

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

DISERTAČNÍ PRÁCE

PLZEŇ, 2013

Ing. Jiří AJGL

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Fúze hustot pravděpodobnosti
v odhadu stavu stochastických systémů

Ing. Jiří AJGL

disertační práce
k získání akademického titulu doktor
v oboru Kybernetika

Školitel: Prof. Ing. Miroslav Šimandl, CSc.
Katedra: Katedra kybernetiky

Plzeň 2013

University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences

Fusion of probability densities
in stochastic system state estimation

Ing. Jiří AJGL

A dissertation submitted in partial
fulfilment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy in Cybernetics

Advisor: Prof. Ing. Miroslav Šimandl, CSc.
Department: Department of Cybernetics

Pilsen 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou disertační práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je součástí disertační práce.

V Plzni dne 28. února 2013

.....

Poděkování

Děkuji svému školiteli Prof. Ing. Miroslavu Šimandlovi, CSc. za cenné rady a připomínky při tvorbě odborných prací. Jemu a dalším kolegům děkuji za podněty během studia a za pomoc s administrativou. Jim všem a všem ostatním děkuji za čas strávený mimo akademickou půdu. V neposlední řadě děkuji svým rodičům za trpělivost a poskytnutí celkového zázemí při studiu.

Disertační práce vznikla za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy, projekt číslo 1M0572, Grantové agentury České republiky, projekty číslo 102/08/0442 a P103/11/1353, a Grantové agentury Západočeské univerzity.

Anotace

Disertační práce se zabývá odhadem stavu stochastických systémů a informační fúzí. Je předpokládáno, že senzory poskytující data jsou uspořádány do skupin vybavených příslušným lokálním estimátorem. Smyslem fúze je sloučit informace poskytované lokálními estimátory. Lokální estimátory nemají znalosti o celé řešené úloze, zejména jim není známa hustota pravděpodobnosti vyjadřující společnou informaci příslušnou více lokálním hustotám. Náplní disertační práce je slučování informací ve formě hustot pravděpodobnosti.

Primárním cílem disertační práce je navrhnout realizaci fúze hustot pravděpodobnosti ve vybrané neparametrické reprezentaci, jmenovitě v částicové reprezentaci. Kromě základní úlohy odhadu je uvažována i úloha odhadování s omezením, čili úloha využívající informaci z nemodelovaného kontextu.

Sekundárním cílem je zobecnit definici konzervativních bodových odhadů a navrženou definici analyzovat. Tento cíl rovněž zahrnuje zobecnění příslušných pravidel fúze.

Práce je uvedena obecným pojednáním o informační fúzi, následující kapitola představuje základy úlohy odhadu stavu dynamických stochastických systémů, včetně odhadování pomocí více estimátorů. Po diskuzi současného stavu řešení úlohy fúze hustot pravděpodobnosti jsou stanoveny cíle práce. Primární cíl je dosažen návrhem částic, které důsledně reprezentují odpovídající marginální hustoty pravděpodobnosti a které sdílejí stejné vzorky. Sekundární cíl je dosažen využitím základních informačních měř a přímým odvozením z navržené definice. Získané teoretické výsledky jsou ilustrovány na numerických příkladech.

Annotation

The thesis deals with the state estimation of stochastic systems and with the information fusion. It is supposed that data are provided by sensors that are grouped together into sensor nodes and that the sensor nodes are equipped with their own local estimators. The purpose of the fusion is to merge the pieces of information that are provided by the local estimators. The local estimators do not have complete knowledge of the estimation problem and no probability density function representing the common information corresponding to more local densities is known to them. The goal of the thesis is the merging of the pieces of information in the form of probability density functions.

The primary goal of the thesis is to design the fusion of probability density functions in the chosen nonparametric representation, namely in the particle representation. Besides the basic estimation problem, the constrained estimation problem is also considered, that is the problem of exploiting the information arising from an unmodelled problem context.

The secondary goal is to generalise the definition of conservative point estimates and to analyse the proposed definition. This goal also includes a generalisation of the corresponding fusion rules.

A general discourse on the information fusion starts the thesis, the following chapter presents the basics of the dynamic stochastic system state estimation problem, including the multisensor estimation. After the discussion of the current state of the art of the probability density fusion problem, the goals of the thesis are determined. The primary goal is fulfilled by designing such particles that thoroughly represent the corresponding marginal probability densities and that share the same samples. The secondary goal is fulfilled by using elementary information measures and by a direct derivation from the proposed definition. The achieved theoretical results are illustrated by numerical examples.

Obsah

1 Úvod	1
1.1 Fúze na obecné úrovni abstrakce	1
1.2 Informační fúze	2
1.3 Členění práce	4
2 Informační fúze v úlohách odhadu	5
2.1 Úloha odhadu stavu	5
2.1.1 Bodové filtry	6
2.1.2 Globální filtry	7
2.1.3 Omezení v úloze odhadu	11
2.2 Odhad stavu pomocí více estimátorů	12
2.2.1 Distribuované odhadování	13
2.2.2 Decentralizované odhadování	15
2.2.3 Vážení bodových odhadů	19
2.3 Konzervativní fúze	21
2.3.1 Sjednocení kovariancí	22
2.3.2 Průnik kovariancí	23
2.3.3 Konzervativní fúze hustot pravděpodobnosti	24
2.4 Shrnutí	26
3 Cíle práce	27
4 Fúze a částicové filtry	29
4.1 Odhadování s omezením	29
4.1.1 Interpretace průmětu a oříznutí hustot	29
4.1.2 Architektura fúze v úlohách s omezením	31
4.1.3 Omezení rovností a unscntovaná transformace	32
4.1.4 Omezení rovností a částicové filtry	34
4.1.5 Příklad	37
4.1.6 Shrnutí	38
4.2 Marginální částicové filtry	40
4.2.1 Marginální filtr	40
4.2.2 Marginalizovaný filtr	41
4.2.3 Marginální marginalizovaný filtr	42
4.2.4 Příklad	50
4.2.5 Shrnutí	52
4.3 Fúze hustot pravděpodobnosti	54

4.3.1	Kvaziaritmetické průměry	54
4.3.2	Aritmetický a geometrický průměr hustot	56
4.3.3	Fúze částic	58
4.3.4	Příklad – vzorkovací hustota	61
4.3.5	Fúze marginalizovaných částic	64
4.3.6	Fúze částic v úlohách s omezením	66
4.3.7	Příklad – omezení	69
4.3.8	Shrnutí	72
5	Zobecnění konzervativnosti	74
5.1	Návrh definice konzervativní hustoty	74
5.1.1	Definice konzervativní hustoty	76
5.1.2	Postačující podmínka	78
5.1.3	Vícerozměrné Gaussovy hustoty	79
5.1.4	Zobecnění navržené definice	80
5.1.5	Příklad – diskrétní náhodná veličina	82
5.1.6	Příklad – Gaussovy směsi	84
5.2	Zobecnění metody sjednocení kovariancí	87
5.2.1	Formulace úlohy	88
5.2.2	Odvození obecného řešení	88
5.2.3	Řešení pro disjunktční definiční obory	90
5.2.4	Příklad – diskrétní náhodná veličina	92
5.2.5	Příklad – Gaussovy hustoty	94
5.3	Konzervativnost estimátorů	95
5.3.1	Konzervativnost průniku kovariancí	97
5.4	Shrnutí	99
6	Závěr	101
6.1	Výsledky práce	101
6.2	Otevřené otázky	103

Kapitola 1

Úvod

Tato práce se zabývá speciálním případem informační fúze, jmenovitě fúzí hustot pravděpodobnosti v různých úlohách odhadu stavu stochastických systémů. Uvažovány jsou stochastické dynamické systémy, kde hustoty pravděpodobnosti jsou poskytovány více estimátory, které pracují s lokálně dostupnými měřeními. V této kapitole je proveden širší pohled na fúzi. Dále jsou představeny základní přístupy k fúzi informací. Důraz je kladen na situace, kdy není k dispozici úplná informace, případně kdy je možno využít kontextu, ve kterém je úloha odhadu řešena. Na závěr kapitoly je proveden přehled zbývajících kapitol disertační práce.

1.1 Fúze na obecné úrovni abstrakce

Informační fúzi lze chápat jako proces slučování informací. Smysl slova informace je však poněkud neznámý, neurčitý, nepřesný, náhodný, což je pro informaci samotnou dosti příznačné. Přiblížení pojmu informace plyne z členění významu přiřazovaného nějaké skutečnosti. Na nejnižší úrovni abstrakce stojí data. Zpracování dat vytváří informaci, vyšší úroveň abstrakce. Informace dává datům smysl, interpretaci. Obdobně zpracování informace poskytuje poznatky, vědění.

Ošidnost uvedeného členění spočívá v úhlu pohledu. Při hierarchickém zpracovávání se z informací jedné vrstvy stávají stavební kameny vyšší vrstvy, čímž lze oprávněně informace považovat za data. Fúze dat, fúze informací či fúze znalostí tak nutně závisí na použité úrovni abstrakce. Chápání fúze jako celku, kde proces slučování může probíhat nejen na všech úrovních, ale i napříč jednotlivými úrovněmi, má své opodstatnění. Sloučení dvou čísel, funkcí, objektů, interpretací i jejich vzájemných kombinací vede ke kvantitativně či kvalitativně lepším výsledkům. Přitom tento celek nemusí být omezen pouze na neživé algoritmy. Fúze informací prováděná počítači neslouží k vyplnění času, ale k vykonání nějakého cíle. I živé organismy, a zejména člověk, slučují informace. Navíc oplývají schopností fúze na vyšších úrovních abstrakce. Proto systém informační fúze zahrnuje i lidský faktor. Informační fúze není cílem, ale nástrojem.

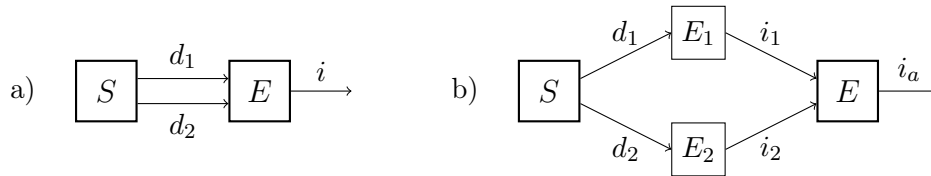
Formalizace fúze nutně odráží výše uvedené úrovně abstrakce. Povahy fúze coby nástroje ovlivňuje její další upotřebení. Po zpracování jednotlivých vstupů, ať už náležejí kterékoliv úrovni, dochází k rozhodnutí o dalších činnostech. Protože uskutečnění vybraného rozhodnutí zpravidla ovlivní kvalitu budoucích vstupů, může být toto rozhodnutí zahrnuto do ohodnocení kvality informační fúze. Celkový náhled na fúzi lze nalézt na-

příklad v [55, 33, 58]. Současný vývoj směřuje od nižších úrovní abstrakce k úrovním vyšším [24]. Od takzvaně tvrdých dat, které nesou jednoznačný význam, k datům měkkým. Jako ukázkou stačí uvést vývoj Internetu. Všude se vyskytuje nepřehledně dat, ale nalézt jejich interpretace, informace v nich obsažené, představuje umění.

1.2 Informační fúze

Vyšší úrovně abstrakce sice nejsou předmětem této práce, ale fúze sdílí jisté zásady na všech úrovních. Bez ztráty obecnosti se lze omezit na fúzi informací. K získání náhledu poslouží následující jednoduchý příklad.

Obrázek 1.1 znázorňuje dva způsoby zpracování měřených dat d_1, d_2 , která pocházejí ze systému S . Estimátor E v prvním případě zpracovává data přímo, výsledkem je informace i . V druhém případě jsou data zpracovávána nejprve v lokálních estimátorech E_1 a E_2 . Estimátor E pak zpracovává informace i_1 a i_2 , výstupem je informace i_a . V důsledku omezení struktury zpracování dat ve druhém případě vyvstává otázka, zdali je možné získat stejnou informaci jako v prvním případě, čili zda může nastat $i_a = i$.



Obrázek 1.1: Schéma zpracování dat. a) přímé zpracování dat b) slučování informací.

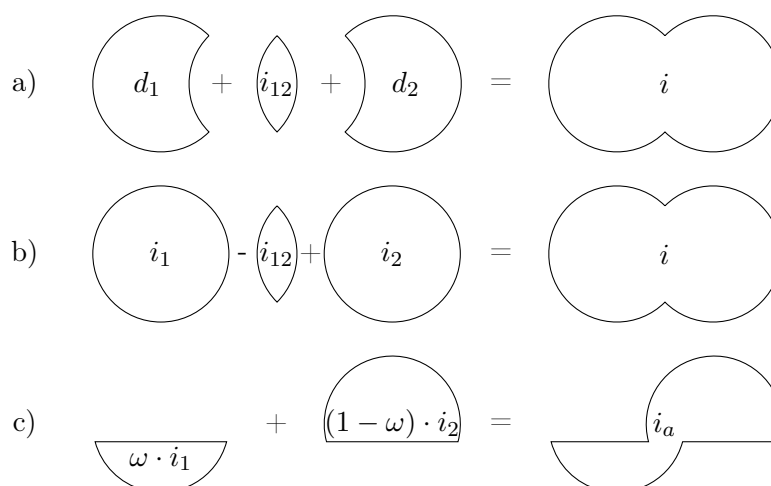
Odpověď na vyřčenou otázku zní ano, lze získat stejnou informaci, ale jen ve zvláštních případech, kdy je estimátoru E známa společná informace i_{12} , která může být popsána jako průnik informací i_1 a i_2 . V obecném případě však odpověď zní ne, bez znalosti společné informace i_{12} nelze získat i . Pak je třeba hledat vhodnou aproximaci splňující dodatečné požadavky. Přírozeným požadavkem může být nepřecenění informace.

Obrázek 1.2 zachycuje níže uvedené členění informační fúze.

Slučování nezávislých informací/dat Za předpokladu nezávislosti lze informace/data bez problémů slučovat. V případě přímého zpracování dat je výsledná informace dána součtem informací nesených nezávislými daty d_1, d_2 a informací i_{12} , která je již obsažena v estimátoru E .

Odečítání společné informace Jsou-li informace i_1, i_2 závislé, tedy je-li společná informace i_{12} nenulová, vede sečtení informací k dvojnásobnému započtení společné informace i_{12} . Je-li tato společná informace známa, stačí ji od jednotlivých informací odečíst. Tím je problém převeden na předcházející případ.

Respektování neznámé společné informace V případě, kdy závislost informací i_1, i_2 není známa, je vhodné případnou závislost respektovat. Jinak je společná informace i_{12} započtena dvakrát, a tím přeceněna informace i , která by byla obdržena využitím znalosti i_{12} . Respektování lze provést zvážením informace i_1 pomocí váhy ω a přičtením informace i_2 vážené doplňkem váhy do jedničky, t.j. váhou $(1 - \omega)$. Výsledná aproximace i_a není rovna kýžené informaci i , ale hlavní požadavek na nepřecenění splňuje.



Obrázek 1.2: Fúze informací. a) slučování nezávislých informací/dat b) odečítání společné informace c) respektování neznámé společné informace.

Další důležitou stránku fúze tvoří převedení hodnot do společných souřadnic. Lokální estimátory E_1 , E_2 mohou používat lokální čas, v případě odhadu polohy nějakého objektu mohou například používat lokální polární souřadnice, poskytované odhady mohou být zatíženy různými systematickými chybami. Pro porovnávání dvou fotografií, například z viditelného a infračerveného světla, je nutné fotit z jednoho místa se stejnou ohniskovou vzdáleností. Na vyšších úrovních abstrakce lze uvést rozdílné označení jedné věci či zcela jiný jazyk. Bez převedení do společných souřadnic, bez použití stejných symbolů, stejného jazyka nelze fúzi uskutečnit.

Neméně důležité hledisko souvisí se stupněm zjednodušení řešeného problému. Uzavřené problémy, kde teorie dobře popisuje všechny jevy, kde data přísluší určitým objektům, kde složitost úlohy nepřekračuje únosné meze, nepotřebují vysoké úrovně abstrakce. Reálné prostředí je však různorodější než výrobní linka v průmyslovém závodě. Jízda autem vyžaduje nejen sledování směru silnice, ale i její kvality, překážek, ostatních vozidel, chodců, předvídání budoucího vývoje. Data o vzdálenosti objektu jsou sama o sobě neúplná. Je objekt překážka? Je to vozidlo? Které? Smysluplná fúze tedy potřebuje nejen stejné souřadnice. Potřebuje přiřazení dat k objektům, potřebuje vysokou míru abstrakce, a tudíž i značný stupeň inteligence.

Neznalost společné části informace, nepřesnost převodu do společných souřadnic i případné chybné přiřazení dat k objektu ničí kvalitu fúze. Potřebu výzkumu metod respektujících tyto nedostatky není třeba příliš zdůrazňovat.

K provázání nižší a vyšší úrovně abstrakce dochází například při kontextovém zpracování informací/dat. Vyšší úroveň omezuje stupně volnosti nižší úrovně. Přiřazení objektu k třídě objektů může vyvrátit hypotézu o příslušnosti dat k danému objektu. Roztřídění určuje model objektu a možné metody fúze. Využití kontextu snižuje neurčitost. Záocenská loď se hodinu po vyplutí z přístavu může pohybovat v určité oblasti, ale hledat ji na vrcholu tisícimetrové hory nemá smysl. Fúze s využitím omezení daného kontextem představuje neopomenutelnou cestu budoucího vývoje.

1.3 Členění práce

Po této úvodní kapitole, která stručně nastínila problémy řešené v rámci informační fúze, následuje v kapitole 2 představení úloh odhadu stavu stochastických dynamických systémů. Pro odhad prováděný prostřednictvím více estimátorů je proveden přehled přístupů k fúzi bodových odhadů a diskutován současný stav řešení fúze hustot pravděpodobnosti, přičemž důraz je kladen na konzervativní fúzi. V kapitole 3 jsou následně vytyčeny cíle této práce. Kapitola 4 sleduje fúzi hustot pravděpodobnosti zejména z pohledu provedení fúze ve vybrané neparametrické reprezentaci hustot pomocí částic. Kapitola 5 rozvíjí myšlenky konzervativnosti bodových odhadů a zavádí konzervativnost pro hustoty pravděpodobnosti. Shrnutí práce je provedeno v závěrečné Kapitole 6.

Kapitola 2

Informační fúze v úlohách odhadu

Tato kapitola se zabývá informační fúzí v úlohách odhadu stavu dynamického stochastického systému. Informaci představuje odhad stavu systému, který může být dán ve formě hustoty pravděpodobnosti nebo jako bodový odhad. Kapitola 2.1 uvádí základní přístupy k odhadu stavu pomocí jednoho estimátoru. Kromě bodových a globálních filtrů vytyčuje úlohu s omezením stavu. Navazující kapitola 2.2 rozvíjí úlohu odhadu stavu pro více estimátorů. Způsob předávání a zpracování informací člení tuto úlohu zásadním způsobem. Konzervativní fúze odhadů je vzhledem ke svému významu rozvedena v samostatné kapitole 2.3.

2.1 Úloha odhadu stavu

Stav systému je minimální soubor veličin nutných pro jednoznačné určení budoucího vývoje systému (pro řízený subsystém, což není případ uvažovaný v této práci, je třeba znát i budoucí řízení). Na základě stavu jsou prováděna rozhodnutí, případně je dále prováděno řízení daného subsystému. Stav slouží jako vstup pro úlohy na vyšší úrovni abstrakce. Proto hraje odhadování stavu důležitou roli, vytváří jeden z prvních článků procesu zpracování dat. K získání přehledu metod odhadu lze doporučit například [79]. Užší zaměření na úlohy navigace a sledování cílů poskytují například [9, 12].

Tato práce se zaměřuje na systémy diskrétní v čase a spojitě v úrovni. Diskrétní čas je indexován pomocí k , stav systému v čase k je označován \mathbf{x}_k a má dimenzi n_x , měření v čase k je označováno \mathbf{z}_k a má dimenzi n_z . Často využívaným speciálním případem systému je lineární systém s Gaussovými šумы, který je dán rovnicemi

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2.1b)$$

kde \mathbf{F}_k , \mathbf{G}_k a \mathbf{H}_k jsou matice příslušných rozměrů, stavový šum \mathbf{w}_k a šum měření \mathbf{v}_k jsou vzájemně nezávislé bílé šумы nezávislé na počátečním stavu \mathbf{x}_0 . Hustoty pravděpodobnosti počátečního stavu a šumů jsou Gaussovy, jejich parametry jsou vektory středních hodnot, které budou dále označovány jako střední vektory, a kovarianční matice. Střední vektory šumů jsou uvažovány jako nulové. Je tedy dán následující popis,

$$\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k), \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k). \quad (2.1c)$$

Cílem estimátoru je vypočtení odhadu stavu na základě měřených dat. Soubor měření $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ bude značen \mathcal{Z}_k . Tato práce vystačí se dvěma základními úlohami odhadu stavu, kterými jsou úloha filtrace a úloha jednokrokové predikce. V úloze filtrace se na základě měření \mathcal{Z}_k odhaduje stav \mathbf{x}_k , v úloze jednokrokové predikce se odhaduje následný stav \mathbf{x}_{k+1} .

Důvodem používání lineárních gaussovských systémů je existence analytického řešení odhadu stavu, přičemž počet parametrů reprezentujících odhad stavu je konstantní. Odhady jsou dány středními vektory stavu a kovariančními maticemi chyb odhadů. Odhadům pro lineární gaussovské systémy se věnuje kapitola 2.1.1. Lineární gaussovské systémy mohou být rovněž použity k aproximaci nelineárních systémů daných vztahy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{w}_k, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2.2b)$$

kde \mathbf{f}_k , \mathbf{g}_k a \mathbf{h}_k jsou známé vektorové funkce.

Obecně je možné dynamický stochastický systém popsat hustotami pravděpodobnosti, a to hustotami přechodu stavu, hustotou počátečního stavu a podmíněnou hustotou měření. Tyto hustoty budou popořadě značeny

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k), p(\mathbf{x}_0), \quad (2.3a)$$

$$p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k). \quad (2.3b)$$

Filtrační odhad stavu je dán hustotou pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k)$, prediktivní odhad stavu je dán hustotou $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_k)$. Úloha nalezení těchto hustot nemusí mít řešení v dostatečně jednoduchém tvaru. Východiskem může být provedení analytických aproximací, či použití numerických nebo simulačních metod. Filtry poskytujícími hustoty pravděpodobnosti se zabývá kapitola 2.1.2.

Rozšířením úlohy odhadu stavu je úloha odhadu stavu při znalosti omezení stavu. Toto rozšíření vychází z myšlenky, že rovnice systému (2.1), případně hustoty (2.3), jsou pouze aproximací skutečnosti, že jsou pouze modelem systému. Druhou složkou úlohy je znalost hodnot, kterých stav nemůže nabývat. Z podstaty problému plyne, že takovým hodnotám musí být vždy přiřazena nulová hustota pravděpodobnosti. Protože však použitý model přesně neodráží skutečnost, některým nenabyvatelným hodnotám stavu přiřazuje nenulovou hustotu pravděpodobnosti. Zacházení s tímto rozparem se věnuje kapitola 2.1.3.

2.1.1 Bodové filtry

Filtrační i prediktivní hustota pravděpodobnosti je v případě lineárního gaussovského systému Gaussova. Gaussovy hustoty pravděpodobnosti mohou být parametrizovány pomocí středního vektoru a kovarianční matice. Předností této reprezentace je její interpretace. Střední vektor lze chápat jako odhad podle minimální střední kvadratické chyby, kovarianční matice udává chybu odhadu. Filtrační střední vektor je značen $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, filtrační kovarianční matice $\mathbf{P}_{k|k}$. Prediktivní odhad je označen analogicky, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, $\mathbf{P}_{k+1|k}$. Kvůli zjednodušení zápisu je dále použito následující označení počátečních hodnot, $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_0$, $\mathbf{P}_{0|-1} \triangleq \mathbf{P}_0$.

Odhad stavu je dán rekurzivními rovnicemi Kalmanova filtru [79, 9]. Filtrační rovnice mají tvar

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (I_{n_x} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (I_{n_x} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T, \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}, \quad (2.4c)$$

kde I_{n_x} je jednotková matice řádu n_x , \mathbf{K}_k je Kalmanův zisk a výraz $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$ se nazývá inovace. Slovy lze rovnice popsat tak, že prediktivní odhad stavu \mathbf{x}_k je opraven přičtením zváženého rozdílu měření a očekávaného měření, (2.4a). Kovariance chyby odhadu je dána váženým součtem prediktivní kovariance a kovariance chyby měření, (2.4b). Rovnice (2.4a), (2.4b) platí pro jakoukoliv volbu zisku \mathbf{K}_k , pro volbu (2.4c) je výsledný lineární odhad optimální podle střední kvadratické chyby. Vztahy (2.4) udávají analytické řešení pro systém (2.1), interpretace vztahů jako optimálního lineárního odhadu je vhodná při rozšíření na nelineární systém.

Prediktivní rovnice Kalmanova filtru jsou dány vztahy

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T. \quad (2.5b)$$

Popsáno slovy, na střední vektor je použita deterministická část rovnice dynamiky (2.1a), kovariance je dána váženým součtem filtrační kovariance a kovariance stavového šumu.

Formálně stejné rovnice jsou základem mnoha filtrů. Rozšířený Kalmanův filtr se používá pro nelineární systémy. Matice \mathbf{F}_k , \mathbf{G}_k a \mathbf{H}_k použité v estimátoru jsou v tomto případě závislé na odhadech stavu a získají se linearizací příslušných nelineárních funkcí (2.2) v odhadech, tedy $\mathbf{F}_k \triangleq \mathbf{F}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_k} |_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}}$, $\mathbf{G}_k \triangleq \mathbf{G}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{x}_k} |_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}}$, $\mathbf{H}_k \triangleq \mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) = \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{x}_k} |_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$. Podobné vztahy lze vypočítat i v unscenovaném filtru [45], který nepoužívá linearizaci v bodě, ale používá statistickou linearizaci. V okolí odhadu jsou deterministicky navrženy body, na které se použije deterministická část dynamiky. Z výsledných bodů se vypočte nový odhad a kovariance chyby odhadu.

Z hlediska fúze odhadů je výhodné přepsat rovnice (2.4a), (2.4b) do následujícího tvaru [79, 9, 57],

$$\mathbf{P}_{k|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{z}_k, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{-1} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k. \quad (2.6b)$$

Při přechodu k takzvaným informačním proměnným lze filtrační rovnice (2.6) interpretovat jako součet informací. Informační matice $\mathbf{Y}_{k|k-1}$, $\mathbf{Y}_{k|k}$ jsou definovány jako inverze kovariančních matic, $\mathbf{Y}_{k|k-1} \triangleq \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}$, $\mathbf{Y}_{k|k} \triangleq \mathbf{P}_{k|k}^{-1}$, informační vektory $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$, $\hat{\mathbf{y}}_{k|k}$ jako součin informačních matic a odhadů, $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \triangleq \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\hat{\mathbf{y}}_{k|k} \triangleq \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$. Informační matice měření je definována $\mathbf{I}_k \triangleq \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$, informační příspěvek od měření je dán $\mathbf{i}_k \triangleq \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{z}_k$.

2.1.2 Globální filtry

Výstupem globálních filtrů je aproximace podmíněných hustot pravděpodobnosti stavu. Na rozdíl od bodových filtrů nepoužívají pouze vybrané charakteristiky/aproximace

charakteristik hustot, jako jsou například výše zmíněný střední vektor a kovarianční matice. Globální filtry se vyznačují volitelným stupněm přesnosti aproximace. Přesnější aproximace jsou však vykoupeny vyšší výpočetní náročností.

Teoretické filtrační a prediktivní hustoty stavu jsou dány Bayesovými rekurzivními vztahy [79, 9],

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) \propto p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1}), \quad (2.7)$$

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_k) = \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) d\mathbf{x}_k, \quad (2.8)$$

kde \propto znamená proporcionální k, čili rovnost až na násobnou konstantu, a kde bylo použito přeznačení počáteční hustoty $p(\mathbf{x}_0 | \mathcal{Z}_{-1}) \triangleq p(\mathbf{x}_0)$.

Ve zbytku této podkapitoly jsou popsány důležité globální nelineární filtry, a to částicové filtry a filtry využívající směs Gaussových hustot.

Částicové filtry. Částicové filtry [25, 70, 16] aproximují hustoty pravděpodobnosti pomocí diskretní náhodné veličiny. Na rozdíl od metody bodových mas [92] využívající numerické aproximace hustot na ortogonální mřížce nad stavovým prostorem, částicové filtry vybírají diskretní body náhodně. Tyto body jsou dány náhodným výběrem ze vzorkovací hustoty [93]. Aby reprezentovaly aproximovanou hustotu pravděpodobnosti, která není totožná se vzorkovací hustotou, jsou jim přiřazeny váhy. Z pohledu diskretní náhodné veličiny jsou váhy rovny pravděpodobnostem náhodných bodů. Přesnější aproximace může být dosaženo výběrem vhodné vzorkovací hustoty, častěji však výběrem většího počtu vzorků. Momenty diskretní náhodné veličiny se pro nekonečně mnoho vzorků asymptoticky blíží momentům spojité náhodné veličiny.

Výchozí aproximovanou hustotou přitom není filtrační hustota pravděpodobnosti stavu \mathbf{x}_k , tedy $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k)$, ale hustota pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathcal{Z}_k)$ pro celé posloupnosti stavů $\mathbf{x}_{0:k}$, $\mathbf{x}_{0:k} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$. Vzorkovací hustota $q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathcal{Z}_k)$ tedy poskytuje trajektorie $\mathbf{x}_{0:k}^s$, $s = 1, 2, \dots, N_k$, přičemž tyto trajektorie jsou vzorkovány rekurzivně, v každém čase k je přidána koncová část \mathbf{x}_k^s . Filtrační váhy $w_{0:k|k}^s$ jsou konstruovány tak, aby aproximovaly poměr uvedené sdružené filtrační hustoty a vzorkovací hustoty,

$$w_{0:k|k}^s \propto \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^s | \mathcal{Z}_k)}{q(\mathbf{x}_{0:k}^s | \mathcal{Z}_k)}. \quad (2.9)$$

Hlavní myšlenkou umožňující uchovávat pouze konců trajektorií \mathbf{x}_k^s a příslušných vah $w_{0:k|k}^s$ je, že postačují k výpočtu filtračních momentů, čili momentů $E\{f(\mathbf{x}_k) | \mathcal{Z}_k\}$ náhodné veličiny \mathbf{x}_k podmíněné měřeními \mathcal{Z}_k , není tedy třeba znát celé trajektorie $\mathbf{x}_{0:k}^s$. Pro výpočet středního vektoru je $f(\mathbf{x}_k)$ dáno $f(\mathbf{x}_k) \triangleq \mathbf{x}_k$, pro výpočet kovarianční matice se použije $f(\mathbf{x}_k) \triangleq (\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k\})(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k\})^T$. Pro nekonečný počet vzorků N_k jsou obecné filtrační momenty dány

$$E\{f(\mathbf{x}_k) | \mathcal{Z}_k\} = \sum_{s=1}^{N_k} w_{0:k|k}^s f(\mathbf{x}_k^s), \quad (2.10)$$

pro konečný počet vzorků je uvedený součet pouze odhadem. Pro prediktivní momenty platí analogické vztahy, je však třeba použít prediktivní váhy, které jsou značeny $w_{0:k|k-1}^s$, a měření \mathcal{Z}_{k-1} .

Algoritmy částicových filtrů začínají výběrem N_0 vzorků \mathbf{x}_0^s z počáteční vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}_0|\mathbf{z}_0)$ a přiřazením počátečních vah $w_{0|-1}^s$,

$$\mathbf{x}_0^s \sim q(\mathbf{x}_0|\mathbf{z}_0), \quad w_{0|-1}^s \propto \frac{p(\mathbf{x}_0^s)}{q(\mathbf{x}_0^s|\mathbf{z}_0)}. \quad (2.11)$$

Dohromady jsou počáteční vzorky a váhy označovány jako počáteční částice $\mathcal{P}_{0|-1}$, $\mathcal{P}_{0|-1} = (\mathbf{x}_0^s, w_{0|-1}^s)_{s=1}^{N_0}$.

Filtrační částice $\mathcal{P}_{0:k|k}$, $\mathcal{P}_{0:k|k} = (\mathbf{x}_k^s, w_{0:k|k}^s)_{s=1}^{N_k}$, se získají převážením prediktivních vah $w_{0:k|k-1}^s$ pomocí věrohodnostní funkce $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^s)$,

$$w_{0:k|k}^s \propto p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^s)w_{0:k|k-1}^s. \quad (2.12)$$

Je dobré mít na paměti, že váhy přiřazují pravděpodobnost celé trajektorii $\mathbf{x}_{0:k}^s$, nikoliv jen jejímu konci \mathbf{x}_k^s . Ze vztahu pro odhad momentů (2.10) je zřejmé, že částice s malou vahou přispívají malým dílem. Z tohoto důvodu není třeba uvažovat příslušné trajektorie $\mathbf{x}_{0:k}^s$ a je tedy možné je ze souboru částic odstranit a trajektorie dále nerozvíjet. Naopak, částice s velkou vahou pocházejí z oblastí s velkou hustotou pravděpodobnosti náležející příslušným trajektoriím. Místo navázání dalšího vzorku \mathbf{x}_{k+1}^s k trajektorii $\mathbf{x}_{0:k}^s$ je kvůli zlepšení aproximace vhodné trajektorii $\mathbf{x}_{0:k}^s$ s velkou vahou $w_{0:k|k}^s$ vnímat jako více stejných trajektorií s vahami, jejichž součet je roven původní váze $w_{0:k|k}^s$.

Proto se po filtračním kroku může provádět takzvané převzorkování. Jedním způsobem převzorkování je náhodně vybrat indexy trajektorií, které se mají dále navazovat dalšími vzorky \mathbf{x}_{k+1}^r . Tímto způsobem je možné změnit počet částic. Indexy s_r , $s_r \in \{1, 2, \dots, N_k\}$, jejichž celkový počet je N_{k+1} , jsou dány diskretním rozdělením pravděpodobnosti,

$$P(s_r = s) = \psi_{k|k+1}^s, \quad (2.13a)$$

kde $\psi_{k|k+1}^s$ jsou zvolené pravděpodobnosti. Častou volbou jsou filtrační váhy, $\psi_{k|k+1}^s \triangleq w_{0:k|k}^s$.

Prediktivní vzorky \mathbf{x}_{k+1}^r , $r = 1, 2, \dots, N_{k+1}$, jsou tudíž dány filtračními vzorky $\mathbf{x}_k^{s_r}$ a zvolenými vzorkovacími hustotami $q(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k^{s_r}, \mathcal{Z}_{k+1})$,

$$\mathbf{x}_{k+1}^r \sim q(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k^{s_r}, \mathcal{Z}_{k+1}). \quad (2.13b)$$

Prediktivní váhy se získají ze vztahu

$$w_{0:k+1|k}^r \propto \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}^r|\mathbf{x}_k^{s_r})w_{0:k|k}^{s_r}}{q(\mathbf{x}_{k+1}^r|\mathbf{x}_k^{s_r}, \mathcal{Z}_{k+1})\psi_{k|k+1}^{s_r}}. \quad (2.13c)$$

Filtry Gaussových směsí. Aproximaci hustoty pravděpodobnosti je možno provést také pomocí směsi hustot. Obvykle se uvažuje aproximace pomocí Gaussovy směsi [6], [91]. Za předpokladu, že systém je lineární, (2.1a), (2.1b), a hustoty počátečního stavu a šumů jsou dány přímo ve formě Gaussovy směsi,

$$\mathbf{x}_0 \sim \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_0^i \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0^i, \mathbf{P}_0^i), \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{w}_k \sim \sum_{w=1}^{N_{\mathbf{w}_k}} \alpha_{\mathbf{w}_k}^w \mathcal{N}(\hat{\mathbf{w}}_k^w, \mathbf{Q}_k^w), \quad \mathbf{v}_k \sim \sum_{v=1}^{N_{\mathbf{v}_k}} \alpha_{\mathbf{v}_k}^v \mathcal{N}(\hat{\mathbf{v}}_k^v, \mathbf{R}_k^v), \quad (2.14b)$$

mají prediktivní i filtrační hustoty rovněž tvar Gaussovy směsi [91],

$$p_{Gs}(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{N_{k|k-1}} \alpha_{k|k-1}^i \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i, \mathbf{P}_{k|k-1}^i), \quad p_{Gs}(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) = \sum_{j=1}^{N_{k|k}} \alpha_{k|k}^j \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j, \mathbf{P}_{k|k}^j). \quad (2.15)$$

Střední vektory a kovarianční matice složek těchto hustot jsou dány vztahy Kalmanova filtru (2.4), (2.5), kde je třeba provést drobné úpravy pro nenulové střední vektory. Jmenovitě nahradit měření \mathbf{z}_k rozdílem měření a středního vektoru šumu ($\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{v}}_k$) ve vztahu (2.4a), dále pak v rovnici predikce (2.5a) přičíst výraz $\mathbf{G}_k \hat{\mathbf{w}}_k$ k pravé straně. Dále je v uvedených vztazích nutno doplnit indexy kombinovaných složek. Pro filtrační indexy platí

$$j = 1, \dots, N_{k|k}, \quad N_{k|k} = N_{k|k-1} \cdot N_{\mathbf{v}_k}, \quad i = \lfloor \frac{j-1}{N_{\mathbf{v}_k}} \rfloor + 1, \quad v = j - (i-1)N_{\mathbf{v}_k}, \quad (2.16)$$

kde výraz $\lfloor n \rfloor$ označuje dolní celou část čísla n . Prediktivní indexy jsou dány obdobně,

$$i = 1, \dots, N_{k+1|k}, \quad N_{k+1|k} = N_{k|k} \cdot N_{\mathbf{w}_k}, \quad j = \lfloor \frac{i-1}{N_{\mathbf{w}_k}} \rfloor + 1, \quad w = i - (j-1)N_{\mathbf{w}_k}. \quad (2.17)$$

Váhy jednotlivých složek směsí jsou dány součinem vah náležejících kombinovaným složkám, filtrační váhy je třeba navíc ještě vynásobit pravděpodobnostmi měření pro danou kombinaci složek,

$$\alpha_{k|k}^j = \alpha_{k|k-1}^i \cdot \alpha_{\mathbf{v}_k}^v \cdot \mathcal{N}(\mathbf{z}_k : \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i, \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^i \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k^v), \quad (2.18)$$

$$\alpha_{k+1|k}^i = \alpha_{k|k}^j \cdot \alpha_{\mathbf{w}_k}^w. \quad (2.19)$$

Jsou-li hustoty počátečního stavu a šumů pouze aproximovány pomocí (2.14), je i řešení pouze aproximací. Podobně jako u částicových filtrů, více složek směsi může lépe aproximovat obecné hustoty. Slabým článkem tohoto přístupu je exponenciální nárůst počtu složek směsi. Proto je nutné využívat algoritmy redukce počtu složek, například algoritmy uvedené v [96, 71, 72]. Jednoduchým postupem je též zanedbání složek s nejmenšími vahami. Pro nelineární systémy (2.2) je možné použít rozšířený Kalmanův filtr nebo unscentovaný filtr pro každou kombinaci složek.

Směs hustot nemusí vyjadřovat pouhou aproximaci hustoty, každá složka může mít interpretaci. Směsi se využívají v úlohách vícemodelového odhadování, kde jednotlivé složky směsi odpovídají jednotlivým modelům, přičemž každý model může používat vlastní rovnice systému (2.2). V tomto případě složky vyjadřují optimální odhad pro posloupnost modelů. Jiným použitím je případ, kdy je k dispozici více měření, ale jen některá, případně žádná, pocházejí z objektu zájmu. Zbylá měření mohou pocházet ze šumu prostředí, případně mohou být generována jiným objektem. Příkladem je sledování dvou letadel pomocí radaru. Složky směsi pak odpovídají přiřazení dat k objektům. Shrnutí, směs hustot se může používat v odhadování s více hypotézami.

2.1.3 Omezení v úloze odhadu

Úlohy odhadu obvykle předpokládají, že stochastický model přesně odpovídá náhodnosti systému. V takových případech má teoretická analýza smysl, protože stochastický popis systému je objektivní. Odlišnost odhadu od skutečného stavu je pak způsobena náhodností. Poruchy popsané stochastickým modelem však nemusejí být nahodilé, mohou být ve skutečnosti pouze neznámé. Pak model pouze aproximuje systém, a výsledky jsou tudíž taktéž aproximativní. Stochastický popis v takovém případě reprezentuje míru znalostí o stavu, opodstatnění stavu na základě dat, stupeň důvěry, a je tedy subjektivní.

Kromě modelu mohou být známy další okolnosti, které nelze jednoduše přímo zahrnout do modelu. Příkladem je využití kontextu. Vlaky jezdí po kolejích, auta po silnicích, lodě plují na moři, koncentrace chemikálií jsou nezáporné atd. Existují tedy hodnoty stavu, které v systému nikdy nemohou nastat. Nalezení odpovídajících nelineárních modelů, které by vyhovovaly uvedeným omezením, může být příliš náročné, případně mohou být tyto modely příliš složité. Aproximace systému pomocí lineárních modelů může uvedená omezení porušovat. Ale když jsou omezení známa a když se vezme v úvahu skutečnost, že model je jenom aproximací systému, je možné nahradit aproximaci porušující daná omezení aproximací vyhovující daným omezením.

Přehled odhadování stavu při znalosti omezení lze nalézt například v [80, 32]. Stav systému \mathbf{x}_k^\dagger splňuje omezení dané množinou přípustných stavů \mathcal{C}_k , která je podmnožinou $\Omega_{\mathbf{x}}$ stavů \mathbf{x}_k , které připouští model,

$$\mathbf{x}_k^\dagger \in \mathcal{C}_k \subset \Omega_{\mathbf{x}}. \quad (2.20)$$

Množina přípustných stavů $\mathcal{C}_k = \{\mathbf{x}_k \in \Omega_{\mathbf{x}} | \dots\}$ může být dána rovností nebo nerovností. Pro lineární omezení je dána maticí \mathbf{C}_k^e pro rovnost, respektive maticí \mathbf{C}_k^n pro omezení pomocí nerovnosti,

$$\mathbf{C}_k^e \mathbf{x}_k = 0, \quad \mathbf{C}_k^n \mathbf{x}_k \leq 0. \quad (2.21a)$$

Nelineární omezení jsou dána pomocí funkcí $c_k^e(\mathbf{x}_k)$, $c_k^n(\mathbf{x}_k)$,

$$c_k^e(\mathbf{x}_k) = 0, \quad c_k^n(\mathbf{x}_k) \leq 0. \quad (2.21b)$$

Omezení pomocí rovnosti říká, že kombinace složek stavu modelu je vždy rovna nule. Dimenze prostoru stavu systému je tedy menší než dimenze prostoru stavu modelu, stav systému náleží varietě prostoru stavu modelu. Teoreticky je možné zmenšit počet stavových proměnných modelu, cenou však může být ztráta jednoduché interpretace proměnných modelu.

Ve zbytku této kapitoly bude nejdříve diskutováno omezení bodových odhadů, poté omezení hustot pravděpodobnosti.

Omezení bodových odhadů lze provést třemi základními způsoby. V Kalmanově filtru (2.4) lze místo neomezeného Kalmanova zisku (2.4c) hledat takové hodnoty \mathbf{K}_k , které by minimalizovaly střední kvadratickou chybu odhadu daného rovnicí (2.4a), přičemž tento odhad by musel náležet dané množině \mathcal{C}_k . Různé přístupy k hledání vhodného zisku lze nalézt například v [84, 67, 78].

Druhým způsobem je průmět neomezeného odhadu (2.4a) do množiny \mathcal{C}_k tak, aby vzdálenost neomezeného a promítnutého odhadu byla minimální. Omezení typu rovnosti

je diskutováno v [81, 50, 97]. Přístupy pro omezení typu nerovnosti berou v úvahu kovarianční matici chyby odhadu [90, 47, 66, 85]. Pomocí unscenované transformace [38] je odhad nahrazen σ -body, které jsou zvlášť promítnuty. Výsledný odhad je dán středním vektorem a kovarianční maticí těchto diskretních bodů. Lineární kombinace omezených bodů však nemusí splňovat omezení. Proto je třeba zvážit, zejména pro nelineární omezení typu rovnosti, je-li možné získaný odhad chápat za omezený. Řešením může být takto získaný střední vektor dále promítnout a odpovídajícím způsobem upravit kovarianční matici [42].

Třetím způsobem je považovat rovnosti ve vztazích (2.21) za rovnice měření s nulovým šumem měření a naměřenou hodnotou \mathbf{c}_k ,

$$\mathbf{c}_k = \mathcal{C}_k^e(\mathbf{x}_k), \quad (2.22)$$

kde pseudoměření \mathbf{c}_k je vždy podle definice nulové, $\mathbf{c}_k \triangleq 0$. Linearizace rovnice omezení (2.22) však nevede k rozumným výsledkům. Proto je vhodné v této rovnici malý šum uvažovat [30] a tím převést úlohu na úlohu bez omezení. Pro nerovnosti je postup obdobný, ale je třeba uvažovat v hustotách pravděpodobnosti, [82]. Střednímu vektoru a kovarianční matici je přisouzena Gaussova hustota, která se dále vynásobí věrohodnostní funkcí příslušnou omezení nerovností. Touto věrohodnostní funkcí je indikátor množiny \mathcal{C}_k , který je roven jedné pro $\mathbf{x}_k \in \mathcal{C}_k$ a pro ostatní \mathbf{x}_k je nulový. Výsledná oříznutá hustota je pak použita k výpočtu středního vektoru a kovarianční matice.

Omezení hustot pravděpodobnosti nebylo v literatuře příliš diskutováno. Výše uvedené přístupy využívající σ -body stojí na pomezí mezi omezením bodů a omezením hustoty. Tyto deterministicky určené body jsou omezovány zvlášť, z omezených bodů se vypočtou výsledné bodové odhady. Podobným způsobem lze postupovat pro částice. Neomezené vzorky \mathbf{x}_k^j se promítnou do množiny \mathcal{C}_k , váhy $w_{k|k}^s$ zůstávají zachovány. Omezení hustoty jejím oříznutím lze v částicích vyjádřit přiřazením nulové váhy. Promítnutí vzorků se poté stává zbytečné, příslušná částice bude odstraněna při převzorkování.

K lepšímu porozumění odhadování s omezením by bylo vhodné zaměřit se na omezení hustot. Lepší náhled na hustoty může zpětně ovlivnit náhled na omezení odhadů. Dalším směrem může být omezení Gaussových směsí a hustot reprezentovaných částicemi.

2.2 Odhad stavu pomocí více estimátorů

Klasická formulace úlohy odhadu stavu předpokládá, že estimátor zpracovává měřená data přímo. Jsou-li části vektoru měření \mathbf{z}_k získávány pomocí různých senzorů, může mít takový přístup řadu nedostatků. Velký počet senzorů klade vysoké nároky jak na přenos dat od senzorů do estimátoru, tak na samotný výpočet odhadu. Odebrání, změna nebo přidání senzoru vyžaduje úpravu estimátoru. Je-li odhad dále využíván ve více místech, selhání estimátoru znamená selhání všech navazujících úloh, které odhad využívají.

Uvedené nedostatky lze odstranit nepřímým zpracováním dat. Jednotlivým senzorem či jejich skupinám je možné přiřadit vlastní estimátory poskytující odhad stavu. Celkový odhad je pak získáván slučováním těchto lokálních odhadů. Výhodou tohoto řešení je možné zmenšení objemu dat přenášených do jednoho estimátoru, a tím pádem i zmenšení počtu dat zde zpracovávaných. Změna senzoru i změna počtu senzorů se projevuje pouze lokálně. Stejně tak se může projevovat i selhání jednoho lokálního estimátoru. Na druhou stranu vyvstávají nové problémy. Nezávislost dat neznamená

nezávislost odhadů stavu, tedy nezávislost informací. Přístupy ke slučování informací byly naznačeny na obecné úrovni v kapitole 1, slučování odhadů je jejich zvláštním případem. Další zmíněné problémy ohledně převodu z lokálních souřadnic do společných souřadnic a ohledně přiřazení dat ke správným objektům nejsou náplní této práce. Tyto problémy jsou částečně řešeny konzervativní fúzí odhadu.

Základní přístupy k fúzi odhadů stavu lze nalézt například v [7, 10, 22, 21, 54, 76]. Systém lze popsat stejnými rovnicemi jako v klasické formulaci úlohy, ale vzhledem ke způsobu zpracování dat je nutné rozdělit vektor měření \mathbf{z}_k do menších částí, které se zpracovávají v lokálních estimátorech E_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, S$,

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k^{(1)\text{T}} & \mathbf{z}_k^{(2)\text{T}} & \dots & \mathbf{z}_k^{(S)\text{T}} \end{bmatrix}^{\text{T}}. \quad (2.23)$$

V případě lineárního gaussovského systému (2.1) je třeba podobným způsobem rozdělit matici měření \mathbf{H}_k , šum měření \mathbf{v}_k a kovarianční matici šumu měření \mathbf{R}_k ,

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^{(1)} \\ \mathbf{H}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_k^{(S)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k^{(1)} \\ \mathbf{v}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^{(S)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^{(11)} & \mathbf{R}_k^{(12)} & \dots & \mathbf{R}_k^{(1S)} \\ \mathbf{R}_k^{(21)} & \mathbf{R}_k^{(22)} & \dots & \mathbf{R}_k^{(2S)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_k^{(S1)} & \mathbf{R}_k^{(S2)} & \dots & \mathbf{R}_k^{(SS)} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

V případě systému zadaného hustotami pravděpodobnosti je třeba rozepsat hustotu pravděpodobnosti měření (2.3b) jako

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = p(\mathbf{z}_k^{(1)}, \mathbf{z}_k^{(2)}, \dots, \mathbf{z}_k^{(S)} | \mathbf{x}_k). \quad (2.25)$$

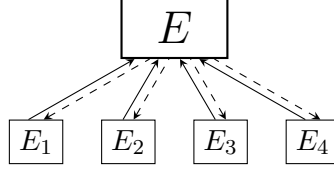
Na tomto místě je třeba upřesnit značení souboru měření \mathcal{Z}_k pro lokální estimátory E_ℓ . Soubor $\mathcal{Z}_k^{(\ell)}$ vyjadřuje data, která byla použita k získání příslušného odhadu v estimátoru E_ℓ , a to jak přímým využitím lokálních měření $\mathbf{z}_l^{(\ell)}$, $l = 0, 1, \dots, k$, tak nepřímo prostřednictvím zpracování odhadů založených na měřeních $\mathbf{z}_l^{(\lambda)}$, $\lambda \neq \ell$. V některých případech je nutné odlišit odhady po sloučení odhadů a před sloučením odhadů. Pak je pro prvně jmenované použito značení $\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}$. Následný přechod do dalšího času $k+1$ je prováděn z odhadů po fúzi, tedy těch založených na $\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}$, přičemž v čase $l = k+1$ je použito zjednodušující přeznačení $\mathcal{Z}_{l-1}^{(\ell)} \triangleq \mathcal{Z}_{l-1,F}^{(\ell)}$.

Hypotetický estimátor, který by zpracovával všechna data přímo, se nazývá centralizovaný. Úlohy odhadu je možné rozdělit podle toho, zda kromě lokálních estimátorů existuje centrum fúze, tedy centrální estimátor, který má na starosti slučování všech lokálních odhadů, ačkoliv sám nemusí zpracovávat žádná měření přímo. Cílem fúze je dosáhnout stejného odhadu, který by byl získán centralizovaným estimátorem.

2.2.1 Distribuované odhadování

Nejjednodušším typem odhadování pomocí více estimátorů je distribuované odhadování. Úkoly jednoho centrálního estimátoru jsou rozděleny mezi lokální estimátory. Tento postup se od distribuovaného výpočtu liší v nakládání s daty. Zatímco distribuovaný výpočet centralizovaného estimátoru v jednom procesoru by rozdělil operace s odhady mezi více procesorů bez ohledu na význam dat, distribuování estimátorů přiděluje lokálním estimátorům příslušná lokální měření.

Obrázek 2.1 znázorňuje síť čtyř lokálních estimátorů E_1, E_2, E_3, E_4 , které posílají své lokální odhady do centrálního estimátoru E . Centrální odhad pak může být posílán zpět do lokálních estimátorů, což je naznačeno čárkovanými šipkami.



Obrázek 2.1: Hierarchické uspořádání estimátorů

Příklady distribuovaného odhadování pro bodové odhady lze nalézt v [36, 11, 57]. Důležitým předpokladem je nezávislost šumů měření mezi senzory, které přísluší rozdílným estimátorům. Centralizovaná matice \mathbf{R}_k šumu měření \mathbf{v}_k , (2.24), je tudíž blokově diagonální,

$$\mathbf{R}_k^{(ij)} = 0, \quad i \neq j. \quad (2.26)$$

Z násobení blokově diagonální matice \mathbf{R}_k pomocí blokové matice \mathbf{H}_k^T (zleva) a blokového vektoru \mathbf{z}_k plyne, že centralizovaný informační příspěvek od měření \mathbf{i}_k , který je založen na centralizovaném měření \mathbf{z}_k , je možné vyjádřit jako součet lokálních informačních příspěvků $\mathbf{i}_k^{(\ell)}$ založených na lokálních měřeních $\mathbf{z}_k^{(\ell)}$, $\mathbf{i}_k^{(\ell)} \triangleq \mathbf{H}_k^{(\ell)T} \mathbf{R}_k^{(\ell)-1} \mathbf{z}_k^{(\ell)}$. Jestliže centrální estimátor E slučuje informační vektory založené na množinách měření $\mathcal{Z}_k^{(\ell)}$, a nikoliv pouze na posledních lokálních měření $\mathbf{z}_k^{(\ell)}$, je třeba informační příspěvky $\mathbf{i}_k^{(\ell)}$ vyjádřit pomocí informačních vektorů. Z rovnic (2.6) je lze vyjádřit jako rozdíl filtračních a prediktivních informačních vektorů, $\mathbf{i}_k^{(\ell)} = \hat{\mathbf{y}}_{k|k}^{(\ell)} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{(\ell)}$. Tentýž postup platí pro informační matice, $\mathbf{I}_k^{(\ell)} \triangleq \mathbf{H}_k^{(\ell)T} \mathbf{R}_k^{(\ell)-1} \mathbf{H}_k^{(\ell)}$, $\mathbf{I}_k^{(\ell)} = \mathbf{Y}_{k|k}^{(\ell)} - \mathbf{Y}_{k|k-1}^{(\ell)}$.

Ve stavových proměnných je centrální odhad v estimátoru E dán následujícími vztahy pro filtrační střední vektor $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ a filtrační kovarianční matici $\mathbf{P}_{k|k}^{-1}$,

$$\mathbf{P}_{k|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \sum_{\ell=1}^S \left(\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\ell)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)} - \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\ell\ell)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(\ell)} \right), \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{-1} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + \sum_{\ell=1}^S \left(\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\ell)-1} - \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\ell\ell)-1} \right). \quad (2.27b)$$

Prediktivní odhady jsou ve všech estimátorech v čase $k = 0$ dány počáteční podmínkou, $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_0$, $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}^{(\ell)} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_0$, $\mathbf{P}_{0|-1} \triangleq \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_{0|-1}^{(\ell\ell)} \triangleq \mathbf{P}_0$. Centrální prediktivní odhad je dán prediktivními rovnicemi Kalmanova filtru (2.5). Lokální estimátory E_ℓ mohou pracovat zcela lokálně, pak se odhady s příslušnými indexy získají podle stejných rovnic. Nevýhodou je nutnost centrálnímu estimátoru E posílat jak filtrační, tak prediktivní odhady. Jak je naznačeno na obrázku 2.1, centrální odhad může být posílán zpět do lokálních estimátorů. V tom případě jsou lokální prediktivní odhady v čase $l = k + 1$ nahrazeny centrálním odhadem, $\hat{\mathbf{x}}_{l|l-1}^{(\ell)} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_{l|l-1}$, $\mathbf{P}_{l|l-1}^{(\ell\ell)} \triangleq \mathbf{P}_{l|l-1}$. Centrální estimátor E tak může slučovat pouze filtrační odhady, které jsou, po doplnění indexů lokálních estimátorů, dány vztahy (2.4), případně jejich informačním tvarem (2.6).

Rovnice (2.27) ukazují, že centrální estimátor nepotřebuje znát podrobnosti o lokálním procesu měření. Lokální matice měření $\mathbf{H}_k^{(\ell)}$ ani lokální matice šumu měření $\mathbf{R}_k^{(\ell)}$

nikde nevystupují. Změna senzoru se tak projeví pouze v daném lokálním estimátoru, centrální estimátor není třeba upravovat. Naproti tomu rovnice dynamiky (2.1a) je známa všem estimátorům, stejně jako hustota počátečního stavu \mathbf{x}_0 . Protože rovnice distribuovaného Kalmanova filtru (2.27) byly odvozeny z rovnic centralizovaného Kalmanova filtru (2.6), je centrální odhad roven centralizovanému odhadu.

Případ posílání informačních příspěvků $\mathbf{i}_k^{(\ell)}$ přímo do centrálního estimátoru není z hlediska fúze odhadů příliš zajímavý. Tento přístup odpovídá slučování nezávislých informací, ovšem posílané informace jsou založené pouze na jednom měření. Tyto dílčí informace obvykle nejdou použít samostatně, protože dimenze měření bývá menší než dimenze stavu. Oproti tomu výše uvedené zpracovávání informačních vektorů $\hat{\mathbf{y}}_{k|k}^{(\ell)}$ odpovídá odečítání společné informace. Informační vektory je možno použít samostatně, obsahují jak apriorní informaci, tak informaci ze všech měření obsažených v souboru $\mathcal{Z}_k^{(\ell)}$.

Pro nelineární systémy je možné využít filtrů využívajících linearizaci. Pak je centrální odhad pouze aproximací. Příkladem je [52], kde jsou použity unscenované filtry s tím, že do centrálního estimátoru jsou posílány informační příspěvky $\mathbf{i}_k^{(\ell)}$ a informační matice $\mathbf{I}_k^{(\ell)}$, které jsou založeny na měření $\mathbf{z}_k^{(\ell)}$ přímo a na předchozích měřeních skrz linearizaci v příslušném odhadu.

Distribuovaná fúze hustot pravděpodobnosti využívá stejný myšlenkový postup jako distribuovaný Kalmanův filtr. Výchozím předpokladem je podmíněná nezávislost lokálních měření $\mathbf{z}_k^{(\ell)}$,

$$p(\mathbf{z}_k^{(1)}, \mathbf{z}_k^{(2)}, \dots, \mathbf{z}_k^{(S)} | \mathbf{x}_k) = \prod_{\ell=1}^S p(\mathbf{z}_k^{(\ell)} | \mathbf{x}_k). \quad (2.28)$$

Obdobu rovnic fúze (2.27) je v hustotách pravděpodobnosti dána vztahem

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) \propto p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1}) \prod_{\ell=1}^S \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\ell)})}{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1}^{(\ell)})}. \quad (2.29)$$

V čase $l = k + 1$ může být opět použita zpětná vazba $p(\mathbf{x}_l | \mathcal{Z}_{l-1}^{(\ell)}) \triangleq p(\mathbf{x}_l | \mathcal{Z}_{l-1})$.

Fúze hustot pravděpodobnosti byla řešena v [15] pro hustoty reprezentované částicemi. Navržené řešení ale vyžaduje zpětnou vazbu, všechny filtry musejí používat stejné částice. Tím navržené řešení degeneruje na distribuované vyhodnocení lokálních hustot měření v daných částicích, lokální filtry nejsou schopny pracovat zcela samostatně.

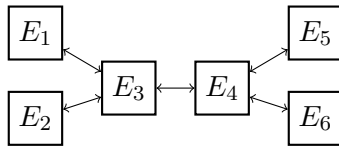
Distribuované filtry jsou speciálním případem decentralizovaných filtrů, jimž se věnuje následující podkapitola.

2.2.2 Decentralizované odhadování

Přetrvávající nevýhodou distribuovaného odhadování představeného v předchozí podkapitole je přítomnost centrálního estimátoru. Hierarchické uspořádání sice umožňuje rozdělit jeho zátěž mezi více estimátorů, ale neřeší některé problémy, jako například dočasný výpadek centrálního estimátoru. V takovém případě se síť estimátorů rozpadne a centrální odhad lze obnovit pouze za použití aproximací. Nastíněná ztráta synchronizace spolu s účinky stavového šumu způsobí závislosti slučovaných částí informace. Aby fúze (2.27) poskytovala centralizované odhady, musí probíhat v každém čase k , není možné používat vícekrokové prediktivní odhady. Jinak jsou odhady v centrálním estimátoru pouze aproximací centralizovaných odhadů.

Dalším stupněm odhadování pomocí více estimátorů je odstranění centrálního estimátoru, odhadování se poté nazývá decentralizované. K dosažení kvalit centralizovaného estimátoru jsou opět nutné omezující předpoklady. Stejně jako u distribuovaného odhadování se předpokládá nezávislost šumů měření (2.26) napříč estimátory, respektive podmíněná nezávislost hustot měření (2.28). Dále je třeba zajistit stromový tvar sítě estimátorů. Důvodem je existence právě jedné cesty mezi dvěma estimátory. Výměnu informací probíhající mezi dvěma estimátory lze kontrolovat, je možné odečítat společnou informaci. V případě šíření informace více kanály není možné rozpoznat, zda nově přichozí informace již nepřišla prostřednictvím jiného informačního kanálu.

Stromová síť estimátorů je zachycena na obrázku 2.2. Zásadním rozdílem oproti hierarchickému uspořádání použitému v distribuovaném odhadování, obrázek 2.1, je neurčení kořene stromu, žádný estimátor není zvolen jako centrální.



Obrázek 2.2: Stromové uspořádání estimátorů

Decentralizované odhadování využívající takzvaných kanálových filtrů je navrženo v [31]. Kanálové filtry jsou pomocné estimátory mající na starost uchovávání informace společně dvěma sousedním estimátorům.

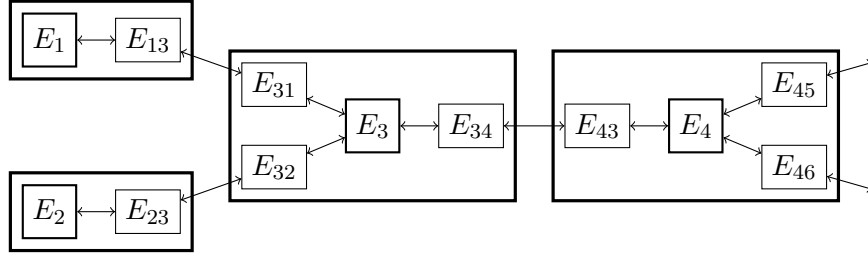
Základní myšlenka kanálových filtrů je objasněna na následujícím příkladu. Necht množiny měření \mathcal{Z}_A , \mathcal{Z}_B obsahují podmíněně nezávislá měření \mathbf{z}_A , \mathbf{z}_C , \mathbf{z}_B , přičemž $\mathcal{Z}_A = \{\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_C\}$, $\mathcal{Z}_B = \{\mathbf{z}_C, \mathbf{z}_B\}$. Hustota $p(\mathbf{x}|\mathcal{Z}_A \cap \mathcal{Z}_B)$ vyjadřuje společnou informaci, měření \mathbf{z}_C je společné oběma množinám \mathcal{Z}_A , \mathcal{Z}_B . Hustotu $p(\mathbf{x}|\mathcal{Z}_A \cup \mathcal{Z}_B)$ podmíněnou všemi měřeními je možné vyjádřit jako

$$p(\mathbf{x}|\mathcal{Z}_A \cup \mathcal{Z}_B) \propto \frac{p(\mathbf{x}|\mathcal{Z}_A)p(\mathbf{x}|\mathcal{Z}_B)}{p(\mathbf{x}|\mathcal{Z}_A \cap \mathcal{Z}_B)}. \quad (2.30)$$

Zavedení pomocného filtru, který by poskytoval společnou informaci danou hustotou pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}|\mathcal{Z}_A \cap \mathcal{Z}_B)$, umožňuje nalézt řešení problému decentralizovaného odhadování. Podmínkou je výše zmíněná podmíněná nezávislost měření a možnost realizace pomocného filtru. Stromová síť estimátorů tuto možnost poskytuje.

Množina indexů estimátorů, které sousedí s estimátorem E_ℓ , bude značena \mathcal{N}_ℓ . Pro příklad z obrázku 2.2 platí $\mathcal{N}_1 = \{3\}$, $\mathcal{N}_2 = \{3\}$, $\mathcal{N}_3 = \{1, 2, 4\}$, atd. Estimátor $E_{\ell\lambda}$, $\lambda \in \mathcal{N}_\ell$, označuje pomocný estimátor nazývaný kanálový filtr, který uchovává informaci společnou estimátorům E_ℓ a E_λ .

Na obrázku 2.3 je rozkreslena situace pro estimátor E_3 a jeho sousedy $\lambda \in \mathcal{N}_3$. Každý estimátor se skládá z vlastního estimátoru a kanálových filtrů pro každý komunikační kanál. Kanálové filtry znají informaci sdílenou estimátorem a jeho příslušným sousedem. Po zpracování lokálního měření $\mathbf{z}_k^{(3)}$ pošle estimátor E_3 estimátorům E_1 , E_2 a E_4 svůj filtrační odhad skrz příslušné kanálové filtry E_{31} , E_{32} a E_{34} , které na oplátku přijmou filtrační odhady od estimátorů E_1 , E_2 a E_4 . Kanálovým filtrům je tedy známa i informace obsažená v estimátoru a v jeho příslušném sousedovi. Nová informace obsažená v přichozím odhadu je získána odečtením společné informace od přichozí informace.



Obrázek 2.3: Kanálové filtry

Sloučená informace v estimátoru E_3 je dána sečtením původní informace v estimátoru E_3 a nových informací dodaných kanálovými filtry E_{31} , E_{32} a E_{34} .

V souladu s obecným vztahem (2.30) se sloučením odhadů poskytnutých sousedními estimátory E_λ s vlastním odhadem estimátoru E_ℓ získají střední vektor $\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)}$ a kovarianční matice $\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell\ell)}$,

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell\ell)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} = \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\ell)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)} + \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell} \left(\mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda\lambda)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)} - \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\ell\lambda)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(\ell\lambda)} \right), \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell\ell)-1} = \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\ell)-1} + \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell} \left(\mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda\lambda)-1} - \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\ell\lambda)-1} \right). \quad (2.31b)$$

Střední vektory $\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell\lambda)}$ a kovarianční matice $\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell\lambda)}$ poskytované kanálovými filtry $E_{\ell\lambda}$ se získají obdobným postupem,

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell\lambda)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell\lambda)} = \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\ell)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)} + \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda\lambda)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)} - \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\ell\lambda)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(\ell\lambda)}, \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell\lambda)-1} = \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\ell)-1} + \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda\lambda)-1} - \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\ell\lambda)-1}, \quad (2.32b)$$

neboť nová společná informace estimátorů E_ℓ a E_λ je dána sjednocením lokálních informací. Jinými slovy součtem informací a odečtením společné části.

Prediktivní odhady (2.5) ve všech estimátorech i ve všech kanálových filtrech jsou založeny na odhadech po fúzi. V čase $l = k + 1$ je tedy nutno použít dříve zmíněné přeznačení odhadů, $\hat{\mathbf{x}}_{l|l-1}^{(\ell)} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_{l|l-1,F}^{(\ell)}$, $\mathbf{P}_{l|l-1}^{(\ell\ell)} \triangleq \mathbf{P}_{l|l-1,F}^{(\ell\ell)}$, $\hat{\mathbf{x}}_{l|l-1}^{(\ell\lambda)} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_{l|l-1,F}^{(\ell\lambda)}$, $\mathbf{P}_{l|l-1}^{(\ell\lambda)} \triangleq \mathbf{P}_{l|l-1,F}^{(\ell\lambda)}$.

Fúze hustot pravděpodobnosti je opět analogická k fúzi bodových odhadů. Obdoba fúze (2.31) je v hustotách pravděpodobnosti dána vztahem

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}) \propto p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\ell)}) \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell} \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})}{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1}^{(\ell)} \cap \mathcal{Z}_{k-1}^{(\lambda)})}. \quad (2.33)$$

Použití pravidla (2.30) je zřejmé po vyjádření jednotlivých množin měření, $\mathcal{Z}_k^{(\ell)} = \mathcal{Z}_{k-1}^{(\ell)} \cup \mathbf{z}_k^{(\ell)}$, $\mathcal{Z}_k^{(\lambda)} = \mathcal{Z}_{k-1}^{(\lambda)} \cup \mathbf{z}_k^{(\lambda)}$, přičemž podle definice jsou lokální měření podmíněně nezávislá, $\mathbf{z}_k^{(\ell)} \cap \mathbf{z}_k^{(\lambda)} = \emptyset$. Množina sousedů estimátoru E_ℓ včetně estimátoru samotného bude značena \mathcal{N}_ℓ^+ , $\mathcal{N}_\ell^+ = \mathcal{N}_\ell \cup \{\ell\}$. Pak $\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)} = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$. Dále je z podmíněné nezávislosti měření zřejmé, že společná část informace po filtraci je stejná jako společná

část informace před filtrací, $\mathcal{Z}_k^{(\ell)} \cap \mathcal{Z}_k^{(\lambda)} = (\mathcal{Z}_{k-1}^{(\ell)} \cup \mathbf{z}_k^{(\ell)}) \cap (\mathcal{Z}_{k-1}^{(\lambda)} \cup \mathbf{z}_k^{(\lambda)}) = \mathcal{Z}_{k-1}^{(\lambda)} \cap \mathcal{Z}_{k-1}^{(\lambda)}$. Vztah (2.33) je pak dán opakovaným použitím pravidla (2.30).

Obdoba kanálových filtrů (2.32) je v hustotách pravděpodobnosti dána vztahem

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)} \cap \mathcal{Z}_{k,F}^{(\lambda)}) \propto \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\ell)})p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})}{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1}^{(\ell)} \cap \mathcal{Z}_{k-1}^{(\lambda)})}. \quad (2.34)$$

Odvození z pravidla (2.30) je zřejmé po rozepsání sjednocení množin měření po fúzi $\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)} \cap \mathcal{Z}_{k,F}^{(\lambda)}$ na tvar $(\bigcup_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) \cap (\bigcup_{\kappa \in \mathcal{N}_\lambda^+} \mathcal{Z}_k^{(\kappa)})$. Tedy na průnik sjednocení filtračních množin měření náležejících sousedům estimátoru E_ℓ (včetně E_ℓ) a sjednocení filtračních množin měření náležejících sousedům souseda E_λ (včetně E_λ) estimátoru E_ℓ . Z předpokládané stromové sítě estimátorů vyplývá, že tento průnik je roven sjednocení filtračních množin měření estimátoru E_ℓ a příslušného souseda E_λ , v souhrnu tedy platí $\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)} \cap \mathcal{Z}_{k,F}^{(\lambda)} = \mathcal{Z}_k^{(\ell)} \cup \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$.

Podobně jako v předchozím případě jsou prediktivní odhady (2.8) ve všech estimátorech i ve všech kanálových filtrech založeny na odhadech po fúzi. V čase $l = k + 1$ je tedy použito dříve zmíněné zjednodušující přeznačení $\mathcal{Z}_{l-1}^{(\ell)} \triangleq \mathcal{Z}_{l-1,F}^{(\ell)}$. V kanálových filtrech je třeba rovněž použít přeznačení $\mathcal{Z}_{l-1}^{(\lambda)} \triangleq \mathcal{Z}_{l-1,F}^{(\lambda)}$.

V literatuře [31] je mylně uváděno, že lokální odhady po fúzi jsou rovny centralizovaným odhadům se zpožděným nepřímým využitím měření $\mathbf{z}_k^{(\ell_\lambda)}$, kde $\ell_\lambda, \ell_\lambda \notin \mathcal{N}_\ell^+$, označuje estimátor nesousedící s estimátorem E_ℓ . Délka zpoždění je rovna počtu estimátorů na cestě mezi estimátory E_ℓ a E_{ℓ_λ} . Pro příklad na obrázku 2.2 je měření $\mathbf{z}_k^{(3)}$ využito v estimátoru E_1 v čase k , měření $\mathbf{z}_k^{(2)}$ a $\mathbf{z}_k^{(4)}$ jsou využita v čase $k + 1$ a měření $\mathbf{z}_k^{(5)}$ a $\mathbf{z}_k^{(6)}$ v čase $k + 2$. Uváděná rovnost však platí pouze za dalších předpokladů. Například pokud stavový šum \mathbf{w}_k je nulový, a tudíž neovlivňuje podmíněnou nezávislost měření. Je třeba připomenout, že pokud jsou měření $\mathbf{z}_k^{(\ell)}$, $\mathbf{z}_k^{(\lambda)}$ nezávislá za podmínky znalosti stavu \mathbf{x}_k ve stejném čase k , společný stavový šum obvykle zaručuje závislost $\mathbf{z}_l^{(\ell)}$, $\mathbf{z}_l^{(\lambda)}$ za podmínky \mathbf{x}_k pro $l \neq k$. V obecných stromových sítích jsou pak lokální odhady pouze aproximací centralizovaných. Uvedený nedostatek lze odstranit opakovanou výměnou sloučených odhadů a opakovanou fúzí před posunutím se do dalšího časového kroku $k + 1$. V takových případech nedochází k porušení podmíněné nezávislosti, která byla klíčová při odvození vztahu (2.30).

Výhodou uvedeného způsobu decentralizovaného odhadování je možnost snadného přidání nového estimátoru, protože vyžaduje pouze lokální změny. Pouze lokální estimátor, k němuž je nový lokální estimátor připojen, zavádí nový kanálový filtr, zbylé lokální estimátory zůstávají beze změny.

Teoretické řešení decentralizovaného odhadování (2.33), (2.34) je sice známé, problémem však zůstává výpočet obecného vztahu (2.30) pro libovolné hustoty. Globální filtry uvedené v kapitole 2.1.2, tedy částicové a směšové filtry, aproximují libovolné hustoty pravděpodobnosti pomocí pravděpodobnostní funkce diskretní náhodné veličiny, respektive pomocí směsi Gaussových hustot.

Prvotním problémem v částicových filtrech je aproximace hustot pravděpodobnosti pomocí rozdílných vážených bodů. Přepočítání aproximací do společných bodů je navržen v [64] a [63] pomocí heuristického převedení částic na hustoty pravděpodobnosti a výpočtu vah ve zvolených společných bodech. Nicméně návrhu společných bodů není věnována větší pozornost, i když se jedná o základní činitel ovlivňující kvalitu aproximace.

Jiným řešením je převedení na přímé slučování odhadnutých hustot pravděpodobnosti vyjádřených ve formě směsi.

Problémem směsových filtrů je dělení hustotou. Vzhledem ke skutečnosti, že směsi Gaussových hustot pouze aproximují teoretické hustoty pravděpodobnosti, není výsledkem dělení směs Gaussových hustot. Je tedy nutno hledat nějaké aproximace. Řešení navržené v [69] pro každou složku směsi v čitateli používá aproximaci směsi ve jmenovateli pomocí Gaussovy hustoty. Výsledná aproximace podílu směsi je dána váženým součtem podílu Gaussových hustot, přičemž podílem Gaussových hustot je buď Gaussova hustota, nebo podíl nemá řešení. Existenci řešení je nutno zaručit volbou vhodných kovariančních matic ve směsi hustot ve jmenovateli nebo další aproximací zmíněné směsi hustot.

Společným rysem uvedených globálních filtrů je aproximace hustot. Aproximace použité v lokálních estimátorech se mohou lišit od aproximací použitých v centralizovaném estimátoru, který by používal měření $\mathbf{z}_k^{(\kappa)}$, $\kappa \notin \mathcal{N}_\ell^+$, se zpožděním. Obecně tedy od decentralizovaného odhadování nelze očekávat dosažení stejné kvality jako od klasického odhadování, kde estimátor zpracovává všechna měření přímo.

V článku [87] bylo nastíněno decentralizované odhadování pro obecnější síť estimátorů, takzvané 2-stromy, jehož cílem je dosažení kvalit centralizovaného odhadování. Decentralizované odhadování, které nemá za cíl dosažení kvalit centralizovaného odhadu, je náplní následující podkapitoly.

2.2.3 Vážení bodových odhadů

Další přístupy k odhadování pomocí více estimátorů opouštějí cíl, kterým je dosažení stejných výsledků, jež by byly obdrženy přímým zpracováním všech měřených dat v jednom centrálním estimátoru. Zatímco dosud byly lokální estimátory chápány spíše jako užitečný mezikrok mezi senzory a centrálním estimátorem, ve zbytku práce bude uvažován opačný náhled. Namísto rozdělení celku mezi více částí bude uvažováno spojování více samostatných částí do jednoho celku. Lokální estimátory budou představovat samostatné objekty, fúze bude spíše nadstavbou než výchozím požadavkem.

Tato podkapitola se omezuje pouze na fúzi bodových odhadů, slučování je uvažováno pouze lineární. Pro první níže uvedený přístup není analogie v hustotách pravděpodobnosti známa. V dalším přístupu lze uvažovat nelineární pravidla pro slučování hustot, ale uvedený přístup je poněkud heuristický. Proto se fúzi hustot pravděpodobnosti bude věnovat až následující podkapitola.

Fúzi bodových odhadů lze provést pomocí lineárního pravidla. Lokální odhady se vynásobí váhovými maticemi $\mathbf{W}_k^{(\ell)}$ a sečtou,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F} = \sum_{\ell=1}^S \mathbf{W}_k^{(\ell)} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)}, \quad \sum_{\ell=1}^S \mathbf{W}_k^{(\ell)} = I_{n_x}, \quad (2.35)$$

přičemž součet váhových matic musí být roven identické matici příslušného řádu. Dále je třeba určit kovarianční matici chyby odhadu $\mathbf{P}_{k|k,F}$.

Jedním z přístupů k vážení lokálních odhadů (2.35) je zavedení pomocného kritéria. Tím může být maximální věrohodnost sloučeného odhadu [8, 17, 18]. K stejným výsledkům vede minimalizace kvadratické chyby [75], příbuzný problém je řešen v [65].

Výchozí myšlenkou fúze odhadů podle maximální věrohodnosti je vyjádření odhadu stavu $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)}$ pomocí skutečného stavu \mathbf{x}_k , $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)} \equiv \mathbf{x}_k + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)} - \mathbf{x}_k)$. Člen v závorce je až na znaménko chyba odhadu. Pro lineární gaussovský systém (2.1) má chyba odhadu nulový střední vektor, kovarianční matice chyby odhadu je dána maticí $\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell)}$. Na uvedený vztah lze pohlížet jako na rovnici měření, kde měření je reprezentováno lokálním odhadem $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)}$. Sloučením takových lokálních rovnic se získá jedna rovnice použitelná pro získání celkového odhadu. Sloučená rovnice je dána

$$\mathbf{z}_{k|k}^F = \mathbb{I}_S \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{k|k}^F, \quad (2.36)$$

kde vektor měření $\mathbf{z}_{k|k}^F$ je dán pospojováním lokálních odhadů $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)}$, matice měření \mathbb{I}_S je složena z identických matic I_{n_x} a chyba měření $\mathbf{v}_{k|k}^F$ je dána chybami lokálních odhadů,

$$\mathbf{z}_{k|k}^F = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(S)} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I}_S = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \vdots \\ I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{k|k}^F = - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(S)} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Kovarianční matice chyby měření $\mathbf{P}_{k|k}^F$ je dána nejen kovariančními maticemi chyb lokálních odhadů $\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\ell)}$, ale i vzájemnými kovariančními maticemi $\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\lambda)}$, $\lambda \neq \ell$,

$$\mathbf{P}_{k|k}^F = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k}^{(11)} & \cdots & \mathbf{P}_{k|k}^{(1S)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{k|k}^{(S1)} & \cdots & \mathbf{P}_{k|k}^{(SS)} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

K výpočtu sloučeného odhadu (2.35) je tedy kromě znalosti lokálních odhadů nutná i znalost jejich vzájemných kovariančních matic $\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\lambda)}$. Ty lze vypočítat podle vztahu

$$\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\lambda)} = (I_{n_x} - \mathbf{K}_k^{(\ell)} \mathbf{H}_k^{(\ell)}) \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\ell\lambda)} (I_{n_x} - \mathbf{K}_k^{(\lambda)} \mathbf{H}_k^{(\lambda)})^T + \mathbf{K}_k^{(\ell)} \mathbf{R}_k^{(\ell\lambda)} \mathbf{K}_k^{(\lambda)T}, \quad (2.39)$$

kde $\mathbf{P}_{k|k-1}^{(\ell\lambda)}$ je nyní dáno predikcí, $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(\ell\lambda)} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\lambda)} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T$, nikoliv kanálovým filtrem. Na rozdíl od distribuovaného Kalmanova filtru (2.27), v tomto případě je nutno do centrálního estimátoru posílat i lokální Kalmanovy zisky $\mathbf{K}_k^{(\ell)}$ a $\mathbf{K}_k^{(\lambda)}$, případně i lokální matice měření $\mathbf{H}_k^{(\ell)}$, $\mathbf{H}_k^{(\lambda)}$ a znát vzájemné kovarianční matice šumů lokálních měření $\mathbf{R}_k^{(\ell\lambda)}$, jsou-li nenulové.

Navíc rovnici měření (2.36) nelze přidat k rovnici dynamiky systému (2.1a) a použít Kalmanův filtr (2.4), (2.5). Šum měření $\mathbf{v}_{k|k}^F$ totiž není ani bílý, ani nezávislý na stavu \mathbf{x}_k . Je však možné použít odhad podle maximální věrohodnosti, který tyto předpoklady nevyžaduje. Lineární sloučení lokálních odhadů je v tomto případě dáno nepřímo pomocí

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F} = (\mathbb{I}_S^T \mathbf{P}_{k|k}^F \mathbb{I}_S)^{-1} \mathbb{I}_S^T \mathbf{P}_{k|k}^F \mathbf{z}_{k|k}^F, \quad (2.40a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k,F} = (\mathbb{I}_S^T \mathbf{P}_{k|k}^F \mathbb{I}_S)^{-1}, \quad (2.40b)$$

ale převod do formy (2.35) je přímočarý, maticové váhy $\mathbf{W}_k^{(\ell)}$ jsou rovny příslušným blokům matice $(\mathbb{I}_S^T \mathbf{P}_{k|k}^F \mathbb{I}_S)^{-1} \mathbb{I}_S^T \mathbf{P}_{k|k}^F$. Kovarianční matici lze rovněž vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{P}_{k|k,F} = \sum_{\ell=1}^S \sum_{\lambda=1}^S \mathbf{W}_k^{(\ell)} \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\lambda)} \mathbf{W}_k^{(\lambda)}, \quad (2.41)$$

který je vhodný pro uvažování skalárních vah nahrazujících maticové váhy $\mathbf{W}_k^{(\ell)}$ [53].

Jsou-li lokální odhady nezávislé, a tudíž vzájemné kovarianční matice $\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell)}$ nulové, lze rovnice (2.40) přepsat do tvaru

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k,F} = \sum_{\ell=1}^S \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell)-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\ell)}, \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{-1} = \sum_{\ell=1}^S \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell)-1}, \quad (2.42b)$$

kde bylo zavedeno zkrácené značení $\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell)} \triangleq \mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\ell)}$. V tomto speciálním případě fúze má slučování odhadů jednoduchou interpretaci, která je zřejmá po přepsání do informačních proměnných. Celková informace je dána součtem nezávislých informací.

Jiným přístupem k vážení lokálních odhadů (2.35) je získání nějakého průměru [62, 14, 60, 61] bez snahy minimalizovat informační míry. Průměry jsou získávány decentralizovaným způsobem, každý estimátor si vyměňuje své odhady se svými sousedy, přičemž síť estimátorů může být libovolná, jsou povoleny cykly. Po obdržení odhadů je k lokálnímu odhadu přičten vážený průměr rozdílů sousedních odhadů a lokálního odhadu, použité váhy jsou skalární. Takto je po mnoha iteracích dosaženo aritmetického průměru odhadů, kde váhy jsou skalární, ale blíže neurčené. Závisí na vahách lokálních průměrů. Stejným způsobem je možné zprůměrovat i kovarianční matice chyb, ale výsledek není roven výsledné kovarianční matici chyby odhadu.

Uvedený postup je nazýván konsensem, výpočet nějakého průměru je ale spíše kompromisem. Algoritmy konsensu byly navrženy v deterministickém rámci, v pravděpodobnostním rámci je nelze používat bez rozmyslu. Lze je smysluplně použít na lokální informační vektory $\hat{\mathbf{y}}_{k|k}^{(\ell)}$. Lokální informační matice $\mathbf{Y}_{k|k}^{(\ell)}$ pak musejí být průměrovány se stejnými skalárními lokálními vahami. Tento postup je ale poněkud heuristický. V kapitole 2.3.2 je uvedeno formálně stejné pravidlo fúze, které ovšem vychází z vyšších požadavků a které určuje lokální váhy na základě zvoleného kritéria.

2.3 Konzervativní fúze

Kapitola 2.2 představila odhadování stavu pomocí více estimátorů. Distribuované a decentralizované odhadování vycházelo z rozdělení zátěže centrálního estimátoru mezi více lokálních estimátorů a bylo založeno na nezávislosti šumů měření mezi jednotlivými lokálními estimátory (2.26), (2.28). Vážení bodových odhadů podle maximální věrohodnosti vyžadovalo počítání vzájemných kovariančních matic (2.39), síť estimátorů byla omezena stejně jako u distribuovaného odhadování na několik lokálních estimátorů a jeden centrální. Pomocí algoritmů konsensu bylo možné vypočítat nějaký vážený průměr, ale cílem průměrování bylo získání zprůměrovaného, nikoliv lepšího, odhadu.

Obecná informační fúze vyžaduje značný stupeň volnosti. Obvyklým předpokladem je například pouze lokální znalost dat a způsobu jejich získávání. Dalším předpokladem bývá neznalost společné informace, tedy vzájemných závislostí informací. Pak mohou být informační zdroje bez problémů přidávány a odebírány, graf reprezentující schéma předávání informací může být libovolný a může být i časově proměnný. Fúze informací tedy musí respektovat neznámou společnou informaci. Pro odhady je tudíž nutno zavést vztah, který by respektování neznámého vyjadřoval.

Pro bodové odhady je v literatuře zaveden pojem konzervativní odhad [88], někdy též nazývaný jako kovariančně konzistentní. Odhad, chápaný jako dvojice skládající se z vektoru $\hat{\mathbf{x}}$ a matice kvality odhadu \mathbf{P} , je konzervativní, pokud splňuje nerovnost

$$\mathbf{P} - \mathbb{E}\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T\} \geq 0, \quad (2.43)$$

kteřou je myšleno, že výraz na levé straně je pozitivně semidefinitní matice. Matice kvality odhadu \mathbf{P} vyjadřuje sebehodnocení kvality odhadu a pro odhad optimální podle střední kvadratické chyby je ideální matice kvality odhadu \mathbf{P} rovna kovarianční matici chyby odhadu. Jako s kovarianční maticí je s ní také zacházeno. Slovy lze podmínku konzervativnosti odhadu popsat následovně. Matice kvality odhadu \mathbf{P} musí být alespoň rovna střední hodnotě kvadrátu chyby odhadu. Volněji řečeno, předpokládaná chyba odhadu nesmí být menší než skutečná chyba odhadu. Je třeba předeslat, že pro hustoty pravděpodobnosti zatím nebyla konzervativnost definována.

2.3.1 Sjedenocení kovariancí

Konzervativnost bodového odhadu se přímo využívá v takzvaném sjedenocení kovariancí [46, 13, 44]. Tento přístup není používán ke slučování informací obsažených v jednotlivých lokálních odhadech, ale k zavedení odhadu, který by nebyl v rozporu se žádným lokálním odhadem. Cílem není odhady sloučit, cílem je nalezení odhadu konzervativního vůči všem lokálním odhadům. Takový odhad má využití v případě, kdy existují pochybnosti o správnosti lokálních odhadů. Tyto pochybnosti mohou vznikat na vyšších úrovních abstrakce zpracování informace. Příkladem je špatná asociace. Špatné přiřazení dat k objektům nelze rozpoznat na dosud uvažované úrovni daného systému. Odhady tak mohou být znehodnoceny. Protože nelze s jistotou říci, který odhad vybrat jako správný, je nutno raději předpokládat větší chybu, než nabýt mylné jistoty.

Sloučené odhady $\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)}$ s maticí kvality $\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)}$ jsou vymezeny nerovnostmi

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)} \geq \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)} + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)})(\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)})^T, \quad (2.44)$$

kde $\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$ a nerovnost znamená, že výraz levá strana minus pravá strana je pozitivně semidefinitní. Výchozí myšlenkou je využití podmínky konzervativnosti (2.43) pro hypotézy, že stav \mathbf{x} má střední vektor $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)}$ a kovarianční matici $\mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)}$.

Z vymezených odhadů je třeba vybrat jeden. Například takový, který má minimální determinant matice kvality odhadu,

$$(\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)}, \mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)}) \in \arg \min_{(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P})_{(2.44)}} \det(\mathbf{P}). \quad (2.45)$$

Protože hledání optimálního odhadu je výpočetně náročné, může být cílem použít nějaké suboptimální řešení. Například zvolit sloučený odhad $\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)}$ jako průměr lokálních odhadů $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)}$ a podle podmínky (2.44) dopočítat matici kvality $\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)}$. Pro dva odhady, $\lambda = 1, 2$, má úloha řešení v uzavřeném tvaru

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(2)}, \quad (2.46a)$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{P}_{k|k}^{(1)} + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(1)})(\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(1)})^T, \quad (2.46b)$$

$$\mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^T = (\mathbf{S}^{-1})^T \left(\mathbf{P}_{k|k}^{(2)} + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(2)})(\hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(2)})^T \right) \mathbf{S}^{-1}, \quad (2.46c)$$

$$\mathbf{P}_{k|k,F} = \mathbf{S}^T \mathbf{V} \max(\mathbf{D}, I_{n_x}) \mathbf{V}^T \mathbf{S}, \quad (2.46d)$$

kde \mathbf{S} je maticová odmocnina, \mathbf{V} je matice vlastních vektorů, \mathbf{D} je diagonální matice vlastních čísel a funkce \max je maximum po složkách.

Zobecnění sjednocení kovariancí bylo provedeno v [68]. Protože konzervativnost hustot pravděpodobnosti nebyla definována, neexistuje zobecnění pro hustoty.

2.3.2 Průnik kovariancí

S konzervativností bodových odhadů je v takzvaném průniku kovariancí [43, 19, 20, 95] zacházeno odlišným způsobem. Předpokládá se, že všechny lokální odhady jsou konzervativní. Namísto hledání odhadu konzervativního vůči všem lokálním odhadům je hledán konzervativní sloučený odhad, který musí být konzervativní nehledě na neznámé vzájemné kovarianční matice $\mathbf{P}_{k|k}^{(\ell\lambda)}$, jež mohou být libovolné.

Protože informace mohou být závislé, nelze je jednoduše sčítat jako ve vztahu pro fúzi (2.42). Ale lze je průměrovat. Metoda průniku kovariancí používá vážený aritmetický průměr s vahami ω_λ , $\omega_\lambda \geq 0$, na lokální odhady v informačním tvaru. Rovnice fúze lze zapsat jako

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)}{}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k,F}^{(\ell)} = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)}{}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)}, \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)}{}^{-1} = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)}{}^{-1}, \quad (2.47b)$$

$$1 = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda, \quad (2.47c)$$

váhy $[\omega_\lambda]_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+}$ budou označovány symbolem $\omega^{(\ell)}$. Konzervativních sloučených odhadů je mnoho. Proto se podobně jako ve sjednocení kovariancí zavádí kritérium, podle kterého je možné vybrat nejlepší váhy. Častým kritériem je neurčitost odhadu. Sloučená matice kvality $\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)}$ má být co možná nejmenší, jako kritérium je volen její determinant.

Optimální váhy $\omega_*^{(\ell)}$ jsou pak dány

$$\omega_*^{(\ell)} \in \arg \min_{\omega^{(\ell)}} \det(\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)}{}^{-1}). \quad (2.48)$$

Místo výpočetně náročnějšího hledání optimálních vah je možno použít rychlých suboptimálních řešení [59, 29]. Váhy lze například volit úměrné determinantům inverzí lokálních kovariančních matic,

$$\omega_\lambda \propto \det \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)}{}^{-1}, \quad (2.49)$$

tedy determinantům lokálních informačních matic. Toto doporučení vychází z jednoduché úvahy. Odhadu s malou informační maticí je přiřazena malá váha, na tento odhad nebude brán zřetel. Odhad s velkou informační maticí je důležitý, bude mu náležet velká váha. Důmyslnější volbou je například

$$\omega_\lambda \propto \det(\mathbf{P}_{\mathcal{N}_\ell^+}^{-1}) - \det(\mathbf{P}_{\mathcal{N}_\ell^+}^{-1} - \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)}{}^{-1}) + \det(\mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)}{}^{-1}), \quad (2.50a)$$

kde matice $\mathbf{P}_{\mathcal{N}_\ell^+}^{-1}$ je dána

$$\mathbf{P}_{\mathcal{N}_\ell^+}^{-1} = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)}{}^{-1}. \quad (2.50b)$$

Tento postup bere v potaz nejen velikosti informačních matic, ale i vzájemné vztahy odhadů. Malé kovariance pro všechny složky stavu jsou upřednostňovány před malým součinem kovariancí jednotlivých složek.

Nedostatkem metody obecně je přílišná konzervativnost. Matice kvality sloučeného odhadu $\mathbf{P}_{k|k,F}^{(\ell)}$ je často velmi velká oproti kovarianční matici vypočtené v případě, kdy by závislosti lokálních odhadů byly známé. Zobecnění průniku kovariancí pro částečnou znalost vzájemných závislostí lokálních odhadů bylo provedeno v [35, 34, 40].

2.3.3 Konzervativní fúze hustot pravděpodobnosti

Metodu průniku kovariancí lze zobecnit pro hustoty pravděpodobnosti. Konvexní kombinace bodových odhadů (2.47) může být nahrazena váženým geometrickým průměrem hustot pravděpodobnosti [37]. Rychlé suboptimální algoritmy byly navrženy v [94, 28]. Vážený geometrický průměr hustot $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ s vahami průměru ω_λ , $\omega_\lambda \geq 0$, je dán

$$p_a(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) \propto \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}), \quad \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda = 1. \quad (2.51)$$

Značení p_a upozorňuje, že hustota získaná konzervativní fúzí hustot není rovna hustotě $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$, kterou by poskytoval centralizovaný estimátor, ale je pouze nějakou aproximací. Kritériem pro výběr optimálních vah $\omega_*^{(\ell)}$ může být opět neurčitost, tentokrát hustoty pravděpodobnosti. Neurčitost sloučené hustoty $p_a(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)})$ může být měřena diferenciální Shannonovou entropií $\mathcal{H}(p_a)$,

$$\mathcal{H}(p_a) = - \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_a(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) \ln p_a(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) d\mathbf{x}_k, \quad (2.52)$$

$$\omega_*^{(\ell)} \in \arg \min_{\omega^{(\ell)}} \mathcal{H}(p_a). \quad (2.53)$$

Minimalizaci kritéria se lze vyhnout použitím suboptimálních vah. Je třeba nezapomínat, že diferenciální Shannonova entropie může být záporná. Proto je třeba používat vhodnou transformaci na nezáporné hodnoty, například pomocí exponenciální funkce. Suboptimální váhy mohou být vypočítány například jako

$$\omega_\lambda \propto \exp(-\mathcal{H}(p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}))). \quad (2.54)$$

Jiným přístupem k nalezení vah geometrického průměru hustot (2.51) je hledání takové sloučené hustoty $p_a(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega_*^{(\ell)})$, která by byla v nějakém smyslu nejbližší k lokálním hustotám $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$. Kvůli přehlednosti zápisu bude dále použito zkrácené značení lokálních hustot $p_\lambda \triangleq p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$, pro sloučenou hustotu bude použito $p_a \triangleq p_a(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)})$. Pro srovnání hustot pravděpodobnosti se často používá Kullbackova-Leiblerova divergence $\mathcal{D}(p_a||p_\lambda)$, která je definována vztahem

$$\mathcal{D}(p_a||p_\lambda) = \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_a(\mathbf{x}_k) \ln \frac{p_a(\mathbf{x}_k)}{p_\lambda(\mathbf{x}_k)} d\mathbf{x}_k. \quad (2.55)$$

V souladu s tímto přístupem bude optimální hodnota divergence označena \mathcal{D}^* . Pro dvě slučované hustoty p_λ a p_ℓ navíc platí $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}(p_a^*||p_\lambda) = \mathcal{D}(p_a^*||p_\ell)$, kde rovnost lokálních divergencí byla omezující podmínkou minimalizace $\mathcal{D}(p_a^*||p_\ell)$. Lze ukázat,

že platí rovnost

$$\mathcal{D}^* = -\ln \min_{\omega^{(\ell)}} \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p_\lambda^{\omega_\lambda} d\mathbf{x}_k. \quad (2.56)$$

Hodnota \mathcal{D}^* se nazývá Chernoffova informace [23]. Na hledání vah $\omega^{(\ell)}$ je možné pohlížet jako na následující minimalizaci,

$$\omega_*^{(\ell)} \in \arg \min_{\omega^{(\ell)}} \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p_\lambda^{\omega_\lambda} d\mathbf{x}_k. \quad (2.57)$$

V tomto případě je kritérium rovno konstantě, již je třeba dělit vážený geometrický průměr hustot (2.51) tak, aby výsledná funkce byla hustotou pravděpodobnosti.

I pro tento přístup byla navržena suboptimální řešení. Například je možno řešit soustavu rovnic

$$\mathcal{D}(p_\lambda \| p_\kappa) \omega_\kappa - \mathcal{D}(p_\kappa \| p_\lambda) \omega_\lambda = 0 \quad (2.58)$$

pro $\kappa \in \mathcal{N}_\ell$. Případně lze vybrat nějakou kombinaci lineárně nezávislých rovnic. Pak suboptimální váhy mohou být vypočteny například podle vztahu

$$\omega_\lambda \propto \frac{\mathcal{D}(p_\lambda \| p_\ell)}{\mathcal{D}(p_\ell \| p_\lambda)} \prod_{\kappa \in \mathcal{N}_\ell} \mathcal{D}(p_\ell \| p_\kappa), \quad (2.59)$$

kde pro $\lambda = \ell$ je třeba dodefinovat zlomek před součinem jako 1.

Zobecnění pravidla pro bodové odhady (2.47) na pravidlo pro hustoty pravděpodobnosti (2.51) bylo provedeno na základě souvislostí s parametry Gaussových rozdílů. Bylo tedy heuristické, ale je možno přidat i jiné argumenty. Vážený geometrický průměr hustot lze interpretovat jako kombinaci hustot, které jsou považovány za nezávislé, přičemž možné závislosti byly zmírněny exponenciálním zapomenutím hustoty.

Je vhodné připomenout, že konzervativnost hustot nebyla zatím v literatuře definována. Konzervativnost je však možno vztáhnout na operaci fúze [41]. Fúze hustot je konzervativní, jestliže pro každý stav \mathbf{x}_k není podceněna hustota pravděpodobnosti. Řečeno jinými slovy, nesmí být podceněna neurčitost jednotlivých stavů, tedy nesmí být přeceněna informace. Podmínku konzervativnosti fúze lze zapsat jako

$$\forall \mathbf{x}_k : p_a(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}) \geq \min_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \left(p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) \right). \quad (2.60)$$

Geometrický průměr hustot této podmínce vyhovuje. Fúze hustot pomocí geometrického průměru je tudíž konzervativní.

Globální filtry poskytují aproximace obecných hustot. Problémy spojené s realizací váženého geometrického průměru (2.51), případně obecné konzervativní fúze (2.60) jsou z části společné s problémy při řešení přesné fúze (2.30). Pro částicové filtry je opět třeba všechny hustoty aproximovat společnými body. Nově přibývá nutnost počítat kritérium a určení optimálních vah geometrického průměru.

Fúze Gaussových směsí byla zkoumána například v [89, 39], kde bylo navrženo použít průnik kovariancí pro všechny kombinace složek směsí. Toto heuristické řešení však neodpovídá fúzi hustot pravděpodobnosti. Problémy dalšího navrženého postupu jsou nalezení vhodné aproximace mocniny Gaussovy směsi a určení diferenciální Shannonovy entropie.

Uvedeným problémům je možno se vyhnout použitím jiných pravidel vyhovujícího podmínce konzervativnosti (2.60). Otázkou však zůstává jejich interpretace. Například vážený aritmetický průměr hustot pravděpodobnosti lze chápat jako vážení hypotéz. Tento výklad příliš neladí se skutečností, že všechny lokální hustoty mohou být správné. Odlišnost lokálních hustot není dána přijetím špatných hypotéz, ale je způsobena zpracováním jiných lokálních dat. Fúze by tedy spíše měla lokální hustoty kombinovat, než z nich vybírat.

2.4 Shrnutí

V kapitole 2 byla nejprve představena úloha odhadu stavu dynamického stochastického systému. Odhad může být bodový, nejčastěji ve formě středního vektoru s kovarianční maticí chyby, nebo může být dán hustotou pravděpodobnosti, obvykle aproximované Gaussovou směsí nebo reprezentované částicemi. Pro modely popisující systém pouze přibližně je zajímavou úlohou zvážení dostupné, ale v modelu nezahrnuté, znalosti omezení stavu.

V další části byla popsána úloha odhadu stavu pomocí více estimátorů. Základním přístupem bylo rozdělení úkolů centrálního estimátoru mezi více lokálních estimátorů. Nešlo však o distribuovaný výpočet, lokální estimátory zpracovávaly příslušná lokální data, centrální estimátor slučoval lokální odhady. Dále byl odstraněn centrální estimátor, ale odhady dosahovaly kvalit centralizovaného odhadu. Méně informací bylo využíváno pro centrální slučování bodových odhadů podle maximální věrohodnosti. Celkový pohled na fúzi byl od této chvíle opačný, namísto dělení úkolů centrálního estimátoru bylo uvažováno slučování odhadů již existujících lokálních estimátorů. Následně bylo naznačeno průměrování bodových odhadů vycházejících z deterministického pohledu.

Váženému průměru odhadů byla věnována poslední část. Pravděpodobnostní pohled zavedl pojem konzervativnosti bodového odhadu a konzervativnosti fúze. Dále zavedl kritérium pro určení nejlepších vah. Kromě kombinování bodových odhadů bylo možné využít definici konzervativnosti k nalezení odhadu, který by nebyl v rozporu se žádným lokálním bodovým odhadem. Takový přístup má uplatnění například při znalosti chyb, které mohou nastat vně definovaného systému, na vyšší úrovni abstrakce. Jednou z variant takových chyb je přiřazení měření pocházejícího z cizího objektu ke sledovanému objektu.

Celkově byla fúze řešena pro bodové odhady, hustotám pravděpodobnosti je v literatuře věnována menší pozornost. Fúze hustot byla částečně řešena pro Gaussovy směsi, pro částice byly provedeny jen základní úvahy, obvykle je navrhován přechod k jiné reprezentaci hustoty, případně kombinace přístupů. Navíc je třeba počítat entropie nebo divergence hustot pravděpodobnosti, ať už za účelem hledání optimálních vah nebo návrhu suboptimálních vah. Omezení stavu v úlohách fúze uvažováno nebylo. Další nevyřešenou otázkou zůstala definice konzervativnosti pro hustoty pravděpodobnosti.

Kapitola 3

Cíle práce

Kapitola 2 představila úlohu odhadu stavu dynamických stochastických systémů, standardní bodové a globální filtry a úlohu odhadování s omezením. Dále představila úlohu odhadu stavu pomocí více estimátorů majících přístup pouze k lokálním měřením. Fúze odhadů poskytovaných těmito lokálními estimátory byla rozčleněna na fúzi, jejíž cílem bylo dosažení stejných výsledků jako u centralizovaného odhadování, a ostatní fúzi, vymezenou vážením lokálních odhadů.

V úlohách, kde estimátory jsou uvažovány jako samostatně fungující celky, nelze kromě lokální dostupnosti měření předpokládat ani nezávislost lokálních měření či znalost způsobu získávání ostatních lokálních odhadů. Proto byla pozornost věnována konzervativní fúzi. Konzervativní fúze byla v literatuře řešena především pro bodové odhady, zobecnění pravidla fúze pro fúzi hustot bylo provedeno heuristicky na základě shody pravidel v případě fúze Gaussových hustot. Pro zobecněné pravidlo dané váženým geometrickým průměrem lokálních hustot byla navržena různá kritéria a přibližná řešení vah. Nicméně v literatuře není dostatečně řešeno provedení fúze pro hustoty v daných neparametrických reprezentacích, jakými jsou například směsi Gaussových hustot nebo částice.

Reprezentace hustot pomocí částic představuje v současnosti hlavní proud v použití globálních filtrů. V pokročilých úlohách odhadu, jakými jsou odhadování s omezením či fúze odhadů, není použití částicových filtrů podrobněji zpracováno. Je proto žádoucí přenést myšlenky částicových filtrů i do těchto úloh odhadu.

Na základě současného stavu řešení fúze hustot pravděpodobnosti jsou tudíž stanoveny následující cíle.

1. *Rozvoj odhadování s omezením s ohledem na fúzi hustot.* Prozkoumat omezení hustot pravděpodobnosti z teoretického hlediska. Zabývat se fúzí hustot v úlohách s omezením.
2. *Přizpůsobení částicových filtrů pro použití ve fúzi hustot.* Nalézt postupy nevyžadující změny reprezentace hustot. Navrhnout výpočetně efektivní varianty částicových filtrů pro použití ve fúzi hustot.
3. *Fúze hustot pravděpodobnosti reprezentovaných částicemi.* Navrhnout fúzi částic pro stávající pravidla fúze hustot.
4. *Zobecnění konzervativnosti.* Definovat konzervativnost pro hustoty pravděpodobnosti. Použít navržené definice ke zobecnění konzervativní fúze bodových odhadů.

Celkově lze stanovené cíle rozdělit do dvou proudů. Prvním je rozvoj a přizpůsobení stávajících estimátorů s ohledem na problémy spjaté s fúzí hustot v dané reprezentaci. Do prvního proudu spadají cíle číslo 1, 2 a 3, jež se zaměřují především na výpočetní hledisko. Druhým proudem je pak rozvoj myšlenek konzervativní fúze hustot pravděpodobnosti. Je představován cílem číslo 4 a zaměřuje se na teoretické hledisko konzervativní fúze.

Kapitola 4

Fúze a částicové filtry

Tato kapitola se zabývá prvním proudem stanovených cílů disertační práce. Kapitola 4.1 pojednává o odhadování s omezením, kapitola 4.2 skloubí marginální částicový filtr s marginalizovaným částicovým filtrem. Po důsledném zachovávání částicové reprezentace slučovaných hustot je přikročeno k fúzi částic, provedené v kapitole 4.3.

4.1 Odhadování s omezením

Úlohy odhadu stavu systému, kdy model přesně neodpovídá systému a kdy je známa dodatečná informace o množině přípustných stavů, byly představeny v kapitole 2.1.3. Jak bylo řečeno, tyto úlohy vznikají například při aproximaci složitých nelineárních systémů pomocí jednoduchých lineárních modelů nebo při využití kontextu, tedy když odhad estimátoru je upraven pomocí informace pocházející z vyšších úrovní abstrakce zpracování dat. V literatuře byly navrženy postupy omezení bodových odhadů i hustot pravděpodobnosti, ale nebyl proveden výklad navržených postupů. Následující podkapitola se proto zabývá interpretací omezení hustot pravděpodobnosti.

4.1.1 Interpretace průmětu a oříznutí hustot

Nejprve je třeba vyjádřit danou úlohu v hustotách pravděpodobnosti. Je navržena následující formulace.

Systém je modelován pomocí známých hustot (2.3) a doplňující informace (2.20), která vymezuje stavy, jichž může systém nabývat. Systém je tedy popsán subjektivně. Vzhledem k tomu, že systém splňuje dané omezení (2.20), musí být skutečné hustoty systému nulové pro stavy $\mathbf{x}_k \notin \mathcal{C}_k$ i pro stavy $\mathbf{x}_{k+1} \notin \mathcal{C}_{k+1}$. Protože hustoty (2.3) jsou pouze nepřesným modelem systému, jsou v úloze s omezením nenulové pro některé nepřípustné stavy $\mathbf{x}_k \notin \mathcal{C}_k$, $\mathbf{x}_{k+1} \notin \mathcal{C}_{k+1}$. Na druhou stranu se předpokládá, že model je rozumnou aproximací systému.

Vzhledem k nenulovosti hustot modelu pro nepřípustné stavy nabývají i aposteriorní hustoty $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k-1})$, $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k)$ nenulových hodnot pro nepřípustné stavy $\mathbf{x}_k \notin \mathcal{C}_k$. Je tedy zřejmé, že aposteriorní hustoty vypočtené na základě modelu pouze aproximují skutečné aposteriorní hustoty. Úlohou využití znalosti omezení je vynucené vynulování aposteriorních hustot $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{k-1})$, $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k)$ v nepřípustných stavech. Všeobecně se předpokládá, že tato operace dává lepší aproximace skutečných hustot, ale je zřejmé, že výsledky závisejí na kvalitě modelu i na způsobu provedení této operace.

S uvedeným pohledem na odhadování s omezením je možné se zamyslet nad vynucením omezení. V případě hustot nelze využít omezení Kalmanova zisku, zbývá tedy využití pseudoměření nebo průmětu.

Využití pseudoměření může být vykládáno jako použití dodatečné informace. V kapitole 2.1.3 byl diskutován přístup pro omezení rovností a nerovností. Po bližším prozkoumání je zřejmé, že oba případy vedou ke stejnému chápání omezené hustoty. Neomezené aposteriorní hustoty jsou dále podmíněny. V případě omezení nerovností je podmínkou $\mathbf{x}_k \in \mathcal{C}_k$, v případě omezení rovností je podmínkou využití rovnice měření (2.22) s pseudoměřením $\mathbf{c}_k \triangleq 0$. Podmiňování hustot funguje způsobem, že původní hustota je oříznuta a zbylá funkce vynásobena tak, aby výsledkem opět byla hustota pravděpodobnosti. Na základě modelu určená pravděpodobnost, že stav porušuje omezení, $\mathbf{x}_k \notin \mathcal{C}_k$, je pak poměrně rozprostřena mezi stavy vyhovující omezení. Oříznutí hustoty tedy odstraňuje neznalost nepřipustnosti stavů, přičemž navenek se předstírá, že model přesně popisuje systém. Přiřazení nenulové hustoty pravděpodobnosti nepřipustným stavům odpovídá myšlence, že porušení omezení je dáno špatným modelováním hustot pravděpodobnosti v daných stavech.

Spíše než jako použití dodatečné informace může být vynucení omezení prostřednictvím průmětu vykládáno jako úprava aproximace. Pro bodové odhady se průmět používá na odhady, případně na σ -body. Částicové filtry používají průmět na všechny částice. Rozvinutím myšlenky pro hustoty lze dojít k chápání průmětu hustot jako transformace náhodné veličiny. Každému stavu \mathbf{x}_k porušujícímu omezení, $\mathbf{x}_k \notin \mathcal{C}_k$, je přiřazen přípustný stav $\mathbf{x}_k^\dagger, \mathbf{x}_k^\dagger \in \mathcal{C}_k$. V případě omezení nerovností je výsledek zpravidla problematický, neboť přiřazený stav je obvykle konstruován jako stav vyhovující hraniční rovnosti. Po omezení tak z hustoty pravděpodobnosti nevznikne hustota pravděpodobnosti, ale funkce daná kombinací hustoty pravděpodobnosti ve stavovém prostoru modelu a hustoty pravděpodobnosti v podprostoru vymezeném rovností. Naproti tomu omezení rovností umožňuje zajímavou interpretaci.

V úlohách odhadu s omezením daným rovností je dimenze prostoru stavu systému menší než dimenze prostoru stavu modelu. Rozdíl dimenzí odpovídá počtu nezávislých složek omezujících funkcí (2.21). Za určitých předpokladů tak teoreticky lze zavést takovou souřadnou soustavu v prostoru stavu modelu, že podprostor stavu systému je dán souřadnicemi \mathbf{x}_k^\dagger a komplementární podprostor souřadnicemi \mathbf{c}_k (2.22). V nové souřadné soustavě platí, že omezující funkce $c_k^\dagger([\mathbf{x}_k^\dagger]^\top, \mathbf{c}_k^\top]^\top)$ je nulová právě tehdy, když stav modelu vyhovuje omezení, tedy když $c_k^\dagger([\mathbf{x}_k^\dagger]^\top, 0^\top]^\top) = 0$. Dále platí, že průmět bodu $[\mathbf{x}_k^\dagger]^\top, \mathbf{c}_k^\top]^\top$ pomocí transformace \mathbf{p}^\dagger nuluje pouze nadbytečné proměnné \mathbf{c}_k , $\mathbf{p}^\dagger([\mathbf{x}_k^\dagger]^\top, \mathbf{c}_k^\top]^\top) = [\mathbf{x}_k^\dagger]^\top, 0^\top]^\top$.

Jak bylo výše zmíněno, použití pseudoměření odpovídá myšlence využití dodatečné informace $\mathbf{c}_k = 0$, která byla modelem ignorována. Naproti tomu průmět přiřazuje neomezeným stavům $[\mathbf{x}_k^\dagger]^\top, \mathbf{c}_k^\top]^\top$ stavy omezené $[\mathbf{x}_k^\dagger]^\top, 0^\top]^\top$. Protože v případě omezení rovností se do omezených stavů zobrazí mnoho neomezených stavů, je výsledná omezená hustota dána integrací přes hustoty v příslušných neomezených stavech. V nových souřadnicích se tudíž integruje přes nadbytečné proměnné \mathbf{c}_k . Z tohoto pohledu je zřejmé, že využití průmětu odpovídá marginalizaci. Porušení omezení není chápáno jako chybné přiřazení nenulové hustoty danému stavu modelu, ale jako chybné rozprostření hustoty pravděpodobnosti stavu systému do prostoru vyšší dimenze. Nápravou pak není omezení se na původní podprostor, ale přesunutí hustoty zpět do původního podprostoru. Místo

neznalosti nepřípustnosti stavu a předstírání přesnosti modelu tak používání průmětu odpovídá myšlence, že model je nepřesný a hustoty v přípustných stavech jsou získány uvažováním všech příslušných nepřesností.

4.1.2 Architektura fúze v úlohách s omezením

Tato podkapitola se zabývá architekturou systému odhadování s omezením. Uvedené přístupy byly navrženy a zkoumány v autorově článku [1].

Využití znalosti omezení bylo chápáno jako prostředek ke zlepšení aproximace, která přiřazovala nenulové hustoty pravděpodobnosti nepřípustným stavům. Základními přístupy k vynucení omezení byly oříznutí hustoty a její deformace pomocí průmětu. Neohledě na zvolený přístup lze úlohy s omezením členit podle času vynucení omezení.

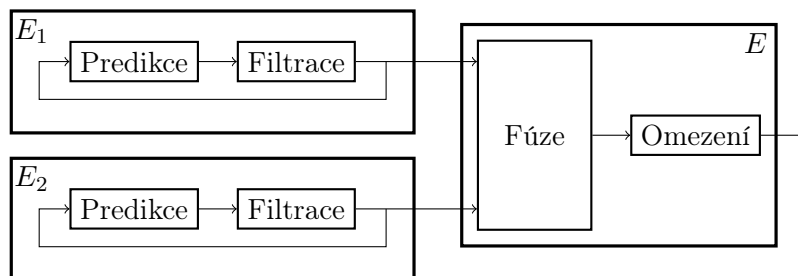
Standardní filtry často používají logické dělení procesu odhadování na filtrační a prediktivní část. Ve filtrační části je využito aktuální měření funkce stavu, v prediktivní části je určován apriorní odhad stavu na základě aposteriorního odhadu v předešlém časovém kroku. Obě části pak pracují ve smyčce.

Vynucení omezení tvoří další část procesu odhadování. Je tedy otázkou, kam jej zařadit. Za předpokladu, že výstupem estimátoru jsou filtrační odhady, lze omezení navázat na výstup nebo omezení zařadit do smyčky predikce–filtrace. Další otázkou je, zda má být omezení vynucováno pouze jednou. Lze ho totiž zařadit jak za prediktivní část, tak za filtrační část. Z hlediska hustot pravděpodobnosti je dvojitá zařazení zbytečné, protože ve filtrační části je prediktivní hustota pouze přenásobena věrohodnostní funkcí. Tudíž nelze z nulové omezené prediktivní hustoty v nepřípustném stavu získat nenulovou filtrační hustotu. Filtrační hustota tak už automaticky omezení vyhovuje. Pro bodové odhady a nelineární omezení však vzhledem k aproximativní povaze vynucení omezení má smysl dvojitá zařazení zvažovat.

V případě odhadování pomocí více estimátorů je situace ztížena přidáním kroku fúze v dalším estimátoru. Pro jednoduchost bude uvažováno nejjednodušší uspořádání estimátorů, tedy dva stejné lokální estimátory posílající své odhady do centrálního estimátoru, od kterého není vedena zpětná vazba k lokálním estimátorům. Fúzi odhadů tak lze zkoumat off-line, není vázána na vnitřní uspořádání lokálních estimátorů.

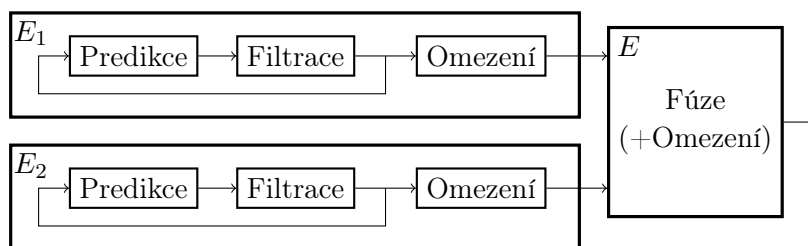
Přístupy zkoumané v [1] jsou znázorněny na obrázcích 4.1–4.4.

Obrázek 4.1 odpovídá situaci, kdy omezení je známo pouze centrálnímu estimátoru E . Na vstupní odhady pocházející z lokálních estimátorů, které nebyly navrženy tak, aby poskytovaly omezené odhady, je použita standardní fúze odhadů. Sloučený odhad je pak upraven na základě znalosti omezení. Tento přístup je dobře pochopitelný ve zmíněné off-line fúzi.



Obrázek 4.1: Omezení mimo smyčku, fúze neomezených odhadů.

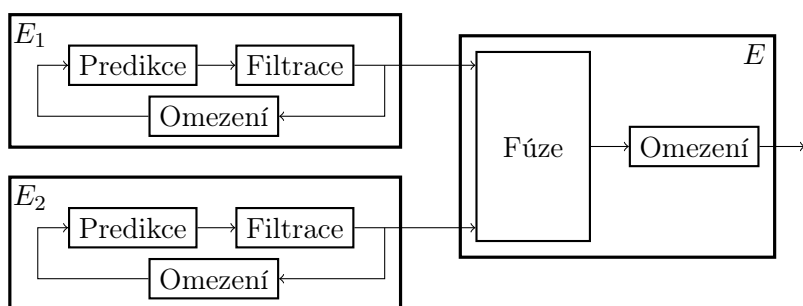
Obrázek 4.2 popisuje situaci, kdy omezení je známo i lokálním estimátorům, ale není používáno ve smyčce predikce–filtrace. Tato situace může například nastat, pokud je operace omezení drahá a lokální estimátory ji využívají pouze v časech, kdy jsou odhady posílány do centrálního estimátoru. Jiným příkladem je off-line omezení lokálních odhadů a následné off-line slučování. Další možností je modifikace schématu z obrázku 4.1, kdy omezení nejsou částí lokálních estimátorů, ale jsou včleněny před operací fúze v centrálním estimátoru. Závěrečné volitelné omezení výsledků fúze má smysl opět především v případech bodových odhadů a nelineárního omezení, při korektním zpracování omezených hustot je sloučená hustota již omezená.



Obrázek 4.2: Omezení mimo smyčku, fúze omezených odhadů.

V případě bodových odhadů a nelineárního omezení je třeba upozornit na možnost problémů s fúzí omezených odhadů. Tyto problémy budou diskutovány v kapitole 4.1.3.

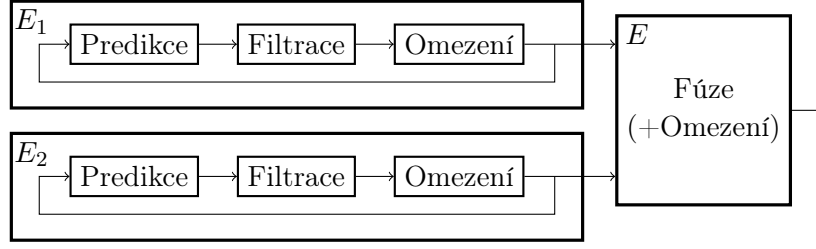
Na obrázcích 4.3 a 4.4 je zachycena fúze neomezených a omezených odhadů, kde lokální estimátory využívají omezení ve smyčce. Obecně lze očekávat zlepšení výsledků oproti předchozím případům, protože omezení je používáno častěji. Ale protože model systému pouze přibližně popisuje systém a vynucení omezení je pouze úprava aproximace, nemusí ke zlepšení dojít vždy. Jinou otázkou je, o kolik se výsledky mohou zlepšit. Je-li model dobrý, pak omezení nenesou moc informace a ani jeho vícenásobné použití se nemusí vyplatit. Je-li naopak model velmi špatný, pak ani použití omezení nemůže odhad rozumně vylepšit.



Obrázek 4.3: Omezení ve smyčce, fúze neomezených odhadů.

4.1.3 Omezení rovností a unscntovaná transformace

V této podkapitole jsou diskutovány problémy s omezováním bodových odhadů pomocí rovnosti. Uvedená diskuze byla prezentována v autorově článku [1]. Bodové odhady jsou v souladu s kapitolou 2.1.1 představovány vektorem a maticí. Omezení je provedeno průmětem.



Obrázek 4.4: Omezení ve smyčce, fúze omezených odhadů.

Průmětem se rozumí transformace \mathbf{p} , která stavům modelu \mathbf{x}_k přiřazuje omezené stavy $\mathbf{x}_k^\dagger \in \mathcal{C}_k$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_k^\dagger$. Stavy \mathbf{x}_k^\dagger vyhovující omezení, $\mathbf{x}_k^\dagger \in \mathcal{C}_k$, průmět zachovává, $\mathbf{x}_k^\dagger = \mathbf{p}(\mathbf{x}_k)$.

Je-li model lineární gaussovský a omezení lineární, pak bodové odhady reprezentují Gaussovy hustoty. Omezený odhad, například filtrační, je pak jednoduše získán průmětem středního vektoru a přenásobením kovarianční matice pomocí Jacobiho matice $\nabla \mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})$,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\dagger = \mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}), \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^\dagger = \nabla \mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \mathbf{P}_{k|k} \nabla \mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})^\top. \quad (4.1b)$$

V uvedeném speciálním případě odhad opět reprezentuje Gaussovu hustotu, i když ta je přiřazena pouze podprostoru prostoru stavu modelu. Kovarianční matice $\mathbf{P}_{k|k}^\dagger$ je tudíž singulární. V nelineárním případě je Jacobiho matice vyhodnocena v neomezené střední hodnotě $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ a kovarianční matice získaná vztahem (4.1b) reprezentuje tečný podprostor.

V případě fúze lokálních omezených odhadů představují singulární kovarianční matice vážný problém. Jsou-li lokální odhady $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(1)}$, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(2)}$ různé, pak i Jacobiho matice vyhodnocené v těchto bodech jsou různé, stejně jako tečné podprostory. Jak ukazuje následující příklad, ani použití pseudoinverze, označené pomocí $^{-1\text{MP}}$, neumožňuje použití předpisů fúze (2.42), (2.47).

Jsou-li oba tečné prostory stejné, pak určení sloučené kovarianční matice nepůsobí velké problémy. Stačí pracovat se pseudoinverzemi a případně determinant (2.48) nahradit pseudodeterminantem. Jsou-li čísla m a n kladná, $m > 0$, $n > 0$, pak je sloučená kovarianční matice dána

$$\left(\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1\text{MP}} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1\text{MP}} \right)^{-1\text{MP}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1/m+1/n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

což je očekávaný výsledek.

Nejsou-li oba tečné prostory stejné, pak sloučená kovarianční matice by měla odpovídat jejich průniku. Při odhlédnutí od skutečnosti, že myšlenkově je už průnik tečných prostorů špatnou konstrukcí, použití pseudoinverze nedává očekávané výsledky. Platí-li pro kladná čísla a , b , c , d omezení $a \gg b$, $b \rightarrow 0$, $c \ll d$, $c \rightarrow 0$, pak použitím inverzí se dospěje ke vztahu

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} \right)^{-1} \doteq \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Při zanedbání b a c , případně po průmětu do první a druhé složky, a použití pseudoinverzí je obdržen vztah

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1_{\text{MP}}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1_{\text{MP}}} \right)^{-1_{\text{MP}}} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \gg \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Jak je vidět, použití jednoduchého aproximativního vztahu (4.1b) pro určení lokálních kovariančních matic vede k potížím při fúzi podle předpisů (2.42), (2.47). Ani umělé zvětšení omezených kovariančních matic vystupujících v (4.4) na (4.3) nevede ke zlepšení výsledků, protože sloučená kovarianční matice by byla dána pouze umělým zvětšením b , c a nezávisela by na číslech a , c , které reprezentují znalosti v omezeném prostoru. Proto je třeba přikročit k lepší aproximaci omezené kovarianční matice.

Dále bylo v [1] navrženo využití unscenované transformace [38]. Kromě zlepšení aproximace je též odstraněna nutnost počítat Jacobiho matici $\nabla \mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})$. Odhad daný vektorem $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ a kovarianční maticí $\mathbf{P}_{k|k}$ je nahrazen pomocí takzvaných σ -bodů, značených \mathcal{X} , které jsou vybaveny vahami \mathcal{W} ,

$$\mathcal{X}_o = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \quad \mathcal{W}_0 = \frac{\kappa}{n_x + \kappa}, \quad (4.5a)$$

$$\mathcal{X}_i = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \left(\sqrt{(n_x + \kappa)\mathbf{P}_{k|k}} \right)_i, \quad \mathcal{W}_i = \frac{1}{2(n_x + \kappa)}, \quad (4.5b)$$

$$\mathcal{X}_j = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \left(\sqrt{(n_x + \kappa)\mathbf{P}_{k|k}} \right)_{j-n_x}, \quad \mathcal{W}_j = \frac{1}{2(n_x + \kappa)}, \quad (4.5c)$$

kde $i = 1, \dots, n_x$ a $j = n_x + 1, \dots, 2n_x$ jsou indexy σ -bodů, $\left(\sqrt{(n_x + \kappa)\mathbf{P}_{k|k}} \right)_i$ jsou i -té sloupce matice $\sqrt{(n_x + \kappa)\mathbf{P}_{k|k}}$. Maticová odmocnina je získána pomocí SVD algoritmu, $\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, $\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}} = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{\Sigma}}$. Parametr κ je volitelná konstanta.

Omezený odhad $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\dagger$, $\mathbf{P}_{k|k}^\dagger$ je založen na promítnutých σ -bodech $\mathcal{X}^{\mathbf{P}}$, $\mathcal{X}^{\mathbf{P}} = \mathbf{p}(\mathcal{X})$,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\dagger = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W}_i \mathcal{X}_i^{\mathbf{P}}, \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^\dagger = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathcal{W}_i (\mathcal{X}_i^{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\dagger)(\mathcal{X}_i^{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\dagger)^T. \quad (4.6b)$$

Je dobré připomenout, že i když všechny body $\mathcal{X}^{\mathbf{P}}$ vyhovují nelineárnímu omezení, $\mathcal{X}^{\mathbf{P}} \in \mathcal{C}_k$, omezený odhad $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\dagger$ daný jejich lineární kombinací obecně omezení nesplňuje, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\dagger \notin \mathcal{C}_k$. Má-li omezený odhad vyhovovat omezení, je možné podle [42] odhad $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\dagger$ promítnout a následně o kvadrát posunutí zvětšit matici $\mathbf{P}_{k|k}^\dagger$. Výsledný odhad je pak obvykle chápán jako parametry omezené Gaussovy hustoty.

4.1.4 Omezení rovností a částicové filtry

V této podkapitole je nejprve diskutováno omezení rovností pomocí oříznutí hustoty, neboli pomocí využití pseudoměření. Následně je diskutováno využití průmětu.

Omezení oříznutím. Při omezení daném rovností nelze v částicových filtrech použít omezení oříznutím stejně jako při omezení nerovností, kdy je vzorkům \mathbf{x}_k^s porušujícím omezení, $\mathbf{x}_k^s \notin \mathcal{C}_k$, přiřazena nulová váha $w_{0:k|k}^s$. Dimenze omezeného prostoru \mathcal{C}_k je totiž menší než neomezená dimenze n_x . Prakticky by tak omezení rovností znamenalo vynulování všech vah $w_{0:k|k}^s$ a tudíž kolaps algoritmu.

Pro omezení oříznutím je navržen následující postup.

Přestože nelze jednoduše oříznout hustotu v současném čase k , za určitého předpokladu lze snadno zaručit omezení hustoty v následujícím čase $k+1$. Pokud by byla k dispozici taková vzorkovací hustota $q(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathbf{x}_k, \mathcal{Z}_{k+1})$, která by byla nulová pro nepřípustné následující stavy \mathbf{x}_{k+1} , $q(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathcal{Z}_{k+1}) = 0$, $\mathbf{x}_{k+1} \notin \mathcal{C}_{k+1}$, pak všechny generované vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}$, (2.13b), by vyhovovaly omezení. Žádné oříznutí už by tedy nebylo nutno provádět.

Z podstaty problému však vyplývá, že požadovaná vzorkovací hustota nemůže být dána explicitně. Nicméně je známo, že s pomocí průmětu lze získat vzorky, které vyhovují omezení. Je tedy možné použít nějakou neomezenou vzorkovací hustotu a získané vzorky promítnout. Protože požadovaná omezená vzorkovací hustota je nyní dána implicitně, nelze přímo vyhodnotit její hodnoty v omezených vzorcích. Na základě mnoha vzorků lze alespoň určit odhad hustoty nějakým standardním přístupem [77]. Protože by bylo nevýhodné určovat pro každý vzorek \mathbf{x}_k^{sr} zvlášť odhad $\hat{q}(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathbf{x}_k^{sr}, \mathcal{Z}_{k+1})$ příslušné vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathbf{x}_k^{sr}, \mathcal{Z}_{k+1})$ na základě mnoha vzorků z ní generovaných, je vhodné zbavit se implicitní závislosti vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}$ na trajektoriích $\mathbf{x}_{0:k}^{sr}$ a vzorkovat ze společné hustoty $q(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k)$. Tím pádem je nutno přejít k marginálnímu částicovému filtru, který bude diskutován v kapitole 4.2.1 a který místo přiřazování vah trajektoriím $\mathbf{x}_{0:k+1}^r$ pracuje pouze s posledním vzorkem $\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}$. Obvyklou vzorkovací hustotu $q(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k)$ je však třeba nahradit jejím odhadem $\hat{q}(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k)$.

K odhadu hustoty je možno použít například jádrové funkce [77]. Nejprve je třeba navrhnout vhodnou symetrickou hustotu pravděpodobnosti $p_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}_{k+1})$. Odhad omezené vzorkovací hustoty $\hat{q}(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k)$ je pak dán průměrem jádrových funkcí,

$$\hat{q}(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k) = \frac{1}{N_{k+1}} \sum_{r=1}^{N_{k+1}} p_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}). \quad (4.7)$$

Vadou na kráse tohoto přístupu je, že pro nelineární omezení nutně přiřazuje nenulové hodnoty hustoty i nepřípustným stavům \mathbf{x}_{k+1} , $\mathbf{x}_{k+1} \notin \mathcal{C}_{k+1}$. Hustota je sice vyhodnocována pouze v přípustných stavech, ale je zřejmé, že správnější by bylo navrhnout jádrové funkce pro dimenzi stavu systému a najít vhodné mapování do prostoru stavu modelu. Navíc v návrhu jádrové funkce $p_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}_{k+1})$ je vždy obsažen heuristický krok. Jednoduchou volbou je například Gaussova hustota s nulovým středním vektorem. Návrh kovarianční matice je ale těžký. Pro příliš malé hodnoty bude odhadovaná hustota koncentrována kolem vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}$, pro příliš velké hodnoty bude odhad hustoty dán více jádrovou funkcí než samotnými vzorky.

Jiným přístupem k odhadování hustoty je odhad podle nejbližších sousedů [77]. Dále se opět předpokládá, že vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}$ byly získány promítnutím vzorků z nějaké neomezené vzorkovací hustoty, že je hledán odhad omezené vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k)$ a že je používán marginální částicový filtr. Pro každý vzorek $\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}$ se počítají vážené Eukleidovské vzdálenosti k ostatním vzorkům $\mathbf{x}_{k+1}^{t\dagger}$, $\|\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger} - \mathbf{x}_{k+1}^{t\dagger}\|_{\mathbf{W}} =$

$[(\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger} - \mathbf{x}_{k+1}^{t\dagger})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger} - \mathbf{x}_{k+1}^{t\dagger})]^{1/2}$. Vzorkům se poté přiřadí nové indexy n_{NN}, r , $n = 0, \dots, (N_{k+1} - 1)$, tak, aby platilo $\|\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger} - \mathbf{x}_{k+1}^{0_{\text{NN}}, r\dagger}\|_{\mathbf{W}} \leq \|\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger} - \mathbf{x}_{k+1}^{1_{\text{NN}}, r\dagger}\|_{\mathbf{W}} \leq \dots \leq \|\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger} - \mathbf{x}_{k+1}^{(N_{k+1}-1)_{\text{NN}}, r\dagger}\|_{\mathbf{W}}$, neboli seřadí se podle vzdálenosti ke vzorku. Odhad hustoty je poté dán podílem relativního počtu vzorků v okolí vzorku $\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}$ a velikosti okolí. V odhadování podle nejbližších sousedů je okolí voleno jako elipsoid obsahující m vzorků, který je až na měřítko dán maticí \mathbf{W} . Pro jednotkovou matici \mathbf{W} je elipsoid zobecněná koule s poloměrem rovným vzdálenosti k m -tému sousedovi $\mathbf{x}_{k+1}^{m_{\text{NN}}, r\dagger}$, $1 < m \ll N_{k+1}$. Odhad hustoty se tedy určí jako

$$\hat{q}(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k) = \frac{m}{N_{k+1}} \cdot \frac{\Gamma(n_c/2 + 1) |\mathbf{W}|^{1/2}}{\|\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger} - \mathbf{x}_{k+1}^{m_{\text{NN}}, r\dagger}\|_{\mathbf{W}}^{n_c} \Pi^{n_c/2}}, \quad (4.8)$$

kde n_c je dimenze \mathcal{C}_{k+1} , Γ je gamma funkce, Π je pí, $\Pi \doteq 3, 14$. Je vhodné zdůraznit, že velikost okolí se počítá vzhledem k omezenému prostoru. Kromě volby počtu sousedů m je opět problémem návrh matice \mathbf{W} . Nevýhodou uvedeného přístupu je také nadhodnocení hustoty na jejích okrajích, kde je málo vzorků.

Omezení průmětem. Oproti omezení oříznutím, alespoň co se týče výpočtu obecných momentů (2.10), použití průmětu problému nezpůsobuje. Všechny neomezené vzorky \mathbf{x}_k^s jsou jednoduše promítnuty a příslušné váhy $w_{0:k|k}^s$ zůstanou zachovány. Takto omezené částice však ztrácejí interpretaci jako podíl hustoty trajektorií $\mathbf{x}_{0:k}^s$, jejichž koncová část $\mathbf{x}_k^{s\dagger}$ vyhovuje omezení danému množinou \mathcal{C}_k , a omezené vzorkovací hustoty.

Následující úvahy vedou k návrhu výpočtu omezených vah.

Hustota trajektorií s omezeným koncem je v souladu s interpretací navrženou v kapitole 4.1.1 dána marginalizací,

$$p(\mathbf{x}_k^\dagger, \mathbf{x}_{0:k-1} | \mathcal{Z}_k) = \int_{\Omega_{\mathbf{c}_k}} p([\mathbf{x}_k^\dagger]^T, \mathbf{c}_k^T | \mathcal{Z}_k, \mathbf{x}_{0:k-1} | \mathcal{Z}_k) d\mathbf{c}_k, \quad (4.9)$$

kde platí $\mathbf{x}_k^\dagger = [(\mathbf{x}_k^\dagger)^T, 0^T]^T$. Omezená vzorkovací hustota je dána obdobně. Vyhodnocení hustot pro každou trajektorii je ovšem neproveditelné. Vzorkovací hustota $q(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathcal{Z}_k)$ není známa, a tudíž ani neomezená vzorkovací hustota $q([\mathbf{x}_k^\dagger]^T, \mathbf{c}_k^T | \mathcal{Z}_k, \mathbf{x}_{0:k-1} | \mathcal{Z}_k)$. Hustoty celých trajektorií ani nelze odhadovat, protože minulé části $\mathbf{x}_{0:k-1}$ nejsou standardními částicovými filtry uchovávané a navíc pro velké k je odhadování z důvodu velké dimenze nemyslitelné. Je však opět možné uvažovat pouze konec trajektorií \mathbf{x}_k^\dagger a tedy přejít ke zmiňovanému marginálnímu částicovému filtru.

Omezená váha $w_{k|k}^{s\dagger}$ je dána podílem marginální omezené filtrační hustoty a marginální vzorkovací hustoty, čili podílem integrálů přes neomezené hustoty,

$$w_{k|k}^{s\dagger} \propto \frac{p(\mathbf{x}_k^{s\dagger} | \mathcal{Z}_k)}{q(\mathbf{x}_k^{s\dagger} | \mathcal{Z}_k)} = \frac{\int_{\Omega_{\mathbf{c}_k}} p([\mathbf{x}_k^{s\dagger}]^T, \mathbf{c}_k^T | \mathcal{Z}_k) d\mathbf{c}_k}{\int_{\Omega_{\mathbf{c}_k}} q([\mathbf{x}_k^{s\dagger}]^T, \mathbf{c}_k^T | \mathcal{Z}_k) d\mathbf{c}_k}. \quad (4.10)$$

Omezená filtrační hustota $p(\mathbf{x}_k^{s\dagger} | \mathcal{Z}_k)$ může být aproximována jako průměr omezené filtrační hustoty $p(\mathbf{x}_k^\dagger | \mathcal{Z}_k)$ na malém okolí vzorku $\mathbf{x}_k^{s\dagger}$. Omezená vzorkovací hustota $q(\mathbf{x}_k^{s\dagger} | \mathcal{Z}_k)$ může být aproximována obdobně na stejném okolí $V^\dagger(\mathbf{x}_k^{s\dagger})$. Pak lze výraz

pro omezenou váhu aproximovat pomocí

$$w_{k|k}^{s\dagger} \propto \frac{p(\mathbf{x}_k^{s\dagger} | \mathcal{Z}_k)}{q(\mathbf{x}_k^{s\dagger} | \mathcal{Z}_k)} \approx \frac{\int_{V^\ddagger(\mathbf{x}_k^{s\dagger})} \int_{\Omega_{\mathbf{c}_k}} p([\mathbf{x}_k^\ddagger]^\top, \mathbf{c}_k^\top | \mathcal{Z}_k) d\mathbf{c}_k d\mathbf{x}_k^\ddagger}{\int_{V^\ddagger(\mathbf{x}_k^{s\dagger})} \int_{\Omega_{\mathbf{c}_k}} q([\mathbf{x}_k^\ddagger]^\top, \mathbf{c}_k^\top | \mathcal{Z}_k) d\mathbf{c}_k d\mathbf{x}_k^\ddagger}. \quad (4.11)$$

Protože neomezené hustoty jsou dány marginalizací přes minulé části $\mathbf{x}_{0:k-1}$, filtrační hustota jako $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) = \int_{\Omega_{\mathbf{x}_{0:k-1}}} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{0:k-1} | \mathcal{Z}_k) d\mathbf{x}_{0:k-1}$ a vzorkovací hustota obdobně jako $q(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) = \int_{\Omega_{\mathbf{x}_{0:k-1}}} q(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{0:k-1} | \mathcal{Z}_k) d\mathbf{x}_{0:k-1}$, lze integrály ve vztahu (4.11) aproximovat prostřednictvím částic. Aproximace čitatele je úměrná součtu neomezených filtračních vah $w_{0:k|k}^t$ přiřazených vzorkům \mathbf{x}_k^t , jejichž průměty $\mathbf{x}_k^{s\dagger}$ náležejí danému okolí $V^\ddagger(\mathbf{x}_k^{s\dagger})$, jmenovatel je dán počtem těchto vzorků. Aproximace omezených vah je tudíž dána

$$w_{k|k}^{s\dagger} \propto \frac{\sum_{t: \mathbf{x}_k^{t\dagger} \in V^\ddagger(\mathbf{x}_k^{s\dagger})} w_{0:k|k}^t}{\sum_{t: \mathbf{x}_k^{t\dagger} \in V^\ddagger(\mathbf{x}_k^{s\dagger})} 1} \quad (4.12)$$

Z pohledu odhadu podle nejbližších sousedů není získaný vztah nijak překvapivý. Jestliže je omezená vzorkovací hustota $q(\mathbf{x}_k^{s\dagger} | \mathcal{Z}_k)$ odhadována pomocí (4.8), kde místo predikce je uvažována filtrace, a omezená filtrační hustota $p(\mathbf{x}_k^{s\dagger} | \mathcal{Z}_k)$ pomocí stejného vztahu s upraveným prvním členem,

$$\frac{m}{N_k} \rightarrow \sum_{n=0}^{m-1} w_{0:k|k}^{n_{\text{NN}}, s\dagger}, \quad (4.13)$$

to jest kde relativní počet vzorků v okolí daném m -tým sousedem je nahrazen součtem vah vzorků v tomto okolí, pak podíl odhadů hustot je úměrný průměru zmiňovaných vah. Navržená úprava bude diskutována v kapitole 4.3.6.

Pro aproximaci omezených vah je proto navržen vztah

$$w_{k|k}^{s\dagger} \propto \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} w_{0:k|k}^{n_{\text{NN}}, s\dagger}. \quad (4.14)$$

Je třeba připomenout, že jako u každého odhadu podle nejbližších sousedů lze i zde očekávat špatné ohodnocení vah na okrajích vzorkovací hustoty. Nicméně pro fúzi omezených hustot se nelze spokojit se standardním přístupem, který po průmětu neomezeného vzorku $\mathbf{x}_k^{s\dagger}$ nepřepočítává neomezenou váhu $w_{0:k|k}^s$. Jak bude ukázáno později, fúze hustot daných částicemi se stejnými vzorky a různými vahami bude založena na operaci nad vahami. Fúze neomezených a omezených hustot by pak dávaly stejné sloučené váhy, což by byl nesmyslný výsledek. Proto je třeba po omezení vzorků zprůměrovat váhy.

4.1.5 Příklad

Následující příklad ilustruje omezení částic pomocí průmětu. Příklad ilustrující fúzi v úloze s omezením je uveden v kapitole 4.3.

Nechť jsou Gaussovy hustoty $p_1 = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{P}_1)$, $p_2 = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_2, \mathbf{P}_2)$ reprezentovány pomocí N částic, $N = 40$, jejichž vzorky jsou společné a vzorkované z Gaussovy hustoty $q = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_q, \mathbf{P}_q)$, kde platí $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{x}}_q = [0, 0]^\top$, $\mathbf{P}_1 = \text{diag}([1, 0.1])$, $\mathbf{P}_2 = \text{diag}([0.2, 1])$, $\mathbf{P}_q = \text{diag}([1, 1])$, kde diag označuje diagonální matici s danou diagonálou. Omezení \mathcal{C} je dáno rovností $x_2 = 0$, neboli je známo, že druhá složka stavu \mathbf{x} ,

$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, je nulová. Jako vhodná omezující funkce \mathbf{p} je vybrána funkce přiřazující neomezeným stavům \mathbf{x} nejbližší omezené stavy $\mathbf{x}^\dagger = [x_1^\dagger, 0]^T$, čili $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [x_1, 0]^T$. První složka stavu x_1 tudíž přímo představuje omezený stav a druhá složka odpovídá nadbytečné proměnné.

Obrázek 4.5 vykresluje neomezené vzorky \mathbf{x}^s a hodnoty neomezené vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x})$ v těchto vzorcích. Dále naznačuje, do kterých bodů $\mathbf{x}^{s\dagger}$ jsou neomezené vzorky promítnuty. Jak je vidět, po průmětu se promíchají vzorky z oblastí s malou a velkou neomezenou vzorkovací hustotou.

Obrázek 4.6 pak porovnává teoretickou omezenou vzorkovací hustotu $q(\mathbf{x}^\dagger)$, $q(\mathbf{x}^\dagger) = \mathcal{N}(0, 1)$, která odpovídá marginální hustotě neomezené vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x})$, naivní odhad daný přiřazením neomezené vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}^s)$ do omezených vzorků, $\hat{q}(\mathbf{x}^{s\dagger}) \triangleq q(\mathbf{x}^s)$, a odhad podle nejbližších sousedů (4.8), kde počet sousedů m je zvolen $m = 5$ a kde omezená dimenze n_c je $n_c = 1$. Váha \mathbf{W} v tomto případě pozbývá význam. Je zřejmé, že naivní odhad je nesmyslný, a to i po případné normalizaci.

Obrázek 4.7 je obdobou obrázku 4.5, místo vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}^s)$ však zachycuje hodnoty neomezených vah w_1^s a w_2^s .

Potřebu přepočítání vah po průmětu částic potvrzuje obrázek 4.8. Po omezení vzorků jsou váhy w_1^s přepočítány podle (4.14). Je zřejmé, že neomezené váhy obecně neodpovídají teoretickým omezeným vahám, jak dokládá případ vah pro první hustotu, $w_1^s \neq w_1^{s\dagger}$. Přepočítané váhy jsou pak přijatelnou aproximací teoretických omezených vah. Druhá hustota ukazuje velmi speciální případ, kdy se váhy omezením nezmění, jmenovitě případ $q(x_2|x_1) = p_2(x_2|x_1)$, čili podmíněná část neomezené vzorkovací hustoty přes nadbytečnou proměnnou x_2 odpovídá podmíněné části reprezentované hustoty.

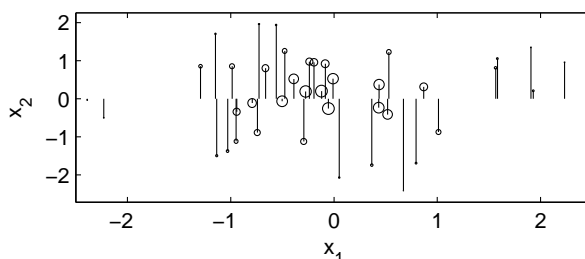
4.1.6 Shrnutí

Kapitola 4.1 se zabývala odhadováním s omezením.

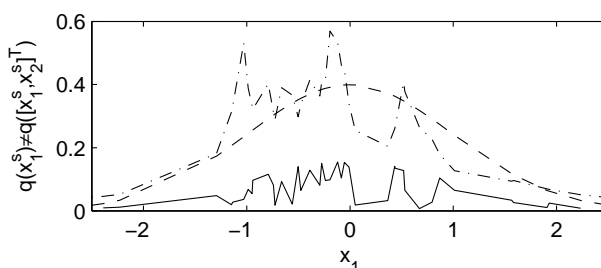
Nejprve byla zkoumána úloha odhadování s omezením z pohledu hustot pravděpodobnosti. Vynucení rovnosti pomocí pseudoměření a pomocí průmětu bylo interpretováno jako dobře známé operace nad hustotami pravděpodobnosti. Jmenovitě využití pseudoměření bylo interpretováno jako podmínění hodnotou nadbytečné proměnné \mathbf{c}_k , která v systému může nabývat pouze nulovou hodnotu, $\mathbf{c}_k = 0$. Čili je využita dodatečná informace opravující špatné modelování hustoty pravděpodobnosti v daných bodech. Využití průmětu k vynucení rovnosti pak bylo interpretováno jako hledání marginální hustoty příslušné sdružené hustotě. Je-li teoreticky možné vyjádřit stavy modelu \mathbf{x}_k v nových souřadnicích tak, aby byly dány omezenými stavy \mathbf{x}_k^\dagger a nadbytečnými proměnnými \mathbf{c}_k , pak využití průmětu opravuje použití nadbytečné proměnné \mathbf{c}_k ponecháním pouze marginální hustoty náležející omezeným stavům \mathbf{x}_k^\dagger .

Dále byly představeny různé architektury systémů odhadování s omezením. Jako základ bylo představeno off-line zpracování neomezených odhadů, které byly následně slučovány a omezovány. Ve složitějších případech je omezení vynucováno i v lokálních estimátorech během procesu odhadování. Na druhou stranu lze prohlásit, že pořadí omezení a fúze by nemělo mít na výsledný odhad příliš vliv. Je-li tomu tak, lze rozdíl vysvětlit pouze tím, že použitý model systému je velmi hrubý.

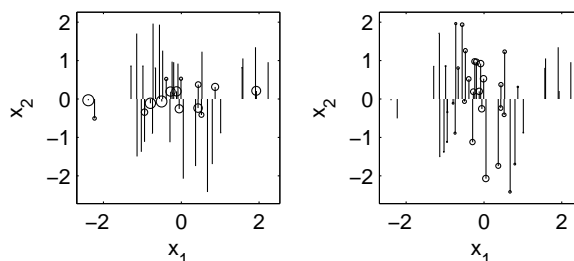
Následně byly diskutovány problémy spojené s omezováním bodových odhadů pomocí rovnosti zadané nelineární funkcí. Kvůli vyhnutí se promítnuté kovarianční matici, která by byla singulární, bylo navrženo použití unscenované transformace.



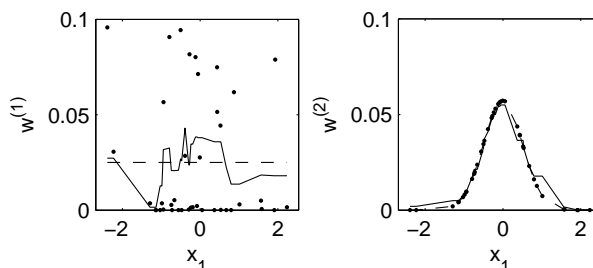
Obrázek 4.5: Vzorkovací hustota $q(\mathbf{x})$ ve vzorcích \mathbf{x}^s . Průměry kružnic jsou proporcionalní k hodnotám hustoty $q(\mathbf{x}^s)$, úsečky spojují neomezené vzorky \mathbf{x}^s s omezenými vzorky $\mathbf{x}^{s\ddagger}$.



Obrázek 4.6: Omezená vzorkovací hustota $q(\mathbf{x}^\ddagger)$ (čárkovaná čára), neomezená vzorkovací hustota $q(\mathbf{x}^s)$ přiřazená omezeným vzorkům $\mathbf{x}^{s\ddagger}$ (spojeno plnou čarou), čili naivní odhad, a odhad omezené vzorkovací hustoty $\hat{q}(\mathbf{x}^{s\ddagger})$ podle nejbližších sousedů (tečkovaná čára).



Obrázek 4.7: Váhy w_1^s (levý obrázek) a w_2^s (pravý obrázek) příslušné neomezeným vzorkům \mathbf{x}^s . Úsečky opět spojují neomezené a omezené vzorky.



Obrázek 4.8: Neomezené váhy w_1^s , w_2^s v omezených vzorcích $\mathbf{x}^{s\ddagger}$ (tečky), aproximace omezených vah $w_1^{s\ddagger}$, $w_2^{s\ddagger}$ v omezených vzorcích (spojené plnou čarou) a teoretické omezené váhy (tečkovaná čára).

Nakonec bylo diskutováno omezení rovností v částicových filtrech. Přístup využití pseudoměření $\mathbf{c}_k = 0$ lze uplatnit omezením vzorkovací hustoty. Toto řešení je tedy možno využít pouze v součinnosti s dynamikou systému, kde působí nenulový stavový šum. Navíc bylo nutno přejít k marginálnímu částicovému filtru, což je z hlediska použití částic ve fúzi stejně nevyhnutelný krok. Dále bylo probíráno omezení pomocí průmětu. Bylo vysvětleno a ilustrováno na příkladě, proč je při důsledném zachování významu vah nutno po promítnutí neomezených vzorků přikročit k přepočtu jim příslušných vah.

4.2 Marginální částicové filtry

V kapitole 2.1.2 byly představeny částicové filtry jako jeden z nejvýznamnějších globálních filtrů. Pro fúzi hustot pravděpodobnosti je zcela zásadní fakt, že částice $\mathcal{P}_{0:k|k}$ byly konstruovány jako koncové části \mathbf{x}_k^s trajektorií $\mathbf{x}_{0:k}^s$, kde ke každé trajektorii byla přiřazena váha $w_{0:k|k}^s$ podle vztahu (2.9). Protože lokální estimátory E_ℓ pracují s vlastními daty $\mathcal{Z}_k^{(\ell)}$, jsou i trajektorie $\mathbf{x}_{0:k}^{s,(\ell)}$ napříč estimátory různé. Navíc minulé části $\mathbf{x}_{0:k-1}^{s,(\ell)}$ těchto trajektorií nejsou nikde uchovávány. Pro operace nad hustotami pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\ell)})$, $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ reprezentovaných částicemi $\mathcal{P}_{0:k|k}^{(\ell)}$, $\mathcal{P}_{0:k|k}^{(\lambda)}$ je proto třeba zbavit se závislosti na minulých částech trajektorií.

Za povšimnutí stojí souvislost s úlohami odhadu s omezením rovností a omezováním pomocí průmětu. Koncové části \mathbf{x}_k tvoří podprostor trajektorií $\mathbf{x}_{0:k}$. Nejsou-li minulé části $\mathbf{x}_{0:k-1}$ známy, je k jejich odstranění z hustot pravděpodobnosti použita marginalizace. Formálně je tedy použit průmět do daného podprostoru a lze použít stejné metody jako v úlohách s omezením. Na druhou stranu je možné s výhodou využít další metody, protože tato marginalizace je dosti speciálním případem.

4.2.1 Marginální filtr

Částicový filtr poskytující částice, které reprezentují marginální hustoty $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k)$ přímo, nikoliv prostřednictvím hustot trajektorií $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathcal{Z}_k)$, je v literatuře již zaveden [49].

Standardní částicový filtr je založen na vyjádření aposteriorní hustoty pomocí zadaných hustot (2.3),

$$p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathcal{Z}_k) \propto p(\mathcal{Z}_k|\mathbf{x}_{0:k})p(\mathbf{x}_{0:k}) = \left\{ \prod_{l=0}^k p(\mathbf{z}_l|\mathbf{x}_l) \right\} \left\{ \prod_{l=1}^k p(\mathbf{x}_l|\mathbf{x}_{l-1}) \right\} p(\mathbf{x}_0), \quad (4.15)$$

kde se využívá podmíněná nezávislost měření a Markovost stavu. Dále se ve standardním filtru využívá rekurzivní vzorkování trajektorií,

$$q(\mathbf{x}_{0:k}|\mathcal{Z}_k) \triangleq \left\{ \prod_{l=1}^k q(\mathbf{x}_l|\mathbf{x}_{l-1}, \mathcal{Z}_l) \right\} q(\mathbf{x}_0|\mathbf{z}_0), \quad (4.16)$$

na každou minulou část $\mathbf{x}_{0:k-1}$ se naváže koncová část \mathbf{x}_k . Bayesovo pravidlo je používáno na celé trajektorie.

Naproti tomu je marginální částicový filtr založen na použití Chapmanovy–Kolmogorovy rovnice (2.8). Při obvyklé interpretaci hustoty dané částicemi jako směsi Diracových funkcí je marginální prediktivní hustota $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_k)$ aproximována jako

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_k) \approx \sum_{s=1}^{N_k} w_{k|k}^s p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k^s), \quad (4.17)$$

přičemž prediktivní vzorky \mathbf{x}_{k+1}^r , $r = 1, 2, \dots, N_{k+1}$, jsou generovány z marginální vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_{k+1})$. Vztah (4.17) může být rovněž chápán jako odhad hustoty pomocí jádrových funkcí. Na druhou stranu zde neprobíhá žádný heuristický krok, jádrové funkce $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k^s)$ vycházejí přímo z definice systému. Z jiného pohledu je uvedený vztah zvláštním případem střední hodnoty (2.10), kde pro každý vektor \mathbf{x}_{k+1} je funkce $f(\mathbf{x}_k)$ dána hustotou přechodu stavu $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$, $f(\mathbf{x}_k) \triangleq p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$.

Prediktivní váhy $w_{k+1|k}^r$ jsou pak dány vztahem

$$w_{k+1|k}^r \propto \frac{\sum_{s=1}^{N_k} w_{k|k}^s p(\mathbf{x}_{k+1}^r | \mathbf{x}_k^s)}{q(\mathbf{x}_{k+1}^r | \mathcal{Z}_{k+1})}. \quad (4.18)$$

Pro úplnost lze dodat, že filtrační váhy se opět získají převážením prediktivních vah věrohodnostních funkcí, $w_{k|k}^s \propto p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^s) w_{k|k-1}^s$.

Velkou nevýhodou je kvadratická složitost marginálního filtru oproti lineární složitosti standardního filtru. Na druhou stranu marginální filtr nepoužívá žádné převzorkování a z jím poskytovaných částic lze přímo rekonstruovat prediktivní hustotu pravděpodobnosti, ne pouze distribuční funkci.

4.2.2 Marginalizovaný filtr

Problémem částicových filtrů pro vyšší dimenze stavu \mathbf{x}_k je jejich nesmírná výpočetní náročnost. Standardní filtry se potýkají s nutností velkého počtu částic, přičemž jejich složitost je pouze lineární. Kvadratická složitost marginálního částicového filtru, jenž je potřebný pro správnou reprezentaci hustot stavů v jednotlivých časech, pak může tvořit nepřekonatelnou překážku.

Pro standardní filtry lze v určitých případech podstatně snížit potřebný počet částic při zachování stejné kvality aproximace. Tyto případy nastávají, když lze úlohu filtrace rozdělit na více částí, přičemž některé části jsou řešitelné analyticky. Za cenu vyšší složitosti algoritmů je velký počet částic nahrazen menším počtem částic, kde částice kromě vzorků a vah jsou ještě tvořeny souborem analyticky získaných parametrů.

Marginalizované částicové filtry [73, 74], nazývané též Rao–Blackwellizované [26], mohou používat rozdělení stavu na více částí, v další části práce však bude uvažováno dělení pouze na dvě části. Za předpokladu, že složky stavu jsou již vhodně uspořádány, může být stav systému \mathbf{x}_k složen z částí \mathbf{x}_k^n a \mathbf{x}_k^1 ,

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^n \\ \mathbf{x}_k^1 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Při zápisu systému pomocí hustot pravděpodobnosti (2.3) jsou tyto hustoty vyjádřeny skrz části stavu jako

$$p(\mathbf{x}_{k+1}^n, \mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1), \quad p(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_0^1), \quad (4.20a)$$

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1), \quad (4.20b)$$

přičemž počáteční hustota $p(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_0^1)$ není dána výslovně, jako sdružená hustota, ale je dána prostřednictvím marginální počáteční hustoty $p(\mathbf{x}_0^n)$ a podmíněné počáteční hustoty $p(\mathbf{x}_0^1 | \mathbf{x}_0^n)$.

Dále se předpokládá, že rovněž hustota přechodu stavu $p(\mathbf{x}_{k+1}^n, \mathbf{x}_{k+1}^l | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^l)$ je vyjádřena součinem marginální hustoty přechodu $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^l)$ a podmíněné hustoty přechodu $p(\mathbf{x}_{k+1}^l | \mathbf{x}_{k:k+1}^n, \mathbf{x}_k^l)$, kde symbol $\mathbf{x}_{k:k+1}^n$ označuje trajektorii části stavu, která se v tomto případě skládá z \mathbf{x}_k^n a \mathbf{x}_{k+1}^n . Podmíněná hustota přechodu by mohla být alternativně zapsána jako $p(\mathbf{x}_{k+1}^l | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathbf{x}_k)$.

Jak lze na základě předchozího vyjadřování jednotlivých sdružených hustot uhadnout, cílem marginalizovaných filtrů je vyjádření sdružené aposteriorní hustoty formou marginální aposteriorní hustoty a podmíněné aposteriorní hustoty. Smyslem dělení stavu \mathbf{x}_k na části \mathbf{x}_k^n a \mathbf{x}_k^l je, že částicový filtr může být použit pouze k aproximaci marginální aposteriorní hustoty. Protože část stavu \mathbf{x}_k^n má menší dimenzi než celý stav \mathbf{x}_k , je výše uvedeným způsobem docílena možnost použít méně částic. Předpokladem je však schopnost analyticky určit podmíněné aposteriorní hustoty.

Standardní marginalizované filtry používají částice k reprezentaci marginální aposteriorní hustoty, přičemž výrazem marginální je myšleno vztahení k části stavu \mathbf{x}_k^n . Protože ve standardních částicových filtrech částice reprezentují trajektorie stavu, je forma aposteriorní hustoty nezvyklá. Skládá se z trajektorií jedné části stavu $\mathbf{x}_{0:k}^n$ a z druhé části stavu \mathbf{x}_k^l . Aproximovanou aposteriorní hustotou je tedy hustota $p(\mathbf{x}_k^l, \mathbf{x}_{0:k}^n | \mathcal{Z}_k)$,

$$p(\mathbf{x}_k^l, \mathbf{x}_{0:k}^n | \mathcal{Z}_k) = p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_{0:k}^n, \mathcal{Z}_k) p(\mathbf{x}_{0:k}^n | \mathcal{Z}_k). \quad (4.21)$$

Hustotu trajektorií $p(\mathbf{x}_{0:k}^n | \mathcal{Z}_k)$ má na starosti částicový filtr, podmíněné hustoty pro každou trajektorii $\mathbf{x}_{0:k}^n$, $p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_{0:k}^n, \mathcal{Z}_k)$, je nutno řešit analyticky.

Stejně jako v případě standardního částicového filtru, i v případě marginalizovaného částicového filtru je ve fúzi hustot na obtíž závislost na minulých stavech $\mathbf{x}_{0:k-1}$, respektive trajektoriích části stavů $\mathbf{x}_{0:k-1}^n$. Pro operace nad hustotami $p(\mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^l | \mathcal{Z}_k^{(\ell)})$ a $p(\mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^l | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ tak nejde jednoduše ignorovat minulé části trajektorie $\mathbf{x}_{0:k-1}^n$. Není-li toto dostatečně zřejmé pro marginální hustoty $p(\mathbf{x}_{0:k}^n | \mathcal{Z}_k)$, pak pro podmíněné hustoty $p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_{0:k}^n, \mathcal{Z}_k)$ důsledky předstírání $p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_k^n, \mathcal{Z}_k) = p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_{0:k}^n, \mathcal{Z}_k)$ zřejmé jsou.

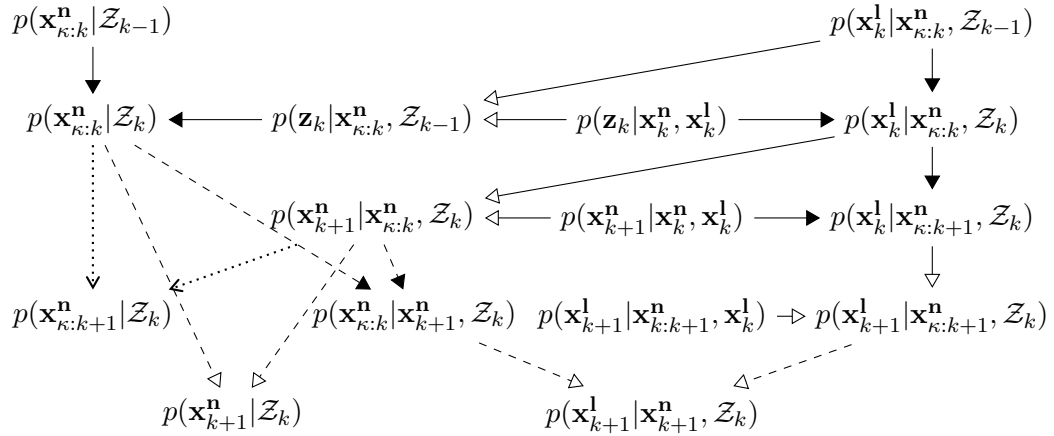
Z uvedených důvodů je třeba vykonat obdobný krok jako v případě marginálního částicového filtru, je třeba zbavit se minulých částí trajektorií stavu, jejichž simulace se nevyhnutelně liší mezi estimátory pracujícími s vlastními daty.

4.2.3 Marginální marginalizovaný filtr

Tato podkapitola se zabývá návrhem marginálního marginalizovaného částicového filtru, který je proveden v autorově článku [5]. Cílem je skloubit základní rysy marginálního částicového filtru a marginalizovaného částicového filtru. Čili filtru poskytujícího částice přímo vyjadřující hustotu posledního stavu a filtru využívajícího částice pro reprezentaci trajektorií jedné části stavu a sady parametrů pro reprezentaci podmíněných hustot druhé části stavu v posledním čase, přičemž tyto hustoty jsou podmíněny zmíněnými trajektoriemi. Cílem je tedy navrhnout filtr požívající částice pro jednu část posledního stavu a sady parametrů pro podmíněné hustoty druhé části stavu, kde hustoty jsou podmíněny zmíněnými částicemi. Na rozdíl od (4.21), zde je aproximovanou aposteriorní hustotou hustota $p(\mathbf{x}_k^l, \mathbf{x}_k^n | \mathcal{Z}_k)$,

$$p(\mathbf{x}_k^l, \mathbf{x}_k^n | \mathcal{Z}_k) = p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_k^n, \mathcal{Z}_k) p(\mathbf{x}_k^n | \mathcal{Z}_k), \quad (4.22)$$

přičemž marginální částicový filtr obstarává aproximaci hustoty $p(\mathbf{x}_k^n | \mathcal{Z}_k)$ a analyticky je třeba aproximovat hustoty $p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_k^n, \mathcal{Z}_k)$.



Obrázek 4.9: Marginalizované filtry. Plné čáry – společná část, tečkované čáry – část standardního marginalizovaného filtru, čárkované čáry – navrhovaná část marginálního marginalizovaného filtru. Otevřené šipky – pouhé vytváření sdružené hustoty, prázdné trojúhelníky – marginalizace vytvořené sdružené hustoty, plné trojúhelníky – podmínování na základě vytvořené sdružené hustoty.

Pro snadnější pochopení marginalizovaných filtrů je na obrázku 4.9 rozkreslena závislost marginálních a podmíněných hustot pravděpodobnosti. Počáteční hustoty jsou opět kvůli jednoduchosti značení zapisovány jako prediktivní s prázdnou množinou měření \mathcal{Z}_{-1} ,

$$p(\mathbf{x}_0^n | \mathcal{Z}_{-1}) \triangleq p(\mathbf{x}_0^n), \quad p(\mathbf{x}_0^1 | \mathbf{x}_0^n, \mathcal{Z}_{-1}) \triangleq p(\mathbf{x}_0^1 | \mathbf{x}_0^n). \quad (4.23)$$

Čas κ označující poslední marginalizaci (4.22) je na začátku roven počátečnímu času, čili $\kappa = 0$. Pro $\kappa = k$ se trajektorie $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$ skládají pouze z jedné části stavu, jmenovitě \mathbf{x}_k^n . Pro $\kappa = k$ tedy symbol $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$ označuje totéž co symbol \mathbf{x}_k^n .

Uvedené schéma používá tři základní operace nad hustotami pravděpodobností. Základní operací je vytvoření sdružené hustoty z marginální a podmíněné hustoty, což je příklad standardního prodlužování trajektorií $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$ na $\mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n$, čili získávání $p(\mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n | \mathcal{Z}_k)$. Použití Chapmanovy–Kolmogorovovy rovnice a Bayesova pravidla využívá implicitního vytvoření sdružené hustoty, která je následně faktorizována na jiné marginální a podmíněné hustoty. Je třeba pamatovat na vlastnosti stavu. Je-li dán celý stav \mathbf{x}_k a jsou-li navíc k dispozici minulé měření \mathcal{Z}_{k-1} či minulé části stavů $\mathbf{x}_{\kappa:k-1}^n$, pak měření \mathbf{z}_k závisí pouze na příslušném celém stavu \mathbf{x}_k . Čili platí $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathbf{x}_k^1, \mathcal{Z}_{k-1}) \triangleq p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1)$. Podobně platí, že jsou-li kromě celého stavu \mathbf{x}_k k dispozici minulé měření \mathcal{Z}_{k-1} či minulé části stavů $\mathbf{x}_{\kappa:k-1}^n$ či dokonce současné měření \mathbf{z}_k , pak následující stav \mathbf{x}_{k+1} je závislý pouze na stavu \mathbf{x}_k . To znamená, že i část následujícího stavu \mathbf{x}_{k+1}^n je za daných podmínek závislá pouze na stavu \mathbf{x}_k . Neboli platí $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathbf{x}_k^1, \mathcal{Z}_k) \triangleq p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1)$ a také $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathbf{x}_k^1, \mathcal{Z}_k) \triangleq p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathbf{x}_k^1)$.

Pracuje-li marginalizovaný filtr ve standardním módu, čas poslední marginalizace κ zůstává nezměněn. V marginálním módu se κ mění vždy, když jsou hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k)$, $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ použity v následujícím čase $k+1$ jako výchozí hustoty pro filtraci. V takovém případě dojde k přeznačení $\kappa \leftarrow k+1$. Za povšimnutí stojí možnost pracovat střídavě v obou módech, případně jeden mód používat pouze na vyžádání, a to v otevřené smyčce.

Dalším bodem hodným pozornosti je druh vyhlazování pomocí následující části stavu \mathbf{x}_{k+1}^n . Podmíněná vyhlazená hustota $p(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ je pro dané \mathbf{x}_{k+1}^n získána Bayesovým pravidlem stejným způsobem, jako kdyby \mathbf{x}_{k+1}^n bylo měření dané hustotou $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1)$. Obdobně je získána marginální vyhlazená hustota $p(\mathbf{x}_{\kappa:k}^n | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$.

Podle uvedeného schématu lze odvodit různé speciální případy. Místo hustot pravděpodobnosti je také možno uvažovat pravděpodobnostní funkce. V další části práce je vzhledem k zamýšlenému použití ve fúzi vybrán následující speciální případ.

Systém s podmíněně lineární částí. Jedním z případů, kdy je možno použít marginalizované filtry, je případ systému, kdy pro každou realizaci části stavu \mathbf{x}_k^n je stav v následujícím čase $k+1$, stejně jako měření \mathbf{z}_k v současném čase, dán lineární kombinací druhé části stavu \mathbf{x}_k^1 a stavového šumu \mathbf{w}_k , $\mathbf{w}_k = [(\mathbf{w}_k^n)^T, (\mathbf{w}_k^1)^T]^T$, případně šumu měření \mathbf{v}_k . Část \mathbf{x}_k^n proto bude označována jako nelineární část stavu a část \mathbf{x}_k^1 jako lineární, přičemž linearita je myšlena za podmínky \mathbf{x}_k^n .

Nechť je tedy uvažován nelineární systém (2.2) ve tvaru

$$\mathbf{x}_{k+1}^n = \mathbf{f}_k^n(\mathbf{x}_k^n) + \mathbf{F}_k^n(\mathbf{x}_k^n)\mathbf{x}_k^1 + \mathbf{G}_k^n(\mathbf{x}_k^n)\mathbf{w}_k^n, \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^1 = \mathbf{f}_k^1(\mathbf{x}_k^n) + \mathbf{F}_k^1(\mathbf{x}_k^n)\mathbf{x}_k^1 + \mathbf{G}_k^1(\mathbf{x}_k^n)\mathbf{w}_k^1, \quad (4.24b)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k^n) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k^n)\mathbf{x}_k^1 + \mathbf{v}_k. \quad (4.24c)$$

Pro zkrácení zápisu nebude v další části této podkapitoly výslovně značena závislost vektorových a maticových funkcí $\mathbf{f}_k^n, \mathbf{f}_k^1, \mathbf{h}_k, \mathbf{F}_k^n, \mathbf{G}_k^n, \mathbf{F}_k^1, \mathbf{G}_k^1, \mathbf{H}_k$ na nelineární části \mathbf{x}_k^n . Marginální počáteční hustota $p(\mathbf{x}_0^n)$ je podle předpokladů úlohy známa.

Obvyklý předpoklad standardních marginalizovaných filtrů je, že podmíněné počáteční hustoty $p(\mathbf{x}_0^1 | \mathbf{x}_0^n)$ jsou Gaussovy. Při předjímání tvaru podmíněných prediktivních hustot $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ je však výhodnější rovnou předpokládat, že počáteční hustoty jsou dány Gaussovými směsmi

$$p_{Gs}(\mathbf{x}_0^1 | \mathbf{x}_0^n) = \sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}_0}} \alpha_0^i \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0^{1,i}, \mathbf{P}_0^{1,i}), \quad (4.24d)$$

kde závislost parametrů $\alpha_0^i, \hat{\mathbf{x}}_0^{1,i}, \mathbf{P}_0^{1,i}$ na nelineární části \mathbf{x}_0^n opět není značena.

Vzhledem ke znalosti filtru pracujícího s Gaussovými směsmi, byl představen v kapitole 2.1.2, je rovnou předpokládáno, že i šумы jsou dány Gaussovými směsmi (2.14b), kde vektory středních hodnot $\hat{\mathbf{w}}_k^w$ a kovarianční matice \mathbf{Q}_k^w jsou rozepsány na části odpovídající dělení stavu,

$$\hat{\mathbf{w}}_k^w = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_k^{n,w} \\ \hat{\mathbf{w}}_k^{1,w} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k^w = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k^{n,w} & \mathbf{Q}_k^{nl,w} \\ \mathbf{Q}_k^{ln,w} & \mathbf{Q}_k^{1,w} \end{bmatrix}. \quad (4.24e)$$

Je třeba zdůraznit, že části $\mathbf{w}_k^n, \mathbf{w}_k^1$ stavového šumu \mathbf{w}_k mohou být závislé, a tedy že vzájemné kovarianční matice $\mathbf{Q}_k^{nl,w} \triangleq (\mathbf{Q}_k^{ln,w})^T$ jsou obecně nenulové.

V další části výkladu jsou pořád dokola používány známé vzorce pro marginální a podmíněné momenty vícerozměrné náhodné veličiny, tedy vztahy pro predikci a filtraci. Pro zadané lineární rovnice může být výpočet středních vektorů a kovariančních matic nanejvýš pracný, ale nikoliv nepřímocharý. Pro filtraci platí vztahy mající tvar $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})$ a $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}} - \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{x}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{x}}$, kde $\mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}$ je nazýváno jako zisk.

Dále je vhodné získat náhled na zacházení se směsmi hustot pravděpodobnosti.

Na směs hustot lze pohlížet jako na marginální hustotu rozšířené náhodné veličiny. Je-li spojitá náhodná veličina \mathbf{x} rozšířena o diskrétní náhodnou veličinu v , kde rozšířená náhodná veličina má sdružené spojitě-diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, pak váhy α^v lze chápat jako pravděpodobnostní funkci $P(v)$. Na indexy v tedy může být pohlíženo jako na diskrétní náhodnou veličinu, která však ve výsledcích nevystupuje, protože je požadována pouze marginální hustota veličiny \mathbf{x} . Složky směsi hustot pak odpovídají podmíněným hustotám $p(\mathbf{x}|v)$ a daná směs má tvar $p(\mathbf{x}) = \sum_{v=1}^N P(v)p(\mathbf{x}|v)$.

Je-li uvažována směs $p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{v=1}^N P(v)p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|v)$, kde \mathbf{z} je další spojitá náhodná veličina, pak se při marginalizaci přes \mathbf{z} nemění váhy $P(v)$, je třeba marginalizovat pouze složky $p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|v)$. Při predikci tedy stačí provést predikci pouze na jednotlivé složky směsi.

Ve filtraci pro váhy složek směsi platí vztah, že na základě sdružené směsi se váha podmíněné směsi určí ze součinu váhy sdružené složky a hodnoty marginální složky v bodě, kterým je podmiňováno. Pro podmíněnou směs $p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \sum_{v=1}^N P(v|\mathbf{z})p(\mathbf{x}|v, \mathbf{z})$ je tedy váha $P(v|\mathbf{z})$ dána $P(v|\mathbf{z}) \propto P(v)p(\mathbf{z}|v)$. Složky jsou opět filtrovány zvlášť, hustoty $p(\mathbf{x}|v, \mathbf{z})$ jsou získány ze sdružených hustot $p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|v)$.

Nyní lze obrátit pozornost zpět k zadanému systému.

Z definice podmíněně lineárního systému (4.24) lze vyjádřit hustotu přechodu stavu $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n, \mathbf{x}_{k+1}^l | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^l)$, která je očividně Gaussovou směsí, a z ní přímočaře odvodit parametry marginální Gaussovy směsi hustot přechodu stavu $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^l)$ a podmíněně Gaussovy směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^l | \mathbf{x}_{k:k+1}^n, \mathbf{x}_k^l)$. Střední vektory, kovarianční matice a váhy složek marginální směsi jsou dány

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w} = \mathbf{f}_k^n + \mathbf{F}_k^n \mathbf{x}_k^l + \mathbf{G}_k^n \hat{\mathbf{w}}_k^{n,w}, \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w} = \mathbf{G}_k^n \mathbf{Q}_k^{n,w} (\mathbf{G}_k^n)^T, \quad (4.25b)$$

$$\alpha_{k+1|\mathbf{x}_k}^w = \alpha_{\mathbf{w}_k}^w. \quad (4.25c)$$

Pro podmíněně směsi jsou pak spolu se zisky \mathbf{M}_k^w dány vztahy

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|\mathbf{x}_{k+1}^n, \mathbf{x}_k}^{l,w} = \mathbf{f}_k^l + \mathbf{F}_k^l \mathbf{x}_k^l + \mathbf{G}_k^l \hat{\mathbf{w}}_k^{l,w} + \mathbf{M}_k^w (\mathbf{x}_{k+1}^n - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w}), \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|\mathbf{x}_{k+1}^n, \mathbf{x}_k}^{l,w} = \mathbf{G}_k^l \mathbf{Q}_k^{l,w} (\mathbf{G}_k^l)^T - \mathbf{M}_k^w \mathbf{P}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{l,w} (\mathbf{M}_k^w)^T, \quad (4.26b)$$

$$\mathbf{M}_k^w = \mathbf{G}_k^l \mathbf{Q}_k^{ln,w} (\mathbf{G}_k^n)^T (\mathbf{P}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w})^{(-1)}, \quad (4.26c)$$

$$\alpha_{k+1|\mathbf{x}_{k+1}^n, \mathbf{x}_k}^w \propto \alpha_{k+1|\mathbf{x}_k}^w \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}^n : \hat{\mathbf{x}}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w}, \mathbf{P}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w}). \quad (4.26d)$$

Je třeba připomenout, že pro zkrácení zápisu není značena závislost vektorových a maticových funkcí na nelineární části stavu \mathbf{x}_k^n . Násobení váhy $\alpha_{k+1|\mathbf{x}_k}^w$ hodnotou složky $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w}, \mathbf{P}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w})$ v bodě \mathbf{x}_{k+1}^n lze jednoduše vysvětlit tak, že při podmiňování se nenormalizuje každá složka w hodnotou marginální složky $\mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}^n : \hat{\mathbf{x}}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w}, \mathbf{P}_{k+1|\mathbf{x}_k}^{n,w})$ zvlášť, ale normalizuje se najednou výsledná směs.

Pro zadaný systém jsou dále navrženy filtr Gaussových směsí a částicový filtr, které dohromady tvoří marginalizovaný filtr. První filtr zpracovává hustoty lineární části stavu \mathbf{x}_k^l , druhý obstarává nelineární část \mathbf{x}_k^n .

Použití filtrů Gaussových směsí. Hustoty lineární části stavu \mathbf{x}_k^l , podmíněně trajektorie nelineární části stavu \mathbf{x}_k^n a měření, jsou dány Gaussovými směsmi.

Až na jednu malou výjimku lze celkem bezmyšlenkovitě upravit vztahy filtrů Gaussových směsí. Onou výjimkou je přechod od současného stavu \mathbf{x}_k^1 k následujícímu vztahu \mathbf{x}_{k+1}^1 . Je si totiž třeba uvědomit, že složky Gaussových směsí $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ a $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathbf{x}_k^1)$ jsou závislé, a proto se počet složek nenásobí.

Kromě zpracovávání hustot lineární části \mathbf{x}_k^1 je úkolem filtru Gaussových směsí předávat částicovému filtru hustoty měření a přechodu stavu, ze kterých je závislost na lineární části \mathbf{x}_k^1 odstraněna a nahrazena závislostí na měřeních \mathcal{Z}_{k-1} , respektive \mathcal{Z}_k , a na případných minulých částech trajektorií nelineární části $\mathbf{x}_{\kappa:k-1}^n$. Částicový filtr naopak poskytuje vzorky nelineární části \mathbf{x}_k^n , kterými jsou hustoty lineární části \mathbf{x}_k^1 podmíněny.

Smyčka odhadování pomocí filtru Gaussových hustot začíná prediktivní Gaussovou směsí $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_{k-1})$. K označení parametrů této směsi budou použity dolní indexy „ $k | \kappa : k, k-1$ “. Obdobně pro filtrační, vyhlazenou, nezpracovanou prediktivní a prediktivní Gaussovou směs, $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$, $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$, $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ a $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ bude použito značení „ $k | \kappa : k, k$ “, „ $k | \kappa : k+1, k$ “, „ $k+1 | \kappa : k+1, k$ “ a „ $k+1 | k+1, k$ “. Zpracované hustoty měření a přechodu stavu mají rovněž tvar Gaussových směsí, $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_{k-1})$ a $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$, a k značení jejich parametrů, tedy středních vektorů, kovariančních matic a vah složek, bude použito „ $k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, k-1$ “ a „ $k+1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, k$ “.

Vztahy pro parametry zpracované směsi měření $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_{k-1})$ a filtrační směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$ jsou dané úpravou standardních vztahů pro filtry Gaussových směsí. Při použití stejných indexů pro značení složek marginální a podmíněné směsi,

$$j = 1, \dots, N_{j,k}, \quad N_{j,k} = N_{i,k} \cdot N_{\mathbf{v}_k}, \quad i = \lfloor \frac{j-1}{N_{\mathbf{v}_k}} \rfloor + 1, \quad v = j - (i-1)N_{\mathbf{v}_k}, \quad (4.27)$$

tedy pro parametry směsi $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_{k-1})$ platí

$$\hat{\mathbf{z}}_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j = \mathbf{h}_k + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k | \kappa:k, k-1}^{1,i} + \hat{\mathbf{v}}_k^v, \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{P}_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k | \kappa:k, k-1}^{1,i} (\mathbf{H}_k)^T + \mathbf{R}_k^v, \quad (4.28b)$$

$$\alpha_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j = \alpha_{k | \kappa:k, k-1}^i \cdot \alpha_{\mathbf{v}_k}^v \quad (4.28c)$$

a parametry směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$ jsou dány

$$\hat{\mathbf{x}}_{k | \kappa:k, k}^{1,j} = \hat{\mathbf{x}}_{k | \kappa:k, k-1}^{1,i} + \mathbf{K}_k^j (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j), \quad (4.29a)$$

$$\mathbf{P}_{k | \kappa:k, k}^{1,j} = \mathbf{P}_{k | \kappa:k, k-1}^{1,i} - \mathbf{K}_k^j \mathbf{P}_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j (\mathbf{K}_k^j)^T, \quad (4.29b)$$

$$\mathbf{K}_k^j = \mathbf{P}_{k | \kappa:k, k-1}^{1,i} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{P}_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j)^{-1}, \quad (4.29c)$$

$$\alpha_{k | \kappa:k, k}^j \propto \alpha_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j \mathcal{N}(\mathbf{z}_k : \hat{\mathbf{z}}_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j, \mathbf{P}_{k | \mathbf{x}_{\kappa:k}, k-1}^j). \quad (4.29d)$$

Parametry zpracované Gaussovy směsi přechodu $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$ a filtrační Gaussovy směsi vyhlazené pomocí budoucí nelineární částí \mathbf{x}_{k+1}^n , tedy vyhlazené Gaussovy směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$, se získají formálně naprosto stejným postupem. Místo rovnice (4.24c) je použita rovnice (4.24a) a místo realizace měření \mathbf{z}_k je uvažována realizace \mathbf{x}_{k+1}^n .

Složky uvedených směsí jsou tedy indexovány pomocí h , kde platí

$$h = 1, \dots, N_{h,k}, \quad N_{h,k} = N_{j,k} \cdot N_{\mathbf{w}_k}, \quad j = \lfloor \frac{h-1}{N_{\mathbf{w}_k}} \rfloor + 1, \quad w = h - (j-1)N_{\mathbf{w}_k}, \quad (4.30)$$

parametry směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$ jsou dány

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|\kappa:k}^{\mathbf{n},h} = \mathbf{f}_k^{\mathbf{n}} + \mathbf{F}_k^{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{x}}_{k|\kappa:k}^{\mathbf{n},j} + \mathbf{G}_k^{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{w}}_k^{\mathbf{n},w}, \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|\kappa:k}^{\mathbf{n},h} = \mathbf{F}_k^{\mathbf{n}} \mathbf{P}_{k|\kappa:k}^{\mathbf{n},j} (\mathbf{F}_k^{\mathbf{n}})^{\mathbf{T}} + \mathbf{G}_k^{\mathbf{n}} \mathbf{Q}_k^{\mathbf{n},w} (\mathbf{G}_k^{\mathbf{n}})^{\mathbf{T}}, \quad (4.31b)$$

$$\alpha_{k+1|\kappa:k}^h = \alpha_{k|\kappa:k}^j \alpha_{\mathbf{w}_k}^w \quad (4.31c)$$

a parametry směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ dány vztahy

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|\kappa:k+1}^{\mathbf{l},h} = \hat{\mathbf{x}}_{k|\kappa:k}^{\mathbf{l},j} + \mathbf{L}_k^h (\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|\kappa:k}^{\mathbf{n},h}), \quad (4.32a)$$

$$\mathbf{P}_{k|\kappa:k+1}^{\mathbf{l},h} = \mathbf{P}_{k|\kappa:k}^{\mathbf{l},j} - \mathbf{L}_k^h \mathbf{P}_{k+1|\kappa:k}^{\mathbf{n},h} (\mathbf{L}_k^h)^{\mathbf{T}}, \quad (4.32b)$$

$$\mathbf{L}_k^h = \mathbf{P}_{k|\kappa:k}^{\mathbf{l},j} (\mathbf{F}_k^{\mathbf{n}})^{\mathbf{T}} (\mathbf{P}_{k+1|\kappa:k}^{\mathbf{n},h})^{-1}, \quad (4.32c)$$

$$\alpha_{k|\kappa:k+1}^h \propto \alpha_{k+1|\kappa:k}^h \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}} : \hat{\mathbf{x}}_{k+1|\kappa:k}^{\mathbf{n},h}, \mathbf{P}_{k+1|\kappa:k}^{\mathbf{n},h}). \quad (4.32d)$$

Parametry nezpracované prediktivní Gaussovy směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ je třeba odvozovat s rozmyslem. Podmíněná vyhlazená směs $p(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ má $N_{l,k}$ složek, podmíněná směs přechodu $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathbf{x}_k^1)$ má $N_{w,k}$ složek. Protože jsou ale složky mezi směsmi závislé, nekombinuje se každá složka jedné směsi s každou složkou jiné směsi. Složky podmíněné směsi přechodu odpovídají složkám marginální směsi přechodu $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_k^{\mathbf{l}})$, přičemž marginální směs přechodu byla použita k získání podmíněné vyhlazené směsi. Kombinování daných směsí musí tuto závislost zohlednit.

Podmíněná vyhlazená směs $p(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ je v souladu s předchozí diskuzí chápána jako marginální hustota rozšířené náhodné veličiny, nyní rozšířené o diskrétní veličinu w . Neboli $p(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k) = \sum_{w=1}^{N_{w,k}} P(w | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k) p(\mathbf{x}_k^1 | w, \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$, kde pravděpodobnosti $P(w | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ jsou získány Bayesovým pravidlem, $P(w | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k) \propto p(\mathbf{x}_{k+1}^n | w, \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k) P(w | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$, a podle definice stavového šumu jsou hodnoty w nezávislé na minulosti i současnosti, $P(w | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k) \triangleq \alpha_{\mathbf{w}_k}^w$.

Protože nezpracovanou prediktivní směs lze zapsat pomocí stejných vah složek šumu jako $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k) = \sum_{w=1}^{N_{w,k}} P(w | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k) p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | w, \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$, je zřejmé, že váhy nezpracované prediktivní směsi musejí být rovny vahám podmíněné vyhlazené směsi.

Složky podmíněné vyhlazené směsi $p(\mathbf{x}_k^1 | w, \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ jsou pomocí Bayesova pravidla získávány z podmíněných hustot $p(\mathbf{x}_k^1 | w, \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$, které podle definice stavového šumu odpovídají filtrační hustotě, $p(\mathbf{x}_k^1 | w, \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k) \triangleq p(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$, a z příslušných složek marginální směsi přechodu $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | w, \mathbf{x}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_k^{\mathbf{l}})$. Složky nezpracované prediktivní směsi $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | w, \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ jsou podle Chapmanovy–Kolmogorovovy rovnice dány složkami podmíněné vyhlazené směsi $p(\mathbf{x}_k^1 | w, \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ a příslušnými složkami podmíněné směsi přechodu $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | w, \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathbf{x}_k^{\mathbf{l}})$. Souhrnně lze říci, že v marginalizovaných filtrech je třeba kombinovat ty složky směsí, které odpovídají stejnému indexu w .

Nezpracovaná prediktivní Gaussova směs $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ je dána následujícími parametry, kde indexy h a w jsou dány vztahy (4.30),

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|\kappa:k+1}^{\mathbf{l},h} &= \mathbf{f}_k^{\mathbf{l}} + \mathbf{F}_k^{\mathbf{l}} \hat{\mathbf{x}}_{k|\kappa:k+1}^{\mathbf{l},h} + \mathbf{G}_k^{\mathbf{l}} \hat{\mathbf{w}}_k^{\mathbf{l},w} + \\ &\quad + \mathbf{M}_k^w (\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}} - \mathbf{f}_k^{\mathbf{n}} - \mathbf{F}_k^{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{x}}_{k|\kappa:k+1}^{\mathbf{n},h} - \mathbf{G}_k^{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{w}}_k^{\mathbf{n},w}), \end{aligned} \quad (4.33a)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|\kappa:k+1}^{\mathbf{l},h} = \mathbf{P}_{k+1|\kappa:k+1}^{\mathbf{l},w} + (\mathbf{F}_k^{\mathbf{l}} - \mathbf{M}_k^w \mathbf{F}_k^{\mathbf{n}}) \mathbf{P}_{k|\kappa:k+1}^{\mathbf{l},h} (\mathbf{F}_k^{\mathbf{l}} - \mathbf{M}_k^w \mathbf{F}_k^{\mathbf{n}})^{\mathbf{T}}, \quad (4.33b)$$

$$\alpha_{k+1|\kappa:k+1}^h = \alpha_{k|\kappa:k+1}^h. \quad (4.33c)$$

V případě standardního marginalizovaného částicového filtru je dalším krokem algoritmu posunutí se v čase, $k \leftarrow k + 1$, a nový běh smyčky odhadování, neboli pokračování filtračním krokem. V případě marginálního marginalizovaného částicového filtru je třeba ještě z nezpracované prediktivní směsi odstranit závislost trajektoriích nelineární části $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$. Předtím je však třeba upnout pozornost k částicovému filtru.

Úprava částicových filtrů. Standardní částicový filtr byl uveden v kapitole 2.1.2, marginální částicový filtr v kapitole 4.2.1. Přidání marginalizace, tedy použití částicového filtru pouze na část stavu, vede k užití zpracované hustoty měření $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_{k-1})$ místo hustoty měření $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1)$, která je dána rovnicí měření (4.24c) a hustotou šumu (2.14b), a k použití zpracované hustoty přechodu $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$ místo marginální hustoty přechodu $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1)$, která je dána přímo rovnicí systému (4.24a) a hustotou šumu (2.14b), (4.24e). Odpovídajícím způsobem je také nutno upravit vzorčovací hustoty, místo celého stavu \mathbf{x}_k v nich vystupují pouze nelineární části \mathbf{x}_k^n .

Dalším důsledkem marginalizace je rozšíření definice částic. Nově se neskládají pouze ze vzorků a vah, kdy v případě standardních částicových filtrů vzorky odpovídají koncům trajektorií, jejichž minulé části nejsou nikde uchovávány. Nyní jsou částice dány vzorky, vahami a parametry podmíněné hustoty, zde podmíněné Gaussovy směsí. Filtrační částice jsou tedy dány $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^n = (\mathbf{x}_{\kappa:k}^{n,s}, w_{\kappa:k|k}^s, [\hat{\mathbf{x}}_{\kappa:k|k}^{1,j}, \mathbf{P}_{\kappa:k|k}^{1,j}, \alpha_{\kappa:k|k,k}^j]_{j=1}^{N_{s,k}})_{s=1}^{N_{s,k}}$, přičemž značení parametrů podmíněných hustot pomocí „ $k|k$ “ ukrývá závislost na $\mathbf{x}_{\kappa:k}^{n,s}$, a tedy rovněž i na indexu s . Při převzorkování je tedy důležité kromě změny vzorku a váhy nezapomenout na změnu přidružených parametrů. Prediktivní vzorky budou značeny $\mathbf{x}_{k+1}^{n,r}$, $r = 1, \dots, N_{r,k+1}$. Za povšimnutí rovněž stojí skutečnost, že k vyhodnocení hustot $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{n,s}, \mathcal{Z}_{k-1})$ a $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{n,s}, \mathcal{Z}_k)$ postačují místo celých trajektorií $\mathbf{x}_{\kappa:k}^{n,s}$ pouze jejich konce $\mathbf{x}_k^{n,s}$.

Prediktivní částice standardního marginalizovaného filtru jsou dány $\mathcal{P}_{k+1|\kappa:k+1,k}^n = (\mathbf{x}_{\kappa:k+1}^{n,r}, w_{\kappa:k+1|k}^r, [\hat{\mathbf{x}}_{k+1|\kappa:k+1,k}^{1,h}, \mathbf{P}_{k+1|\kappa:k+1,k}^{1,h}, \alpha_{k+1|\kappa:k+1,k}^h]_{h=1}^{N_{r,k+1}})_{r=1}^{N_{r,k+1}}$ a lze je nyní sestrojít dosazováním vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{n,r}$ a trajektorií $\mathbf{x}_{\kappa:k}^{n,s_r}$ do vztahů (4.33). Je třeba znovu připomenout nevýslovně značenou závislost na $\mathbf{x}_{k+1}^{n,r}$ a $\mathbf{x}_{\kappa:k}^{n,s_r}$.

Navržená marginalizace trajektorií. Před samotným odstraněním závislosti nezpracovaných prediktivních směsí $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ na trajektoriích $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$ je třeba aproximovat marginální vyhlazenou hustotu $p(\mathbf{x}_{\kappa:k}^n | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$, kde vyhlazování je provedeno nikoliv budoucím měřením, ale budoucí částí stavu \mathbf{x}_{k+1}^n . Postup je formálně stejný jako při použití měření \mathbf{z}_k ve standardní filtraci, použije se Bayesovo pravidlo.

Marginální vyhlazené váhy $w_{\kappa:k|\mathbf{x}_{k+1}^n,k}^s$ jsou tedy úměrné součinu filtračních vah $w_{\kappa:k|k}^s$ a zpracované hustoty přechodu $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$, zde dané Gaussovou směsí, vyhodnocené v příslušných vzorcích $\mathbf{x}_{k+1}^{n,r}$, $\mathbf{x}_k^{n,s}$,

$$w_{\kappa:k|\mathbf{x}_{k+1}^n,k}^s \propto p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^{n,r} | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k) w_{\kappa:k|k}^s. \quad (4.34)$$

Jak bylo naznačeno, k vyhodnocení $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k)$ není nutné znát celou trajektorii $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$.

Aproximace podmíněné prediktivní hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ je pochopitelně prováděna podle stejné myšlenky jako aproximace marginální prediktivní hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k)$.

Místo marginální hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1)$ a marginálních filtračních vah $w_{\kappa:k|k}^s$ dosazovaných do vztahu (4.17) jsou použity nezpracované prediktivní hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ a marginální vyhlazené váhy $w_{\kappa:k|\mathbf{x}_{k+1}^n, k}^s$. Pro příslušné vzorky tedy platí

$$p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k) \approx \sum_{s=1}^{N_k} w_{\kappa:k|\mathbf{x}_{k+1}^n, k}^s p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_k), \quad (4.35)$$

a opět není nutno znát celou trajektorii $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$, ale pouze \mathbf{x}_k^n . Stejně jako v marginálním částicovém filtru může být tato aproximace chápána jako analytická integrace v Chapmanově–Kolmogorově rovnici, kde marginální hustota je aproximována směsí Diracových funkcí. Dále může být chápána jako odhad hustoty pomocí jádrových funkcí nebo jako aproximace hustoty pomocí odhadu střední hodnoty funkce dané nezpracovanou prediktivní hustotou v proměnných $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$ pro každé parametry \mathbf{x}_{k+1}^1 , \mathbf{x}_{k+1}^n a \mathcal{Z}_k .

Podmíněné prediktivní hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k)$ jsou tudíž dány směsmi Gaussových směsí. Neboli ve výsledku opět Gaussovými směsmi. Střední vektory i kovarianční matice složek nezpracovaných prediktivních Gaussových směsí, kde je třeba pamatovat na značení „ $k+1 | \kappa : k+1, k$ “ ukrývající trajektorie $\mathbf{x}_{\kappa:k}^n$ závislé na indexu s a prediktivní vzorky \mathbf{x}_{k+1}^n závislé na indexu r , jsou beze změny předány, váhy složek směsi se násobí s vahami částic pro marginální vyhlazené hustoty,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1, k}^{1, i} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|\kappa:k+1, k}^{1, h}, \quad (4.36a)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1, k}^{1, i} = \mathbf{P}_{k+1|\kappa:k+1, k}^{1, h}, \quad (4.36b)$$

$$\alpha_{k+1|k+1, k}^i = w_{\kappa:k|\mathbf{x}_{k+1}^n, k}^s \alpha_{k+1|\kappa:k+1, k}^h, \quad (4.36c)$$

přičemž indexy složek jsou dané

$$i = 1, \dots, N_{\underline{i}, k+1}, \quad N_{\underline{i}, k+1} = N_{\underline{s}, k} \cdot N_{\underline{h}, k}, \quad s = \lfloor \frac{i-1}{N_{\underline{h}, k}} \rfloor + 1, \quad h = i - (s-1)N_{\underline{h}, k}. \quad (4.36d)$$

Prediktivní částice marginálního marginalizovaného částicového filtru jsou konstruovány jako $\mathcal{P}_{k+1|k+1, k}^n = (\mathbf{x}_{k+1}^n, w_{k+1|k}^r, [\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1, k}^{1, i}, \mathbf{P}_{k+1|k+1, k}^{1, i}, \alpha_{k+1|k+1, k}^i]_{i=1}^{N_{\underline{i}, k+1}})_{r=1}^{N_{\underline{r}, k+1}}$.

Problémem marginálního částicového filtru je kvadratická složitost v počtu částic oproti lineární složitosti standardního částicového filtru. Marginální marginalizovaný filtr, byť může počet částic řádově snížit při zachování stejné kvality poskytovaných odhadů, je však v čistě marginálním módu neřešitelný, neboť podmíněné prediktivní hustoty jsou směsí s počtem složek exponenciálním v čase. Přičemž je brán v úvahu hlavně nárůst vlivem počtu částic, přítomný i pro čistě Gaussovy šумы místo směsí. Kromě již dříve uvedených přístupů k redukci počtu složek směsi [96, 71, 72], je též možno vybrat zachovávané složky vzorkováním podle vah $\alpha_{k+1|k+1, k}^i$ podobně jako při převzorkování v částicových filtrech. Při nutné redukci počtu složek jsou tak i počty složek směsí ve standardním módu $N_{\underline{h}, k+1}$ či marginálním módu $N_{\underline{i}, k+1}$, závislé na aktuální částici, čili na indexu r . Ve standardním módu je výběr složek také možno skloubit s převzorkováním částic. Zjednodušení podmíněných hustot lze vyměnit za nárůst počtu částic. V marginálním módu však žádné převzorkování neprobíhá.

Kvůli počtu složek podmíněných směsí tak má smysl používat marginální mód pouze v případech, kdy je potřeba správně reprezentovat hustotu posledního stavu. Tedy hlavně

na vyžádání, například v okamžiku, kdy je cílem provést fúzi hustot poskytovaných estimátory zpracovávajícími různá lokální data. Navíc marginální mód lze používat jako doplněk v otevřené smyčce, případně jednou za čas ke zkrácení trajektorií na nichž jsou částice implicitně závislé.

4.2.4 Příklad

Pro ilustraci marginálního módu bude použit příklad z autorova článku [5]. Cílem je názorně ukázat, že standardní marginalizovaný částicový filtr neposkytuje takovou reprezentaci hustoty posledního stavu, která by byla použitelná ve fúzi hustot.

Jednoduchým systémem s podmíněně lineární částí je systém s lineární dynamikou a nelineárním měřením části stavu. Typickým příkladem je pohybující se objekt, u něhož se předpokládá skoro konstantní rychlost \mathbf{x}_k^1 a jehož poloha \mathbf{x}_k^n je měřena nelineárním senzorem. Pro jednoduchost bude uvažován pohyb po přímce. Necht' je tedy systém dán vztahy

$$\mathbf{x}_{k+1}^n = \mathbf{x}_k^n + T\mathbf{x}_k^1 + \mathbf{w}_k^n, \quad (4.37a)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^1 = 0 + \mathbf{x}_k^1 + \mathbf{w}_k^1, \quad (4.37b)$$

$$\mathbf{z}_k = \arctan(\mathbf{x}_k^n) + 0 + \mathbf{v}_k, \quad (4.37c)$$

kde T je časová perioda, $T = 1$, kovarianční matice šumů \mathbf{w}_k , \mathbf{v}_k jsou rovny

$$\mathbf{Q}_k = 0.01 \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_k = 0.0025, \quad (4.37d)$$

a počáteční stav je dán Gaussovou hustotou, přičemž rychlost \mathbf{x}_0^1 a poloha \mathbf{x}_0^n jsou nezávislé,

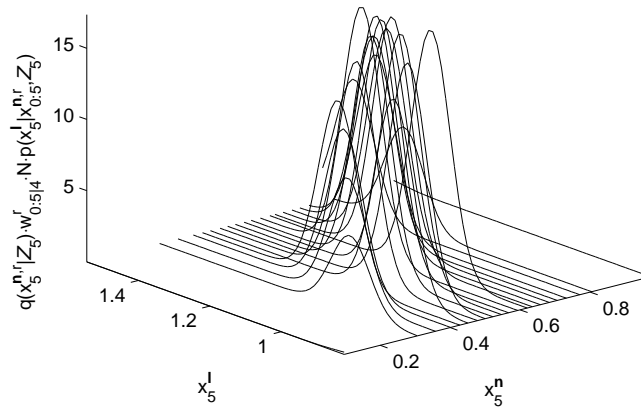
$$p_G(\mathbf{x}_0^n) = \mathcal{N}(-4, 0.01), \quad \hat{\mathbf{x}}_0^{1,i} = 1, \quad \mathbf{P}_0^{1,i} = 0.01. \quad (4.37e)$$

Pro zadaný systém dochází k několika zjednodušením. První vychází z nezávislosti měření \mathbf{z}_k na rychlosti \mathbf{x}_k^1 , protože $\mathbf{H}_k = 0$. Čili rychlost není filtrována měřením, k úpravě podmíněných hustot rychlosti tak dochází pouze prostřednictvím prediktivních vzorků polohy $\mathbf{x}_{k+1}^{n,r}$. Z uvedené nezávislosti dále vyplývá, že není nutno zvláště vyjadřovat zpracovanou směs měření $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_{k-1})$, protože pro $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1) = p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^n)$ z Chapmanovy–Kolmogorovy rovnice plyne rovnost $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_{k-1}) = p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathbf{x}_k^1, \mathcal{Z}_{k-1})$ a rovnost $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathbf{x}_k^1, \mathcal{Z}_{k-1}) = p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1)$ platí z definice stavu. Neboli směs měření je už zadána v potřebném tvaru, $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^n, \mathcal{Z}_{k-1}) = p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^n)$, zde navíc odpovídá prostě Gaussově hustotě.

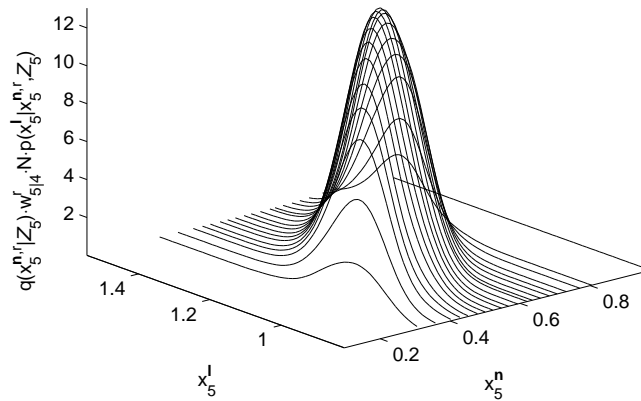
Dále se výpočet zjednoduší tím, že dynamika systému je celá lineární, a proto jsou kovarianční matice nezávislé na jednotlivých trajektoriích, čili v případě Gaussových hustot šumů a počáteční podmínky stejné pro všechny trajektorie.

Pro ilustraci poskytovaných hustot poslouží příklad, kdy marginalizovaný filtr běží do času $k = 4$ ve standardním módu s konstantním počtem částic, $N = 501$. Převzorkování je prováděno v každém čase k se základní volbou $\psi_{\kappa:k|k+1}^s = w_{\kappa:k|k}^s$, $q(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^{n,sr}) = p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{n,sr}, \mathcal{Z}_k)$. Prediktivní váhy $w_{\kappa:k+1|k}^r$ jsou tedy rovny N^{-1} .

Prediktivní hustoty jsou ilustrovány na obrázku 4.10. Trajektorie $\mathbf{x}_{0:5}^{n,r}$ byly seřazeny podle posledních vzorků $\mathbf{x}_5^{n,r}$ a pouze každá pětadvacátá je vykreslena. Podmínečné Gaussovy hustoty $p_G(\mathbf{x}_5^1 | \mathbf{x}_{0:5}^{n,r}, \mathcal{Z}_4)$ jsou vynásobeny marginální vzorkovací husto-



Obrázek 4.10: Hustoty poskytované standardním marginalizovaným filtrem.



Obrázek 4.11: Hustoty poskytované marginálním marginalizovaným filtrem.

tou $q(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r} | \mathcal{Z}_5)$, $q(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r} | \mathcal{Z}_5) = \sum_{s=1}^N q(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n}} | \mathbf{x}_4^{\mathbf{n},s}) \psi_{4|5}^s$, která díky $w_{0:5|4}^r = N^{-1}$ přímo odpovídá odhadu marginální prediktivní hustoty $p(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n}} | \mathcal{Z}_4)$. Vzorkovací hustotu $q(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r} | \mathcal{Z}_5)$ lze vyčíst z obrázku, neboť je přibližně nepřímě úměrná vzdálenosti mezi jednotlivými vykreslenými řezy danými vzorky $\mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r}$.

Je zřejmé, že částice poskytované standardním marginalizovaným filtrem nejsou připravené k fúzi hustot pravděpodobnosti, kde jsou slučovány hustoty posledního stavu, zde hustoty $p(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_5^1 | \mathcal{Z}_4)$. I když je možné využít marginální částicový filtr k získání hustoty $p(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n}} | \mathcal{Z}_4)$, hustoty $p(\mathbf{x}_5^1 | \mathbf{x}_{0:5}^{\mathbf{n},r}, \mathcal{Z}_4)$ jsou podmíněny trajektoriemi $\mathbf{x}_{0:4}^{\mathbf{n},r}$, kde přinejmenším části $\mathbf{x}_{0:3}^{\mathbf{n},r}$ jsou nedostupné. Toto nadbytečné podmínění brání přímému odhadu hustoty $p(\mathbf{x}_5^1, \mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r} | \mathcal{Z}_4)$. Je tedy nutné provést navrženou marginalizaci trajektorií.

V daném čase $k = 4$ je tudíž použit i marginální mód. Lze použít stejné vzorky $\mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r}$ jako v předchozím případě, použitá marginální vzorkovací hustota $q(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r} | \mathcal{Z}_5)$ opět odpovídá odhadu marginální prediktivní hustoty $p(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n}} | \mathcal{Z}_4)$. Prediktivní váhy $w_{5|4}^r$ jsou totiž opět rovny N^{-1} .

Získané prediktivní hustoty jsou zachyceny na obrázku 4.11. Podmíněné Gaussovy hustoty $p_G(\mathbf{x}_5^1 | \mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r}, \mathcal{Z}_4)$ jsou vynásobeny marginální vzorkovací hustotou $q(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n},r} | \mathcal{Z}_5)$, čili obrázek zachycuje odhad sdružené hustoty $p(\mathbf{x}_5^{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_5^1 | \mathcal{Z}_5)$. Oproti standardnímu módu je nyní možno částice použít ve fúzi, protože částice reprezentují sdruženou hustotu přímo.

4.2.5 Shrnutí

Přínosem kapitoly 4.2 bylo navržení marginálního marginalizovaného částicového filtru pro systémy s podmíněně lineární částí, přičemž v rámci marginalizovaných částicových filtrů byly nově uvažovány Gaussovy směsi místo obvyklých Gaussových hustot.

Protože pro fúzi hustot $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\ell)})$, $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ je nepřijatelné, že částice $\mathcal{P}_{0:k|k}^{(\ell)}$, $\mathcal{P}_{0:k|k}^{(\lambda)}$ reprezentují hustoty celých trajektorií stavu $\mathbf{x}_{0:k}$, nikoliv pouze posledního stavu \mathbf{x}_k , bylo navrženo použití marginálního částicového filtru.

Protože použití částicových filtrů je cílené na systémy malé dimenze a protože výpočetní náročnost marginálních částicových filtrů je o řád vyšší než u standardních částicových filtrů, je nutno pro systémy vyšší dimenze používat efektivnější varianty filtrů. Marginalizované částicové filtry jsou však opět vztaheny k trajektoriím, i když tentokrát pouze části stavu. Tuto závislost je tedy opět nutno odstranit.

Nejprve byly názorně představeny vztahy mezi použitými hustotami. Vzhledem k výpočetní náročnosti bylo zároveň navrženo používat marginální mód pouze na vyžádání a jinak pracovat se standardním marginálním částicovým filtrem. Poté byl navržen algoritmus marginálního marginalizovaného částicového filtru pro systémy s podmíněně lineární částí, kde počáteční hustota a hustoty šumů jsou Gaussovy směsi. Na závěr byl předložen jednoduchý případ pohybujícího se objektu, u kterého se předpokládá skoro konstantní rychlost a jehož poloha je měřena nelineárním senzorem. Na tomto typickém příkladě bylo ukázáno, že standardní marginalizovaný částicový filtr je pro použití v úloze fúze hustot nevyhovující, zatímco jeho marginální varianta potřebám fúze vyhovuje.

Navržený filtr je shrnut v následujícím algoritmu, který se v části Predikce, bod 2), větví podle zvoleného módu marginalizovaného filtru.

Shrnutí algoritmu: Marginalizovaný částicový filtr s volitelným marginálním módem

Inicializace

- 1) Proveď výběr N_0 počátečních vzorků ze zvolené vzorkovací hustoty, $\mathbf{x}_0^{\mathbf{n},s} \sim q(\mathbf{x}_0^{\mathbf{n}} | \mathbf{z}_0)$, pro jednoduchost můžeš zvolit $q(\mathbf{x}_0^{\mathbf{n}} | \mathbf{z}_0) = p(\mathbf{x}_0^{\mathbf{n}})$. Vzorkům přiřaď váhy, $w_{0|-1}^s \propto p(\mathbf{x}_0^{\mathbf{n},s}) / q(\mathbf{x}_0^{\mathbf{n},s} | \mathbf{z}_0)$, a parametry Gaussových směrů $p_{Gs}(\mathbf{x}_0^{\mathbf{n}} | \mathbf{x}_0^{\mathbf{n},s})$ podle (4.24d). Nastav počáteční čas, $k \leftarrow 0$. Vynuluj čas poslední marginalizace, $\kappa \leftarrow 0$.

Filtrace

- 1) Odstraň část stavu $\mathbf{x}_k^{\mathbf{l}}$ z podmínky hustoty měření $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_k^{\mathbf{l}})$. To jest pro každý vzorek $\mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s}$ spočti parametry zpracované Gaussovy směsi měření $p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}, \mathcal{Z}_{k-1})$ podle (4.27), (4.28).
- 2) Spočti filtrační váhy $w_{\kappa:k|k}^s$ částic náležejících části stavu $\mathbf{x}_k^{\mathbf{n}}$ podle vztahu $w_{\kappa:k|k}^s \propto p_{Gs}(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}, \mathcal{Z}_{k-1}) w_{\kappa:k|k-1}^s$.
- 3) Pro prediktivní Gaussovy směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^{\mathbf{l}} | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}, \mathcal{Z}_{k-1})$ proveď pro každý vzorek $\mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s}$ filtraci podle vztahů (4.29).

Predikce

- 1) Odstraň část stavu \mathbf{x}_k^1 z podmínky hustoty přechodu $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{x}_k^1)$. To jest pro každý vzorek $\mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s}$ spočítej podle vztahů (4.30), (4.31) parametry zpracované Gaussovy směsi přechodu $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s}, \mathcal{Z}_k)$.
- 2) Vyber mód marginalizovaného částicového filtru.

2S) Standardní mód

- a) Proveď převzorkování, to jest rozhodni, které trajektorie $\mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}$ mají být kolikrát zkopírovány a prodlouženy. Pro jednoduchost můžeš použít $P(s_r = s) = \psi_{k|k+1}^s$, kde $\psi_{k|k+1}^s \triangleq w_{\kappa:k|k}^s$ a $r = 1, \dots, N_{\mathcal{L},k+1}$. Proveď výběr vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r}$ ze zvolených vzorkovacích hustot $q(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s_r}, \mathcal{Z}_{k+1})$, pro jednoduchost můžeš zvolit například $q(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s_r}, \mathcal{Z}_{k+1}) = p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s_r}, \mathcal{Z}_k)$.
- b) Spočti prediktivní váhy $w_{\kappa:k+1|k}^r$ pomocí

$$w_{\kappa:k+1|k}^r \propto (p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r} | \mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s_r}, \mathcal{Z}_k) w_{\kappa:k|k}^{s_r}) / (q(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r} | \mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s_r}, \mathcal{Z}_{k+1}) \psi_{k|k+1}^r).$$
- c) Pro filtrační Gaussovy směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s_r}, \mathcal{Z}_k)$, které přísluší prodlužovaným trajektoriím $\mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s_r}$, proveď vyhlazování pomocí následujícího vzorku $\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r}$ a proveď predikci. To jest spočítej parametry nezpracované prediktivní Gaussovy směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k+1}^{\mathbf{n},r}, \mathcal{Z}_k)$, kde $\mathbf{x}_{\kappa:k+1}^{\mathbf{n},r} = (\mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s_r}, \mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r})$, pomocí (4.32) a (4.33), kde nezapomeň na neznačenou případnou závislost $\mathbf{f}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{f}_k^{\mathbf{l}}, \mathbf{F}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{G}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{F}_k^{\mathbf{l}}, \mathbf{G}_k^{\mathbf{l}}$ a \mathbf{M}_k^w na $\mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s_r}$.
- d) Posuň se v čase, to jest proveď přiřazení $k \leftarrow k + 1$, a pokračuj od kroku Filtrace.

2M) Marginální mód

- a) Proveď výběr $N_{\mathcal{L},k+1}$ vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r}$ ze zvolené vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_{k+1})$, pro jednoduchost můžeš zvolit $q(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_{k+1}) = \sum_{s=1}^{N_{\mathcal{L},k+1}} w_{\kappa:k|k}^s p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}, \mathcal{Z}_k)$.
- b) Spočti marginální prediktivní váhy $w_{k+1|k}^r$ pomocí vztahu

$$w_{k+1|k}^r \propto (\sum_{s=1}^{N_{\mathcal{L},k+1}} w_{\kappa:k|k}^s p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r} | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}, \mathcal{Z}_k)) / q(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r} | \mathcal{Z}_{k+1}).$$
- c) Pro filtrační Gaussovy směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_k^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}, \mathcal{Z}_k)$, které přísluší každé trajektorii $\mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}$, proveď vyhlazování pomocí každého vzorku $\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r}$ v následujícím čase a proveď predikci. To jest spočítej parametry nezpracovaných prediktivních Gaussových směsí $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s}, \mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r}, \mathcal{Z}_k)$ pomocí (4.32) a (4.33), kde nezapomeň na případnou závislost $\mathbf{f}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{f}_k^{\mathbf{l}}, \mathbf{F}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{G}_k^{\mathbf{n}}, \mathbf{F}_k^{\mathbf{l}}, \mathbf{G}_k^{\mathbf{l}}$ a \mathbf{M}_k^w na $\mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s}$.
- d) Spočti marginální vyhlazené váhy $w_{\kappa:k|\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r},k}^s$ podle (4.34).
- e) Aproximuj podmíněnou prediktivní hustotu $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r}, \mathcal{Z}_k)$ pomocí Gaussovy směsi $p_{Gs}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r}, \mathcal{Z}_k)$, jejíž parametry jsou dány (4.36). V případě potřeby redukuj počet složek Gaussovy směsi, například podle algoritmů uvedených v [96, 71, 72].
- f) Zaznamenej čas poslední marginalizace (4.22), $\kappa \leftarrow k + 1$, posuň se v čase, $k \leftarrow k + 1$, a pokračuj od kroku Filtrace.

4.3 Fúze hustot pravděpodobnosti

V kapitole 2.2 byly představeny různé přístupy k fúzi odhadů majících formu středního vektoru a přidružené kovarianční matice chyby odhadu. Snaha docílit stejného odhadu jako v centralizovaném estimátoru vedla k odečítání společné informace a následnému slučování již nezávislých informací. Předpokladem však byla nezávislost šumů měření napříč jednotlivými estimátory. V hustotách pravděpodobnosti bylo odečítání společné informace vyjádřeno vztahem (2.30).

Při neznalosti společné informace bylo použito vážení odhadů. Sloučený odhad byl získán váženým aritmetickým průměrem lokálních středních vektorů (2.35), kovarianční matice chyby sloučeného odhadu pak průměrem vzájemných lokálních kovariančních matic (2.41). Pro nezávislé lokální chyby odhadů byla sloučená matice úměrná harmonickému průměru lokálních kovariančních matic (2.42). V algoritmu průniku kovariancí byla matice kvality odhadu dána váženým harmonickým průměrem (2.47). Jako zobecnění pro hustoty pravděpodobnosti byl navržen vážený geometrický průměr (2.51). Cílem bylo, aby vážení Gaussových hustot odpovídalo vážení jejich parametrů.

Je zřejmé, že v decentralizovaném odhadování, kdy společná informace ani vzájemné závislosti odhadů nejsou k dispozici, hrají průměry a vážené průměry hlavní roli. Proto je vhodné uvažovat průměry na obecné úrovni, zaměřit se na speciální případy a hledat souvislosti se známými pravidly pro fúzi.

4.3.1 Kvaziaritmetické průměry

Hustoty pravděpodobnosti jsou v každém stavu \mathbf{x}_k nezáporné. Při omezení se na kladná čísla je obecně průměr dán jako funkce M zobrazující n -tice na kladná čísla. Tyto funkce je rovněž možné rozšířit na nezáporná čísla. Na průměr mohou být kladeny různé požadavky. Definice průměru může vyžadovat idempotenci, $M(x, \dots, x) = x$, symetričnost, neboli $M(x_1, \dots, x_N) = M(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(N)})$ pro jakoukoliv permutaci indexů π , monotonii, $M(x_1, \dots, x_N) \leq M(y_1, \dots, y_N)$ pro $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, N$, a omezenost, $\min(x_1, \dots, x_N) \leq M(x_1, \dots, x_N) \leq \max(x_1, \dots, x_N)$.

Zvláštním případem obecných průměrů jsou kvaziaritmetické průměry M_f dané spojitou prostou funkcí f ,

$$M_f(x_1, \dots, x_N) = f^{-1}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)\right). \quad (4.38)$$

Určitým volbám funkce f odpovídají významné speciální případy. Například aritmetický průměr je dán volbou $f(x) = x$.

Na obecné úrovni lze dokázat nerovnosti mezi průměry. Je-li funkce f rostoucí a konvexní nebo klesající a konkávní, pak je kvaziaritmetický průměr větší nebo roven aritmetickému, $M_{x^{1+}}(x_1, \dots, x_N) \geq M_x(x_1, \dots, x_N)$, přičemž rovnost nastává pro stejná čísla, $x_1 = x_i$. Obdobně pro klesající a konvexní nebo rostoucí a konkávní funkce je kvaziaritmetický průměr menší nebo roven aritmetickému, $M_{x^{1-}}(x_1, \dots, x_N) \leq M_x(x_1, \dots, x_N)$. Důkaz lze snadno provést použitím Jensenovy nerovnosti.

Nejdůležitější volbou funkce f je mocnina, $f(x) = x^m$. Speciálními případy takových průměrů jsou již výše zmíněný aritmetický průměr pro $m = 1$, kvadratický průměr, $m = 2$, nebo harmonický průměr, $m = -1$. V limitních případech je mocninný průměr roven

minimu, $m \rightarrow -\infty$, maximu, $m \rightarrow \infty$, a geometrickému průměru, $m \rightarrow 0$. Bez použití limity je možné geometrický průměr rovněž získat volbou $f(x) = \ln x$. Mezi mocninnými průměry platí nerovnost $M_{x^m}(x_1, \dots, x_N) \leq M_{x^n}(x_1, \dots, x_N)$ pro $m < n$. Rozšíření na nezáporná čísla lze pro $m \leq 0$ provést tak, že je-li alespoň jedno číslo x_i nulové, pak je nulový i průměr M_{x^m} .

Kvaziaritmetické průměry lze rozšířit na vážené kvaziaritmetické průměry přidáním vah ω_i , $\omega_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$. Vážené průměry jsou pak definovány jako

$$M_f(x_1, \dots, x_N) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i)\right). \quad (4.39)$$

Ve zbytku této podkapitoly jsou výše uvedené vlastnosti obecných průměrů využity v úloze decentralizovaného odhadování.

Konzervativní fúze. Kvaziaritmetické průměry lze přímočaře uplatnit v konzervativní fúzi hustot, kde konzervativnost operace fúze je dána podmínkou (2.60). Je-li sloučená hustota $p_a(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$ dána průměrem hustot,

$$p_a(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}) \propto M_f\left(p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}); \lambda \in \mathcal{N}_\ell^+\right), \quad (4.40)$$

pak podmínka (2.60) je dána tím, je-li normující konstanta průměru hustot menší nebo rovna jedné. Ve speciálních případech lze o nerovnosti rozhodnout pouze na základě znalosti funkce f .

Nejprve je třeba spočítat normující konstantu pro aritmetický průměr hustot, tedy pro obvyklou směs hustot, $p_a(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}) \propto \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$. Je zřejmé, že v tomto případě je normující konstanta rovna jedné, neboť platí

$$\int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) d\mathbf{x}_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) d\mathbf{x}_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda = 1. \quad (4.41)$$

Použití nerovností mezi průměry vede k závěru, že pro rostoucí konvexní nebo klesající konkávní funkce f je vždy normující konstanta menší nebo rovna jedné, protože integrandy nikdy nejsou větší než v případě aritmetického průměru. Jinými slovy, pro uvedené volby f musí platit podmínka konzervativnosti fúze (2.60). V případě, když f je rostoucí konkávní nebo klesající konvexní a když existuje stav \mathbf{x}_k , ve kterém hustoty $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ nabývají stejné hodnoty pro různá λ , lze tvrdit, že podmínka konzervativnosti (2.60) je porušena. Jinými slovy, v případě používání mocninných průměrů M_{x^m} je fúze konzervativní z uvedeného hlediska pro $m \leq 1$.

Zvláštní pozornost jistě zasluhují limitní případy, tedy když sloučená hustota je úměrná minimu lokálních hustot, $m \rightarrow -\infty$, a když sloučená hustota je dána váženým aritmetickým průměrem, $m = 1$. Nelze opomenout ani případ, kdy sloučená hustota je úměrná váženému geometrickému průměru, $m \rightarrow 0$, $f(x) = \ln x$. Posledně jmenovaný případ je limitním pro rozšíření průměru z kladných čísel na nezáporná, mocninná funkce x^m se chová jinak pro $m < 0$ a pro $m > 0$.

Bohužel, průměry parametrických hustot nelze vždy jednoduše přenést na průměry jejich parametrů. I tak ale mají kvaziaritmetické průměry svůj význam. Jsou-li nejprve hodnoty hustot transformovány funkcí f , pak schopnost spočítat aritmetický průměr a schopnost použít zpětnou transformaci f^{-1} zaručuje schopnost spočítat kvaziaritmetický průměr.

4.3.2 Aritmetický a geometrický průměr hustot

Na průměr hustot pravděpodobnosti nemusí být nahlíženo jen jako na heuristické zobecnění předpisu fúze bodových odhadů, jak tomu bylo v kapitole 2.3.3. Naopak, po zobecnění kritéria může být průměr hustot důsledkem optimalizace na vyšší úrovni abstrakce. Podobně jako v metodě maximální věrohodnosti pro bodové odhady, hledaná sloučená hustota minimalizuje vzdálenosti od jednotlivých lokálních hustot.

Přirozeným prostředkem k porovnávání hustot je Kullbackova–Leiblerova divergence (2.55). Nejedná se však o skutečnou vzdálenost, protože není symetrická a nespĺňuje trojúhelníkovou nerovnost. Je však známo [23], že lokálně se Kullbackova–Leiblerova divergence chová jako kvadrát vzdálenosti. Jsou-li jednotlivým lokálním hustotám $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ přiřazeny váhy ω_λ , pak lze minimalizovat vážený součet jednotlivých divergencí. V [51] byly zkoumány obě pořadí hustot v divergenci. Opět bude použito zkrácené značení $p_\lambda \triangleq p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$.

Prvním zkoumaným případem je střednění logaritmu podílů hustot vzhledem k lokálním hustotám. Sloučená hustota je tedy určena na základě předpisu

$$p_a^* = \arg \min_{p_a} \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \mathcal{D}(p_a \| p_\lambda) \quad (4.42)$$

jako vážený geometrický průměr lokálních hustot,

$$p_a^* \propto \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p_\lambda^{\omega_\lambda}, \quad (4.43)$$

kde na rozdíl od (2.51) jsou váhy ω_λ dané ze zadání úlohy. Suma ve vztahu (4.42) lze vyjádřit jako

$$\mathcal{D}(p_a \| p_a^*) - \ln \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p_\lambda^{\omega_\lambda} d\mathbf{x}_k, \quad (4.44)$$

přičemž divergence je vždy nezáporná a logaritmus integrálu není funkcí p_a . Je vhodné poznamenat, že z nerovností průměrů je v netriviálním případě integrál menší než jedna, a tudíž logaritmus je záporný.

V druhém zkoumaném případě je sloučená hustota určena na základě předpisu s opačným pořadím hustot než v předchozím případě, tedy

$$p_a^* = \arg \min_{p_a} \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \mathcal{D}(p_\lambda \| p_a). \quad (4.45)$$

Výsledkem je směs lokálních hustot,

$$p_a^* = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p_\lambda, \quad (4.46)$$

kde váhy ω_λ jsou opět dané zadáním úlohy. Suma ve vztahu (4.45) lze vyjádřit jako

$$\mathcal{D}(p_a^* \| p_a) + \mathcal{H}(p_a^*) - \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \mathcal{H}(p_\lambda), \quad (4.47)$$

tedy jako součet divergence a nezáporného členu nezávislého na hustotě p_a . Nezápornost rozdílu entropie směsi a směsi entropií vyplývá z konkávnosti entropie.

Návrh lokálních vah ω_λ . V předchozích úlohách (4.42) a (4.45) byla hledaná sloučená hustota p_a^* dána váženým průměrem divergencí. Nejsou-li lokálním hustotám p_λ váhy ω_λ přiřazeny, vyvstává otázka, jak tyto váhy určit. Jednou z možností je uvažovat všechny možné hodnoty vah a minimalizovat vážený průměr vzhledem k nejméně příznivé situaci.

Nejprve bude zkoumána první úloha. Hledaná hustota p_a^* je nyní dána obecným předpisem

$$p_a^* = \arg \min_{p_a} \max_{\omega_\lambda} \left[\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \mathcal{D}(p_a \| p_\lambda) \right]. \quad (4.48)$$

Bude ukázáno, že výsledná sloučená hustota je dána Chernoffovou fúzí (2.57).

Protože divergence je konvexní v obou hustotách a vážený průměr je lineární, čili i konkávní, vzhledem k vahám, lze využitím vět o prohození pořadí minimalizace a maximalizace, [27], [86], převést minimaxovou úlohu na maximalizaci minima. Z výrazu (4.44) je zřejmé, že minimum je dané druhým členem výrazu. Druhý člen nabývá maxima pro Chernoffovu váhu (2.57). Po určení vah je tedy sloučená hustota dána příslušným váženým geometrickým průměrem lokálních hustot.

Z omezenosti vah ω_λ a z linearitý kritéria ze vztahu (4.48) vzhledem k vahám lze ukázat, že úloha vede pro $\mathcal{N}_\ell^+ = 2$ na hledání hustoty p_a^* , která je stejně daleko od lokálních hustot p_λ a p_ℓ , přičemž tyto stejně velké vzdálenosti jsou minimalizovány. Podle [23] pak lze prokázat, že vážený geometrický průměr lokálních hustot s Chernoffovou vahou je řešením této nové úlohy. Pro $\mathcal{N}_\ell^+ > 2$ nemusejí být všechny divergence $\mathcal{D}(p_a^* \| p_\lambda)$ shodné. Shodné musejí být alespoň dvě nejvyšší divergence. Úloha tak opět vede na minimalizaci s omezením rovností, kde je navíc třeba ověřit, že ostatní divergence nejsou větší. Prakticky to pouze znamená, že není zaručeno, že všechny váhy $\omega_\lambda^{(\ell)}$ jsou nenulové.

Druhá úloha (4.45) má nyní tvar

$$p_a^* = \arg \min_{p_a} \max_{\omega_\lambda} \left[\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \mathcal{D}(p_\lambda \| p_a) \right]. \quad (4.49)$$

Ze stejných důvodů jako v první úloze (4.48) lze prohodit minimalizaci s maximalizací. Z výrazu (4.47) je zřejmé, že jeho minimum je dané rozdílem entropie směsi a směsi entropií. Váhy maximalizující tento rozdíl pak určují optimální sloučenou hustotu p_a^* .

Rozhodnutí mezi první a druhou úlohou je v rukou návrháře fúze. Pořadí hustot v Kullbackově–Leiblerově divergenci odpovídá pořadí systém – model, neboli skutečnost – aproximace. První úloha odpovídá pohledu, že lokální hustoty $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ aproximují centralizovanou hustotu $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$, protože nemají k dispozici všechna data. Vhodnou sloučenou hustotou $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$ je taková hustota, která je současně přijatelně aproximována všemi lokálními hustotami. Má-li tudíž alespoň jedna lokální hustota v nějakém bodě \mathbf{x}_k malou hodnotu, pak, protože je považována za přijatelnou aproximaci, má i sloučená hustota v tomto bodě sklon k nabytí malé hodnoty hustoty. Výsledná fúze se chová podobně jako logická operace A. Naproti tomu druhá úloha předpokládá, že sloučená hustota by měla být přijatelnou aproximací všech lokálních hustot. Sloučená hustota nedává přednost žádné hustotě a fúze se chová podobně jako logická operace Nebo.

4.3.3 Fúze částic

Jak bylo předesláno v kapitole 4.2, ve fúzi hustot $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$, $\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$, je nežádoucí skutečností, že standardní částicové filtry reprezentují tyto hustoty skrz vážené vzorky z hustot $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$, přičemž ze vzorků je uchovávána pouze poslední část náležející stavu \mathbf{x}_k . V téže kapitole proto bylo navrženo použít marginální částicové filtry. Tím je sice odstraněna nechtěná závislost na minulých stavech, ale pro operace nad hustotami pravděpodobnosti je i použití marginálních částicových filtrů v lokálních estimátorech málo. Pro vytvoření aritmetického průměru hustot s danými vahami ω_λ , tedy pro vytvoření směsi, by třeba stačilo, ale nešlo by přímo odhadovat entropie a divergence. Čili nebylo by možné určit nejlepší váhy $\omega_*^{(\ell)}$. Pro jiné operace nad hustotami, jakými jsou například vážený geometrický průměr hustot (2.51), je navíc důležité, aby vzorky $\mathbf{x}_k^{s,(\lambda)}$ poskytované lokálními estimátory byly stejné, neboli aby lokální hustoty $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ byly reprezentovány ve stejných bodech. Pak je možné odhadovat informační míry a provádět fúzi pomocí operací nad lokálními vahami $w_{k|k}^{s,(\lambda)}$. V případě použití marginálních marginalizovaných částicových filtrů jsou požadavky obdobné, je třeba, aby vzorky $\mathbf{x}_k^{\mathbf{n},s,(\lambda)}$ byly společné. Navíc je však třeba umět provádět fúzi a vyhodnocovat informační míry i pro podmíněné hustoty.

Jestliže má být provedena fúze částic $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{(\lambda)}$ poskytovaných lokálními estimátory E_λ využívajícími vlastní lokální data $\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$, pak vzorky $\mathbf{x}_k^{s,(\lambda)}$, $\mathbf{x}_k^{s,(\ell)}$, $\lambda \neq \ell$, jsou zákonitě různé.

Rozdílnost lokálních vzorků. Jednou z cest jak překonat tuto překážku je navrhnout společné vzorky $\mathbf{x}_k^{s,F}$ a na základě částic $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{(\lambda)}$ v těchto vzorcích odhadnout lokální hustoty $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$, případně i společnou vzorkovací hustotu $q(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$. Je-li například zvoleno $\mathbf{x}_k^{s,F} \triangleq \mathbf{x}_k^{s,(\ell)}$ nebo jsou-li vzorky taženy z navržené vzorkovací hustoty, pak nemusí být vzorkovací hustota odhadována. Naproti tomu pro $\mathbf{x}_k^{s,F} \triangleq \{\mathbf{x}_k^{s,(\lambda)}\}_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+}$ je vzorkovací hustota neznáma, protože lokální vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ nejsou estimátoru E_ℓ posílány. Po odhadu lokálních hustot tak lze zkonstruovat nové částice, které už požadavek na společné vzorky splňují.

Společným rysem metod odhadu hustot [77] nastíněných v kapitole 4.1.4 je nutnost zvolit jádrové funkce, případně počet sousedů a váhové matice. Různé praktické problémy však nabádají i k jiným řešením.

Systémy diskrétní v čase jsou často získány diskretizací spojitých systémů. Pro přenos částic $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{(\lambda)}$ z estimátoru E_λ do estimátoru E_ℓ je zajisté potřeba nějaká doba. Má-li tedy být fúze vykonána pro stav \mathbf{x}_k , pak je třeba počkat na přijetí všech částic. Fúze je tedy vykonávána pro už minulý čas a následně je nutno provést predikci do současného stavu. Navíc estimátory E_ℓ ani nemusejí pracovat se stejnými diskrétními okamžiky. Pak je třeba alespoň jednou provést synchronizaci pomocí predikce.

Jinou cestou k získání společných vzorků tak pro dynamické systémy může být odložení fúze do následujícího času $k + 1$. Tato myšlenka byla navržena v autorově článku [3]. Místo filtračních hustot $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ tak mohou být slučovány lokální prediktivní hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$. Získání částic $\mathcal{P}_{k+1|k}^{(\lambda)}$ se společnými vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$, které reprezentují lokální prediktivní hustoty, je tudíž možno pomocí marginálních částicových filtrů. Místo hledání vhodných parametrů metod odhadu hustoty je tudíž použita

znalost popisu stavového šumu. Heuristická volba parametrů je tak nahrazena jiným úskalím, kterým je dostatečný počet částic vzhledem k vlastnostem systému. Nicméně je-li použit dostatečný počet částic při odhadování v lokálních estimátorech, pak zachování stejného kroku pro predikci by mělo též poskytovat přijatelně kvalitní aproximace prediktivních hustot.

Důvodem, proč nemohly být přímo slučovány filtrační částice, byť by byly poskytovány marginálními filtry v estimátorech E_λ , posílané estimátory E_λ do estimátoru E_ℓ , byla rozdílnost použitých vzorků $\mathbf{x}_k^{s,(\lambda)}$. Použití marginálních filtrů v estimátoru E_ℓ pro všechny došlé lokální částice $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{(\lambda)}$ však umožňuje navrhnout společné prediktivní vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$. Myšlenkou tedy není slučovat prediktivní částice poskytované lokálními filtry, ale v estimátoru provádějícím fúzi prediktivní částice získat z filtračních částic poskytovaných lokálními filtry a získané prediktivní částice dále slučovat.

Návrh společných prediktivních vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$ vyžaduje sestrojení vhodné vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$. V autorově článku [3] bylo navrženo použití metody Sjednocení kovariancí, která byla představena v kapitole 2.3.1, a dále zde byly diskutovány důvody, proč je nevhodné použít lokální prediktivní hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$.

Jsou-li nejprve odhadnuty lokální prediktivní střední vektory a kovarianční matice, pak pomocí metody Sjednocení kovariancí je získán sloučený střední vektor a kovarianční matice. Prediktivní vzorkovací hustota je následně navržena jako Gaussova se získanými parametry. Použití metody Sjednocení kovariancí je rozumné, pokud jsou lokální hustoty jednodimální, mají malou absolutní hodnotu šikmosti a malou špičatost. Pokud jsou však lokální hustoty vzdálené, pak dochází k plýtvání částicemi v oblastech, kde sloučená hustota je malá.

Vyjma speciálního případu fúze, jakým je aritmetický průměr hustot s danými vahami, kde je možné vzorkovat přímo z cílové hustoty, je rovněž možné vzorkovat ze směsi, tedy z aritmetického průměru hustot. Otázkou pak zůstává návrh vah. Prvním kandidátem jsou stejné váhy pro všechny lokální prediktivní hustoty. Jsou-li však lokální hustoty vzdálené, pak je možné, že hustota sloučená jiným průměrem než aritmetickým, typicky geometrickým, bude velká v oblastech, kde je málo částic. Obecně lze očekávat, že pro velmi rozdílné lokální hustoty bude navržená vzorkovací hustota špatná. Pokud se málo překrývají oblasti, kde se nacházejí vzorky náležející různým lokálním částicím, pak fúze hustot reprezentovaných částicemi musí být z podstaty problému neúspěšná.

Je-li místo standardního filtru používán marginalizovaný, tedy jsou-li slučovány marginalizované částice $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{\mathbf{n},(\lambda)}$, pak cesta použití predikce k získání společných vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r,F}$ je obdobná výše uvedenému přístupu. Místo marginálních filtrů jsou použity marginální marginalizované, společná prediktivní hustota $q(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}}|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$ se týká pouze nelineární části stavu $\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}}$. Nejde však již stejně jednoduše získat aritmetický průměr hustot s danými vahami.

Fúze vah. Po vyřešení problému rozdílnosti lokálních vzorků je možno přikročit k fúzi samotné. Nejdříve budou uvažovány standardní marginální filtry. Vzhledem k navrženému postupu návrhu společných vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$ založenému na využití znalosti popisu stavového šumu a na odložení fúze do následujícího času $k+1$ bude uvažována fúze lokálních prediktivních hustot $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$. Tyto hustoty jsou nyní reprezentovány lokálními prediktivními vahami $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$ náležejícími společným vzorkům $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$.

Váhy jsou konstruovány jako úměrné poměru aproximované hustoty a vzorkovací hustoty. Je tedy otázkou, jakou konstantou se poměr těchto hustot normuje tak, aby součet vah byl roven jedné. Protože vzorky jsou vzorkovány ze vzorkovací hustoty, je snadné nahlédnout, že střední hodnota uvedeného poměru je jedna,

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})}{q(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})} \right\} = \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \frac{p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})}{q(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})} q(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}) d\mathbf{x}_{k+1} = 1. \quad (4.50)$$

Protože počet vah $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$ je N_{k+1} , pro velký počet částic přibližně platí

$$w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F} \approx \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})}{N_{k+1} q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})}. \quad (4.51)$$

V kapitole 2.3.3 byl jako vhodné pravidlo pro konzervativní fúzi hustot pravděpodobnosti navržen vážený geometrický průměr hustot (2.51). Vzhledem k uvažování predikce jsou sloučené hustoty závislé na vahách geometrického průměru ω_λ , které byly označeny souhrnně jako $\omega^{(\ell)}$, nyní dány pomocí

$$p_a(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) \propto \exp\left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})\right) = \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}). \quad (4.52)$$

Provést fúzi částic znamená najít částice aproximující sloučenou hustotu pro zvolené $\omega^{(\ell)}$. Protože vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$ jsou společné, pro různé váhy geometrického průměru $\omega^{(\ell)}$ se sloučené částice liší pouze vahami $w_{k+1|k}^{r,F}(\omega^{(\ell)})$.

Vzhledem k přibližnému vztahu pro váhy částic (4.51) lze ukázat, že geometrický průměr lokálních hustot aproximovaných pomocí částic se stejnými vzorky lze převést na geometrický průměr lokálních vah,

$$\begin{aligned} w_{k+1|k}^{r,F}(\omega^{(\ell)}) &\propto \exp\left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \ln(w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F})\right) \approx \exp\left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \ln \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})}{N_{k+1} q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})}\right) = \\ &= \frac{\exp(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \ln p(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}))}{N_{k+1} q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})} \propto \frac{p_a(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)})}{N_{k+1} q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Posledním krokem ve fúzi částic je vybrání vhodných vah $\omega^{(\ell)}$ geometrického průměru. Protože pro určení optimálních vah $\omega_*^{(\ell)}$ podle (2.53) nebo (2.57) jsou potřeba analytické hustoty, nemohou být optimální váhy přesně určeny na základě aproximací hustot pomocí částic. Jako optimální tudíž budou chápány takové váhy $\omega_*^{(\ell)}$, které pro zvolené pravidlo fúze minimalizují odhad zvoleného kritéria.

Ve váženém geometrickém průměru hustot tak místo kritéria daného entropií sloučené hustoty $\mathcal{H}(p_a(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}))$ bude minimalizován odhad $\hat{\mathcal{H}}(p_a(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}))$, který je pro hustoty reprezentované částicemi dán například jako

$$\hat{\mathcal{H}}(p_a(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)})) = - \sum_{r=1}^{N_{k+1}} w_{k+1|k}^{r,F}(\omega^{(\ell)}) \ln[w_{k+1|k}^{r,F}(\omega^{(\ell)}) N_{k+1} q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})]. \quad (4.54)$$

Obdobně místo integrálu ve vztahu (2.57) bude minimalizován jeho odhad $\hat{\mathcal{I}}(\omega^{(\ell)})$ daný předpisem

$$\hat{\mathcal{I}}(\omega^{(\ell)}) = \sum_{r=1}^{N_{k+1}} \exp\left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \ln(w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F})\right), \quad (4.55)$$

čili normovací konstantou ve váženém geometrickém průměru lokálních prediktivních vah $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$ daném prvním řádkem (4.53).

V kapitole 4.3.1 bylo odvozeno, že podmínku konzervativnosti ve tvaru (2.60) lze splnit použitím mocninných průměrů M_{x^m} , $m \leq 1$, na hustoty pravděpodobnosti. Je dobré připomenout, že vážený geometrický průměr je limitním případem mocninného průměru pro $m \rightarrow 0$. Sloučená hustota je nyní obecněji dána jako

$$p_a(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) \propto \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p^m(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})\right)^{\frac{1}{m}}. \quad (4.56)$$

Podobně jako v předchozím případě lze ukázat, že navržené mocninné průměry lokálních hustot je možno převést na mocninné průměry lokálních vah,

$$\begin{aligned} w_{k+1|k}^{r,F}(\omega^{(\ell)}) &\propto \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda (w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F})^m\right)^{\frac{1}{m}} \approx \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda \frac{p^m(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})}{[N_{k+1} q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})]^m}\right)^{\frac{1}{m}} = \\ &= \frac{(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p^m(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}))^{\frac{1}{m}}}{N_{k+1} q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})} \propto \frac{p_a(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)})}{N_{k+1} q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Pro vážené mocninné průměry hustot je vhodné uvažovat jiná kritéria, ale opět jako optimální váhy budou chápány ty, které minimalizují odhad zvoleného kritéria.

4.3.4 Příklad – vzorkovací hustota

Pro ilustraci fúze hustot pravděpodobnosti reprezentovaných částicemi bude použit a mírně rozšířen příklad z autorova článku [1]. Důraz bude kladen na volbu společné vzorkovací hustoty $q(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$.

Nechť je systém dán vztahy (2.1), kde (2.1b) je dán (2.23), (2.24), a kde platí

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ -0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.58a)$$

$$\mathbf{H}_k^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_k^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_k^{(1)} = 0.1, \quad \mathbf{R}_k^{(2)} = 0.1. \quad (4.58b)$$

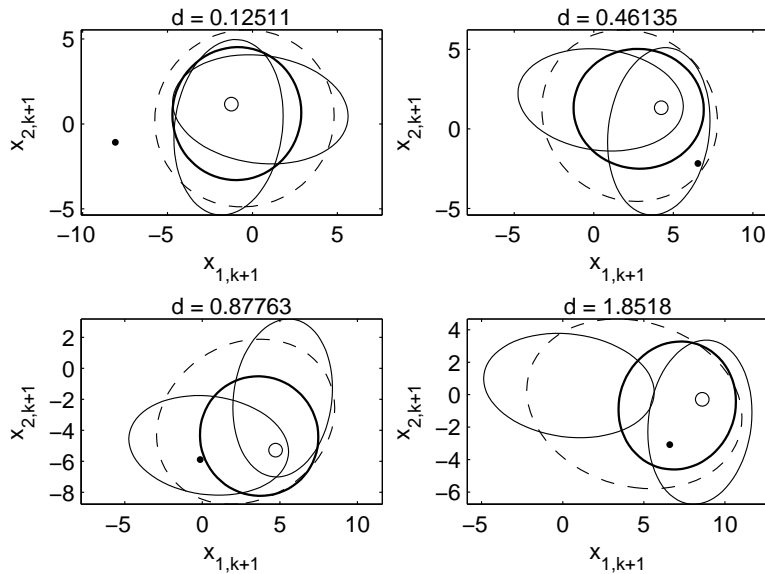
K odhadu stavu jsou použity dva lokální estimátory, $\ell = 1, 2$. Nechť tyto estimátory používají částicové filtry, kde převzorkování je provedeno v každém čase k a vzorkovací hustoty jsou voleny jako $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k^{s_r,(\ell)}, \mathbf{z}_{k+1}^{(\ell)})$. Lokální estimátory posílají své nepřevzorkované filtrační částice do centrálního estimátoru. Centrální estimátor tedy slučuje částice $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, a vzhledem k navrženému odložení fúze jsou výsledkem fúze pomocí geometrického průměru (2.51) prediktivní částice $\mathcal{P}_{k+1|k}^F$. Jako kritérium je zvolena Shannonova diferenciální entropie, optimální váha geometrického průměru je dána (2.53). Počet částic je ve všech estimátorech volen konstantní, $N = 1000$, a filtry běží až do času 240. Pro demonstraci jsou vybrány čtyři časy k , a to následujícím způsobem.

Na základě prediktivních lokálních částic $\mathcal{P}_{\kappa:k+1|k}^{(\lambda)}$ jsou provedeny odhady středních vektorů $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(\lambda)}$ a kovariančních matic $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(\lambda)}$ podle (2.10). Následně jsou vyhodnoceny vzdálenosti $d(k)$,

$$d(k) = (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(1)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(2)})^T (\mathbf{P}_{k+1|k}^{(1)} + \mathbf{P}_{k+1|k}^{(2)})^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(1)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(2)}), \quad (4.59)$$

a vybrány takové časy k , pro něž $d(k)$ odpovídají kvantilům $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ a $\frac{7}{8}$. Jsou tedy vybrány takové časy, kdy jsou slučované hustoty blízké a vzdálené.

Na obrázku 4.12 jsou zobrazeny kovarianční elipsy, neboli množiny $\{\mathbf{x}_{k+1} : (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}) = 1\}$, kde je třeba doplnit příslušné indexy k odhadům $\hat{\mathbf{x}}$ a \mathbf{P} , opět získaných pomocí (2.10), a kde $\mathbf{x}_{k+1} = [x_{1,k+1}, x_{2,k+1}]^T$. Pro velké hodnoty d jsou hustoty vzdálené, a tudíž jejich fúze je obtížná. Vzorkovací hustota je dána sjednocením kovariancí (2.46) použitým na odhady získané výpočtem z lokálních prediktivních částic $\mathcal{P}_{\kappa:k+1|k}^{(\lambda)}$, které byly získány v centrálním estimátoru z obdržených částic $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{(\lambda)}$. Pro představu je vykreslena i střední hodnota stavu \mathbf{x}_{k+1} za podmínky, že realizace \mathbf{x}_k je dána, a realizace stavu \mathbf{x}_{k+1} .

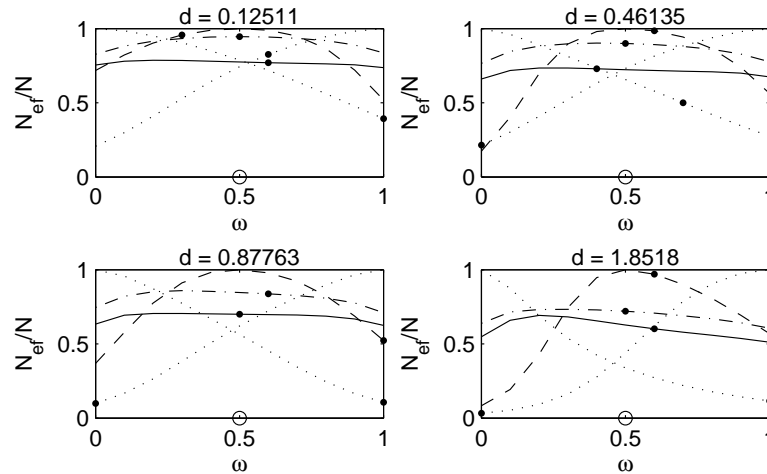


Obrázek 4.12: Kovarianční elipsy. Lokální prediktivní hustoty (plné čáry), vzorkovací hustota daná sjednocením kovariancí (čárkované čáry), sloučená hustota (tučná čára). Střední hodnota stavu \mathbf{x}_{k+1} (kroužky) podmíněná realizací \mathbf{x}_k a realizace stavu \mathbf{x}_{k+1} (tečky).

Obtížnost fúze vzdálených hustot je patrná z obrázku 4.13. V částicové reprezentaci hustot je důležitý počet částic, protože více částic lépe reprezentuje příslušnou hustotu než méně částic. Kromě jejich počtu je však důležitá i kvalita vzorkovací hustoty. Proto se zavádí takzvaný efektivní počet částic N_{ef} , který je daný vztahem

$$N_{ef}(\omega) = \left\{ \sum_{r=1}^N [w_{k+1|k}^{r,F}(\omega)]^2 \right\}^{-1}. \quad (4.60)$$

Efektivní počet částic říká, kolik vzorků hypoteticky tažených přímo z reprezentované hustoty $p_a(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k,F}; \omega)$ poskytuje stejně kvalitní reprezentaci jako dané částice $\mathcal{P}_{k+1|k}^F$.



Obrázek 4.13: Relativní efektivní počet sloučených částic. Vzorkovací hustota daná sjednocením kovariancí (plné čáry), průnikem kovariancí (čárkované čáry), směsí lokálních hustot (čerchované čáry) a lokálními hustotami (tečkované čáry). Optimální váha ω_* (kroužek) a odhady optimální váhy (naznačeny tečkami).

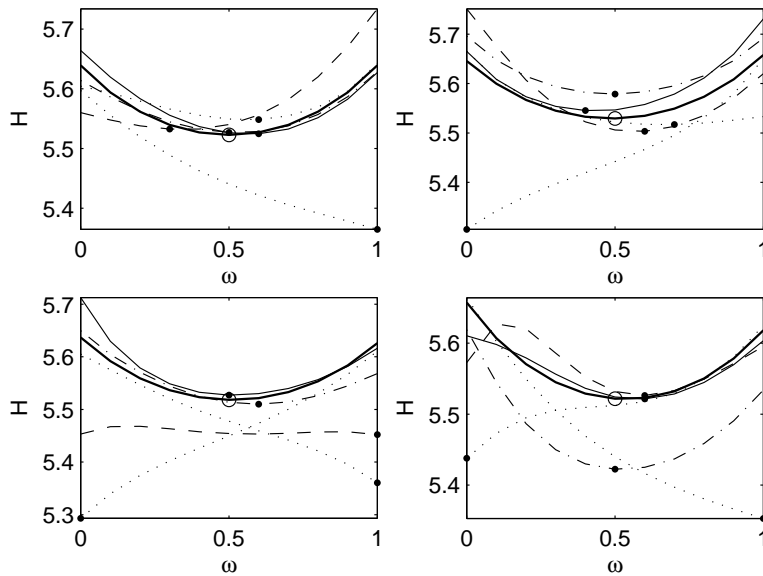
Použití N_{ef} tedy umožňuje porovnávat kvalitu částic bez ohledu na zvolenou vzorkovací hustotu. Jak je vidět, pro vzorkovací hustotu danou sjednocením kovariancí s rostoucí vzdáleností d klesá efektivní počet sloučených částic $N_{ef}(\omega)$, a sice pro všechny hodnoty váhy geometrického průměru hustot ω .

Obrázek 4.13 dále zkoumá kvalitu různých vzorkovacích hustot. Kromě již diskutované vzorkovací hustoty dané sjednocením kovariancí je zkoumána vzorkovací hustota daná průnikem kovariancí (2.47) s optimální vahou (2.48), vzorkovací hustota daná lokální prediktivní hustotou $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$, $\lambda = 1, 2$, a směsí lokálních prediktivních hustot, $q(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}) = \frac{1}{2}p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_k^{(1)}) + \frac{1}{2}p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_k^{(2)})$. Vzhledem ke skutečnosti, že slučované hustoty jsou Gaussovy, je vzorkovací hustota daná průnikem kovariancí, kde optimální váha je $\omega_* = 0.5$, vhodná pouze pro geometrický průměr s vahou ω blízkou hodnotě ω_* . Protože lokální hustoty jsou speciálním případem geometrického průměru s vahou $\omega = 1$, respektive $\omega = 0$, jsou vzorkovací hustoty dané lokálními hustotami vhodné pouze pro váhy geometrického průměru blízké uvedeným hodnotám, pro ostatní hodnoty dochází ke značnému poklesu efektivního počtu částic $N_{ef}(\omega)$. Malý efektivní počet částic může mít za následek špatný odhad kritéria a špatný výběr váhy ω . Výsledkem je, že zatímco vzorkovací hustota odpovídá jedné lokální hustotě, jako optimální je vybrána druhá lokální hustota. Efektivní počet sloučených částic je pak velmi malý.

Je tudíž nevhodné za vzorkovací hustotu volit jednu lokální hustotu.

Naproti tomu zvolení uvedené směsi lokálních hustot přináší stejný efekt jako zvolení hustoty dané sjednocením kovariancí, čili pro rostoucí vzdálenost d sice klesá efektivní počet sloučených částic $N_{ef}(\omega)$, ale zato je pro dané d přibližně stejný pro všechny váhy geometrického průměru ω .

Obrázek 4.14 doplňuje obrázek 4.13. Nyní jsou místo relativního efektivního počtu částic vykresleny odhady Shannonovy diferenciální entropie. Nejprve jsou z lokálních prediktivních částic $\mathcal{P}_{\kappa:k+1|k}^{(\lambda)}$ určeny odhady středních vektorů a kovariančních matic. Následně jsou analyticky sloučeny příslušné Gaussovy hustoty a entropie sloučených



Obrázek 4.14: Odhad Shannonovy diferenciální entropie. Vzorkovací hustota daná sjednocením kovariancí (plné čáry), průnikem kovariancí (čárkované čáry), směsí lokálních hustot (čerchované čáry) a lokálními hustotami (tečkované čáry) a parametrický odhad entropie (tučné čáry). Optimální váha ω_* (naznačena kroužkem) a odhady optimální váhy (naznačeny tečkami).

Gaussových hustot jsou vykresleny. Těmto hodnotám by se měly odhady entropie založené na sloučených částicích blížit. Je zřejmé, že malý efektivní počet částic má za následek velmi špatný odhad entropie.

V tomto příkladě tedy bylo jako vzorkovací hustotu možno užít Gaussovu hustotu založenou na využití metody sjednocení kovariancí. Dále bylo výhodnou volbou použití vhodné směsi lokálních prediktivních hustot. Naproti tomu použití pouze jedné lokální prediktivní hustoty je naprosto nevhodné.

4.3.5 Fúze marginalizovaných částic

Oproti standardním marginálním filtrům je fúze částic poskytovaných marginálními marginalizovanými filtry mnohem složitější. Po využití predikce k získání společných vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r,F}$, tedy zbavení se závislosti na trajektoriích $\mathbf{x}_{\kappa:k}^{\mathbf{n},s,(\lambda)}$, se částice skládají kromě vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r,F}$ a vah $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$, které společně reprezentují hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$, také z podmíněných hustot $p(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}} | \mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n},r,F}, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ daných příslušnými parametry.

Vzhledem ke složitosti úlohy nebylo ucelené řešení dosud navrženo. V následující části je proveden pouze výhled vytyčující hlavní překážky.

Vážený geometrický průměr lokálních prediktivních hustot celého stavu má tvar

$$\begin{aligned} p_a(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{l}}, \mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}} | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) &\propto \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{l}}, \mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) = \\ &= \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{l}} | \mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}}, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^{\mathbf{n}} | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}), \end{aligned} \quad (4.61)$$

z nějž je patrné, že je možné zachovat dělení na marginální a podmíněné hustoty. Navíc je téměř zachováno použití geometrického průměru na lokální marginální a podmíněné prediktivní hustoty. Rozdílem je násobení geometrického průměru lokálních marginálních prediktivních hustot $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ pomocí normující konstanty geometrického průměru lokálních podmíněných prediktivních hustot $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$,

$$p_a(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) \propto \left[\prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) \right] \int_{\Omega_{\mathbf{x}_{k+1}^1}} \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) d\mathbf{x}_{k+1}^1, \quad (4.62a)$$

$$p_a(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) \propto \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}). \quad (4.62b)$$

Překážkou v provedení těchto kroků je nutnost řešit integrál v (4.62a), tedy zmíněnou normující konstantu ve vztahu (4.62b) a rovněž samotný geometrický průměr podmíněných hustot (4.62b). Pro Gaussovy hustoty je průměr řešitelný analyticky, ale pro Gaussovy směsi vyplývající z použití marginálních marginalizovaných filtrů na systémy (4.24) tomu tak není.

Další překážkou pak je návrh optimální váhy. V Chernoffově fúzi (2.57) je třeba řešit integrál součiny v (4.61), čili i zmíněnou normující konstantu danou integrálem v (4.62a), což lze snadno nahlédnout,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\omega^{(\ell)}) &= \int_{\Omega_{\mathbf{x}_{k+1}^n}} \int_{\Omega_{\mathbf{x}_{k+1}^1}} \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) d\mathbf{x}_{k+1}^1 d\mathbf{x}_{k+1}^n = \\ &= \int_{\Omega_{\mathbf{x}_{k+1}^n}} \int_{\Omega_{\mathbf{x}_{k+1}^1}} \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) d\mathbf{x}_{k+1}^1 \prod_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} p^{\omega_\lambda}(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) d\mathbf{x}_{k+1}^n. \end{aligned} \quad (4.63)$$

S vnějším integrálem takové potíže nejsou. Jedná se o téměř stejný případ jako v předcházející části této podkapitoly. Bylo by jen třeba mírně změnit odhad daný (4.55) přidáním hodnoty vnitřního integrálu z pravé strany (4.63) pro dané prediktivní vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{n,r,F}$ do vnější sumy v (4.55).

V Shannonově fúzi (2.53), je třeba počítat entropii podle známého vzorce, kde entropie sdružené hustoty je dána součtem entropie marginální hustoty a střední hodnoty entropií podmíněných hustot,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p_a(\mathbf{x}_{k+1}^1, \mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)})) &= \dots = \mathcal{H}(p_a(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)})) + \\ &+ \int_{\Omega_{\mathbf{x}_{k+1}^n}} \mathcal{H}(p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})) p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) d\mathbf{x}_{k+1}^n. \end{aligned} \quad (4.64)$$

V případě systémů daných (4.24), byť by všechny šumy mohly opět být čistě Gaussovské namísto směsí, není možno analyticky určit entropie podmíněných hustot, neboť tyto hustoty jsou dány Gaussovými směsmi. Pro marginální hustotu aproximovanou částicemi lze entropii odhadnout stejně jako v případě (4.54). Střední hodnota entropií podmíněných hustot je dána přímočaře podle (2.10).

Fúze marginalizovaných částic pomocí mocninných průměrů M_{x^m} , $m \leq 1$, je obecně ještě hůře řešitelná. Vážený mocninný průměr lokálních prediktivních hustot celého

stavu lze rozepsat na tvar

$$\begin{aligned} p_a(\mathbf{x}_{k+1}^1, \mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) &\propto \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p^m(\mathbf{x}_{k+1}^1, \mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) \right)^{\frac{1}{m}} = \\ &= \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p^m(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) p^m(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) \right)^{\frac{1}{m}}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Vyjma probíraného geometrického průměru, $m \rightarrow 0$, lze zachovat rozumné rozdělení na marginální a podmíněné hustoty jen pro aritmetický průměr, $m = 1$,

$$p_a(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}), \quad (4.66a)$$

$$p_a(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^n, \mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)}; \omega^{(\ell)}) \propto \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}) p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathbf{x}_{k+1}^1, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)}). \quad (4.66b)$$

Marginální sloučená prediktivní hustota je dána váženým aritmetickým průměrem lokálních prediktivních hustot, kde váhy odpovídají vahám ω_λ aritmetického průměru hustot celého stavu. V případě podmíněných hustot se váhy navíc násobí hodnotami lokálních marginálních prediktivních hustot $p(\mathbf{x}_{k+1}^n | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ v daných bodech \mathbf{x}_{k+1}^n .

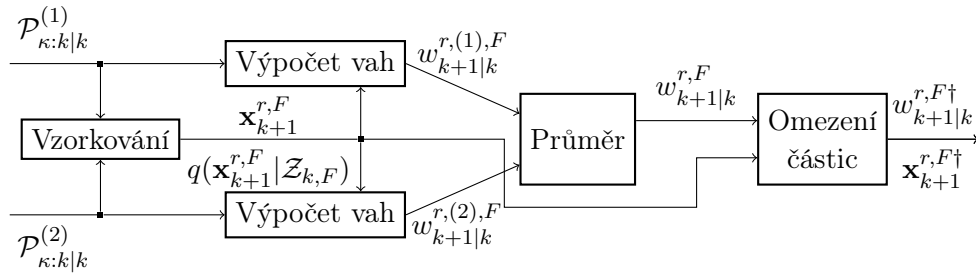
I v případě váženého aritmetického průměru je nutno zvolit vhodné kritérium pro výběr optimálních vah $\omega_*^{(\ell)}$ a navrhnout odhad kritéria na základě částic. Oproti váženému geometrickému průměru je však samotná realizace fúze přímočará. Váhy $w_{k+1|k}^{r,F}$ sloučených částic jsou dány aritmetickým průměrem lokálních vah $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$, sloučené podmíněné hustoty jsou pro dané $\mathbf{x}_{k+1}^{n,r,F}$ dány směsí lokálních podmíněných hustot $p(\mathbf{x}_{k+1}^1 | \mathbf{x}_{k+1}^{n,r,F}, \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ s vahami směsi úměrnými součinu $\omega_\lambda w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$.

4.3.6 Fúze částic v úlohách s omezením

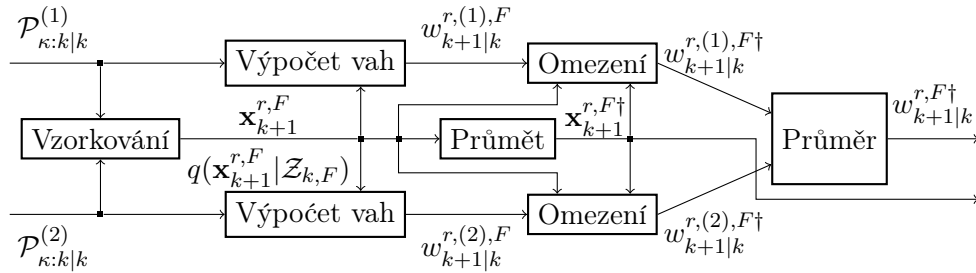
Tato podkapitola navazuje na kapitolu 4.1 a hlouběji se zabývá otázkou fúze hustot pravděpodobnosti v úlohách s omezením, přičemž hustoty jsou reprezentovány částicemi. V kapitole 4.1.2 byly představeny různé architektury systémů odhadování s omezením z pohledu jednotlivých lokálních estimátorů a centrálního estimátoru zpracovávajícího lokální odhady. Bylo provedeno základní členění podle zahrnutí vynučení omezení do smyčky odhadování v lokálních estimátorech a dále podle fúze omezených či neomezených odhadů.

Fúze částic byla navržena v kapitole 4.3.3. Hlavním problémem byla rozdílnost vzorků náležejících částicím reprezentujících různé lokální hustoty. Navrhovaným řešením bylo využití stavového šumu a odložení fúze do následujícího času $k+1$. To umožnilo zachovat rámeček částicových filtrů. Lokální částice mohly být zpracovávány v centrálním estimátoru pomocí marginálních částicových filtrů, kde vzorkovací hustota byla společná pro všechny lokální prediktivní částice. Fúze hustot pak mohla být převedena na fúzi vah. V duchu navrženého postupu fúze částic je tedy možno zkoumat i úlohy s omezením. Důraz bude kladen pouze na samotnou fúzi v centrálním estimátoru.

Pokud by prediktivní vzorkovací hustota přímo poskytovala omezené vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$, $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger} \in \mathcal{C}_{k+1}$, pak by prediktivní částice byly automaticky omezené metodou oříznutí a nemělo by smysl se omezením dále zabývat. Proto bude předpokládáno, že společné prediktivní vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$ porušují omezení, $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} \notin \mathcal{C}_{k+1}$.



Obrázek 4.15: Omezení fúze neomezených částic.



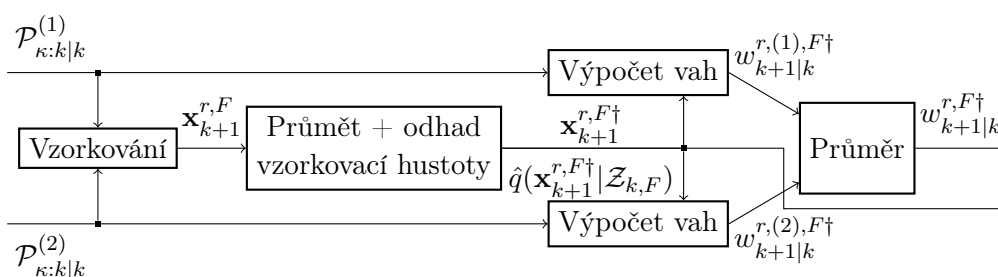
Obrázek 4.16: Fúze částic omezených průmětem.

Nejjednodušším přístupem je tudíž připojit omezení za fúzi neomezených částic. Tímto přístupem však nelze docílit efektivního omezení oříznutím, je-li omezování prováděno rovností. Na druhou stranu v případě omezení rovností a použití průmětu vzorků nemusí být nutně použito přepočítávání vah navržené v kapitole 4.1.4, pokud není nutné částicemi důsledně reprezentovat hustotu. Jsou-li částice použity pouze k výpočtu momentů omezené sloučené prediktivní hustoty, pak stačí promítnout vzorky a zároveň ponechat hodnoty vah náležející neomezené sloučené prediktivní hustotě. Při další marginalizaci zastaralých stavů modelu, která předchází případné další fúzi, jsou pak tyto neomezené váhy automaticky omezeny, neboť důsledné omezení průmětem není nic jiného než marginalizace v rámci stavu modelu.

Uvedený nejjednodušší přístup je znázorněn na obrázku 4.15. Vstupem fúze jsou lokální částice $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{(1)}$, $\mathcal{P}_{\kappa:k|k}^{(2)}$, které mohou být neomezené i omezené, výstupem jsou omezené sloučené prediktivní částice $\mathcal{P}_{k+1|k}^{F\dagger}$ skládající se z omezených vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$ a vah $w_{k+1|k}^{r,F\dagger}$. Omezené prediktivní vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$ jsou z neomezených prediktivních vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$ získány průmětem, omezená váhy $w_{k+1|k}^{r,F\dagger}$ mohou v souladu s předchozí diskuzí zůstat neomezené, jinak je použito omezení, například z kapitoly 4.1.4.

Pracnějším přístupem je začlenit omezení částic před fúzi. Nejprve bude uvažováno omezení průmětem, průběh fúze je znázorněn na obrázku 4.16.

Z obrázků 4.15 a 4.16 je zřejmé, proč není korektní při omezování částic pouze promítnout vzorky a nechat váhy beze změny. Fúze hustot je prováděna pouze průměrem vah. Kdyby tedy omezené hustoty byly korektně reprezentovány omezenými vzorky a neomezenými vahami, dávala by fúze omezených hustot stejné výsledky jako omezení fúze neomezených hustot. Jinými slovy operace nad jistými marginálními hustotami by dávala stejné výsledky jako marginální hustota získaná z operace nad sdruženými hustotami, funkce integrálů by byla rovna integrálu funkce. Což je nepochybně spor.



Obrázek 4.17: Fúze částic omezených oříznutím rovností.

Na rozdíl od omezení fúze neomezených částic je zde nevyhnutelné použít omezení vah. Výhodou navrženého postupu (4.14) je, že pro omezené vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$ jsou sousedi nalezeni pouze jednou. Fúze více sad lokálních částic v takovém případě nepotřebuje opakovat nejnáročnější část algoritmu omezení pro každé lokální váhy zvlášť, což na obrázku 4.16 není zachyceno.

Omezení oříznutím může být snadno zařazeno pouze před fúzi, jak ukazuje obrázek 4.17. Jsou-li do prediktivního kroku marginálního částicového filtru zařazeny pouze omezené částice, pak je omezení oříznutím prováděno implicitně. Přístup navržený v kapitole 4.1.4 nejprve promítl neomezené vzorky. Následně pak bylo třeba v prediktivním kroku marginálního filtru nahradit v promítnutých vzorcích hodnoty neznámé promítnuté vzorkovací hustoty pomocí odhadů této hustoty. Obdržené omezené váhy jsou pak jako obvykle sloučeny pomocí průměru.

Odhad Shannonovy diferenciální entropie. Schémata na obrázcích 4.15–4.17 zachycují fúze hustot, které jsou prováděné pomocí průměru lokálních prediktivních částicových vah $w_{k+1|k}^{r,(1),F\dagger}$, $w_{k+1|k}^{r,(2),F\dagger}$. Je-li váha průměru ω_1 dána, nebo je-li hledána Chernoffova váha pomocí minimalizace (4.55), pak je průměr závislý pouze na vstupních částicových vahách. Avšak je-li hledána Shannonova váha, tedy při minimalizaci odhadu Shannonovy diferenciální entropie (4.54), je navíc třeba mít k dispozici hustotu, jejíž entropie je odhadována, což znamená mít vzorkovací hustotu nebo její odhad.

V prvním případě, tedy na obrázku 4.15, je k dispozici neomezená vzorkovací hustota přímo ze vzorkování, a je tudíž možné ji předat části algoritmu zpracovávající průměr částicových vah. Na obrázku 4.17 je po průmětu neomezených vzorků odhad omezené vzorkovací hustoty vždy vyžadován. Průměr částicových vah tak může zpracovávat tento odhad. Vzhledem k tomu, že znalost vzorkovací hustoty není vždy vyžadována pro provedení průměru částicových vah, není na obrázku 4.16 nutnost odhadovat promítnutou vzorkovací hustotu výslovně zakreslena.

Je-li používáno omezení vah podle nejbližších sousedů (4.14), pak pro odhad vzorkovací hustoty není nutno opakovat výpočetně nejnáročnější část algoritmu. Indexy nejbližších sousedů jsou nalezeny jedenkrát. K omezení vah je pak třeba sečíst váhy s potřebnými indexy, k odhadu vzorkovací hustoty je potřeba vyhodnotit mocniny vzdáleností omezených vzorků k jejich m -tým sousedům a výsledek vynásobit konstantou.

Odhad Shannonovy diferenciální entropie pomocí nejbližších sousedů a uvažující částice byl navržený v autorově článku [2]. Hlavní myšlenka už byla představena v kapitole 4.1.4, v článku je navržena úprava (4.13). Nahrazení relativního počtu vzorků

v okolí daném m -tým sousem pomocí součtu vah náležejících těmto vzorkům vychází přímo z myšlenky algoritmu nejbližších souseů, tedy odhadovat hustotu pravděpodobnosti jako poměr pravděpodobnosti, že náhodná veličina náleží množině, a velikosti této množiny. Čili z obvyklé definice hustoty, nejen pravděpodobnostní.

Samotné vzorky jsou obvykle chápány jako náhodná pravděpodobnostní funkce, jež v nějakém smyslu dobře aproximuje spojitou vzorkovací hustotu pravděpodobnosti. Každému vzorku je pak přiřazena pravděpodobnost rovna převrácené hodnotě počtu vzorků. Částice, tedy vážené vzorky, pak jsou chápány jako náhodná pravděpodobnostní funkce, kde pravděpodobnosti každého vzorku nejsou stejné, ale odpovídají vahám. Původ navržené úpravy (4.13) je tudíž zřejmý.

Na základě metody odhadu entropie podle m -nejbližších souseů [83] byl proto v [2] navržen následující odhad pro vážené vzorky,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(p(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})) &= - \sum_{r=1}^{N_{k+1}} \frac{\sum_{n=0}^{m-1} w_{k+1|k}^{n_{\text{NN},r,(\lambda)},F}}{m} \times \\ &\times \ln \frac{(\sum_{n=0}^{m-1} w_{k+1|k}^{n_{\text{NN},r,(\lambda)},F}) \Gamma(n_c/2 + 1) |\mathbf{W}|^{1/2}}{\|\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger} - \mathbf{x}_{k+1}^{m_{\text{NN},r\dagger}\dagger}\|_{\mathbf{W}}^{n_c} \Pi^{n_c/2}} + \ln m - \psi(m), \end{aligned} \quad (4.67)$$

kde stejně jako v (4.8) $n_{\text{NN},r}$ nahrazuje index n -tého nejbližšího vzorku ke vzorku $\mathbf{x}_{k+1}^{r\dagger}$. Bylo navrženo ponechat korekční člen $[\ln m - \psi(m)]$, kde $\psi(m)$ je digamma funkce, který odstraňuje strannost zavlečenou odhadováním hustoty jako mezikroku k odhadování entropie. Výše uvedený odhad je používán na promítnuté vzorky, ale neomezené váhy. Použití vztahu (4.14) k omezení vah tak až na korekční člen vede ke shodě navrženého odhadu a odhadu (4.54) použitého na omezenou lokální prediktivní hustotu $p(\mathbf{x}_{k+1}^\dagger | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$.

4.3.7 Příklad – omezení

Fúze částic v úlohách s omezením bude ilustrována na následujícím příkladu. Bude zkoumáno omezení rovností a vynucení omezení pomocí průmětu. Bude ukázáno, že pořadí kroků fúze a vynucení omezení nemusí mít vliv na kvalitu výsledných odhadů. Ostatně, pokud model dobře aproximuje systém, nelze nic jiného očekávat.

Nechť je uvažováno vozidlo pohybující se po silnici. Jako model je stanoven hojně používaný model skoro konstantní rychlosti. Nechť je tedy stav modelu \mathbf{x}_k dán polohou a rychlostí v osách x a y , $\mathbf{x}_k = [x_k, (v_x)_k, y_k, (v_y)_k]^T$. Je-li šířka silnice zanedbána, pak z pohybu po silnici lze odvodit omezení, kterému podléhá poloha vozidla i jeho rychlost, která musí být tečná k silnici. Dále je uvažováno, že je měřena poloha vozidla a že lokální data jsou zpracovávána v příslušných estimátorech.

Nechť je tedy model dán vztahy (2.1), kde

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{T^2}{2} & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}, \quad T = 1, \quad (4.68a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [70, 0, 0, 12], \quad \mathbf{P}_0 = \text{diag}([1, 3, 100, 16]), \quad (4.68b)$$

$$\mathbf{H}_k^{(1)} = \mathbf{H}_k^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_k^{(1)} = \text{diag}([50, 500]), \quad \mathbf{R}_k^{(2)} = \text{diag}([500, 50]). \quad (4.68c)$$

Hodnoty $\mathbf{H}_k^{(1)}$, $\mathbf{R}_k^{(1)}$ jsou známy pouze estimátoru E_1 , hodnoty $\mathbf{H}_k^{(2)}$ jsou známy pouze estimátoru E_2 . Dále se předpokládá, že silnice má tvar kružnice se středem v počátku souřadnic a známým poloměrem R , $R = 70$. Známé omezení stavu tak má tvar

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad (4.69a)$$

$$xv_x + yv_y = 0, \quad (4.69b)$$

kde první rovnice omezuje polohu a druhá směr rychlosti a kde byly vynechány indexy času k . Z možných průmětů je vybrán takový, který danému neomezenému stavu přiřazuje takový omezený stav, kde omezená poloha odpovídá průsečíku zadané kružnice a polopřímky určené počátkem souřadnic a neomezenou polohou a kde omezená rychlost je dána pravoúhlým průmětem rychlosti do tečny zadané kružnice v omezené poloze. Neboli $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ je dáno jako

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \left[\frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{v_x y^2 - v_y x y}{x^2 + y^2}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-v_x x y + v_y x^2}{x^2 + y^2} \right]^T, \quad (4.70)$$

kde opět byly vynechány indexy času k .

Skutečný pohyb vozidla může být libovolný v rámci daném známým omezením. V tomto příkladě je uvažován deterministický pohyb s konstantní velikostí rychlosti rovné hodnotě 12, přičemž počáteční poloha je $x = 70$, $y = 0$. Neboli $\hat{\mathbf{x}}_0$ přesně odpovídá počátečnímu stavu systému.

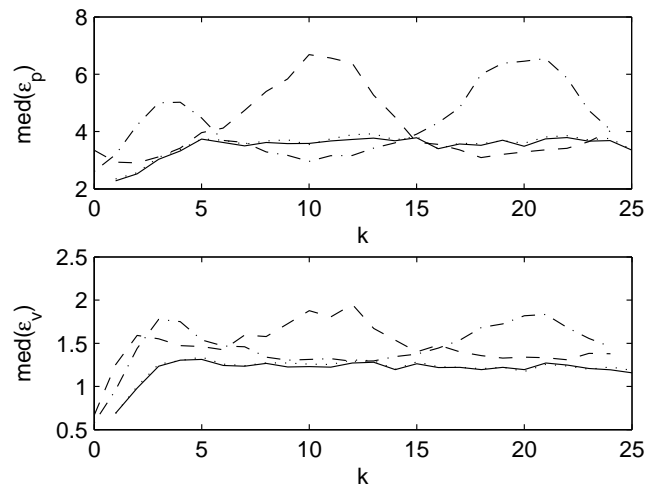
Stejně jako v kapitole 4.3.4, i nyní jsou měření $\mathbf{z}_k^{(1)}$, $\mathbf{z}_k^{(2)}$ zpracovávána v samostatných částicových filtrech, které posílají lokální částice do centrálního estimátoru. Tentokrát je ovšem mezi filtraci a převzorkování zařazen průmět vzorků, přičemž do centrálního estimátoru jsou odesílány filtrační částice s promítnutými vzorky. Počet částic je volen konstantní, $N = 250$, vzorkovací hustoty jsou voleny jako přechodové hustoty $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k^{sr,(\lambda)})$. Fúze je prováděna pomocí váženého geometrického průměru hustot (2.51), jako kritérium pro výběr váhy průměru je nyní uvažováno (2.57), jehož odhad je počítán podle (4.55). Opět je použito odložení fúze do následujícího času $k + 1$. V lokálních estimátorech tak není nutné provádět po průmětu vzorků i přepočítání vah, neboť tento krok je v centrálním estimátoru implicitně proveden spolu s odstraněním zastaralých částí trajektorií stavů. V souladu s kapitolou 4.3.6 je však uvažováno omezení prediktivních lokálních částic průmětem vzorků spojeným s přepočítáním, neboť jak bylo řečeno v úvodu tohoto příkladu, je uvažováno vynucení omezení pomocí průmětu po fúzi a před fúzí.

Je provedeno 1000 simulací pro časy od $k = 0$ do $k = 24$. K vyhodnocení odhadů jsou použity chyby polohy $\varepsilon_p(\hat{\mathbf{x}}_k)$ a chyby rychlosti $\varepsilon_v(\hat{\mathbf{x}}_k)$ dané vztahy

$$\varepsilon_p(\hat{\mathbf{x}}_k) = \sqrt{(x_k - \hat{x}_k)^2 + (y_k - \hat{y}_k)^2}, \quad (4.71a)$$

$$\varepsilon_v(\hat{\mathbf{x}}_k) = \sqrt{((v_x)_k - (\hat{v}_x)_k)^2 + ((v_y)_k - (\hat{v}_y)_k)^2}, \quad (4.71b)$$

kde byly vynechány indexy odhadů získaných pomocí (2.10) pro $f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k$. Jmenovitě jsou vyhodnocovány lokální omezené odhady $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(1)\dagger}$, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(2)\dagger}$ a sloučené odhady $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{F\dagger}$, kde omezení bylo vynuceno po fúzi a před fúzí. Ze získaných chyb jsou pro každý čas sestaveny histogramy pro daný odhad a určen medián.

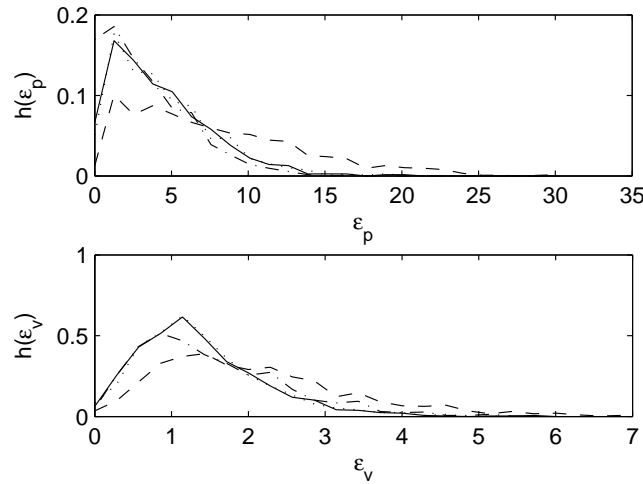


Obrázek 4.18: Mediány chyb odhadů polohy a rychlosti. Lokální omezený odhad $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(1)\dagger}$ (čerchované čáry), lokální omezený odhad $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(2)\dagger}$ (čárkované čáry), omezený sloučený prediktivní odhad $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{F\dagger}$ – omezení vynuceno po fúzi (plné čáry) a omezení vynuceno před fúzí (tečkované čáry).

Obrázek 4.18 zachycuje vývoj mediánu chyb v závislosti na čase. Vzhledem k tomu, že lokální senzory měří polohu s rozdílnou chybou ve směru osy x a osy y a že využití omezení vede k zanedbatelné chybě ve směru od počátku souřadnic, mění se chyby lokálních omezených odhadů periodicky podle toho, kde na kružnici se vozidlo nachází. Pro $k = 1, \dots, 6$ a $k = 15, \dots, 24$ tak lepší odhady poskytuje estimátor E_2 , pro ostatní časy k poskytuje lepší odhady estimátor E_1 . Přibližně do času $k = 5$ se projevuje vliv počáteční podmínky, v ostatních časech by pro delší dobu simulace byly výsledky periodické. Kromě mediánu chyb lokálních omezených odhadů jsou vykresleny i mediány chyb sloučených odhadů. Protože bylo provedeno odložení fúze do predikce, jsou výsledky posunuty o jeden krok. Je-li například $k = 10$, pak odhad $\hat{\mathbf{x}}_{11|10}^{F\dagger}$ je vyneseno do času $k = 11$, kam logicky patří.

Z obrázku je patrné, že využití omezení před fúzí, kde v předpisu (4.14) bylo využito $m = 10$, nepřináší pozorovatelnou změnu v kvalitě odhadů oproti případu, kde omezení bylo použito až po fúzi. Zároveň je zřejmé, že fúze přinesla zlepšení odhadů rychlosti. Pro odhady polohy nebyly sloučené omezené odhady horší než horší z lokálních omezených odhadů, a to přesto, že sloučené odhady jsou prediktivní, zatímco lokální odhady jsou filtrační. Navíc se sloučené omezené odhady polohy blíží lepšímu lokálnímu omezenému odhadu. Celkově lze tedy prohlásit, že byť závislost lokálních odhadů nebyla známa, fúze vedla ke zlepšení. Z průběhu chyb lokálních odhadů je rovněž patrné vylepšení odhadů způsobené vynucením omezení.

Obrázek 4.19 vykresluje histogram chyb odhadů ve vybraném čase $k = 10$. Lze upozorovat, že v tomto čase poskytuje lepší odhady estimátor E_1 a že pořadí kroků fúze a využití omezení má zanedbatelný účinek. Ostatně rozdílné výsledky by svědčily o nevhodnosti modelu. Dále lze vyzpozorovat, že fúze poskytuje menší množství větších chyb a větší množství chyb malých, alespoň co se týče odhadů rychlosti. Pro odhady polohy jsou chyby srovnatelné s lepším estimátorem, kterým je v daném čase estimátor E_1 .



Obrázek 4.19: Histogramy chyb odhadů polohy a rychlosti pro čas $k = 10$. Přiřazení čar a odhadů stejné jako na obrázku 4.18.

4.3.8 Shrnutí

Kapitola 4.3 se zabývala fúzí hustot pravděpodobnosti. Protože při neznalosti společné informace jsou bodové odhady slučovány vážením, přičemž výsledná pravidla fúze odpovídají různým váženým průměrům, bylo přikročeno ke zkoumání zobecněných průměrů. Bylo ukázáno, že použití speciálních případů vážených kvaziaritmetických průměrů na hustoty pravděpodobnosti je konzervativní operací fúze ve smyslu (2.60). Význačným speciálním případem těchto průměrů jsou mocninné průměry M_{x^m} , kde $m \leq 1$. Nejvýznamnějším je přitom aritmetický průměr, $m = 1$, a geometrický průměr, $m = 0$, které, jak známo, při použití na hustoty pravděpodobnosti mají interpretaci jako optimální řešení minimalizace váženého součtu divergencí lokálních hustot od sloučené hustoty, respektive váženého součtu divergencí sloučené hustoty od lokálních hustot. Bylo ukázáno, že návrh lokálních vah podle minimaxové úlohy vede k Chernoffově fúzi (2.57).

Dále se kapitola 4.3 zabývala fúzí hustot v částicové reprezentaci. Nejprve je třeba se vypořádat s rozdílností lokálních vzorků $\mathbf{x}_k^{s,(\lambda)}$, $\mathbf{x}_k^{s,(\ell)}$. Kvůli zachování částicové reprezentace bylo navrženo odložení fúze do následujícího času $k + 1$ a využití marginálních částicových filtrů k získání lokálních prediktivních částic, které sdílejí navržené vzorky $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$. Na ilustračním příkladě bylo ukázáno, že návrh společné vzorkovací hustoty je zásadním činitelem pro kvalitu sloučených částic. Vhodnou vzorkovací hustotou může být směs stejně vážených lokálních prediktivních hustot, nebo ve speciálních případech Gaussova hustota založená na využití metody sjednocení kovariancí. Použití jedné lokální prediktivní hustoty jako vzorkovací hustoty je krajně nevhodné, neboť často dochází k vybrání druhé lokální prediktivní hustoty jako sloučené hustoty, která je ovšem reprezentovaná částicemi o malém efektivním počtu.

Jsou-li lokální hustoty reprezentovány částicemi se stejnými vzorky, lze fúzi hustot pravděpodobnosti pomocí geometrického průměru převést na geometrický průměr vah částic. Jak bylo ukázáno, totéž platí i pro ostatní mocninné průměry. Dále bylo představeno obecné řešení pro fúzi částic poskytovaných marginalizovanými filtry a nastíněny problémy, které bude třeba v budoucnu vyřešit. Hlavním problémem je fúze Gaussových směsí pomocí geometrického průměru a určení informačních měr pro Gaussovy směsi.

Kromě geometrického a aritmetického průměru neumožňují kvaziaritmetické průměry postupné, respektive oddělené, řešení marginálních a podmíněných hustot.

Jako poslední byla diskutována fúze částic v úlohách s omezením. Do navrženého postupu fúze neomezených hustot bylo třeba začlenit vynucení omezení. Při použití průmětu je nejjednodušší připojit vynucení omezení za fúzi neomezených částic. Omezení částic před fúzí je pracnější, neboť je vždy třeba přepočítat váhy lokálních částic, nelze pouze promítnout vzorky. Na ilustračním příkladě však bylo ukázáno, že rozdíly v kvalitě odhadů získaných oběma postupy jsou při vhodném modelování systému zanedbatelné. Použití oříznutí hustoty k vynucení omezení je možné pouze před fúzí, a to prostřednictvím návrhu společných omezených vzorků a odhadu příslušné vzorkovací hustoty.

Navržená fúze hustot v částicové reprezentaci je shrnuta v následujícím algoritmu. Pro fúzi v úlohách s omezením je třeba podle zvoleného způsobu využití omezení nahradit v algoritmu krok 2).

Shrnutí algoritmu: Fúze hustot v částicové reprezentaci

- 1) Navrhni společnou vzorkovací hustotu $q(\mathbf{x}_{k+1}|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$ a vyber N_{k+1} vzorků $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}$.
- 2) Spočti lokální prediktivní váhy, $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F} \propto \sum_{s=1}^{N_k} w_{\kappa:k|k}^{s,(\lambda)} p(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}|\mathbf{x}_k^{s,(\lambda)})/q(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$.
- 3) Odhadni optimální váhu $\omega_*^{(\ell)}$ zvoleného váženého mocninného průměru hustot.
- 4) Použij vážený mocninný průměr na lokální prediktivní váhy $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$. Pro zvolené $\omega_*^{(\ell)}$ jsou sloučené částice dány jako $(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F}, w_{k+1|k}^{r,F}(\omega_*^{(\ell)}))_{r=1}^{N_{k+1}}$.

Fúze v úlohách s omezením – modifikace výpočtu lokálních prediktivních vah

- 2a) V případě průmětu fúze neomezených částic spočti lokální prediktivní váhy $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$ jako v neomezeném případě, zvol průmět \mathbf{p} a promítni vzorky, $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F})$. Přepiš vzorky, $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} \leftarrow \mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$ a pokračuj krokem 3). Je-li nutné, aby sloučené částice reprezentovaly omezenou sloučenou hustotu přímo, zařaď v kroku 4) omezení vah, například jako $w_{k+1|k}^{r,F\dagger} \propto \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} w_{k+1|k}^{n_{\text{NN}},r,F}$, kde n_{NN}, r nahrazuje index n -tého nejbližšího promítnutého vzorku ke vzorku $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$, a přepiš váhy, $w_{k+1|k}^{r,F} \leftarrow w_{k+1|k}^{r,F\dagger}$.
- 2b) V případě fúze promítnutých částic nejprve spočti lokální prediktivní váhy $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F}$ jako v neomezeném případě. Pak zvol průmět \mathbf{p} , promítni vzorky, $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F})$, a odhadni omezené váhy, například podle vztahu $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F\dagger} \propto \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} w_{k+1|k}^{n_{\text{NN}},r,(\lambda),F}$, kde n_{NN}, r nahrazuje index n -tého nejbližšího promítnutého vzorku ke vzorku $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$. Nakonec přepiš částice, $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} \leftarrow \mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$, $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F} \leftarrow w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F\dagger}$ a pokračuj krokem 3).
- 2c) V případě fúze částic při omezení hustot pomocí oříznutí nejprve zvol průmět \mathbf{p} a promítni vzorky, $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F})$. Odhadni promítnutou vzorkovací hustotu $\hat{q}(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$, například pomocí metody nejbližších sousedů (4.8), a spočti omezené lokální prediktivní váhy, $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F\dagger} \propto \sum_{s=1}^{N_k} w_{\kappa:k|k}^{s,(\lambda)} p(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}|\mathbf{x}_k^{s,(\lambda)})/\hat{q}(\mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}|\mathcal{Z}_{k,F}^{(\ell)})$. Nakonec přepiš částice, $\mathbf{x}_{k+1}^{r,F} \leftarrow \mathbf{x}_{k+1}^{r,F\dagger}$, $w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F} \leftarrow w_{k+1|k}^{r,(\lambda),F\dagger}$ a pokračuj krokem 3).

Kapitola 5

Zobecnění konzervativnosti

Tato kapitola se zabývá druhým proudem stanovených cílů disertační práce, tedy rozvojem myšlenek konzervativní fúze hustot pravděpodobnosti. Nejprve je provedeno ohlednutí se za stávajícím stavem řešení dané úlohy, které bylo provedeno v kapitole 2.

V kapitole 2.3 byla uvedena konzervativnost bodového odhadu. Pokud pro daný odhad $\hat{\mathbf{x}}$ a přidruženou kovarianční matici chyby odhadu \mathbf{P} platila maticová nerovnost (2.43), pak odhad ve smyslu celé dvojice $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P})$ byl označen jako konzervativní. Pro různé výklady uvedené podmínky konzervativnosti byly navrženy různé přístupy k fúzi. Metoda sjednocení kovariancí chápala lokální odhady $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)})$ jako dvojice, které se skládají z vektorů a matic závislých na daných realizacích měření $\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$, nikoliv jako dvojice vektorových a maticových funkcí v proměnných $\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$. Naproti tomu metoda průniku kovariancí lokální odhady jako funkce v proměnných $\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$ chápala. Zobecnění pravidla fúze (2.47) pro lokální odhady na fúzi hustot (2.51) bylo provedeno heuristicky, navíc konzervativnost hustot nebyla definována. Alespoň však byla zavedena konzervativnost operace fúze hustot (2.60).

V kapitole 3 byl proto stanoven cíl definovat konzervativnost pro hustoty pravděpodobnosti a navrženou definici dále použít pro zobecnění konzervativní fúze.

Co se týče konzervativní operace fúze hustot, návrh obecnější třídy operací byl již proveden v kapitole 4.3.1 a nejvýznamnější speciální případy byly diskutovány v kapitole 4.3.2. Ostatní případy konzervativnosti jsou zobecněny a diskutovány v této kapitole. V kapitole 5.1 je navržena definice konzervativnosti dané hustoty vzhledem k jiné hustotě, v kapitole 5.2 je navržená definice využita ke zobecnění metody sjednocení kovariancí, kapitola 5.3 se zamýšlí nad konzervativností estimátorů poskytujících hustoty pravděpodobnosti.

5.1 Návrh definice konzervativní hustoty

Metoda sjednocení kovariancí, představená v kapitole 2.3.1, přiřazovala lokálním odhadům $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+}$ takový sloučený odhad $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k, F}^{(\ell)}, \mathbf{P}_{k|k, F}^{(\ell)})$, který byl konzervativní vůči všem lokálním odhadům. Přitom konzervativnost byla chápána tak, že pro každé λ odpovídal lokální odhad dvojici skládající se ze skutečného středního vektoru a kovarianční matice. V podmínce (2.43) tedy byl odhad $\hat{\mathbf{x}}$, v současném případě $\hat{\mathbf{x}} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)}$, chápán jako realizace, nikoliv jako náhodná proměnná daná transformací náhodných proměnných daných měření. Kovarianční matice chyby rovněž nebyla funkcí lokál-

ních měření. Podmínky konzervativnosti tudíž byly pro daná λ přepsány do tvaru (2.44), který porovnává kovarianční matice reprezentující neurčitost odhadu a neurčitost náhodné proměnné a kvadratickou vzdálenost odhadu od středního vektoru.

Mají-li být místo lokálních bodových odhadů $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\lambda)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(\lambda)})$ slučovány lokální hustoty pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$, pak je třeba definovat konzervativnost nejen pro odhady, ale i pro hustoty. Je sice možné ze znalosti hustoty určit střední vektor a kovarianční matici, ale na druhou stranu by mělo být zřejmé, že konzervativnost z pohledu hustoty by měla odpovídat konzervativnosti z pohledu odhadu pouze ve speciálních případech.

Jako vhodný nástroj pro ohodnocení neurčitosti se jeví Shannonova diferenciální entropie (2.52), protože je základním druhem entropie a vykazuje řadu důležitých vlastností. Obdobně pro ohodnocení vzdálenosti hustot je vhodným nástrojem Kullbackova–Leiblerova divergence (2.55). Jak již bylo řečeno, tato divergence není vzdáleností, protože není symetrická a nespĺňuje trojúhelníkovou nerovnost, ale zato se lokálně chová jako kvadrát vzdálenosti. Navíc pokud je pro ohodnocení neurčitosti hustot použita Shannonova diferenciální entropie, měla by být k ohodnocení vzdálenosti použita právě Kullbackova–Leiblerova divergence, neboť tyto informační míry spolu úzce souvisejí.

Dříve než bude navržena definice konzervativnosti hustot využívající uvedené informační míry, budou provedeny následující úvahy.

Rozdělení pravděpodobnosti sdílejících stejné střední vektory a kovarianční matice je nekonečně mnoho. Například pro jednorozměrnou Gaussovu hustotu s nulovou střední hodnotou a jednotkovou variancí jsou uvedené momenty stejné jako pro směs stejně vážených Diracových funkcí umístěných v bodech 1 a -1 , která představuje limitní příklad symetrické směsi se stejnými prvými dvěma momenty. Ačkoliv z pohledu konzervativnosti bodových odhadů by uvedené hustoty byly rovnocenné, čili navzájem vůči sobě konzervativní, směs izolovaných bodů stěží může být považována za konzervativní vzhledem k hustotě s kompaktním definičním oborem. Hustota, která přiřazuje přípustným stavům nulové pravděpodobnosti, těžko může být považována za konzervativní.

Naopak, pokud je uvažována Diracova směs, nebo jiná směs se složkami s nepřekrývajícími se definičními obory, pak nahrazením jednotlivých složek pomocí mírně odlišných nových složek, které jsou vůči původním složkám konzervativní, by měla vzniknout směs hustot konzervativní vzhledem k původní směsi. Nemělo by tedy záležet na tom, volně řečeno, jsou-li nové složky posunuty směrem ke střední hodnotě nebo naopak. V prvním případě se kovarianční matice směsi může snížit, ve druhém se musí zvýšit. Z pohledu bodových odhadů by v prvním případě mohla být navržená směs vyhodnocena jako nekonzervativní, i když pro složky s disjunktními definičními obory by konzervativnost z pohledu hustot na směru posunutí složek vůbec neměla záviset.

Pokud jsou známy pouze vybrané momenty náhodné veličiny, pak podle principu maximální entropie je mezi hustotami s danými momenty vybrána jako nejlepší ta hustota, jejíž entropie je největší. Je-li tedy znám pouze střední vektor a kovarianční matice náhodné veličiny, pak podle principu maximální entropie je jako nejlepší vybrána Gaussova hustota s daným středním vektorem a kovarianční maticí. Naopak rovněž platí, že střední vektor a kovarianční matice plně určují Gaussovu hustotu.

Poslední úvaha poskytuje vodítko k návrhu definice konzervativnosti hustot. Gaussovy hustoty jsou obvyklým speciálním případem v mnoha úlohách, zdá se tedy vhodné navrhnout takovou definici, pro kterou by konzervativnost Gaussových hustot byla ekvivalentní s konzervativností bodových odhadů na těchto hustotách založených.

Pro navržení definice je důležité, že potřebné informační míry jsou vyjádřitelné v uzavřeném tvaru. Diferenciální Shannonova entropie Gaussovy hustoty $p_G(\mathbf{x})$ se středním vektorem $\hat{\mathbf{x}}_p$ a kovarianční maticí \mathbf{P}_p , $p_G = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_p, \mathbf{P}_p)$, je dána

$$\mathcal{H}(p_G) = \frac{1}{2} \ln[(2\pi e)^{n_x} \det \mathbf{P}_p] \quad (5.1)$$

a Kullbackova–Leiblerova divergence Gaussových hustot p_G a π_G , $\pi_G = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_\pi, \mathbf{P}_\pi)$, je dána

$$\mathcal{D}(p_G \parallel \pi_G) = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\det \mathbf{P}_\pi}{\det \mathbf{P}_p} - n_x + \text{tr}(\mathbf{P}_p \mathbf{P}_\pi^{-1}) + (\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)^T \mathbf{P}_\pi^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi) \right], \quad (5.2)$$

kde tr označuje stopu matice, neboli součet prvků na hlavní diagonále matice. Protože pro matice \mathbf{A} , \mathbf{B} platí $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)$ a navíc, je-li \mathbf{A} regulární matice řádu n_x , také $n_x = \text{tr}(\mathbf{AA}^{-1})$, může být divergence $\mathcal{D}(p_G \parallel \pi_G)$ upravena do tvaru

$$\mathcal{D}(p_G \parallel \pi_G) = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\det \mathbf{P}_\pi}{\det \mathbf{P}_p} + \text{tr}(\{-\mathbf{P}_\pi + \mathbf{P}_p + (\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)(\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)^T\} \mathbf{P}_\pi^{-1}) \right]. \quad (5.3)$$

Pro připomenutí je dobré znovu napsat podmínku konzervativnosti bodového odhadu $(\hat{\mathbf{x}}_\pi, \mathbf{P}_\pi)$ vzhledem k uvažovaným skutečným parametrům $(\hat{\mathbf{x}}_p, \mathbf{P}_p)$. Tato podmínka je dána maticovou nerovností

$$\mathbf{P}_\pi - \mathbf{P}_p - (\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)(\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)^T \geq 0. \quad (5.4)$$

5.1.1 Definice konzervativní hustoty

Při omezení se na případy, kdy dimenze n_x odhadované veličiny \mathbf{x} je jedna, je snadné porovnat podmínku konzervativnosti bodového odhadu (5.4) s tvarem Kullbackovy–Leiblerovy divergence Gaussových hustot (5.3) a s tvarem Shannonovy entropie Gaussovy hustoty (5.1). Protože variance \mathbf{P}_π musí být kladná a protože stopa čísla je číslo samo, lze odečtením členu s logaritmem z tvaru divergence (5.3) a vynásobením zbytku mínus dvojnásobkem odhadované variance \mathbf{P}_π dostat výraz vystupující v podmínce (5.4). Pro jednorozměrné Gaussovy hustoty je tedy možno uvedenou podmínku konzervativnosti bodových odhadů nahradit podmínkou vyjádřenou v informačních mírách, přičemž tyto podmínky jsou ekvivalentní. Proto je navržena následující definice.

Definice 1: Konzervativnost hustot – základní tvar.

Hustota π je konzervativní vzhledem k hustotě p právě tehdy, když platí

$$\mathcal{H}(\pi) - \mathcal{H}(p) - \mathcal{D}(p \parallel \pi) \geq 0. \quad (5.5)$$

Definici konzervativnosti hustot lze samozřejmě použít i pro vícerozměrné hustoty. Protože informační míry jsou skalární, není možné dosáhnout ekvivalentnost podmínek (5.5) a (5.4) i pro vícerozměrné Gaussovy hustoty. Je však otázkou, zda je dosažení takové ekvivalentnosti vůbec žádoucí. Nicméně alespoň platí důležitá implikace. Splňují-li parametry vícerozměrných Gaussových hustot π a p podmínku konzervativnosti bodových odhadů (5.4), tedy že $(\hat{\mathbf{x}}_\pi, \mathbf{P}_\pi)$ je konzervativní vzhledem k $(\hat{\mathbf{x}}_p, \mathbf{P}_p)$, pak je i hustota π konzervativní vzhledem k hustotě p . Později bude ukázáno, že pro splnění této implikace nemusí být hustota p Gaussova.

Důvod, proč pro vícerozměrné Gaussovy hustoty platí pouze implikace, je zřejmý. Maticová nerovnost porovnává n_x vlastních čísel. Je-li levá strana (5.4) pozitivně semi-definitní, čili jsou-li všechna příslušná vlastní čísla nezáporná, pak vynásobením pozitivně definitní maticí \mathbf{P}_π nezmění pozitivní semidefinitnost. Stopa matice je též rovna součtu vlastních čísel. Jsou-li všechna vlastní čísla nezáporná, pak i jejich součet je nezáporný. Obrácený směr však očividně platit nemusí.

Navrženou podmínku konzervativnosti je možno vyjádřit pomocí definic entropie a divergence v alternativním tvaru jako

$$\int_{\Omega_\pi} (p(\mathbf{x}) - \pi(\mathbf{x})) \ln \pi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq 0. \quad (5.6)$$

Pro omezený definiční obor Ω_π je zřejmé, že rovnoměrná hustota $\pi_{\mathcal{U}}(\mathbf{x}) \propto 1$ je konzervativní vůči všem hustotám p na stejném nebo menším definičním oboru Ω_p , $\Omega_p \subseteq \Omega_\pi$. Protože konstantní hodnotu logaritmu rovnoměrné hustoty lze vytknout před integrál, ve kterém zbude rozdíl hustot, je podmínka konzervativnosti (5.6), a tedy i (5.5), splněna dokonce rovností. Pro neomezený definiční obor je pak rovnoměrná hustota nevlastní, ale konzervativnost zůstává. Dalším zjevným případem, kdy v podmínce platí rovnost, je uvažování té samé hustoty, čili $\pi(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ až na množinu míry nula. Neboli hustoty jsou samozřejmě konzervativní vzhledem k sobě samotným.

Velkou výhodou navržené definice konzervativnosti je její použitelnost jak na hustoty pravděpodobnosti spojitých náhodných veličin, tak na pravděpodobnostní funkce diskrétních náhodných veličin. V diskrétním případě totiž nemusejí mít střední vektor a kovarianční matice žádný smysl, kdežto informační míry smysl stále mají.

Podmínku konzervativnosti lze vykládat z mnoha pohledů. Prvním je formální porovnání (5.5) a (5.4). Neurčitost odhadu musí být alespoň o tolik větší než skutečná neurčitost náhodné veličiny, kolik je kvadrát vzdálenosti odhadu od skutečnosti. Porovnání rozdílu entropií a divergence by zjevně šlo rozšířit i na obecnější informační míry, ale Shannonova entropie a Kullbackova–Leiblerova divergence jsou zřejmě přirozenou volbou zaručující mnoho dalších vlastností. Formální podoba uvedených podmínek není příliš překvapivá, protože podmínka pro hustoty byla navržena právě na základě podmínky pro bodové odhady.

Jiný výklad nabízí teorie kódování [23], kde je třeba uvažovat diskrétní případ a binární logaritmy. Každé hodnotě \mathbf{x} je přiřazena posloupnost jedniček a nul, takzvané kódové slovo. Střední hodnota délky kódového slova optimálního prefixového kódu je dána Shannonovou entropií. Je-li optimální kód konstruován podle pravděpodobnostní funkce π , ale skutečná pravděpodobnostní funkce je p , pak Kullbackova–Leiblerova divergence $\mathcal{D}(p||\pi)$ udává nárůst střední hodnoty délky kódového slova. Podmínku (5.5) lze vykládat tak, že očekávaná délka kódového slova založená na π je větší než skutečná střední délka daná součtem $\mathcal{H}(p) + \mathcal{D}(p||\pi)$.

Výraz $\mathcal{H}(p) + \mathcal{D}(p||\pi)$ odpovídá jiné relativní informační míře známé jako Kerridgeova nepřesnost. Navržená definice konzervativnosti pak má velmi přímočarou interpretaci. Neurčitost konzervativní hustoty musí být alespoň tak velká jako její nepřesnost vůči referenční hustotě. Ve shodě s obecným pohledem tak lze o konzervativnosti tvrdit, že něco je ve skutečnosti lepší než se předpokládá.

Speciálním případem hustoty p je Diracova funkce v nějakém stavu \mathbf{x} , tedy případ, kdy je stav neznámý, ale nikoliv neurčitý. Podmínka (5.6) pak přejde do tvaru

$$\pi(\mathbf{x}) \geq \exp(-\mathcal{H}(\pi)), \quad (5.7)$$

který lze vykládat například podle [23] tak, že hustota π musí v neznámém stavu \mathbf{x} nabývat alespoň takové hodnoty, jako je hodnota hustoty stavů náležejících typické množině dané hustotou π . Za povšimnutí také stojí, že výraz $\exp(\mathcal{H}(\pi))$ bývá označován jako efektivní velikost definičního oboru Ω_π .

5.1.2 Postačující podmínka

Z integrálního tvaru definice konzervativnosti hustot (5.6) lze vyvodit postačující podmínku.

Nejprve je třeba si uvědomit, že definiční obor hustoty p musí být podmnožinou definičního oboru hustoty π , $\Omega_p \subseteq \Omega_\pi$. Jestliže by pro množiny nenulové míry platilo $p(\mathbf{x}) > 0$ a zároveň $\pi(\mathbf{x}) = 0$, byl by v integrálním tvaru definice logaritmus nuly násoben kladným číslem, a tedy integrál roven minus nekonečnu.

Protože integrál z hustoty pravděpodobnosti je roven jedné, je integrál rozdílu hustot nulový. K libovolnému integrálu lze tak beze změny jeho hodnoty přičíst $\ln c$ násobek integrálu rozdílu hustot, $c > 0$. Podmínka (5.6) je tak rovnocenná s podmínkou

$$\int_{\Omega_\pi} (p(\mathbf{x}) - \pi(\mathbf{x})) \ln \frac{\pi(\mathbf{x})}{c} \, d\mathbf{x} \geq 0. \quad (5.8)$$

Obecně platí, že je-li integrand nezáporný pro všechna \mathbf{x} , pak je i celý integrál nezáporný. Postačující podmínka konzervativnosti hustoty π vzhledem k hustotě p je tímto dána jako

$$\pi(\mathbf{x}) < p(\mathbf{x}) \Rightarrow \pi(\mathbf{x}) \geq c, \quad (5.9a)$$

$$\pi(\mathbf{x}) > p(\mathbf{x}) \Rightarrow \pi(\mathbf{x}) \leq c, \quad (5.9b)$$

kde c je kladná konstanta, a může být nazvána podmínkou Robina Hooda. Hladina c dělí hodnoty hustot na velké a malé. Velké hodnoty hustoty p mohou být hustotou π podhodnoceny, malé hodnoty nadhodnoceny, přičemž podhodnocení nesmí klesnout pod hladinu c a nadhodnocení tuto hladinu překročit. Jestliže je tedy při přesunu hustoty zachováno dělení na velké a malé hodnoty, pak je hustota π konzervativní vzhledem k p . Limitním případem je rovnoměrná hustota, pro kterou, jak již bylo ukázáno, nastává v definici konzervativnosti dokonce rovnost.

Navrženou postačující podmínku lze použít k dokázání konzervativnosti exponenciálního zapomínání.

Je-li hustota π dána vztahem

$$\pi(\mathbf{x}) = k^{-1} p^\omega(\mathbf{x}), \quad (5.10)$$

kde exponenciální zapomínání je dáno parametrem ω , $0 < \omega < 1$, a k je normující konstanta, $k = \int_{\Omega_p} p^\omega(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$, pak je konzervativní vzhledem k hustotě p .

Oba limitní případy byly již diskutovány. Pro $\omega = 1$ je hustota p nezměněna a v definici konzervativnosti nastává rovnost. Pro $\omega = 0$ je hustota π rovnoměrná. V případě neomezeného definičního oboru Ω_p je sice rovnoměrná hustota nevlastní, ale i tak opět v definici konzervativnosti nastává rovnost.

Pro předepsané případy $0 < \omega < 1$ je třeba zaměřit se na hladiny hustot. Pokud hustota p nabývá v různých bodech \mathbf{x} té samé hodnoty $p(\mathbf{x})$, pak hustota π nabývá v těch samých bodech opět stejných hodnot $\pi(\mathbf{x})$. Hladina c z postačující podmínky (5.9) je tudíž určena jako kandidátské řešení rovnosti $p(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x})$, které je

dáno $c = k^{\frac{1}{\omega-1}}$. Protože kladná mocnina je rostoucí funkce, nerovnost $\pi(\mathbf{x}) < p(\mathbf{x})$ implikuje nerovnost $\pi^\omega(\mathbf{x}) < p^\omega(\mathbf{x})$. Po následném využití (5.10) je dále implikována nerovnost $k^{-1}\pi^\omega(\mathbf{x}) < \pi(\mathbf{x})$. Jednoduchá úprava pak zaručuje platnost nerovnosti $\pi(\mathbf{x}) > k^{\frac{1}{\omega-1}}$. Neboli nerovnost $\pi(\mathbf{x}) < p(\mathbf{x})$ implikuje nerovnost $\pi(\mathbf{x}) > k^{\frac{1}{\omega-1}}$. Obdobně je získána implikace $\pi(\mathbf{x}) > p(\mathbf{x}) \Rightarrow \pi(\mathbf{x}) < k^{\frac{1}{\omega-1}}$.

Splněním postačující podmínky (5.9) byla dokázána konzervativnost hustoty získané exponenciálním zapomínáním. Navíc kromě speciálního případu, kdy hustota p je rovnoměrná, platí pro $0 < \omega < 1$ dokonce ostrá nerovnost. Všechny hustoty v dostatečně malém okolí hustot π jsou tudíž také konzervativní vzhledem k zapomínané hustotě p .

5.1.3 Vícerozměrné Gaussovy hustoty

Zatím byly ukázány dva speciální případy, kdy v podmínce konzervativnosti (5.6) nastala rovnost. Byly jimi triviální případ $\pi = p$ a případ rovnoměrné hustoty, $\pi = \pi_U$, $\pi_U \propto 1$. V případě hustot pravděpodobnosti je dalším speciálním případem Gaussova hustota $\pi_G = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_\pi, \mathbf{P}_\pi)$, $(\hat{\mathbf{x}}_\pi, \mathbf{P}_\pi) = (\hat{\mathbf{x}}_p, \mathbf{P}_p)$. Navíc bude ukázáno, že pro momenty $(\hat{\mathbf{x}}_\pi, \mathbf{P}_\pi)$ konzervativní vzhledem k $(\hat{\mathbf{x}}_p, \mathbf{P}_p)$ ve smyslu bodových odhadů (5.4) je také Gaussova hustota π_G konzervativní ve smyslu hustot (5.6) vzhledem k libovolné hustotě p s danými momenty.

Pro Gaussovu hustotu π_G lze uvedenou podmínku konzervativnosti analyticky upravit. Dosazením tvaru Gaussovy hustoty, použitím entropie Gaussovy hustoty (5.1), vytknutím logaritmu před integrál, řešením integrálu kvadratické formy a vyjádřením n_x pomocí stopy matice je získána následující polovina stopy známého výrazu,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\pi} (p(\mathbf{x}) - \pi_G(\mathbf{x})) \ln \pi_G(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \mathcal{H}(\pi_G) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} p(\mathbf{x}) \ln[(2\pi)^{n_x} \det \mathbf{P}_\pi] \, d\mathbf{x} - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} p(\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_\pi)^T \mathbf{P}_\pi^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_\pi) \, d\mathbf{x} = \\ &= \frac{n_x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\{ \mathbf{P}_p + (\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)(\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)^T \} \mathbf{P}_\pi^{-1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\{ \mathbf{P}_\pi - \mathbf{P}_p - (\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)(\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)^T \} \mathbf{P}_\pi^{-1} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Tím je dokázáno, že konzervativnost bodových odhadů implikuje konzervativnost Gaussovy hustot vůči libovolné hustotě s danými momenty. Pro $(\hat{\mathbf{x}}_\pi, \mathbf{P}_\pi) = (\hat{\mathbf{x}}_p, \mathbf{P}_p)$ je navíc uvedený integrál zjevně roven nule.

Další důležitou vlastností navržené definice konzervativnosti hustot (5.5) je nezávislost na lineární regulární transformaci souřadnic. Jestliže je náhodná veličina \mathbf{x} transformována pomocí regulární matice \mathbf{T} na \mathbf{y} , $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, pak entropie transformovaných hustot, a to nejen Gaussových, jsou dány $\mathcal{H}(p(\mathbf{y})) = \mathcal{H}(p(\mathbf{x})) + \ln \operatorname{abs} \det \mathbf{T}$, $\mathcal{H}(\pi(\mathbf{y})) = \mathcal{H}(\pi(\mathbf{x})) + \ln \operatorname{abs} \det \mathbf{T}$. Rozdíl entropií se tudíž nemění. Protože Kullbackova–Leiblerova divergence je invariantní vůči jakékoliv změně souřadnic, je zřejmé, že lineární transformace souřadnic nemění konzervativnost hustot.

Této invariance je možné využít k návrhu alternativní definice konzervativnosti vícerozměrných hustot. Pokud by všechny marginální hustoty sdružených hustot π a p byly nezávislé, bylo by možné konzervativnost sdružených hustot definovat jako současnou konzervativnost marginálních hustot. Přestože obecně jsou marginální hustoty

závislé, lze vhodnou lineární transformací souřadnic zaručit, aby byly alespoň nekorelované. Myšlenkový postup je velmi podobný postupu při odvození algoritmu sjednocení kovariancí (2.46). Nejprve jsou pomocí rotace a zvětšení transformovány souřadnice tak, aby kovarianční matice \mathbf{P}_π byla identická. Následně je použita další rotace, které zaručí, aby výsledná transformovaná kovarianční matice \mathbf{P}_p zvětšená o kvadratický člen rozdílu středních vektorů $\hat{\mathbf{x}}_\pi$ a $\hat{\mathbf{x}}_p$ byla diagonální. Navržená transformace je tedy dána

$$\mathbf{S}_\pi^T \mathbf{S}_\pi = \mathbf{P}_\pi, \quad (5.12a)$$

$$\mathbf{V}_p \mathbf{D}_p \mathbf{V}_p^T = \{\mathbf{S}_\pi^{-1}\}^T \{\mathbf{P}_p + (\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)(\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_\pi)^T\} \mathbf{S}_\pi^{-1}, \quad (5.12b)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}_p^T \{\mathbf{S}_\pi^{-1}\}^T, \quad (5.12c)$$

kde \mathbf{S}_π je maticová odmocnina kovarianční matice \mathbf{P}_π a \mathbf{V}_p je matice ortonormálních vlastních vektorů náležejících vlastním číslům, které jsou uspořádané na diagonále matice \mathbf{D}_p , matice na pravé straně (5.12b). Ze způsobu konstrukce tedy platí $\mathbf{V}_p^T = \mathbf{V}_p^{-1}$.

Pro vícerozměrné hustoty může být použita následující definice konzervativnosti, která zaručuje konzervativnost vícerozměrných Gaussových hustot právě tehdy, když je splněna konzervativnost odpovídajících bodových odhadů.

Definice 2: Konzervativnost vícerozměrných hustot – hyperkorektní definice.

Vícerozměrná hustota π je konzervativní vzhledem k hustotě p právě tehdy, když jsou ve smyslu Definice 1 (5.5) konzervativní všechny marginální hustoty hustot π a p v transformovaném souřadném systému daném transformací (5.12), čili musí platit

$$\mathcal{H}(\pi(\mathbf{y}_i)) - \mathcal{H}(p(\mathbf{y}_i)) - \mathcal{D}(p(\mathbf{y}_i) \parallel \pi(\mathbf{y}_i)) \geq 0 \quad (5.13)$$

pro všechna i , $i = 1, \dots, n_x$.

Je třeba poznamenat, že požadavek ekvivalence konzervativnosti pro vícerozměrné Gaussovy hustoty s konzervativností bodových odhadů může být příliš umělý. Navíc Definice 2 (5.13) je založena pouze na nekorelovanosti, nikoliv nezávislosti. I proto je upřednostňována původní definice (5.5).

5.1.4 Zobecnění navržené definice

Jak bylo ukázáno, navržená podmínka konzervativnosti hustot (5.5) je invariantní vůči lineárním transformacím souřadnic. Má-li například odhadovaná veličina \mathbf{x} význam polohy, pak konzervativnost počítaná v metrech je stejná jako konzervativnost počítaná v kilometrech. Avšak vůči nelineárním transformacím navržená podmínka invariantní není. Přejít od kartézských k polárním souřadnicím tak z nekonzervativní hustoty může vytvořit konzervativní hustotu, stejně tak jako z konzervativní může vytvořit nekonzervativní. Z tohoto pohledu je tudíž navržená podmínka konzervativnosti vždy vztažena k vybranému souřadnému systému.

Za povšimnutí stojí, že rovnoměrná hustota $\pi_{\mathcal{U}}$ byla vždy konzervativní vzhledem k libovolné hustotě na stejném nebo menším definičním oboru a že lineární transformace rovnoměrnost hustot zachovává. Dále platí, že Kullbackova–Leiblerova divergence hustoty p a rovnoměrné hustoty $\pi_{\mathcal{U}}$ na stejném nebo větším definičním oboru Ω_π , $\Omega_p \subseteq \Omega_\pi$, je rovna rozdílu velikosti tohoto definičního oboru a entropie $\mathcal{H}(\pi)$. Pro rovnoměrnou hustotu $\pi_{\mathcal{U}}$, která byla univerzálně konzervativní, tedy platí, že rozdíl entropií hustot π

a p je až na znaménko shodný s rozdílem divergencí těchto hustot a rovnoměrné hustoty $\pi_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{H}(\pi) - \mathcal{H}(p) = \mathcal{D}(p\|\pi_{\mathcal{U}}) - \mathcal{D}(\pi\|\pi_{\mathcal{U}})$.

Rovnoměrná hustota $\pi_{\mathcal{U}}$ obvykle odpovídá situaci, kdy o náhodné veličině \mathbf{x} nejsou žádné informace. Je-li v nějakých souřadnicích rozumné za neinformativní hustotu pokládat rovnoměrnou hustotu $\pi_{\mathcal{U}}$, pak při přechodu k jiným souřadnicím je transformací rovnoměrné hustoty $\pi_{\mathcal{U}}$ získána hustota $\pi_{\mathcal{C}}$, která může být prohlášena za neinformativní hustotu v transformovaných souřadnicích. Zobecnění Definice 1 (5.5) je proto nasnadě.

Definice 3: Konzervativnost hustot pro libovolnou neinformativní hustotu $\pi_{\mathcal{C}}$.

Je-li dána neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}$, pak hustota π je konzervativní vzhledem k hustotě p právě tehdy, když platí

$$\mathcal{D}(p\|\pi_{\mathcal{C}}) - \mathcal{D}(\pi\|\pi_{\mathcal{C}}) - \mathcal{D}(p\|\pi) \geq 0. \quad (5.14)$$

Tato zobecněná definice je již invariantní vůči nelineárním transformacím souřadnic, avšak je třeba pamatovat, že musí být transformovány všechny tři hustoty, jak hustoty π a p , tak i neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}$.

Protože divergence nejsou vzdálenosti, nemusí pro hustoty platit trojúhelníková nerovnost. Najít konzervativní hustotu π vzhledem k hustotě p pak znamená najít takovou „zkratku“ mezi $\pi_{\mathcal{C}}$ a p , kde trojúhelníková nerovnost neplatí.

Lepší geometrický pohled na zobecněnou definici (5.14) poskytuje lokální vlastnost Kullbackovy–Leiblerovy divergence, jmenovitě chování se jako kvadrát vzdálenosti. Hraniční rovnost pak není nic jiného než Pythagorova věta. Množina konzervativních hustot π je potom ohraničena takovými hustotami, pro které, velmi volně řečeno, úsečky $\pi\pi_{\mathcal{C}}$ a $p\pi$ svírají pravý úhel. Při představě, že hustoty představují body v rovině, jsou možné následující úvahy, které budou dále ilustrovány na příkladě v kapitole 5.1.5.

Jsou-li hustoty p a $\pi_{\mathcal{C}}$ dány, pak hustoty π splňující rovnost ve zobecněné definici leží na Thaletově kružnici s průměrem $p\pi_{\mathcal{C}}$. Z vlastností, které budou popsány dále v textu této práce, je možné odvodit, že hustoty π splňující nerovnost leží uvnitř této Thaletovy kružnice.

Naopak, jsou-li dány hustoty π a $\pi_{\mathcal{C}}$, pak hustoty p splňující rovnost ve zobecněné definici leží na kolmici v bodě π k úsečce $\pi\pi_{\mathcal{C}}$. Z nezápornosti divergence a její nulovosti pro stejné hustoty lze odvodit, že hustoty p splňující nerovnost leží v té polorovině dané uvedenou kolmicí, která neobsahuje neinformativní hustotu $\pi_{\mathcal{C}}$.

Pomocí definice Kullbackovy–Leiblerovy divergence lze navrženou zobecněnou podmínku konzervativnosti (5.14) přepsat jako

$$\int_{\Omega_{\pi}} (p(\mathbf{x}) - \pi(\mathbf{x})) \ln \frac{\pi(\mathbf{x})}{\pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \geq 0. \quad (5.15)$$

Opět platí, že libovolná hustota je sama vzhledem k sobě konzervativní a že neinformativní hustota je konzervativní vzhledem k libovolné hustotě. Neinformativní hustotu $\pi_{\mathcal{C}}$ je tudíž možné nazývat jako univerzálně konzervativní. Navíc v těchto případech, $\pi = p$ nebo $\pi = \pi_{\mathcal{C}}$, nastává v podmínce konzervativnosti rovnost.

Je třeba připomenout, že neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}$ může být i nevlastní. Protože člen v logaritmu v integrálu (5.15) lze beze změny integrálu opět vydělit libovolnou kladnou konstantou c , nemusí nevlastní hustoty přinášet výpočetní problémy.

Obdobným způsobem, jakým byla získána postačující podmínka (5.9), je možné získat postačující podmínku

$$\pi(\mathbf{x}) < p(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi(\mathbf{x})}{\pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})} \geq c, \quad (5.16a)$$

$$\pi(\mathbf{x}) > p(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi(\mathbf{x})}{\pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})} \leq c, \quad (5.16b)$$

kde c je kladná konstanta.

Na rozdíl od předchozího speciálního případu, kdy neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}$ byla rovnoměrná, $\pi_{\mathcal{C}} = \pi_{\mathcal{U}}$, nyní nelze přímo ukázat konzervativnost exponenciálního zapomínání. Nicméně lze využít invariance vůči změně souřadnic. Vzhledem k zavedení neinformativní hustoty je třeba exponenciální zapomínání upravit do tvaru

$$\pi(\mathbf{x}) \propto p^{\omega}(\mathbf{x})\pi_{\mathcal{C}}^{1-\omega}(\mathbf{x}). \quad (5.17)$$

Dále je třeba najít takovou transformaci, pro kterou je transformovaná neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{y})$ rovnoměrná. V nových souřadnicích je konzervativnost exponenciálního zapomínání dokázána, čili po zpětné transformaci je dokázána i v původních souřadnicích, kde neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})$ není rovnoměrná.

V případě, kdy neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}$ je vlastní, je možné snadno dokázat konzervativnost lineárního zapomínání.

Je-li dána vlastní neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}$ a je-li hustota π dána vztahem

$$\pi(\mathbf{x}) = \omega p(\mathbf{x}) + (1 - \omega)\pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}), \quad (5.18)$$

kde lineární zapomínání je dáno parametrem ω , $0 < \omega < 1$, pak je hustota π konzervativní vzhledem k hustotě p .

Konzervativnost lze snadno dokázat použitím postačující podmínky (5.16) s volbou $c = 1$. Opět platí, že nerovnost v podmínce je pro $\pi \neq \pi_{\mathcal{C}}$ dokonce ostrá. Stejně přímočarý je důkaz získaný dosazením (5.18) do (5.15). Výsledkem je nerovnost

$$-(1 - \omega) \int_{\Omega_{\pi}} \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \ln \frac{\omega p(\mathbf{x}) + (1 - \omega)\pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})}{\pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \geq 0, \quad (5.19)$$

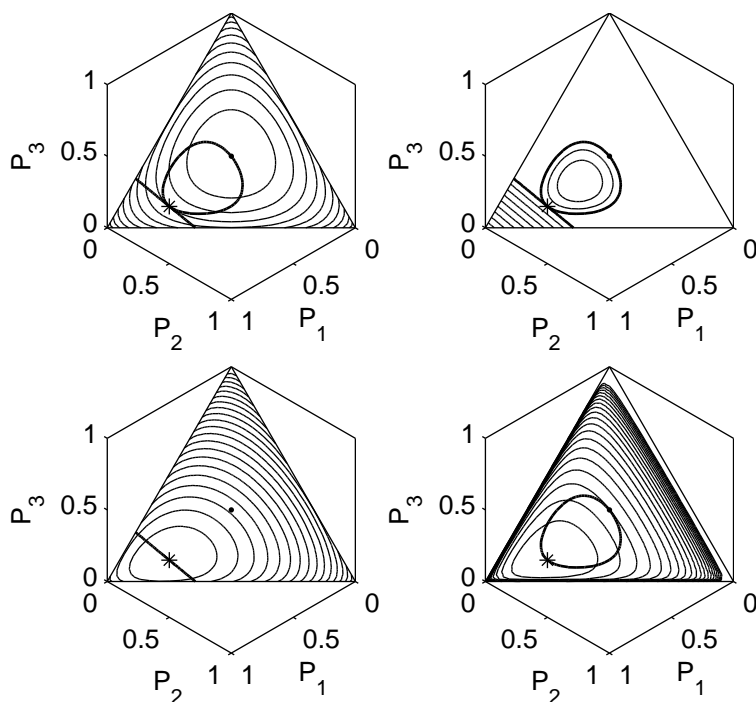
která je splněna, protože výraz na levé straně je roven Kullbackově–Leiblerově divergenci $\mathcal{D}(\pi_{\mathcal{C}} \parallel \omega p + (1 - \omega)\pi_{\mathcal{C}})$ vynásobené kladným číslem $(1 - \omega)$. Tudíž kromě zmíněného triviálního případu je nerovnost ostrá.

5.1.5 Příklad – diskrétní náhodná veličina

Jak bylo předesláno, předností navržené definice konzervativnosti (5.5), případně její obecnější varianty (5.14) je její použitelnost na diskrétní náhodné veličiny, což lze snadno doložit.

Spojení s hustotami pravděpodobnosti je zřejmé z příkladu po částech konstantních hustot pravděpodobnosti. Nechť hustoty pravděpodobnosti $p(\mathbf{x})$ mají tvar

$$p(\mathbf{x}_k) = \sum_{k=1}^M P_k \mathbf{1}_{\Omega_k}(\mathbf{x}), \quad (5.20)$$



Obrázek 5.1: Vrstevnice v násobcích 0.1. Entropie $\mathcal{H}(p)$ (levý horní obrázek), nezáporné konzervativnosti $\mathcal{C}(p||q)$ a $\mathcal{C}(q||p)$ (rovnoběžky a uzavřené křivky na pravém horním obrázku) a Kullbackovy–Leiblerovy divergence $\mathcal{D}(p||q)$ (levý dolní obrázek) a $\mathcal{D}(q||p)$ (pravý dolní obrázek). Neinformativní pravděpodobnostní funkce $\pi_{\mathcal{C}}$ (tečka) a vybraná pravděpodobnostní funkce q (hvězdička). Tučně jsou vyznačeny množiny $\mathcal{C}(p||q) = 0$ (úsečka) a $\mathcal{C}(q||p) = 0$ (uzavřená křivka).

kde $\mathbf{1}_{\Omega_k}$ je funkce indikátor, čili platí $\mathbf{1}_{\Omega_k}(\mathbf{x}) = 1$ pro $\mathbf{x} \in \Omega_k$ a $\mathbf{1}_{\Omega_k}(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \notin \Omega_k$, a kde množiny Ω_k jsou disjunktní, $\Omega_k \neq \Omega_l$, $k \neq l$. Vzhledem ke invarianci konzervativnosti vzhledem k transformaci souřadnic je možné uvažovat, že všechny množiny jsou stejně velké, přičemž jejich velikost je rovna jedné, $|\Omega_k| = 1$. Pak hodnoty P_k odpovídají hodnotám pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny.

Na obrázku 5.1 je vykreslen pravděpodobnostní simplex pro $M = 3$, čili trojúhelník s vrcholy $[1, 0, 0]^T$, $[0, 1, 0]^T$ a $[0, 0, 1]^T$. Každý bod trojúhelníku odpovídá jedné pravděpodobnostní funkci p , $p = [P_1, P_2, P_3]^T$, jeho těžiště odpovídá neinformativní pravděpodobnostní funkci $\pi_{\mathcal{C}}$, $\pi_{\mathcal{C}} = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]^T$. Hvězdička označuje vybranou pravděpodobnostní funkci q , $q = [0.7, 0.2, 0.1]^T$.

Entropie $\mathcal{H}(p)$ je nulová ve vrcholech, protože ty odpovídají deterministickému případu přiřazující jednomu stavu pravděpodobnost jedna. Maxima nabývá entropie v neinformativní pravděpodobnostní funkci $\pi_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{H}(\pi_{\mathcal{C}}) = \ln 3$, entropie $\mathcal{H}(q)$ je přibližně rovna 0.8. Divergence jsou nulové pro $p = q$, divergence $\mathcal{D}(q||p)$ je nekonečná pro taková p , kde alespoň jedna hodnota P_k je nulová. To znamená v případech, kdy model p nepřipouští stav, kterého může nabýt systém daný q . Vrstevnice $\mathcal{D}(q||p)$ jsou proto vyobrazeny pouze do hladiny 2.

Dále jsou na obrázku 5.1 zobrazeny konzervativnosti $\mathcal{C}(p||q)$ a $\mathcal{C}(q||p)$, které jsou definovány dále v této práci vztahem (5.23), neboli levé strany nerovnic (5.5). Pravdě-

podobnostní funkce q je konzervativní vzhledem k pravděpodobnostním funkcím uvnitř trojúhelníku daném vrcholem $[1, 0, 0]^T$ a tučnou úsečkou. Naopak, funkce ohraničené tučnou uzavřenou křivkou procházející q a π_C jsou konzervativní vzhledem k funkci q . Z obrázku je patrné, že tučné čáry protínají vrstevnice divergencí a entropie v odpovídajících si bodech. Zároveň odpovídají dříve nastíněnému geometrickému průměru, tedy tečně entropie v bodě q a Thaletově kružnici s průměrem $q\pi_C$.

5.1.6 Příklad – Gaussovy směsi

V úvodu kapitoly 5.1 byla nadnesena myšlenka, že konzervativnost hustoty ve formě směsi vzhledem k jiné směsi by mohla být řešena pomocí konzervativnosti odpovídajících si složek za podmínky, že odpovídající si složky jsou nenulové na disjunktních definičních oborech. Pro Gaussovy směsi s dostatečně vzdálenými složkami by tedy mělo být možné navrhnout jinou Gaussovu směs, která by byla vzhledem k původní směsi konzervativní, pomocí návrhu konzervativních složek vzhledem k jednotlivým složkám původní směsi. Touto myšlenku zkoumá následující příklad.

Nechť jsou hustoty p dány jako následující Gaussovy směsi, které jsou symetrické kolem nuly,

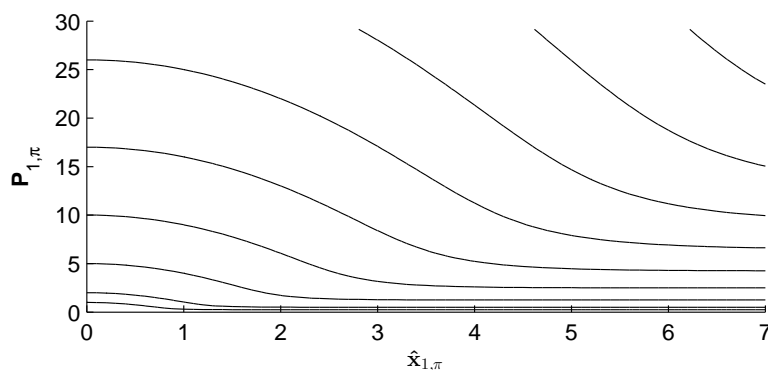
$$p = \frac{1}{2}\mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{1,p}, 1) + \frac{1}{2}\mathcal{N}(-\hat{\mathbf{x}}_{1,p}, 1), \quad (5.21)$$

a které jsou uvažovány pro různé střední hodnoty první složky $\hat{\mathbf{x}}_{1,p}$, $\hat{\mathbf{x}}_{1,p} = 0, 1, \dots, 5$. V případě $\hat{\mathbf{x}}_{1,p} = 0$ směs degeneruje na Gaussovu hustotu, v případě $\hat{\mathbf{x}}_{1,p} = 1, 2$ se složky velmi překrývají, zatímco v případě $\hat{\mathbf{x}}_{1,p} = 3, 4, 5$ se překrytí vytrácí.

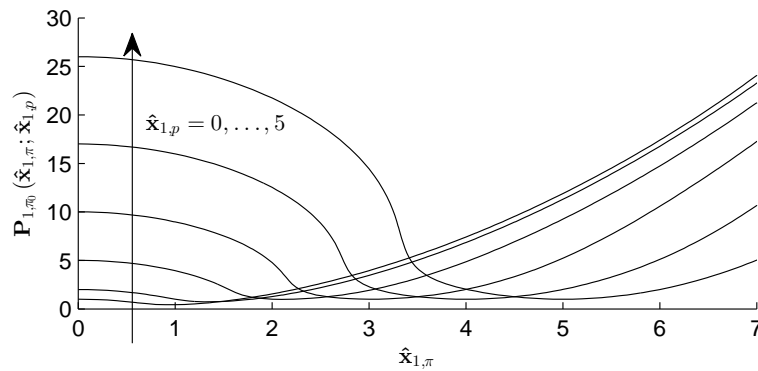
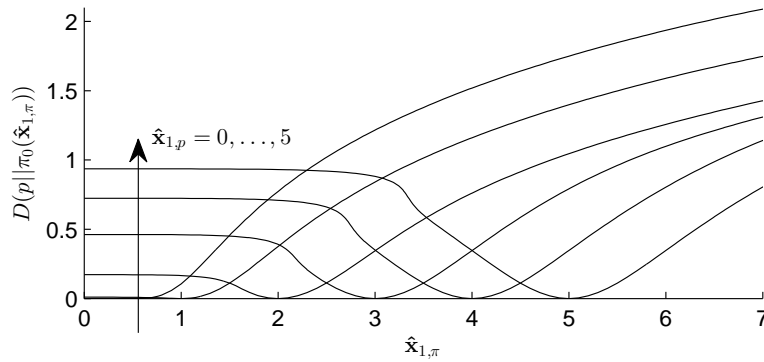
Směsi π , pro něž bude zkoumána konzervativnost vzhledem ke směsi p , jsou uvažovány ve tvaru

$$\pi = \frac{1}{2}\mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}, \mathbf{P}_{1,\pi}) + \frac{1}{2}\mathcal{N}(-\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}, \mathbf{P}_{1,\pi}). \quad (5.22)$$

Na obrázku 5.2 jsou vykresleny vrstevnice entropie $\mathcal{H}(\pi)$. Je-li variance složek $\mathbf{P}_{1,\pi}$ pevně dána, pak pro střední hodnotu první složky $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$ zvětšující se od nuly nejprve entropie rychle klesá, ale postupně se ustálí na hodnotě $\frac{1}{2}\ln(8\pi e\mathbf{P}_{1,\pi})$, a to když je složky možno považovat za nepřekrývající se. Vrstevnice jsou vykresleny v úrovních odpovídajících entropiím Gaussových hustot s variancemi $0^2 + 1, 1^2 + 1, \dots, 8^2 + 1$.

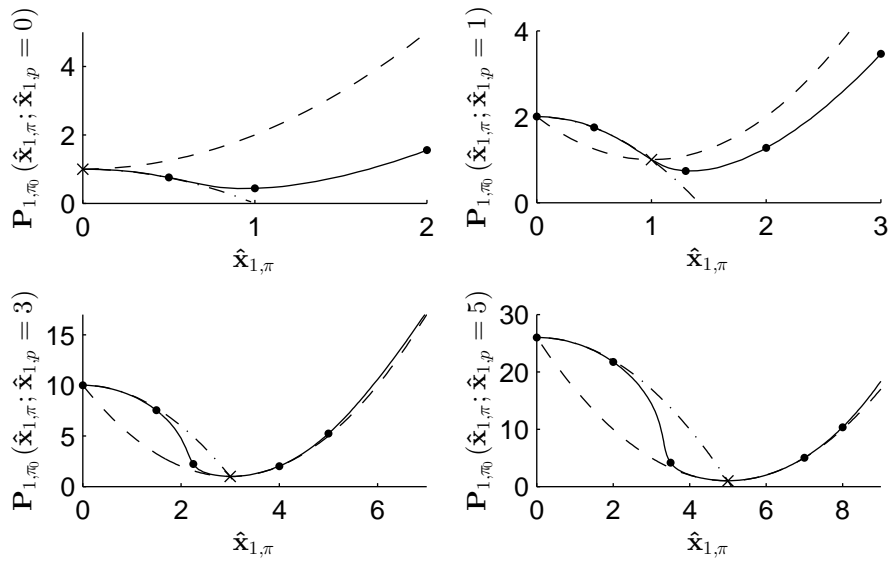


Obrázek 5.2: Vrstevnice entropie směsi π pro dané volby parametrů $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$ a $\mathbf{P}_{1,\pi}$ (entropie roste pro zvětšující se hodnoty parametrů).

Obrázek 5.3: Hranice oblasti konzervativních parametrů směsi π pro různé $\hat{\mathbf{x}}_{1,p}$.Obrázek 5.4: Kullbackovy–Leiblerovy divergence směsí p , $\hat{\mathbf{x}}_{1,p} = 0, \dots, 5$ a konzervativních směsí π_0 pro daná $\hat{\mathbf{x}}_{1,p}$.

Obrázek 5.3 zachycuje hranice konzervativnosti, čili pro dané $\hat{\mathbf{x}}_{1,p}$ a měnící se střední hodnotu složky $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$ takové variance složek \mathbf{P}_{1,π_0} , pro které nastává v definici (5.5) rovnost. Konzervativní parametry leží nad vykreslenými křivkami. Z porovnání s obrázkem 5.2 je zřejmé, že pro malé hodnoty $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$ se tyto křivky blíží vrstevnicím entropie. Pro $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi} = \hat{\mathbf{x}}_{1,p}$ musí platit $\mathbf{P}_{1,\pi_0} = 1$, protože hustota p musí ležet na hranici konzervativnosti. Pro uvedené křivky jsou na obrázku 5.4 vykresleny Kullbackovy–Leiblerovy divergence $\mathcal{D}(p||\pi_0)$ v příslušných hodnotách $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$. Je zřejmé, že pro malé hodnoty $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$, přibližně $0 \leq \hat{\mathbf{x}}_{1,\pi} \leq \frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}_{1,p}$, se divergence $\mathcal{D}(p||\pi_0(\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}))$ skoro nemění, a tedy že příslušné hraniční hustoty $\pi_0(\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi})$ se také příliš nemění s rostoucím $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$.

Hranice konzervativnosti jsou dále rozkresleny na obrázku 5.5. Pro $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi} = 0$ směs π degeneruje na Gaussovu hustotu. Z explicitního řešení (5.11) pak vyplývá, že variance Gaussovy hustoty π_0 je rovna varianci odpovídající směsi p , čili $\mathbf{P}_{1,\pi_0}(\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi} = 0; \hat{\mathbf{x}}_{1,p}) = \mathbf{P}_p$, kde variance p je dána $\mathbf{P}_p = 1 + \hat{\mathbf{x}}_{1,p}^2$. Tento případ dokládá, že k libovolné směsi lze navrhnout konzervativní Gaussovu hustotu pomocí výpočtu prvních dvou momentů. Z čerchovaných čar lze dále vyčíst, že pro daný příklad parametrických směsí jsou směsi π s variancí \mathbf{P}_p , tedy s variancí složek $\mathbf{P}_{1,\pi}$ danou rovností $\mathbf{P}_{1,\pi} = 1 + \hat{\mathbf{x}}_{1,p}^2 - \hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}^2$, konzervativní vzhledem ke směsi p pouze tehdy, pokud platí $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi} \leq \hat{\mathbf{x}}_{1,p}$. Tedy pokud složky směsi π leží mezi složkami směsi p . Pro malé hodnoty $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$ jsou tyto směsi π s variancí \mathbf{P}_p blízké hraničním směsím π_0 .



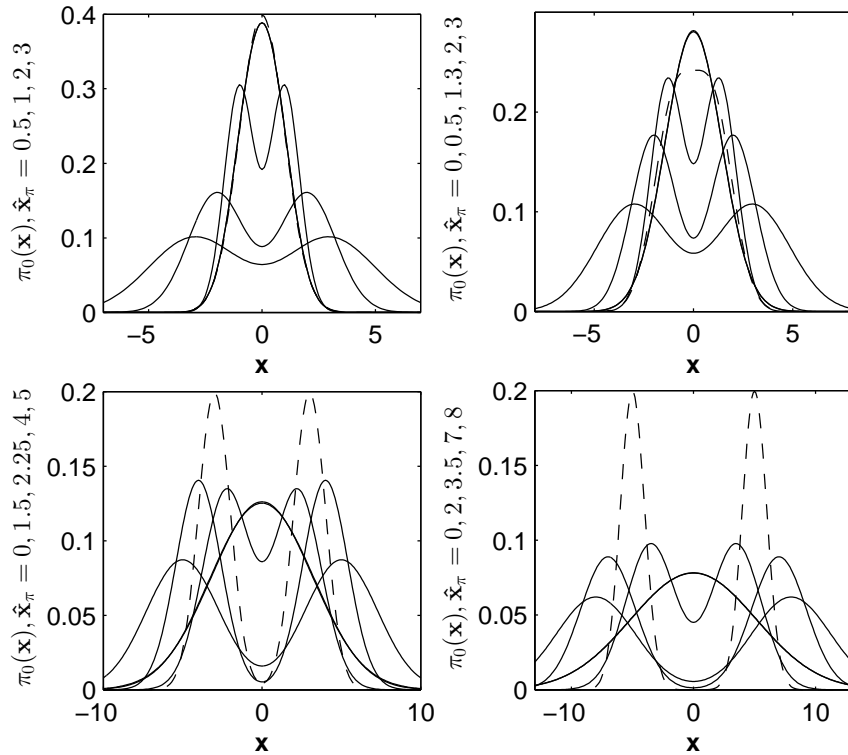
Obrázek 5.5: Rozšíření obrázku 5.3. Hraniční směsi π_0 (plné čáry) pro dané směsi p (křížky), směsi π s variancí rovnou P_p (směsi vykresleny čerchovanými čarami) a směsi s konzervativností po složkách (čárkované čáry). Tečky označují směsi vykreslené na obrázku 5.6.

Hlavní částí tohoto příkladu je vyšetření konzervativnosti směsí po složkách. Je ukázáno, že z konzervativnosti složek nevyplývá konzervativnost směsi a že z nekonzervativnosti složek nevyplývá nekonzervativnost směsi.

Konzervativnost po složkách je v obrázku 5.5 znázorněna čárkovanými parabolami. Má-li být první složka směsi π konzervativní vzhledem k první složce směsi p , musí pro varianci složek $P_{1,\pi}$ platit $P_{1,\pi} \geq 1 + (\hat{x}_{1,\pi} - \hat{x}_{1,p})^2$. Je zřejmé, že pro případ $\hat{x}_{1,p} = 0$, tedy když Gaussovy směs p zdegenerovala na prostou Gaussovou hustotu, není pro konzervativnost směsi π vzhledem k p potřeba, aby složky směsi π byly konzervativní vzhledem ke složkám směsi p , což znamená i k hustotě p samotné. Na případu $\hat{x}_{1,p} = 1$ je ukázáno, že pokud se složky směsi π překrývají více než složky p , čili pro $\hat{x}_{1,\pi} < \hat{x}_{1,p} = 1$, konzervativnost po složkách nezaručuje konzervativnost směsí. Stejně jako v předchozím případě i pro $1 = \hat{x}_{1,p} < \hat{x}_{1,\pi}$ nekonzervativnost po složkách neznamena nekonzervativnost směsi.

Pro $\hat{x}_{1,p} = 3$ a $\hat{x}_{1,p} = 5$ se složky směsi p překrývají pouze nepatrně. Proto lze očekávat, že pokud se střední hodnoty složek $\hat{x}_{1,\pi}$ budou pohybovat v malém okolí $\hat{x}_{1,p}$, bude hranice konzervativnosti směsi π přibližně odpovídat hranici konzervativnosti po složkách. Jak je z dolních grafů obrázku 5.5 patrné, je tomu tak. Navíc je vidět, že hranice je symetrická. Ovšem pokud se složky směsi π začnou výrazněji překrývat, jsou potřeba větší variance, než by vyplývalo z konzervativnosti po složkách. Jak bylo dříve diskutováno, pro $\hat{x}_{1,\pi}$ blízké nule jsou potřeba přibližně takové variance složek, pro které variance směsi π odpovídá varianci směsi p .

Na obrázku 5.6 jsou zobrazeny konzervativní směsi π_0 , které jsou v obrázku 5.5 označeny tečkami. Směsi π_0 s nulovou střední hodnotou první složky, $\hat{x}_{1,\pi} = 0$, čili Gaussovy hustoty, jsou na pohled nerozeznatelné od směsí pro $\hat{x}_{1,\pi} = 0.5, 0.5, 1.5, 2$ kde $\hat{x}_{1,p}$ nabývá popořadě hodnot 0, 1, 3, 5.



Obrázek 5.6: Konzervativní směsi π_0 (plné čáry) pro různé volby $\hat{\mathbf{x}}_{1,\pi}$. Směsi p (čárkované čáry) pro $\hat{\mathbf{x}}_{1,p} = 0, 1, 3, 5$.

5.2 Zobecnění metody sjednocení kovariancí

Po zavedení definice konzervativnosti hustoty π vzhledem k hustotě p je možno přikročit ke zobecnění metody sjednocení kovariancí, které bylo provedeno v autorově článku [4]. Slučované lokální hustoty $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ budou chápány jako funkce stavu \mathbf{x}_k závislé na dané realizaci měření $\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$. Budou tedy opět zkráceně značeny jako p_λ , kde závislost na všech možných měřeních $\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$ není uvažována.

Před samotným zobecněním metody bude konzervativnost hustot kvantifikována. Výraz $\mathcal{C}_{\pi_C}(p||\pi)$ bude označovat levou stranu nerovnosti (5.15), čili i nerovnosti (5.14). Ve speciálním případě rovnoměrné neinformativní hustoty $\pi_C = \pi_U$, čili pro levou stranu (5.6) a (5.5), bude použito zkrácené značení $\mathcal{C}(p||\pi)$. Neboli

$$\mathcal{C}_{\pi_C}(p||\pi) = \int_{\Omega_\pi} (p(\mathbf{x}) - \pi(\mathbf{x})) \ln \frac{\pi(\mathbf{x})}{\pi_C(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \mathcal{D}(p||\pi_C) - \mathcal{D}(\pi||\pi_C) - \mathcal{D}(p||\pi), \quad (5.23a)$$

$$\mathcal{C}(p||\pi) = \int_{\Omega_\pi} (p(\mathbf{x}) - \pi(\mathbf{x})) \ln \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathcal{H}(\pi) - \mathcal{H}(p) - \mathcal{D}(p||\pi). \quad (5.23b)$$

Pro danou neinformativní hustotu π_C je konzervativnost $\mathcal{C}_{\pi_C}(p||\pi)$ funkcí dvou hustot pravděpodobnosti. Je zřejmé, že pro pevně danou hustotu π je konzervativnost $\mathcal{C}_{\pi_C}(p||\pi)$ lineární v hustotě p . Neboli pro hustoty p_1, p_2 a váhu $\omega, 0 < \omega < 1$, platí

$$\mathcal{C}_{\pi_C}(\omega p_1 + (1 - \omega)p_2||\pi) = \omega \mathcal{C}_{\pi_C}(p_1||\pi) + (1 - \omega) \mathcal{C}_{\pi_C}(p_2||\pi). \quad (5.24a)$$

Vzhledem ke striktní konkávnosti logaritmu $\ln x$ a striktní konvexnosti funkce $x \ln x$ je vidět, že pro pevně danou hustotu p je konzervativnost striktně konkávní v hustotě π .

Tedy pro hustoty π_1, π_2 a váhu $\omega, 0 < \omega < 1$, platí

$$\mathcal{C}_{\pi_C}(p|\omega\pi_1 + (1-\omega)\pi_2) > \omega\mathcal{C}_{\pi_C}(p|\pi_1) + (1-\omega)\mathcal{C}_{\pi_C}(p|\pi_2). \quad (5.24b)$$

Z konkávnosti vyplývá dříve uvedená geometrická představa hustot v rovině. Leží-li hustoty s nulovou konzervativností na Thaletově kružnici, pak směs dvou takových hustot π_1, π_2 leží uvnitř kružnice. Hustoty π uvnitř kružnice mají konzervativnost $\mathcal{C}_{\pi_C}(p|\pi)$ kladnou, čili jsou konzervativní vzhledem k p . Z linearitě pak vyplývala představa poloroviny, vůči které jsou hustoty π konzervativní.

Z linearitě v prvním hustotě p a konkávnosti ve druhé hustotě π ovšem nevyplývá konkávnost ve dvojicích hustot, to jest v (p, π) . Je-li hustota p směs hustot p_1, p_2 a hustota π odpovídající směs hustot π_1, π_2 , pak není zaručeno, že konzervativnost směsi $\mathcal{C}_{\pi_C}(\omega p_1 + (1-\omega)p_2|\omega\pi_1 + (1-\omega)\pi_2)$ je větší než směs konzervativností jednotlivých složek daná výrazem $\omega\mathcal{C}_{\pi_C}(p_1|\pi_1) + (1-\omega)\mathcal{C}_{\pi_C}(p_2|\pi_2)$. Speciálně platí, že složka π_1 konzervativní vzhledem ke složce p_1 a složka π_2 konzervativní vzhledem ke složce p_2 nezaručují, že směs π je konzervativní vzhledem ke směsi p .

Nyní se lze vrátit ke zobecňování metody sjednocení kovariancí.

5.2.1 Formulace úlohy

Ve zobecněné metodě je hledána taková hustota π , která by byla konzervativní vzhledem ke všem slučovaným hustotám $p_\lambda, \lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$, a vyhovovala zvolenému kritériu. Nerovnosti (2.44) jsou tak nyní nahrazeny nerovnostmi

$$\mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda|\pi) \geq 0. \quad (5.25)$$

Jako optimální hustota π^* vyhovující uvedeným nerovnostem je zvolena hustota s největší divergencí od neinformativní hustoty $\mathcal{D}(\pi|\pi_C)$,

$$\pi^* = \arg \max_{\pi: \mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda|\pi) \geq 0} \mathcal{D}(\pi|\pi_C) \quad (5.26a)$$

Pro rovnoměrnou neinformativní hustotu, $\pi_C = \pi_U$, přejde maximalizace divergence na minimalizaci entropie $\mathcal{H}(\pi)$,

$$\pi^* = \arg \min_{\pi: \mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda|\pi) \geq 0} \mathcal{H}(\pi) \quad (5.26b)$$

což se kryje s minimalizací determinantu kovarianční matice (2.45) v případě metody sjednocení kovariancí slučující bodové odhady, které jsou ztotožněny s parametry Gaussovy hustoty.

5.2.2 Odvození obecného řešení

Linearita v p je stěžejní vlastností $\mathcal{C}_{\pi_C}(p|\pi)$, která přímo vede k vyvození nutné podmínky na sloučenou hustotu π . Pro váhy $\omega_\lambda, \omega_\lambda > 0, \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda = 1$, totiž vzhledem k linearitě (5.24a) vyplývá z podmínek (5.25) podmínka

$$\mathcal{C}_{\pi_C}\left(\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda p_\lambda|\pi\right) \geq 0 \quad (5.27)$$

říkající, že má-li být sloučená hustota π konzervativní vzhledem ke všem slučovaným hustotám p_λ , musí být zároveň konzervativní vzhledem ke všech jejich směsím. Směsi hustot p_λ , $\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$, budou označeny $\mathcal{M}(p_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+}$, nebo častěji zkráceně $\mathcal{M}(p_\lambda)$.

Nutná podmínka (5.27) jmenovitě tvrdí, že sloučená hustota π musí být konzervativní vzhledem ke směsi, která nabývá nejmenší divergence od neinformativní hustoty a která bude označena jako p^* ,

$$p^* = \arg \min_{p \in \mathcal{M}(p_\lambda)} \mathcal{D}(p \| \pi_C). \quad (5.28a)$$

Pro rovnoměrnou neinformativní hustotu, $\pi_C = \pi_U$, přejde minimalizace divergence na maximalizaci entropie. Sloučená hustota π musí být konzervativní vzhledem ke směsi s maximální entropií opět označené jako p^* ,

$$p^* = \arg \max_{p \in \mathcal{M}(p_\lambda)} \mathcal{H}(p). \quad (5.28b)$$

Ze zavedení konzervativnosti (5.23) a nezápornosti divergence $\mathcal{D}(p^* \| \pi)$ je zřejmé, že pokud má být splněna nutná podmínka (5.27), nesmí být divergence $\mathcal{D}(\pi \| \pi_C)$ větší než $\mathcal{D}(p^* \| \pi_C)$, případně pro $\pi_C = \pi_U$ entropie $\mathcal{H}(\pi)$ menší než $\mathcal{H}(p^*)$. Vzhledem k právě odvozeným závěrům je směs p^* kandidátem na optimální hustotu π^* .

Zbývá tedy dokázat, že směs p^* , $p^* \in \mathcal{M}(p_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+}$, daná (5.28) je konzervativní vzhledem ke svým možným složkám p_λ , to jest i k těm s nulovou vahou ω_λ .

Jestliže směs $\mathcal{M}(p_\lambda)$ obsahuje neinformativní hustotu π_C , pak je řešení $\pi^* = p^*$ triviální. V takovém případě jsou všechny konzervativnosti $\mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda \| \pi^*)$ nulové.

Protože $\mathcal{M}(p_\lambda)$ je konvexní množina, pak pro $\pi_C \notin \mathcal{M}(p_\lambda)$ lze využít Pythagorovu větu pro divergence dostupnou v literatuře, například v [23]. Věta říká, že pro p^* je splněna podmínka (5.27). Čili pro příslušnou volbu vah ω_λ i podmínky (5.25).

Důkaz spočívá v konstrukci směsi $\omega p + (1 - \omega)p^*$, kde $p \in \mathcal{M}(p_\lambda)$, a zkoumání divergence od neinformativní hustoty π_C . Protože pro $\omega = 0$ nabývá divergence $\mathcal{D}(\omega p + (1 - \omega)p^* \| \pi_C)$ díky (5.28) minima, je v $\omega = 0$ derivace nezáporná. Čili

$$0 \leq \left. \frac{d}{d\omega} \mathcal{D}(\omega p + (1 - \omega)p^* \| \pi_C) \right|_{\omega=0} = \int_{\Omega_{p^*}} \{(p - p^*) \ln \frac{[\omega p + (1 - \omega)p^*]_{\omega=0}}{\pi_C} + (p - p^*)\} d\mathbf{x} = \mathcal{C}_{\pi_C}(p \| p^*) \quad (5.29)$$

Protože směs p^* , která je nejbližší směsí od neinformativní hustoty π_C , je konzervativní vzhledem ke svým možným složkám daným slučovanými hustotami p_λ , je směs p^* zároveň hledanou hustotou π^* konzervativní vzhledem k p_λ , která je od neinformativní hustoty π_C nejdále.

Pro případ $\pi_C = \pi_U$ je tedy obdržen zvláštní případ principu maximální entropie. Směs s maximální entropií nabývá mezi vyhovujícími konzervativními hustotami nejmenší možné entropie. Čili řešení (5.26) je dané $\pi^* = p^*$.

Hledání optimální funkce tedy bylo převedeno na hledání optimálních vah ω_λ^* směsi p , $p \in \mathcal{M}(p_\lambda)$. Divergence ani entropie směsí sice nemají uzavřené tvary, ale pro numerické hledání optimálních vah je důležité, že divergence je konvexní a entropie konkávní.

Hledání optimální hustoty p^* nabízí další náhled.

Karushovy–Kuhnovy–Tuckerovy podmínky extrému kromě jiné cesty provedení důkazu, že směs p^* je konzervativní vzhledem k p_λ , poskytují i rozhodnutí, zda nerovnost $\mathcal{C}_{\pi_C}(p^* \| p_\lambda) \geq 0$ je ostrou nerovností nebo rovností. V minimalizaci divergence (5.28a) jsou omezení ve standardním tvaru dána jako $\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\lambda - 1 = 0$ a $-\omega_\lambda < 0$. Pro příslušné multiplikátory μ_λ a ν jsou tedy podmínky pro každé $\lambda, \lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$, dány ve tvaru

$$0 = \frac{d}{d\omega_\lambda} \left\{ \mathcal{D} \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\kappa p_\kappa \| \pi_C \right) + \nu \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\kappa - 1 \right) + \sum_{\kappa \in \mathcal{N}_\ell^+} [\mu_\kappa (-\omega_\kappa)] \right\}_{\omega = \omega_*}, \quad (5.30a)$$

$$0 = \mu_\lambda (-\omega_\lambda^*), \quad (5.30b)$$

$$0 \leq \mu_\lambda, \quad (5.30c)$$

kde zkrácený zápis $\omega = \omega_*$ označuje, že derivace jsou vyhodnoceny v bodech $\omega_\lambda = \omega_\lambda^*$, $\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$.

Rovnice (5.30a) lze dosazením do divergence a derivováním podle váhy ω_λ upravit do tvaru

$$0 = \int_{\Omega_p} [p_\lambda \ln \frac{\sum_{\kappa \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\kappa^* p_\kappa}{\pi_C} + p_\lambda] d\mathbf{x} + \nu - \mu_\lambda \quad (5.31)$$

Po vybrání nějakého řešení ω_λ^* budou indexy takových nerovností, pro něž platí ostrá nerovnost $-\omega_\lambda^* < 0$, dány množinou \mathcal{M} , $\mathcal{M} = \{\lambda : \mu_\lambda = 0\}$. Vynásobením (5.31) vahami ω_λ^* a součtem pro $\lambda \in \mathcal{M}$ jsou obdrženy rovnice

$$0 = \int_{\Omega_p} \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{M}} \omega_\lambda^* p_\lambda \right) \ln \frac{p^*}{\pi_C} d\mathbf{x} + \sum_{\lambda \in \mathcal{M}} \omega_\lambda^* (1 + \nu). \quad (5.32)$$

Protože pro $\lambda_\kappa \notin \mathcal{M}$ díky (5.30b) platí $\omega_{\lambda_\kappa}^* = 0$, musí platit $\sum_{\lambda \in \mathcal{M}} \omega_\lambda^* = 1$, a tedy i $\sum_{\lambda \in \mathcal{M}} \omega_\lambda^* p_\lambda = \sum_{\kappa \in \mathcal{N}_\ell^+} \omega_\kappa^* p_\kappa = p^*$. To znamená, že optimální směs p^* nemusí být dána všemi slučovanými hustotami p_λ . Protože může existovat více řešení ω_λ^* , nejsou složky p_λ dány jednoznačně. Příkladem existence více řešení je případ, kdy některou hustotu p_λ lze vyjádřit jako směs ostatních slučovaných hustot. Na druhou stranu z konvexnosti divergence, respektive konkávnosti entropie, vyplývá, že optimální směs p^* jednoznačná je.

Po odečtení (5.32) od (5.31) je obdržena rovnice

$$0 = \int_{\Omega_p} (p_\lambda - p^*) \ln \frac{p^*}{\pi_C} d\mathbf{x} - \mu_\lambda, \quad (5.33)$$

neboli $\mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda \| p^*) = \mu_\lambda$. Jestliže tedy existuje takové řešení, že $\omega_\lambda^* > 0$, pak hustota hustota p_λ může být vyjádřena jako nenulová složka p^* a multiplikátor μ_λ , který odpovídá konzervativnosti $\mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda \| p^*)$, musí být nulový. Pro ty λ , pro které je vždy $\omega_\lambda^* = 0$, je multiplikátor μ_λ kladný. Nelze-li hustotu p_λ vyjádřit jako nenulovou složku optimální směsi p^* , pak je vzhledem k ní optimální směs p^* ostře konzervativní.

Tím je opět dokázáno, že optimální konzervativní hustota π^* je dána směsí p^* .

5.2.3 Řešení pro disjunktní definiční obory

Hledání optimální směsi p^* vyžaduje vyhodnocení divergence, respektive entropie, směsí. Řešení tudíž v obecném případě nelze nalézt analyticky. V následujícím speciálním případě však postačí vyhodnotit pouze jednotlivé složky.

Nyní je uvažováno, že slučované hustoty p_λ mají disjunktní definiční obory, $\Omega_{p_\ell} \cap \Omega_{p_\lambda} = \emptyset$, $\ell \neq \lambda$. Má-li platit $\mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda \| \pi) \geq 0$, pak musí platit $\Omega_{p_\lambda} \subseteq \Omega_\pi$. Definiční obor konzervativních hustot tedy musí obsahovat sjednocení definičních oborů slučovaných hustot. Pro optimální konzervativní hustotu π^* odpovídající směsi p^* tedy platí $\Omega_{\pi^*} = \cup_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \Omega_{p_\lambda}$, což také znamená, že optimální váhy ω_λ^* nemohou být nulové. Nenulové váhy pak díky (5.30b) a (5.33) znamenají nulovou konzervativnost směsi vzhledem ke slučovaným hustotám.

Z disjunktnosti definičních oborů vyplývá, že v daném stavu je hodnota optimální směsi dána váženou hodnotou příslušné složky,

$$\mathbf{x}_k \in \Omega_{p_\lambda} : p^*(\mathbf{x}) = \omega_\lambda^* p_\lambda(\mathbf{x}). \quad (5.34)$$

Odvozené nulovosti konzervativností $\mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda \| p^*)$ tak lze zapsat jako

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega_{p_\lambda}} (1 - \omega_\lambda^*) p_\lambda(\mathbf{x}) \ln \frac{\omega_\lambda^* p_\lambda(\mathbf{x})}{\pi_C(\mathbf{x})} d\mathbf{x} - \\ & - \sum_{\substack{\kappa \in \mathcal{N}_\ell^+ \\ \kappa \neq \lambda}} \int_{\Omega_{p_\kappa}} (0 + \omega_\kappa^* p_\kappa(\mathbf{x})) \ln \frac{\omega_\kappa^* p_\kappa(\mathbf{x})}{\pi_C(\mathbf{x})} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Protože výraz $(1 - \omega_\lambda^*)$ je roven součtu zbylých vah $\sum_{\kappa \in \mathcal{N}_\ell^+, \kappa \neq \lambda} \omega_\kappa^*$, je možno dalšími úpravami pro každé $\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$ získat rovnici

$$0 = \sum_{\kappa \in \mathcal{N}_\ell^+, \kappa \neq \lambda} \omega_\kappa^* [\mathcal{D}(p_\lambda \| \pi_C) + \omega_\lambda^* - \mathcal{D}(p_\kappa \| \pi_C) - \omega_\kappa^*] \quad (5.36)$$

Protože optimální váhy ω_λ^* musejí být kladné, lze řešení odvozené soustavy nelineárních rovnic najít položením výrazů v hranatých závorkách rovno nule. Neboli musí platit

$$\frac{\omega_\lambda^*}{\omega_\kappa^*} = \frac{\exp(-\mathcal{D}(p_\lambda \| \pi_C))}{\exp(-\mathcal{D}(p_\kappa \| \pi_C))}, \quad (5.37)$$

což přímo vede k nalezení optimálních vah, které jsou nepřímo úměrné exponenciální funkci Kullbackovy–Leiblerovy divergence slučované hustoty p_λ od neinformativní hustoty π_C ,

$$\omega_\lambda^* \propto \exp(-\mathcal{D}(p_\lambda \| \pi_C)). \quad (5.38)$$

V obvyklém speciálním případě $\pi_C = \pi_{\mathcal{U}}$ jsou optimální váhy ω_λ^* přímo úměrné výrazu $\exp(\mathcal{H}(p_\lambda))$, tedy efektivní velikosti definičního oboru Ω_{p_λ} .

I v případě, když jsou definiční obory slučovaných hustot disjunktní, je tedy třeba vyhodnocovat divergence, ale oproti obecnému případu ne nutně divergence směsí. Je-li možno analyticky vyhodnotit divergence jednotlivých slučovaných hustot, pak je nalezené řešení zobecněné metody sjednocení kovariancí dáno v uzavřeném tvaru. Optimální hustota π^* je dána směsí p^* s vahami danými (5.38).

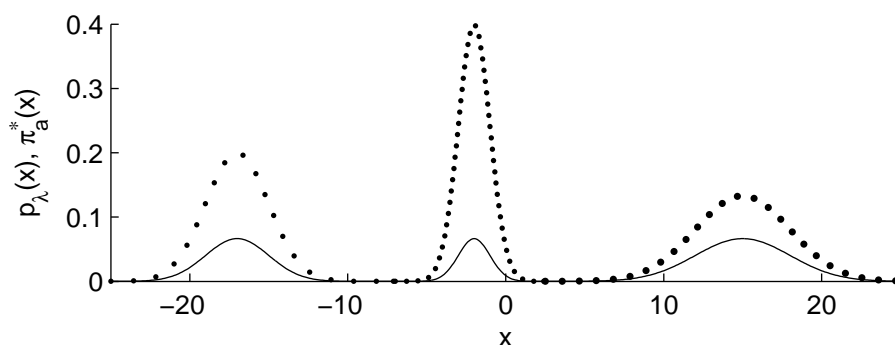
V některých případech je možno tvaru řešení pro disjunktní definiční obory použít k aproximaci optimálního řešení. Například v případě, kdy jsou uvažovány Gaussovy hustoty p_λ , pro jejichž parametry platí $(\hat{\mathbf{x}}_\lambda - \hat{\mathbf{x}}_\kappa)^T (\mathbf{P}_\lambda + \mathbf{P}_\kappa)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_\lambda - \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \gg 1$. Je-li za neinformativní hustotu π_C brána nevlastní rovnoměrná hustota, $\pi_C = \pi_{\mathcal{U}} \propto 1$, pak díky (5.1) přibližně platí $\omega_\lambda^* \propto \sqrt{e^{n_x} [(2\pi)^{\frac{n_x}{2}} (\det \mathbf{P}_\lambda)^{\frac{1}{2}}]}$. Vzhledem k tomu, že výraz

v hranatých závorkách je roven normalizační konstantě Gaussovy hustoty p_λ , je výsledná směs p_a^* , která aproximuje optimální směs p^* , dána součtem exponenciálních členů, které jsou všechny normalizované najednou. Neboli v bodech $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_\lambda$ nabývá směs p_a^* přibližně stejných hodnot.

Na obrázku 5.7 je vykresleno přibližné řešení pro hustoty p_λ dané jako

$$p_1 = \mathcal{N}(-17, 4), \quad p_2 = \mathcal{N}(-2, 1), \quad p_3 = \mathcal{N}(15, 9). \quad (5.39)$$

Hustoty s velkou variancí mají velké efektivní velikosti definičního oboru, a jsou jim proto přisouzeny velké váhy. Přibližné řešení má tedy tvar $p_a^* = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{2}p_3$.



Obrázek 5.7: Hustoty p_λ , $\lambda = 1, 2, 3$ (tečkované čáry) a sloučená hustota p_a^* (plná čára).

5.2.4 Příklad – diskrétní náhodná veličina

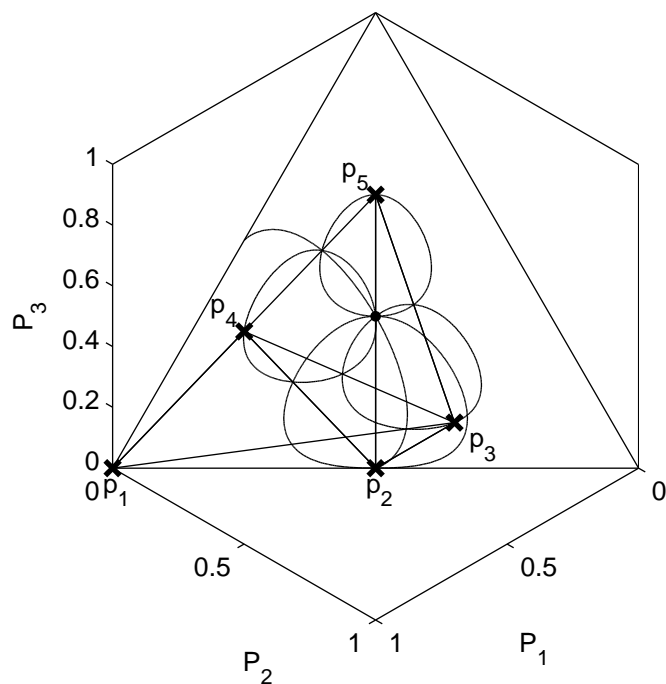
Protože lze konzervativnost hustot pravděpodobnosti přímočaře přenést na konzervativnost pravděpodobnostních funkcí, je možné navržené zobecnění metody sjednocení kovariancí použít i pro diskrétní náhodné veličiny. Uvedený příklad navazuje na příklad v kapitole 5.1.5.

Nechť jsou dány následující pravděpodobnostní funkce p_λ jako $p_1 = [1, 0, 0]^T$, $p_2 = [0.5, 0.5, 0]^T$, $p_3 = [0.3, 0.6, 0.1]^T$, $p_4 = [0.6, 0.1, 0.3]^T$ a $p_5 = [0.2, 0.2, 0.6]^T$. Neinformativní pravděpodobnostní funkce je opět uvažována jako rovnoměrná, $\pi_C = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]^T$.

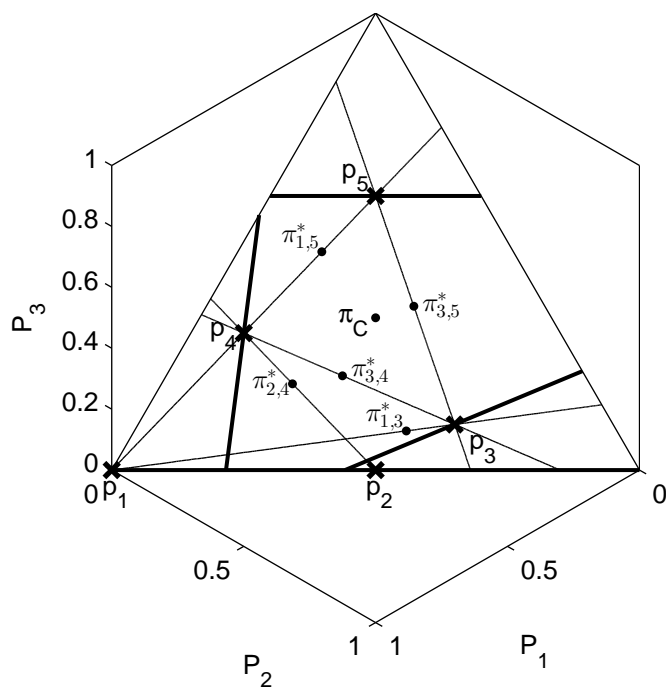
Obrázek 5.8 zachycuje pravděpodobnostní funkce π , které jsou konzervativní vzhledem k jednotlivým p_λ . Z konkávnosti (5.24b) vyplývá, že jsou vymezeny uzavřenými křivkami danými $\mathcal{C}(p_\lambda || \pi) = 0$. Obrázek 5.9 pak zachycuje pravděpodobnostní funkce p , vzhledem k nimž jsou jednotlivé p_λ konzervativní. Tyto p náležejí polorovině vymezené úsečkou $\mathcal{C}(p || p_\lambda) = 0$, přičemž poloroviny neobsahují neinformativní funkci π_C .

Z obrázků lze vyčíst, že p_2 je konzervativní vzhledem k p_1 s nulovou konzervativností $\mathcal{C}(p_1 || p_2)$. Tato nulovost vyplývá z toho, že při omezení se na dva stavy, čili pro $P_3 = 0$, odpovídá p_2 rovnoměrné pravděpodobnostní funkci, která je coby neinformativní pravděpodobnostní funkce univerzálně konzervativní. Dále je vzhledem k p_1 konzervativní p_4 , $\mathcal{C}(p_1 || p_4) > 0$, a vzhledem k p_2 je konzervativní p_3 , $\mathcal{C}(p_2 || p_3) > 0$. Pro všechny ostatní dvojice je konzervativnost záporná.

Je zřejmé, že relace konzervativnosti není tranzitivní. Ačkoliv je p_3 konzervativní vzhledem k p_2 , která je konzervativní vzhledem k p_1 , není p_3 konzervativní vzhledem k p_1 .



Obrázek 5.8: Pravděpodobnostní funkce p_λ (křížky), jejich dvousložkové směsi (úsečky) a pravděpodobnostní funkce π dané $\mathcal{C}(p_\lambda || \pi) = 0$ (uzavřené křivky).



Obrázek 5.9: Pravděpodobnostní funkce p_λ (křížky), $\pi_{\lambda,\kappa}^*$, čili jejich dvousložkové směsi s maximální entropií, (tečky) a pravděpodobnostní funkce p dané $\mathcal{C}(p || p_\lambda) = 0$ (tučné úsečky) a $\mathcal{C}(p || \pi_{\lambda,\kappa}^*) = 0$ (úsečky).

Pravděpodobnostní funkce p_4 je směsí funkcí p_1 a p_5 , což znamená, že stejné směsi tvořené složkami p_1 , p_4 a p_5 mohou být vyjádřené pomocí různých kombinací vah. Jedinou pravděpodobnostní funkcí, která je zároveň konzervativní vzhledem k p_2 a p_5 je neinformativní funkce $\pi_{\mathcal{U}}$. Funkce p_1 je konzervativní pouze vzhledem k sobě, protože nepřipouští žádnou neurčitost.

Pravděpodobnostní funkce π , které jsou konzervativní vzhledem k více funkcím p_λ , jsou dány průnikem oblastí ohraničenými příslušnými uzavřenými křivkami. Je vhodné připomenout, že uzavřené křivky byly přirovnávány k Thaletovým kružnicím. Proto nepřekvapí, že jeden průsečík dvojice křivek odpovídá neinformativní hustotě a druhý leží na úsečce spojující příslušné p_λ a p_κ . Druhý průsečík odpovídá optimální funkci $\pi_{\lambda,\kappa}^*$, která je mezi přípustnými π nejdále od $\pi_{\mathcal{C}}$. Zároveň je $\pi_{\lambda,\kappa}^*$ směsí p_λ , p_κ s maximální entropií, tedy směsí p , která je ve smyslu divergence $\mathcal{D}(p||\pi_{\mathcal{C}})$ nejbližší $\pi_{\mathcal{C}}$.

Jestliže je p_κ konzervativní vzhledem k p_λ , pak $\pi_{\lambda,\kappa}^* = p_\kappa$. Jmenovitě $\pi_{1,2}^* = p_2$, $\pi_{1,4}^* = p_4$ a $\pi_{2,3}^* = p_3$. Z lineární závislosti p_1 , p_4 a p_5 vyplývá možnost různého vyjádření směsi s maximální entropií, $\pi_{1,4,5}^* = \pi_{1,5}^* = \pi_{4,5}^*$, přičemž konzervativnost vzhledem k možným složkám je nulová. Jmenovitě platí $\mathcal{C}(p_1||\pi_{4,5}^*) = 0$. Protože jsou uvažovány pouze tři stavy, $M = 3$, jsou dvousložkové směsi s maximální entropií rovny vícesložkovým směsím s maximální entropií, $\pi_{1,2,3}^* = \pi_{1,3}^*$, $\pi_{1,2,4}^* = \pi_{2,4}^*$, $\pi_{1,2,3,4}^* = \pi_{1,3,4}^* = \pi_{2,3,4}^* = \pi_{3,4}^*$. Konzervativnost vzhledem k nevyužitelným složkám je kladná, $\mathcal{C}(p_2||\pi_{1,3}^*) > 0$, $\mathcal{C}(p_1||\pi_{2,4}^*) > 0$, $\mathcal{C}(p_1||\pi_{3,4}^*) > 0$, $\mathcal{C}(p_2||\pi_{3,4}^*) > 0$.

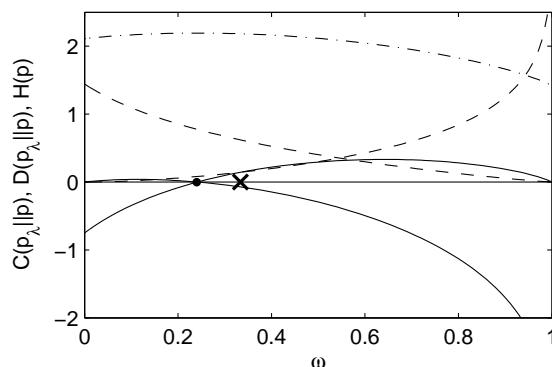
5.2.5 Příklad – Gaussovy hustoty

Následující příklad porovnává přibližné řešení (5.38) s optimálním řešením (5.28b) v případě, kdy jsou uvažovány dvě Gaussovy hustoty, které se značně překrývají.

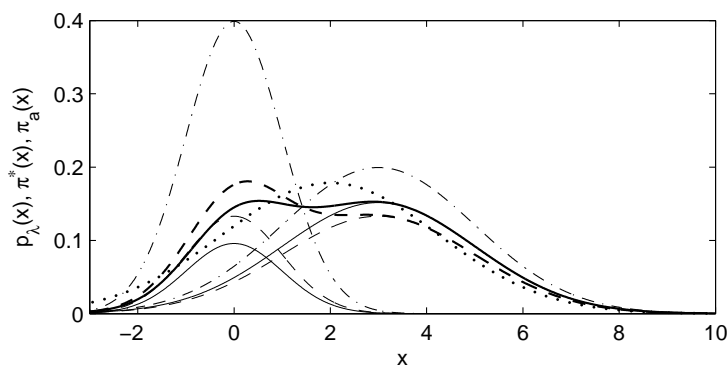
Nechť $p_1 = \mathcal{N}(0, 1)$, $p_2 = \mathcal{N}(3, 4)$ a nechť neinformativní hustota $\pi_{\mathcal{C}}$ je opět rovnoměrná, $\pi_{\mathcal{C}} \propto 1$. Pak přibližné řešení dané předpisem (5.38) má tvar $p_a = \frac{1}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2$, čili $\omega_a = \frac{1}{3}$. Numerickým výpočtem je získána optimální váha ω^* , která je přibližně rovna hodnotě 0.3. Pro porovnání je rovněž vypočteno řešení podle standardního sjednocení kovariancí (2.45), které je dáno Gaussovou hustotou $\mathcal{N}(2, 5)$.

Na obrázku 5.10 je vykreslena konzervativnost směsi p , $p = \omega p_1 + (1 - \omega)p_2$, vzhledem k hustotám p_1 a p_2 , entropie směsi p a divergence $\mathcal{D}(p_1||p)$, $\mathcal{D}(p_2||p)$. Divergence a entropie, a tedy i konzervativnost, byly počítány numericky. Pouze pro $\omega = 0$ a $\omega = 1$ lze použít uzavřené řešení, neboť směs p degeneruje na Gaussovou hustotu p_2 , respektive p_1 . Z konzervativnosti hustot vzhledem k sobě vyplývá $\mathcal{C}(p_2||p_{\omega=0}) = 0$ a $\mathcal{C}(p_1||p_{\omega=1}) = 0$. Pro Gaussovy směsi platí (5.11), a tudíž $\mathcal{C}(p_1||p_{\omega=0}) = -0.75$, $\mathcal{C}(p_1||p_{\omega=1}) = -6$. Z tvaru (5.1) plynou přibližné hodnoty entropie, $\mathcal{H}(p_1) \approx 1.42$, $\mathcal{H}(p_2) \approx 2.11$. Z obrázku je patrné, že směs s maximální entropií je konzervativní vzhledem k p_1 i p_2 , a to s nulovou konzervativností.

Obrázek 5.11 porovnává hustoty p_1 a p_2 se sloučenými hustotami. Jak bylo ukázáno v kapitole 5.2.3, přibližné řešení navrhuje takové ω_a , aby maxima funkcí $\omega_a p_1$ a $(1 - \omega_a)p_2$ byla stejná. Naproti tomu optimální řešení ω^* vede ke směsi, která se celá blíží rovnoměrné hustotě na oblasti, kde jsou hustoty p_1 a p_2 nezanedbatelné. Gaussova hustota získaná standardním sjednocením kovariancí je v tomto případě, kdy jsou slučované Gaussovy hustoty blízké, srovnatelná s optimálním i přibližným řešením zobecněného sjednocení kovariancí.



Obrázek 5.10: Konzervativnost směsi vůči složkám, $\mathcal{C}(p_1||p)$, $\mathcal{C}(p_2||p)$, pro různé váhy ω (plné čáry), divergence $\mathcal{D}(p_1||p)$ a $\mathcal{D}(p_2||p)$ (čárkované čáry) a entropie směsi $\mathcal{H}(p)$ (čerchovaná čára). Optimální váha ω^* (tečka) příslušející směsi s maximální entropií a přibližné řešení ω_a (křížek).



Obrázek 5.11: Hustoty p_1 a p_2 (čerchované čáry), směs s maximální entropií p^* (tučná plná čára) a její složky (plné čáry), přibližné řešení π (tučná čárkovaná čára) a příslušné složky (čárkované čáry). Gaussova hustota daná standardním sjednocením kovariancí (tečkovaná čára).

5.3 Konzervativnost estimátorů

Definice konzervativní hustoty navržená v kapitole 5.1 chápe lokální hustoty pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_k^{(\lambda)})$ poskytované lokálními estimátory E_λ jako hustoty závislé na dané realizaci měření $\mathcal{Z}_k^{(\lambda)}$. Jestliže je kvalita odhadu vyhodnocována před získáním měření, tedy jestliže je vyhodnocováno zobrazení z množiny všech možných hodnot měření do množiny hustot pravděpodobnosti, pak je třeba zavést další definici konzervativnosti.

Nejprve se je třeba ohlédnout za definicí konzervativnosti odhadu ve formě vektoru a matice kvality. V podmínce (2.43) nyní bude použito odpovídající důslednější značení. Odhad $\hat{\mathbf{x}}$ je výslovně značen jako funkce měření \mathbf{z} , matice kvality \mathbf{P} funkcí měření. Kvůli odlišení chápání odhadu jako realizace a odhadu jako funkce je tedy správnější mluvit o konzervativnosti estimátorů. Pro estimátory je podmínka konzervativnosti dána jako

$$\mathbf{P} - \mathbf{E}\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))^T\} \geq 0, \quad (5.40)$$

kde střední hodnota probíhá jak přes stavy \mathbf{x} , tak přes měření \mathbf{z} .

Bohužel, v úloze odhadu stavu dynamického systému je použití této podmínky omezeno na lineární systémy s Gaussovými šumy. Pro nelineární negaussovské systémy žádný standardní filtr, jako je například rozšířený Kalmanův filtr, unscenovaný filtr, částicový filtr nebo filtr Gaussových směsí, neposkytuje nepodmíněnou matici kvality odhadu \mathbf{P} . Standardní filtry poskytují podmíněné matice kvality odhadu $\mathbf{P}(\mathbf{z})$, které jsou v ideálním případě $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = E\{\mathbf{x}|\mathbf{z}\}$ rovny podmíněné kovarianční matici $E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))^T|\mathbf{z}\}$. Nepodmíněná matice kvality odhadu \mathbf{P} je pak dána střední hodnotou podmíněných matic, $\mathbf{P} = E\{\mathbf{P}(\mathbf{z})\}$. Pouze v lineárním gaussovském případě je možno zaměňovat \mathbf{P} a $\mathbf{P}(\mathbf{z})$, protože v tomto případě jsou všechny podmíněné matice $\mathbf{P}(\mathbf{z})$ stejné, a tudíž i rovny nepodmíněné matici \mathbf{P} .

Protože nepodmíněná střední hodnota může být počítána jako střední hodnota podmíněných středních hodnot, může být podmínka konzervativnosti estimátoru (5.40) přepsána do tvaru

$$E\{\mathbf{P}(\mathbf{z}) - E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))^T|\mathbf{z}\}\} \geq 0, \quad (5.41)$$

kde $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ a $\mathbf{P}(\mathbf{z})$ jsou pro dané \mathbf{z} vektor a matice poskytované estimátorem. Vnější střední hodnota probíhá přes měření \mathbf{z} . Vnitřní střední hodnota probíhá přes stavy \mathbf{x} , kde odhad $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ je daný vektor. Čili výraz uvnitř vnější střední hodnoty odpovídá výrazu známému z kapitoly 5.1.

Pro estimátory poskytující podmíněné hustoty $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ by tudíž konzervativní estimátor mohl být definován podmínkou

$$E\{\mathcal{C}_{\pi_C}(p(\mathbf{x}|\mathbf{z})||\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z}))\} \geq 0, \quad (5.42)$$

kde střední hodnota probíhá přes všechna měření \mathbf{z} .

Otázkou zůstává, zda neinformativní hustotu π_C lze libovolně volit, nebo je ji nutno z povahy problému považovat za danou. Jako myslitelný kandidát se například jeví apriorní hustota, $\pi_C = p(\mathbf{x})$.

Podmínku pro střední hodnotu konzervativností (5.42) lze vyjádřit pomocí integrálního tvaru (5.15) jako

$$\int_{\Omega_{\mathbf{z}}} \left\{ \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} (p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})) \ln \frac{\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})}{\pi_C(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right\} p(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \geq 0. \quad (5.43)$$

Člen v logaritmu lze beze změny vnitřního integrálu násobit libovolným kladným číslem nezávislým na \mathbf{x} , čili například hustotou pravděpodobnosti měření $p(\mathbf{z})$. Z podmíněné hustoty $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ je tak obdržena sdružená hustota $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ definovaná vztahem $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})p(\mathbf{z})$. Touto úpravou je získána podmínka

$$\int_{\Omega_{\mathbf{z}}} \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} (p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})p(\mathbf{z})) \ln \frac{\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})p(\mathbf{z})}{\pi_C(\mathbf{x})} d\mathbf{x} d\mathbf{z} \geq 0, \quad (5.44)$$

což není nic jiného než podmínka konzervativnosti sdružené hustoty $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ vzhledem ke sdružené hustotě $p(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Výchozí tvar (5.41) použitý k návrhu definice (5.42) má však mnohé nedostatky, které se projeví v nelineárním negaussovském odhadování. Podmíněná matice kvality $\mathbf{P}(\mathbf{z})$ a střední hodnota stojí v (5.41) odděleně. Konzervativnost estimátoru je tak pouhou nutnou podmínkou rozumnosti poskytovaných odhadů. Pro jednoduchý případ $p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 1$, $0 \leq \mathbf{x}, \mathbf{z} \leq 1$, $\mathbf{x} \leq 2\mathbf{z}$ je podmíněná střední hodnota a podmíněná variance stavu \mathbf{x} rozumným odhadem ($\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}), \mathbf{P}(\mathbf{z})$). Estimátor poskytující odhad $(\mathbf{z}, 1/3\mathbf{z}^2)$

je rozumný a je vyhodnocen jako konzervativní. Estimátor pracující s nepodmíněnou kovariancí chyby, tedy $(\mathbf{z}, 1/6)$ poskytuje variance, které jsou pro naměřené hodnoty \mathbf{z} zbytečně nadhodnocené v případě, když $\mathbf{z} \rightarrow 0$, a pro $\mathbf{z} \rightarrow 1$ naopak podhodnocené. Estimátor poskytující odhady $(\mathbf{z}, 2/3)$ pro $0 \leq \mathbf{z} \leq 1/2$ a $(\mathbf{z}, 0)$ pro $1/2 < \mathbf{z} \leq 1$ je zcela zřejmě nevyhovující, protože pro $1/2 < \mathbf{z} \leq 1$ předstírá naprosto přesné odhady. Přesto však všechny uvedené estimátory jsou z pohledu (5.41) naprosto stejné. Protože standardní filtry místo matice \mathbf{P} poskytují podmíněné matice $\mathbf{P}(\mathbf{z})$, je nutno s konzervativností estimátoru v nelineárním negaussovském odhadování zacházet s velkou opatrností. Podmínka (5.42) je proto pouze nástřelem rozumné definice.

5.3.1 Konzervativnost průniku kovariancí

Poskytnou-li estimátory E_λ , $\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$, konzervativní odhady $(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(\lambda)}), \mathbf{P}(\mathbf{z}^{(\lambda)}))$, pak je možno hledat konzervativní sloučený odhad $(\hat{\mathbf{x}}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F), \mathbf{P}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F))$, kde $\mathbf{z}_F = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+} \mathbf{z}^{(\lambda)}$. Zdánlivě je tedy možno použít metodu průniku kovariancí. Ta však pracuje s nepodmíněnými maticemi kvality lokálních odhadů a poskytuje opět nepodmíněnou matici kvality. Podle vztahů (2.47) jsou slučovány odhady $(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(\lambda)}), \mathbf{P}^{(\lambda)})$ a výsledkem je konzervativní odhad $(\hat{\mathbf{x}}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F), \mathbf{P}_F^{(\ell)})$.

Pro nelineární negaussovské systémy tak při slučování podmíněných matic kvality $\mathbf{P}(\mathbf{z}^{(\lambda)})$ namísto nepodmíněných matic kvality $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ může být pro každou realizaci měření \mathbf{z}_F vybrána jiná optimální váha $\omega_*^{(\ell)}(\mathbf{z}_F)$. Následující protipříklad ukazuje, že výsledný estimátor nemusí být konzervativní ve smyslu (5.41).

Je dána sdružená hustota pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{(1)})$,

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{(1)}) \propto 1, \quad 0 \leq \mathbf{x} \leq 1, 0 \leq \mathbf{z}^{(1)} \leq 1, \min\left(\frac{\mathbf{x}}{a}, \frac{\mathbf{z}^{(1)}}{b}\right) \leq 1, \quad (5.45)$$

kde a, b jsou parametry vymezené nerovnostmi $\frac{1}{2} < a < 1, 0 < b < \frac{1}{3}$. Hustota $p(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{(1)})$ je marginální hustota sdružené hustoty $p(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)})$, která je konstruována jako součin $p(\mathbf{z}^{(1)}|\mathbf{x})p(\mathbf{z}^{(2)}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$, kde hustota $p(\mathbf{z}^{(2)}|\mathbf{x})$ je pro $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{z}^{(2)}$ stejná jako $p(\mathbf{z}^{(1)}|\mathbf{x})$. Neboli pro danou náhodnou veličinu \mathbf{x} jsou příslušná měření $\mathbf{z}^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2$, podmíněně nezávislá. Marginální a podmíněné hustoty měření a stavu jsou nenulové na níže uvedených intervalech,

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{a+b(1-a)} & 0 \leq \mathbf{x} \leq a \\ \frac{b}{a+b(1-a)} & a < \mathbf{x} \leq 1 \end{cases}, \quad p(\mathbf{z}^{(\ell)}|\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \mathbf{x} \leq a, 0 \leq \mathbf{z}^{(\ell)} \leq 1 \\ \frac{1}{b} & a < \mathbf{x} \leq 1, 0 \leq \mathbf{z}^{(\ell)} \leq b \end{cases}, \\ p(\mathbf{z}^{(\ell)}) = \begin{cases} \frac{1}{a+b(1-a)} & 0 \leq \mathbf{z}^{(\ell)} \leq b \\ \frac{a}{a+b(1-a)} & b < \mathbf{z}^{(\ell)} \leq 1 \end{cases}, \quad p(\mathbf{x}|\mathbf{z}^{(\ell)}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \mathbf{z}^{(\ell)} \leq b, 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \\ \frac{1}{a} & b < \mathbf{z}^{(\ell)} \leq 1, 0 \leq \mathbf{x} \leq a \end{cases}, \quad (5.46)$$

Estimátory E_ℓ poskytují odhady $(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(\ell)}), \mathbf{P}(\mathbf{z}^{(\ell)}))$, které se v nelineárním odhadování skládají z podmíněné střední hodnoty a podmíněné variance, čili z konstrukce platí $(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(\ell)}), \mathbf{P}(\mathbf{z}^{(\ell)})) \triangleq (E\{\mathbf{x}|\mathbf{z}^{(\ell)}\}, E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(\ell)}))(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(\ell)}))^T|\mathbf{z}^{(\ell)}\})$, kde

$$(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(\ell)}), \mathbf{P}(\mathbf{z}^{(\ell)})) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right) & 0 \leq \mathbf{z}^{(\ell)} \leq b \\ \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{12}\right) & b < \mathbf{z}^{(\ell)} \leq 1 \end{cases}. \quad (5.47)$$

Vzhledem ke způsobu konstrukce jsou uvedené estimátory konzervativní.

Je-li použita metoda průniku kovariancí (2.47), kde místo nepodmíněných matic kvality odhadu $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ jsou použity podmíněné matice kvality odhadu $\mathbf{P}(\mathbf{z}^{(\lambda)})$, pak sloučený odhad $(\hat{\mathbf{x}}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F), \mathbf{P}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F))$ je dán

$$(\hat{\mathbf{x}}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F), \mathbf{P}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right) & 0 \leq \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq b \\ \left(\frac{1}{2} \frac{\omega a^2 + (1-\omega)a}{\omega a^2 + (1-\omega)}, \frac{1}{12} \frac{a^2}{\omega a^2 + (1-\omega)}\right) & 0 \leq \mathbf{z}^{(1)} \leq b < \mathbf{z}^{(2)} \leq 1 \\ \left(\frac{1}{2} \frac{\omega a + (1-\omega)a^2}{\omega + (1-\omega)a^2}, \frac{1}{12} \frac{a^2}{\omega + (1-\omega)a^2}\right) & 0 \leq \mathbf{z}^{(2)} \leq b < \mathbf{z}^{(1)} \leq 1 \\ \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{12}\right) & b < \min(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq 1 \end{cases}, \quad (5.48)$$

kde funkce max a min jsou maximum, respektive minimum, z hodnot $\mathbf{z}^{(1)}$, $\mathbf{z}^{(2)}$.

Podle (2.30) a (5.46) je sloučená hustota $p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_F)$ dána

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_F) = \begin{cases} \frac{b}{a(b-1)+1} & 0 \leq \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq b, 0 \leq \mathbf{x} \leq a \\ \frac{1}{a(b-1)+1} & 0 \leq \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq b, a < \mathbf{x} \leq 1 \\ \frac{1}{a} & b < \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq 1, 0 \leq \mathbf{x} \leq a \end{cases} \quad (5.49)$$

a centralizovaný odhad je tudíž dán

$$(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}_F), \mathbf{P}(\mathbf{z}_F)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \frac{a^2(b-1)+1}{a(b-1)+1}, \frac{1}{12} \frac{(a^4b - (a-1)^4)(b-1)+b}{(a(b-1)+1)^2}\right) & 0 \leq \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq b \\ \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{12}\right) & b < \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq 1 \end{cases}. \quad (5.50)$$

Čili při fúzi pomocí průniku kovariancí (2.47), kde váha ω je vybrána pomocí (2.48), jsou v uvažovaném případě získány odhady shodující se s centralizovanými, vyjma případu $0 \leq \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq b$. Pro shodné odhady je výraz uvnitř střední hodnoty (5.41) nulový. Výpočtem lze ukázat, že existují takové hodnoty parametrů a , b , pro které je v případě $0 \leq \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq b$ sloučený odhad nekonzervativní vzhledem k centralizovanému odhadu, neboli pro které je výraz uvnitř střední hodnoty (5.41) záporný. Například pro $a = 0.8$, $b = 0.2$ platí $\mathbf{P}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F) - \mathbf{P}(\mathbf{z}_F) - (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}_F) - \hat{\mathbf{x}}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F))^2 = -\frac{8}{225}$.

Obdobně lze ukázat, že ani pro pevně zvolenou váhu ω nemusí být sloučený odhad konzervativní ve smyslu (5.41). Lze použít sdruženou hustotu měření $\mathbf{z}^{(1)}$, $\mathbf{z}^{(2)}$, která je rovna

$$p(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) = \begin{cases} \frac{a(b-1)+1}{ab+b^2(1-a)} & 0 \leq \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq b \\ \frac{a}{a+b(1-a)} & b < \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq 1 \end{cases}, \quad (5.51)$$

a dále pokračovat ve výpočtu. Pro uvedený příklad $a = 0.8$, $b = 0.2$ je střední hodnota (5.41) přibližně rovna hodnotě -0.0186 pro $\omega = 0$ i pro $\omega = 0.5$.

Kdyby estimátory E_ℓ poskytovaly nepodmíněné kovarianční matice $\mathbf{P}^{(\ell)}$, pak by lokální odhady a odhad získaný průnikem kovariancí (2.47) byly dány

$$(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(\ell)}), \mathbf{P}^{(\ell)}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12} \frac{b+a^3(1-b)}{b+a(1-b)}\right) & 0 \leq \mathbf{z}^{(\ell)} \leq b \\ \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{12} \frac{b+a^3(1-b)}{b+a(1-b)}\right) & b < \mathbf{z}^{(\ell)} \leq 1 \end{cases}, \quad (5.52)$$

$$(\hat{\mathbf{x}}^{(\ell)}(\mathbf{z}_F), \mathbf{P}_F^{(\ell)}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12} \frac{b+a^3(1-b)}{b+a(1-b)}\right) & 0 \leq \max(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq b \\ \left(\frac{\omega+(1-\omega)a}{2}, \frac{1}{12} \frac{b+a^3(1-b)}{b+a(1-b)}\right) & 0 \leq \mathbf{z}^{(1)} \leq b < \mathbf{z}^{(2)} \leq 1 \\ \left(\frac{\omega a + (1-\omega)}{2}, \frac{1}{12} \frac{b+a^3(1-b)}{b+a(1-b)}\right) & 0 \leq \mathbf{z}^{(2)} \leq b < \mathbf{z}^{(1)} \leq 1 \\ \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{12} \frac{b+a^3(1-b)}{b+a(1-b)}\right) & b < \min(\mathbf{z}^{(\lambda)})_{\lambda=1}^2 \leq 1 \end{cases}. \quad (5.53)$$

Pro pevně zvolenou váhu ω , $0 \leq \omega \leq 1$, je výsledný estimátor konzervativní. Je třeba upozornit, že ani když jsou matice $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(2)}$ stejné, nelze volit váhu ω libovolně na základě odhadů. Pokud by například bylo voleno $\omega = 1$ pro $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(1)}) = \frac{1}{2}$, $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(2)}) = \frac{a}{2}$ a $\omega = 0$ bylo voleno v případech $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(1)}) = \frac{a}{2}$, $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^{(2)}) = \frac{1}{2}$, byl by výsledný estimátor nekonzervativní.

Uvedený příklad potvrzuje, že zobecnění metody průniku kovariancí (2.47) na vážený geometrický průměr hustot (2.51) byl velmi heuristický krok. Zatímco první metoda používá nepodmíněné matice kvality odhadu, průměr hustot je bezpochyby svázán s podmíněnými maticemi. Aby si pravidla fúze odpovídala, nestačila by Gaussovost slučovaných podmíněných hustot pravděpodobnosti. Přinejmenším by bylo třeba, aby podmíněné hustoty měly stejné kovarianční matice.

Dále je zřejmý velmi volný přechod od podmínky konzervativního bodového estimátoru (5.41) k podmínce konzervativnosti (5.42) vztažené k estimátoru poskytujícímu hustoty. Je-li rovnoměrná hustota $\pi_{\mathcal{U}}$ pro $0 \leq \mathbf{x} \leq 1$ pokládána za neinformativní hustotu $\pi_{\mathcal{C}}$, pak jsou ve výše uvedeném příkladě všechny estimátory konzervativní. Geometrický průměr rovnoměrných hustot $p(\mathbf{x}|\mathbf{z}^{(\ell)})$ je totiž opět rovnoměrná hustota. Výrazy uvnitř středních hodnot (5.41), (5.42) nejsou ekvivalentní ani pro jednorozměrné podmíněné Gaussovy hustoty. Je-li však sebehodnocení kvality odhadu $\mathbf{P}(\mathbf{z})$ konstantní pro všechna \mathbf{z} , pak jsou výrazy přímo úměrné.

5.4 Shrnutí

V kapitole 5 byla zavedena definice konzervativnosti dané hustoty vzhledem k jiné hustotě a následně byla tato definice použita ke zobecnění metody sjednocení kovariancí.

Navržená definice vychází z konzervativnosti bodových odhadů a je založena na informačních mírách. Hustota π je konzervativní vzhledem k hustotě p , pokud nepřesnost π není větší než její neurčitost. Následně byla stanovena postačující podmínka konzervativnosti. Z konstrukce definice konzervativnosti hustot vyplývá, že jednorozměrné Gaussovy hustoty jsou hustoty konzervativní právě tehdy, když jsou konzervativní příslušné odhady. Ve vícerozměrném případě z konzervativnosti odhadů vyplývá konzervativnost Gaussových hustot. Dále bylo ukázáno, že konzervativnost je invariantní vůči lineární změně souřadnic.

Navržená definice byla dále zobecněna. Po stanovení neinformativní hustoty $\pi_{\mathcal{C}}$, která je svázána s vybraným souřadným systémem, je konzervativnost definována pomocí Kullbackových–Leiblerových divergencí. Zobecněná definice je invariantní i vůči nelineárním transformacím souřadnic a je dána nerovností, kde hraniční rovnost je zobecnění Pythagorovy věty. Následně bylo ukázáno, že hustoty získané exponenciálním i lineárním zapomináním, tedy váženým geometrickým a aritmetickým průměrem hustot p a $\pi_{\mathcal{C}}$, jsou konzervativní vzhledem k p . Výhodou navržené definice je použitelnost jak na hustoty pravděpodobnosti, tak i na pravděpodobnostní funkce náležející diskrétním náhodným veličinám. Na druhou stranu je na příkladě ilustrováno, že nelze konstruovat konzervativní směsi pomocí jednotlivě konzervativních složek.

Zobecněná definice umožňuje jednoduché geometrické přirovnání. Hustoty konzervativní vzhledem k p leží uvnitř Thaletovy kružnice sestavené nad průměrem $p\pi_{\mathcal{C}}$. Naopak, hustoty, vzhledem k nimž je hustota p konzervativní, leží v té polorovině dané tečnou Thaletovy kružnice v bodě p , která neobsahuje neinformativní hustotu $\pi_{\mathcal{C}}$.

Po zavedení definice konzervativnosti hustot bylo provedeno zobecnění metody sjednocení kovariancí. Úkolem je nalézt takové hustoty π , které jsou konzervativní vzhledem ke všem slučovaným hustotám p_λ , a z nich vybrat takovou hustotu π^* , která je nejdále od neinformativní hustoty π_C . V případě rovnoměrné neinformativní hustoty je tedy vybírána hustota s nejmenší entropií. Optimálním řešením je taková směs hustot p_λ , která je mezi danými směsmi nejbližší neinformativní hustotě π_C . Ve zmíněném speciálním případě je tedy řešením směs s maximální entropií, neboli byl nalezen zvláštní případ principu maximální entropie.

Vzhledem k minimalizaci divergence hustot, případně maximalizaci entropie směsi, nejsou váhy optimální směsi dány v uzavřeném tvaru. Optimální řešení je tedy nutno hledat numericky. Výjimkou je případ, kdy slučované hustoty p_λ mají disjunktní definiční obory a kdy lze informační míry vyhodnotit pro jednotlivé složky samostatně. Pak jsou optimální váhy dány pomocí informačních měr složek. Pro rovnoměrnou neinformativní hustotu jsou optimální váhy úměrné efektivní velikosti definičního oboru příslušné složky. V případě, kdy se nepřekrývají oblasti, kde hustoty p_λ nabývají nezanedbatelných hodnot, lze použít uvedený uzavřený tvar k aproximaci optimálního řešení.

V závěrečné části byly provedeny úvahy o dalším využití navržené definice, která přiřazuje konzervativnost dvojici hustot. Jmenovitě o využití v návrhu definice konzervativnosti estimátoru poskytujícího hustoty pravděpodobnosti $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})$. Tato konzervativnost by mohla být definována jako střední hodnota konzervativnosti hustot $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ vzhledem k aposteriorním hustotám $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$, což je ekvivalentní konzervativnosti hustoty $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, definované jako $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \triangleq \pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})p(\mathbf{z})$, vzhledem ke sdružené hustotě $p(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Zároveň bylo poukázáno na nedostatek definice konzervativnosti bodových estimátorů, neboť nelineární filtry poskytují podmíněné matice kvality odhadu $\mathbf{P}(\mathbf{z})$, nikoliv jejich střední hodnoty \mathbf{P} . Na příkladě pak bylo předvedeno, že použití matic kvality odhadu v předpisu fúze pomocí průniku kovariancí nezaručuje konzervativnost centrálního estimátoru.

Hlavní výsledky kapitoly 5 jsou shrnuty následovně.

1) Byla navržena definice konzervativnosti (*Definice 3*): Je-li dána neinformativní hustota π_C , pak hustota π je konzervativní vzhledem k hustotě p_λ právě tehdy, když platí

$$\mathcal{D}(p_\lambda || \pi_C) - \mathcal{D}(\pi || \pi_C) - \mathcal{D}(p_\lambda || \pi) \geq 0.$$

2) Byla formulována úloha zobecňující fúzi pomocí sjednocení kovariancí: Je hledána taková hustota π , která by byla konzervativní vzhledem ke všem slučovaným hustotám p_λ , $\lambda \in \mathcal{N}_\ell^+$. Jako optimální hustota π^* vyhovující uvedeným nerovnostem je zvolena hustota s největší divergencí od neinformativní hustoty $\mathcal{D}(\pi || \pi_C)$,

$$\pi^* = \arg \max_{\pi: \mathcal{C}_{\pi_C}(p_\lambda || \pi) \geq 0} \mathcal{D}(\pi || \pi_C).$$

3) Bylo nalezeno řešení nově formulované úlohy: Optimální hustota π^* je rovna směsi p^* , jejíž složky jsou dány hustotami p_λ , a to takové směsi, která nabývá nejmenší divergence od neinformativní hustoty,

$$p^* = \arg \min_{p \in \mathcal{M}(p_\lambda)} \mathcal{D}(p || \pi_C).$$

Kapitola 6

Závěr

Disertační práce se zabývala informační fúzí, jmenovitě fúzí hustot pravděpodobnosti v odhadu stavu stochastických systémů. Vedle rozvoje částicových filtrů a fúze částic bylo navrženo zobecnění konzervativnosti.

V úvodu práce bylo na velmi obecné úrovni představeno členění informační fúze na slučování nezávislých informací, na odečítání společné informace s následným slučováním nezávislých informací a na respektování neznámé společné informace. Toto členění se projevilo v odhadu stavu systému pomocí více estimátorů. Zvláštní pozornost byla věnována respektování neznámé společné informace, příslušná fúze byla označena jako konzervativní. Další částí fúze bylo využití kontextu, v případě úloh odhadu reprezentované odhadováním s omezením. Jako hlavní nástroj k řešení nelineárních negaussovských úloh byl představen částicový filtr.

Hlavními cíli disertační práce byl stanoven výzkum v oblasti nelineárních estimátorů a v oblasti konzervativní fúze. Pro nelineární estimátory, jmenovitě částicové filtry, bylo třeba návrh vzorků a výpočet vah přizpůsobit požadavkům fúze hustot pravděpodobnosti, a to včetně fúze v úlohách s omezením. Následně bylo třeba provést samotnou fúzi hustot reprezentovaných danými částicemi. V oblasti konzervativní fúze hustot bylo cílem zobecnit fúzi bodových odhadů.

6.1 Výsledky práce

Cíli číslo 1, 2 a 3, tedy částicovými filtry, se zabývala kapitola 4.

V kapitole 4.1 byl z velké části vyřešen cíl číslo 1. Nejprve byl vyložen význam omezení z pohledu hustot pravděpodobnosti. Využití pseudoměření odpovídá použití dodatečné informace, čili se jedná o další podmiňování neomezených aposteriorních hustot. Porušení omezení je chápáno jako špatné modelování hustot pravděpodobnosti. Naproti tomu využití průmětu může být vykládáno jako úprava aproximace. V úlohách odhadu s omezením daným rovností má tato úprava přijatelnou interpretaci jako marginalizace přes nadbytečné proměnné. Z tohoto úhlu pohledu je porušení omezení chápáno jako chybné rozprostření hustoty pravděpodobnosti do prostoru vyšší dimenze.

Dále se kapitola 4.1 zabývala architekturou fúze v úlohách s omezením. Byly zde představeny a diskutovány případy, kdy je omezení vynucováno pouze v centrálním estimátoru nebo i v lokálních estimátorech, či kdy jsou slučovány omezené nebo neomezené odhady. Zvláštní pozornost byla věnována omezení rovností v částicových filtrech. Bylo

navrženo jak omezení podmíněním, tak omezení marginalizací, přičemž byl důsledně dodržován význam částic jako vážených vzorků.

V kapitole 4.2 bylo nejprve poukázáno na hlavní překážku k využití částic ve fúzi hustot pravděpodobnosti. K odstranění poloviny této překážky, jíž je přiřazování vah trajektoriím stavů, nikoliv pouze jednomu stavu, lze použít marginální částicový filtr. Dále byla navržena úprava marginalizovaného částicového filtru, což je výpočetně efektivní varianta částicového filtru, jejímž cílem opět bylo odstranit závislost vah na minulých částech trajektorií stavu. V rámci marginalizovaných filtrů byly uvažovány systémy s podmíněně lineární částí, kde standardní předpoklad Gaussovy počáteční podmínky a Gaussových šumů byl rozšířen na Gaussovy směsi. Výsledný filtr naplnil cíl disertační práce číslo 2.

Navržená řešení byla využita v kapitole 4.3 zaměřené na fúzi hustot pravděpodobnosti, tedy na cíl číslo 3. Nejprve byly diskutovány kvaziaritmetické průměry hustot a jejich použití ve fúzi. Zvláštní pozornost pak byla upřena na speciální případy mocninných průměrů, na aritmetický a geometrický průměr. Geometrický průměr, v literatuře navržený jako vhodný kandidát na konzervativní fúzi, byl podpořen interpretací jako optimální řešení vážených divergencí lokálních hustot od sloučené hustoty.

Hlavní náplní kapitoly 4.3 pak bylo navržení fúze částic v odhadu stavu dynamických stochastických systémů. K překonání druhé poloviny hlavní překážky, jíž je rozdílnost vzorků náležejících jednotlivým lokálním částicím, bylo navrženo odložení fúze do následujícího času. Využití znalosti systému, jmenovitě popisu stavového šumu, umožňuje zachovat rámec částicových filtrů, bez nutnosti odhadovat hustoty pomocí jiných metod, v nichž je třeba heuristicky volit parametry. V praktických úlohách navíc nemusí být odložení fúze příliš umělým krokem. Pro příklad lze uvést asynchronně pracující estimátory či přenos částic se zpožděním. Částice v následujícím čase jsou získány pomocí marginálních částicových filtrů, přičemž pro všechny lokální částice jsou použity stejné vzorky. Rozdílnost lokálních hustot se tudíž projeví pouze odlišností lokálních vah. Návrh společné vzorkovací hustoty byl diskutován, vhodnou vzorkovací hustotou může být například směs lokálních hustot. Tímto bylo dosaženo první poloviny cíle číslo 3.

Dále bylo v kapitole 4.3 ukázáno, že jsou-li lokální hustoty reprezentovány různými vahami ve stejných vzorcích, pak lze fúzi hustot pomocí mocninných průměrů převést na mocninné průměry vah. Fúze částic poskytovaných marginálními marginalizovanými částicovými filtry byla pouze nastíněna, nalezenými překážkami je průměr Gaussových směsí a vyhodnocení kritéria. Fúze částic v úlohách s omezením byla poskládána z již diskutovaných kroků. Pro omezení rovností bylo diskutováno možné řazení kroků, v případě omezení oříznutím mohlo být omezení zařazeno pouze před fúzi do kroku návrhu vzorkovací hustoty. Rozborem fúze v úlohách s omezením byl završen cíl číslo 1, převedením fúze hustot na fúzi vah byl naplněn cíl číslo 3.

Dalšímu cíli disertační práce, cíli číslo 4, jímž je zobecnění konzervativnosti, byla věnována kapitola 5.

Nejprve byla v kapitole 5.1 připomenuta konzervativnost bodových odhadů ve smyslu používaném v metodě sjednocení kovariancí. Je-li odhad chápán jako daná realizace, pak konzervativnost odhadu je vyhodnocena na základě podmíněné střední hodnoty, kde podmínkou je daná realizace měření. Konzervativnost hustot pravděpodobnosti tedy musí být vztažena vzhledem k nějaké hustotě, přičemž tato hustota odpovídá pro dané měření skutečné aposteriorní hustotě. Z požadavku ekvivalentnosti konzerva-

tivnosti jednorozměrných Gaussových hustot s konzervativností bodových odhadů založených na parametrech daných hustot vyplynul návrh definice konzervativnosti hustoty vzhledem zadané hustotě. Tím byla splněna první polovina cíle číslo 4.

Navržená definice konzervativnosti hustot je založena na informačních mírách a oplývá řadou snadno srozumitelných interpretací a žádoucích vlastností. Z významných vlastností lze jmenovat invariantnost obecné definice vůči nelineárním změnám souřadného systému či použitelnost pro diskrétní náhodné veličiny. Navržené zobecnění definice navíc vyžaduje stanovení takové hustoty pravděpodobnosti, která je považována za neinformativní. Z navržené definice byla rovněž vyvozena postačující podmínka konzervativnosti hustoty vzhledem k zadané hustotě.

V kapitole 5.2 byla navržená definice konzervativnosti hustot využita ke zobecnění metody sjednocení kovariancí. Po stanovení divergence sloučené hustoty od neinformativní hustoty jako kritéria k maximalizaci bylo odvozeno řešení pro obecné hustoty. Optimální řešení je dané takovou směsí slučovaných hustot, neboli jejich aritmetickým průměrem, která mezi všemi uvažovanými směsmi nabývá nejmenší divergence od neinformativní hustoty. Je-li za neinformativní hustotu zvolena rovnoměrná hustota, pak maximalizace divergence přejde na minimalizaci entropie a optimální řešení je dané směsí s maximální entropií. Při zobecnění metody sjednocení kovariancí byl tedy objeven jistý druh zažitého principu maximální entropie. Pro speciální případ bylo dále odvozeno řešení v uzavřeném tvaru. Obecně lze konstatovat, že převedením hledání optimální funkce na hledání optimálních parametrů bylo dosaženo i druhé poloviny cíle číslo 4.

Kapitola 5.3 se zabývala konzervativností estimátorů. Bodové odhady byly chápány jako funkce měření a vyhodnocovány ustředněním přes všechny možné realizace měření. Tento pohled je používán v metodě průniku kovariancí. Vzhledem ke skutečnosti, že standardní nelineární filtry poskytují podmíněné matice kvality odhadu namísto nepodmíněných, bylo ukázáno na nedostatky stávající definice. Z možné nápravy vyplynul návrh definice konzervativnosti estimátorů poskytujících hustoty pravděpodobnosti. Konzervativnost může být vyhodnocována ze střední hodnoty výše definovaných konzervativností hustot vzhledem k příslušné podmíněné hustotě. Definice pro hustoty a bodové odhady se však překrývají na velmi úzké třídě hustot, navíc konzervativnost byla vzhledem ke střednění přes všechna měření spíše nutnou podmínkou rozumnosti odhadů. Dále bylo ukázáno, že metodu průniku kovariancí nelze přenést na odhady poskytované standardními nelineárními filtry. Vážený geometrický průměr hustot tak zůstal podpořen pouze dříve uvedeným pohledem jako optimální řešení pro kritérium dané vážením divergencí.

6.2 Otevřené otázky

Ve fúzi částic zůstaly oblasti, kterým by měla být v budoucnu věnována další pozornost. Otevřenou otázkou například zůstává návrh vhodné společné vzorkovací hustoty. Jako kandidát byla navržena Gaussova hustota získaná metodou sjednocení kovariancí, případně směs lokálních hustot, ale nebyly zkoumány podmínky, za kterých tyto hustoty poskytují vzorky, jež poslouží k dobré aproximaci sloučené hustoty. Při hledání optimálních vah průměru hustot by navíc vzorky měly být vhodné pro všechny možné sloučené hustoty zároveň.

Dalším směrem budoucího výzkumu je fúze částic poskytovaných marginálními marginalizovanými filtry. Jak již bylo uvedeno, je třeba najít analytické aproximace průměru Gaussových směsí a vyhodnotit příslušné informační míry.

Co se týče konzervativního odhadování, je výběr směru budoucího výzkumu velmi široký. Nově zvažovaná konzervativnost estimátorů poskytujících hustoty pravděpodobnosti stojí na samém prahu. Lze se zabývat stávajícími pravidly pro fúzi z pohledu navržené definice. Je také možno navrhnout a zkoumat jinak definované konzervativnosti.

Ze zcela odlišných oblastí úloh odhadu, kterými je vhodné se zabývat, lze jmenovat například fúzi v rozlehlých systémech [48, 56]. Zatímco v disertační práci je uvažováno odhadování celého stavu pomocí více estimátorů, v systémech o velké dimenzi je třeba navíc uvažovat, že estimátory odhadují pouze nepatrnou část stavu. Kromě úloh odhadu je též možno zabývat se například fúzí v úlohách rozhodování.

Literatura

- [1] J. Ajgl and M. Šimandl. Multisensor constrained estimation with unscented transformation. In *Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion*, Edinburgh, UK, July 2010.
- [2] J. Ajgl and M. Šimandl. Differential entropy estimation by particles. In *18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, August–September 2011.
- [3] J. Ajgl and M. Šimandl. Particle based probability density fusion with differential Shannon entropy criterion. In *Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion*, Chicago, IL, USA, July 2011.
- [4] J. Ajgl and M. Šimandl. Conservative merging of hypotheses given by probability densities. In *Proceedings of the 15th International Conference on Information Fusion*, Singapore, July 2012.
- [5] J. Ajgl and M. Šimandl. Marginal marginalised particle filter. In *2013 American Control Conference*, Washington, DC, USA, June 2013. přijato.
- [6] D. Alspach and H. Sorenson. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(4):439–448, August 1972.
- [7] Y. Bar-Shalom and W. D. Blair, editors. *Multitarget-Multisensor Tracking: Application and Advances*, volume III. Artech House, 2000.
- [8] Y. Bar-Shalom and L. Campo. The effect of the common process noise on the two-sensor fused-track covariance. *IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems*, 22(6):803–805, November 1986.
- [9] Y. Bar-Shalom, X.-R. Li, and T. Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. Wiley, 2001.
- [10] Y. Bar-Shalom, P. K. Willet, and X. Tian. *Tracking and Data Fusion: A Handbook of Algorithms*. YBS Publishing, 2011.
- [11] T. M. Berg and H. F. Durrant-Whyte. Distributed and decentralized estimation. In *SICICI '92 proceedings*, volume 2, pages 1118–1123, February 1992.
- [12] S. Blackman and R. Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artech House, 1999.

- [13] O. Bocharde, R. Calhoun, J. K. Uhlmann, and S. J. Julier. Generalized information representation and compression using covariance union. In *Proceedings of the 9th International Conference on Information Fusion*, Florence, Italy, July 2006.
- [14] S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, and D. Shah. Randomized gossip algorithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(6):2508–2530, June 2006.
- [15] T. Bréhard and J.-P. Le Cadre. Distributed target tracking for nonlinear systems: Application to bearings-only tracking. In *Proceedings of the 8th International Conference on Information Fusion*, pages 77–84, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June–July 2005.
- [16] O. Cappé, S. J. Godsill, and E. Moulines. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo. *Proceedings of the IEEE*, 95(5):899–924, May 2007.
- [17] K.-C. Chang, R. K. Sahat, and Y. Bar-Shalom. On optimal track-to-track fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(4):1271–1276, October 1997.
- [18] H. Chen, T. Kirubarajan, and Y. Bar-shalom. Performance limits of track-to-track fusion versus centralized estimation: Theory and application. *IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems*, 39(2):386–400, April 2003.
- [19] L. Chen, P. O. Arambel, and R. K. Mehra. Estimation under unknown correlation: Covariance intersection revisited. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 47(11):1879–1882, 2002.
- [20] C.-Y. Chong and S. Mori. Convex combination and covariance intersection algorithms in distributed fusion. In *Proceedings of the 4th International Conference on Information Fusion*, Montréal, Québec, Canada, August 2001.
- [21] C.-Y. Chong and S. Mori. Graphical models for nonlinear distributed estimation. In *Proceedings of the 7th International Conference on Information Fusion*, Stockholm, Sweden, June–July 2004.
- [22] C.-Y. Chong, S. Mori, K.-C. Chang, and B. W. H. Architectures and algorithms for track association and fusion. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Information Fusion*, Sunnyvale, California, USA, July 1999.
- [23] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley, second edition, 2006.
- [24] S. Das. *High-Level Data Fusion*. Artech House, 2008.
- [25] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, editors. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Statistics for Engineering and Information Science. Springer, 2001.
- [26] A. Doucet, N. de Freitas, K. Murphy, and S. Russell. Rao-Blackwellised particle filtering for dynamic Bayesian networks. In *Proceedings of the 16th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 176–183, Stanford, California, USA, June–July 2000.

- [27] K. Fan. Minimax theorems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 39(1):42–47, 1953.
- [28] W. J. Farrell and C. Ganesh. Generalized Chernoff fusion approximation for practical distributed data fusion. In *Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion*, Seattle, Washington, USA, July 2009.
- [29] D. Fränken and A. Hüpper. Improved fast covariance intersection for distributed data fusion. In *Proceedings of the 8th International Conference on Information Fusion*, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June–July 2005.
- [30] J. D. Geeter, H. V. Brussel, and J. D. Schutter. A smoothly constrained Kalman filter. *IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Learning*, 19(10):1171–1177, October 1997.
- [31] S. Grime and H. F. Durrant-Whyte. Data fusion in decentralized sensor networks. *Control Engineering Practice*, 3(5):849–863, 1994.
- [32] N. Gupta and R. Hauser. Kalman filtering with equality and inequality state constraints. Technical Report NA-07/18, Oxford University Computing Laboratory, Oxford, UK, August 2007.
- [33] D. L. Hall and S. A. H. McMullen. *Mathematical Techniques in Multisensor Data Fusion*. Artech House, second edition, 2004.
- [34] U. D. Hanebeck and K. Briechle. New results for stochastic prediction and filtering with unknown correlations. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, pages 85–90, Baden-Baden, Germany, August 2001.
- [35] U. D. Hanebeck, K. Briechle, and J. Horn. A tight bound for the joint covariance of two random vectors with unknown but constrained cross-correlation. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, pages 147–152, Baden-Baden, Germany, August 2001.
- [36] H. R. Hashemipour, S. Roy, and A. J. Laub. Decentralized structures for parallel Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(1):88–94, January 1988.
- [37] M. B. Hurley. An information theoretic justification for covariance intersection and its generalization. In *Proceedings of the 5th International Conference on Information Fusion*, Annapolis, Maryland, USA, July 2002.
- [38] S. J. Julier. The scaled unscented transformation. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4555–4559, 2002.
- [39] S. J. Julier. An empirical study into the use of Chernoff information for robust, distributed fusion of Gaussian mixture models. In *Proceedings of the 9th International Conference on Information Fusion*, Florence, Italy, July 2006.

- [40] S. J. Julier. Estimating and exploiting the degree of independent information in distributed data fusion. In *Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion*, Seattle, Washington, USA, July 2009.
- [41] S. J. Julier, T. Bailey, and J. K. Uhlmann. Using exponential mixture models for suboptimal distributed data fusion. In *Proceedings of the 2006 IEEE Nonlinear Statistical Signal Processing Workshop*, pages 160–163, Cambridge, UK, September 2006.
- [42] S. J. Julier and J. J. LaViola. On Kalman filtering with nonlinear equality constraints. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(6):2774–2784, 2007.
- [43] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. *Handbook of multisensor data fusion*, chapter General Decentralized Data Fusion with Covariance Intersection. CRC Press, 2001.
- [44] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. Fusion of time delayed measurements with uncertain time delays. In *Proceedings of the American Control Conference 2005*, pages 4028–4033, Portland, Oregon, USA, June 2005.
- [45] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A new approach for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):477–482, March 2000.
- [46] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and D. Nicholson. A method for dealing with assignment ambiguity. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 4102–4107, Boston, Massachusetts, USA, June–July 2004.
- [47] R. Kandepu, L. Imsland, and B. A. Foss. Constrained state estimation using the unscented Kalman filter. In *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1453–1458, Ajaccio, France, June 2008.
- [48] U. A. Khan and J. M. F. Moura. Distributing the Kalman filter for large-scale systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(10):4919–4935, October 2008.
- [49] M. Klaas, N. de Freitas, and A. Doucet. Toward practical N^2 Monte Carlo: the marginal particle filter. In *Proceedings of the 21st Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 308–315, Arlington, Virginia, USA, 2005.
- [50] S. Ko and R. R. Bitmead. State estimation for linear systems with state equality constraints. *Automatica*, 43(8):1363–1368, 2007.
- [51] R. Kulhavý and F. J. Kraus. On duality of regularized exponential and linear forgetting. *Automatica*, 32(10):1403–1415, October 1996.
- [52] D.-J. Lee. Nonlinear estimation and multiple sensor fusion using unscented information filtering. *IEEE Signal Processing Letters*, 15:861–864, 2008.
- [53] S. H. Lee and V. Shin. Fusion filters weighted by scalars and matrices for linear systems. In *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*. WASET, 2007.

- [54] X.-R. Li, Y. Zhu, J. Wang, and C. Han. Optimal linear estimation fusion—part i: Unified fusion rules. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(9):2192–2208, September 2003.
- [55] R. C. Luo and M. G. Kay. Multisensor integration and fusion in intelligent systems. *IEEE Transactions On Systems, Man, and Cybernetics*, 19(5):901–931, 1989.
- [56] J. M. Maestre, P. Giselsson, and A. Rantzer. Distributed receding horizon Kalman filter. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5068–5073, Atlanta, Georgia, USA, December 2010.
- [57] A. G. O. Mutambara. *Decentralized Estimation and Control fo Multisensor Systems*. CRC Press, 1998.
- [58] E. F. Nakamura, A. A. F. Loureiro, and A. C. Frery. Information fusion for wireless sensor networks: Methods, models, and classifications. *ACM Computing Surveys*, 39(3), August 2007.
- [59] W. Niehsen. Information fusion based on fast covariance intersection filtering. In *Proceedings of the 5th International Conference on Information Fusion*, pages 901–904, Annapolis, Maryland, USA, July 2002.
- [60] R. Olfati-Saber. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, pages 8179–8184, Seville, Spain, December 2005.
- [61] R. Olfati-Saber. Distributed Kalman filtering for sensor networks. In *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5492–5498, New Orleans, Louisiana, USA, December 2007.
- [62] R. Olfati-Saber and J. S. Shamma. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, pages 6698–6703, Seville, Spain, December 2005.
- [63] L.-L. Ong, T. Bailey, H. Durrant-Whyte, and B. Upcroft. Decentralised particle filtering for multiple target tracking in wireless sensor networks. In *Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion*, pages 342–349, Cologne, Germany, 2008.
- [64] L.-L. S. Ong. *Non-Gaussian Representations for Decentralised Bayesian Estimation*. PhD thesis, The University of Sydney,, March 2007.
- [65] S. Oruç, J. Sijs, and P. P. J. V. D. Bosch. Optimal decentralized Kalman filter. In *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 803–808, Thessaloniki, Greece, June 2009.
- [66] J. Prakash, S. C. Patwardhan, and S. L. Shah. Constrained state estimation using the ensemble Kalman filter. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pages 3542–3547, Seattle, Washington, USA, June 2008.

- [67] C. V. Rao, J. B. Rawlings, and J. H. Lee. Constrained linear state estimation – a moving horizon approach. *Automatica*, 37:1619–1628, 2001.
- [68] S. Reece and S. Roberts. Generalised covariance union: A unified approach to hypothesis merging in tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 46(1):207–221, January 2010.
- [69] M. Ridley, B. Upcroft, L.-L. Ong, S. Kumar, and S. Sukkarieh. Decentralised data fusion with Parzen density estimates. In *Proceedings of the 2004 Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing Conference*, pages 161–166, Melbourne, Australia, December 2004.
- [70] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, 2004.
- [71] A. Runnalls. Kullback–Leibler approach to Gaussian mixture reduction. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 43(3):989–999, 2007.
- [72] D. Salmond. Mixture reduction algorithms for point and extended object tracking in clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 45(2):667–686, April 2009.
- [73] T. Schön, F. Gustafsson, and P.-J. Nordlund. Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(7):2279–2289, 2005.
- [74] T. Schön, R. Karlsson, and F. Gustafsson. The marginalized particle filter in practice. In *Proceedings of the 2006 IEEE Aerospace Conference*, Big Sky, Montana, USA, 2006.
- [75] V. Shin, G. Shevlyakov, and K. Kim. A new fusion formula and its application to continuous-time linear systems with multisensor environment. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52:840 – 854, 2007.
- [76] J. Sijs, M. Lazar, P. van den Bosch, and Z. Papp. An overview of non-centralized Kalman filters. In *Proceedings of the 17th IEEE International Conference on Control Applications*, pages 739–744, San Antonio, Texas, USA, September 2008.
- [77] B. W. Silverman. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, volume 26 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman and Hall, London, 1986.
- [78] D. Simon. A game theory approach to constrained minimax state estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(2):405–412, 2006.
- [79] D. Simon. *Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and nonlinear approaches*. Wiley, 2006.
- [80] D. Simon. Kalman filtering with state constraints: A survey of linear and nonlinear algorithms. *IET Control Theory and Applications*, 2009.

- [81] D. Simon and T. L. Chia. Kalman filtering with state equality constraints. *IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems*, 38(1):128–136, January 2002.
- [82] D. Simon and D. L. Simon. Constrained Kalman filtering via density function truncation for turbofan engine health estimation. *International Journal of Systems Science*, 41(2):159–171, February 2010.
- [83] H. Singh, N. Misra, V. Hnizdo, A. Fedorowicz, and E. Demchuk. Nearest neighbor estimates of entropy. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 23(3&4):301–321, 2003.
- [84] B. O. S. Teixeira, J. Chandrasekar, H. J. Palanthandalam-Madapusi, L. A. B. Tôrres, L. A. Aguirre, and D. S. Bernstein. Gain-constrained Kalman filtering for linear and nonlinear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(9):4113–4123, 2008.
- [85] B. O. S. Teixeira, L. A. B. Tôrres, L. A. Aguirre, and D. S. Bernstein. Unscented filtering for interval-constrained nonlinear systems. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5116–5121, Cancun, Mexico, December 2008.
- [86] F. Terkelsen. Some minimax theorems. *Mathematica Scandinavica*, 31:405–413, 1972.
- [87] P. R. Thompson and H. Durrant-Whyte. Decentralised data fusion in 2-tree sensor networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion*, Edinburgh, UK, July 2010.
- [88] J. K. Uhlmann. Covariance consistency methods for fault-tolerant distributed data fusion. *Information Fusion*, 4(3):201–215, September 2003.
- [89] B. Upcroft, L.-L. Ong, S. Kumar, M. Ridley, T. Bailey, S. Sukkarieh, and H. Durrant-Whyte. Rich probabilistic representations for bearing only decentralised data fusion. In *Proceedings of the 8th International Conference on Information Fusion*, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June–July 2005.
- [90] P. Vachhani, S. Narasimhan, and R. Rengaswamy. Robust and reliable estimation via unscented recursive nonlinear dynamic data reconciliation. *Journal of Process Control*, 16:1075–1086, 2006.
- [91] M. Šimandl and J. Královec. Filtering, prediction and smoothing with Gaussian sum representation. In *Proceedings of the 12th IFAC Symposium on System Identification*, pages 1157–1162, Santa Barbara, California, USA, June 2000.
- [92] M. Šimandl, J. Královec, and T. Söderström. Advanced point-mass method for nonlinear state estimation. *Automatica*, 42(7):1135–1145, July 2006.
- [93] M. Šimandl and O. Straka. Sampling densities of particle filter: A survey and comparison. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pages 4437–4442, New York City, USA, July 2007.

- [94] Y. Wang and X.-R. Li. A fast and fault-tolerant convex combination fusion algorithm under unknown cross-correlation. In *Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion*, Seattle, Washington, USA, July 2009.
- [95] Y. Wang and X. R. Li. Distributed estimation fusion under unknown cross-correlation : An analytic center approach. In *Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion*, Edinburgh, UK, July 2010.
- [96] M. West. Approximating posterior distributions by mixtures. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 55(2):409–422, 1993.
- [97] C. Yang and E. Blasch. Fusion of tracks with road constraints. *Journal of advances in information fusion*, 3(1):14–32, June 2008.

Autorovy publikace

- [1] J. Ajgl, “Návrh stavových modelů lineárních stochastických systémů z experimentálních dat,” Master’s thesis, Západočeská univerzita, 2008.
- [2] J. Ajgl and M. Šimandl, “Prediction error method with multi-step criterion,” in *Proceedings of the 2nd Young Researchers Conference on Applied Sciences*, Plzeň, November 2008, pp. 1–6.
- [3] —, “Data fusion in estimation problems,” in *Proceedings of the 10th International Carpathian Control Conference*, Zakopane, Poland, May 2009, pp. 261–264.
- [4] J. Ajgl, M. Šimandl, and J. Duník, “Millman’s formula in data fusion,” in *Proceedings of the 10th International PhD Workshop on Systems and Control*, Hluboká nad Vltavou, Czech Republic, September 2009.
- [5] J. Ajgl, “Informační fúze v úlohách odhadu,” Práce ke státní doktorské zkoušce, Západočeská univerzita, 2010.
- [6] J. Ajgl and M. Šimandl, “Survey of estimate fusion approaches,” in *Proceedings of the 7th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO 2010*, Funchal, Portugal, June 2010.
- [7] —, “Multisensor constrained estimation with unscented transformation,” in *Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion*, Edinburgh, UK, July 2010.
- [8] —, “Particle based probability density fusion with differential Shannon entropy criterion,” in *Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion*, Chicago, IL, USA, July 2011.
- [9] —, “Differential entropy estimation by particles,” in *18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, August–September 2011.
- [10] —, “Probability density fusion in particle filtering framework,” in *Abstracts of Contributions to 7th International Workshop on Data – Algorithms – Decision Making*, Mariánská, November 2011.
- [11] —, “Conservative merging of hypotheses given by probability densities,” in *Proceedings of the 15th International Conference on Information Fusion*, Singapore, July 2012.

- [12] E. P. Blasch, O. Straka, C. Yang, D. Qiu, M. Šimandl, and J. Ajgl, “Distributed tracking fidelity-metric performance analysis using confusion matrices,” in *Proceedings of the 15th International Conference on Information Fusion*, Singapore, July 2012.
- [13] J. Ajgl and M. Šimandl, “Marginal marginalised particle filter,” in *2013 American Control Conference*, Washington, DC, USA, June 2013, přijato.