

POSUDEK DIZERTAČNÍ PRÁCE

Název práce: Počítačové metody eliminace kvantifikátorů v R a možnosti jejich využití

Autor : Mgr. Lukáš Honzík

Posudek vypracoval: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc., Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Předkládaná práce Mgr. Lukáše Honzika mnohostranně zachycuje pozoruhodný pokrok, který se odehrál na pomezí matematické logiky, algebry a výpočetní techniky. Po úvodních kapitolách je důležitá kapitola třetí, v níž je obsažena ukázka Tarského původních postupů při eliminaci kvantifikátorů v tělese reálných čísel. Tarský se této otázce věnoval v několika vlnách daných životními okolnostmi zhruba od r. 1930 až do začátku padesátých let, kdy se v USA již začínalo něco tušit o prvních počítačích – těm se tehdy říkalo rozhodovací stroj, decision machine. Bohužel následné analýzy výpočetní složitosti jím navržených postupů vedly k závěru, že ta není omezena žádnou věží z exponentů tvaru 2^n , což ji činilo prakticky nepoužitelnou. (Zde je také zřejmý důvod, proč se o eliminaci kvantifikátorů v R mimo komunitu matematických logiků příliš nemluvilo.) Proto je předkládaná práce přínosná, neboť dnes již může sloužit k obeznámení se s danou problematikou pro mnohem širší skupinu uživatelů.

Práce dále velice podrobně dokládá, jak se v osmdesátých letech díky Collinsově metodě cylindrické algebraické dekompozice (CAD) a díky jejím následným vylepšením podařilo snížit výpočetní složitost na 2^n , kde n je počet proměnných. To je stále velmi nepříjemně a výpočetní složitost některých problémů zejména technické praxe může být tak vysoká, že se v rozumném čase nedočkáme výsledku.

Cílem předložené disertační práce (str. 8) „je pokusit se čtenáři srozumitelně předložit hlavní ideu metody cylindrické algebraické dekompozice, která může být v procesu eliminace kvantifikátorů používána, a též její automatizování pomocí matematického aparátu, tento výklad pak doplnit vhodnými ukázkovými příklady jednodušších i složitějších úloh a připravit tak soubor úloh na eliminaci kvantifikátorů použitelný jako metodický základ pro učitele“.

Autor ukazuje, že existuje relativně bohatá třída úloh školské matematiky, při jejichž řešení zejména v programovém balíku Mathematica je metoda CAD přínosná. (Kupříkladu pro širokou skupinu zájemců bude zřejmě cenné „strojové“ nacházení integračních mezí a tím i zvládnutí vícerozměrné integrace.)

Práce obsahuje některá drobná přehlednutí a nepřesnosti, které by možná mohly ztížit porozumění, kupř. v textu před příkladem 8.2 (str. 117) je asi špatně překopírován výsledek příkazu `CylindricalDecomposition` z programu Mathematica (vypadly odmocniny).

Na druhé straně velmi oceňuji právě zařazení příkladu 8.2. Ten byl zadán na soutěži družstev v rámci 6. středoevropské matematické olympiády v roce 2012. Práce ukazuje strojový důkaz počítačové věty („lidské“ řešení, které je v textu práce rovněž uvedeno, je nepochybně krajně obtížné nalézt). Tím se nijak nesnižuje důležitost matematické přípravy řešitelů, reprezentantů naší země, ale zároveň je patrna efektivita počítačového dokazování matematických vět (které ovšem není možné provést vždy a není všelékem, pro talentované studenty má nepochybně silnou motivační složku).

To, že práce ukazuje i „vedlejší efekty“ algoritmu pro CAD v programu Mathematica, považuji za velmi přínosné. Autor rovněž prostudoval možnosti programu QI-PCAD, pracujícího pod operačním systémem Linux. Pomínil jen dnes již spíše historický software Reduce a jeho balíček Redlog, asi i z finančních důvodů. To je srozumitelné, jako oponent však velmi oceňuji to, že v předkládané práci je alespoň částečně studováno i užití metody regulárních řetězců (*regular chains*) v programu Maple. Zde jde o „balíček“, který byl do programu Maple zařazen teprve nedávno a fakt, že realizuje CAD, je spíše vedlejší efekt, jde o nástroj určený primárně pro práci v oblasti teorie idealů. Nicméně podle vědomostí oponenta ještě ani v češtině neexistují texty o této skupině povelů. Bylo by zřejmě velice vhodné pokusit se v některé z dalších prací zmapovat možnosti tohoto software při strojovém dokazování geometrických vět.

Pozitivně rovněž hodnotím zařazení oddílu o životě A. Tarského, ze kterého si lze doplnit obrázek např. o příčinách, které ho vedly k jakoby laxnímu publikování svých výsledků. Byly to tragické důvody osobní a též celoevropské (kupř. jedna jeho důležitá práce již nevyšla vzhledem k obsazení Francie německou armádou). Pozoruhodné jsou též aktivity v USA po druhé světové válce, projekt RAND atd.

Dotaz pro obhajobu: Je veškeru pochopitelné, že soubor vět strojově dokazovaných s využitím cylindrické algebraické dekompozice a zastoupených v práci nemůže být příliš široký, přednost byla dána počítačovým technikám dokazování, otázkám výpočetní složitosti, dostupnosti pro úlohy školské matematiky atd. Nicméně

- Do jaké míry mohou být dokazovány věty školské geometrie, resp. zda by šlo uvést nějakou (pozitivní či negativní) ukázkou?
- Narazil autor rovněž na problém, jehož doba výpočtu byla příliš velká, takže bylo nutné sáhnout k ukončení výpočtu?

Hodnocení:

Předložená práce zpracovává aktuální téma, neboť se všeobecným rozšířením výpočetní techniky a objevem metody cylindrické algebraické dekompozice je nyní studována problematika s pomocí vhodných počítačových programů dostupná širší komunitě vyučujících na SŠ, řešitelů úloh MO atd. Pro tuto komunitu má práce Mgr. L. Honzika vysokou informační hodnotu.

Použité metody didaktické transformace problému cylindrické algebraické dekompozice jsou přiměřené tématu.

Domnívám se, že práce splnila cíle, se kterými byla zadána.

Výsledky a konkrétní přínos práce spočívají v didaktickém zpracování poměrně obtížného problému eliminace kvantifikátorů do úrovně středoškolské informatiky a matematiky. Text se rovněž dotýká dalšího dnes velmi aktuálního tématu, kterým je počítačové dokazování matematických vět.

Práce je napsána systematicky, přehledně a má pěknou grafickou i jazykovou úpravu.

Autor má dostatečné množství publikací buď již přímo výtisků, nebo přijatých do tisku.

Práci doporučuji k obhajobě.

V Českých Budějovicích dne 22. února 2013


prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.