše uvedeno, cílem optimalizace je, prostřednictvím volby vhodného vektoru přidanych tuhostí, docílit toho, že tento MKP model bude z hlediska hodnot vlastních frekvencí a vlastních tvarů odpovídat objektu, na kterém byla prováděna experimentální modální analýza.

Pro optimalizaci bude využit optimalizační *toolbox* implementovaný v *Matlabu*, konkrétně bude použita funkce *fmincon*. Pro tuto funkci je třeba definovat interval, ve kterém se mohou optimalizované parametry pohybovat a počáteční podmínky, ze kterých bude optimalizační procedura vycházet. Níže uvedené výsledky byly získány za použití:

$$t_i \in \langle 10^4; 10^9 \rangle \text{ (kde } t_i \text{ je } i\text{-tá přidaná tuhost)}$$

a při startovací podmínce $\mathbf{t}_0 = 13888,8 * \mathbf{I}(72,1)$

Kde \mathbf{t}_0 je vektor počátečních přidanych tuhostí a \mathbf{I} je jednotková matice o rozměru (72,1). Konstanta násobící tuto matici vyplývá z geometrie modelu a mění se v závislosti na velikosti sítě tak, aby celková přidaná tuhost byla vždy konstantní.

Cílová funkce O byla zvolena ve tvaru:

$$O = 10^6 * (1 - \mathbf{v}_{1m}^T \mathbf{v}_{1p}) + 10^6 * (1 - \mathbf{v}_{2m}^T \mathbf{v}_{2p}) + 10^6 * \frac{(\mathbf{d}^T \mathbf{Q} \mathbf{d})}{\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}}$$

Kde:

\mathbf{v}_{1m} je vlastní vektor odpovídající prvnímu tvaru kmitu získaného experimentálně (normovaný euklidovskou normou)

\mathbf{v}_{1p} je vlastní vektor odpovídající prvnímu tvaru kmitu získaného výpočtem pomocí MKP modelu (normovaný euklidovskou normou)

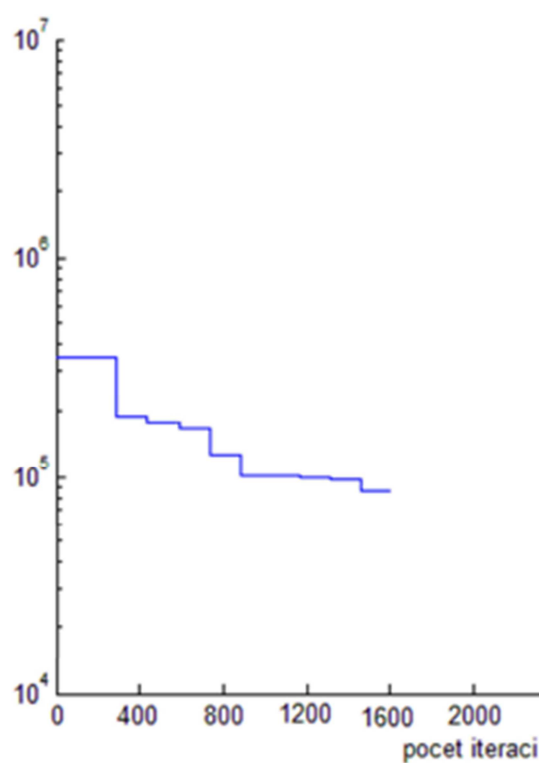
\mathbf{d} je vektor rozdílu prvních 5 vlastních frekvencí získaných experimentálně a výpočetně ($d_i = \Omega_i - \Omega_i^{ex}$) kde $i \in \langle 1:5 \rangle$

\mathbf{e} je vektor prvních 5 vlastních frekvencí získaných experimentálně

\mathbf{Q} je váhová matice ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

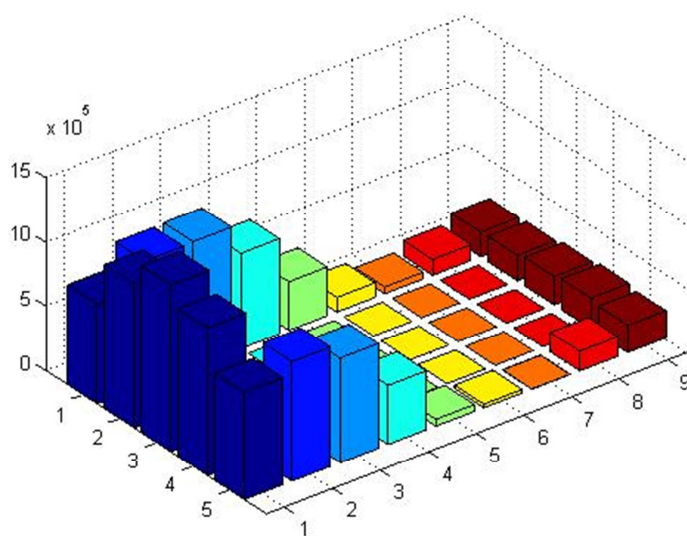
Získaná údaje



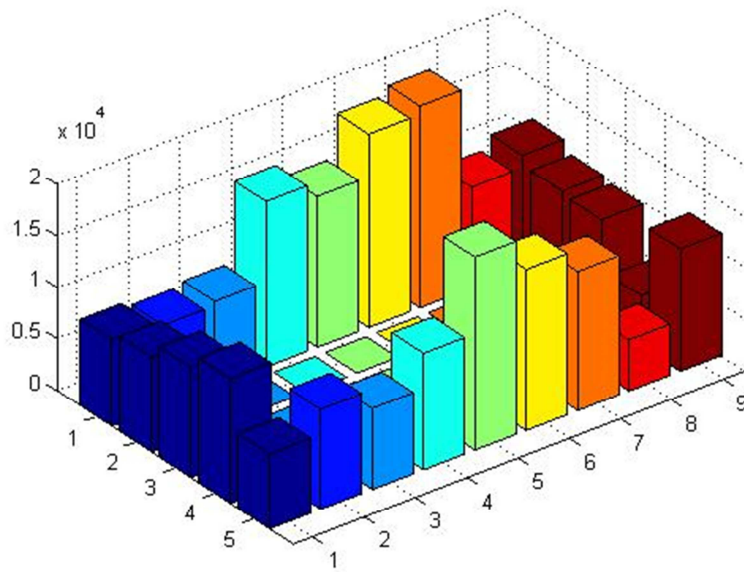
Obr.34-průběh cílové funkce c

Na výše uvedeném obr.34 je zobrazena změna hodnot cílové funkce v průběhu optimalizačního procesu. Výpočet se ukončil po 1825 iteracích. Výsledkem byl vektor optimalizovaných přidávaných tuhostí.

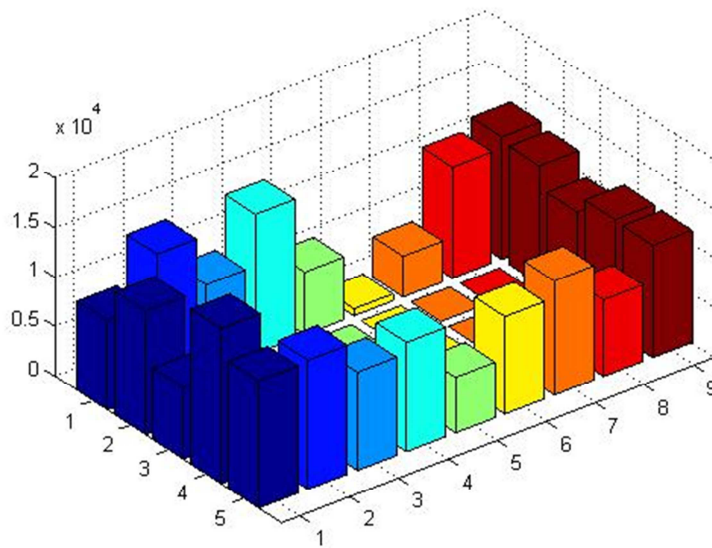
graficky ho lze interpretovat následovně:



Obr.35-přidané tuhosti vyztužující podpěru ve směru průhybu $w^{(i)}$

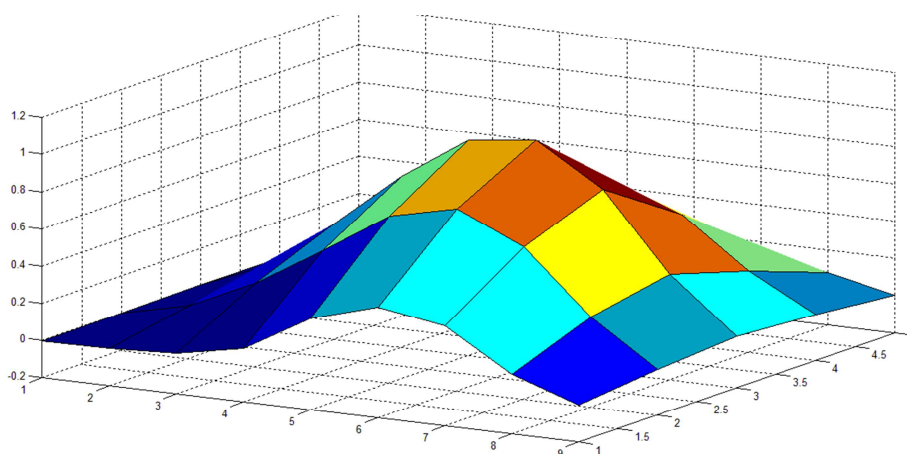
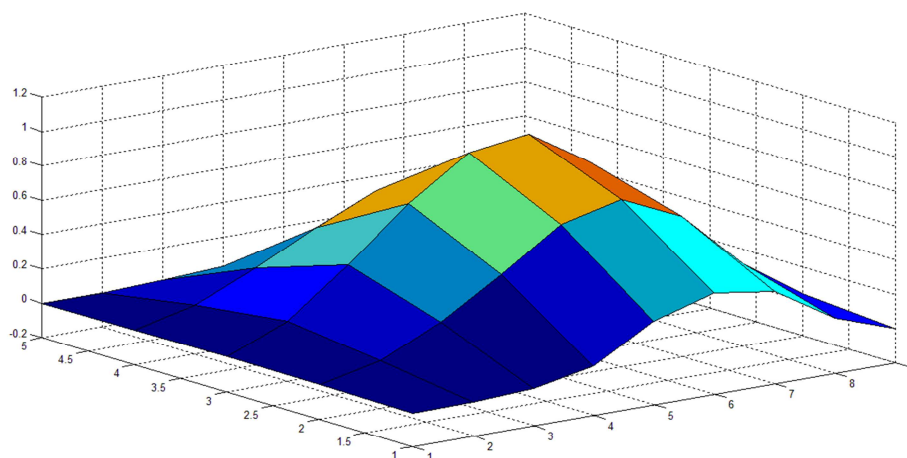


Obr.36-přidané tuhosti vyztužující podpěru ve směru $w_x^{(i)}$

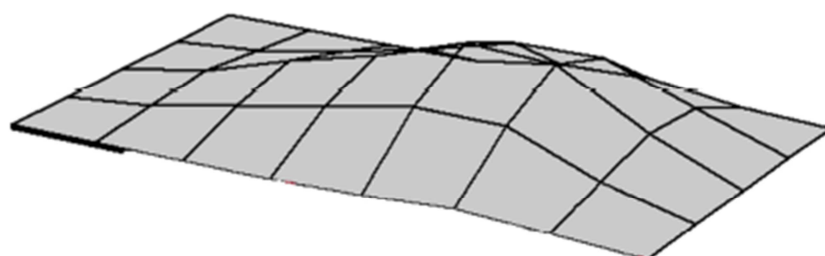


Obr.37-přidané tuhosti vyztužující podpěru ve směru $w_y^{(i)}$

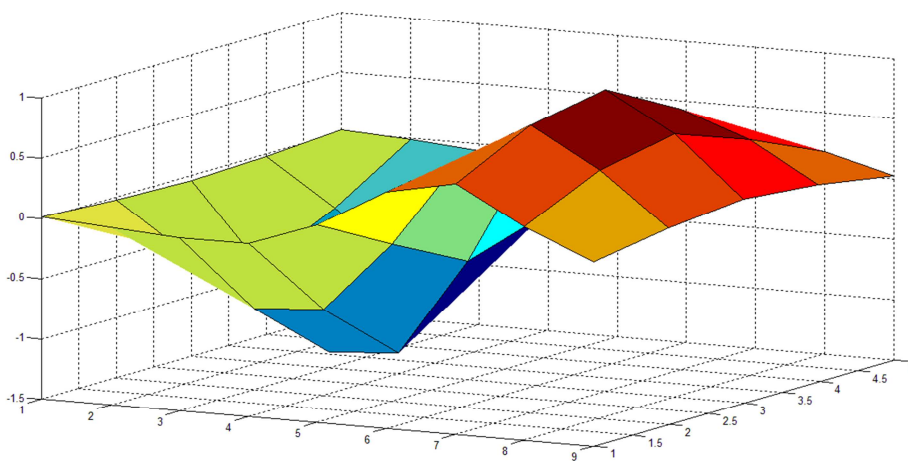
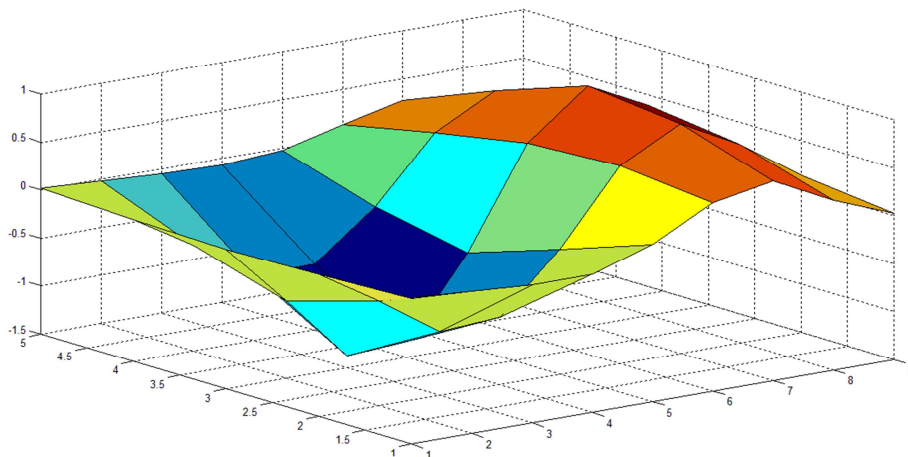
Na následujících obrázcích budou zobrazeny první dva vypočtené vlastní tvary. Pro srovnání zde budou znovu zobrazeny i experimentálně zjištěné vlastní tvary.



Obr.38- první vlastní tvar (vl. frekvence 62,56 Hz) za použití optimalizovaného vektoru t

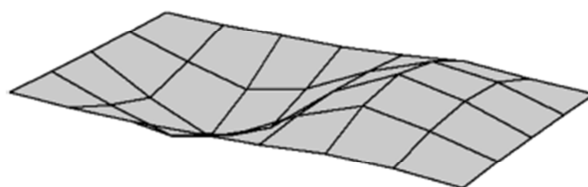


Obr.39 - experimentálně určený první vlastní tvar (vl. frekvence 61Hz)



Obr.40 - první vlastní tvar (vl. frekvence 90,13 Hz) za použití optimalizovaného vektoru t

3DView: 87,3 Hz



Amp: 1,0, Dveř: 8
Dir(g): X,Y,Z Persp: +10



Obr.41- experimentálně určený první vlastní tvar (vl. frekvence 87,3Hz)

Zhodnocení výsledků

Je zřetelné, že vlastní tvary modelu (*obr. 38 a 40*), kde jako okrajové podmínky byly ovlivněny přidáním tuhostmi vektoru \mathbf{t} , jež vizuálně odpovídají tvarům získaných z experimentu (*obr. 39 a 41*). Do jaké míry si tyto první dva tvary odpovídají, určíme pomocí MAC (Modal Assurance Criterion) kritéria. MAC kritérium nabývá hodnot od 0 do 1 (přesná shoda vlastních tvarů) a je definováno jako:

$$MAC = \frac{|\sum_{q=1}^{N_0} \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_v|^2}{\sum_{q=1}^{N_0} \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m \sum_{q=1}^{N_0} \mathbf{v}_v^T \mathbf{v}_v}$$

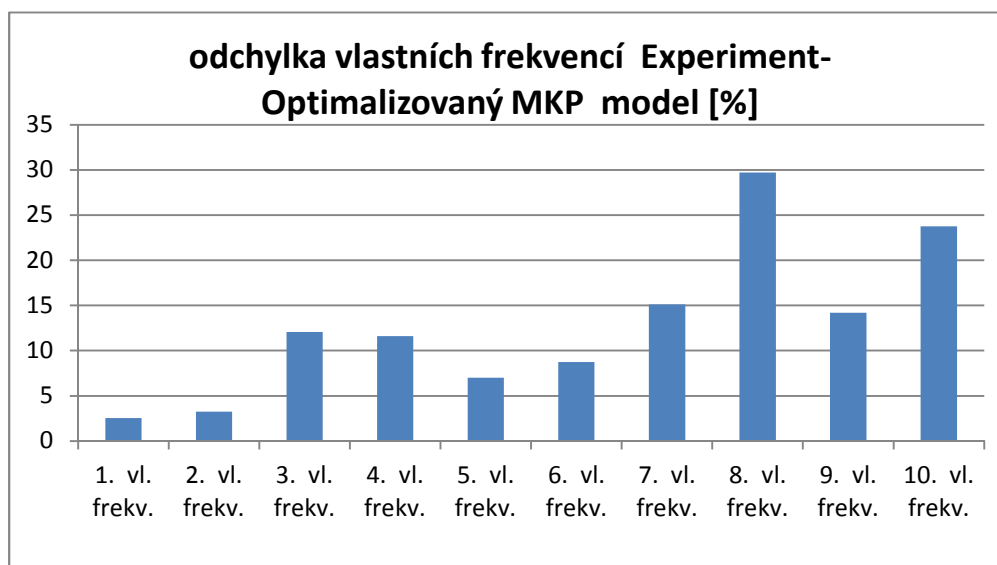
Výsledky MAC kritéria pro první dva tvary:

$$Mac(1) = 0.9333$$

$$Mac(2) = 0.8473$$

Ještě porovnáme vlastní frekvence optimalizovaného modelu s frekvencemi získanými experimentálně a výpočtem v komerčním software:

Porovnání prvních 5-ti vlastních frekvencí [Hz]				
Experiment	MKP model- Vetknutá deska	MKP model- Podepřená deska	MKP model- deska s rámem	Optimalizovaný MKP model
61	77.751	39.920	77,169	62,56
87,3	108.52	69.400	107,83	90,13
140	162.37	118.64	161,32	123,1
155	198.39	130.49	196,35	137
190	227.57	159.91	225,49	176,7



S ohledem na výše uvedená fakta lze tvrdit, že chování MKP modelu s optimalizovanými okrajovými podmínkami bude odpovídat chování reálného objektu za předpokladu, že se omezíme na zkoumání chování modelu do 100 Hz. Pokud bude tento předpoklad splněn, tak odchylka vlastních frekvencí bude menší než 5%. Součástí cílové funkce byla i váhová matice \mathbf{Q} (str. 38), která upřednostňovala přesnost naladění první a druhé vlastní frekvence před přesností ostatních. V případě, že bychom potřebovali pracovat i na vyšších frekvencích, bude třeba optimalizované okrajové podmínky přizpůsobit těmto požadavkům vhodnou změnou cílové funkce, neboť při zkoumání chování modelu ve vyšších frekvencích již začnou nepřesné vyšší vlastní tvary nepříznivě ovlivňovat výsledky. V první řadě bude třeba změnit váhu vyšších frekvencí ve váhové matici \mathbf{Q} a dále by bylo vhodné do cílové funkce zahrnout i srovnání některých vyšších vlastních tvarů.

7. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo provést experimentální analýzu na dvou systémech - volně zavěšeném ocelovém nosníku o rozměrech 1008x30x10 mm a vetknuté desce o rozměrech 73x43 cm. Modální parametry získané experimentálně byly následně ověřeny výpočty na MKP modelech.

V případě nosníku se ukázalo, že výpočtový model vytvořený v software *Ansys* odpovídá dostatečně přesně reálnému systému – odchylka prvních pěti vlastních frekvencí se pohybovala blízko 5%. Výpočtový model je tedy vhodný pro budoucí práci se systémem.

U vetknuté desky se ukázalo, že vetknutí 1,5 mm po obvodu desky se značně liší od idealizované představy. Zběžná verifikace naměřených hodnot byla provedena MKP výpočty v software *Ansys* pomocí dvou modelů – modelu s deskou pouze podloženou po obvodu a deskou vetknutou. Tímto se zjistilo, že vlastní frekvence reálného systému leží v intervalu mezi oběma modely výpočtovými, tedy přesně dle očekávání. Z tohoto faktu bylo vyvozeno, že experimentální data jsou správná a tedy nezbyvalo přijmout fakt, že vetknutí je značně nedokonalé. Možnost, že odlišnost modálních parametrů reálného systému a výpočtového modelu byla způsobena poddajností rámu byla vyloučena MKP modelem provedeným v software *Ansys*, kdy deska byla modelována společně s poddajným rámem. Modální analýzou tohoto MKP modelu se zjistilo, že v případě poddajného rámu nedojde k tak velkým odchylkám modálních parametrů, jako tomu ve skutečnosti bylo.

Dalším krokem bylo sestavení výpočtového modelu systému, který by umožnil budoucí práci s reálným systémem. Ten byl původně zamýšlen jako systém pro aktivní tlumení vibrací, tudíž existence výpočtového modelu je nutná.

Následně se začal vytvářet výpočtový model v software *Matlab* pro identifikaci modálních parametrů reálného systému. Model byl tvořen sítí trojúhelníkových prvků s 21 parametry popisujícími průhyb desky (po 6 parametrech ve vrcholových bodech a 1 parametr ve středu strany trojúhelníku). Přesnost tohoto MKP modelu byla verifikována výpočtem s ideálními okrajovými podmínkami (vetknutím) a porovnáním výsledků s výsledky z komerčního software. Model byl následně rozšířen o optimalizační parametry. Těmito parametry byly fiktivní pružiny přidané po obvodu desky simulující proměnlivost kvality vetknutí. Cílem optimalizace je určit vektor jejich tuhostí \mathbf{t} tak, abychom identifikovali modální parametry reálného systému. K optimalizaci byl použit optimalizační *toolbox* implementovaný v software *Matlab*. Optimalizací tuhostních parametrů se podařilo vytvořit výpočtový model vetknuté desky, který odpovídá reálnému systému při buzení v rozsahu 0-100 Hz s odchylkou do 5%. V případě potřeby naladění modelu na vyšší frekvence lze vytvořený model použít. Stačí příslušně rozšířit a upravit cílovou funkci, znovu spustit optimalizační proceduru a vypočítat optimální vektor \mathbf{t} pro pozměněné požadavky.

Příloha č.1

vektor optimalizovaných přidaných tuhostí (byly zobrazeny pomocí sloupcových grafů
Obr. 35-37)

```
t=1e5*[1.1348,0.1392,0.1419,1.2857,0.1451,0.1460,1.2001,0.1519,0.1433,0.9758,0.17  
13,0.1422,0.8841,0.1786,0.1456,1.0494,0.1681,0.1437,1.2626,0.1503,0.1479,1.2764,0.1409,0  
.1436,1.0460,0.1397,0.1418,1.5981,0.1416,0.1451,1.8970,0.1401,0.1394,1.6572,0.1415,0.145  
3,1.1335,0.1396,0.1404,1.2864,0.1425,0.1458,1.1988,0.1533,0.1474,0.9766,0.1685,0.1469,0.  
8847,0.1774,0.1448,1.0469,0.1690,0.1456,1.2650,0.1516,0.1441,1.2771,0.1443,0.1455,1.047  
8,0.1380,0.1403,1.5963,0.1418,0.1465,1.8961,0.1450,0.1434,1.6550,0.1422,0.1481]
```

Příloha č.2

matice S:

```
S=[1 zeros(1,20);  
0 1 zeros(1,19);  
0 0 1 zeros(1,18);  
0 0 0 2 zeros(1,17);  
0 0 0 0 1 zeros(1,16);  
0 0 0 0 0 2 zeros(1,15);  
1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;  
0 1 0 2 0 0 3 0 0 0 4 0 0 0 0 5 0 0 0 0 0;  
0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0;  
0 0 0 2 0 0 6 0 0 0 12 0 0 0 0 20 0 0 0 0 0;  
0 0 0 0 1 0 0 2 0 0 0 3 0 0 0 0 4 0 0 0 0;  
0 0 0 0 0 2 0 0 2 0 0 0 2 0 0 0 0 2 0 0 0;  
1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1;  
0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0;  
0 0 1 0 0 2 0 0 0 3 0 0 0 0 4 0 0 0 0 0 5;  
0 0 0 2 0 0 0 2 0 0 0 0 2 0 0 0 0 2 0 0 0;  
0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0 0 3 0 0 0 0 0 4 0;  
0 0 0 0 0 2 0 0 0 6 0 0 0 0 12 0 0 0 0 0 20;  
0 0 1 0 1/2 0 0 1/4 0 0 0 1/8 0 0 0 0 1/16 0 0 0 0;  
sqrt(2)/2*[0 1 1 1 1 1 3/4 3/4 3/4 3/4 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 5/16 5/16  
5/16 5/16 5/16 5/16];  
[0 1 0 0 1/2 0 0 0 1/4 0 0 0 0 1/8 0 0 0 0 0 1/16 0]];
```

použitá literatura

- [1] Brian J. Schwarz & Mark H. Richardson: *Experimental modal analysis, Vibrant Technology, Inc.* Jamestown, California 95327
- [2] Tůma J.: *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT*, Praha: Sdělovací technika, 1997, 174 s., ISBN 80-901936-1-7
- [3] Miláček S.: *Modální analýza mechanických kmitů*. Skripta ČVUT, Praha, 2001, 155 s. , ISBN 80-01-02333-8
- [4] Brüel & Kjær, *Měření chvění*, Uživatelský manuál společnosti Brüel & Kjær
- [5] Tůma J.: *Experimentální modální analýza*, podpůrné materiály pro studenty
- [6] Tůma J.: *Experimentální modální analýza-Teorie*, podpůrné materiály pro studenty
- [7] Brüel & Kjær, *Vibrační zkoušení*, Uživatelský manuál společnosti Brüel & Kjær
- [8] Brüel & Kjær, *Zkoušení konstrukcí*, Uživatelský manuál společnosti Brüel & Kjær
- [9] Brüel & Kjær, *Zkoušení mechanických soustav*, Uživatelský manuál společnosti Brüel & Kjær
- [10] *Rychlá Fourierova transformace (FFT) pro AVR*, URL: www.elektronika.kvalitne.cz/ATMEL/necoteorie/transformation/AVRFFT/AVRFFT.html
- [11] Jaromír Slavík, *Počítačové metody mechaniky*, URL: <http://cs.scribd.com/doc/93673227/Počítačove-metody-mechaniky-1>
- [12] *Window functions*, URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function
- [13] Doc. Dr. Ing. Jan Dupal: *Výpočet odezvy plošných konstrukcí na buzení piezoelektrickými záplatami*, Učební text vzniklý v rámci projektu SPAV č. CZ.1.07/2.3.00/09.0050. Plzeň, 2010,