

**Západočeská univerzita v Plzni**

**Fakulta aplikovaných věd**

**Katedra mechaniky**

# **MODELOVÁNÍ KOLENNÍHO KLOUBU**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Plzeň 2013**

**Jan Vocílka**

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval sám, za pomoci vedoucího práce a uvedené citované literatury.

.....  
Jan Vocílka

V Plzni dne 30.5.2013

## **Poděkování**

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu práce prof. Ing. Jiřímu Křenovi, CSc. za jeho rady a čas vynaložený při řešení a realizace bakalářské práce.

## **Abstrakt**

### **Modelování kolenního kloubu**

Cílem této bakalářské práce je vytvořit jednoduchý rovinný matematicko-fyzikální model lidského intaktního kolenního kloubu. Fyzikální model představuje dotyk náhradního pružného válce s tuhou podložkou s uvažováním přítomnosti synoviální kapaliny. Obecně se jedná o řešení úlohy interakce pružného tělesa s kapalinou. Tato úloha interakce je řešena nesdruženou metodou. Pohyb kapaliny je popsán Navierovou-Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity. Vlastní úloha proudění kapaliny je řešena na různých úrovních. První úroveň představuje stacionární, laminární a izotermické proudění nestlačitelné kapaliny se zanedbáním konvektivního (nelineárního) členu. Druhý způsob je shodný s předchozím řešením s tím, že se uvažuje konvektivní (nelineární) člen. Nakonec je potom provedeno obecné řešení nestacionárního, laminárního a izotermického proudění vazké nestlačitelné Newtonovy kapaliny. Pro řešení úlohy deformace pružného válce fyzikálního modelu je aplikována teorie zatížení pružného poloprostoru osamělou silou.

# Obsah

<b>1. Úvod</b>	7
<b>2. Kolenní kloub</b>	8
2.1 Anatomie kolenního kloubu	8
2.2 Stavba stehenní kosti	8
2.3 Stavba holenní kosti	9
2.4 Pohyby v kolenním kloubu	9
<b>3. Proudění Newtonovy kapaliny</b>	10
3.1 Stacionární proudění Newtonovy kapaliny bez konvektivního členu	10
3.2 Stacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem	12
3.3 Nestacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem	13
<b>4. Prostorová a časová diskretizace proudění kapaliny</b>	15
4.1 Stacionární proudění Newtonovy kapaliny bez konvektivního členu	19
4.2 Stacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem	20
4.3 Nestacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem	22
<b>5. Analytické řešení Navierovy-Stokesovy rovnice</b>	25
<b>6. Numerické výsledky proudění kapaliny</b>	28
<b>7. Modelování kolenního kloubu</b>	37
7.1 Deformace náhradního válce	37
7.2 Numerické výsledky modelu kolenního kloubu	40
<b>8. Závěr</b>	46

# 1. Úvod

Předložená bakalářská práce je úvodem do modelování skutečných fyziologických procesů v lidských kloubech. Obecně se jedná o řešení problému interakce synoviální kapaliny s kostní tkání uvažovaných kloubů. Cílem bakalářské práce je vytvořit zjednodušený matematicko-fyzikální model lidského intaktního kolenního kloubu. Práci lze rozdělit do tří základních částí. V úvodu bakalářské práce jsou prezentovány základní anatomické aspekty kolenního kloubu. Jsou zde popsány základní prvky a celková stavba kolenního kloubu včetně základních fyziologických pohybů v kloubu. Tato část ukazuje na složitost řešení celého problému „mazání“ lidských kloubů a na složitost kinematických poměrů kloubu při jeho pohybu. Další oblastí této práce je uvedení do problematiky řešení proudění kapaliny v rovinném kanále. Pohyb kapaliny je zde řešen na různých úrovních, které reprezentují základní úlohy hydrodynamiky. Úlohy proudění kapaliny jsou vždy nejdříve definovány obecně a potom je ukázáno řešení příslušného problému na rovinné úloze. První úroveň představuje stacionární, laminární a izotermické proudění nestlačitelné kapaliny s konstantní viskozitou a měrnou hmotností se zanedbáním konvektivního (nelineárního) členu v Navierově-Stokesově rovnici. Další úroveň je řešení stejné úlohy hydromechaniky s tím, že se tentokrát uvažuje vliv konvektivního členu v Navierově-Stokesově rovnici. Nakonec je obecně řešeno komplexní nestacionární, laminární a izotermické proudění vazké nestlačitelné Newtonovy kapaliny (plné Navierovy-Stokesovy rovnice). Pro tyto tři druhy proudění byla odvozena obecně slabá řešení aplikací Galerkinovy metody, aplikace je potom ukázána na konkrétních úlohách rovinného problému proudění s tím, že nestacionární proudění bude řešeno v navazující diplomové práci. Prostorová diskretizace problému byla provedena pomocí konečných prvků (MKP, rovinný kapalinový konečný prvek typu „čtverec“). Pro časovou diskretizaci problému byla potom aplikována diferenční metoda. Při vlastním výpočtu proudění byla integrace příslušných integrálů provedena numericky pomocí Gaussových kvadraturních formulí a celý výpočet byl realizován v prostředí interpretu MATLAB. Pro kontrolu numerického výpočtu pak bylo odvozeno analytické řešení vybraných úloh proudění Newtonovy kapaliny v rovinném kanálu.

Celá práce je završena praktickou ukázkou použití připravených úloh hydromechaniky v aplikaci na řešení synoviální kapaliny v kloubní štěrbině. Za tím účelem byl vytvořen zjednodušený (ale netriviální) rovinný model intaktního kolenního kloubu. Fyzikální model tohoto kloubu představuje dotyk náhradního válce s tuhou podložkou s uvažováním přítomnosti synoviální kapaliny. Původní model se dvěma interagujícími válci byl převeden (při zachování relativní křivosti mezi válci) na zmíněný rovinný model interakce válce s tuhou podložkou. Vzhledem k tomu, že se jedná o zjednodušený model, tak synoviální kapalinu v prvním přiblížení uvažujeme jako Newtonovu kapalinu s konstantní viskozitou a měrnou hmotností. Obecně se tedy jedná o řešení úlohy interakce pružného tělesa s kapalinou. Tato úloha interakce je řešena nesdruženou metodou, která spočívá ve střídavém řešení úlohy proudění kapaliny a úlohy přetvoření pružného kontinua s tím, že na společné hranici interakce se aktualizují podmínky právě řešeného kontinua. Pohyb kapaliny je zde popsán Navierovou-Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity. Pro řešení deformace pružného válce je potom odvozen definiční vztah, který vychází ze zatížení pružného poloprostoru osamělou silou. Vlastní úloha proudění v uvedeném modelu kloubu je zatím definována pouze stacionárním, laminárním a izotermickým prouděním nestlačitelné Newtonovy kapaliny se zanedbáním konvektivního členu. V prvním kroku řešení je výše zmíněný válec uvažován jako tuhý a dále je potom modelová úloha rozšířena na úlohu s pružným válcem. Dosažené numerické výsledky jsou prezentovány přehledně ve formě tabulek a grafických výstupů.

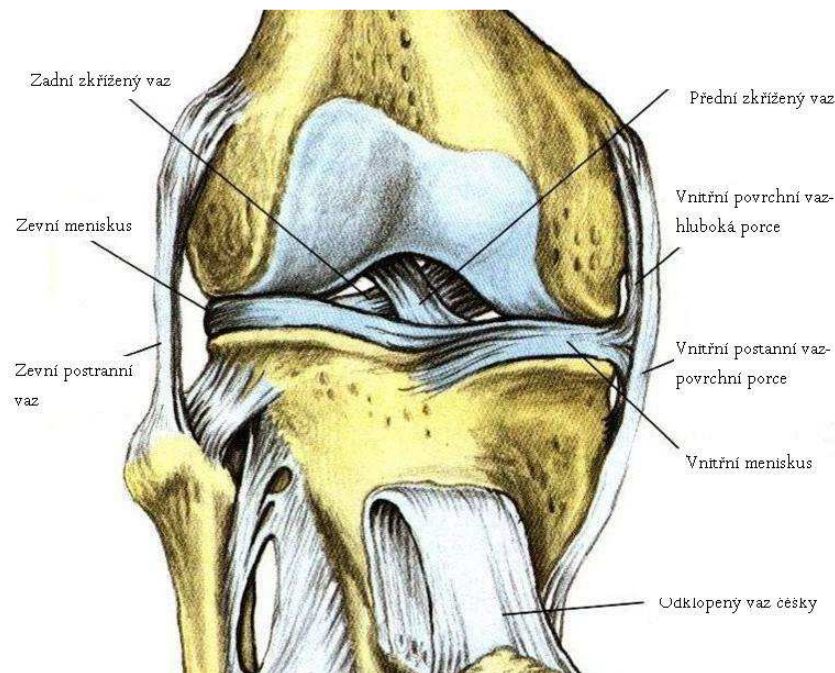
Na závěr ještě poznamenejme, že řazení kapitol a metodika řešení jednotlivých problémů v této práci je jednoznačně v souladu s uvedeným zadáním bakalářské práce.

## 2. Kolenní kloub

*Kolenní kloub umožňuje přizpůsobovat délku končetiny potřebám lokomoce, měnit vzdálenost trupu od terénu, po kterém se pohybuje [13].*

### 2.1 Anatomie kolenního kloubu

V kolenním kloubu se stýkají celkem tři prvky, proto se jedná o kloub složený (obr. 2.1). Jsou to stehenní kost (femur), holenní kost (tibia) a česka (patella). Hlavici zde tvoří condyly femuru, které svojí velikostí neodpovídají kloubní jamce tvořené kloubními plochami kondylů tibie. Proto jsou do prostoru kolenní šterbiny včleněny dva menisky, které představují většinu styčné plochy. Menisky jsou struktury z vazivové chrupavky, které kopírují kloubní plochy na tibia, proto jsou na vnějším obvodu vyšší a na vnitřním okraji nižší. Při pohybech v kloubu se menisky ze své původní polohy posunují směrem dozadu a zpět a zároveň tvoří mezníkový systém přenášených dopadů. *Patella má rovněž značný význam pro funkci kolena, protože zlepšuje činnost extenzorů kolena při jeho flekčním postavení, což je důležité při vzpřimování [14].*



**Obr. 2.1.** Schéma lidského kolenního kloubu

### 2.2 Stavba stehenní kosti

Kost stehenní je největší a nejsilnější kost těla [1], skládající se z hlavice, krčku, těla a kondylů.

Hlavice, caput femoris, nese přibližně  $\frac{1}{4}$  artikulární plochy, která je zasazená v acetabulu pánevní kosti. Krček, collum femoris, svírá s tělem stehenní kosti úhel  $125^\circ$ , nazývaný kolodíafysální úhel, jehož velikost se během života zmenšuje. Velikost úhlu nad  $135^\circ$  se považuje za valgózní postavení krčku, při hodnotách pod  $120^\circ$  za varózní postavení. Kromě kolodíafysálního úhlu se určuje i torsní úhel, který je svírán dlouhou osou stehenní

kosti ku condylům. Fyziologické hodnoty jsou udávány v rozmezí 7-15°, kdy odchylky mění rozsah rotací v kyčelním kloubu. Tělo, corpus femoris, proximálně vybíhají dva hrboly. Trochanter major a trochanter minor, které jsou vpředu spojeny vyvýšenou kostní linií, linea intertrochanterica, a vzadu vyvýšenou hranou, crista intertrochanterica. Distálně se konec stehenní kosti rozšiřuje ve dva hrboly, epicondylus medialis et lateralis, na něž se upíná řada svalů dolní končetiny. Condyli femoris jsou dva zaoblené hrboly, zakončující distální část těla stehenní kosti [1].

## 2.3 Stavba holenní kosti

Holenní kost, tibia, se skládá z proximální části (obsahuje dva kondyly), z těla a z distální části. Condyli tibiae jsou dvě vyvýšení na proximálním okraji kosti, které na svém povrchu obsahují kloubní plošku pro skloubení s kondyly stehenní kosti. Tělo holenní kosti je trojboké, kdy přední a vnitřní hrana jsou hmatné pod kůží a zevní hrana je obrácená ke kosti lýtkové, mezi nimiž probíhá vazivová membrána. Distální část tibie tvoří při své mediální straně vnitřní kotník, při své laterální straně kloubní plošku pro spojení s lýtkovou kostí [1].

## 2.4 Pohyby v kolenním kloubu

*Kolenní kloub plní dva protichůdné požadavky: Umožňuje stabilitu při současné mobilitě [13].*

Základní postavení kolenního kloubu je extenze, při které jsou napjaty postranní vazy a femur s tibií a menisky na sebe naléhají. Tento stav se označuje jako uzamknuté koleno. Geometrickými poměry kloubu je pohyb do flexe a extenze sdružen se souhyby. Pohyb v kolenu probíhá v následujícím sledu:

**Počáteční rotace**, při níž se tibia točí dovnitř, je spojena s flexí v prvních 5° ohybu [1]. Během této rotace se uvolňuje ligamentum cruciatum anterius, a tím se koleno tzv. „odemkne“. **Valivý pohyb**, během něhož se femur valí po plochách tvořenými menisky a částečně tibií, je první uskutečněnou flexí po počáteční rotaci. **Posuvný pohyb** je spojený s dorsálním posunem menisků a condylů femuru.

Při návratu z flexe do extenze celý děj probíhá v opačném sledu. Tedy začíná posuvný pohyb směrem dopředu, následuje valivý pohyb a extenze se dokončuje závěrečnou rotací, která je spojena s rotací tibie zevně, čímž se koleno opět uzamkne.

**Rozsah flexe** v kolenním kloubu je při aktivním pohybu od 140°, při pasivním pohybu, například při podřepu, až do 160°. Toto rozmezí je dáno velikostí svalové hmoty stehna a lýtky, které se při pasivním pohybu stlačí.

**Rozsah extenze** je fyziologický do 10° hyperextenze ([1], [13]).



### 3. Proudění Newtonovy kapaliny

Jak již bylo výše zmíněno, v této práci se zabývám řešením úlohy interakce pružného tělesa s kapalinou. Touto kapalinou je míněna synoviální kapalina, kterou v prvním přiblížení považujeme za Newtonovu kapalinu. Úloha je obecně popsána Navierovou-Stokesovou rovnicí, rovnicí kontinuity, příslušnými okrajovými podmínkami a počáteční podmínkou. Platí tedy [7], [10]

Navierova-Stokesova rovnice

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (3.1)$$

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3.2)$$

okrajové podmínky

$$v_i(x, t) = \hat{v}_i(x, t), \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega_1 \quad (\text{Dirichletova podmínka}), \quad (3.3)$$

$$\tau_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i(x, t), \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega_2 \quad (\text{Neumannova podmínka}), \quad (3.4)$$

počáteční podmínka

$$v_i(x, 0) = \hat{v}_i(x), \quad t = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.5)$$

V těchto vztazích  $v_i$  jsou složky vektoru rychlosti kapaliny (obecně  $i, j=1, 2, 3$ ),  $p$  je tlak,  $\tau_{ij}$  je Cauchyův tenzor napjatosti,  $\mu$  je dynamická viskozita kapaliny,  $\rho$  je měrná hmotnost (hustota) kapaliny,  $f_i$  jsou složky měrné objemové síly (v dalším zanedbáváme) a  $x_i$  jsou prostorové (Eulerovy) souřadnice kontinua. Hledanými veličinami v této úloze jsou složky rychlosti  $v_i$  a tlak  $p$  v kapalině, které řešíme současně (smíšená úloha).

#### 3.1 Stacionární proudění Newtonovy kapaliny bez konvektivního členu

Prvním cílem této práce bylo řešení laminárního stacionárního a izotermického proudění nestlačitelné kapaliny s konstantní viskozitou ( $\mu = \text{konst.}$ ) a konstantní měrnou hmotností ( $\rho = \text{konst.}$ ). Proudění je definováno na omezené a otevřené oblasti  $\Omega$ . Lipschitzovská hranice  $\partial\Omega$  je rozdělena na disjunktní podoblasti  $\partial\Omega_1$  a  $\partial\Omega_2$ . Pak tedy platí  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$  a pro uzávěr oblasti  $\Omega$  platí  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Na podoblasti hranice  $\partial\Omega_1$  nechť je zadán vektor rychlosti  $\hat{v}$  (Dirichletova podmínka) a na části hranice  $\partial\Omega_2$  nechť je zadán vektor napětí  $\hat{\sigma}$  (Neumannova podmínka). Takto definovaná úloha je popsána následující soustavou rovnic s okrajovými podmínkami:

Navierova - Stokesova rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega. \quad (3.1.1)$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.1.2)$$

Okrajové podmínky úlohy

$$v_i(x) = \hat{v}_i(x); \quad x \in \partial\Omega_1, \quad (3.1.3)$$

$$\tau_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i(x); \quad x \in \partial\Omega_2. \quad (3.1.4)$$

Pro odvození slabého řešení této úlohy hydromechaniky aplikujeme Galerkinovu metodu [4]. Zavedené testovací funkce  $\delta v_i$  a  $\delta p$ , které jsou definovány na uzávěru oblasti  $\bar{\Omega}$  a splňují dané okrajové podmínky. Platí tedy

$$\delta v_i, \delta p, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad (3.1.5)$$

Testovací funkce  $\delta v_i$  je z lineárního prostoru

$$\delta v_i \in v_0, \quad v_0 = \left\{ \delta v_i, \text{ ex. } \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j}, \delta v_i = 0, \quad x \in \partial\Omega_1 \right\}. \quad (3.1.6)$$

Výchozí integrální identity Galerkinovy metody mají potom tvar

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] \delta v_i dx = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.1.8)$$

Na členy v hranaté závorce vztahu (3.1.7) aplikujeme Greenovu větu. Postupně platí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \delta v_i dx &= \int_{\partial\Omega} p n_i \delta v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx = \\ &= \int_{\partial\Omega_1} p n_i \delta v_i dx + \int_{\partial\Omega_2} p n_i \delta v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega_2} p n_i \delta v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta v_i dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \delta v_i dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\
&= \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \delta v_i dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial v_i}{\partial n} \delta v_i dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Po dosazení vztahů (3.1.9), (3.1.10) do integrální identity (3.1.7) získáváme výsledný tvar, který definuje slabé řešení dané úlohy

$$\mu \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega_2} \hat{\sigma}_i \delta v_i dx, \tag{3.1.11}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \tag{3.1.12}$$

Poznamenejme, že při úpravě pravé strany vztahu (3.1.11) byla použita okrajová podmínka (3.1.4).

### 3.2 Stacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem

Druhý úkol je stejné zadání jako v předchozím odstavci s rozdílem, že budeme uvažovat konvektivní (nelineární) člen v Navierových-Stokesových rovnicích. Vzhledem k předpokládanému proudění kapaliny v rovinném kanálu, bude však vliv tohoto členu zřejmě minimální. Výchozí rovnice a okrajové podmínky mají nyní tvar

Navierova - Stokesova rovnice

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega, \tag{3.2.1}$$

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3.2.2}$$

okrajové podmínky úlohy

$$v_i(x) = \hat{v}_i(x), \quad x \in \partial\Omega_1, \tag{3.2.3}$$

$$\tau_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i(x), \quad x \in \partial\Omega_2. \tag{3.2.4}$$

Výchozí integrální identity Galerkinovy metody potom přejdou do tvaru

$$\int_{\Omega} \left[ \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] \delta v_i dx = 0, \tag{3.2.5}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.2.6)$$

Srovnáním s předchozím řešením vidíme, že první integrální identita (3.2.5) se liší od vztahu (3.1.7) pouze prvním konvektivním členem, na který se Greenova věta neaplikuje. Můžeme tedy přímo psát slabé řešení této úlohy hydromechaniky. Platí

$$\int_{\Omega} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\partial \Omega_2} \hat{\sigma}_i \delta v_i dx, \quad (3.2.7)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.2.8)$$

### 3.3 Nestacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem

V tomto odstavci řeším nestacionární, laminární a izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny ( $\mu = konst.$ ,  $\rho = konst.$ ). Proudění je nadále definováno na omezené a otevřené oblasti  $\Omega$ . Lipschitzovská hranice  $\partial\Omega$  je rozdělena na disjunktní podoblasti  $\partial\Omega_1$  a  $\partial\Omega_2$ . Pak tedy platí nadále  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$  a pro uzávěr oblasti  $\Omega$  opět platí  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Na podoblasti  $\partial\Omega_1$  je zadán vektor rychlosti  $\hat{v}$  a na podoblasti  $\partial\Omega_2$  je opět zadán vektor napětí  $\hat{\sigma}$ . Oproti předchozím úlohám je zde nová proměnná, kterou je čas  $t$  definovaný na otevřeném intervalu  $(0, T)$ . Takto definovaná úloha hydromechaniky je popsána následující soustavou rovnic, okrajovými podmínkami a počáteční podmínkou:

Navierova - Stokesova rovnice

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega, \quad (3.3.1)$$

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega, \quad (3.3.2)$$

okrajové podmínky úlohy

$$v_i(x, t) = \hat{v}_i(x, t), \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega_1, \quad (3.3.3)$$

$$\tau_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i(x, T), \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega_2, \quad (3.3.4)$$

počáteční podmínka

$$v_i(x, 0) = \hat{v}_i(x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega. \quad (3.3.5)$$

Význam použitých symbolů je stejný jako v předchozích úlohách. Hledanými neznámými funkcemi v této úloze jsou složky vektoru rychlosti  $v_i(x_i, t)$  a tlak  $p(x_i, t)$ . Tyto

neznámé hledáme současně na časoprostorovém válci  $\bar{D} = \bar{\Omega} \times [0, T]$ . Pro odvození slabého řešení aplikujeme opět Galerkinovu metodu, kde použité testovací funkce jsou opět  $\delta v_i$  a  $\delta p$ . Tyto funkce jsou však nyní definovány na uzávěru časoprostorového válce a splňují dané okrajové podmínky. Platí tedy

$$\delta v_i, \delta p \in \bar{D}, \bar{D} = \bar{\Omega} \times [0, T], t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}, \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad (3.3.6)$$

$$\delta v_i \in v_0, v_0 = \left\{ \delta v_i, \text{ex. } \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j}, \delta v_i = 0, x \in \partial\Omega_1, t \in (0, T) \right\}. \quad (3.3.7)$$

Výchozí integrální identity Galerkinovy metody mají nyní tvar

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] \delta v_i dx = 0, \quad (3.3.8)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.3.9)$$

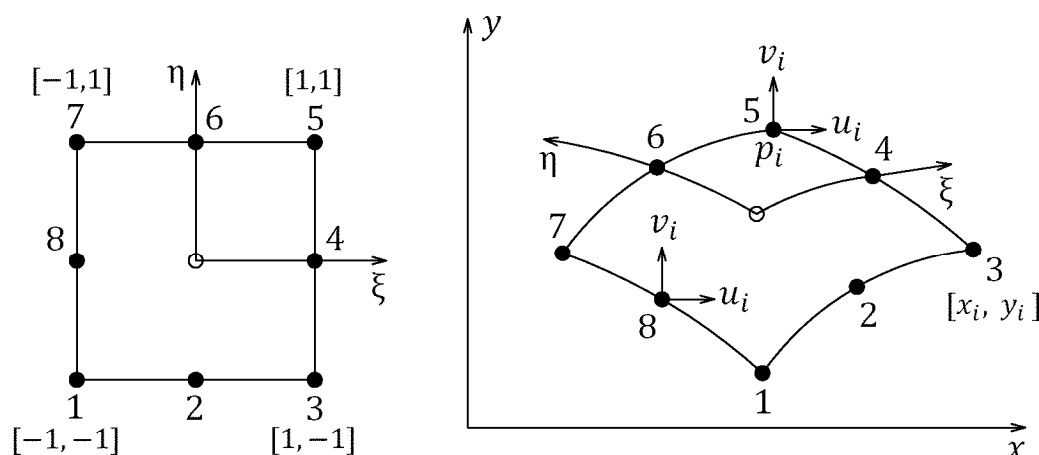
Na třetí a čtvrtý člen v hranaté závorce se opět aplikuje Greenova vět. Vzhledem k tomu, že na další členy této závorky se Greenova věta nevztahuje, můžeme přímo psát slabé řešení uvažované úlohy proudění Newtonovy kapaliny. V souladu se vztahem (3.2.7) platí

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta v_i dx + \int_{\Omega} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega_2} \hat{\sigma}_1 \delta v_i dx, \quad (3.3.10)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.3.11)$$

## 4. Prostorová a časová diskretizace proudění kapaliny

Po odvození slabého řešení uvažované úlohy proudění Newtonovy kapaliny přistoupíme k numerické realizaci těchto úloh hydromechaniky. Vzhledem k tomu, že budeme řešit pouze rovinné proudění kapaliny, tak prostorovou diskretizaci problému provedeme pomocí rovinných kapalinových konečných prvků typu „čtverec“ s využitím izoparametrického konceptu [2]. Příslušný konečný prvek v lokálních a globálních souřadnicích je znázorněn na (obr. 4.1).



Obr. 4.1. Konečný prvek v lokálních a globálních souřadnicích

Neznámými na konečném prvku jsou obecně složky rychlosti  $v_i$  a tlak  $p$ . S ohledem na platnost Babuškovy-Brezzioho podmínky [9], budeme rozložení rychlosti na prvku aproximovat polynomem druhého stupně a rozložení tlaku potom polynomem stupně prvního. Vzhledem k tomu, že řešíme rovinné proudění, tak složky vektoru rychlosti označíme symbolem  $u, v$  a tlak označíme  $p$ . Pro libovolný vnitřní bod konečného prvku potom platí dále uvedené aproximační vztahy.

Základní transformační vztahy mezi lokálním a globálním souřadnicovým systémem mají tvar

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta) x_i = \mathbf{H}^T \mathbf{x}, \\ y &= y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta) y_i = \mathbf{H}^T \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pro složky vektoru rychlosti a tlak potom platí

$$\begin{aligned} u &= u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta) u_i = \mathbf{H}^T \mathbf{u}, \\ v &= v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta) v_i = \mathbf{H}^T \mathbf{v}, \\ p &= p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) p_i = \mathbf{N}^T \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Zde  $\xi, \eta$  jsou lokální souřadnice izoparametrického prvku,  $H_i(\xi, \eta)$  jsou kvadratické aproximační funkce,  $N_i(\xi, \eta)$  jsou lineární aproximační funkce,  $x_i$ , resp.  $y_i$ , jsou  $x$ -ové, resp.  $y$ -ové souřadnice uzlů prvku v globálním souřadnicovém systému a  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $p_i$  jsou hledané uzlové hodnoty složek vektoru rychlosti a tlaku na konečném kapalinovém prvku. Význam zavedených sloupcových matic  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}$  a transformačních matic  $\mathbf{H}, \mathbf{N}$  je zřejmý ze vztahů (4.1) a (4.2).

Lineární izoparametrické funkce  $N_i(\xi, \eta)$  mají tvar (např. [5])

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\xi, \eta) \\ \Phi_2(\xi, \eta) \\ \Phi_3(\xi, \eta) \\ \Phi_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Kvadratické izoparametrické funkce  $H_i(\xi, \eta)$  mají tvar (např. [5])

$$\mathbf{H}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\xi, \eta) \\ \Phi_2(\xi, \eta) \\ \Phi_3(\xi, \eta) \\ \Phi_4(\xi, \eta) \\ \Phi_5(\xi, \eta) \\ \Phi_6(\xi, \eta) \\ \Phi_7(\xi, \eta) \\ \Phi_8(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Pro vyjádření derivací hledaných funkcí složek rychlostí a tlaku na prvku podle globálních souřadnic  $x, y$  budeme potřebovat funkcionální Jacobiovu matici zobrazení. S ohledem na transformace (4.1) má tato matice tvar (např. [7], [2])

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\xi^T \mathbf{x} & \mathbf{H}_\xi^T \mathbf{y} \\ \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{x} & \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Nově zavedené matice  $\mathbf{H}_\xi$  a  $\mathbf{H}_\eta$  jsou parciální derivace matice interpolačních funkcí  $\mathbf{H}$  podle lokálních souřadnic  $\xi, \eta$ . Dále se musí vyjádřit parciální derivace matice interpolačních funkcí  $\mathbf{H}(\xi, \eta)$  podle globálních souřadnic  $x, y$ , pomocí kterých můžeme dále vyjádřit parciální derivace hledaných funkcí  $(u, v, p)$  podle globálních souřadnic. Na základě derivace složených funkcí platí

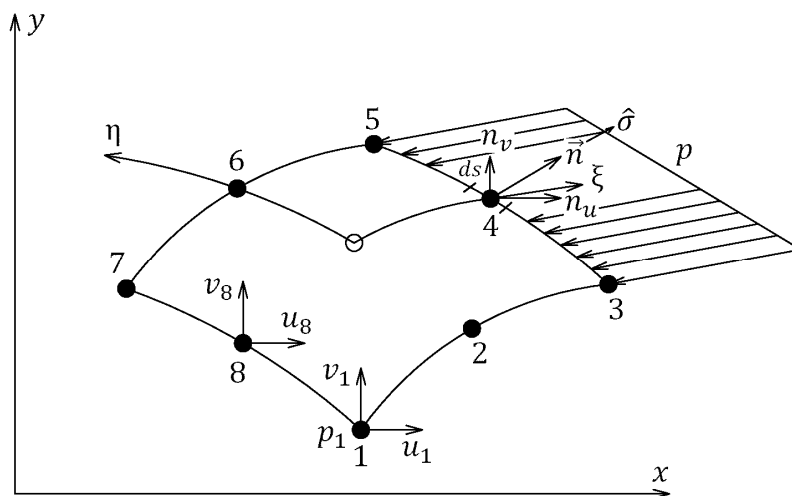
$$\begin{aligned}\mathbf{H}_x &= \frac{\partial \mathbf{H}(\xi, \eta)}{\partial x} = J_{11}^{-1} \mathbf{H}_\xi + J_{12}^{-1} \mathbf{H}_\eta, \\ \mathbf{H}_y &= \frac{\partial \mathbf{H}(\xi, \eta)}{\partial y} = J_{21}^{-1} \mathbf{H}_\xi + J_{22}^{-1} \mathbf{H}_\eta.\end{aligned}\quad (4.6)$$

S použitím vztahů (4.2) a (4.6) můžeme tedy vytvořit parciální derivace složek vektoru rychlosti a tlaku podle globálních souřadnic, které se vyskytují v integrálních identitách. S ohledem na zavedené vztahy můžeme např. psát

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{u}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \mathbf{H}_y^T \mathbf{u}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}, \\ \delta u &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}, & \delta v &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}, & \delta p &= \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Pomocí těchto vztahů již můžeme rozepsat integrální identity pro  $i, j = 1, 2$ . Získáme tak tři skalární rovnice, které zapíšeme v maticovém tvaru a které budeme sestavovat pro jednotlivé úlohy proudění Newtonovy kapaliny v následujících odstavcích.

Nyní je potřeba nadefinovat vektor pravé strany v rovnicích (3.1.11), (3.2.7), (3.3.10). Uvažujme prvek, jehož strana je zatížena známým tlakem  $p$  (obr. 4.2). Tento prvek je vyjádřen v lokálních souřadnicích  $\xi, \eta$  a zatížená strana má lokální souřadnicí  $\xi = 1$ . Neumanovu podmínku na této stěně vyjádříme ve tvaru  $\hat{\sigma}_i = \hat{p} n_i$  (na hranici oblasti uvažujeme pouze normálové složky tenzoru napjatosti), kde  $n_i$  jsou složky vnější normály zatížené strany obecného prvku. Pro definování vektoru pravé strany vyjdeme ze slabého řešení uvažované úlohy. Pro vektor pravých stran z tohoto vztahu vyplývá (rovinné proudění)



**Obr. 4.2.** Zatížený konečný prvek



$$\mathbf{f}_u = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}_s \bar{\sigma}_u dx = \bar{p} \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}_s \mathbf{n}_u^s dx, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{f}_v = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{v}_s \bar{\sigma}_v dx = \bar{p} \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{v}_s \mathbf{n}_v^s dx. \quad (4.9)$$

V těchto vztazích  $\mathbf{n}_u^s, \mathbf{n}_v^s$  vyjadřují aproximace složek vektoru vnější normály zatížené strany konečného prvku a  $\delta \mathbf{u}_s, \delta \mathbf{v}_s$  jsou virtuální změny restrikcí složek vektoru rychlosti na této straně prvku v globálních souřadnicích  $x, y$ . Pro vyjádření těchto veličin zavedeme sloupcové matice složek vnější normály v uzlech prvku tak, že nenulové hodnoty budou pouze tam, kde daný uzel leží na zatížené straně prvku. Dále zavedeme restrikcí aproximačních funkcí na zatížené straně konečného prvku. Obecně platí

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_u &= [n_{1u}, n_{2u}, \dots, n_{8u}]^T, \\ \mathbf{n}_v &= [n_{1v}, n_{2v}, \dots, n_{8v}]^T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pro restrikcí aproximačních funkcí prvku na zatížené straně zřejmě platí

$$\mathbf{H}_s(\eta) = \mathbf{H}(\xi, \eta)|_{\xi=1} = [0, 0, -\eta(1-\eta)/2, 1-\eta^2, \eta(1+\eta)/2, 0, 0, 0]^T. \quad (4.11)$$

Pro aproximace složek vnější normály na zatížené ploše prvku platí

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_u^s &= \mathbf{H}_s^T \mathbf{n}_u, \\ \mathbf{n}_v^s &= \mathbf{H}_s^T \mathbf{n}_v \end{aligned} \quad (4.12)$$

a pro aproximace virtuálních změn složek vektoru rychlosti na této ploše platí

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_s &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}_s, \\ \delta \mathbf{v}_s &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}_s. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Při výpočtu pravé strany se opět vztahy (4.8) a (4.9) integrují numericky s využitím Gaussových kvadraturních formulí. Za tímto účelem zavedeme funkce

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \mathbf{H}_s^T \mathbf{x}, \\ \mathbf{y}_s &= \mathbf{H}_s^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.14)$$

a parciální derivace matice  $\mathbf{H}_s$  podle souřadnice  $\eta$ . Platí

$$\mathbf{H}_{s\eta} = \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial \eta} = [0, 0, (-1+2\eta)/2, -2\eta, (1+2\eta)/2, 0, 0, 0]^T. \quad (4.15)$$

Pro numerickou integraci vztahů (4.8) a (4.9), při uvažování uvedeného zatížení konečného prvku, platí vztahy (virtuální změny  $\delta \mathbf{u}^T, \delta \mathbf{v}^T$  jsou nezávislé)

$$f_u = \hat{p} \int_{-1}^1 \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^T \mathbf{n}_u \sqrt{\left( (\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{x})^2 + (\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{y})^2 \right)} d\eta, \quad (4.16)$$

$$f_v = \hat{p} \int_{-1}^1 \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^T \mathbf{n}_v \sqrt{\left( (\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{x})^2 + (\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{y})^2 \right)} d\eta. \quad (4.17)$$

Pokud je zatížena jiná strana konečného kapalinového prvku, tak se postupuje obdobně s tím, že při vyjádření příslušných vztahů respektujeme zatíženou stranu prvku. Tím máme obecně popsán algoritmus řešení úloh hydrodynamiky kapalin.

#### 4.1 Stacionární proudění Newtonovy kapaliny bez konvektivního členu

V tomto odstavci se zabývám numerickým řešením laminárního stacionárního proudění Newtonovy kapaliny. Pro tuto realizaci použiji předpoklady z odstavce (3.1) a kapitoly (4). Do dříve odvozeného slabého řešení (3.1.11) a (3.1.12) dosadíme vztahy (4.7) a vše zapíšeme v komprimovaném maticovém tvaru. Dostaneme

$$\left[ \mu \int_{\Omega} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} - \left[ \int_{\Omega} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \mathbf{f}_u, \quad (4.1.1)$$

$$\left[ \mu \int_{\Omega} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} - \left[ \int_{\Omega} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \mathbf{f}_v, \quad (4.1.2)$$

$$\left[ \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{H}_x^T dS \right] \mathbf{u} + \left[ \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{H}_y^T dS \right] \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.1.3)$$

Tyto tři skalární rovnice popisují úlohu proudění kapaliny na úrovni jednoho konečného kapalinového prvku a definují příslušnou maticovou rovnici. Tuto soustavu rovnic zapíšeme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_{vp} \\ \mathbf{A}_{pu} & \mathbf{A}_{pv} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.1.4)$$

$$\text{resp.} \quad \mathbf{Q}_e \cdot \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e. \quad (4.1.5)$$

Definice nově zavedených matic je zřejmá ze vztahů (4.1.1) až (4.1.5).  $\mathbf{Q}_e$  je dále matice koeficientů u neznámých na prvku,  $\mathbf{q}_e$  je sloupcová matice uzlových hodnot neznámých prvku a  $\mathbf{f}_e$  je vektor pravé strany prvku. Naznačená integrace v uvedených vztazích se provede numerickou cestou s využitím Gaussových kvadraturních formulí (např. [2]).

Výslednou maticovou rovnici pro celou oblast proudění  $\Omega$  potom dostaneme „sečtením“ přes všechny elementy oblasti ve smyslu MKP. Dostaneme maticovou rovnici

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (4.1.6)$$

Význam nově zavedených matic je zřejmý z předchozího textu. Pouze podotkněme, že  $\mathbf{q}$  je sloupcová matice uzlových hodnot všech neznámých na celé oblasti proudění  $\Omega$ .

Tento způsob zápisu příslušných rovnic se bude též aplikovat v odstavcích (4.2) a (4.3). U konečných prvků, které leží uvnitř oblasti  $\Omega$  a nemají na hranici  $\partial\Omega_2$  žádnou svoji stranu, je vektor pravých stran  $f_e$  nulovým vektorem.

## 4.2 Stacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem

Při numerickém řešení této úlohy hydromechaniky budu postupovat obdobně jako v předchozím případě. Využitím předpřipravených parciálních derivací hledaných funkcí podle globálních souřadnic (4.7) a slabého řešení (3.2.7), (3.2.8) získáváme po úpravě tři skalární rovnice v maticovém tvaru, které opět popisují jeden konečný prvek. Platí

$$\left[ \rho \int_{\Omega} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} + \left[ \mu \int_{\Omega} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} - \left[ \int_{\Omega} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \mathbf{f}_u, \quad (4.2.1)$$

$$\left[ \rho \int_{\Omega} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} + \left[ \mu \int_{\Omega} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} - \left[ \int_{\Omega} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \mathbf{f}_v, \quad (4.2.2)$$

$$\left[ \int_{\Omega} \mathbf{N}\mathbf{H}_x^T dS \right] \mathbf{u} + \left[ \int_{\Omega} \mathbf{N}\mathbf{H}_y^T dS \right] \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.2.3)$$

Zapíšeme-li tuto soustavu rovnic ve zkráceném maticovém tvaru, tak můžeme její členy pojmenovat podle toho, jaký člen Navierovy-Stokesovy rovnice reprezentují. Matice  $\mathbf{A}$  je konvektivní matice,  $\mathbf{C}_{1,2}$  jsou tlakové matice,  $\mathbf{B}$  je disipační matice,  $\mathbf{F}_{1,2}$  jsou sloupcové matice zatížení kontinua a  $\mathbf{K}_{1,2}$  jsou matice odpovídající rovnici kontinuity. Definice nově zavedených matic je zřejmá ze vztahu (4.2.4) a tento vztah můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}_1 \mathbf{p} &= \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{C}_2 \mathbf{p} &= \mathbf{F}_2, \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{u} + \mathbf{K}_2 \mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Další zápis této soustavy rovnic provedeme v komprimovaném maticovém tvaru. Platí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{B} & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Srovnáním s předchozím odstavcem (vztah (4.1.4)) vidíme, že tato soustava rovnic je nelineární. Nelinearita je způsobena přidáním konvektivního členu do Navierovy-Stokesovy rovnice (3.2.1). Tuto soustavu nelineárních algebraických rovnic řešíme numericky aplikací iteračního postupu na bázi Newtonovy-Raphsonovy metody [8]. Rovnici (4.2.5) přepíšeme symbolicky do tvaru (4.2.6), kde  $\mathbf{x}$  jsou neznámé v úloze hydromechaniky. Iterační proces je potom řízen algoritmem (4.2.7), kde  $\mathbf{R}^{(r)}$  je reziduální vektor a  $\mathbf{J}^{(r)}$  je Jacobiova matice

zobrazení,  $\mathbf{x}^{(r+1)}$  a  $\mathbf{x}^{(r)}$  jsou vektory řešení v jednotlivých iteračních krocích ( $r$ -iterační krok). Platí

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (4.2.6)$$

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{J}_{(r)}^{-1}\mathbf{R}^{(r)}, \quad (4.2.7)$$

$$\mathbf{R}^{(r)} = \mathbf{K}^{(r)}\mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{f}, \quad (4.2.8)$$

$$\mathbf{J}_{(r)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v})^{(r)} + \mathbf{B} + \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{u}^T} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{v}^T}\right)\mathbf{u}^r & 0 & \mathbf{C}_1 \\ 0 & \mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v})^{(r)} + \mathbf{B} + \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{u}^T} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{v}^T}\right)\mathbf{v}^r & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.9)$$

Nyní je potřeba nadefinovat parciální derivaci matice  $\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v})$  podle složek vektoru rychlosti, které jsou použity při vyjádření Jacobiovy matice zobrazení.

Matice  $\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v})$  je definována vztahem

$$\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \left[ \rho \int_{\Omega} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T) dS \right]. \quad (4.2.10)$$

Pak tedy její parciální derivace, např. pro vektor  $\mathbf{u}$  znamená

$$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{u}^T} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{v}^T}\right)\mathbf{u}^{(r)} = \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial u_1} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial v_1}\right)\mathbf{u}^{(r)}, \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial u_2} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial v_2}\right)\mathbf{u}^{(r)}, \dots, \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial u_8} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial v_8}\right)\mathbf{u}^{(r)}. \quad (4.2.11)$$

Každý člen pravé strany tohoto vztahu definuje jeden sloupec matice rozměru  $8 \times 8$ , která je součástí Jacobiovy matice zobrazení iteračního procesu řešení soustavy nelineárních algebraických rovnic. Tedy pro  $i$ -tý sloupec této matice platí (4.2.12). Analogický vztah dostaneme i pro vektor  $\mathbf{v}$ . Získáváme vztahy

$$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial u_i} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial v_i}\right)\mathbf{u}^{(r)} = H_i (\mathbf{H}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}_y^T)\mathbf{u}^{(r)}, \quad (4.2.12)$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial u_i} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial v_i}\right)\mathbf{v}^{(r)} = H_i (\mathbf{H}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}_y^T)\mathbf{v}^{(r)}. \quad (4.2.13)$$

Z uvedeného postupu je zřejmé, že pro vlastní řešení soustavy nelineárních algebraických rovnic je nutné znát počáteční vektor řešení  $\mathbf{x}(0)$ . Tento vektor můžeme určit např. řešením úlohy hydromechaniky se zanedbáním konvektivního členu v Navierově-Stokesově rovnici (viz odst. (4.1)). Pokud algoritmus řešení nelineárních algebraických rovnic (4.2.5) konverguje, tak sloupcová matice  $\mathbf{J}_{(r)}^{-1}\mathbf{R}^{(r)}$  ve vztahu (4.2.7), respektive její norma,

limitují k nule. Iterační proces zastavíme, pokud je splněna podmínka (4.2.14), kde  $\varepsilon$  je zvolená přesnost řešení.

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(r+1)} - \mathbf{x}^{(r)}\|}{\|\mathbf{x}^{(r)}\|} \leq \varepsilon. \quad (4.2.14)$$

### 4.3 Nestacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem

V tomto odstavci se zabývám numerickou realizací nestacionárního laminárního izotermického proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny. Opět provedeme výše uvedenou prostorovou diskretizaci problému a vzhledem k časové závislosti této úlohy musíme ještě doplnit příslušnou časovou diskretizaci. Použitím slabého řešení (3.3.10) a (3.3.11) a parciálních derivací (4.7) získáváme soustavu maticových rovnic této úlohy. Dostaneme

$$\left[ \rho \int_{\Omega} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T) dS \right] \dot{\mathbf{u}} + \left[ \rho \int_{\Omega} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} + \left[ \mu \int_{\Omega} (\mathbf{H}_x\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y\mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} - \left[ \int_{\Omega} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \mathbf{f}_u, \quad (4.3.1)$$

$$\left[ \rho \int_{\Omega} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T) dS \right] \dot{\mathbf{v}} + \left[ \rho \int_{\Omega} (\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} + \left[ \mu \int_{\Omega} (\mathbf{H}_x\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y\mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} - \left[ \int_{\Omega} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \mathbf{f}_v, \quad (4.3.2)$$

$$\left[ \int_{\Omega} \mathbf{N}\mathbf{H}_x^T dS \right] \mathbf{u} + \left[ \int_{\Omega} \mathbf{N}\mathbf{H}_y^T dS \right] \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.3.3)$$

Přepíšeme-li tuto soustavu rovnic ve zkráceném tvaru, pak můžeme její členy opět pojmenovat podle toho, jaký člen Navierovy-Stokesovy rovnice reprezentuje. Matice  $\mathbf{A}_1$  je matice hmotnosti,  $\mathbf{B}_1$  je konvektivní matice,  $\mathbf{C}_{1,2}$  jsou tlakové matice,  $\mathbf{D}_1$  je disipační matice,  $\mathbf{E}_{1,2}$  jsou sloupcové matice zatížení kontinua a  $\mathbf{K}_{1,2}$  jsou matice kontinuity. Platí (definice jednotlivých matic vyplývá ze vztahů (4.3.1) až (4.3.3))

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{D}_1 \mathbf{u} - \mathbf{C}_1 \mathbf{p} &= \mathbf{E}_1, \\ \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}_1 \mathbf{v} - \mathbf{C}_2 \mathbf{p} &= \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{u} + \mathbf{K}_2 \mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Časovou změnu složek vektoru rychlosti ve vztazích (4.3.4) vyjádříme obecně pomocí diferenčního schématu. Další úprava závisí pouze na tom, na jaké časové hladině zvolíme složky vektoru rychlostí  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  a tlaku  $\mathbf{p}$ . Pro časovou změnu rychlostí platí vztah

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t}, \quad (4.3.5)$$

kde  $n$  je časová hladina a  $\Delta t$  je časový krok použité metody řešení.

Zavedením časových změn do maticových rovnic (4.3.4) a vzhledem k tomu, že rovnice kontinuity musí platit na každé časové hladině, můžeme rovnice (4.3.4) vyjádřit na  $(n+1)$ -ní časové hladině ve tvaru

$$\begin{aligned} & \{A_1 + \Delta t(1 - \beta)\}B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{n+1} + D_1 \} \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t(1 - \beta)C_1 \mathbf{p}^{n+1} = \\ & = \Delta t E_1^{n+1} + \{A_1 - \Delta t\beta\}B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^n + D_1 \} \mathbf{u}^n - \Delta t\beta C_1 \mathbf{p}^n \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$\begin{aligned} & \{A_1 + \Delta t(1 - \beta)\}B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{n+1} + D_1 \} \mathbf{v}^{n+1} + \Delta t(1 - \beta)C_2 \mathbf{p}^{n+1} = \\ & = \Delta t E_2^{n+1} + \{A_1 - \Delta t\beta\}B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^n + D_1 \} \mathbf{v}^n - \Delta t\beta C_2 \mathbf{p}^n \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{K}_2 \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (4.3.8)$$

Zde je nutno říci, že sloupcovou matici  $E_i^{n+1}$   $i = (1,2)$ , která vyjadřuje vnější zatížení kontinua, známe v  $(n+1)$ -ní hladině a vektory rychlostí  $\mathbf{u}^n$  a  $\mathbf{v}^n$  a tlaku  $\mathbf{p}^n$  známe z  $n$ -té časové hladiny. Koeficient  $\beta$  může nabývat hodnot

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{pro } u = u^{n+1}, p = p^{n+1}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } u = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, p = \frac{p^{n+1} + p^n}{2}, \\ 1 & \text{pro } u = u^n, p = p^n, \end{cases} \quad (4.3.9)$$

kde hodnoty  $\beta = 0, 0.5$  odpovídají implicitnímu schématu řešení nestacionárních úloh a hodnota  $\beta = 1$  potom odpovídá explicitnímu řešení úlohy hydromechaniky.

Pro snadnější zápis přepíšeme soustavu maticových rovnic (4.3.6) až (4.3.8) v kompaktním maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}^{n+1} = \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.3.10)$$

Nově zavedené matice mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_1 + \Delta t(1 - \beta)\{B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{n+1} + D_1\}, \\ \mathbf{B} &= \Delta t(1 - \beta)C_1, \\ \mathbf{C} &= \Delta t(1 - \beta)C_2, \\ \mathbf{F}_1 &= \{A_1 - \Delta t\beta\}B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^n + D_1 \} \mathbf{u}^n - \Delta t\beta C_1 \mathbf{p}^n, \\ \mathbf{F}_2 &= \{A_1 - \Delta t\beta\}B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^n + D_1 \} \mathbf{v}^n - \Delta t\beta C_2 \mathbf{p}^n. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Vztah (4.3.10) opět představuje soustavu nelineárních algebraických rovnic, které definují neznámé složky vektoru rychlostí a tlaku na konečném prvku. Pro řešení této soustavy použijeme stejně jako v předchozí úloze (4.2) Newtonovu-Raphsonovu metodu. Tento iterační cyklus se aplikuje na každé časové hladině. Necht' tedy  $n$  je časová hladina, na které známe řešení uvažované úlohy a  $r$  necht' je iterační krok uvnitř této časové hladiny. Zapišme soustavu nelineárních algebraických rovnic (4.3.10) v komprimovaném tvaru, kde vektor  $\mathbf{x}$  je vektor neznámých v úloze. Dostaneme

$$\mathbf{K}^{(n+1)} \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)}. \quad (4.3.12)$$

Iterační proces při přechodu na  $(n+1)$ -ní hladinu řešení je řízen vztahy (4.3.13)-(4.3.14), kde  $\mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(0)}$  je reziduální vektor a  $\mathbf{J}_{(n+1),(r)}$  je Jacobiova matice zobrazení v  $r$ -tém iteračním kroku. Platí

$$\mathbf{x}^{(n+1),(r+1)} = \mathbf{x}^{(n+1),(r)} - \mathbf{J}_{(n+1),(r)}^{-1} \mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(0)}, \quad (4.3.13)$$

$$\mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(0)} = \mathbf{K}^{(n+1),(r)} \mathbf{x}^{(n+1),(r)} - \mathbf{f}^{(n),(0)}. \quad (4.3.14)$$

Význam zápisu pravé strany  $\mathbf{f}^{(n),(0)}$  je takový, že rychlosti a tlak kapaliny, které se při výpočtu tohoto vektoru použily, jsou na řešené časové hladině konstantní (výsledek řešení předchozí časové hladiny).

Jacobiova matice iteračního procesu má tvar

$$\mathbf{J}_{(n+1),(r)} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_u & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{A}}_v & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.3.15)$$

Zde nově vytvořené matice  $\overline{\mathbf{A}}_u$ ,  $\overline{\mathbf{A}}_v$  jsou definovány vztahy (4.3.16), (4.3.17) ve kterém jsou opět parciální derivace konvektivní matice podle složek vektoru rychlosti. Tento výraz je definován stejně jako v předchozí úloze (4.2). Pro zavedené matice platí

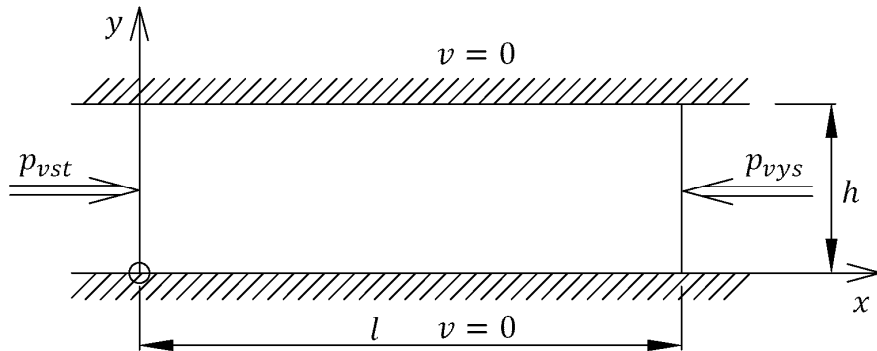
$$\overline{\mathbf{A}}_u = \mathbf{A}_1 + \Delta t(1 - \beta) \left[ \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{(n+1),(r)} + \left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^T} \right) \mathbf{u}^{(n+1),(r)} + \mathbf{D}_1 \right], \quad (4.3.16)$$

$$\overline{\mathbf{A}}_v = \mathbf{A}_1 + \Delta t(1 - \beta) \left[ \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{(n+1),(r)} + \left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^T} \right) \mathbf{v}^{(n+1),(r)} + \mathbf{D}_1 \right]. \quad (4.3.17)$$

Stejně jako v předchozí úloze je zřejmé, že pro vlastní řešení soustavy nelineárních algebraických rovnic je nutné znát počáteční vektor řešení  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Tento vektor získáme řešením úlohy hydromechaniky se zanedbáním konvektivního členu v Navierově-Stokesově rovnici (viz odst. (4.1)). Iterační proces na každé časové hladině zastavíme, pokud je splněna podmínka (4.2.14), kde  $\varepsilon$  je zvolená přesnost řešení.

## 5. Analytické řešení Navierovy-Stokesovy rovnice

Pro kontrolu numerického řešení provedeme nyní analytické řešení nestlačitelného stacionárního laminárního a izotermického proudění nestlačitelné vazké Newtonovy kapaliny ( $\rho = konst., \mu = konst.$ ) v rovinném kanále s pevnými stěnami (obr. 5.1). Při analytickém řešení vyjdeme z Navierovy -Stokesovy rovnice (3.1) a rovnice kontinuity (3.2). Do těchto základních řídicích rovnic zavedeme předpoklady rovinného proudění a provedeme analytické řešení příslušných diferenciálních rovnic.



**Obr. 5.1.** Rovinný kanál s pevnými stěnami

Předpoklady analytického řešení

rovinné proudění:  $v_z = 0, v_y = 0, v_x \neq 0,$

nestlačitelná kapalina:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  a dále  $\rho = konst., \mu = konst.,$

stacionární proudění:  $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0,$

zanedbáváme objemové síly:  $f_i = 0,$

zanedbáváme konvektivní člen:  $\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  (uvažujeme pomalé proudění  $\Rightarrow$  setrvačné síly

v kapalině jsou malé ve srovnání s třecími silami).

Tyto předpoklady zavedeme do Navierovy-Stokesovy rovnice (3.1) a rovnice kontinuity (3.2). Dostaneme

$$-\mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.2)$$



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (5.4)$$

Z prvních tří rovnic vyplývá, že tlak není funkcí  $y$  a ani  $z$ . Můžeme tedy psát  $p = p(x)$ . Dále z rovnice kontinuity je vidět, že rychlost  $v_x$  není funkcí  $x$ . Označíme tedy  $v = v_x(y, z)$ . Rovnice (5.1) přejde na tvar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (5.5)$$

Z této rovnice dále vyplývá, že pravá strana rovnice je funkcí  $x$  a levá strana naopak funkcí souřadnic  $y$  a  $z$ . Má-li tato rovnost nastat, tak musí být zřejmě obě strany rovny téže konstantě. Tedy  $dp/dx = konst.$

Z definice rovinného proudění dále vyplývá, že rychlost  $v$  nemůže být funkcí souřadnice  $z$  (ve všech rovinách rovnoběžných s rovinou tvořenou osami  $x$  a  $y$  jsou v kapalině stejné poměry). Platí tedy  $v = v(y)$  a rovnice (5.5) přejde na konečný tvar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (5.6)$$

Po dvojnásobné integraci této rovnice dostaneme

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (5.7)$$

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek (neskluzové podmínky na stěnách kanálu)

- 1) pro  $y = 0 \rightarrow v = 0$ ,
- 2) pro  $y = h \rightarrow v = 0$ .

Po vyjádření integračních konstant získáme vztah pro rozložení rychlosti v kanále s nepohyblivými stěnami. Platí

$$v = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{y}{h} - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]. \quad (5.8)$$

Dále si vyjádříme vztah pro výpočet rozložení rychlosti v kanále s uvažováním pohyblivé horní stěny (rychlost  $v_0$ ). Vychází se opět ze vztahu (5.7) s tím, že nadefinujeme nové okrajové podmínky pro výpočet integračních konstant. Okrajové podmínky mají nyní tvar

- 1) pro  $y = 0 \rightarrow v = 0$ ,
- 2) pro  $y = h \rightarrow v = v_0$ .

Po vyjádření integračních konstant opět získává vztah pro rozložení rychlosti v kanále s pohyblivou horní stěnou. Platí

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \left( \frac{v_0}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{dp}{dx} \right) y. \quad (5.9)$$

Výsledné vztahy (5.8) a (5.9) pro proudění kapaliny v rovinném kanálu dále převedeme do bezrozměrného tvaru. Zavedeme bezrozměrné veličiny

$$\bar{v} = \frac{v}{u_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h_0}, \quad \bar{l} = \frac{l}{h_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{u_0^2 \rho}, \quad \text{Re} = \frac{u_0 h_0}{\nu}. \quad (5.10)$$

Zde použité veličiny s pruhem značí bezrozměrný tvar dané veličiny. V těchto vztazích  $v$  značí rychlost (ve směru osy  $x$ ),  $u_0$  je charakteristická rychlost problému (např. známá rychlost ve směru osy  $x$ ),  $y$  je prostorová (Eulerova) souřadnice kontinua,  $h_0$  je charakteristický rozměr kanálu (např. známá hodnota minimální vzdálenosti mezi tuhou podložkou a tuhým válcem),  $l$  značí délku rovinného kanálu,  $p$  je tlak v kapalině,  $\rho$  je měrná hmotnost kapaliny,  $\nu$  je kinematická viskozita,  $\text{Re}$  je Reynoldsovo číslo,  $p_{vst}$  je tlak na vstupu rovinného kanálu a  $p_{vys}$  je tlak na výstupu z kanálu.

Po dosažení těchto vztahů do původních rovnic (5.8), (5.9) a jejich úpravou získáme bezrozměrné rovnice pro vyjádření rozložení rychlosti v kapalině v rovinném kanálu. Postupně platí

*Kanál – pevné stěny*

$$\bar{v} = -\frac{\text{Re}}{2} \frac{\bar{p}_{vys} - \bar{p}_{vst}}{\bar{l}} (\bar{y} - \bar{y}^2). \quad (5.11)$$

*Kanál – pohyblivá horní stěna*

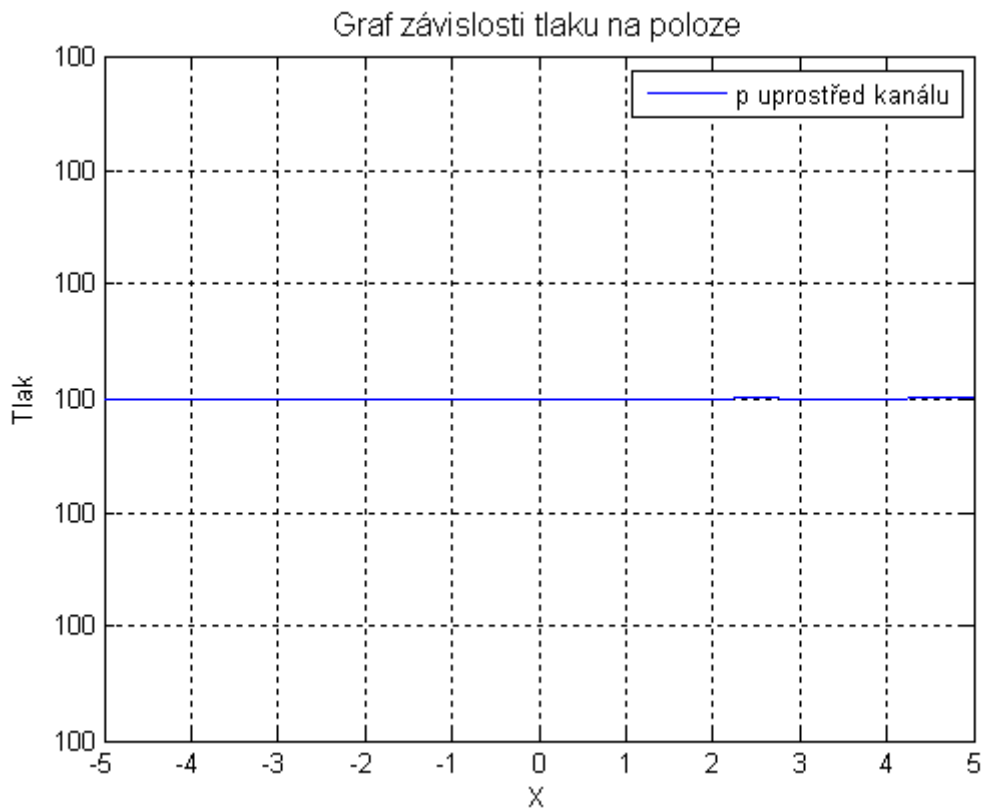
$$\bar{v} = \bar{y} - \frac{\text{Re}}{2} \frac{\bar{p}_{vys} - \bar{p}_{vst}}{\bar{l}} (\bar{y} - \bar{y}^2). \quad (5.12)$$

## 6. Numerické výsledky proudění kapaliny

Nyní již můžeme uvést numerické výsledky stacionárního proudění Newtonovy kapaliny bez konvektivního členu v rovinném kanálu s horní pohyblivou stěnou. Výpočet byl proveden v bezrozměrném tvaru se zvolenými parametry:  $h_0 = 1$ ,  $R = 10^{20}$ ,  $u_0 = 1$  (rychlost horní stěny),  $Re = 0.02$ ,  $l = 10$ ,  $P_{vst} = 100$ ,  $P_{vys} = 100$ . Při numerickém řešení metodou konečných prvků byly použity rovnice (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3). Výpočet byl realizován v prostředí interpretu MATLAB (program stacpr1 v příloženém CD). Výstupem řešení je rozložení rychlosti (složky vektoru rychlosti  $u, v$ ) v kapalině v kanálu na vstupu do kanálu, uprostřed kanálu a na výstupu z kanálu. Další výsledkem je potom distribuce tlaku podél kanálu ve třech úrovních (spodní stěna kanálu, uprostřed kanálu, horní stěna kanálu). Složka rychlosti  $u$  je následně ověřena analytickým řešením podle rovnice (5.12). Dosažené výsledky jsou souhrnně uvedené v tab. 6.1. Grafické vyjádření těchto výsledků je potom uvedeno na obr. 6.1, a obr. 6.2. Na obr. 6.1 je znázorněno rozložení tlaku podél kanálu (po výšce kanálu jsou tlakové rozdíly prakticky nulové).

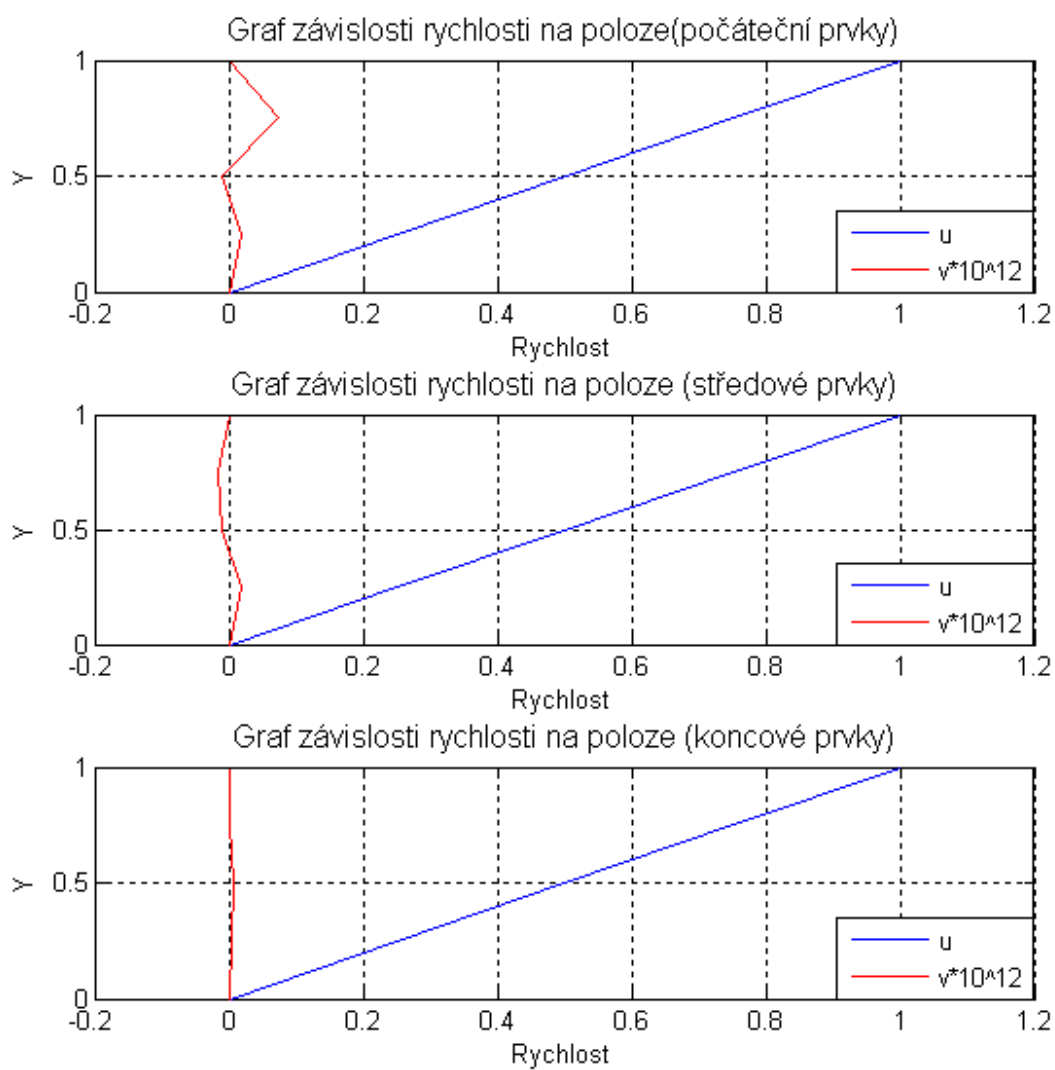
**Tabulka 6.1.** Výsledky analytického a numerického MKP výpočtu rychlosti  $u$  (rychlosti ve směru osy  $x$ ) v kanále s pohyblivými stěnami.

Vzdálenost ve směru $y$	Rychlost $u$			
	Analytické řešení	Program Matlab		
		vstup	střed	výstup
0	0	0	0	0
0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,75	0,75	0,75	0,75	0,75
1	1	1	1	1



**Obr. 6.1.** Rozložení tlaku v kanálu

Na obr. 6.2 je uvedeno grafické znázornění rozložení složek rychlosti  $u, v$  na začátku, prostředku a konci kanálu. Červeně je vyznačena křivka rychlosti  $v$  a modře složka rychlosti  $u$ . Zde je nutno podotknout, že skutečné hodnoty rychlosti  $v$  jsou velmi malé řádově cca  $10^{-12}$ . Aby vykreslení těchto rychlostí bylo zřetelné, jsou hodnoty složky rychlosti  $v$  ve všech úrovních kanálu zvětšeny.

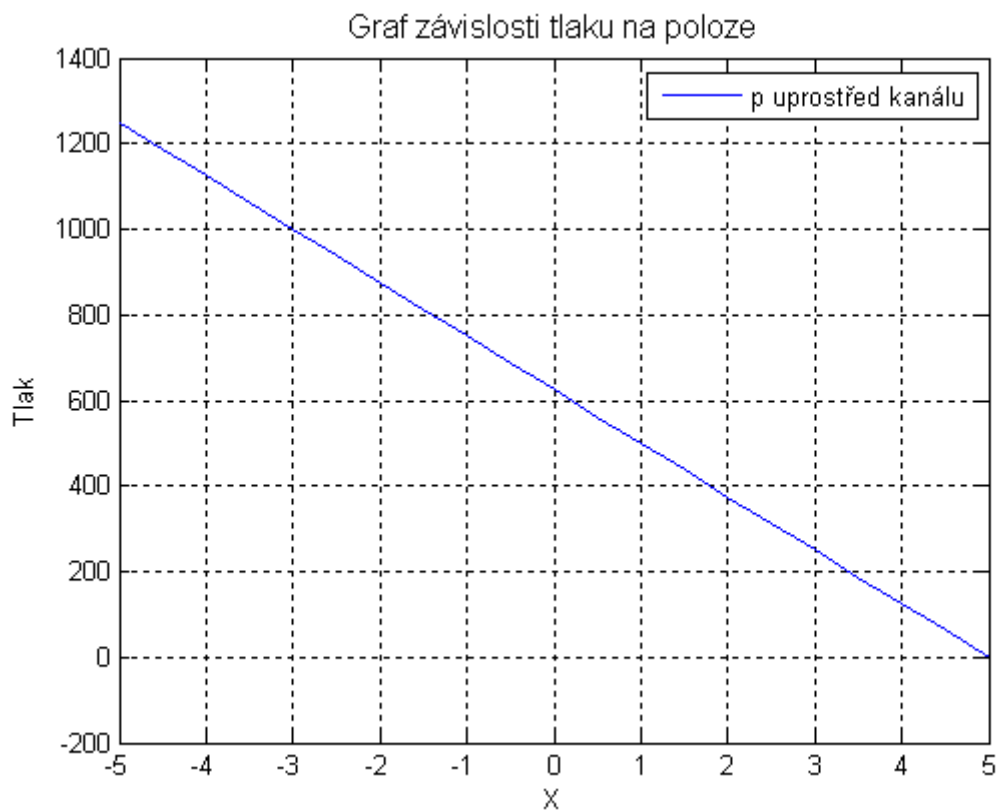


**Obr. 6.2.** Rychlostní profily v kanálu (vstup, střed, výstup)

V dalším příkladu bylo řešeno proudění kanálem s pohyblivou horní stěnou s nenulovým tlakovým gradientem. Zadané parametry jsou:  $h_0 = 1$ ,  $R = 10^{20}$ ,  $u_0 = 1$ ,  $Re = 0.02$ ,  $l = 10$ ,  $P_{vst} = 1250$ ,  $P_{vys} = 0$ . Při numerickém řešení metodou konečných prvků byly použity rovnice (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3). Výpočet byl realizován v prostředí interpretu MATLAB (program stacpr2 v příloženém CD). Průběhy rychlostí a tlaků se zřejmě oproti předchozí úloze změní, což výpočet prokázal. Numerický výpočet rychlosti  $u$  (ve směru osy  $x$ ) je opět ověřen analytickým výpočtem. Výsledky jsou souhrnně uvedeny v tab. 6.2. Grafické vyjádření těchto výsledků je potom uvedeno na obr. 6.3 a obr. 6.4. Rozložení tlaku podél kanálu je znázorněno na obr. 6.3 (rozdíly tlaku napříč kanálem jsou opět zanedbatelné).

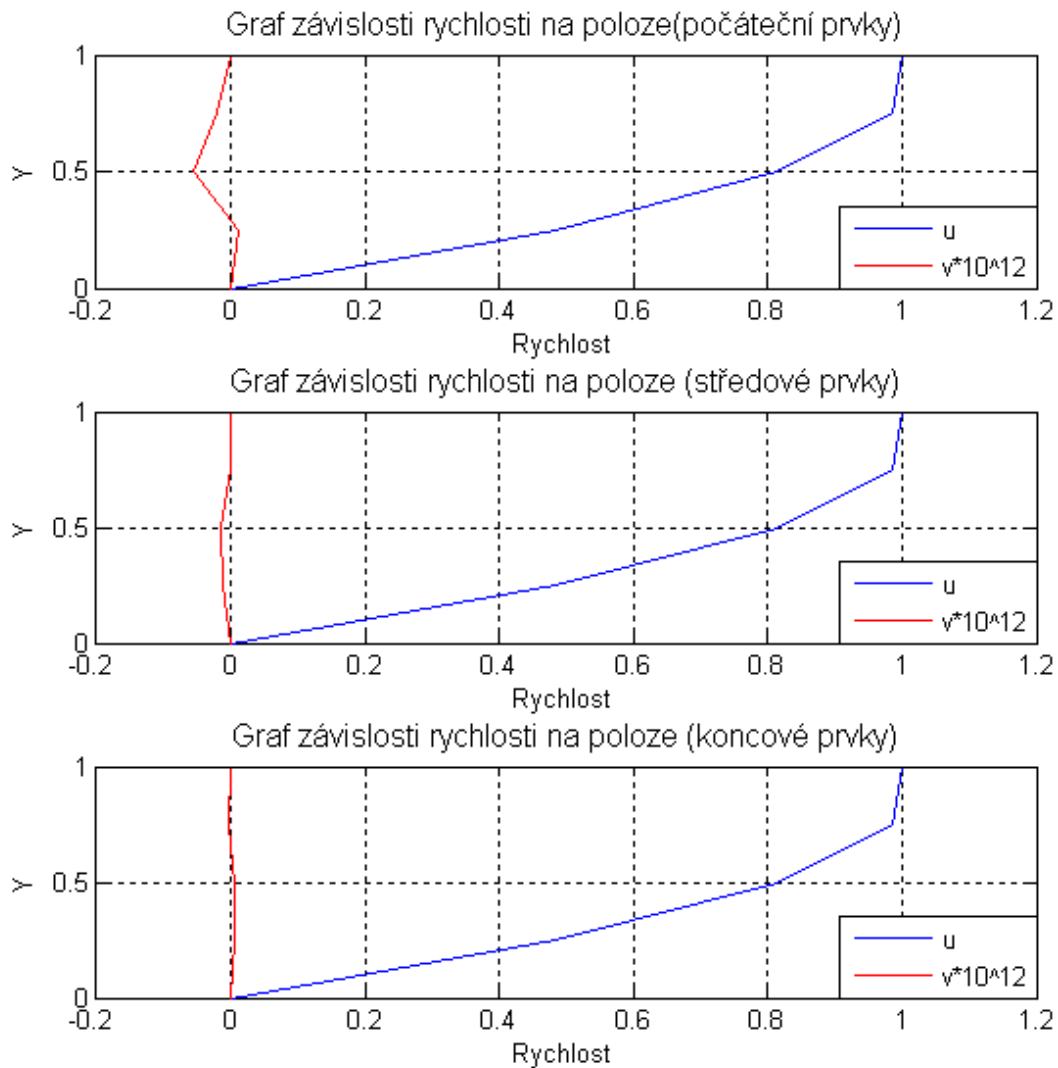
**Tabulka 6.2.** Výsledky analytického a numerického MKP výpočtu rychlosti  $u$  (rychlosti ve směru osy  $x$ ) v kanále s pohyblivými stěnami.

Vzdálenost ve směru $y$	Rychlost $u$			
	Analytické řešení	Program Matlab		
		vstup	střed	výstup
0	0	0	0	0
0,25	0.4844	0.4844	0.4844	0.4844
0,5	0.8125	0.8125	0.8125	0.8125
0,75	0.9844	0.9844	0.9844	0.9844
1	1	1	1	1



**Obr. 6.3.** Rozložení tlaku v kanálu

Rozložení složek rychlosti  $u, v$  na začátku, prostředku a konci kanálu je znázorněno na obr. 6.4. Červeně je vyznačena křivka rychlosti  $v$  a modře složka rychlosti  $u$ . Opět je nutno podotknout, že skutečné hodnoty rychlosti  $v$  jsou velmi malé řádově cca  $10^{-12}$ . Aby vykreslení těchto rychlostí bylo názorné, jsou hodnoty rychlosti  $v$  ve všech úrovních kanálu zvětšeny.



**Obr. 6.4.** Rychlostní profily v kanálu (vstup, střed, výstup)

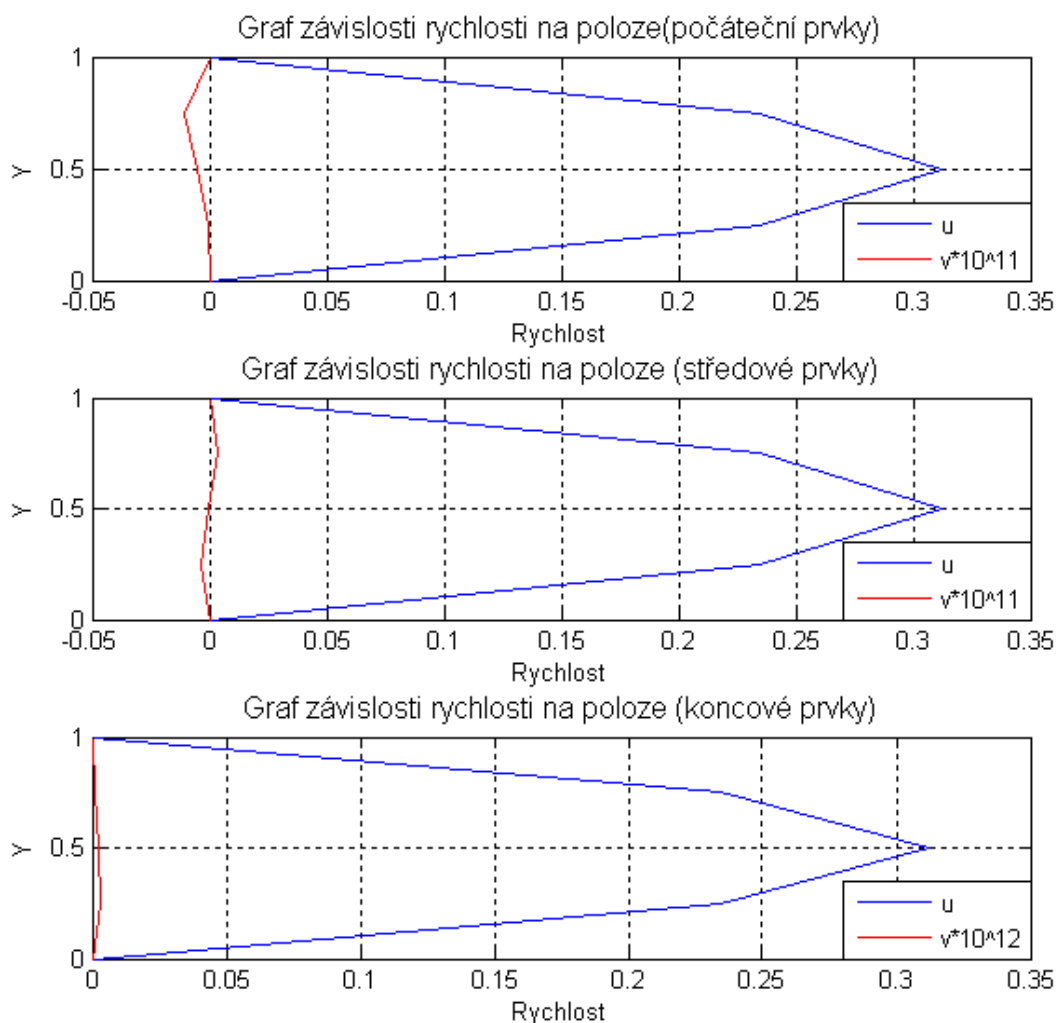
Jako vstupní parametry do třetí úlohy hydromechaniky budeme uvažovat  $h_0 = 1$ ,  $R = 10^{20}$ ,  $u_0 = 0$ ,  $Re = 0.02$ ,  $l = 10$ ,  $P_{vst} = 1250$ ,  $P_{vys} = 0$ . Nyní tedy řešíme rovinné proudění v kanále s nepohyblivými stěnami s nenulovým tlakovým gradientem. Při numerickém řešení metodou konečných prvků byly použity rovnice (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3). Stejně jako v předchozích úlohách byl výpočet realizován v prostředí interpretu MATLAB (program stacpr3 v příloženém CD). Výstup je stejný jako v předchozích úlohách, tedy rychlostní profily, rozložení tlaku a následné analytické ověření složky rychlosti  $u$  (tab. 6.3, obr. 6.5).

**Tabulka 6.3.** Vyhodnocení analytického a numerického MKP výpočtu rychlosti  $u$  (rychlost ve směru osy  $x$ ) v kanále s nepohyblivými stěnami.

Vzdálenost ve směru $y$	Rychlost $u$			
	Analytické řešení	Program Matlab		
		vstup	uprostřed	výstup
0	0	0	0	0
0,25	0,2344	0,2344	0,2344	0,2344
0,5	0,3125	0,3125	0,3125	0,3125
0,75	0,2344	0,2344	0,2344	0,2344
1	0	0	0	0



Pro rozložení tlaku platí stejná závislost jako v předchozím příklady, tedy platí obr. 6.3. Na obr. 6.5 je potom znázorněno rozložení složek rychlosti  $u, v$  na začátku, prostředku a konci kanálu. Červeně je vyznačena křivka rychlosti  $v$  a modře složka rychlosti  $u$ . Skutečné hodnoty složky rychlosti  $v$  jsou opět velmi malé (řádově cca  $10^{-12}$ , na obr. 6.5 zvětšeno).

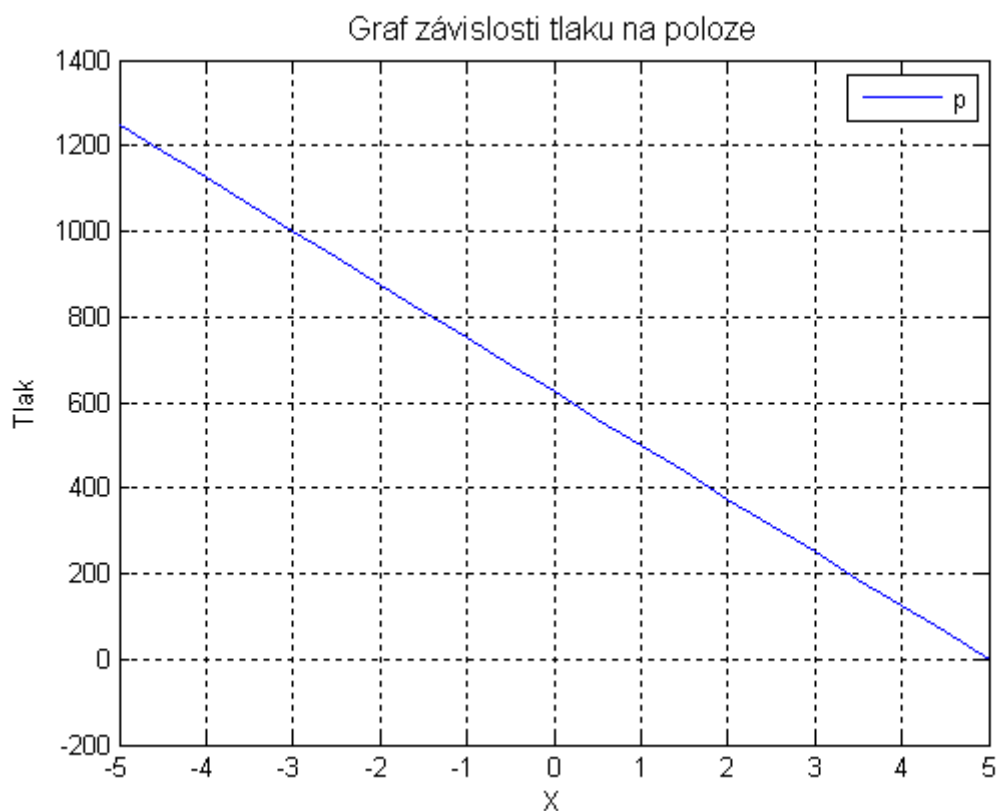


**Obr. 6.5.** Rychlostní profily v kanálu (vstup, střed, výstup)

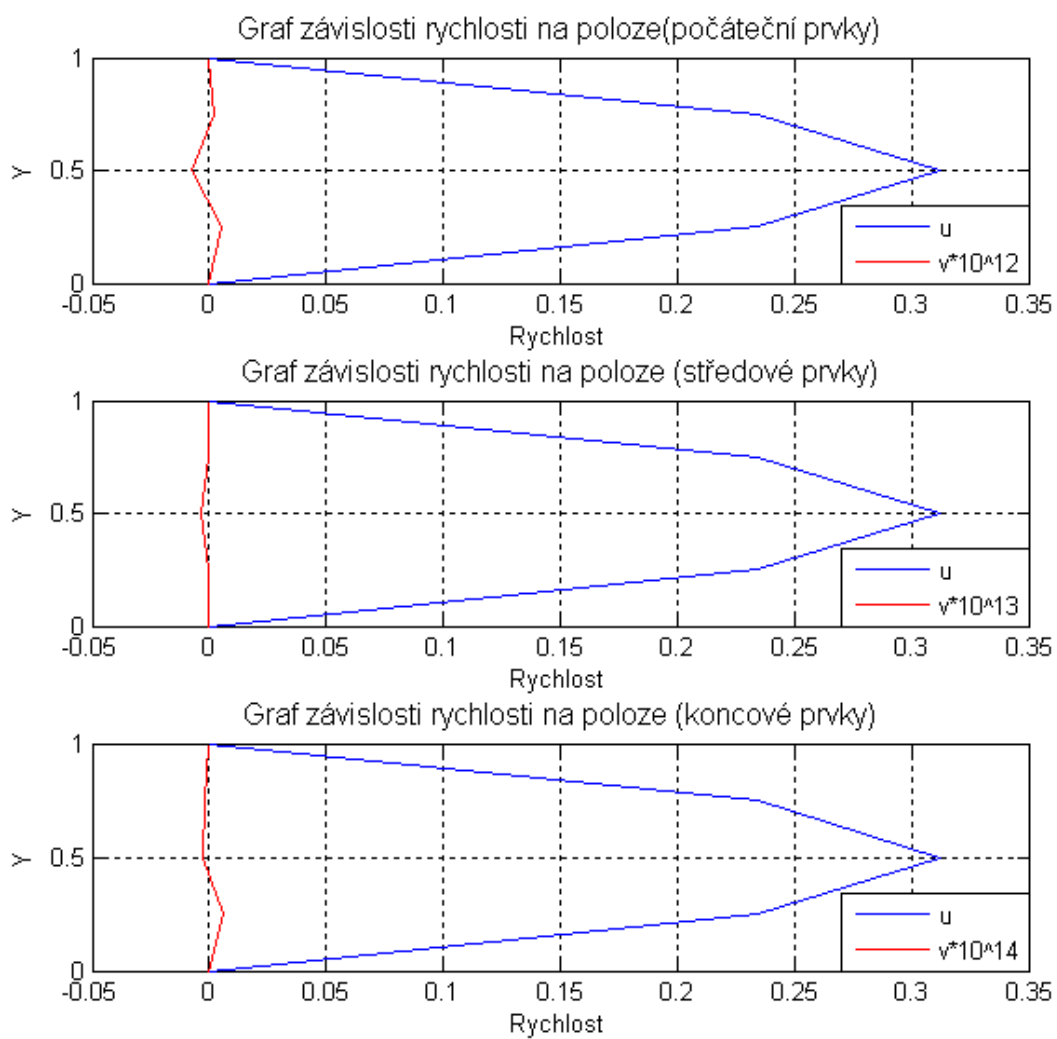
Následující numerické řešení odpovídá stacionárnímu proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem. Zadání je stejně jako v předchozím případě. Zde se přesvědčíme, že přidání konvektivního členu do Navierovy-Stokesovy rovnice nemá na výsledky řešení zásadní vliv. Při numerickém řešení metodou konečných prvků byly použity rovnice (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3). Stejně jako v předchozích úlohách byl výpočet realizován v prostředí interpretu MATLAB (program stackonvekpr1 v příloženém CD). Výstupem opět bude rozložení rychlostí v kanále ve třech místech (začátek, uprostřed a konec kanálu) a rozložení tlaku ve střední úrovni kanálu. Výsledky jsou souhrnně vyhodnoceny v tab. 6.4 a na obr. 6.6 a obr. 6.7. Z těchto výsledků je zřejmé, že vliv konvektivního členu u tohoto typu proudění je zcela zanedbatelný.

**Tabulka 6.4.** Vyhodnocení numerického MKP výpočtu rychlosti  $u$  (rychlosti ve směru osy  $x$ ) v kanále s nepohyblivými stěnami.

Vzdálenost ve směru Y	Rychlost u		
	Program matlab		
	vstup	uprostřed	výstup
0	0	0	0
0,25	0,2344	0,2344	0,2344
0,5	0,3125	0,3125	0,3125
0,75	0,2344	0,2344	0,2344
1	0	0	0



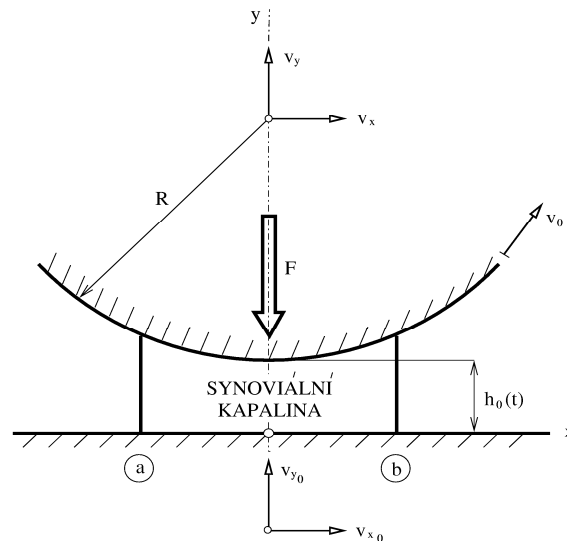
**Obr. 6.6.** Rozložení tlaku v kanálu



**Obr. 6.7.** Rychlostní profily v kanálu (vstup, střed, výstup)

## 7. Modelování kolenního kloubu

V této kapitole se budu zabývat úvodem do modelování kolenního kloubu [11], [12]. V prvním přiblížení uvažuji jednoduchý fyzikální model kloubu, který je představován rovinným problémem dotyku náhradního válce a tuhé podložky s uvažováním přítomnosti synoviální kapaliny (obr. 7.1). Podotkněme, že původní fyzikální model o dvou válcích je převeden (při zachování relativní křivosti) na uvažovaný model jednoho válce s podložkou. Řešení provedu postupně tak, že nejdříve budu uvažovat proudění synoviální kapaliny v mezeře s tuhým válcem a potom rozšířím řešení na problém proudění kapaliny v interakci s pružným válcem [9].



Obr. 7.1. Rovinný model kolenního kloubu

### 7.1. Deformace náhradního válce

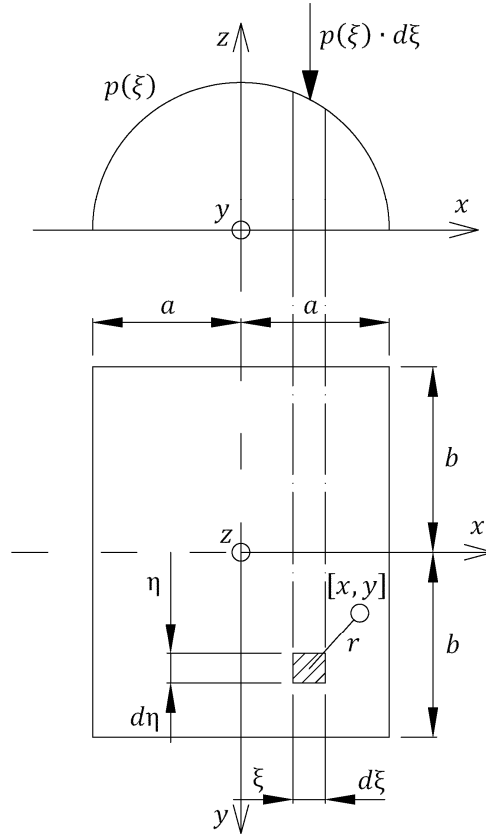
Pro celkové řešení modelu kolenního kloubu budu tedy potřebovat popsat pružné deformace válce. Pro výpočet těchto deformací lze odvodit vztah, který vychází ze zatížení pružného poloprostoru osamělou silou. Platí [6]

$$w = \frac{F}{4\pi G} \cdot \frac{2(1-\nu)}{l}, w = \frac{F(1-\nu^2)}{\pi E r}, \quad (7.1.1)$$

kde  $w$  je deformace vyvolaná osamělou silou  $F$  v místě  $l$  uvnitř pružného poloprostoru (vlevo), resp. ve vzdálenosti  $r$  na povrchu uvažovaného poloprostoru (vpravo).  $G$  je zde modul pružnosti ve smyku,  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $\nu$  je Poissonova konstanta materiálu.

Pro určení deformace pružného válce v místě  $x$  vyjdeme z obr. (7.1.1) a vztahu (7.1.1). Pro elementární osamělou sílu v místě  $\xi, \eta$  ( $\xi \in (-a, a)$ ,  $\eta \in (-b, b)$ ) na plošce  $d\xi d\eta$  zřejmě platí

$$dF = p \cdot d\xi \cdot d\eta. \quad (7.1.2)$$



**Obr. 7.1.1.** Deformace  $w(x)$  pružného válce

Tato síla vyvolá v obecném bodě  $(x,y)$  elementární přetvoření, které získáme dosazením vztahu (7.1.2) do deformace (7.1.1). Dostaneme

$$dw = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{dF}{r} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{p \cdot d\xi \cdot d\eta}{r}, \quad (7.1.3)$$

kde pro vzdálenost  $r$  mezi uvažovanými body platí

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta-y)^2}. \quad (7.1.4)$$

U válce tlak  $p$  není funkcí  $y$  (je stejný pro všechny body s  $x = konst.$ , resp.  $\xi = konst.$ ) a deformaci válce vyjádříme v rovině  $x,z$ . Ve vztahu (7.1.4) položíme  $y=0$  a vzdálenost  $r$  přejde do tvaru

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}. \quad (7.1.5)$$

Celkovou deformaci v bodě  $[x,0]$  můžeme potom vyjádřit ve tvaru

$$w(x) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \frac{p \cdot d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}}. \quad (7.1.6)$$

Dvojný integrál na pravé straně této rovnice vyřešíme dvojnásobnou integrací (tlak  $p$  není funkcí  $\xi$ ). Postupnými úpravami získáme

$$I = \int_{-b}^b \frac{p \cdot d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} = 2p \cdot \int_0^b \frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} = 2p \cdot \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2 + (x-\xi)^2}}{x-\xi} \right|. \quad (7.1.7)$$

S ohledem na geometrii dotykové oblasti válce a podložky je určitě  $b > \sqrt{(x-\xi)^2}$ , a proto můžeme v čitateli pod odmocninou výraz  $(x-\xi)^2$  zanedbat vůči  $b^2$ . Integrál (7.1.7) můžeme tedy vyjádřit ve tvaru

$$I = 2p \cdot \ln \frac{2b}{|x-\xi|}. \quad (7.1.8)$$

Pro celkovou deformaci v bodě  $(x,0)$  potom platí

$$w(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \int_{-a}^a p(\xi) \cdot \ln \frac{2b}{|x-\xi|} d\xi. \quad (7.1.9)$$

Tento vztah nyní použijeme pro výpočet tloušťky  $h(x,t)$  mazacího filmu (synoviální kapaliny) mezi pružným válce a tuhous podložkou. Platí

$$h(x,t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R} + w_2(x,t) + w_3(x,t), \quad (7.1.10)$$

kde  $w_i(x,t)$  ( $i=2,3$ ) je deformace dvou původních válců fyzikálního modelu a  $h_0$  je minimální vzdálenost dokonale tuhého válce od podložky. Pro výpočet deformací  $w_2(x,t)$  a  $w_3(x,t)$  použijeme vztah (7.1.9). Zřejmě dostaneme

$$w_2(x) = \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi E_2} \cdot \int_{-a}^a p(\xi, t) \cdot \ln \frac{2b}{|x-\xi|} d\xi, \quad (7.1.11)$$

$$w_3(x) = \frac{2(1-\nu_3^2)}{\pi E_3} \cdot \int_{-a}^a p(\xi, t) \cdot \ln \frac{2b}{|x-\xi|} d\xi. \quad (7.1.12)$$

Dosažením těchto vztahů do základní rovnice (7.1.10) získáváme vztah pro výpočet tloušťky  $h(x,t)$  mazacího filmu. Platí

$$h(x,t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R} + \frac{4}{\pi E} \cdot \int_{-a}^a p(\xi, t) \cdot \ln \frac{2b}{|x-\xi|} d\xi. \quad (7.1.13)$$

Zde  $E$  značí náhradní modul pružnosti definovaný vztahem

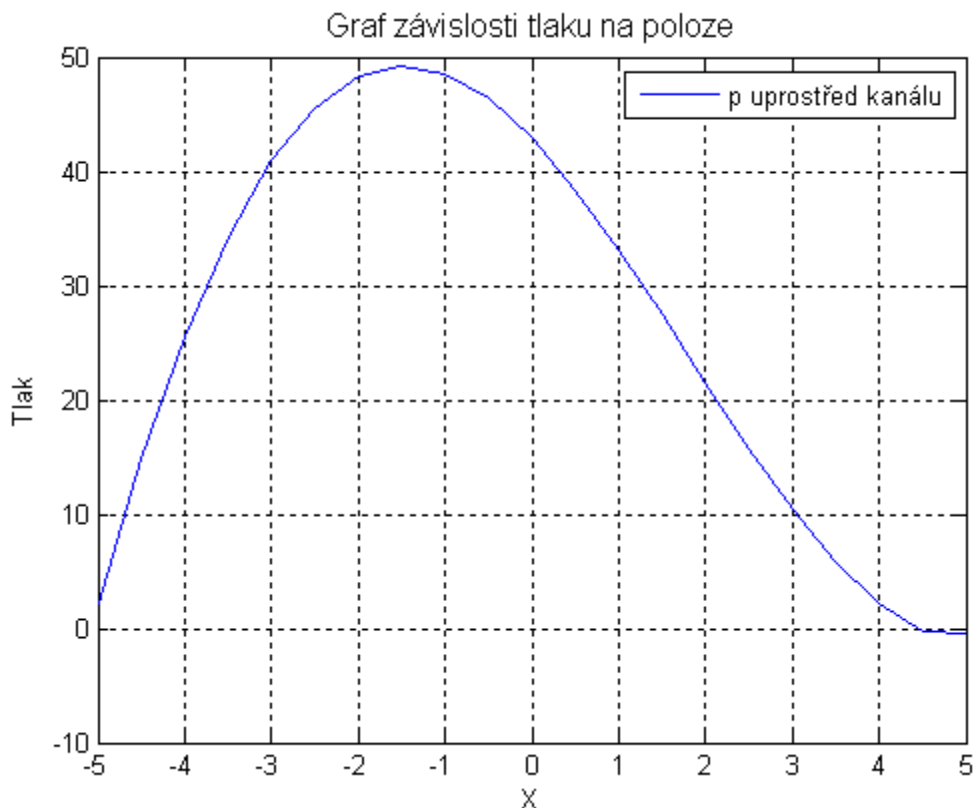
$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} + \frac{1 - \nu_3^2}{E_3} \right) \quad (7.1.14)$$

a pro náhradní poloměr válce  $R$  potom platí

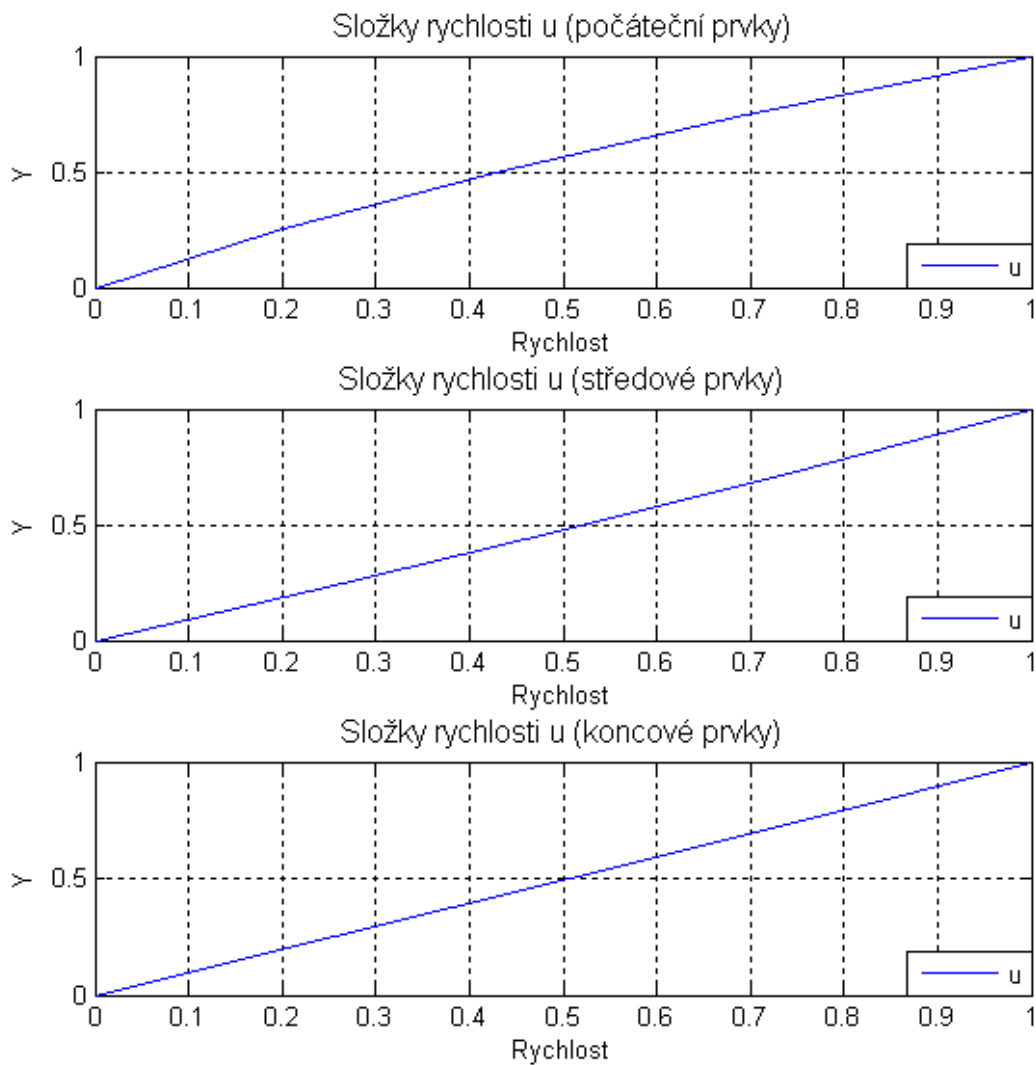
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (7.1.15)$$

## 7.2 Numerické výsledky modelu kolenního kloubu

Nyní uvedeme numerické výsledky kapitoly modelování kolenního kloubu. První úloha, kterou jsem řešil, je dotyk tuhého válce a tuhé podložky s uvažováním synoviální kapaliny s konstantní viskozitou. Úloha proudění přítomné kapaliny v rovinném modelu kolenního kloubu je definována odst. 4.1. Řešíme tedy stacionární laminární proudění vazké Newtonovy kapaliny s konstantní viskozitou. Základní vstupní parametry modelu jsou:  $h_0 = 1$ ,  $R = 100$ ,  $u_0 = 1$ ,  $Re = 0.02$ ,  $l = 10$ . Stejně jako v předchozích úlohách byl výpočet realizován v prostředí interpretu MATLAB (program `stacpr1tv` v příloženém CD). Výstupem této úlohy bude rozložení tlaku  $p$  ve střední úrovni modelu a dále rozložení rychlosti  $v$  ve třech místech (začátek, prostředek, konec). Při řešení rozložení tlaku  $p$  v kanálu modelu kolenního kloubu se uvažují podmínky  $P_{vst} = 0$ ,  $P_{vys} = 0$  a  $\frac{dp}{dx} = 0$  na výstupu z kanálu modelu. Výsledky jsou vyhodnoceny na obr. 7.2.1 a obr. 7.2.2 (bezrozměrné veličiny).



Obr. 7.2.1. Rozložení tlaku v kanálu



**Obr. 7.2.2.** Rychlostní profily v modelu kolenního kloubu (vstup, střed, výstup)

Z obr. 7.2.1 je zřejmé, že podmínka nulové derivace tlaku na výstupu kanálu je splněna a rychlostní profily na obr. 7.2.2 mají očekávaný průběh. Algoritmus hledání nulové derivace konvergoval poměrně rychle. Výpočet byl opět realizován v interpretu MATLAB (příslušný program stacpr1tv je uložen na příloženém CD).

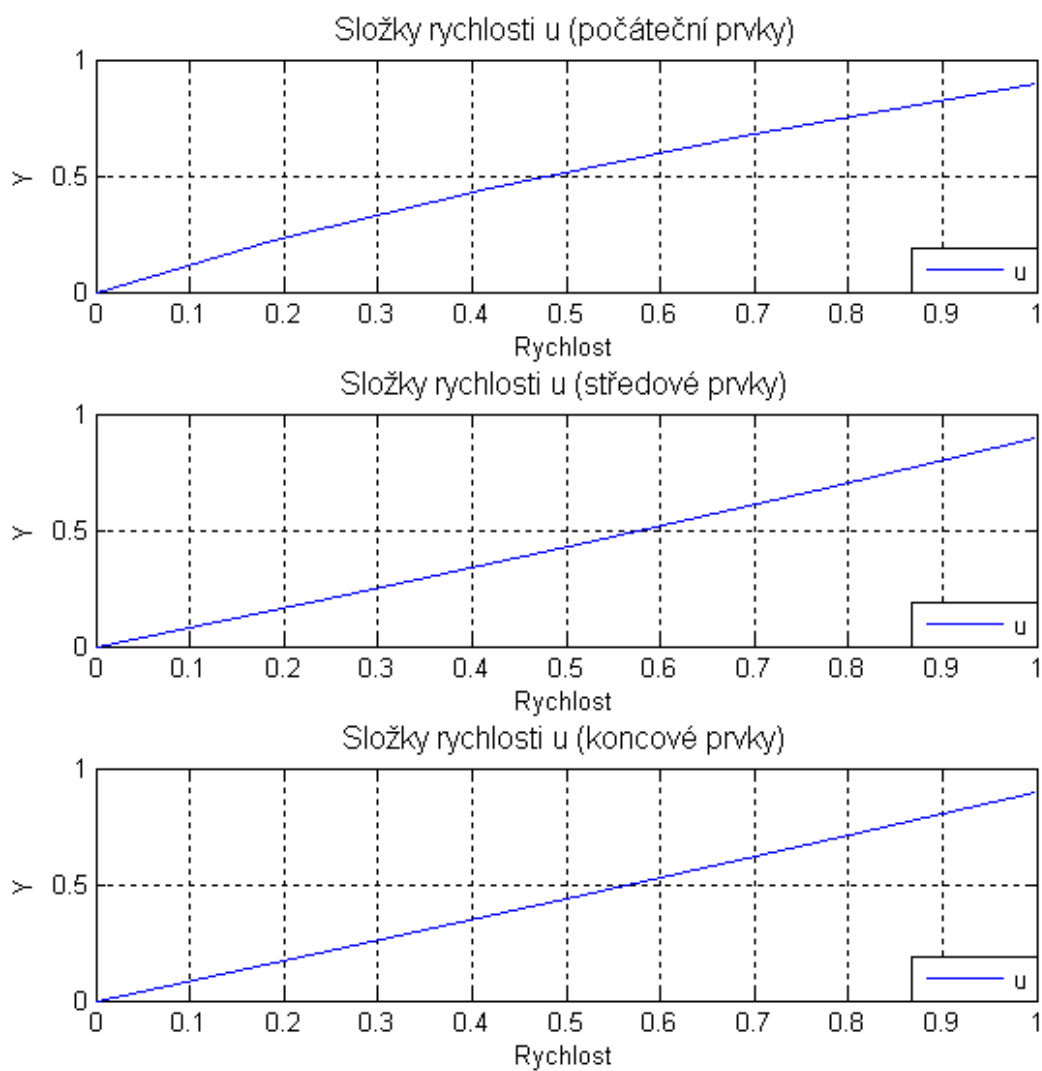


Ve druhé úloze se zaměříme na řešení modelové úlohy s uvažováním dotyku pružného válce a tuhé podložky za přítomnosti synoviální kapaliny. Úloha proudění přítomné kapaliny je opět definována kapitolou 4.1 v rovinném modelu kolenního kloubu. Vstupní parametry jsou:  $h_0 = 1$ ,  $R = 100$ ,  $u_0 = 0.9$ ,  $Re = 0.02$ ,  $l = 10$ . Stejně jako v předchozích úlohách byl výpočet realizován v prostředí interpretu MATLAB (program `stacpr1pv` v příloženém CD). Výstupem této úlohy bude opět rozložení tlaku  $p$  v kapalině (silový účinek na stěnu rotačního pružného válce) a dále rozložení rychlosti  $v$  ve třech místech (začátek, prostředek, konec). Při řešení rozložení tlaku  $p$  v modelu kolenního kloubu se uvažují podmínky

$P_{vst} = 0$ ,  $P_{vys} = 0$  a  $\frac{dp}{dx} = 0$  na výstupu z kanálu modelu. Výsledky jsou vyhodnoceny na obr. 7.2.3 a obr. 7.2.4.

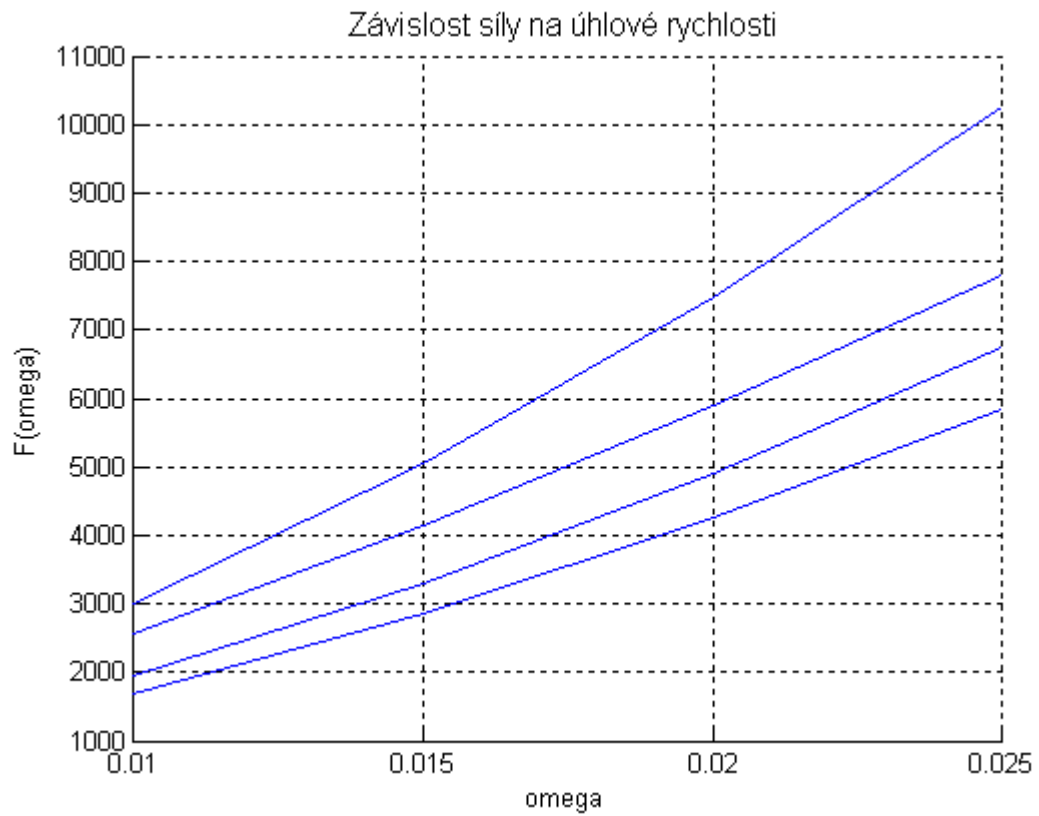


**Obr. 7.2.3.** Rozložení tlaku v kanálu

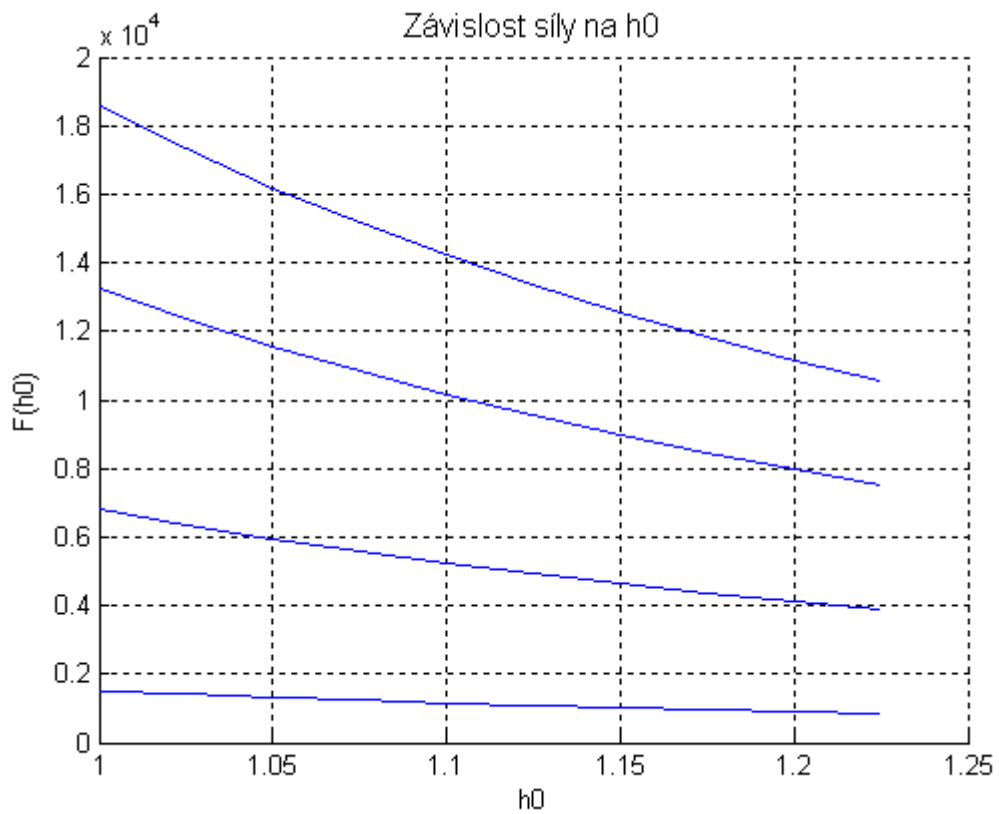


**Obr. 7.2.4.** Rychlostní profily v modelu kolenního kloubu (vstup, střed, výstup)

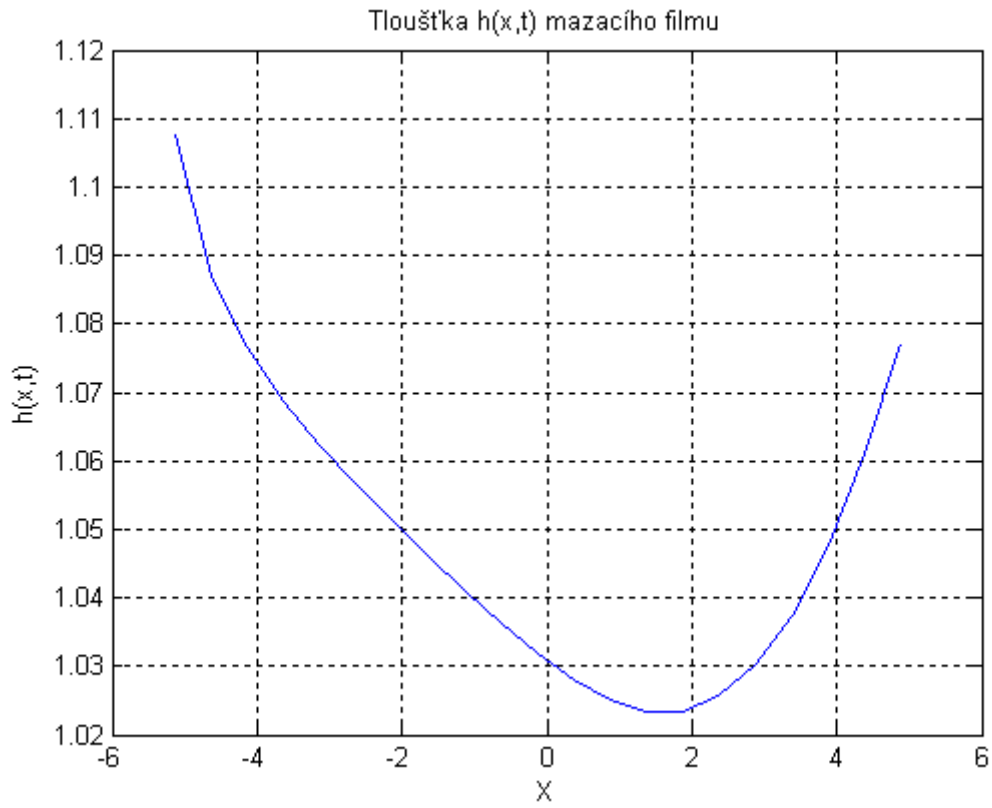
Z vypočtených hodnot tlaku  $p$  můžeme dále získat tloušťku  $h(x,t)$  mazacího filmu, dále závislost síly  $F$  přenášené kapalinou (zatížení kloubu) na úhlové rychlosti  $\omega$  a závislost této síly na vzdálenosti  $h_0$  (programy `stacpr1dv`, `stacpr2dv` a deformace v příloženém CD). Grafické výstupy těchto závislostí jsou zobrazeny na obr. 7.2.5, obr. 7.2.6 a obr. 7.2.7.



**Obr. 7.2.5.** Závislost síly na  $\omega$



**Obr. 7.2.6.** Závislost síly na  $h_0$



**Obr. 7.2.7.** Závislost tloušťky mazacího filmu na poloze

## 8. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit zjednodušený matematicko-fyzikální model intaktního kolenního kloubu pracujícího za přítomnosti maziva, synoviální kapaliny. V úvodu práce jsou shrnuty základní anatomické a fyziologické aspekty lidského kolenního kloubu. Pro dosažení cíle práce byly nejdříve obecně nadefinovány a po té řešeny základní úlohy proudění Newtonovy kapaliny v rovinném kanálu (pevné stěny a pohyblivá horní stěna kanálu). Úlohy hydromechaniky byly řešeny na třech různých úrovních. Jedním z cílů těchto numerických výpočtů bylo ukázat, že přidání konvektivního nelineárního členu do Navierovy-Stokesovy rovnice nemá (dle předpokladu) na výsledky uvažované úlohy hydromechaniky zásadní vliv. Verifikace dosažených výsledků numerického výpočtu byla provedena a ověřena analytickým řešením složky rychlosti  $u$  (rychlost ve směru souřadnicové osy  $x$ ) vybraných úloh proudění Newtonovy kapaliny v rovinném kanálu. Zcela jednoznačně byl např. potvrzen fakt, že konvektivní člen v Navierově-Stokesově rovnici u vodorovných rovinných kanálů nepřináší prakticky žádné zpřesnění výsledků. Dále bylo potvrzeno, že tlakový gradient napříč kanálem je prakticky nulový a že použité analytické řešení příslušné úlohy hydromechaniky má svoje reálné opodstatnění.

V závěru bakalářské práce byla potom řešena modelová úloha interakce kapaliny a pružného tělesa v aplikaci na řešení zjednodušeného fyzikálního modelu lidského kolenního kloubu. Tímto rovinným modelem je dotyk náhradního válce (reprezentuje geometrii kloubní štěrbinu vytvořené kondyly femuru a proximálním tvarem tibie) a tuhé podložky s uvažováním přítomnosti synoviální kapaliny. Model kolena je nejdříve řešen s uvažováním tuhého válce a potom je provedeno rozšíření úlohy interakce na vlastní problém s pružným válcem. Výstupem numerického řešení této modelové úlohy je rozložení tlaku  $p$  v synoviální kapalině, rozložení složky rychlosti  $u$  a dále u modelu s uvažováním pružného válce je dalším výstupem tvar deformovaného válce, tedy určení tloušťky synoviální kapaliny v modelu. Vyhodnocením těchto výsledků byla získána celková síla přenášená synoviální kapalinou pro jednotlivé geometrické a kinematické poměry modelu lidského kloubu. Vhodnou analýzou těchto výsledků bude zřejmě možno získat informace o tuhostních a tlumících charakteristikách dotyku válce s podložkou s uvažováním přítomnosti synoviální kapaliny, resp. obecně dotyku pružných válců s uvažováním přítomnosti maziva.

Další zpřesňování výsledků uvažovaného modelu lidského kolena lze vidět v rozšíření úlohy proudění na nestacionární problém. Dále bude určitě nutno zavést do modelu proudění model nenewtonské kapaliny, u kterého je dynamická viskozita  $\mu$  funkcí smykové rychlosti v kapalině [3]. Zde se pro první řešení nabízí např. zobecněná Newtonova kapalina s mocninovým zákonem funkce viskozity kapaliny [3], [8]. Další rozšíření modelu lze spatřit v přesnější geometrii a zpřesněné kinematice interagujících válců modelu kolenního kloubu. Zde by se daly využít např. rtg. či CT snímky kolena a vhodná vyhodnocovací metoda tohoto zobrazení včetně regrese zjištěných křivek či ploch. Samozřejmě se také nabízí otázka rozšíření řešené problematiky do 3D prostoru a využití výsledků modelování např. při konstrukci komplexního modelu dolní končetiny lidského těla.

## Literatura

- [1] Čihák R.: Anatomie 1, 2, 3. Druhé, přepracované a doplněné vydání. Grada Publishing, Praha 2008.
- [2] Bathe K. J.: Finite-Elemente-Methoden (Deutsche Übersetzung von P. Zimmermann). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1990.
- [3] Fung Y. C.: Biomechanics: motion, flow, stress and growth. Springer-Verlag, New York 1990.
- [4] Chung T. J.: Finite Elemente in der Strömungsmechanik. Carl Hanser Verlag, München 1983.
- [5] Kolář V. a kol.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. SNTL, Praha 1972.
- [6] Křen J.: Příspěvek k řešení vyšší kinematické dvojice. Vydavatelství VŠSSE, Plzeň 1983.
- [7] Křen J., Rosenberg J.: Mechanika kontinua. Vydavatelství ZČU, Plzeň 2002.
- [8] Křen J., Rosenberg J., Janíček P.: Biomechanika. Vydavatelství ZČU, Plzeň 2006.
- [9] Křen J., Hynčík L.: Modelling of non-Newtonian fluids. Mathematics and Computers in Simulation 2005, vol. 76, i. 1 - 3, pp. 116 - 123.
- [10] Lai W. M., Rubin D., Krempl E.: Introduction to Continuum Mechanics. Pergamon Press Ltd., Oxford 1993.
- [11] Trojan S. et al.: Lékařská fyziologie. Grada Publishing, Praha 1996.
- [12] Valenta J., Konvičková S., Valerián D.: Biomechanika kloubů člověka. Vydavatelství ČVUT, Praha 1999.
- [13] Véle F.: Kineziologie. Druhé, přepracované a doplněné vydání Vydavatelství Triton, Praha 2006.
- [14] Véle F.: Kineziologie pro klinickou praxi. Vydavatelství Grada Publishing, Praha 1997.