

Oponentský posudek disertační práce Mgr. Lukáše Honzika na tema

### **Počítačové metody eliminace kvantifikátorů v $\mathcal{R}$ a možnosti jejich využití**

S elementárními příklady na eliminaci kvantifikátorů se v rámci výuky matematiky setká zřejmě každý student střední školy. Odpověď na otázku, zda teorie reálně uzavřených těles připouští eliminaci kvantifikátorů zcela obecně, byla velkým a možno říci i fascinujícím výsledkem matematické logiky 20. století, dosaženým A. Tarskim. Předkládaná práce se ve stručnosti zmiňuje o širších a bohužel tragických historických souvislostech tohoto objevu, vzhledem z dalšímu zaměření práce však již nestuduje hlouběji metody matematické logiky, které byly použity. Lze zhruba říci, že byly využity starší poznatky o řešení algebraických rovnic v tělese reálných čísel včetně Sturmovy metody umožňující určit počet reálných kořenů polynomu na daném intervalu, jakož i podněty a výsledky ve své době nové (Artinovo řešení 17. Hilbertova problému, získané v r. 1927).

Původní Tarského postupy sice jednak dovolovaly rozhodnout o pravdivosti či nepravdivosti každé sentence (uplnost teorie), jednak zkonstruovat formuli ekvivalentní s původní kvantifikovanou formulí (rozhodnutelnost teorie), byly však naprosto nevyhovující z hlediska praktické realizace. Proto sám Tarski doporučoval opustit toto zkoumání. Zásadní zvrat nastal až s rozšířením výpočetní techniky a objevem metody cylindrické algebraické dekompozice.

Práce Mgr. Lukáše Honzika dobře ukazuje teoretické zázemí této metody. Lze říci, že v jednorozměrném případě ji užíváme ve školské matematice (metoda nulových bodů). To je v práci doloženo řadou příkladů. Rozšíření této metody do roviny (prostoru) je netriviální. Užívá se zde pokročilejších algebraických pojmů (rezultant, diskriminant polynomu). Autor obsáhle dokládá nahromaděnou výzkumnou práci, která vedla k podstatnému snížení výpočetní složitosti algoritmu. Tak se nakonec dospělo k počítačovým programům realizujícím eliminaci kvantifikátorů, jejichž užití autor dále detailně popisuje a studuje. Komerční program Mathematica pak dovoluje i následná využití CAD, např. při určení míry množiny, resp. při dokazování nerovností.

Předložená práce je dobrým průvodcem velkým dílem a velkým pokrokem, který byl realizován na hranici matematické logiky, matematiky a výpočetní techniky. Přesto je výpočetní složitost příslušných algoritmů stále poměrně velká, což činí metodu nedostupnou pro užití kupř. v úlohách technické praxe s velkým počtem proměnných. (Autor zřejmě i proto provedl jisté testováním časové náročnosti výpočtu pro třídu úloh blízkou školní praxi).

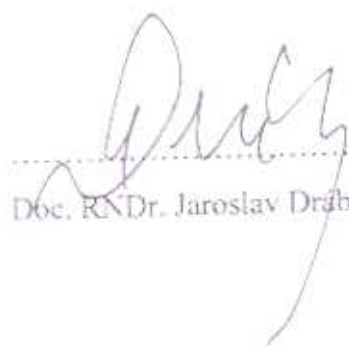
Metoda je ale již vhodná např. při dokazování těžkých vět třídy mezinárodní matematické olympiády, což je ostatně v práci přímo doloženo a má to i souvislost s prací doktoranda v rámci předmětů Metody řešení matematických úloh. Práce je napsána srozumitelně, zpracovává teoreticky i výpočetně obtížnou látku, ale autor mohl uplatnit přednosti, které mu poskytuje jeho aprobační kombinace. Větší pozornost by bylo možné věnovat korektnosti matematického vyjadřování, např.  $117_{10}$  nerovnosti vs nerovnice. Text je doplněn řadou obrázků, které usnadňují pochopení vykládaných postupů.

Práce bude obhajována rámci doktorského studijního programu Specializace v pedagogice, ve studijním oboru Informační a komunikační technologie ve vzdělávání, a proto v jejím rámci sotva může převládnout matematická logika či další matematické disciplíny. Přesto by bylo např. v rámci diskuse možné více rozvinout některé aspekty týkající se některých omezení, která jsou nepřekročitelná a vymezují možnosti užití výpočetní techniky v matematice i v negativním směru. Neměl by totiž vzniknout dojem, že s pomocí výpočetní techniky mohou matematici řešit „téměř vše“ – školskému prostředí by mohla být blízka kupř. problematika 10. Hilbertova problému a příp. též nerozhodnutelnosti Peanovy aritmetiky. Lze tedy říci, že práce má souvislost i s další disciplínou – filozofií matematiky.

Práce je vysoce aktuální, zabývá se problematikou, která byla z výpočetního a tedy i učitelského hlediska před cca dvaceti lety neaktuální a o níž není v širší komunitě zahrnující např. učitele matematiky na SŠ, uživatele výpočetní techniky atd. asi velká povědomost. Práce má pro tuto komunitu vysokou informační hodnotu a nepochybně splnila cíle, s nimiž byla zadána. Její formální, jazyková i grafická úroveň je velice dobrá. Text dokládá schopnost doktoranda k samostatné vědecké práci. Mgr. Honzík má i dostatečné množství publikací, resp. prací přijatých do tisku.

Práci doporučuji k obhajobě.

Ve Zbiroze dne 25. 2. 2013

  
Doc. RNDr. Jaroslav Drábek, CSc.

Mgr. Miroslav Honzík  
katedra pedagogické  
kultury výpočetní a didaktické  
techniky