Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

PLZEŇ, 2014

MAREK FEHÉR

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 14. května 2014

.....
(vlastnoruční podpis)

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu své diplomové práce Prof. Ing. Miroslavu Šimandlovi, CSc. za vždy vstřícný přístup a cenné rady při vypracování této práce. Slova díku také míří Ing. Ivu Punčochářovi, Ph.D. za pravidelné a inspirující konzultace, trpělivost a vždy velkou ochotu pomoci. Dále děkuji Ing. Ladislavu Královi, Ph.D., jehož nápady se podílely nemalou měrou na konečné podobě práce. V neposlední řadě je mou ctěnou povinností poděkovat své rodině za podporu při studiu.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá identifikací dynamických vlastností kompozitního materiálu. Práce se nejprve zaměřuje na důvody modelování vlastností materiálů. Dále jsou zde popsány některé z metod identifikace systémů, které jsou využity při identifikačních experimentech. Tyto experimenty si kladou za cíl nalézt z naměřených dat matematický model reálného systému. Reálným systémem se rozumí šíření vibrací v desce z karbonové textilie, které je způsobeno silovým impulsem. Aby byl zvýrazněn rozdíl mezi kompozitním materiálem a idealizovaným materiálem, co se možností identifikace týče, je při identifikačních experimentech používán také zjednodušený matematický model ve formě silového působení na nosník z homogenního a izotropního materiálu.

Klíčová slova: Kompozitní materiál, Identifikace systémů, Korelační analýza, FIR model, Metoda chyby predikce, PEM, ARX model, OE model, NNARX model.

Abstract

This diploma thesis deals with the identification of dynamic properties of composite material. Initially, the thesis focuses on the reasons for modelling material properties. Some of system identification methods which are used for identification experiments are described in the next part. Mentioned identification experiments aim to find a mathematical model of a real system. More specifically, the real system means vibration propagation in the carbon textile plate which is caused by the force impulse. A simplified mathematical model of force impact on a beam made of homogeneous and isotropic material is used during identification experiments too. This simplified model is used to highlight the differences between the composite material and idealized material from the system identification point of view.

Key words: Composite Material, System Identification, Correlation Analysis, FIR model, Prediction Error Method, PEM, ARX model, OE model, NNARX model.

Obsah

1 Úvod **1**

2 Modelování dynamických vlastností kompozitního materiálu **2**
2.1 Modelování a simulace . . . 2
2.2 Dynamické vlastnosti materiálu . . . 2
2.3 Modelování v mechanice . . . 3
2.3.1 Motivace . . . 3
2.3.2 Dělení metod modelování . . . 4
2.4 Kompozitní materiály . . . 4
2.4.1 Definice kompozitních materiálů . . . 4
2.4.2 Dělení kompozitních materiálů . . . 5
2.4.3 Synergismus . . . 7
2.4.4 Speciální případ kompozitních materiálů . . . 7
2.5 Zjednodušený model šíření vzruchu v materiálu . . . 8
2.5.1 Model . . . 8
2.5.2 Volba parametrů nosníku . . . 11
2.5.3 Volba počtu módů . . . 11
2.6 Reálný experiment . . . 13
2.6.1 Popis . . . 13
2.6.2 Získaná data . . . 13

3 Identifikace systémů **15**
3.1 Základní pojmy . . . 15
3.2 Vlastnosti modelů získaných identifikací . . . 15
3.3 Postup při identifikaci . . . 16
3.4 Rekurzivní vs. nerekurzivní metody identifikace . . . 16
3.5 Parametrické metody identifikace . . . 18
3.5.1 Parametrizace lineárních modelů . . . 18
3.5.2 Korelační analýza . . . 21
3.5.3 Metody chyby predikce . . . 22
3.5.3.1 Obecný popis . . . 22
3.5.3.2 Optimální predikce . . . 23
3.5.3.3 Rekurzivní metody chyby predikce . . . 23
3.5.3.4 ARX model . . . 25
3.5.3.5 OE model . . . 27
3.6 Funkcionální přístup k identifikaci . . . 29
3.6.1 Vícevrstvá perceptronová síť . . . 30
3.6.2 NNARX model . . . 31

4 Identifikační experimenty **33**
4.1 Problémy úlohy . . . 33
4.1.1 Struktura modelu . . . 33
4.1.2 Experimentální podmínky . . . 33
4.2 Validace modelu . . . 35
4.3 Parametrické metody identifikace . . . 36
4.3.1 Korelační analýza . . . 36
4.3.2 Metody chyby predikce . . . 40

4.3.2.1 ARX model 40
4.3.2.2 OE model 48
4.4 NNARX model 54

5 Závěr **57**

1 Úvod

Následující text se zabývá problematikou identifikace dynamických vlastností kompozitního materiálu. Konkrétně se jedná o hledání vhodného matematického popisu šíření vzruchu v desce z kompozitního materiálu. Vzruch je vyvolán působením vnější síly v jednom bodě desky kompozitu a měřen v nějakém dalším bodě desky. Motivací práce se stal reálný experiment provedený členy katedry mechaniky Západočeské univerzity v Plzni.

Poskytnutá data z tohoto experimentu dala vzniknout úvaze, že může být k problému hledání matematického modelu uvedeného dynamického procesu přistoupeno metodikou disciplíny identifikace systémů. Externí sílu působící na desku a měřenou senzorem síly lze považovat za vstupní signál přivedený na vstup neznámého systému. Jako výstup neznámého systému lze pak konkrétně označit data získaná pomocí piezoelektrických senzorů.

Uvedená úvaha by tak mohla vést k novému úhlu pohledu na celou problematiku. Matematický model získaný například některou z metod matematicko-fyzikálního modelování nemusí vždy zcela odrážet stochastickou realitu. Obvykle tento postup tedy vyžaduje mnoho zjednodušujících předpokladů. I když bude tento fakt opomenut, je právě ona složitost matematicko-fyzikálního modelování obvyklým důvodem, proč bývá často od tohoto postupu ustoupeno. Bylo by však zásadní chybou tvrdit, že identifikace by mohla zcela nahradit matematicko-fyzikální přístup k hledání modelu. Obecným omezením identifikace je věnována pozornost v příslušné kapitole práce.

Matematicko-fyzikálního modelování je v práci využito ke stanovení značně zjednodušeného modelu šíření vzruchu. Na tento model je následně pohlíženo opět jako na černou skříňku a lze tak na něj aplikovat zkoumané identifikační metody. Tím si je možno předem uvědomit některá omezení, která ta či ona identifikační metoda v aplikaci na daný problém skrývá.

Závěrem úvodu je třeba se zmínit o struktuře samotného textu. V první části práce je její čtenář seznámen s modelováním dynamických vlastností materiálů obecně. Spíše než k popisu určitých postupů slouží tato část jako odpověď na otázky obdobného typu jako například - v čem je modelování tak důležité nebo k čemu slouží v oblasti zkoumání vlastností materiálů. Též jsou zde uvedeny podrobnosti týkající se provedeného experimentu a model, který se v další části práce využívá k posouzení vhodnosti zvolených identifikačních metod.

Dále je již přistoupeno k samotné identifikaci dynamického procesu probíhajícího v kompozitním materiálu. Nejprve je čtenář seznámen se základní metodologií a omezeními identifikace. Po širším pohledu na identifikaci jsou popsány zvolené parametrické metody identifikace vedoucí k nalezení lineárního matematického modelu zkoumaného děje. Následně se text zaměřuje i na možnost funkcionálního přístupu k identifikaci, který umožňuje nalezení nelineárního matematického modelu. Popsané identifikační metody jsou pak aplikovány na model šíření vzruchu, jehož struktura je předem známa, a též na vstupně-výstupní data získána pomocí výše zmíněného měření. Závěr práce se pak věnuje širší diskuzi o dosažených výsledcích a vhodnosti využití získaných modelů.

2 Modelování dynamických vlastností kompozitního materiálu

2.1 Modelování a simulace

Nejprve si je třeba vyjasnit některé pojmy související s modelováním. Následující výčet obsahuje základní definice a objasnění těchto pojmů (pro jejich získání bylo využito zdrojů [11] a [12]):

- *systém* - jednou z možností je definovat *systém* jako složitou entitu tvořenou vzájemně působícími prvky sloužícím společnému účelu nebo podřízeným společnému cíli. Jinak řečeno - *systém*y jsou zjednodušeným, abstraktním pohledem na objekty reálného světa. Při analýze *systém*ů se uplatňují principy abstrakce, dekompozice, hiearchie a modularity.

- *model* a *modelování* - jsou dány dva objekty X, Y a pozorovatel. Systému X říkáme, že je (abstraktním) *model*em systému Y, jestliže pozorovatel může použít systému X k získání odpovědí na otázky, které se týkají systému Y. *Model* je tedy reprezentací znalostí o zkoumaném systému. *Modelováním* pak rozumíme náhradu zkoumaného systému jeho modelem. Cílem *modelování* je získat pomocí pokusů s *modelem* informaci o původním zkoumaném systému.

- *simulace* - metoda získávání nových znalostí o systému na základě řízeného experimentování s jeho modelem.

- *simulační model* - model určený (vhodný) pro simulaci (napodobení) chování reálného objektu

- *verifikace* - ověřuje shodu (ekvivalenci) simulačního a abstraktního modelu, tedy obvykle jejich izomorfní vztah (na shodné vstupy reagují stejnými výstupy).

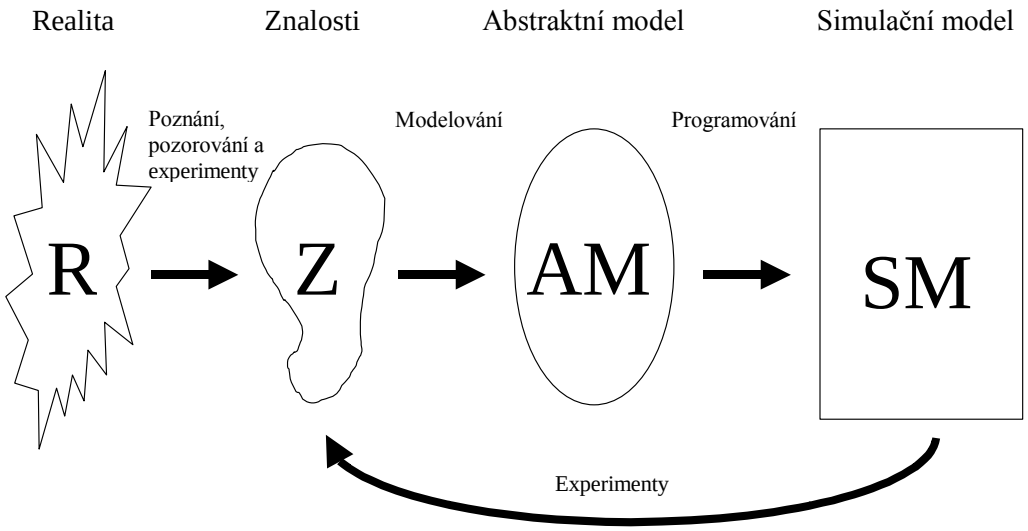
- *validace* - ověřuje adekvátnost (platnost, použitelnost) simulačního modelu s modelovaným systémem z hlediska stanoveného účelu (cíle). Vyjadřuje míru použitelnosti (správnosti) získaných výsledků.

Obrázek 2.1 zachycuje princip modelování a simulace. Ze znalosti systému nabyté bližším pozorováním a studováním je odvozen (abstraktní) model, tj. zjednodušený popis zkoumaného systému. Dále je proveden zápis abstraktního modelu, obvykle ve formě počítačového programu, a provádí se řízené experimentování s tímto simulačním modelem, tj. simulace.

2.2 Dynamické vlastnosti materiálu

Aby mohly být materiály správně využívány, je třeba dobře znát jejich vlastnosti a umět tyto vlastnosti co možná nejpřesněji zjišťovat. Vlastnosti materiálů lze obecně rozdělit do tří základních skupin - *fyzikální*, *chemické* a *mechanické* [10]:

1. *fyzikální vlastnosti* - odráží hmotný pohled na daný materiál. Jedná se tedy o vlastnosti udané některou z fyzikálních veličin jako např. hustota, teplota, elektrická vodivost apod.



Obrázek 2.1: Princip modelování a simulace [11].

2. *chemické vlastnosti* - zde se může jednat například o chemické složení daného materiálu nebo o zkoumání vlivu chemických účinků na daný materiál jako např. o sledování koroze u kovů.

3. *mechanické vlastnosti* - při zpracování a používání jsou materiály vystaveny různému namáhání jako je tah, tlak, krut, střih a ohyb. Tato namáhání obvykle nepůsobí samostatně, ale naopak působí většinou jako kombinace dvou i více namáhání prostých. Aby jim materiál mohl odolávat, musí mít určité mechanické vlastnosti jako např. pevnost, tvrdost, pružnost, tvárnost atd.

Jako *dynamické vlastnosti* materiálu jsou pak označovány takové vlastnosti materiálu, jejichž vývoj je sledován v čase.

2.3 Modelování v mechanice

2.3.1 Motivace

Při výrobě jakéhokoliv produktu je nezbytná znalost vlastností materiálu, z něhož je onen produkt vyroben. Obzvlášť důležité je analyzovat, zda daný materiál vydrží provozní zátěž.

Obvyklou praxí v oblastech souvisejících s mechanikou a strojírenstvím je podrobit materiál tzv. zkouškám mechanických vlastností materiálu. Ty se postupem času ustálily ve třech skupinách - statické (zatížení se zvětšuje zvolna; působí obvykle minuty, hodiny, při dlouhodobých zkouškách klidně dny), dynamické (externí síla na materiál působí rázově, popř. cyklicky) a zvláštní (jejich údaje lze považovat za směrné, neboť výsledky zkoušek zde závisí na mnoha vedlejších činitelích - nejdůležitější takovou zkouškou v praxi je zkouška tvrdosti). Pro více informací o zkouškách mechanických vlastností materiálu viz [10].

Je však zřejmé, že postup zkoušek mechanických vlastností materiálu není příliš ekonomický, neboť s sebou přináší značné materiálové ztráty, které se vždy úměrně projeví

na finančních prostředcích vynaložených na vývoj. Díky pokroku ve výpočetní technice však za posledních padesát let došlo k nárůstu vlivu matematického modelování vlastností materiálu. Složité struktury materiálů a komplikované tvary produktů, z těchto složitých materiálů vyrobených, si žádají náročné výpočty, které výkon současných počítačů, popř. superpočítačů, umožňuje vykonat v přijatelném čase. Zásluhou modelu pak může být proces zkoušení do jisté míry nahrazen simulací, což vede k enormní úspoře. Model dostatečně popisující realitu je tak garancí toho, že zátěžová zkouška dopadne podle očekávání. Z tohoto důvodu se dnes modelování vlastností různých materiálů rozvíjí nejen na poli vědním, ale i v komerčním sektoru.

2.3.2 Dělení metod modelování

Podle složitosti problému se odvíjí i možnost jeho řešení. Podle možnosti řešení dělíme metody modelování na [23]:

- *analytické* (explicitní) - jedná se o řešení pomocí analytických matematických metod (řešení soustav rovnic, řešení úlohy na vázaný extrém apod.). Tento postup řešení se provádí u jednodušších matematických modelů. V rámci mechaniky se tedy uplatňuje v okamžiku, kdy je nějaký reálný problém za určitých předpokladů nahrazen zjednodušeným modelem. Jako příklad může posloužit podkapitola 2.5, v rámci níž je složitý problém šíření vzruchu v kompozitním materiálu nahrazen zjednodušeným modelem šíření vzruchu v nosníku, který je pro základní analýzu dostačující.

- *numerické* (přibližné) - tento postup se používá při řešení modelů, u kterých neumíme problém řešit analyticky, nebo v případech, kdy je analytické řešení obtížné. Nejrozšířenější numerickou metodou v mechanice je metoda konečných prvků (FEM - z angl. finite element method) nebo některé z jejích rozšíření. Princip této metody spočívá v diskretizaci spojitého kontinua na konečný počet prvků, přičemž zjišťované parametry jsou určovány v jednotlivých uzlových bodech [24].

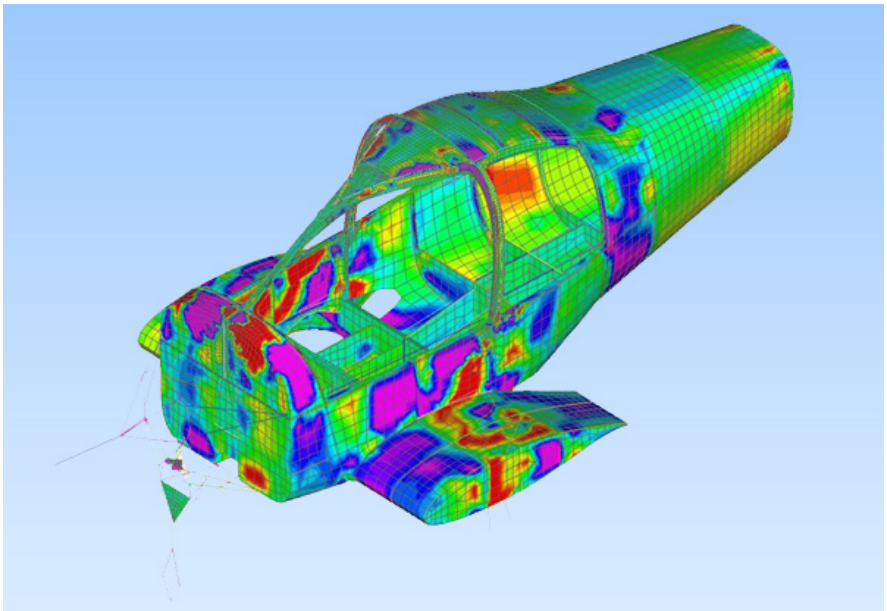
  Dnes již existuje velké množství sofistikovaných softwarových nástrojů založených na FEM. V praxi díky nim probíhá modelování mechanických těles o různé konstrukci a materiálovém složení tak, že konstruktér v nich navrhne konstrukci jako v kterémkoliv jiném CAD systému (počítačem podporované projektování). Následně se nastaví materiálové vlastnosti jednotlivých dílů konstrukce a provede se zmíněná diskretizace - samozřejmě i její vlastnosti lze obvykle nastavit. Pak se již na modelu provádí simulace, která má dát odpověď na kladenou otázku.

  Jako příklad uplatnění FEM může být uvedena pevnostní analýza trupu malého letounu (viz obrázek 2.2). Ta dává odpověď na otázku, které části letounu budou v provozu nejvíce zatěžovány, tj. bude u nich třeba dbát zvýšené pozornosti.

2.4 Kompozitní materiály

2.4.1 Definice kompozitních materiálů

Kompozitní materiál (*kompozit*) je takový materiál, který se skládá ze dvou nebo více složek (někdy označovaných jako fáze), přičemž tyto složky mají různé materiálové vlastnosti. Každá složka tak plní jinou funkci a výsledné vlastnosti kompozitního materiálu jsou dány kombinací vlastností těchto dílčích složek, přičemž se uplatňuje synergetický



Obrázek 2.2: Výpočet zatížení trupu malého letounu provedený firmou EVEKTOR [25].

efekt (viz podkapitola 2.4.3). Složky pak mají v kompozitu význam matrice nebo výztuže [13].

Jako matrice se označuje spojitá fáze, která má funkci pojiva výztuže. V porovnání s výztuží má nižší pevnostní vlastnosti, ale vyšší plasticitu a houževnatost. Nespojitá fáze se nazývá výztuž. V porovnání s matricí má obvykle výrazně lepší mechanické vlastnosti a hlavním cílem vyztužení je tedy zlepšení mechanických vlastností výsledného kompozitního materiálu [14].

2.4.2 Dělení kompozitních materiálů

Z definice kompozitů je patrné první zásadní dělení těchto materiálů a to na přírodní a umělé (syntetické). Mezi přírodní kompozitní materiály lze například zařadit kosti, svaly, dřevo apod. - tj. tyto materiály vznikly přírodní cestou.

Umělé kompozity jsou pak materiály cíleně složeny z jednotlivých složek člověkem. Proto je jejich dělení značně komplikovaným problémem, neboť lze nějakým více či méně sofistikovaným způsobem kombinovat všechny materiály. Obvykle se však v literatuře uvádí dva způsoby dělení kompozitních materiálů a to podle materiálů vytvářející matrici a podle tvaru výztuže.

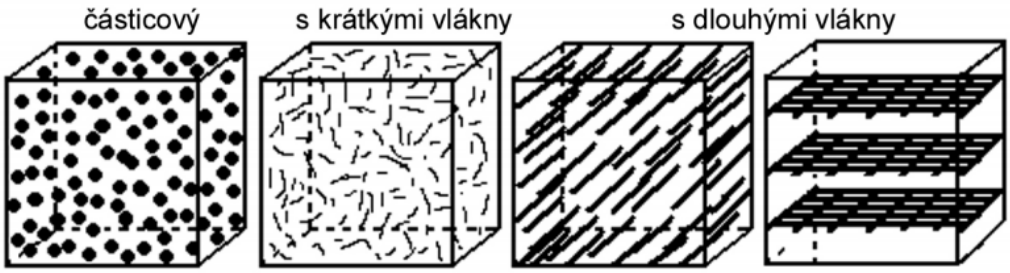
Podle materiálu matrice dělíme kompozity:

- na *polymerní* bázi - vyznačujíc se odolností vůči teplu. Příklady použití - ochranné oděvy pro horké provozy, osobní pancíře a podlahové krytiny.
- na *kovové* bázi - vyznačují se velkou tuhostí a pevností. Příklady použití - brzdy, vrtáky a bloky motorů.
- na *uhlíkové* bázi - vyznačují se velkou tuhostí a pevností. Příklady použití - rámy kol, části karosérií automobilů, trupy a křídla letadel.
- na *skleněné* bázi - vyznačují se velkou pevností. Příklady použití - protihlukové stěny, protipovodňové zábrany a kabely.

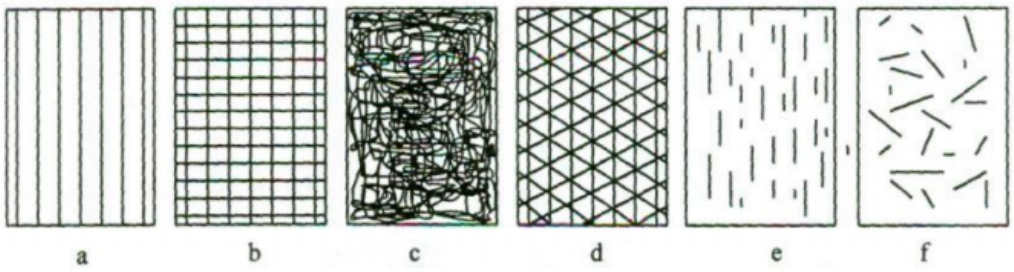
- na *keramické* bázi - vyznačují se vysokou odolností vůči teplu. Příklady použití - povlak raketoplánů, zubní náhrady a jaderné reaktory.

Podle tvaru výztuže dělíme kompozity na (pro bližší náhled viz obrázek 2.3):

- *částicové* - jeden rozměr útvarů výztuže nepřesahuje výrazně rozměry ostatní. Vyztužující částice pak mohou mít tvar kulovitý, destičkovitý, tyčinkovitý či nepravidelný.
- *vláknové* - výztuž je v jednom směru výrazně delší, což vede na zlepšení mechanických vlastností právě v tomto směru. Vláknové kompozity dělíme dále na (pro bližší náhled viz obrázek 2.4):
  - *s krátkými vlákny* - délka vláken je výrazně menší v porovnání s velikostí daného výrobku
  - *s dlouhými (kontinuálními) vlákny* - délka vláken je srovnatelná s velikostí daného výrobku



Obrázek 2.3: Rozdělení kompozitních materiálu podle tvaru výztuže [15].



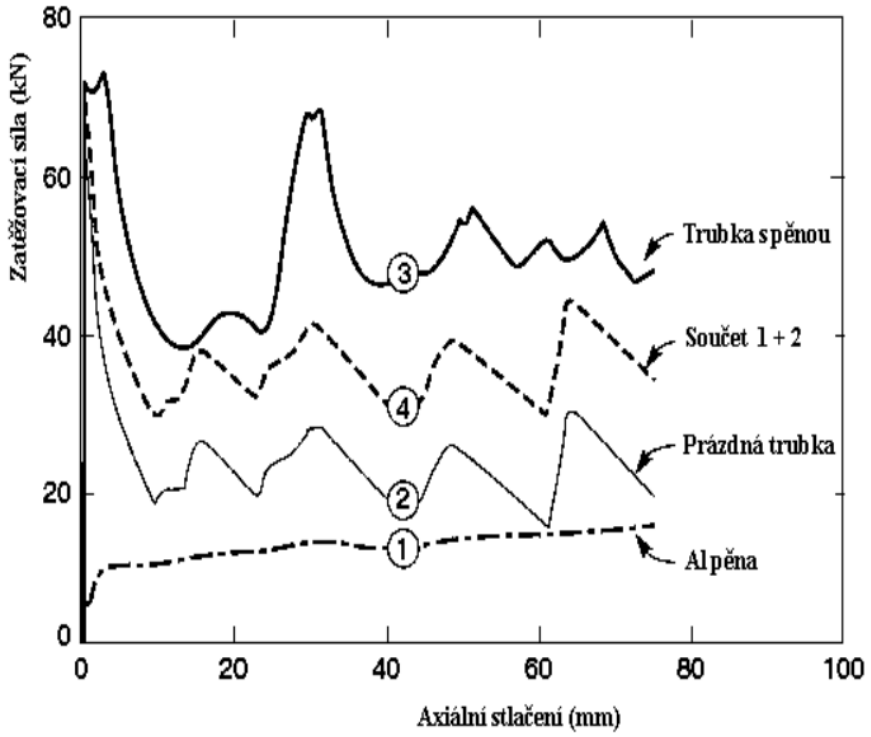
Obrázek 2.4: Příklady uspořádání vláknové výztuže v kompozitech: a) jednosměrné uspořádání, b) tkanina, c) rohož, d) víceosá výztuž z kontinuálních vláken, e) krátká vlákna jednosměrně orientovaná, f) krátká vlákna s nahodilou orientací [16].

Pozn.: V některých zdrojích, např. v [13], je možné se setkat s rozdělením vláknových kompozitů na jednovrstvé, které dále dělíme na již zmíněné kompozity s krátkými a dlouhými vlákny, a vícevrstvé. Vícevrstvé kompozity jsou pak dále děleny na lamináty a hybridy.

2.4.3 Synergismus

Pro kompozitní materiály je charakteristický tzv. *synergismus*. *Synergismus* znamená, že vlastnosti kompozitu jsou vyšší, než by odpovídalo pouhému poměrnému sečtení vlastností jednotlivých složek. Existence *synergismu* je velmi významná, neboť vede k získávání materiálů s kvalitativně zcela novými vlastnostmi [15].

Jako příklad *synergismu* může posloužit charakteristika vlivu zatěžovací síly na axiální stlačení duté hliníkové trubky, hliníkové pěny a hliníkové trubky vyplněné hliníkovou pěnou, která je vyobrazená na obrázku 2.5. Na této charakteristice lze dále pozorovat, jak se liší skutečná zkoumaná mechanická vlastnost kompozitu v podobě trubky s pěnou od součtu mechanických vlastností jednotlivých složek [17].



Obrázek 2.5: Charakteristika vlivu zatěžovací síly na axiální stlačení [17].

2.4.4 Speciální případ kompozitních materiálů

V dnešní době existuje nepřeberné množství umělých kompozitních materiálů používaných v různých odvětví. Možnost kombinace různých materiálových složek vedoucí ke vzniku materiálů s vylepšenými vlastnostmi je zkrátka zajímavá. Vyberme proto jednu určitou skupinu kompozitních materiálů a demonstrujme na ní, co její využití s sebou přináší za výhody. Nechť je zvolenou skupinou skupina kompozitů vyztužených uhlíkovými vlákny.

Uhlíkové vlákno (karbonové vlákno) je název vlákna obsahující uhlík v různých modifikacích. Jedná se o dlouhý, tenký pramen materiálu složený převážně z atomů uhlíku [18]. Na rozdíl od polykrystalického grafitu s nahodilou orientací krystalů (aromatické roviny jsou bazální roviny šesterečné mřížky) jsou aromatické roviny ve vláknu orientovány přednostně ve směru podélné osy vlákna. Aromatické roviny však nejsou uspořádány v hexagonální mřížce, jde o tzv. turbostratický uhlík. Vlastnosti vláken závisí na paralelnosti aromatických rovin s osou vlákna, na velikosti a dokonalosti krystalů a na obsahu

vnitřních defektů (dutin, vměstků, trhlin) [16]. Uhlíková vlákna se dnes vyrábějí převážně z vláken polyakrylonitrilových (PAN), vláken novoloidu, vláken fenolaldehydových či ze sulfonovaného polyethylenu [19].

K demonstraci výhodných vlastností uhlíkových vláken poslouží tabulka 2.1. Ta si všímá u jednotlivých materiálů pevnosti v tahu (mezní napětí, při kterém dojde k porušení materiálu), modul pružnosti v tahu (Youngův modul; napětí v tahu/relativní deformace) a hustotu. Jako referenční uhlíková vlákna byly zvoleny tři komerční produkty firmy TORAY CARBON FIBERS AMERICA (TORAYCA®) [20] a to konkrétně TORAYCA T300 (jako zástupce standardně modulových vláken), TORAYCA M35J (jako zástupce vysokomodulových vláken) a TORAYCA M30S (jako zástupce vláken s velkou pevností). Pro porovnání jsou zde uvedeny i hodnoty uvedených vlastností pro průměrný grafit a ocel (ČSN 11700 - tj. neušlechtilá konstrukční ocel obvyklé jakosti s vyšším obsahem uhlíku [22]).

Uhlíkové vlákno/ materiál	**Pevnost v tahu** $R_m[GPa]$	**Modul pružnosti v tahu** $E[GPa]$	**Hustota** $\rho[kg \cdot m^{-3}]$
TORAYCA T300	$3,53$	230	1760
TORAYCA M35J	$4,70$	343	1750
TORAYCA M30S	$5,49$	294	1730
grafit [19]	$0,02$	10	2200
ocel (ČSN 11 700) [21]	$0,80$	250	7850

Tabulka 2.1: Porovnání vybraných vlastností uhlíkových vláken.

Z tabulky 2.1 jsou patrné klíčové přednosti uhlíkových vláken, co se pevnosti ve směru jejich dlouhé osy týče. Pevnost v tahu je i v porovnání s daleko hustší a často používanou ocelí vyšší. Pružnost v tahu je u standardně modulovaných vláken v porovnání s ocelí srovnatelná. Vysokomodulová uhlíková vlákna však ocel opět v tomto směru znatelně převyšují.

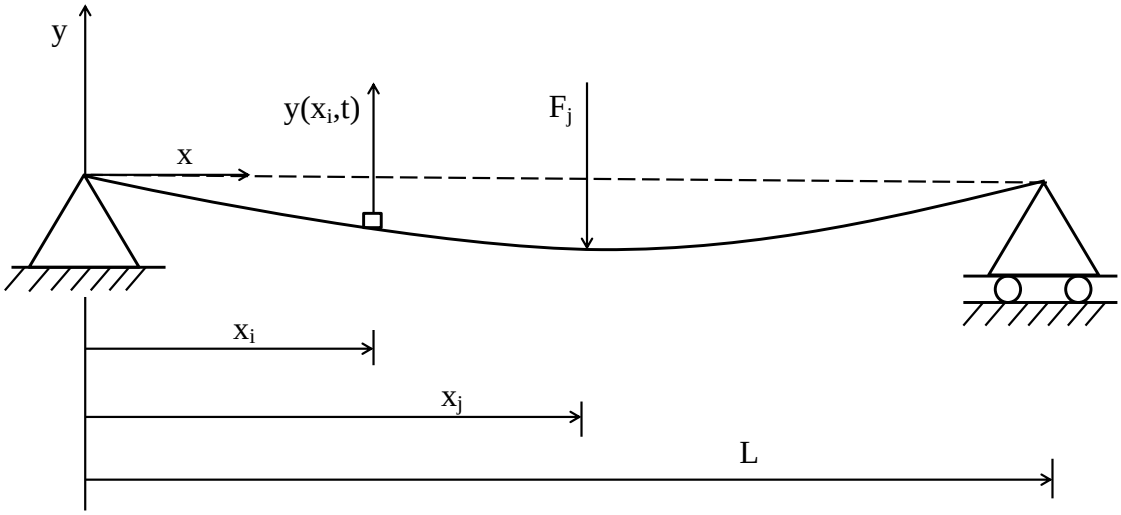
Bohužel se proti masivnějšímu využití materiálů vyztužených uhlíkovými vlákny staví vysoká cena, která samozřejmě stoupá s kvalitou využitého uhlíkového vlákna. Nicméně existují odvětví, ve kterých si v současné době již není možné představit nepoužití těchto lehkých a přitom pevných vláken. Příkladem takového odvětví je letectví.

2.5 Zjednodušený model šíření vzruchu v materiálu

2.5.1 Model

Pro experimentální účely práce je výhodné použít nějakého zjednodušeného matematického modelu, který by dostatečně popsal proces šíření vzruchu v materiálu mezi bodem, kde došlo k působení vstupní síly a bodem desky, kde je měřen projev šířícího se vzruchu (tj. výchylky, rychlosti či zrychlení). Jednou z možností je vyjádřit tento proces jako Euler-Bernoulliho nosník. Boční pohled na nosník znázorňuje obrázek 2.6. Uvažujeme pouze příčné vlnění, tj. ostatní projevy způsobené silovým impulsem (podélné vlnění, torze apod.) zanedbáváme.

Označme osu mezi styčnými body jako x a osu, ve které budeme zkoumat projev příčného vlnění vzniklého externí silou jako y. Dále uvažujme pouze silové působení na nosník v bodě osy x a že projev vzruchu bude sledován též v některém z bodů této osy.



Obrázek 2.6: Nosník.

Silový impuls o velikosti F_j ve směru osy y působí na nosník v bodě x_j. Bod měření projevu vzruchu na ose x má pozici x_i. Výchylku způsobenou šířícím se vzruchem v bodě x_i a měnící se s časem t ve směru osy y pak zaveďme jako $y(x_i, t)$ (viz obrázek 2.6).

Pro obecnou výchylku v libovolném bodě osy x, tj. $y(x, t)$, která je vyvolána silovým impulsem v bodě x_j, platí dle [2] vztah

$$\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + C\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = F_j\delta(t)\delta(x - x_j), \tag{2.1}$$

kde ρ označuje konstantní hmotnost na jednotku délky, konstanta C značí koeficient viskózního tlumení materiálu a součin EI označuje tzv. tuhost v ohybu (E - Youngův modul, I - kvadratický moment průřezu; pro podrobnější studium viz [9]). Symbol δ označuje Diracův impuls (Diracovu δ-funkci). Okrajové podmínky této parciální diferenciální rovnice jsou

$$y(0,t) = 0, \tag{2.2}$$
$$y(L,t) = 0, \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{2.5}$$

Řešení rovnice (2.1), tj. popis časového průběhu výchylky, lze pak podle [2] vyjádřit následovně

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) q_n(t), \tag{2.6}$$

kde n je číslo módu, $\Phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ je n-tá modální funkce a $q_n(t)$ n-tý modální posun. Po dosazení (2.6) do (2.1), integrací výsledku s ohledem na meze x mezi 0 a

L, využitím okrajových podmínek a vlastností Diracovy δ-funkce, může být vyjádřena rovnice pohybu modálního posunu jako

$$\frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2} + 2\xi_n\omega_n\frac{\partial q_n(t)}{\partial t} + \omega_n^2 q_n(t) = F_n(t), \tag{2.7}$$

kde $\omega_n = (n^2\pi^2/L^2)\sqrt{(EI/\rho)}$ figuruje jako modální frekvence, $\xi_n = C/2\rho\omega_n$ lze pokládat za modální tlumení a $F_n(t) = F_j\delta(t)\Phi_n(x_j)$ za modální složku působící síly. Pokud je velikost silového impulsu známa, lze rovnici (2.7) pro nulové počáteční podmínky řešit jako

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_{d_n}}\int_0^t F_n(\tau)e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_{d_n}(t-\tau)]d\tau, \tag{2.8}$$

kde $\omega_{d_n} = \omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}$ a $\xi_n\omega_n$ je konstanta, neboť $\xi_n\omega_n = C/2\rho$, přičemž platí $\xi_n^2 < 1$. Řešením je pak

$$q_n(t) = \frac{F_j\Phi_n(x_j)}{\omega_{d_n}}e^{-\xi_n\omega_n t}\sin(\omega_{d_n}t). \tag{2.9}$$

Dosazením odvozeného vztahu (2.9) do rovnice (2.6) získáme hledaný popis časového průběhu výchylky. Uvažujeme-li sledování výchylky v bodě x_i ($x_i \in < 0; L >$) způsobené vzruchem vzniklým díky impulsu síly v bodě x_j ($x_j \in < 0; L >$), je časový průběh této výchylky popsán

$$y(x_i,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(x_i)\Phi_n(x_j)F_j}{\omega_{d_n}}e^{-\xi_n\omega_n t}\sin(\omega_{d_n}t). \tag{2.10}$$

Rychlost $v(x_i,t)$ resp. zrychlení $a(x_i,t)$ projevu vzruchu ve směru osy y v bodě x_i získáme postupným derivováním vztahu (2.10) podle času, tj.

$$\begin{aligned} v(x_i,t) = \frac{\partial y(x_i,t)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(x_i)\Phi_n(x_j)F_j}{\omega_{d_n}}e^{-\xi_n\omega_n t}[-\xi_n\omega_n\sin(\omega_{d_n}t) + \\ &+ \omega_{d_n}\cos(\omega_{d_n}t)], \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} a(x_i,t) = \frac{\partial^2 y(x_i,t)}{\partial t^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(x_i)\Phi_n(x_j)F_j}{\omega_{d_n}}e^{-\xi_n\omega_n t}[(\xi_n^2\omega_n^2 - \omega_{d_n})\sin(\omega_{d_n}t) - \\ &- 2\xi_n\omega_n\omega_{d_n}\cos(\omega_{d_n}t)]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pro účely identifikace je dále výhodné odvodit vztah, kdy bude vstupem sekvence silových impulsů (vybuzený signál vyššího řádu - viz diskuze v podkapitole 4.1.2). Předpokládejme tedy, že na nosník působí v určitém bodě sekvence $\overline{M}$ vstupních impulsů o různých velikostech $F_{j,m}$ s pravidelnou časovou periodou T_I. Potom lze modální složku síly předefinovat do podoby

$$F_n(t) = \sum_{m=0}^{\overline{M}}F_{j,m}\delta(t - T_I m)\Phi_n(x_j) \tag{2.13}$$

a řešení rovnice modálního posunu (2.8) tak přepsat do podoby

$$q_n(t) = \frac{\Phi_n(x_j)}{\omega_{d_n}}\sum_{m=0}^{\overline{M}}\int_0^t F_{j,m}\delta(\tau - T_I m)e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_{d_n}(t-\tau)]d\tau. \tag{2.14}$$

Výpočtem integrálu ve vztahu (2.14) je možné získat vztah pro modální posun ve tvaru

$$q_n(t) = \frac{\Phi_n(x_j)}{\omega_{d_n}} \sum_{m=0}^{\overline{M}} F_{j,m} H(t - T_I m) e^{-\xi_n \omega_n (t - T_I m)} \sin[\omega_{d_n}(t - T_I m)], \tag{2.15}$$

kde se funkcí $H(t)$ rozumí Heavisideova funkce (jednotkový skok).

Vztah pro výchylku v bodě x_i v případě, že jako vstup je uvažována sekvence různě velkých impulsů působících na určitý bod nosníku x_j, lze získat dosazením právě odvozeného vztahu (2.15) do obecné rovnice popisující chování výchylky (2.6), tj.

$$y(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\overline{M}} \frac{\Phi_n(x_i)\Phi_n(x_j)F_{j,m}}{\omega_{d_n}} H(t - T_I m) e^{-\xi_n \omega_n (t - T_I m)} \sin[\omega_{d_n}(t - T_I m)]. \tag{2.16}$$

2.5.2 Volba parametrů nosníku

Možnosti, jak volit parametry nosníku L, ρ, EI a C, jsou identifikace z naměřených hodnot nebo využití tabelovaných hodnot pro zvolený materiál a geometrii nosníku. V případě volby parametrů modelu pro experimentální účely práce bylo k volbě parametrů přistoupeno tak, aby se vlastnosti nosníku přiblížily k vlastnostem karbonové textilie, ale bez využití identifikace. Bylo tedy použito tabelovaných hodnot pro karbonové vlákno a následně bylo upraveno tlumení tak, aby model nosníku dostatečně odrážel velmi dobrou schopnost tlumení vibrací, kterou karbonová textilie disponuje. Volbu parametrů dokumentuje tabulka 2.2.

	Délka $L[m]$	**Hmotnost na délku** $\rho[kg \cdot m^{-1}]$	**Tuhost v ohybu** $EI[N \cdot m^2]$	**Koeficient tlumení** $C[N \cdot s \cdot m^{-2}]$
Volba parametru	1	1750	$3,5 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^5$

Tabulka 2.2: Parametry modelu nosníku.

2.5.3 Volba počtu módů

Je zřejmé, že rovnice (2.10) a (2.16) nelze při simulaci použít, neboť předpokládají nekonečně mnoho módů. Nicméně lze očekávat, že vyšší módy budou mít menší vliv a jejich zanedbání nebude mít podstatný vliv na kvalitu modelu (s ohledem na šum měření a vzorkovací periodu). Omezme proto počet módů na N. Rovnice výchylky v bodě x_i za předpokladu silového impulsu v bodě x_j , tj. rovnice (2.10), se změní do podoby

$$y_N(x_i, t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\Phi_n(x_i)\Phi_n(x_j)F_j}{\omega_{d_n}} e^{-\xi_n \omega_n t} sin(\omega_{d_n} t). \tag{2.17}$$

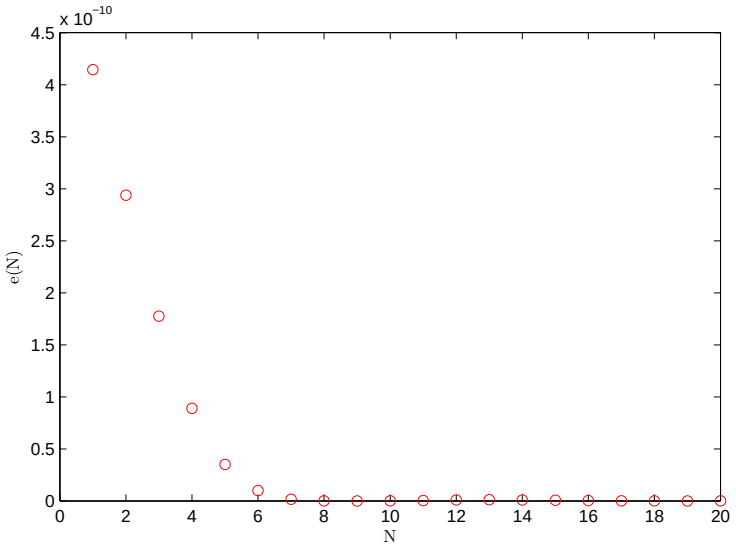
Definujme dále $e(N)$ jako aritmetický průměr hodnot kvadrátů rozdílu $y_{N+1}(x_i, t)$ a $y_N(x_i, t)$, tj.

$$e(N) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} [y_{N+1}(x_i, t) - y_N(x_i, t)]^2, \tag{2.18}$$

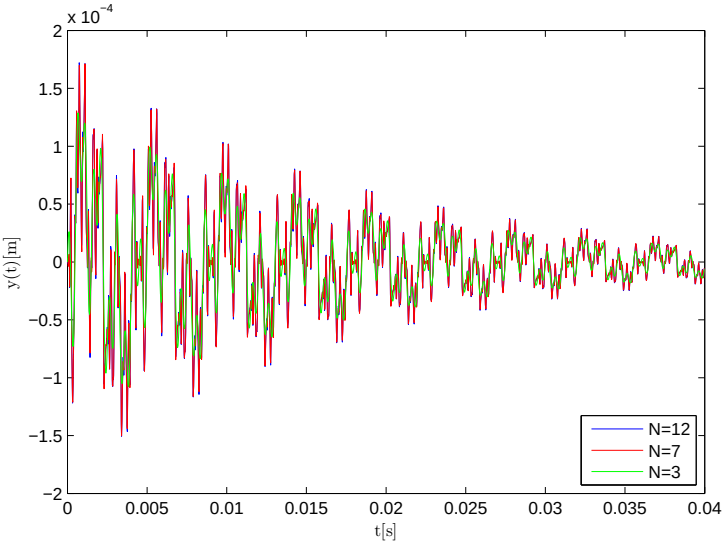
kde $t = 1, 2, \ldots, T$ jsou jednotlivé diskrétní časové okamžiky (volba periody vzorkování odpovídá periodě vzorkování reálného experimentu viz níže).

Zvolme nějaký konečný počet vzorků T (například $T = 2000$) a sledujme vývoj $e(N)$ pro $N = 1, \ldots, 20$. Obrázek 2.7 ilustruje vývoj aritmetického průměru kvadrátu rozdílu $y_{N+1}(x_i, t)$ a $y_N(x_i, t)$ se zvětšujícím se N. Je si tak možné uvědomit, že vyšší módy mají dle předpokladu menší vliv na modelovaný průběh výchylky. Navíc mají větší hodnoty N i vyšší výpočetní nároky a z tohoto důvodu postačí pro účely práce volba $N = 7$.

Obrázek 2.8 znázorňuje výstup modelu, tj. výchylku v bodě nosníku $x_i = 0,9[m]$, na který působí impuls síly o velikosti $1[N \cdot m^{-1}]$ v bodě nosníku $x_j = 0,1[m]$. Parametry modelu jsou zvoleny dle podkapitoly 2.5.2. Z důvodu možnosti porovnání jsou v obrázku 2.8 zahrnuty různé volby počtu módů.



Obrázek 2.7: Vývoj $e(N)$ pro $N = 1, \ldots, 20$.

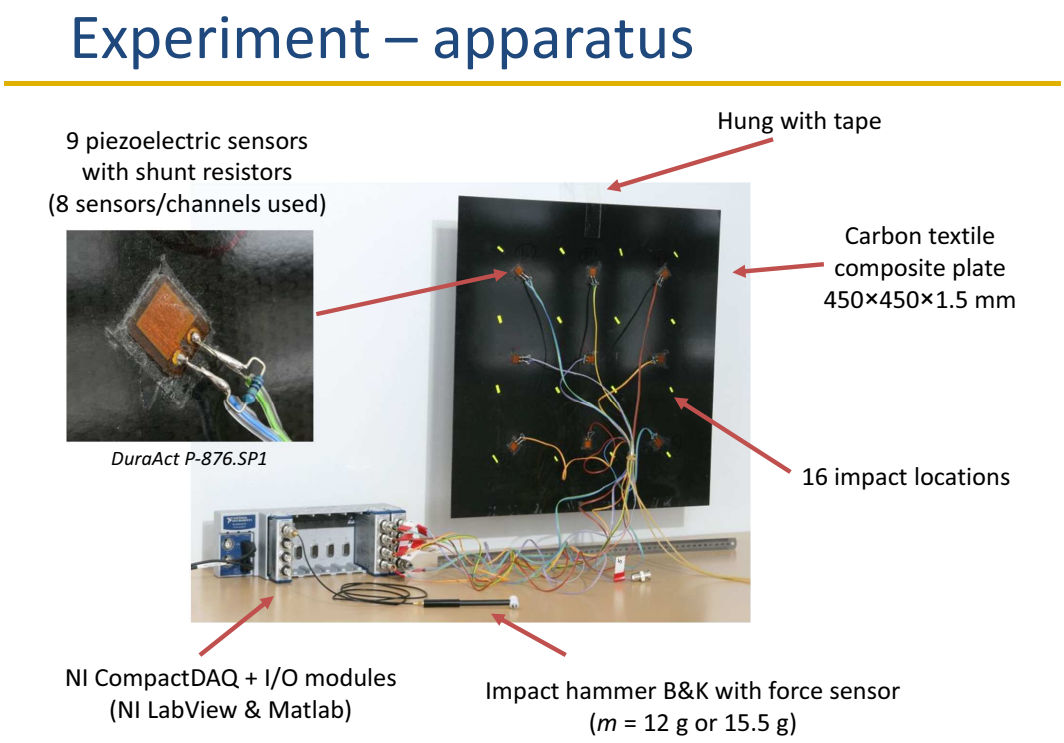


Obrázek 2.8: Vývoj výchylky pro různé volby počtu módů N.

2.6 Reálný experiment

2.6.1 Popis

Jak již bylo zmíněno v úvodu, motivací práce se stal reálný experiment provedený členy katedry mechaniky Západočeské univerzity v Plzni. V rámci tohoto experimentu bylo na desku kompozitu připevněno devět piezoelektrických senzorů (DuraAct P-876.SP1 [26]). Následně bylo do desky klepnuto impulsním kladivem se senzorem síly (impulsní kladivo B & K [27]) a to do jednoho z šestnácti do tvaru čtverce uspořádaných míst. Vlivem tohoto poklepnutí došlo k rozvibrování desky, které bylo snímáno pomocí již zmíněných piezoelektrických senzorů. Jednotlivé komponenty experimentu jsou ilustrovány na obrázku 2.9.



Obrázek 2.9: Komponenty experimentu [1].

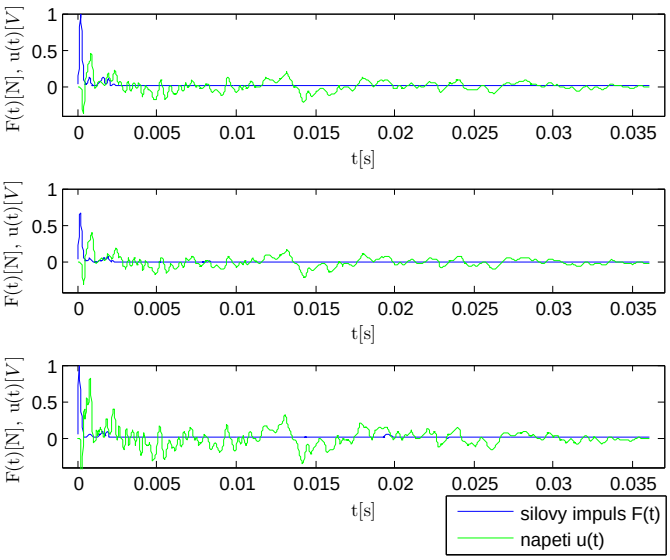
Co se použitého kompozitu týče, jedná se o karbonovou textilii. Výztuž takové textilie je tvořena propletenými uhlíkovými vlákny ve formě tkaniny nebo víceosé výztuže (viz obrázek 2.4). V praxi se karbonových textilií využívá pro jejich schopnosti tlumit vibrace. Podrobnější popis experimentu lze nalézt v článku [1].

Pozn.: Cílem experimentu dle článku [1] je určit přenos mezi každým z šestnácti bodů dopadu kladiva a každým piezoelektrickým senzorem. Článek se zabývá otázkou, zda by díky této znalosti bylo možné identifikovat místo dopadu kladiva.

2.6.2 Získaná data

Pro každou možnou dvojici místo dopadu kladiva a piezoelektrický senzor byla provedena tři různá měření. Data představována vstupním silovým impulsem (měřený silovým senzo-

rem v impulsním kladivu) a napětím vzniklým deformací piezokrystalu v piezoelektrickém senzoru lze zobrazit v závislosti na čase tak, jako je tomu na obrázku 2.10. Obrázek 2.10 zachycuje právě jednu konkrétní dvojici místo dopadu kladiva a piezoelektrický senzor. Perioda vzorkování při provádění experimentů byla $T_s = 0.02ms$.



Obrázek 2.10: Data z experimentu.

Pokud bychom chtěli přepočítat naměřené napětí například na deformaci v místě, kde je umístěn některý z piezoelektrických senzorů, bylo by nutné zohlednit nelineární hysterezní charakteristiku piezoelektrického senzoru. Pro další náplň práce by složitější převod neměl smysl. Vzhledem k identifikaci, kde naměřené napětí bude figurovat jako výstup neznámého systému, je však třeba uvést podmínku, že v případě budoucí náhrady senzoru je nutné vykonat celý identifikační proces znovu. Nesnažíme se totiž popsat ryzí projev vibrace v desce způsobené silovým impulsem, nýbrž vztah mezi silovým impulsem a napětím generovaným v piezokrystalu daného senzoru.

3 Identifikace systémů

S trochou nadsázky lze tvrdit, že tvorba modelu na základě pozorování hraje důležitou roli nejen ve vědě, ale i v každodenním životě většiny živočišných druhů. Na pozorování okolního světa prostřednictvím smyslových orgánů, schopnosti zpracování těchto informací a provedení co možná nejkvalitnějšího odhadu dalšího vývoje chování okolí leckdy závisí další přežití daného jedince.

3.1 Základní pojmy

V této části práce však bude jasně dominovat ryze vědní přístup k tvorbě modelů na základě pozorování. Zaveďme a popišme proto některé stěžejní pojmy tohoto přístupu (při zavedení pojmů a jejich definic bylo využito zdrojů [3] a [5]):

- *identifikace systémů* (zkr. *identifikace*)- jako *identifikace systémů* je označován obor zabývající se hledáním matematických modelů reálných systémů z experimentálních dat. *Identifikace systémů* nachází své uplatnění nejen v technických disciplínách, ale i v těch netechnických. Zmíněný fakt nechť poslouží jako ukazatel důležitosti *identifikace systémů* v současné vědě. V oblasti automatického řízení je metod *identifikace systémů* využíváno k získání vhodných modelů pro syntézu regulátorů, návrh algoritmů predikce nebo pro simulaci.

- *systém* (ve smyslu identifikace) - *systémem* ve smyslu identifikace bude označována neznámá fyzikální realita, kterou je žádoucí poznat a ze které je možné získat experimentální data.

- *struktura modelu* - identifikační metody bývají děleny na parametrické a neparametrické podle toho, zda poskytují parametrický či neparametrický model. Neparametrické modely jsou představovány tabulkou, funkcí nebo křivkou. Příklad takového modelu může být frekvenční charakteristika. Parametrické metody, kterým se též věnuje tato práce, jsou charakterizovány vektorem parametrů. *Strukturou modelu* pak rozumíme množinu přípustných hodnot, kterou může vektor parametrů nabývat.

- *identifikační metoda* - jedná se o metodu (postup, způsob) identifikace. Do dnešní doby bylo navrženo rozsáhlé množství *identifikačních metod*. Některé metody však mohou být z dnešního pohledu chápány stejně. Obvykle byly navrženy pro odlišné struktury modelů a s tím souvisí jejich různá označení.

- *experimentální podmínky* - pod pojmem *experimentální podmínky* je na obecné úrovni chápán způsob provedení identifikačního experimentu. Například výběr a generování vstupního signálu, vzorkovací periody, předfiltrace dat apod.

Pozn.: Volba struktury modelu, identifikační metody a z části experimentálních podmínek je v plné kompetenci řešitele úlohy a zásadní měrou ovlivňuje výsledek identifikace. Je tedy vždy na místě podrobná analýza této volby v závislosti na identifikovaném systému a plánovaném použití modelu.

3.2 Vlastnosti modelů získaných identifikací

Pokusme se shrnout některé obecné vlastnosti modelů získaných identifikací:

- snadný návrh a využití
- mají omezenou platnost (platí pro určitý pracovní bod, určitý typ vstupu apod.)
- mají (mohou mít) menší (nulovou) fyzikální interpretaci (parametry slouží jako prostředek pro popis chování systému a nemají fyzikální význam)
- identifikace není plně dokazatelná metodologie a nelze ji často použít bez spolupráce s odborníkem na daný problém. Některé z důvodů tohoto tvrzení:
  - vhodná struktura modelu je neznámá
  - v reálném světě neexistují perfektní data (měření je vždy pod vlivem poruchy, šumu apod.)
  - vlastnosti sledovaného procesu se mohou měnit v čase
  - některé proměnné může být obtížné měřit nebo jsou neměřitelné

Z uvedeného seznamu je patrné, že modely získané identifikací v sobě skrývají řadu negativ. Je pravdou, že matematické modelování má daleko lepší interpretaci a modely širší využití. Bohužel spousta reálných systémů je tak složitých a je v nich taková míra neurčitosti, že postup matematického modelování je složitý či zcela nemožný. V tomto případě se projeví výrazné pozitivum modelů získaných identifikací v podobě snadného návrhu a využití. Fyzikální pohled na danou věc však může pomoci stanovit vhodnou strukturu modelu. Je tak pro identifikaci přínosným a v určitých problémech i nutným přídavným prvkem.

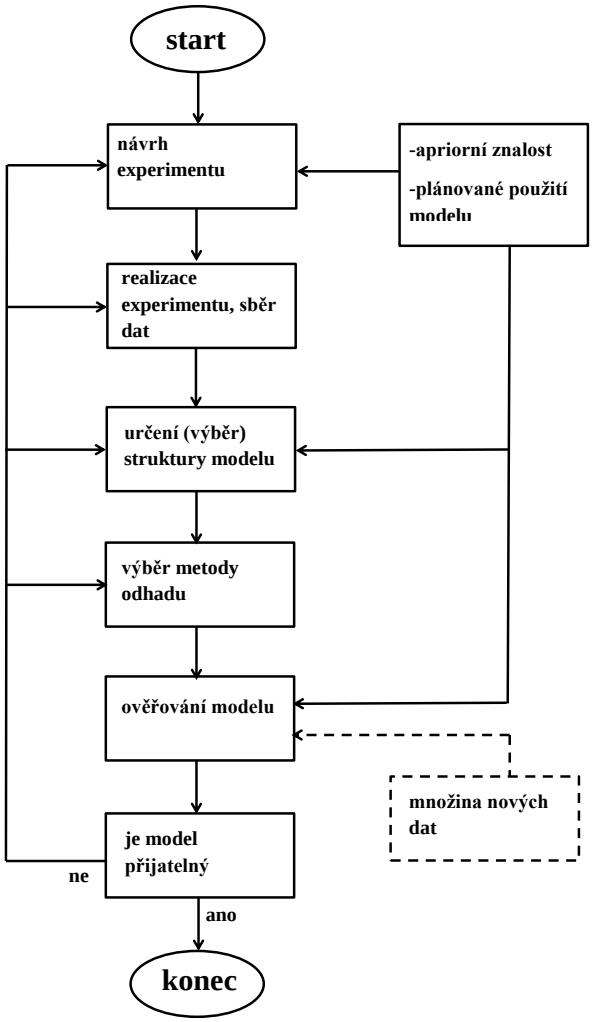
3.3 Postup při identifikaci

Při identifikaci systémů (parametrizované modely) se obvykle postupuje tak, že se nejprve vhodně s ohledem na realizovatelné možnosti navrhne experiment - je tedy provedeno vybuzení systému nějakým zvoleným vstupním signálem, sledování (měření) vstupu a výstupu v určitém časovém intervalu apod. Během měření probíhá sběr dat v podobě ukládání naměřených hodnot do paměti počítače pro další zpracování. Dále je přikročeno k hledání vhodného modelu zkoumaného systému, který by co možná nejlépe odpovídal vstupní a výstupní sekvenci dat. Zde se projeví důležitost výběru struktury modelu. S ohledem na strukturu modelu se následně vybere vhodná metoda k odhadu neznámých parametrů modelu.

Nakonec dojde k testování získaného modelu, aby bylo možné rozhodnout, zda se jedná o vhodnou reprezentaci identifikovaného reálného systému. V případě, že tomu tak není, je třeba se vrátit na některý z dříve uskutečněných kroků (např. je nutné uvažovat složitější strukturu modelu, vybrat jinou metodu odhadu parametrů modelu apod.). Jedná se tedy o jakýsi iterativní postup hledání přijatelného modelu [3]. Popsaný „algoritmus" hledání vhodného modelu reálného systému pomocí identifikace znázorňuje obrázek 3.1.

3.4 Rekurzivní vs. nerekurzivní metody identifikace

Je třeba se zmínit o velice důležitém dělení identifikačních metod a to na rekurzivní metody a nerekurzivní metody. Způsob práce nerekurzivní metody lze vystihnout následovně - nejprve je proveden sběr dat po určité časové období. Po tomto sběru jsou data najednou



Obrázek 3.1: Postup při identifikaci.

(jednorázově) zpracována. Vezměme si jako příklad nějakou parametrickou metodu. Odhad parametrů modelu nerekurzivní metodou získáme až po měření a to obvykle řešením nějaké rozsáhlé maticové rovnice. Je tedy zřejmé, že takový postup má značné nároky na paměť.

V případě rekurzivní parametrické metody dochází k odhadu parametrů na základě měření do aktuálního časového okamžiku, tj. jestliže odhad parametrů v předchozím okamžiku byl založen na datech do tohoto okamžiku naměřených, lze aktuální odhad parametrů určit z předchozího odhadu spolu s využitím nové informace z aktuálního měření. Výhodou jsou tak nižší nároky na paměť a možnost práce v reálném čase. Díky těmto vlastnostem jsou rekurzivní metody využívány např. v adaptivním řízení, adaptivním zpracováním signálu či v systémech pro detekci poruch.

Často se zaměňuje pojem rekurzivní identifikace s on-line identifikací a nerekurzivní identifikace s off-line identifikací. Tyto pojmy však nejsou synonymy. Použijeme-li opět jako příklad parametrickou metodu, tak on-line identifikace znamená, že odhad parametrů je sice generován pro každý časový okamžik na základě znalosti dat do tohoto okamžiku naměřených, nicméně již není uvedeno jak, tj. je klidně možné odhad určit nerekurzivní metodou. Rekurzivní metody lze naopak aplikovat i off-line, tj. na již naměřená data uložená v paměti.

3.5 Parametrické metody identifikace

3.5.1 Parametrizace lineárních modelů

Parametrických metod identifikace bude v této práci použito výhradně k získání stochastických modelů popsaných lineární diferenční rovnicí. Takové modely lze vyjádřit obecnou strukturou

$$\begin{aligned} M(\theta) : y(t) &= G(q^{-1};\theta)u(t) + H(q^{-1};\theta)e(t) \\ Ee(t)e^T(s) &= \Lambda(\theta)\delta_{t,s}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $t = 0, 1, 2, \ldots$, $y(t)$ je ny dimenzionální výstup, $u(t)$ nu dimenzionální vstup, ny dimenzionální šum $e(t)$ je bílý šum (posloupnost nezávislých náhodných proměnných se stejným rozložením a s nulovou střední hodnotou). $G(q^{-1};\theta)$ je ny/nu dimenzionální filtr a $H(q^{-1};\theta)$ je ny/ny dimenzionální filtr. Argument q^{-1} označuje operátor zpětného posuvu (např. $q^{-1}u(t) = u(t-1)$), $\delta_{t,s} = 0$ pro $t \neq s$ a $\delta_{t,s} = 1$ pro $t = s$. Filtry $G(q^{-1};\theta)$ a $H(q^{-1};\theta)$ jsou spolu s kovarianční maticí $\Lambda(\theta)$ funkce $n\theta$ dimenzionálního vektoru parametrů θ. Více informací o obecné struktuře lineárních stochastických modelů lze najít například v [3] a [4].

Specifikací parametrizace $G(q^{-1};\theta)$, $H(q^{-1};\theta)$ a $\Lambda(\theta)$, je možné získat různé struktury modelů. Uveďme ty, kde uvažujme $y(t)$, $u(t)$ a $e(t)$ jako skalární signály.

- Obecná struktura modelu SISO (single input, single output):

  Tento model má strukturu

$$A(q^{-1})y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t), \tag{3.2}$$

  kde polynomy

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_{na}q^{-na}, \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + \cdots + b_{nb}q^{-nb}, \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + \cdots + c_{nc}q^{-nc}, \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1q^{-1} + \cdots + d_{nd}q^{-nd}, \\ F(q^{-1}) &= 1 + f_1q^{-1} + \cdots + f_{nf}q^{-nf} \end{aligned}$$

  a vlastnosti šumu

$$\begin{aligned} Ee(t) &= 0, \\ Ee^2(t) &= \lambda^2. \end{aligned}$$

  Vektor parametrů je tedy

$$\theta = [a_1, \cdots, a_{na}, b_1, \cdots, b_{nb}, c_1, \cdots, c_{nc}, d_1, \cdots, d_{nd}, f_1, \cdots, f_{nf}]^T. \tag{3.3}$$

  Rovnici (3.2) lze převést v duchu vztahu (3.1) do podoby

$$M(\theta) : y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})}e(t), \tag{3.4}$$

tj.

$$\begin{aligned} G(q^{-1};\theta) &= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1})}, \\ H(q^{-1};\theta) &= \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})}, \\ \Lambda(\theta) &= \lambda^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Příčina zavedení uvedené struktury modelu spočívá v její obecnosti. Uveďme některé speciální případy získané nulováním stupně některých ve struktuře uvažovaných polynomů:

* ARMAX model (Auto-Regressive Moving Average with eXogenous input):
  Ze struktury obecného modelu SISO popsané rovnicí (3.2) lze položením $nd = nf = 0$ získat ARMAX model popsaný rovnicí (3.6)

  $$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t). \tag{3.6}$$

  Vektor parametrů lze tedy zavést jako

  $$\theta = [a_1, \cdots, a_{na}, b_1, \cdots, b_{nb}, c_1, \cdots, c_{nc}]^T \tag{3.7}$$

  a rovnici (3.6) lze převést v duchu vztahu (3.1) do podoby

  $$M(\theta) : y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(t), \tag{3.8}$$

  tj.

  $$\begin{aligned} G(q^{-1};\theta) &= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}, \\ H(q^{-1};\theta) &= \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}, \\ \Lambda(\theta) &= \lambda^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

  Ze struktury modelu ARMAX lze položením stupně rovného nule některých z polynomů $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ a $C(q^{-1})$ získat následující speciální struktury:

  - AR model (Auto-Regressive; autoregresní) - $nb = nc = 0$, tj.

    $$\theta = [a_1, \cdots, a_{na}]^T \tag{3.10}$$

    a struktura modelu má podobu

    $$A(q^{-1})y(t) = e(t). \tag{3.11}$$

  - MA model (Moving Average; klouzavý průměr) - $na = nb = 0$, tj.

    $$\theta = [c_1, \cdots, c_{nc}]^T \tag{3.12}$$

    a struktura modelu má podobu

    $$y(t) = C(q^{-1})e(t). \tag{3.13}$$

- ARMA model (Auto-Regressive Moving Average) - $nb = 0$, tj.

$$\theta = [a_1, \cdots, a_{na}, c_1, \cdots, c_{nc}]^T \tag{3.14}$$

a struktura modelu má podobu

$$A(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})e(t). \tag{3.15}$$

- ARX model (Auto-Regressive Moving Average) - $nc = 0$, tj.

$$\theta = [a_1, \cdots, a_{na}, b_1, \cdots, b_{nb}]^T \tag{3.16}$$

a struktura modelu má podobu

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t). \tag{3.17}$$

* OE model (Output Error; model chyby výstupu): Ze struktury obecného modelu SISO popsané rovnicí (3.2) lze položením $na = nc = nd = 0$ získat OE model ve formě

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + e(t) \tag{3.18}$$

a s vektorem parametrů v podobě

$$\theta = [b_1, \cdots, b_{nb}, f_1, \cdots, f_{nf}]^T \tag{3.19}$$

Nutno podotknout, že v případě této struktury uvažujeme poruchu bez dynamiky, která působí přímo na výstup. Chyba výstupu je tak rozdíl měřeného výstupu a deterministickou výstupní komponentou $[B(q^{-1})/F(q^{-1})]u(t)$, tj.

$$e(t) = y(t) - \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t). \tag{3.20}$$

* Ze struktury obecného modelu SISO popsané rovnicí (3.2) lze položením $na = 0$ získat strukturu v podobě

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t). \tag{3.21}$$

s vektorem parametrů

$$\theta = [b_1, \cdots, b_{nb}, c_1, \cdots, c_{nc}, d_1, \cdots, d_{nd}, f_1, \cdots, f_{nf}]^T \tag{3.22}$$

Vlastností této struktury je, že $G(q^{-1};\theta) = B(q^{-1})/F(q^{-1})$ a $H(q^{-1};\theta) = C(q^{-1})/D(q^{-1})$ nemají žádné společné parametry, což se může pozitivně projevit na výsledku identifikace.

- IIR model (Infinite Impulse Response):

Tato struktura modelu souvisí s korelační analýzou (viz podkapitola 3.5.2). Její podoba je

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(t-k) + e(t), \tag{3.23}$$

kde $\{h(k)\}_0^\infty$ je nekonečná váhová sekvence. Často je výhodnější uvažovat tzv. useknutou váhovou sekvenci, tj. $h(k) = 0$ pro $k \geq M$. Toto zjednodušení vede na lineární systém konečného řádu se strukturou označovanou jako FIR (Finite Impulse Response), kterou lze vyjádřit jako

$$y(t) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)u(t-k) + e(t). \tag{3.24}$$

Pozn.: Je možné se setkat se strukturou FIR i v polynomiálním zápisu ve tvaru

$$y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t). \tag{3.25}$$

3.5.2 Korelační analýza

Korelační analýza je zástupcem neparametrických metod někdy též označovaných jako klasické metody identifikace. Výsledkem neparametrických metod jsou křivky nebo funkce [3]. V jistém ohledu však lze i na korelační analýzu pohlížet jako na parametrickou metodu, a proto je zařazena do této části práce.

Uvažujme model se strukturou danou rovnicí (3.23). Předpokládejme, že vstupem je stacionární náhodný proces nezávislý na poruše. Pro kovarianční funkce tak platí Wiener-Hopfova rovnice

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)r_u(\tau - k), \tag{3.26}$$

kde $r_{yu}(\tau) = Ey(t+\tau)u(t)$ a $r_u(\tau) = Eu(t+\tau)u(t)$. Tyto kovarianční funkce mohou být odhadnuty z dat jako

$$\widehat{r}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1-min(\tau,0)}^{N-max(\tau,0)} y(t+\tau)u(t), \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.27}$$

a

$$\widehat{r}_u(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} u(t+\tau)u(t), \quad \widehat{r}_u(-\tau) = \widehat{r}_u(\tau), \quad \tau = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.28}$$

Odhad váhové sekvence $\{h(k)\}$ je tedy možné získat ze soustavy lineárních rovnic nekonečné dimenze dané

$$\widehat{r}_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{h}(k)\widehat{r}_u(\tau - k). \tag{3.29}$$

Nyní uvažujme useknutou váhovou sekvenci, tj. uvažujme pouze strukturu modelu FIR popsanou rovnicí (3.24). Vztah (3.29) tak přejde do podoby

$$\widehat{r}_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{M-1} \widehat{h}(k)\widehat{r}_u(\tau - k). \tag{3.30}$$

Rozepsáním vztahu (3.30) pro $\tau = 0, 1, \ldots, M-1$ získáme soustavu rovnic konečné dimenze ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \widehat{r}_{yu}(0) \\ \vdots \\ \widehat{r}_{yu}(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{r}_u(0) & \ldots & \widehat{r}_u(M-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{r}_u(M-1) & \ldots & \widehat{r}_u(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{h}(0) \\ \vdots \\ \widehat{h}(M-1) \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Prvky useknuté váhové sekvence, tj. $h(k)$, je možné vnímat jako parametry modelu (3.24). Z tohoto důvodu lze i korelační analýzu vnímat jako parametrickou metodu.

3.5.3 Metody chyby predikce

3.5.3.1 Obecný popis

Jedním z hlavních důvodů, proč je výhodné znát matematický model určitého procesu, je bezesporu odpověď na otázky týkající se jeho budoucího chování. V případě, že není takový proces deterministický, nezbývá nic jiného než jeho budoucí chování nějakým vhodným způsobem odhadnout. O takovém odhadu pak hovoříme jako o predikci. V případě, že se snažíme odhadnout chování systému v časovém kroku t na základě znalosti vstupně-výstupních dat do okamžiku $t-k$, hovoříme o této predikci jako o k-krokové predikci a značíme ji $\widehat{y}(t|t-k)$. Chybou predikce se pak rozumí rozdíl skutečné hodnoty výstupu v kroku t a predikce vztahující se k tomto okamžiku, tj.

$$\varepsilon(t) = y(t) - \widehat{y}(t|t-k). \tag{3.32}$$

Metodami chyby predikce (PEM; Prediction-error methods) se označuje taková množina metod parametrické identifikace, které jsou založeny na výběru parametrů θ, jenž způsobí, že chyby predikce $\{\varepsilon(t;\theta)\}$ budou malé, dle smyslu nějakého kritéria optimální. Obecně lze takové kritérium $V_N(\theta)$ hodnotící volbu parametrů pro N známých (naměřených) vstupů a výstupů systému vyjádřit jako

$$V_N(\theta) = h(R_N(\theta)), \tag{3.33}$$

kde $R_N(\theta)$ označena pozitivně definitní výběrovou kovarianční matici chyby predikce definovanou vztahem

$$R_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t;\theta)\varepsilon^T(t;\theta). \tag{3.34}$$

Skalární funkce maticového argumentu h pak označuje vhodnou skalární tzv. ztrátovou (kriteriální) funkci splňující určité podmínky (více viz [3]). V případě, že bude uvažován pouze jeden výstup systému, tak $\varepsilon(t;\theta)$ bude skalární veličina a jako kriteriální funkci lze uvažovat pouze $R_N(\theta)$, neboť se bude jednat o skalární funkci, tj. $V_N(\theta) = R_N(\theta)$.

Metody chyby predikce mají vždy následující tři kroky:

1. výběr struktury modelu a z ní vyplývající formy prediktoru
2. výběr ztrátové funkce
3. určení odhadu parametrů θ, tj. $\widehat{\theta}$, pro který ztrátová funkce nabývá (globální) minimum

Pozn.: Z uvedeného výčtu kroků je zřejmé, že se jedná o postup, který v sobě zahrnuje množství specifických operací. Záleží na konkrétním výběru struktury modelu, prediktoru, ztrátové funkce a způsobu minimalizace. Různé volby těchto operací mohou být často známy jako samostatné identifikační metody.

3.5.3.2 Optimální predikce

Zaměřme se nyní první krok obecné metody chyby predikce, tj. výběr struktury modelu a formy prediktoru. Uvažujme co možná nejobecnější strukturu lineárního modelu. Takovou strukturou je struktura popsaná vztahem (3.1). Tu lze dále upravit do podoby

$$\begin{aligned} y(t) &= G(q^{-1};\theta)u(t) + [H(q^{-1};\theta) - I]e(t) + e(t) = \\ &= \{G(q^{-1};\theta)u(t) + [H(q^{-1};\theta) - I]H^{-1}(q^{-1};\theta)[y(t) - G(q^{-1};\theta)u(t)]\} + e(t) = \\ &= \{H^{-1}(q^{-1};\theta)G(q^{-1};\theta)u(t) + [I - H^{-1}(q^{-1};\theta)]y(t)\} + e(t). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Bude-li učiněn předpoklad na asymptotickou stabilitu filtrů $H^{-1}(q^{-1};\theta)$ a $H^{-1}(q^{-1};\theta)G(q^{-1};\theta)$ a že $G(0;\theta) = 0$ a $H(0;\theta) = I$, pak díky vztahu (3.35) lze optimální (jednokrokový) prediktor vyjádřit jako

$$\widehat{y}(t|t-1;\theta) = H^{-1}(q^{-1};\theta)G(q^{-1};\theta)u(t) + [I - H^{-1}(q^{-1};\theta)]y(t). \tag{3.36}$$

Chybu predikce pak vyjadřuje vztah

$$\varepsilon(t) = H^{-1}(q^{-1};\theta)[y(t) - G(q^{-1};\theta)u(t)]. \tag{3.37}$$

Pozn.: V odvození bylo využito předpokladu, že $e(t)$ je bílý šum. Pokud by tento předpoklad nebyl splněn, lze odvozeného prediktoru využít, avšak nelze již hovořit o optimální predikci.

3.5.3.3 Rekurzivní metody chyby predikce

Dříve v textu byl popsán rozdíl mezi nerekurzivním a rekurzivním způsobem práce identifikační metody. Ukažme nyní, jakým způsobem lze obecně vyjádřit rekurzivní metodu chyby predikce (pro odvození bylo využito zdrojů [3] a [4]).

Uvažujme pouze SISO systém, tj. nechť je volba ztrátové funkce ve tvaru

$$V_t(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t} \lambda^{t-s}\varepsilon^2(s;\theta), \tag{3.38}$$

kde $\lambda \in (0;1]$ je tzv. faktor zapomínání vhodný v případě uvažování identifikace parametrů t-variantního systému (pokud nechceme zapomínání uvažovat je třeba volit $\lambda = 1$). Dále je dobré si uvědomit, že máme k dispozici měření pouze do aktuálního času t, což je důvod zapsání aktuálního času do horní hranice sumace. Předpokládejme, že odhad θ, tj. $\widehat{\theta}$, nelze najít analyticky. Bude tedy nutné provést numerickou minimalizaci a provést jisté aproximace. Předpokládejme, že $\widehat{\theta}(t-1)$ minimalizuje $V_{t-1}(\theta)$ a že minimum $V_t(\theta)$ je blízko pro $\widehat{\theta}(t-1)$. Pak lze $V_t(\theta)$ aproximovat Taylorovou řadou okolo bodu $\widehat{\theta}(t-1)$. Uvažujme pouze první tři členy rozvoje, tj.

$$\begin{aligned} V_t(\theta) \approx\ & V_t(\widehat{\theta}(t-1)) + V_t^{'}(\widehat{\theta}(t-1))(\theta - \widehat{\theta}(t-1)) + \\ & + \frac{1}{2}(\theta - \widehat{\theta}(t-1))^T V_t^{''}(\widehat{\theta}(t-1))(\theta - \widehat{\theta}(t-1)), \end{aligned} \tag{3.39}$$

kde $V_t^{'}$ je řádkový vektor parciálních derivací a $V_t^{''}$ je Hessova matice. Při hledání extrému postupujme dále standardním způsobem v podobě položení první derivace rovno nule, tj.

$$V_t^{'T}(\widehat{\theta}(t-1)) + V_t^{''}(\widehat{\theta}(t-1))(\theta - \widehat{\theta}(t-1)) = 0. \tag{3.40}$$

Optimální odhad v čase t může být tedy stanoven z rovnice (3.40) v podobě

$$\widehat{\theta}(t) = \widehat{\theta}(t-1) - [V_t^{''}(\widehat{\theta}(t-1))]^{-1}[V_t^{'}(\widehat{\theta}(t-1))]^T. \tag{3.41}$$

Tento optimalizační postup odpovídá Newton-Raphson algoritmu pro hledání extrému funkce. Dále je nutné určit i rekurzivní vztahy pro derivace ztrátové funkce. Ty je možné určit přepsáním vztahu (3.38) do podoby

$$V_t(\theta) = \lambda V_{t-1}(\theta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(t;\theta) \tag{3.42}$$

a tento vztah postupně derivujme, čímž získáme

$$V_t^{'}(\theta) = \lambda V_{t-1}^{'}(\theta) + \varepsilon(t;\theta)\frac{\partial\varepsilon(t;\theta)}{\partial\theta} = \lambda V_{t-1}^{'}(\theta) + \varepsilon(t;\theta)\varepsilon^{'}(t;\theta), \tag{3.43}$$

$$V_t^{''}(\theta) = \lambda V_{t-1}^{''}(\theta) + \varepsilon(t;\theta)\varepsilon^{''}(t;\theta) + \varepsilon^{'T}(t;\theta)\varepsilon^{'}(t;\theta). \tag{3.44}$$

Proveďme dále několik aproximací. Nejprve předpokládejme, že funkce $V_{t-1}(\theta)$ nabývá minimální hodnoty v bodě $\widehat{\theta}(t-1)$, tj. $V_{t-1}^{'}(\widehat{\theta}(t-1)) = 0$. Dalším předpokladem nechť je skutečnost, že se druhá derivace ztrátové funkce nemění s θ čili $V_{t-1}^{''}(\widehat{\theta}(t-1)) = V_{t-1}^{''}(\widehat{\theta}(t-2))$. Poslední aproximací pak bude $\varepsilon(t)\varepsilon^{''}(t) = 0$, která vychází z předpokladu, že pro odhad parametrů blížící se ke skutečným parametrům bude chyba predikce bílým šumem. Využitím těchto aproximací lze vztahy (3.43) a (3.44) přepsat jako

$$V_t^{'}(\widehat{\theta}(t-1)) = -\varepsilon(t;\widehat{\theta}(t-1))\psi^T(t;\widehat{\theta}(t-1)), \tag{3.45}$$

$$V_t^{''}(\widehat{\theta}(t-1)) = \lambda V_{t-1}^{''}(\widehat{\theta}(t-2)) + \psi(t;\widehat{\theta}(t-1))\psi^T(t;\widehat{\theta}(t-1)), \tag{3.46}$$

kde

$$\psi(t;\theta) = -[\frac{\partial\varepsilon(t;\theta)}{\partial\theta}]^T. \tag{3.47}$$

Nyní lze přepsat vztah (3.41) využitím rovnic (3.45) a (3.46) do tvaru

$$\widehat{\theta}(t) = \widehat{\theta}(t-1) - R^{-1}(t)\varepsilon(t;\widehat{\theta}(t-1))\psi(t;\widehat{\theta}(t-1)), \tag{3.48}$$

kde $R(t) \triangleq V_t^{''}(\widehat{\theta}(t-1))$ a platí tedy

$$R(t) = \lambda R(t-1) + \psi(t;\widehat{\theta}(t-1))\psi^T(t;\widehat{\theta}(t-1)). \tag{3.49}$$

Výpočet $\varepsilon(t;\widehat{\theta}(t-1))$ a $\psi(t;\widehat{\theta}(t-1))$ se bude odvíjet od konkrétní struktury modelu. Pro některé struktury vyžaduje výpočet těchto členů zpracování všech dat až do času t. Aby bylo možné počítat tyto veličiny pouze z posledních dat, proveďme aproximace $\varepsilon(t;\theta) \approx \varepsilon(t;\widehat{\theta}(t-1))$ a $\psi(t;\theta) \approx \psi(t;\widehat{\theta}(t-1))$.

Pro definitivní zápis postupu rekurzivní metody chyby predikce je pak třeba vyřešit problém s členem $R^{-1}(t)$ v rovnici (3.48). Jedná se totiž o inverzi matice, což je značně komplikovaná numerická operace. Jednou z možností, jak se s tímto problémem vypořádat je pomoci si tzv. maticovou inverzní identitou. Ta tvrdí, že pro čtveřici matic W, X, Y a Z, kde W je regulární, platí vztah

$$[W + XYZ]^{-1} = W^{-1} - W^{-1}X[Y^{-1} + ZW^{-1}X]^{-1}ZW^{-1}. \tag{3.50}$$

Definujme proto $P(t)$ jako

$$P(t) = R^{-1}(t). \tag{3.51}$$

Z rovnice (3.49) pak získáme rekurzivní tvar pro určení $P(t)$ v podobě

$$P^{-1}(t) = \lambda P^{-1}(t-1) + \psi(t)\psi^T(t). \tag{3.52}$$

Aplikací maticové identity (3.50) na vztah (3.52), kde $W = \lambda P(t-1)$, $X = \psi(t)$, $Y = I$ a $Z = \psi^T(t)$, lze získat rekurzivní vztah pro výpočet $P(t)$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda}[P(t-1) - \frac{P(t-1)\psi(t)\psi^T(t)P(t-1)}{\lambda + \psi^T(t)P(t-1)\psi(t)}]. \tag{3.53}$$

Tímto byl odvozen obecný zápis rekurzivní metody chyby predikce pro SISO systém a zbývá jen zapsat kompletní algoritmus, který může být popsán rovnicemi seřazenými za sebou jako jednotlivé kroky algoritmu

$$L(t) = \frac{P(t-1)\psi(t)}{\lambda + \psi^T(t)P(t-1)\psi(t)}, \tag{3.54}$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda}[P(t-1) - L(t)\psi^T(t)P(t-1)], \tag{3.55}$$

$$\widehat{\theta}(t) = \widehat{\theta}(t-1) + L(t)\varepsilon(t). \tag{3.56}$$

Dále je samozřejmě nutné určit počáteční (startovací) podmínky $\widehat{\theta}(0) = \widehat{\theta}_0$ a $P(0) = P_0$. Obvyklou volbou při neznalosti apriorní informace o parametrech je $\widehat{\theta}_0 = 0$ a $P_0 = \rho I$, kde ρ je nějaké „velké" číslo.

3.5.3.4 ARX model

Proveďme konkrétnější vyjádření metody chyby predikce pro některé z uvedených struktur parametrizovaných lineárních modelů. Nechť je první takovou strukturou ARX model definovaný vztahem (3.17).

1. Optimální prediktor je pro obecný lineární model určen vztahem (3.36). Dosazením struktury modelu ARX ($G(q^{-1};\theta) = B(q^{-1})/A(q^{-1})$ a $H(q^{-1};\theta) = 1/A(q^{-1})$) získáme optimální (jednokrokový) prediktor v podobě

   $$\widehat{y}(t|t-1;\theta) = B(q^{-1})u(t) + [1 - A(q^{-1})]y(t). \tag{3.57}$$

   Pro připomenutí - vektor parametrů ARX modelu je dán vztahem (3.16). Prediktor (3.57) lze pomocí vektoru parametrů vyjádřit jako

   $$\widehat{y}(t|t-1) = \varphi^T(t)\theta, \tag{3.58}$$

   kde $\varphi(t)$ označuje vektor regresorů definovaný vztahem

   $$\varphi(t) = [-y(t-1), \ldots, -y(t-na), u(t-1), \ldots, u(t-nb)]^T. \tag{3.59}$$

   Chybu predikce lze pak určit jako

   $$\varepsilon(t;\theta) = y(t) - \widehat{y}(t|t-1;\theta). \tag{3.60}$$

2. Volba ztrátové funkce nechť je provedena v souladu se vztahem (3.34) jako

$$V_N(\theta) = R_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}\varepsilon^2(t;\theta). \tag{3.61}$$

3. Úlohu hledání takového $\widehat{\theta}$, pro které ztrátová funkce nabývá minimum, je možné řešit analyticky jako

$$\widehat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} V_N(\theta) = [\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t). \tag{3.62}$$

Nerekurzivní metoda chyby predikce daná zmíněnými třemi kroky je známá též jako *metoda nejmenších čtverců* (*least squares method*).

Pokusme se dále o odvození rekurzivního algoritmu chyby predikce pro ARX model, tj. rekurzivní metody nejmenších čtverců.

1. Pomocí vztahu (3.37) vyjádřeme chybu predikce jako

$$\varepsilon(t) = A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t). \tag{3.63}$$

2. Proveďme výpočet $\psi(t;\theta)$ definovaného vztahem (3.47), tj. určeme nejprve parciální derivace $\varepsilon(t;\theta)$ podle parametrů jako

$$\frac{\partial\varepsilon(t;\theta)}{\partial a_i} = y(t-i), \quad i = 1,\ldots,na, \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial\varepsilon(t;\theta)}{\partial b_j} = -u(t-j), \quad j = 1,\ldots,nb. \tag{3.65}$$

$\psi(t;\theta)$ lze tedy vyjádřit jako

$$\psi(t;\theta) = [-y(t-1),\ldots,-y(t-na),u(t-1),\ldots,u(t-nb)]^T = \varphi(t). \tag{3.66}$$

3. Jelikož parametry modelu nejsou známy, je třeba vyjádřit chybu predikce v aktuálním časovém okamžiku na základě znalosti odhadu parametrů z předchozího okamžiku jako

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\widehat{\theta}(t-1). \tag{3.67}$$

4. Obecný algoritmus rekurzivní metody chyby predikce popsaný rovnicemi (3.54), (3.55) a (3.56) s počátečními podmínkami $\widehat{\theta}(0) = \widehat{\theta}_0$ a $P(0) = P_0$ přejde v případě ARX struktury modelu do podoby (předpokládejme identifikaci t-invariantního systému, tj. volme $\lambda = 1$)

$$L(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{1+\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}, \tag{3.68}$$

$$P(t) = P(t-1) - L(t)\varphi^T(t)P(t-1), \tag{3.69}$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\widehat{\theta}(t-1), \tag{3.70}$$

$$\widehat{\theta}(t) = \widehat{\theta}(t-1) + L(t)\varepsilon(t). \tag{3.71}$$

3.5.3.5 OE model

Nyní se zaměřme na metodu chyby predikce s použitím struktury modelu OE popsané vztahem (3.18). Postupujme obdobně jako tomu bylo v případě předchozí kapitoly týkající se ARX modelu, tj. nejprve se zaměřme na off-line způsob identifikace.

1. Optimální prediktor je pro obecný lineární model určen vztahem (3.36). Dosazením struktury modelu OE ($G(q^{-1};\theta) = B(q^{-1})/F(q^{-1})$ a $H(q^{-1};\theta) = 1$) získáme optimální (jednokrokový) prediktor v podobě

$$\widehat{y}(t|t-1;\theta) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t). \tag{3.72}$$

2. Volba ztrátové funkce nechť je provedena v souladu se vztahem (3.34) jako

$$V_N(\theta) = R_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}\varepsilon^2(t;\theta), \tag{3.73}$$

   kde chybu predikce $\varepsilon(t;\theta)$ lze vyjádřit jako

$$\varepsilon(t;\theta) = y(t) - \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t). \tag{3.74}$$

3. Úlohu hledání takového $\widehat{\theta}$, pro které ztrátová funkce nabývá minimum, již není možné řešit analyticky, neboť $V_N(\theta)$ nezávisí na parametrech lineárně. Bude tedy nutné přikročit k numerickému řešení.

   Často používaný postup hledání extrému představuje algoritmus typu Newton-Raphson, jehož struktura byla již uvedena v rámci odvození rekurzivního algoritmu chyby predikce rovnicí (3.41). Ten je výhodné přepsat do podoby

$$\widehat{\theta}^{(k+1)} = \widehat{\theta}^{(k)} - \alpha_k[V_t^{''}(\widehat{\theta}^{(k)})]^{-1}[V_t^{'}(\widehat{\theta}^{(k)})]^T, \tag{3.75}$$

   kde $\widehat{\theta}^{(k)}$ představuje k-tou iteraci hledání extrému a α_k je skalár, jehož hodnota určuje délku kroku (ovlivňuje rychlost postupu). Zaveďme obdobně jako v případě vztahu (3.47) $\psi(t;\theta)$ a postupně derivujme ztrátovou funkci $V_N(\theta)$, čímž získáme

$$V_N^{'}(\theta) = -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon(t;\theta)\psi^T(t;\theta), \tag{3.76}$$

$$V_N^{''}(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\psi(t;\theta)\psi^T(t;\theta) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon(t;\theta)\frac{\partial^2\varepsilon(t;\theta)}{\partial\theta^2}. \tag{3.77}$$

   Neboť lze předpokládat, že pro $N \to \infty$ se bude $\varepsilon(t;\theta)$ blížit k bílému šumu, může být druhá derivace (3.77) aproximována jako

$$V_N^{''}(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\psi(t;\theta)\psi^T(t;\theta). \tag{3.78}$$

   Využitím odvozených derivací ztrátové funkce ve vztahu (3.75) získáme

$$\widehat{\theta}^{(k+1)} = \widehat{\theta}^{(k)} + \alpha_k[\sum_{t=1}^{N}\psi(t;\widehat{\theta}^{(k)})\psi^T(t;\theta^{(k))}]^{-1}[\sum_{t=1}^{N}\varepsilon(t;\theta^{(k)})\psi(t;\theta^{(k)})]. \tag{3.79}$$

Jedná se o tzv. Gauss-Newtonův algoritmus (základní verze pro $\alpha_k = 1$). Existuje značné množství modifikací tohoto algoritmu zlepšující jeho vlastnosti jako např. numerickou stabilitu, konvergenci apod. Některé z nich je možné naleznout v [4] nebo [5]. Dále si je nutné uvědomit, že byť je $\widehat{\theta}$ počítáno rekurzivně, nejedná se v žádném případě o rekurzivní metodu, neboť pro každý krok k odhadu $\widehat{\theta}$ se uplatňují všechna měření z ukončeného experimentu.

Pro OE strukturu můžeme $\varepsilon(t;\theta^{(k)})$ a $\psi(t;\theta^{(k)})$ vyjádřit následujícím postupem. Určeme nejprve parciální derivaci obecné chyby predikce OE modelu $\varepsilon(t;\theta)$ definované vztahem (3.74) podle parametrů θ, tj.

$$\frac{\partial\varepsilon(t;\theta)}{\partial f_i} = \frac{1}{F(q^{-1})}w(t-i), \quad i = 1,\ldots,nf, \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial\varepsilon(t;\theta)}{\partial b_j} = -\frac{1}{F(q^{-1})}u(t-j), \quad j = 1,\ldots,nb, \tag{3.81}$$

kde $w(t)$ je přefiltrovaný vstupní signál v podobě

$$w(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t). \tag{3.82}$$

Zaveďme vektor regresorů pro OE model jako

$$\varphi(t;\theta) = [-w(t-1),\ldots,-w(t-nf),u(t-1),\ldots,u(t-nb)]^T. \tag{3.83}$$

Potom lze vyjádřit $\psi(t;\theta)$ jako

$$\psi(t;\theta) = \frac{1}{F(q^{-1})}\varphi(t;\theta). \tag{3.84}$$

V Gauss-Newtonově nebo jiném podobném algoritmu pro numerické hledání minima ztrátové funkce pak nahradíme neznámé parametry odhadem parametrů v kroku k. Hledané $\varepsilon(t;\theta^{(k)})$ a $\psi(t;\theta^{(k)})$ lze tak určit jako

$$\varepsilon(t;\widehat{\theta}^{(k)}) = y(t) - \frac{B(q^{-1};\widehat{\theta}^{(k)})}{F(q^{-1};\widehat{\theta}^{(k)})}u(t), \tag{3.85}$$

$$\psi(t;\widehat{\theta}^{(k)}) = \frac{1}{F(q^{-1};\widehat{\theta}^{(k)})}\varphi(t;\widehat{\theta}^{(k)}), \tag{3.86}$$

kde

$$\varphi(t;\widehat{\theta}^{(k)}) = [-\widehat{w}^{(k)}(t-1),\ldots,-\widehat{w}^{(k)}(t-nf),u(t-1),\ldots,u(t-nb)]^T, \tag{3.87}$$

$$\widehat{w}^{(k)}(t) = \frac{B(q^{-1};\widehat{\theta}^{(k)})}{F(q^{-1};\widehat{\theta}^{(k)})}u(t). \tag{3.88}$$

Nerekurzivní metoda chyby predikce pro OE model se někdy označuje též jako *metoda výstupní chyby* (*output error method*). Je zřejmé, že bude-li potřeba zpracovávat velké množství dat, bude se také nutné smířit s časovou náročností této metody. Bude již tedy nutné zvážit, zda není výhodnější využít její rekurzivní podobu, kterou se nyní opět pokusme vyjádřit.

1., 2. Nejprve vyjádříme chybu predikce a dále určíme její parciální derivace podle parametrů. To jsme již provedli dříve a hledané vztahy formálně odpovídají vztahům (3.74), (3.80) a (3.81). Dále vyjádříme opět $\psi(t;\theta)$ vztahem (3.84).

3. Jelikož parametry modelu nejsou známy, je třeba vyjádřit chybu predikce $\varepsilon(t;\theta)$ definovanou vztahem (3.74), v aktuálním časovém okamžiku na základě znalosti odhadu parametrů z předchozího okamžiku, tj.

$$\varepsilon(t;\widehat{\theta}(t-1)) = y(t) - \frac{B(q^{-1};\widehat{\theta}(t-1))}{F(q^{-1};\widehat{\theta}(t-1))}u(t). \tag{3.89}$$

Taktéž $\psi(t;\theta)$ je třeba určovat rekurzivně a to jako

$$\psi(t;\widehat{\theta}(t-1)) = \frac{1}{F(q^{-1};\widehat{\theta}(t-1))}\varphi(t;\widehat{\theta}(t-1)), \tag{3.90}$$

kde

$$\varphi(t;\widehat{\theta}(t-1)) = [-\widehat{w}(t-1),\ldots,-\widehat{w}(t-nf),u(t-1),\ldots,u(t-nb)]^T, \tag{3.91}$$

$$\widehat{w}(t) = \frac{B(q^{-1};\widehat{\theta}(t-1))}{F(q^{-1};\widehat{\theta}(t-1))}u(t), \tag{3.92}$$

neboť $\widehat{w}(t)$ je možné určit ze znalosti dat až po okamžik t (je možné jej vypočítat až po výpočtu $\widehat{\theta}(t)$).

4. Obecný algoritmus rekurzivní metody chyby predikce popsaný rovnicemi (3.54), (3.55) a (3.56) s počátečními podmínkami $\widehat{\theta}(0) = \widehat{\theta}_0$ a $P(0) = P_0$ přejde v případě OE struktury modelu do podoby (předpokládejme identifikaci t-invariantního systému, tj. volme $\lambda = 1$)

$$L(t) = \frac{P(t-1)\psi(t;\widehat{\theta}(t-1))}{1+\psi^T(t,\widehat{\theta}(t-1))P(t-1)\psi(t;\widehat{\theta}(t-1))}, \tag{3.93}$$

$$P(t) = P(t-1) - L(t)\psi^T(t;\widehat{\theta}(t-1))P(t-1), \tag{3.94}$$

$$\varepsilon(t;\widehat{\theta}(t-1)) = y(t) - \frac{B(q^{-1};\widehat{\theta}(t-1))}{F(q^{-1};\widehat{\theta}(t-1))}u(t), \tag{3.95}$$

$$\widehat{\theta}(t) = \widehat{\theta}(t-1) + L(t)\varepsilon(t;\widehat{\theta}(t-1)). \tag{3.96}$$

Nutno poznamenat, že existuje řada algoritmů, které tento výše popsaný algoritmus v různých směrech vylepšují.

3.6 Funkcionální přístup k identifikaci

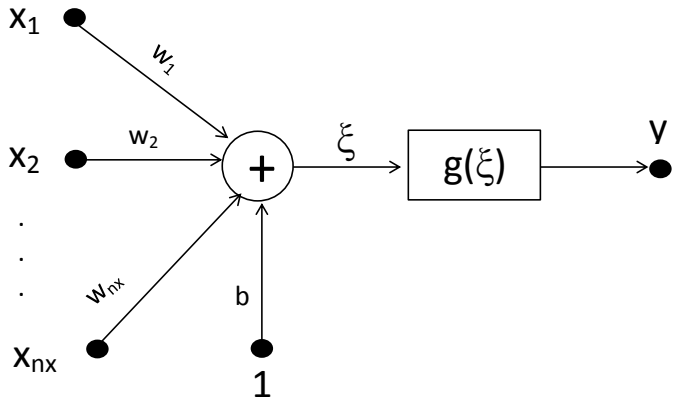
Na rozdíl od identifikace lineárních modelů, kde je transformace vstupů na výstupy předpokládána jako lineární zobrazení, jsou v případě funkcionálního přístupu uvažovány obecné nelineární funkce. Funkcionální přístup tak v sobě zahrnuje fuzzy modely, gaussovské procesy apod. Speciálním případem funkcionálního přístupu je také identifikace pomocí neuronových sítí, které bude věnována pozornost v této části práce.

3.6.1 Vícevrstvá perceptronová síť

Konkrétněji se pak bude jednat o vícevrstvé perceptronové sítě, které se prosazují v identifikaci díky své schopnosti aproximovat libovolnou nelineární funkci teoreticky až s nekonečnou přesností [8]. Základním prvkem každé perceptronové sítě je tzv. perceptron, jehož funkci lze vyjádřit jako

$$y = g(\xi) = g(\sum_{i=1}^{nx} w_i x_i + b), \tag{3.97}$$

kde $x \in R$ označuje vstup perceptronu, $y \in R$ výstup perceptronu, $w_i \in R$ jsou váhy a $b \in R$ je práh. Jedná se tedy o jednotku, ve které je vážený součet vstupů ξ parametrem aktivační funkce $g(\xi)$. Základní idea perceptronu je ilustrována na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Perceptron.

Jmenujme dále alespoň některé z frekventovaně používaných aktivačních funkcí [8]:

- lineární aktivační funkce $g(\xi) = \xi$,
- hyperbolický tangens $g(\xi) = \tanh(\xi)$,
- sigmoidální aktivační funkce $g(\xi) = \dfrac{1}{1 + e^{-\xi}}$.

Vícevrstvou perceptronovou sítí (MLP) pak označujeme takovou síť, která má jednu nebo více skrytých vrstev a výstupní vrstvu, které jsou složeny z různého počtu perceptronů s obecně různou aktivační funkcí. Jako příklad vícevrstvé perceptronové sítě poslouží konkrétně taková neuronová síť, která má I vstupů, J neuronů ve skryté vrstvě a jeden výstup - viz obrázek 3.3. Touto strukturou se budeme zabývat i v následující podkapitole, a proto je pro nás znalost její struktury obzvlášť výhodná. Matematickým popisem lze výstup takové sítě vyjádřit jako

$$y = g(Vz + d) = g\{V[f(Wx + b)] + d\}, \tag{3.98}$$

kde matice W a V jsou tzv. váhové matice popř. vektory v podobě

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1I} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2I} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w_{J1} & & & w_{JI} \end{bmatrix}, \tag{3.99}$$

$$V = [v_{11}, \dots, v_{1J}], \tag{3.100}$$

b a d jsou tzv. prahové vektory, resp. skaláry, kde vektor b je definován jako

$$b = [b_1, \dots, b_J]. \tag{3.101}$$

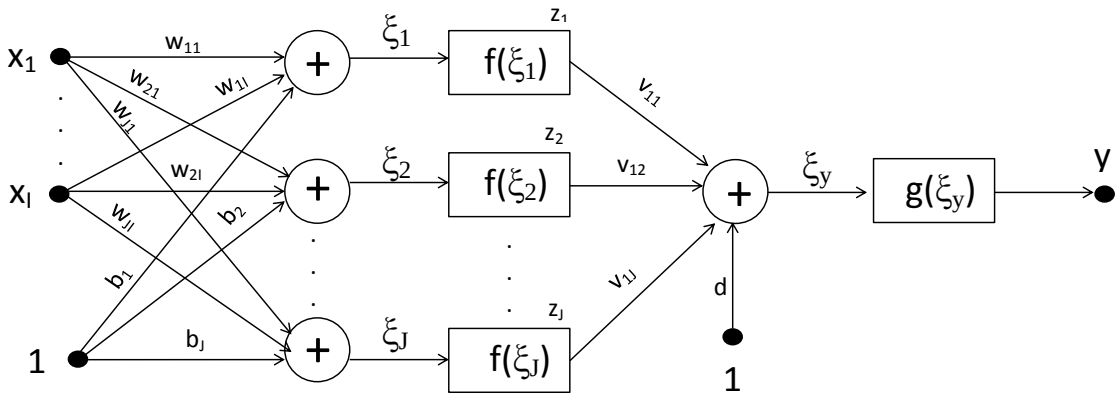
O vektoru x pak hovoříme jako o vstupním vektoru, tj.

$$x = [x_1, \dots, x_I]^T \tag{3.102}$$

a o vektoru z jako o výstupním vektoru skryté vrstvy, resp. vstupním vektoru výstupní vrstvy, tj.

$$z = [z_1, \dots, z_J]^T. \tag{3.103}$$

Jako aktivační funkci neuronů ve skryté vrstvě pak uvažujeme f a ve výstupní vrstvě je neuron s aktivační funkcí g.



Obrázek 3.3: Struktura neuronové sítě.

V souvislosti s identifikací se uvedené struktury sítě používá jako nelineární analogie k lineárním parametrickým modelům. Různou podobou vstupního vektoru sítě lze snadno získat některý z nelineárních modelů označovaných podle své lineární analogie například jako NNFIR, NNARX, NNOE atd. V případě této práce bude pozornost zaměřena na NNARX strukturu sítě. Více informací o neuronových sítích je možné nalézt v [6] a [7].

3.6.2 NNARX model

Mezi často používané struktury neuronových sítí používaných v identifikaci patří NNARX struktura. Obecně ji lze pro SISO případ vyjádřit následovně

$$y(t) = \overline{f}[\varphi(t;\theta);\theta] + e(t). \tag{3.104}$$

Pod obecně nelineární funkcí $\overline{f}$ je myšlena struktura sítě. Nejčastějším případem je volba jedné skryté vrstvy s nelineární aktivační funkcí (obvykle hyperbolický tangens). Výstupní vrstva obsahuje neuron s lineární aktivační funkcí. Přidržíme-li se tedy takové struktury sítě, pak si je NNARX model možné představit jako síť na obrázku 3.3, kde vstupním vektorem je vektor regresorů definovaný jako

$$\varphi(t;\theta) = [y(t-1), \ldots, y(t-ny), u(t-1), \ldots, u(t-nu)]^T. \tag{3.105}$$

a vektor parametrů v sobě zahrnuje všechny váhy a prahy sítě, tj.

$$\theta = [W_1, \ldots, W_J, b^T, V, d]^T, \tag{3.106}$$

kde W_i označuje i-tou řádku váhové matice skryté vrstvy. Počet neuronů skryté vrstvy je tedy opět uvažován jako J. Váhová matice skryté vrstvy W je tak typu $J \times (ny + nu)$ a prahový vektor skryté vrstvy b je $J \times 1$. Váhová matice (váhový vektor) výstupní vrstvy V má rozměr $1 \times J$ a práh d je skalár.

U lineárního ARX modelu vedlo použití metody chyby predikce na jednokrokový prediktor, jehož parametry byly voleny tak, aby chyby predikce byly co možná nejmenší. V případě NNARX modelu můžeme z obecného vztahu (3.104) jednokrokový prediktor vyjádřit jako

$$\widehat{y}(t|t-1;\theta) = \overline{f}[\varphi(t;\theta);\theta]. \tag{3.107}$$

Zbývá se tedy zabývat možností nalezení takového vektoru parametrů NNARX modelu, který by v případě prediktoru zajistil generování predikcí s co možná nejmenší chybou. Zabývejme se tedy dále takovými metodami odhadu parametrů NNARX modelu, které minimalizují chybu predikce (3.60), resp. hledají takový vektor parametrů sítě, který minimalizuje ztrátovou funkci. Ztrátovou funkci můžeme definovat obdobně jako v případě lineárního ARX modelu, tj. vztahem (3.61). Chybu predikce $\varepsilon(t)$ pak pro zmíněnou síť vyjádříme snadno jako

$$\varepsilon(t;\theta) = y(t) - \overline{f}[\varphi(t;\theta);\theta]. \tag{3.108}$$

Vidíme tak, že obdobně jako v případě OE modelu nelze hledat minimum analytickým způsobem, neboť hodnota ztrátové funkce opět nezávisí na vektoru parametrů lineárně. Je tedy nutné přistoupit znovu k numerickému hledání minima ztrátové funkce. V případě OE modelu jsme uplatnili Gauss-Newtonův algoritmus, který je možné aplikovat i v případě perceptronových sítí. Obecně lze pak proces hledání vektoru parametrů sítě vyjádřit jako

$$\theta(t)^{(k+1)} = \theta^{(k)} - H^{-1}(\theta^{(k)})G(\theta^{(k)}), \tag{3.109}$$

kde $H(\theta^{(k)})$ je Hessova matice kriteriální funkce (matice druhých parciálních derivací ztrátové funkce podle vektoru parametrů) a $G(\theta^{(k)})$ je gradient ztrátové funkce podle vektoru parametrů. Podoba ztrátové funkce se odvíjí od zvolené struktury sítě. Obvykle má však velké množství lokálních minim, a proto bývá mnohdy výhodné použít k hledání vektoru parametrů některý z algoritmů, které se problému uvíznutí v lokálním minimu snaží vyhnout. Jmenujme zde například Levenberg-Merquardtovu metodu popsanou v [6]. Je také nutné zmínit velký vliv počátečních podmínek $\theta^{(0)}$ na kvalitu odhadu.

V souvislosti s MLP sítěmi se o problému hledání parametrů sítě hovoří jako o učení nebo trénování sítě a algoritmy podobné (3.109) se označují jako dávkové metody, neboť v každé iteraci je neuronové síti předložena celá množina dat a na základě toho je upravena hodnota parametrů.

4 Identifikační experimenty

Následující část textu je věnována praktickému využití metod identifikace systémů při hledání vhodného modelu šíření vzruchu v materiálu. Po shrnutí obecných specifik týkajících se omezení, které souvisí s volbou struktury modelu a experimentálních podmínek, a po širší diskuzi o problémech řešené úlohy jsou uvedeny výsledky metod identifikace. Nejprve je uvedena aplikace metody na model šíření vzruchu v nosníku (bod A.), poté aplikace metody na data z reálného experimentu (bod B.) a na závěr zhodnocení dosažených výsledků (bod C.).

4.1 Problémy úlohy

4.1.1 Struktura modelu

V případě parametrických metod byla soustředěna pozornost práce na takové systémy, u kterých předpokládáme, že jejich vstupně-výstupní chování je možné popsat lineární diferenční rovnicí. Pro nosník byl učiněn předpoklad ideálního homogenního izotropního materiálu a předpoklad malých velikostí působících sil a výsledných deformací. Podrobnější analýzou obecného řešení parciální diferenciální rovnice popisující chování nosníku ve formě (2.16) bychom tak dospěli k závěru, že popis lineární diferenční rovnicí je možný.

V případě reálného materiálu tyto předpoklady splněny nebudou. Vhodnější pro popis by proto byl nelineární model. Z fyzikální podstaty věci je však zřejmé, že modelování šíření vzruchu v kompozitním materiálu je velmi složitý problém. Již byl zmíněn vliv synergismu a dalších skutečností, které celou situaci komplikují. Přesto i zde se lze parametrizovanými lineární modely zabývat a to především ve formě prediktoru.

4.1.2 Experimentální podmínky

.

U nosníku je situace týkající se experimentálních podmínek samozřejmě lepší než v případě reálného experimentu, protože se jedná o zjednodušený model, na který lze aplikovat různé experimentální podmínky. A to i ty leckdy s reálným světem neslučitelné. V případě reálného experimentu však představují experimentální podmínky největší omezení práce, neboť se odkazuje na naměřené hodnoty z externího zdroje. Nebylo tedy možné experimentální podmínky během zpracování práce ovlivnit, tj. ideální postup identifikace diskutovaný v podkapitole 3.3 nemohl být plně dodržen.

Následující výčet obsahuje shrnutí omezení experimentálních podmínek reálného experimentu. V kontrastu s těmito omezeními je pak v některých případech uvedeno možné vylepšení aplikované v identifikačních experimentech alespoň na model nosníku:

- *vstupní signál* - největší problém z identifikačního úhlu pohledu činní silový impuls, který představuje vstup. Přesněji řečeno se jedná o vstup s impulsním charakterem - viz obrázek 2.10. O vstupu v podobě impulsu se v souvislosti s identifikací hovoří jako o trvale vybuzeném signálu (p.e.; persistently exciting) žádného (nultého) řádu, neboť platí (viz definice p.e. v [3])

  1)

$$\exists r_u(\tau) : r_u(\tau) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} [u(t+\tau)][u^T(t)] = 0, \tag{4.1}$$

2)

$$R_u(n) = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & \dots & r_u(n-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & & & r_u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Lze ukázat (viz [3]), že volba takového vstupního signálu způsobí nekonzistentnost odhadu parametrů, tj. neplatí $\widehat{\theta} \to \theta$ pro $N \to \infty$.

Alespoň pro případ modelu nosníku je tedy výhodné uvažovat jako vstupní signál vybuzený signál vyššího řádu - ideálně pak bílý šum ($Eu(t) = 0$, $Eu^2(t) = \sigma_u^2$), který představuje vybuzený signál všech řádů, neboť

1)

$$\exists r_u(\tau) : r_u(\tau) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} [u(t+\tau)][u^T(t)] = E[u(t+\tau)][u^T(t)] \quad (4.3)$$

2)

$$R_u(n) = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \sigma_u^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Matice $R_u(n)$ je pozitivně definitní pro $\forall$ n.

Aby bylo možné uvažovat u nosníku vstupní signál jako bílý šum je nutné vztah pro vstupní sekvenci (2.13) přepsat do podoby

$$F_n(t) = \sum_{m=0}^{\overline{M}} u(m)\delta(t - T_I m)\Phi_n(x_j), \quad (4.5)$$

kde $u(m)$ je bílý šum. V dalších aplikacích budeme předpokládat, že $Eu(m) = 0$, $Eu^2(m) = 1$ a že $M =$ počtu vzorků a $T_I = T_s$.

- *výstupní signál* - výstupní signál reálného experimentu byl diskutován již v rámci podkapitoly 2.6.2, kde bylo uvedeno, že má podobu napětí generovaného piezokrystalem v piezoelektrickém senzoru a též zde byla diskutována omezení, která z toho plynou. Co se modelu nosníku týče, abychom dodrželi předpoklad stochastičnosti procesu, provedeme přidání šumu do rovnice výchylky (2.16) v podobě

$$\begin{aligned} y(x_i, t) &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{\overline{M}} \frac{\Phi_n(x_i)\Phi_n(x_j)F_{j,m}}{\omega_{d_n}} H(t - T_I m) e^{-\xi_n \omega_n (t - T_I m)} sin\omega_{d_n}(t - T_I m) + \\ &+ e(t), \end{aligned} \quad (4.6)$$

kde $e(t)$ bude uvažován jako bílý šum takový, že $Ee(t) = 0$ a $Ee^2(t) = \sigma_e^2$. Nutno dále poznamenat, že volba variance šumu σ_e^2 by neměla být příliš velká, neboť výchylka se pohybuje řádově okolo 10^{-4} - viz obrázek 2.8. V případě, že bychom tedy zvolili varianci šumu neadekvátně velkou, hrozila by ztráta veškeré informace o vývoji odchylky. Nechť je tedy pro další postup volba variance šumu $\sigma_e^2 = 10^{-9}$.

- *perioda vzorkování* - perioda vzorkování při reálném experimentu byla $T_s = 2 \cdot 10^{-5} s$. Počet naměřených vzorků byl pak 1803. V případě modelu nosníku byla zvolena stejná perioda vzorkování a počet vzorků byl volen 2000.

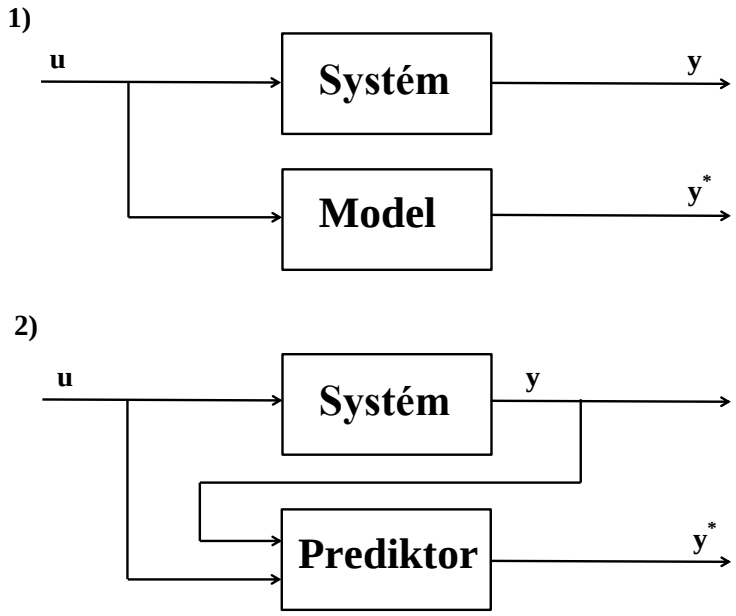
4.2 Validace modelu

Dříve než přejdeme k samotným identifikačním experimentům, je třeba si stanovit určitá kritéria, kterými budeme hodnotit kvalitu modelu získaných některou z aplikovaných identifikačních metod. Nejprve diskutujme cíl. Jako cíl jsme si určili nalezení matematického popisu šíření vzruchu v desce z kompozitního materiálu resp. vzruchu v modelu nosníku způsobeném silovým impulsem. Měli bychom se tedy soustředit primárně na to, jak „dobře" popisuje model tento proces.

Problém však je, že neznáme vhodnou volbu řádu modelu. Zaveďme tedy střední kvadratickou chybu jako

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} [y(t) - y^*(t)]^2, \tag{4.7}$$

kde $y(t)$ je naměřený výstup systému v čase t, $y^*(t)$ je výstup modelu v čase t a $t = 1, \ldots, N$. V rámci teoretické části jsme diskutovali dvě možné funkce modelů získaných identifikací a to jako modelu vhodného pro simulaci a prediktoru. Výstup $y^*(t)$ je tedy nutné vnímat podle účelu modelu, který daná metoda předpokládá. Obrázek 4.1 ilustruje dvě zmíněné situace použití modelu. První situace je použití modelu pro simulaci, druhá je model určený pro predikci.



Obrázek 4.1: Použití modelů získaných identifikací.

Střední kvadratická chyba pro data použitá pro identifikaci parametrů modelu je obvykle nerostoucí vzhledem k řádu modelu. Střední kvadratická chyba pro validační data nejprve také klesá, ale často začne při určitém řádu zase růst. Řád modelu, při kterém střední kvadratická chyba nabývá minima pro validační data, lze pokládat za vhodný řád

modelu. V dalším postupu tak nejprve provedeme identifikaci na jednom souboru vstupně-výstupních dat. V případě modelu nosníku budou tato data generována dle vztahu (4.6). U naměřených dat se bude jednat o volbu jedné naměřené dvojice konkrétní místo dopadu kladiva a konkrétní senzor.

Pomocí modelů různých řádů získaných identifikací se pak budeme snažit popsat validační data. Jako validační data uvažujme v případě nosníku dvě sekvence vstupně-výstupních dat generovaných modelem (4.6), kde položíme $\overline{M} = 0$. To znamená, že uvažujeme odezvu na silový impuls v okamžiku $t = 0$. V případě první sekvence volme velikost silového impulsu $F_{j,0} = 1[N \cdot m^{-1}]$ a v případě druhé sekvence $F_{j,0} = 2[N \cdot m^{-1}]$. U reálně naměřených dat pak jako validační data poslouží dvě zbývající naměřené dvojice konkrétní místo dopadu kladiva a konkrétní senzor.

V rámci validace budeme zkoumat reakci modelu na odpovídající vstup a to tak, že budeme sledovat hodnotu ϵ. Řád modelu, kde se ϵ začne zvětšovat zvolíme jako vhodný řád modelu. Sledování střední kvadratické chyby je adekvátní kritériu metod chyby predikce zavedeném vztahem (3.33).

4.3 Parametrické metody identifikace

4.3.1 Korelační analýza

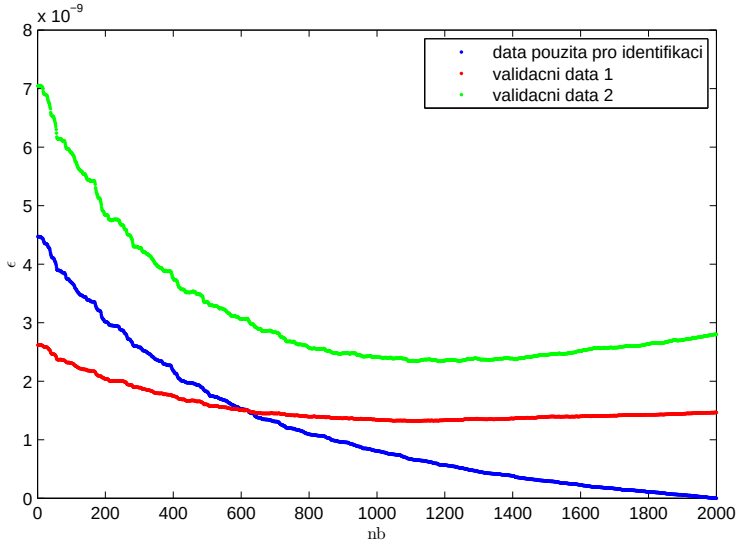
V rámci podkapitoly 3.5.2 jsme se zabývali korelační analýzou s předpokladem useknuté váhové sekvence, na kterou bylo díky tomuto předpokladu možné pohlížet jako na parametrickou metodu. Korelační analýzou získáme FIR model (3.24), jehož výstup je závislý pouze na vstupu. Jedná se tak o model vhodný k simulaci. Řádem modelu pak budeme rozumět zvolený počet členů váhové sekvence, resp. stupeň polynomu $B(q^{-1})$ nb v případě polynomiálního zápisu FIR modelu (3.25). Pokud se budeme zabývat střední kvadratickou chybou, bude se jednat o střední kvadratickou chybu rozdílu výstupu identifikovaného systému a modelu. Jedná se tedy o situaci 1 ilustrovanou na obrázku 4.1.

A. Model šíření vzruchu v nosníku:

   Pro identifikaci nosníku zkoumejme dva druhy vstupního signálu. Prvním nechť je impuls $F_{j,0} = 1,5[N \cdot m^{-1}]$ a druhým bílý šum. Je zřejmé, že v případě impulsu bude mít matice ve vztahu (3.31) diagonální podobu, což znamená, že prvky useknuté váhové sekvence budou dány řešením $h(k) = r_{yu}(k)/r_u(0)$. Pokud bychom uvažovali nekonečnou váhovou sekvenci a dokonalý bílý šum, byla by situace pro bílý šum přivedený na vstup obdobná. Sekvence vstupního signálu vygenerovaná na počítači bude však vždy konečná a její vlastnosti budou pouze blízké ideálnímu bílému šumu. Matice v (3.31) tak bude jen diagonálně dominantní.

   Sledujme tedy nejprve vývoj střední kvadratické chyby pro identifikační data generovaná generátorem (4.6) za předpokladu impulsu na vstupu pro různé volby M resp. nb. Tento vývoj ilustruje obrázek 4.2. Minimální hodnoty dosažené chyby pak dokumentuje tabulka 4.1. Je si tak možné uvědomit, že byť získáme v případě dat použitých k identifikaci pro $nb = N$ přesný popis, u validačních dat je lepší, pokud nám jde o co možná nejmenší střední kvadratickou chybu, volit nižší hodnotu nb.

   Sledujme dále vývoj střední kvadratické chyby pro různé volby nb tentokrát pro data použitá k identifikaci s bílým šumem na vstupu. Ten znázorňuje obrázek 4.3. Tabulka 4.2 se pak opět věnuje minimálním dosaženým hodnotám střední kvadratické chyby. Vidíme tak, že jsme pro oba uvažované vstupní signály získali zhruba



Obrázek 4.2: Hodnota střední kvadratické chyby pro různé volby řádu FIR modelu (nosník; vstup - impuls).

Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
nb	2000	1103	1182
hodnota ϵ	$0,0000$	$1,3211 \cdot 10^{-9}$	$2,3365 \cdot 10^{-9}$

Tabulka 4.1: Minimální hodnota střední kvadratické chyby FIR modelu (nosník; vstup - impuls).

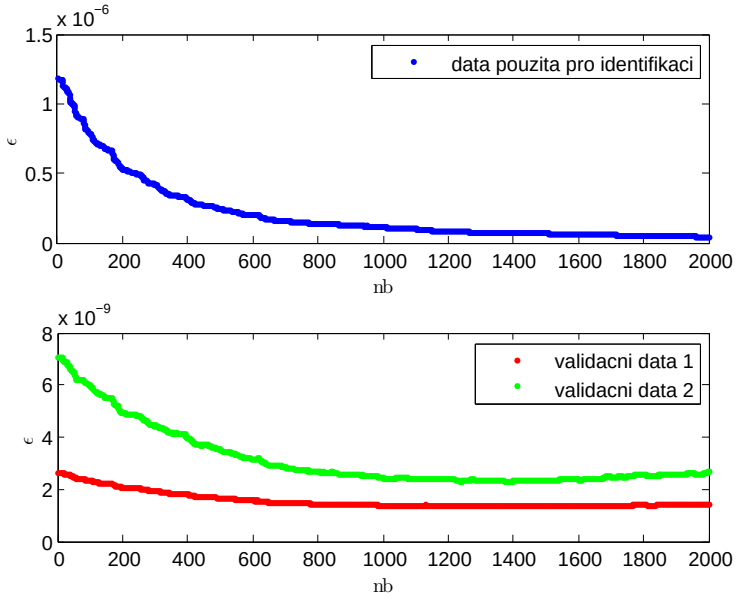
stejné výsledky. Výhodou bílého šumu je pak větší hodnota nb, která zhruba řečeno znamená, že výsledný FIR model dokáže sledovat výstup identifikovaného systému delší čas. Volme tedy jako FIR model vhodný pro popis nosníku model získaný identifikací s bílým šumem na vstupu pro $nb = 1239$. Výstup systému (černá barva) pro různé vstupní signály společně s výstupem zvoleného modelu (světlejší barva) znázorňuje obrázek 4.4

Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
nb	2000	1517	1239
hodnota ϵ	$4,1533 \cdot 10^{-8}$	$1,3431 \cdot 10^{-9}$	$2,2883 \cdot 10^{-9}$

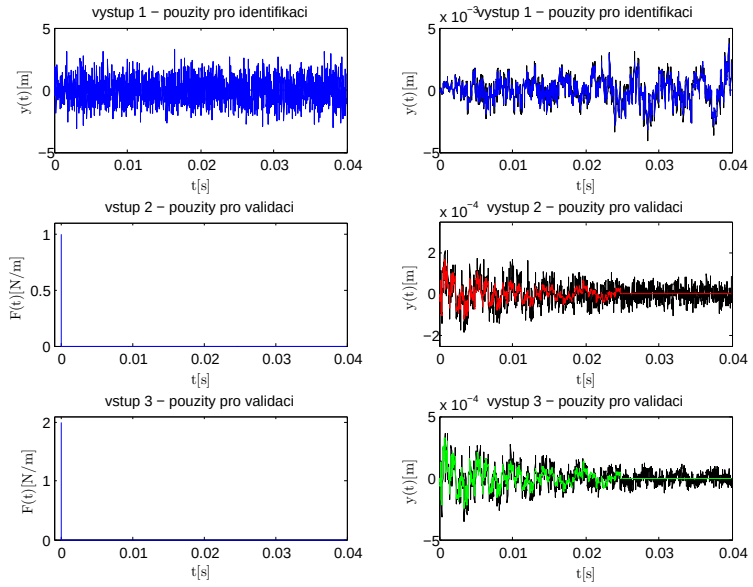
Tabulka 4.2: Minimální hodnota střední kvadratické chyby FIR modelu (nosník; vstup - bílý šum).

B. Data z reálného experimentu:

Aplikujeme nyní korelační analýzu na data získaná reálným experimentem a proveďme i v tomto případě totožné úvahy jako u nosníku. Sledujme tedy vývoj střední kvadratické chyby znázorněný na obrázku 4.5. Z něho je patrné, že pro data použitá k identifikaci i validační data se hodnota střední kvadratické chyby zmenšuje. To potvrzuje i tabulka 4.3. Vidíme tak, že v případě druhé skupiny validačních dat vede použití FIR modelu na poměrně výraznou střední kvadratickou chybu vzhle-



Obrázek 4.3: Hodnota střední kvadratické chyby pro různé volby řádu FIR modelu (nosník; vstup - bílý šum).

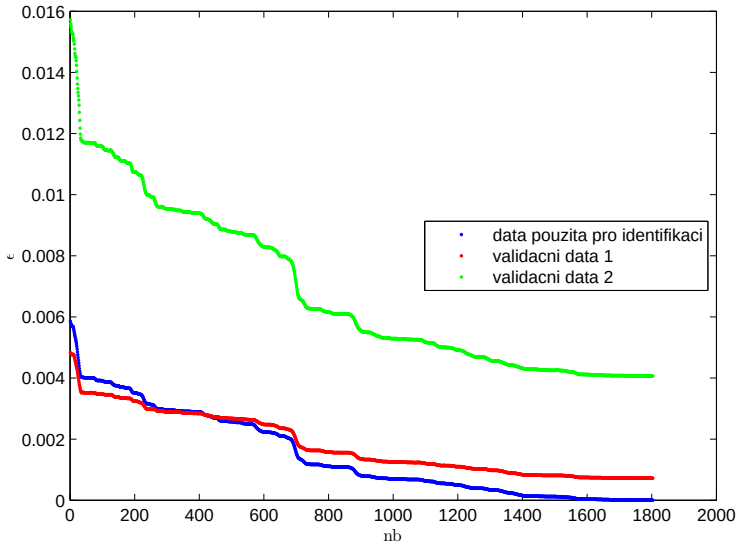


Obrázek 4.4: Porovnání výstupu systému a výstupu FIR modelu (nosník).

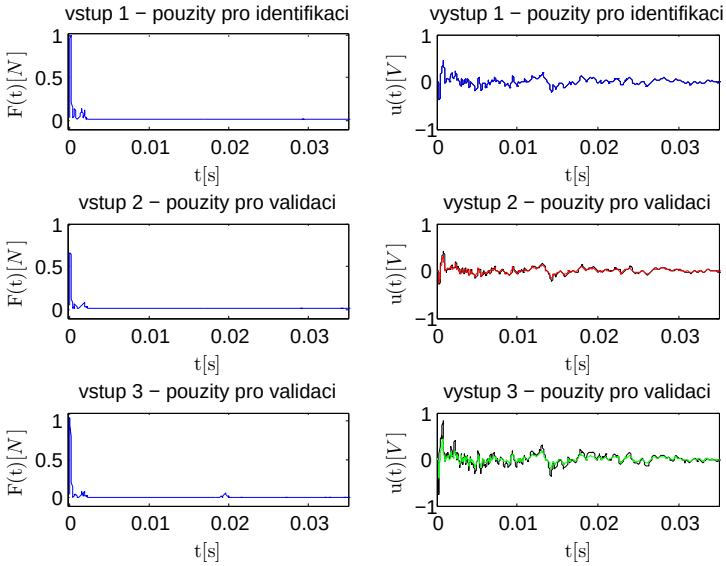
dem k hodnotám, které výstup nabývá. Důvod hledejme u nelineárního charakteru měřeného děje. O kvalitě FIR modelu se můžeme přesvědčit z obrázku 4.6, který ilustruje naměřené vstupní signály a naměřené výstupy (černá barva) v porovnání s výstupem identifikovaného FIR modelu (světlejší barva).

Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
nb	1803	1803	1803
hodnota ϵ	$3,3290 \cdot 10^{-7}$	$7,2066 \cdot 10^{-4}$	$0,0041$

Tabulka 4.3: Minimální hodnota střední kvadratické chyby FIR modelu (reálná data).



Obrázek 4.5: Hodnota střední kvadratické chyby FIR modelu (reálná data).



Obrázek 4.6: Porovnání výstupu systému a výstupu FIR modelu (reálná data).

C. Zhodnocení získaných výsledků:

V případě modelu nosníku bylo pro oba uvažované vstupní signály dosaženo obdobných hodnot střední kvadratické chyby. U modelu identifikovaného za předpokladu přivedení bílého šumu na vstup jsme však získali vyšší hodnotu stupně polynomu $B(q^{-1})$ polynomiálního FIR modelu, což vedlo pro validační data, kde uvažujeme jako vstup impulsní signál, k časově delšímu popisu výstupu. Vzhledem k uvažované varianci poruchy v generátoru výstupních dat (4.6) lze však předpokládat, že u následujících metod dojdeme k lepším výsledkům, neboť ty se na rozdíl od korelační analýzy minimalizací střední kvadratické chyby přímo zabývají.

Byla také provedena identifikace parametrů FIR modelu pro data získaná reálným experimentem. Zde jsme pro data použitá k identifikaci i validační data získali minimální hodnotu střední kvadratické chyby pro řád modelu rovnající se celkovému

počtu vzorků. Pro druhý set validačních dat jsme získali vzhledem k hodnotám výstupu velkou hodnotu střední kvadratické chyby. Důvodu se budeme věnovat ve zhodnocení dosažených výsledků v podkapitole 4.3.2.1.

4.3.2 Metody chyby predikce

4.3.2.1 ARX model

Postup metody vedoucí na odhad koeficientů modelu je zmíněn v podkapitole 3.5.3.4. Uvažování ARX struktury v metodě chyby predikce vedlo na prediktor (3.57). Pokud budeme tedy sledovat vývoj střední kvadratické chyby vzhledem k volbě řádu modelu, jedná se vlastně o průměrnou hodnotu druhé mocniny chyb jednokrokové predikce. Jedná se tak o situaci 2 ilustrovanou na obrázku 4.1.

Volbou řádu modelu pak budeme rozumět různé volby stupňů polynomů $A(q^{-1})$ a $B(q^{-1})$, tj. různé volby na a nb obecné ARX struktury (3.17). V identifikačních experimentech spojených s touto strukturou modelu tak budou dále vypočítány velikosti středních kvadratických chyb pro všechny možné kombinace $na = 1, \ldots, 121$ a $nb = 1, \ldots, 121$. Předpokládáme tedy, že vyšší stupně polynomů pro nás nemají praktický význam. Na základě velikosti takto určených chyb bude provedena diskuze o vhodné volbě na a nb.

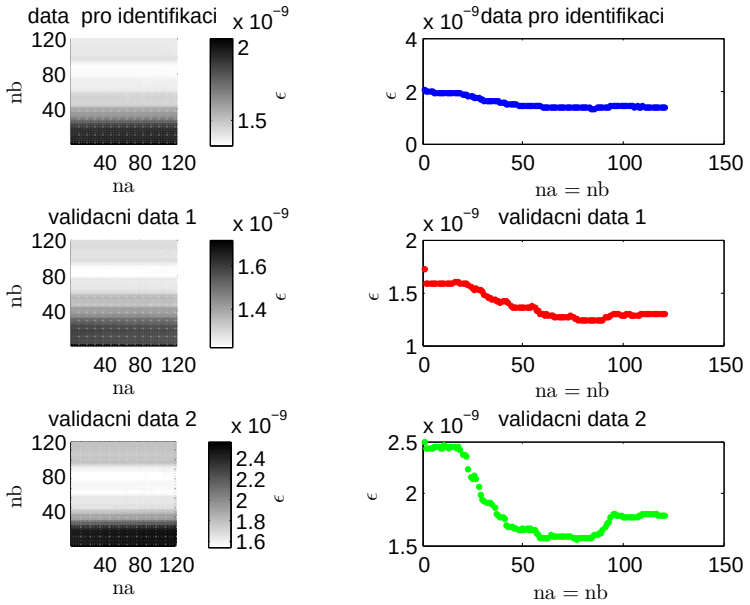
A. Model šíření vzruchu v nosníku:

Použijme dva druhy vstupních signálů. Nejprve impuls o velikosti $F_{j,0} = 1,5[N \cdot m^{-1}]$ a poté bílý šum. Jak již bylo zmíněno dříve, v případě metod chyby predikce vede použití vstupního signálu v podobě impulsu k nekonzistentnímu odhadu. Podívejme se tedy na to, co tento fakt způsobí při aplikaci na řešenou úlohu. Obrázek 4.7 ilustruje velikosti středních kvadratických chyb pro různé kombinace stupňů polynomů $A(q^{-1})$ a $B(q^{-1})$ ARX struktury modelu při použití impulsního vstupního signálu. Pro lepší náhled je zde kromě zobrazení všech chyb pro kombinace, kde $na = 1, \ldots, 121$ a $nb = 1, \ldots, 121$, znázorněna i situace, kdy jsou velikosti chyby vykresleny pouze pro $na = nb$. Z tohoto náhledu je patrnější, že u validačních dat dochází při překročení určité volby stupně polynomů $A(q^{-1})$ a $B(q^{-1})$ ke změně z klesajícího charakteru hodnoty střední kvadratické chyba na rostoucí charakter. Kdy konkrétně k takové změně dochází a jaká je v tomto případě hodnota střední kvadratické chyby dokumentuje tabulka 4.4.

Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
na	85	79	77
nb	86	114	89
hodnota ϵ	$1,3258 \cdot 10^{-9}$	$1,2258 \cdot 10^{-9}$	$1,5518 \cdot 10^{-9}$

Tabulka 4.4: Minimální hodnota střední kvadratické chyby ARX modelu (nosník; vstup - impuls).

K tabulce 4.4 je nutné poznamenat, že u dat použitých pro identifikaci je minimální hodnoty střední kvadratické chyby dosaženo oproti původním předpokladům dříve než pro volbu $na = 121$ a $nb = 121$. Podíváme-li se však na rozdíl střední kvadratické chyby pro $na = 85$, $nb = 86$ a $na = 121$, $nb = 121$, zjistíme, že rozdíl není tak markantní jako v případě, kdy bychom stejnou úvahu provedli pro validační data.



Obrázek 4.7: Hodnota střední kvadratické chyby pro různé volby stupně polynomů ARX modelu (nosník; vstup - impuls).

Uvedený problém lze přisoudit numerickému problému při výpočtu, který může způsobovat právě nevhodný vstupní signál.

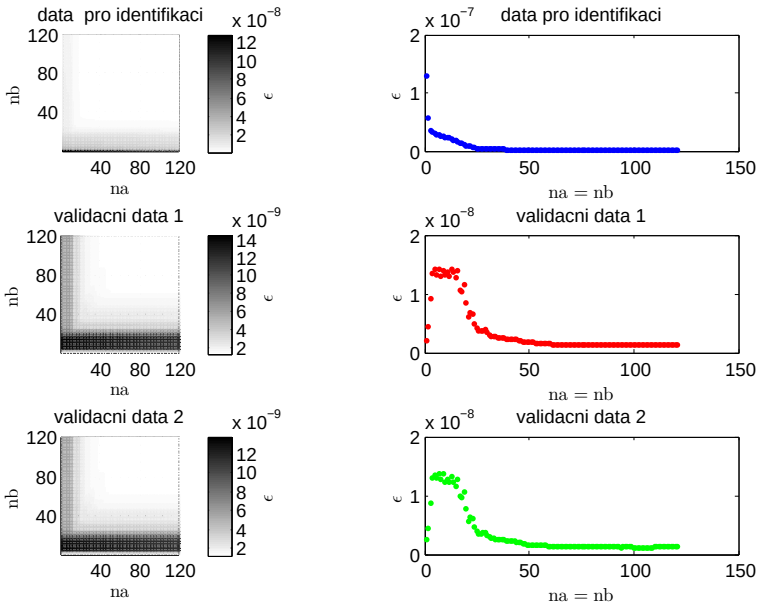
Přikročme k volbě stupňů polynomů ARX prediktoru. Z důvodu toho, že druhý set validačních dat při zvětšení hodnoty na způsobí i skok na větší hodnotu střední kvadratické chyby a naopak zmenšení stupně polynomu $A(q^{-1})$ na $na = 77$ v případě prvního setu validačních dat s sebou přinese jen nepatrné zvětšení střední kvadratické chyby, volme pro prediktor $na = 77$. Provedením obdobných úvah pro velikost stupně polynomu $B(q^{-1})$ bychom pak dospěli k závěru, že pro prediktor je vhodná volba $nb = 89$.

Aplikujme nyní stejné úvahy pro případ, kdy na vstup bude přiveden bílý šum. Obrázek 4.8 odpovídá svým obsahem obrázku 4.7 s tím rozdílem, že nyní uvažujeme jiný vstupní signál. Tabulka 4.5 se věnuje tomu, při které volbě na a nb došlo k získání minimální hodnoty střední kvadratické chyby.

Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
na	121	105	104
nb	121	106	106
hodnota ϵ	$9,8275 \cdot 10^{-10}$	$1,1815 \cdot 10^{-9}$	$1,2183 \cdot 10^{-9}$

Tabulka 4.5: Minimální hodnota střední kvadratické chyby ARX modelu (nosník; vstup - bílý šum).

K minimálním hodnotám střední kvadratické chyby v souvislosti s volbou stupně polynomů ARX struktury modelu uvedeným v tabulce 4.5 je nutné dodat, že hodnota střední kvadratické chyby klesala zhruba od volby $na = nb = 90$ velmi pozvolným způsobem a po dosažení minima opět pozvolným způsobem rostla. V případě



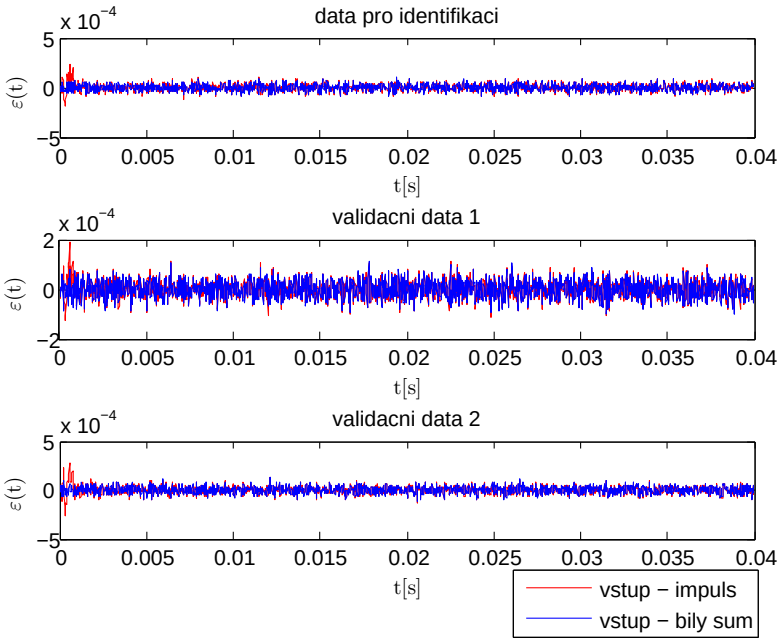
Obrázek 4.8: Hodnota střední kvadratické chyby pro různé volby stupně polynomů ARX modelu (nosník; vstup - bílý šum).

konečné podoby prediktoru tak volme odpovídající stupně $na = 104$ a $nb = 106$.

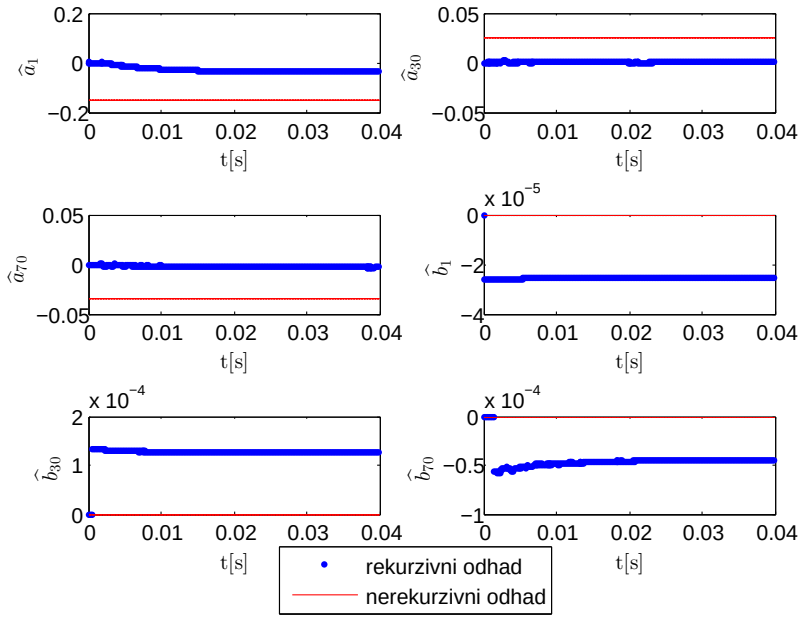
Porovnejme tedy způsob práce obou jednokrokových prediktorů například tak, že budeme sledovat časový vývoj chyb predikce $\varepsilon(t)$ definovaný dříve v textu vztahem (3.32). Vývoj $\varepsilon(t)$ ilustruje pro oba uvažované jednokrokové prediktory obrázek 4.9. Z něj je patrné, že k největšímu rozdílu mezi prediktory dochází v prvních krocích, kde prediktor získaný identifikací při vstupu v podobě impulsu poskytuje znatelně nepřesnější predikce. Srovnáme-li dále hodnoty dosažených minimálních středních kvadratických chyb v tabulkách 4.4 a 4.5 s vlastnostmi šumu v generátoru dat (4.6), zjistíme, že v případě identifikace s bílým šumem na vstupu se výrazněji přibližujeme k této hodnotě, což jsme předpokládali.

V podkapitole 3.5.3.4 byla též uvedena rekurzivní podoba metody nejmenších čtverců. Výhody použití takové metody jsou pak diskutovány v podkapitole 3.4. Uvažujme tedy rekurzivní odhad parametrů diskutovaných prediktorů. Pro ilustraci sledujme vývoj odhadu některých parametrů polynomů $A(q^{-1})$ a $B(q^{-1})$ získaný rekurzivní metodou s hodnotou příslušných parametrů získaných nerekurzivní metodou. Obrázek 4.10 znázorňuje situaci, kdy byl jako vstup při identifikaci použit impuls. Obrázek 4.11 pak situaci, kdy byl na vstup přiveden bílý šum.

Porovnáním obrázků 4.10 a 4.11 zjišťujeme, že v případě vstupního signálu v podobě impulsu konvergují hodnoty parametrů k jiným hodnotám než k těm, které určila nerekurzivní metoda. Důvod opět hledejme v nevhodném vstupním signálu. Pokud bychom tedy chtěli aplikovat rekurzivní metodu chyby predikce na ARX strukturu modelu v případě, že na vstup přivedeme impuls, je nutné opakovat celý validační proces znovu. Tím bychom získali i odlišné závěry. Oproti tomu rekurzivní metoda nejmenších čtverců s bílým šumem na vstupu dokonvergovala k hodnotám parametrů blížícím se odpovídajícím parametrům, které byly určeny nerekurzivní metodou. V tomto případě lze tedy předpokládat, že rekurzivní forma metody povede ke stejným závěrům jako ta nerekurzivní.



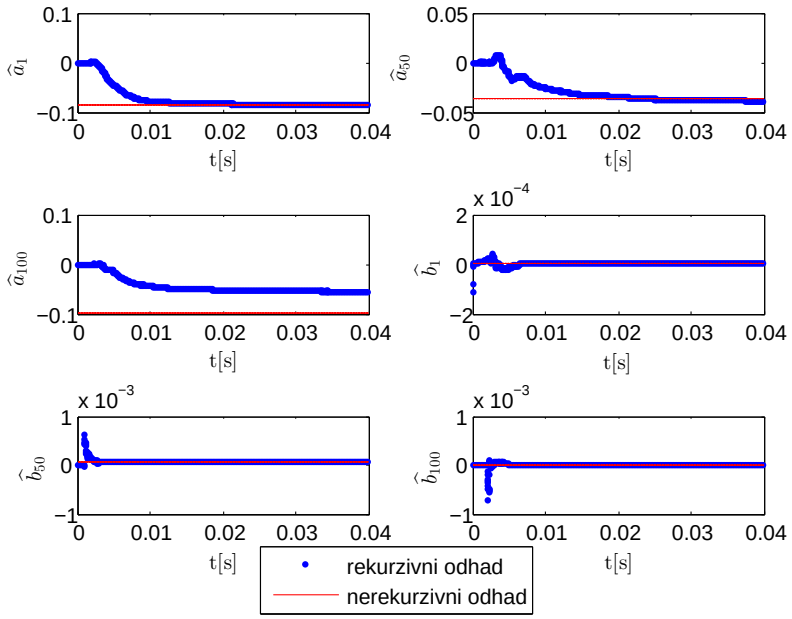
Obrázek 4.9: Vývoj chyby predikce $\varepsilon(t)$ ARX modelů (nosník).



Obrázek 4.10: Odhad parametrů rekurzivní metodou nejmenších čtverců (nosník; vstup - impuls).

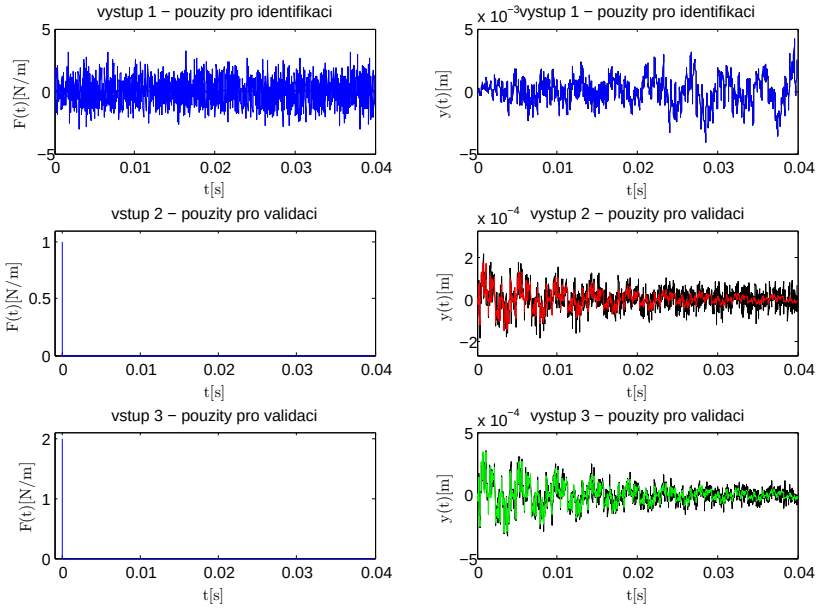
Pozn.: Počáteční podmínky byly zvoleny v obou případech jako $\widehat{\theta}_0 = 0$ a $P_0 = \rho I$, kde $\rho = 10000$.

Jako poslední krok identifikačních experimentů s nosníkem a ARX modelem se podívejme na výstup prediktoru, jehož parametry byly získány identifikací metodou



Obrázek 4.11: Odhad parametrů rekurzivní metodou nejmenších čtverců (nosník; vstup - bílý šum).

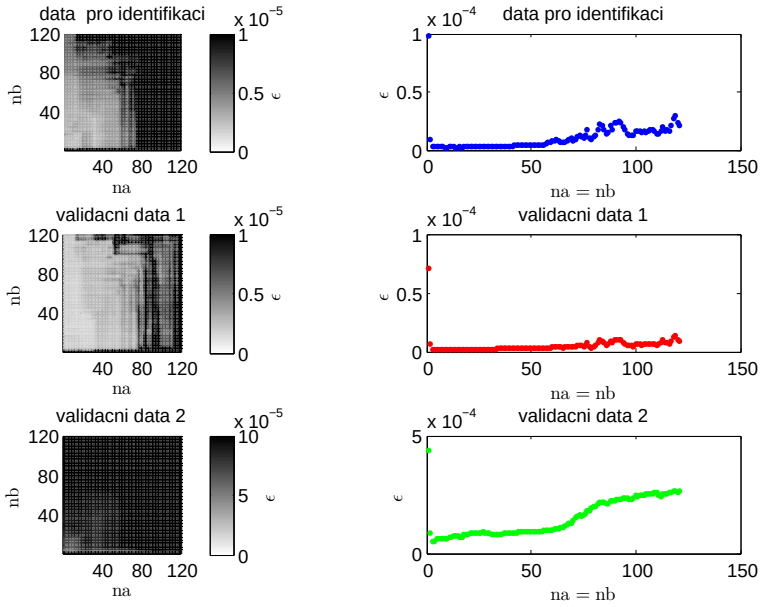
chyby predikce při přivedení bílého šumu na vstup. Toto porovnání ilustruje obrázek 4.12, kde je na pravé straně zobrazen vstup a na levé straně vygenerovaný výstup (černá barva) společně s výstupem získaného jednokrokového prediktoru (světlejší barva).



Obrázek 4.12: Porovnání výstupu systému a ARX modelu (nosník).

B. Data z reálného experimentu:

Aplikujme stejný postup jako u nosníku na naměřená data získaná reálným experimentem. Ptejme se tedy nejprve na to, jaké hodnoty střední kvadratické chyby poskytuje ARX model, jehož parametry získáme metodou chyby predikce pro různé kombinace stupňů dílčích polynomů. K odpovědi na tuto otázku nám dopomůže obrázek 4.13, kde vidíme, že se hodnota střední kvadratické chyby pro nízké volby $na = nb = 1, \ldots, 121$ snižuje a od jisté hodnoty opět zvětšuje. V případě dat použitých pro identifikaci je touto hodnotou $na = nb = 9$. U prvního setu validačních dat pak $na = nb = 8$ a u druhého $na = nb = 3$.



Obrázek 4.13: Hodnota střední kvadratické chyby pro různé volby stupně polynomů ARX modelu (reálná data).

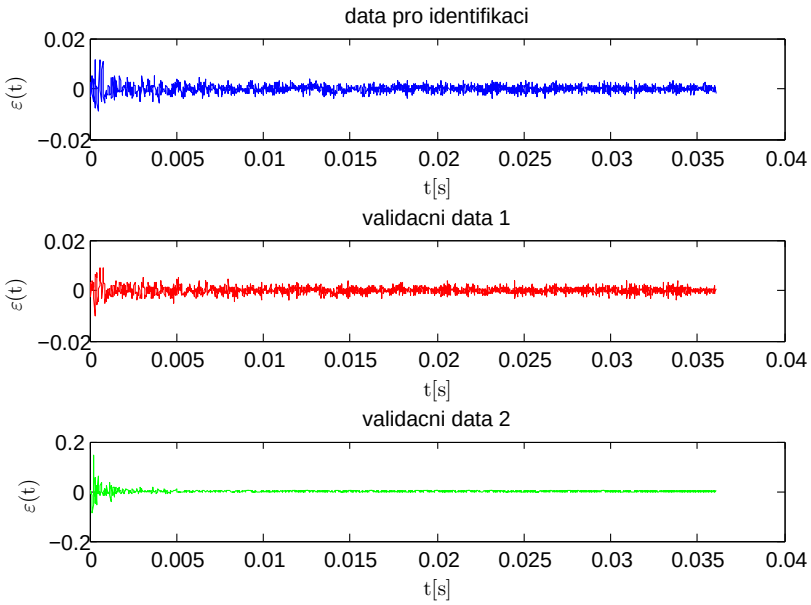
Tabulka 4.6 udávající, pro které volby na a nb došlo k zisku minimální hodnoty chyby, poskytuje též zajímavé údaje. Je z ní patrné, že překvapivě má set prvních validačních dat menší hodnotu minimální střední kvadratické chyby než data použitá pro identifikaci. Naopak pro druhý set validačních dat je hodnota střední kvadratické chyby o řád vyšší. Tyto jevy lze přisoudit tomu, že se nelineární problém snažíme popsat prediktorem s lineární strukturou.

Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
na	15	22	3
nb	17	8	9
hodnota ϵ	$2,2683 \cdot 10^{-6}$	$1,5575 \cdot 10^{-6}$	$4,3344 \cdot 10^{-5}$

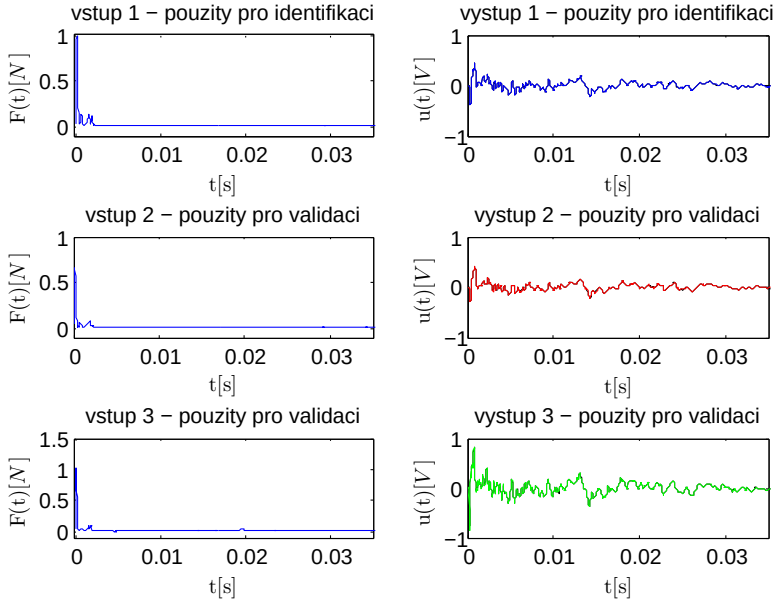
Tabulka 4.6: Minimální hodnota střední kvadratické chyby (reálná data).

Vzhledem k tomu, že druhý set validačních dat poskytuje o řád vyšší hodnotu minimální střední kvadratické chyby, je rozumnou volbou volit stupně ARX modelu $na = 3$ a $nb = 9$. Změny stupňů na a nb by v případě těchto validačních dat vedly k daleko většímu nárůstu střední kvadratické chyby, tj. predikce by se pro ně výrazně

zhoršila. Volba zmíněných stupňů polynomů v případě dat použitých pro identifikaci vede pak ke střední kvadratické chybě $2,6861 \cdot 10^{-6}$ a v případě prvního setu validačních dat k chybě $2,2735 \cdot 10^{-6}$. Obrázek 4.14 ilustruje vývoj chyby predikce získaného jednokrokového prediktoru. Obrázek 4.15 pak znázorňuje naměřený vstup a výstup (černá barva) s výstupem získaného jednokrokového prediktoru (světlejší barva).



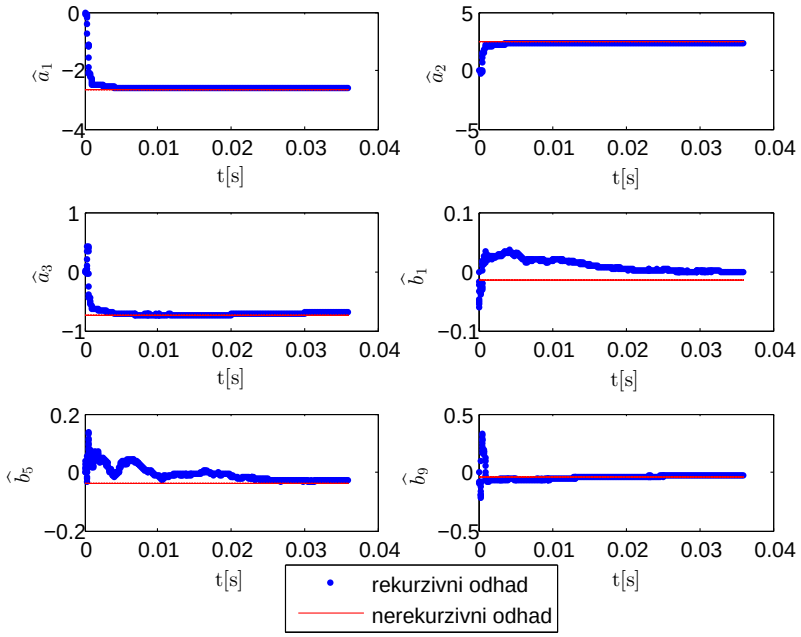
Obrázek 4.14: Vývoj chyby predikce $\varepsilon(t)$ ARX modelu (reálná data).



Obrázek 4.15: Porovnání výstupu systému a ARX modelu (reálná data).

Též se jako v případě modelu nosníku zabývejme možností použití rekurzivní metody nejmenších čtverců pro odhad vektoru parametrů ARX prediktoru s $na = 3$

a $nb = 9$. Obrázek 4.16 zobrazuje vývoj odhadu některých z prvků vektoru parametrů. Vidíme, že tyto hodnoty opět konvergují k hodnotám určeným nerekurzivní formou použité identifikační metody. Lze tak očekávat obdržení podobných závěrů i v případě, že použijeme rekurzivní metodu. Vstup s impulsním charakterem má tak v tomhle ohledu daleko lepší vlastnosti než pouhý impuls použitý u modelu nosníku. Počáteční podmínky byly opět zvoleny jako $\widehat{\theta}_0 = 0$ a $P_0 = \rho I$, kde $\rho = 10000$.



Obrázek 4.16: Odhad parametrů rekurzivní metodou nejmenších čtverců (reálná data).

C. Zhodnocení získaných výsledků:

V případě nosníku jsme pomocí identifikace získali díky jeho lineární struktuře a použití bílého šumu jako vstupního signálu velmi kvalitní prediktor, neboť hodnoty celkové střední kvadratické chyby se blížily uvažované varianci šumu generátoru (4.6). Při použití impulsu jako vstupního signálu jsme dle očekávání nezískali tak kvalitní predikce. Použití tohoto vstupního signálu také vedlo k různým odhadům parametrů ARX modelu u rekurzivní a nerekurzivní formy metody chyby predikce.

Pro reálná data byla situace komplikovanější, neboť víme, že se jedná o data získána měřením velmi složitého systému, jehož projev je nelineární. Impulsní charakter vstupního signálu také příliš situaci ohledně identifikace nepřidává. Nalezený jednokrokový prediktor s lineární strukturou měl pak pro první set validačních dat obdobnou hodnotu střední kvadratické chyby jako v případě dat použitých při identifikaci, ale v případě druhého setu validačních dat již poskytl o řád vyšší hodnotu této chyby. Abychom alespoň částečně zhodnotili, proč k takové skutečnosti došlo, podívejme se na maximální hodnoty vstupního signálu s impulsním charakterem. V případě dat použitých pro identifikaci je maximální hodnota naměřeného vstupního signálu $0,9910[N]$. U prvního setu validačních dat pak $0,6670[N]$ a u druhého $1,0298[N]$. Z průběhu naměřeného napětí odpovídajícího těmto vstupům je zřejmé, že u dat použitých pro identifikaci a prvního setu validačních dat jsou hodnoty napětí zhruba úměrné velikostem vstupních silových impulsů. U druhého setu však

dochází k neúměrnému zvětšení hodnot napětí. Tento fakt může způsobovat nelineární charakter procesu a dále případná chyba v naměřených datech. Použitím vstupního signálu s impulsním charakterem jsme rekurzivní metodou získali hodnoty odhadů parametrů prediktoru blížící se k odhadům parametrů získaným nerekurzivní metodou.

4.3.2.2 OE model

Zabývejme se nyní metodou chyby predikce pro OE strukturu modelu (metodou výstupní chyby) popsanou v podkapitole 3.5.3.5. Touto metodou byl získán prediktor (3.72). Jedná se o takovou strukturu prediktoru, která generuje odhady budoucího vstupu pouze na základě minulých a aktuálních hodnot vstupů a predikcí tímto prediktorem vytvořených. V případě, že budeme zmiňovat střední kvadratickou chybu, bude se tedy v tomto případě na rozdíl od ARX modelu jednat o situaci 1 ilustrovanou na obrázku 4.1. Na celý problém lze tedy nahlížet jako na hledání vhodného simulačního modelu.

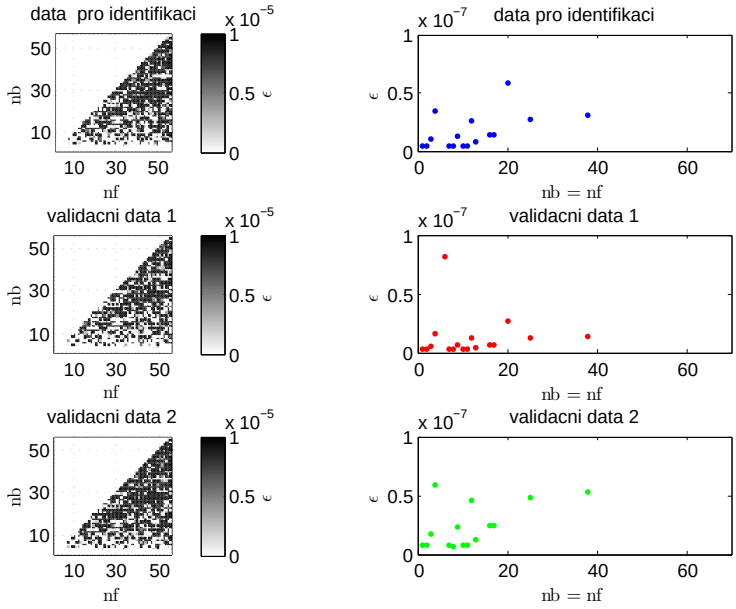
Volbou řádu modelu budeme pro OE model rozumět různé volby stupně polynomů $B(q^{-1})$ a $F(q^{-1})$, tj. různé volby nb a nf. V identifikačních budou dále vypočítány velikosti středních kvadratických chyb pro všechny možné kombinace $nb = 1, \ldots, 56$ a $nf = 1, \ldots, 56$. Na základě velikosti takto určených chyb bude provedena diskuze o vhodné volbě nb a nf.

A. Model šíření vzruchu v nosníku:

   Pro model šíření vzruchu v nosníku opět použijme vstupní signál jednak v podobě impulsu o velikosti $F_{j,0} = 1,5[N \cdot m^{-1}]$ a dále bílého šumu. Nejprve se tedy věnujme identifikaci s použitím impulsu jako vstupního signálu. Sledujme hodnotu středních kvadratických chyb pro různé kombinace nb a nf, které jsou znázorněny na obrázku 4.17. Na levé straně obrázku 4.17 jsou znázorněny všechny hodnoty středních kvadratických chyb pro volené stupně polynomů OE modelu. Na pravé straně pak pouze ty hodnoty střední kvadratické chyby pro $nb = nf$, které jsou menší než 10^{-7}. Je si tak možné uvědomit, že hodnoty chyb mají díky numerickému hledání minima nepředvídatelný charakter. Nelze tedy jako v případě ARX modelu hledat vhodný řád modelu na základě úsudku o vývoji hodnoty střední kvadratické chyby pro různé volby nb a nf. Zmíněný nepředvídatelný charakter je způsoben díky použití základní verze Gauss-Newtonova algoritmu. Jestliže má totiž funkce, jejíž minimum je hledáno, více lokálních minim, neposkytuje tento algoritmus sofistikovanější nástroj, jak najít globální minimum. Poznamenejme ještě, že počáteční hodnota parametrů Gauss-Newtonova algoritmu byla při provedených experimentech volena vždy jako nulová.

   Tabulka 4.7 poskytuje údaje o tom, pro jaké volby stupňů nb a nf došlo k dosažení minima střední kvadratické chyby pro jednotlivé sety dat. Vidíme tak, že na rozdíl od ARX modelu jsme získali minimum pro stejné volby nb a nf u všech uvažovaných vstupně-výstupních dat. Vzhledem k varianci šumu v generátoru (4.6) však hodnoty středních kvadratických chyb lze hodnotit jako poměrně velké.

   Zabývejme se dále identifikací OE modelu v případě, kdy na vstup přivedeme bílý šum. Potom střední kvadratické chyby rozdílu výstupu generátoru a výstupu modelu pro diskutované kombinace stupňů polynomů OE modelu lze ilustrovat obrázkem 4.18. Zde jsou opět na levé straně znázorněny všechny hodnoty středních kvadratických chyb pro volené stupně polynomů OE modelu a na pravé straně pouze ty



Obrázek 4.17: Hodnota střední kvadratické chyby pro různé volby stupně polynomů OE modelu (nosník; vstup - impuls).

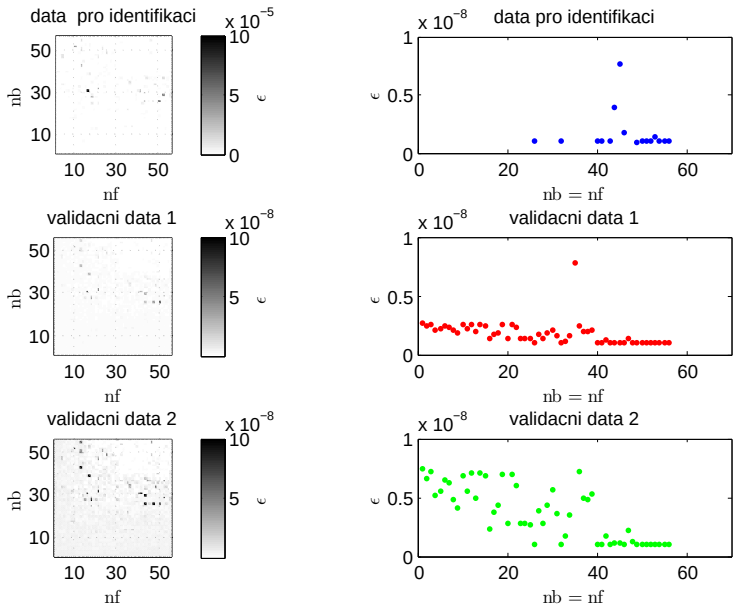
Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
nb	54	54	54
nf	51	51	51
hodnota ϵ	$2,0981 \cdot 10^{-9}$	$1,5474 \cdot 10^{-9}$	$3,2153 \cdot 10^{-9}$

Tabulka 4.7: Minimální hodnota střední kvadratické chyby OE modelu (nosník; vstup - impuls).

hodnoty střední kvadratické chyby, které jsou menší než 10^{-8}. Vidíme tak opět velký vliv numerické minimalizace, který jsme již diskutovali v předchozím případě.

Tabulka 4.8 udává, pro jaké volby nb a nf získáme minimální hodnotu střední kvadratické chyby. Vidíme tak, že na rozdíl od vstupního signálu v podobě impulsu dochází k dosažení minimální hodnoty chyby pro jednotlivé datové sety při různých volbách nb a nf. Pro volbu řádů OE modelu tak budeme muset jako v případě ARX modelu zvolit vhodného kandidáta na základě podrobnějšího pozorování dosažených chyb. Pro OE model v prováděných experimentech volme například jako vhodné stupně polynomů ty stupně, při nichž bylo pro všechny sety dat dosaženo nejmenší hodnoty střední kvadratické chyby. Tuto volbu pak dokumentuje tabulka 4.9. Dále je z tabulky 4.8 i 4.9 patrný nárůst kvality identifikace proti situaci, kdy byl na vstup přiveden impuls. Z hodnot minim je již patrný příklon k varianci generátoru (4.6).

Průběh chyby predikce OE modelu získaného metodou chyby predikce pro vstupní signál v podobě impulsu a bílého šumu si je možné prohlédnout na obrázku 4.19. Schopnost OE modelu popsat identifikovaný systém na základě znalosti vstupu je pak ilustrována obrázkem 4.20, kde je zobrazen vstup a výstup generátoru (černá barva) spolu s výstupem získaného OE modelu (světlejší barva).



Obrázek 4.18: Hodnota střední kvadratické chyby pro různé volby stupně polynomů OE modelu (nosník; vstup - bílý šum).

Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
nb	51	47	42
nf	52	55	35
hodnota ϵ	$9,5406 \cdot 10^{-10}$	$1,0176 \cdot 10^{-9}$	$1,0530 \cdot 10^{-9}$

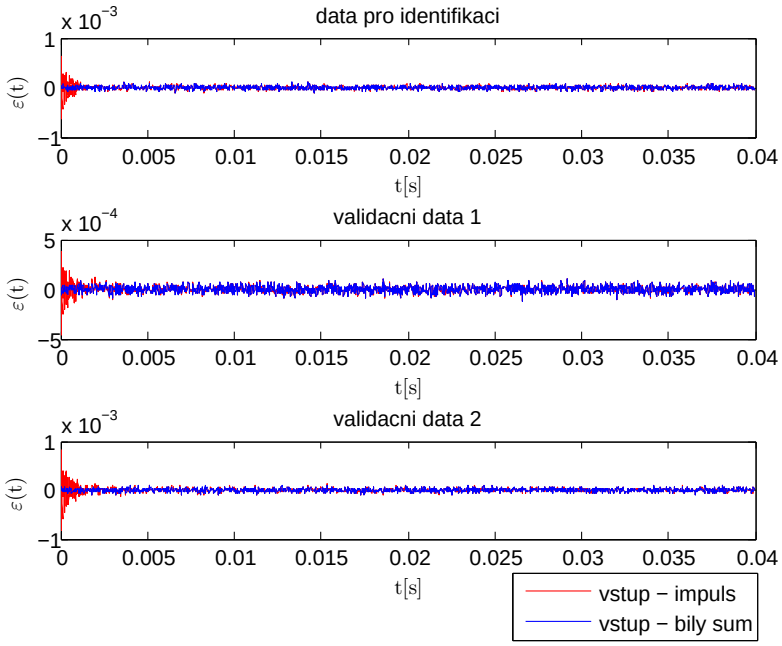
Tabulka 4.8: Minimální hodnota střední kvadratické chyby OE modelu (nosník; vstup - bílý šum).

Zvolené stupně OE modelu	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
nb	30	30	30
nf	39	39	39
hodnota ϵ	$9,9777 \cdot 10^{-10}$	$1,0202 \cdot 10^{-9}$	$1,0596 \cdot 10^{-9}$

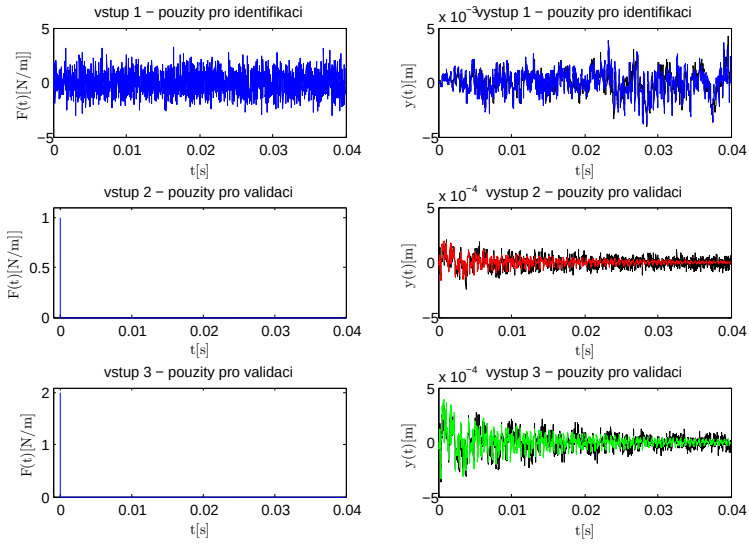
Tabulka 4.9: Zvolené stupně polynomů OE modelu (nosník; vstup - bílý šum).

Zabývejme se ještě v krátkosti problémem rekurzivního odhadu OE modelu. Z obrázku 4.21 je patrné, že nemůžeme předpokládat obdobné výsledky jako v případě ARX modelu a vstupního signálu v podobě bílého šumu, tj. že na základě určení modelu nerekurzivní metodou lze výsledky aplikovat analogicky na rekurzivní metodu. Důvod hledejme opět v numerických výpočtech minima ztrátové funkce. Střední kvadratická chyba pro parametry určené rekurzivní metodou se stupni polynomů $nb = 30$ a $nf = 39$ je pro případ pro identifikaci použitých i validačních dat o dost větší než v případě nerekurzivní varianty metody. Při požadavku použití rekurzivní metody je tedy na místě provést nejprve obdobné úvahy jako byly provedeny v případě nerekurzivní metody a na základě nich pak určit řád OE modelu.

B. Data z reálného experimentu:

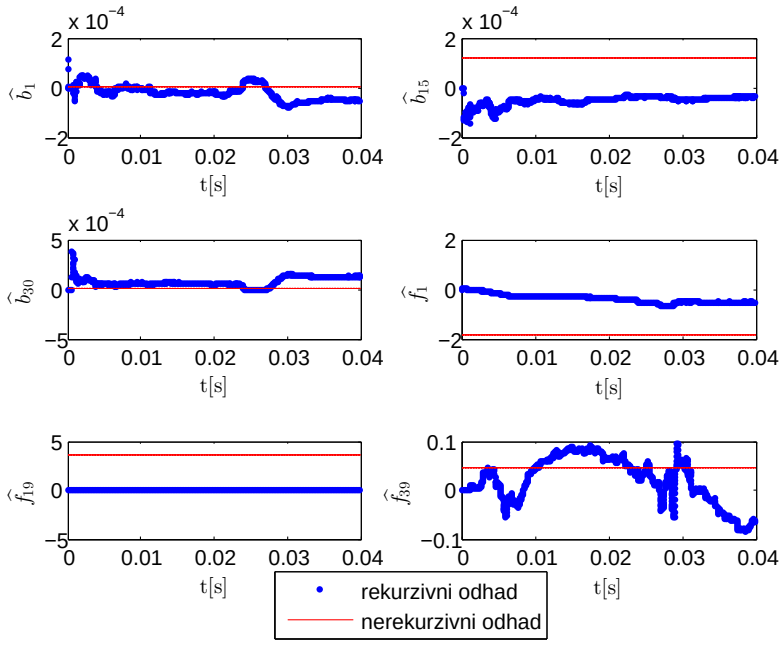


Obrázek 4.19: Vývoj chyby predikce $\varepsilon(t)$ OE modelů (nosník).



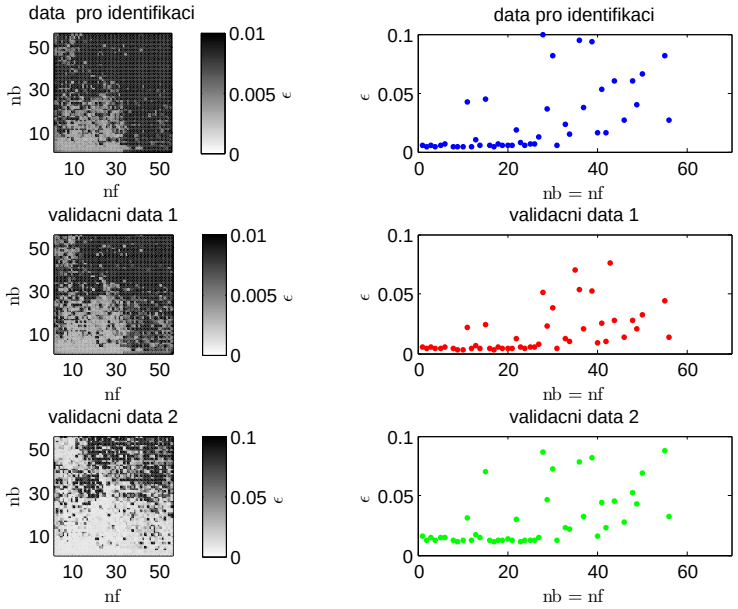
Obrázek 4.20: Porovnání výstupu systému a výstupu OE modelu (nosník).

Aplikujme stejný postup hledání vhodného OE modelu i na data získaná reálným experimentem. Obrázek 4.22, stejně jako v předchozích případech, znázorňuje na levé straně střední kvadratickou chybu pro různé kombinace stupňů polynomů OE modelu a na pravé pak chyby pro $nb = nf$, které jsou menší než 10^{-1}. Dosažené minimální hodnoty střední kvadratické chyby pak dokumentuje tabulka 4.10. Z ní je ihned patrné, že střední kvadratická chyba bude v případě uvažování OE modelu příliš velká. Jinými slovy - proces šíření vzruchu v desce z kompozitního materiálu



Obrázek 4.21: Odhad parametrů rekurzivní metodou výstupní chyby (nosník).

nelze vhodně popsat jednoduchým lineárním modelem. Přesto proveďme opět výběr takových stupňů polynomů OE modelu, pro které získáme u všech uvažovaných dat nejmenší chybu. Tento výběr dokumentuje tabulka 4.11.



Obrázek 4.22: Hodnota střední kvadratické chyby pro různé volby stupně polynomů OE modelu (reálná data).

OE model se stupni dílčích polynomů $nb = 17$ a $nf = 18$ identifikovaný metodou výstupní chyby vykazuje průběh chyby predikce znázorněný na obrázku 4.23. Obrázek 4.24 pak ilustruje vstup a výstup systému (černá barva) společně s výstupem

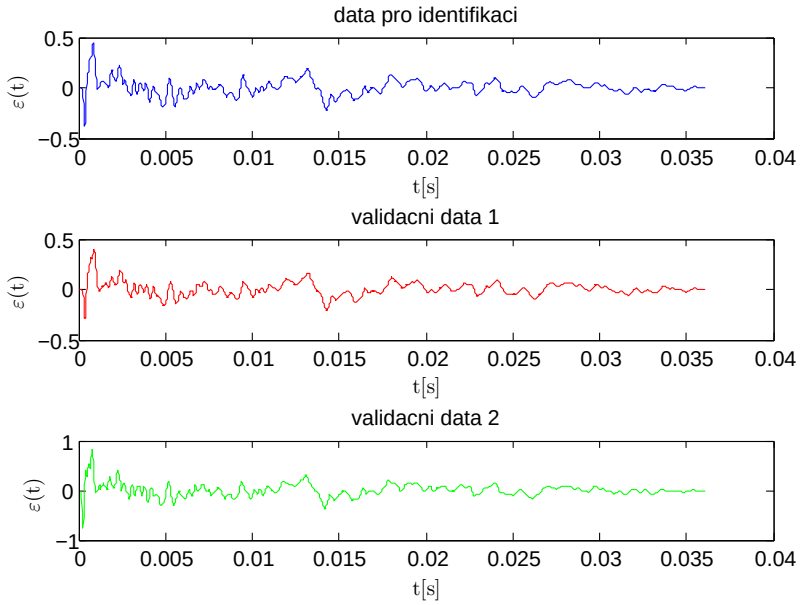
Minimální hodnota ϵ dosažena pro	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
nb	17	27	19
nf	18	13	21
hodnota ϵ	$0,0032$	$0,0029$	$0,0094$

Tabulka 4.10: Minimální hodnota střední kvadratické chyby OE modelu (reálná data).

Zvolené stupně OE modelu	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
nb	17	17	17
nf	18	18	18
hodnota ϵ	$0,0032$	$0,0029$	$0,0102$

Tabulka 4.11: Zvolené stupně polynomů OE modelu (reálná data).

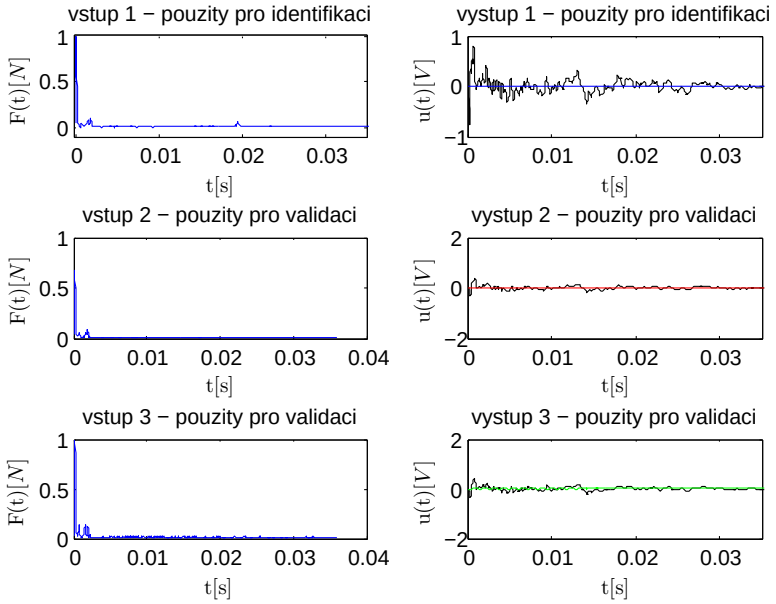
modelu (světlejší barva). Z těchto obrázků je opět patrné, že získaný model nedokáže průběh naměřené veličiny v závislosti na naměřeném vstupu prakticky vůbec popsat.



Obrázek 4.23: Vývoj chyby predikce $\varepsilon(t)$ OE modelu (reálná data).

C. Zhodnocení získaných výsledků:

Metoda výstupní chyby vedla v případě modelu nosníku k zisku modelu vhodného k simulaci. Hodnoty středních kvadratických chyb se pro vstupní signál v podobě bílého šumu stejně jako u ARX modelu blížily uvažované varianci generátoru. U rekurzivní metody jsme pak ukázali, že odhad prvků vektoru parametrů vede z důvodu použitých numerických metod optimalizace k jiným hodnotám než u nerekurzivní varianty metody.



Obrázek 4.24: Porovnání výstupu systému a výstupu OE modelu (reálná data).

V případě reálných dat jsme model vhodný pro simulaci neobdrželi, což se však dalo předpokládat. Hlavními důvody jsou pravděpodobně nelineární charakter průběhu šíření vzruchu v desce z kompozitního materiálu a nevhodný vstupní signál.

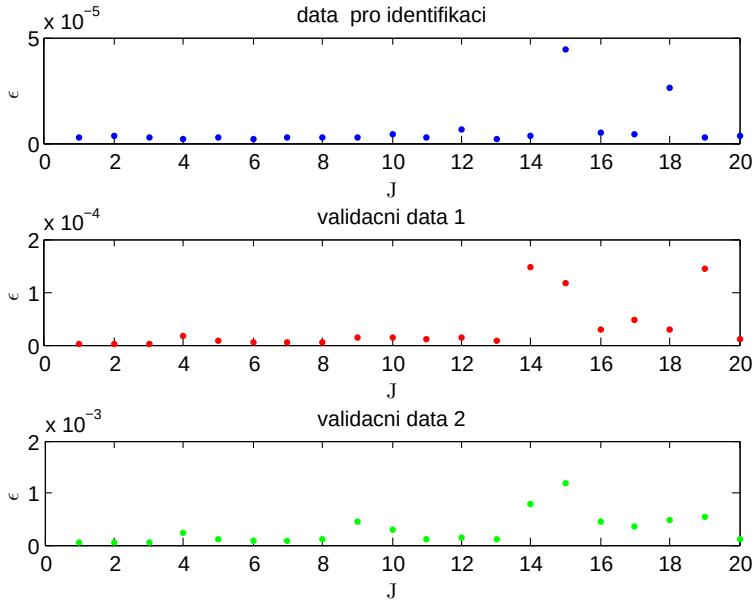
4.4 NNARX model

Podkapitola 3.6.2 se věnovala NNARX modelu. Pro identifikační experimenty s touto neuronovou sítí opusťme již model nosníku s lineární strukturou, kde by využití nelineární identifikace nemělo smysl, a soustřeďme se na možnosti této sítě predikovat nelineární problém představovaný daty z reálného experimentu. Použití nelineárního NNARX modelu slibuje získat pro naměřená data přesnější jednokrokové predikce než tomu bylo v případě ARX modelu v podkapitole 4.3.2.1.

Na rozdíl od lineárního modelu je však při práci s NNARX modelem nutné volit strukturu sítě. Ta je pro námi uvažovaný model NNARX představována různými počty neuronů ve skryté vrstvě. Proto bude kromě počtu regresorů, tj. ny a nu ve vztahu (3.105), nutné volit ještě počet neuronů J. Jako aktivační funkci neuronů skryté vrstvy budeme uvažovat tanh. Při samotných identifikačních experimentech nám půjde především o nalezení jednokrokového NNARX prediktoru, který by poskytoval přesnější odhad než ARX prediktor z podkapitoly 4.3.2.1. Uvažujme tedy i ny a nu jako $na - 2 \leq ny \leq na + 2$ a $nb - 2 \leq nu \leq na + 2$, kde na a nb jsou stupně polynomů ARX modelu. Připomeňme, že $na = 3$ a $nb = 9$. Počáteční podmínky budou při identifikačních experimentech voleny vždy jako malá náhodná čísla. Pro odhad vektoru parametrů byla použita Levenberg-Merquardtova metoda.

Pokusme se nejprve určit vliv počtu neuronů skryté vrstvy J na střední kvadratickou chybu podobně jako u parametrických metod. Počty regresorů ny a nu volme $ny = na$ a $nu = nb$, J postupně jako $J = 1, \ldots, 20$. Hodnoty středních kvadratických chyb jsou pro zmíněnou volbu znázorněny na obrázku 4.25. Vidíme tak drobný nárůst střední kvadratické chyby pro větší počet neuronů než deset.

Trénujme tedy NNARX síť pro $na - 2 \leq ny \leq na + 2$ a $nb - 2 \leq nu \leq na + 2$ a $J = 1, \ldots, 10$. Tabulka 4.12 udává, pro jakou volbu ny, nu a J byly získány minimální



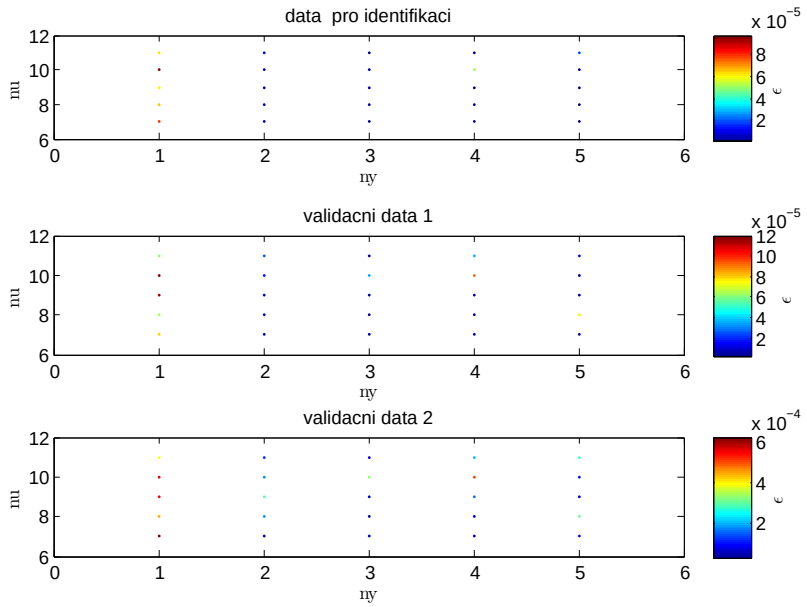
Obrázek 4.25: Hodnota střední kvadratické chyby pro různý počet neuronů skryté vrstvy.

střední kvadratické chyby a hodnoty těchto chyb. Tuto tabulku je pro ilustraci dobré porovnat s tabulkou 4.6, která udává hodnotu dosažených minimálních chyb pro ARX prediktor. Je tak zřejmé, že použití NNARX modelu vedlo k daleko lepším výsledkům pro jednokrokovou predikci. Pokud bychom volili nyní parametry NNARX prediktoru obdobně jako u ARX prediktoru, tj. podle parametrů, při kterých jsme získali minimální střední kvadratickou chybu druhé skupiny validačních dat, bude střední kvadratická chyba dat použitých k identifikaci činit $2,3506 \cdot 10^{-6}$ a u prvního setu validačních dat $2,0957 \cdot 10^{-6}$ čili opět došlo v tomto ohledu k zlepšení. Musíme však připomenout vliv počátečních podmínek. To v praxi znamená, že bychom při opětovném trénování sítě mohli získat odlišné hodnoty. Každopádně jsme však ukázali, že použití NNARX modelu v sobě skrývá prostor pro zlepšení predikce při uvažování reálně měřených dat.

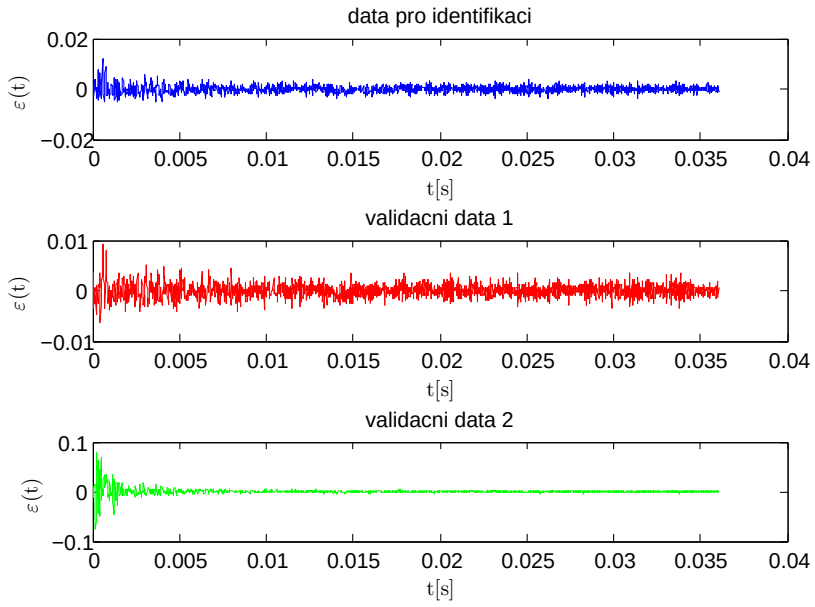
Zvolené parametry NNARX modelu	**Data použitá pro identifikaci**	**Validační data 1**	**Validační data 2**
ny	5	5	3
nu	10	7	8
J	3	2	5
hodnota ϵ	$1.8423 \cdot 10^{-6}$	$1.8527 \cdot 10^{-6}$	$3.2796 \cdot 10^{-5}$

Tabulka 4.12: Minimální hodnota střední kvadratické chyby NNARX modelu.

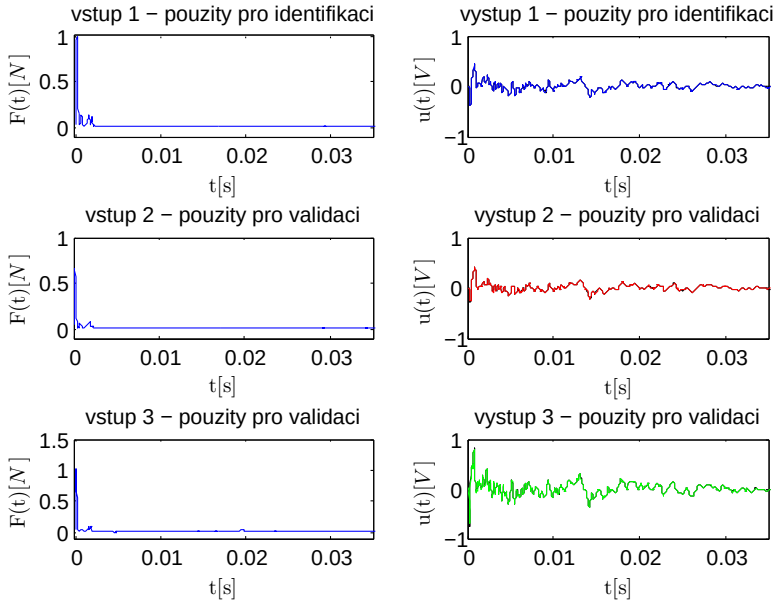
Obrázek 4.26 ilustruje, jak vypadají hodnoty střední kvadratické chyby pro jednotlivé kombinace ny a nu při použití pěti neuronů ve skryté vrstvě. Obrázek 4.27 znázorňuje vývoj chyby predikce NNARX prediktoru a na obrázku 4.28 jsou zobrazeny naměřené vstupy a naměřené výstupy (černá barva) spolu s výstupem NNARX prediktoru (světlejší barva).



Obrázek 4.26: Hodnota střední kvadratické chyby pro $J = 5$.



Obrázek 4.27: Vývoj chyby predikce $\varepsilon(t)$ NNARX modelu.



Obrázek 4.28: Porovnání výstupu systému a NNARX modelu.

5 Závěr

Tato diplomová práce se zabývala problematikou identifikace dynamických vlastností kompozitního materiálu. Jak z teoretické části práce vyplynulo - modelovat vlastnosti kompozitního materiálu pomocí tradičních přístupů matematicko-fyzikálního modelování je velice obtížné. Proto se práce ve své další části věnovala aplikaci vybraných metod identifikace systémů. Konkrétně parametrickým metodám, které vedou k nalezení lineárního modelu popsaného diferenční rovnicí, a dále pak funkcionálními přístupu založeném na neuronových sítí.

Navržené postupy byly aplikovány na dvě konkrétní úlohy. První úloha spočívala v nalezení modelu silového působení na nosník z dokonale homogenního izotropního materiálu, jehož vstupně-výstupní model byl odvozen přístupem matematicko-fyzikálního modelování. Aby však byla zachována určitá neurčitost, která je v reálných situací zcela běžná, byl do získaného popisu přidán šum se známými vlastnostmi. Díky znalosti modelu nosníku a vlastnostem šumu bylo možné posoudit kvalitu jednotlivých identifikačních metod. Druhá úloha se týkala identifikace reálného procesu šíření vzruchu v desce z kompozitního materiálu z reálně naměřených dat. Ta byla získána pomocí experimentu, ve kterém bylo klepnuto do desky z kompozitního materiálu (karbonové textilie) impulsním kladivem a odezva byla měřena v jiném bodě pomocí piezosenzoru.

Po provedení jednotlivých identifikačních experimentů byly dosažené výsledky náležitě zhodnoceny s následujícími závěry. V případě první úlohy jsme na vstup přivedli dva druhy vstupních signálů - impuls a bílý šum. Motivací použití impulsu jako vstupního signálu pro identifikaci bylo poukázat na některé zápory, které v sobě tento vstupní signál skrývá, a to právě kvůli tomu, že signál s impulsním charakterem byl použit jako vstup při reálném měření. Výsledky identifikačních experimentů pak toto tvrzení zcela potvrdily. Na rozdíl od toho jsme pro bílý šum přivedený na vstup získali výsledky úměrné vlastnostem uvažovaného šumu v popisu nosníku. Díky lineární struktuře modelu silového působení na nosník z homogenního a izotropního materiálu tak bylo možné získat kromě lineárního jednokrokového prediktoru i lineární model, vhodný pro simulaci (metoda chyby predikce a OE model). Pro reálná data byla v případě využití parametrických metod situace předem

nepříznivá, neboť šíření vzruchu v materiálu lze považovat za složitý nelineární proces. Navíc byl jako vstup použit, jak již bylo zmíněno, signál s impulsním charakterem. Určitých výsledků aplikovatelných v praxi jsme tak dosáhli pouze při jednokrokové predikci. Práci získaného prediktoru s lineární strukturou jsme posléze konfrontovány s prací prediktoru s nelineární strukturou, který byl získán funkcionálním přístupem k identifikaci. Dle očekávání generoval tento prediktor predikce s menší hodnotou chyby predikce než v lineárním případě. Je tedy již otázkou konkrétní aplikace, zda volit prediktor s jednodušší strukturou na úkor „horších" predikcí nebo sáhnout po složitějším nelineárním prediktoru, jehož celkový návrh i realizace bude znatelně složitější, ale s tím vědomím, že získáme „přesnější" predikce budoucího chování sledovaného procesu.

Možné rozšíření práce může spočívat v aplikaci některých dalších identifikačních metod a postupů, které povedou k nalezení modelů o různé struktuře, jejichž vhodnost by bylo opět nutné náležitě ověřit. Z praktického hlediska by bylo též výhodné se zaměřit na možnost použití modelů získaných identifikací například pro inverzní problém zpětného určení velikosti působícího silového impulsu.

Literatura

[1] ZEMČÍK, R., KROUPA, T., BARTOŠEK, J., LAŠ, V. *Impact Force Reconstruction on Composite Plate with Piezoelectric Sensors*. Prezentace. University of West Bohemia.

[2] HASHEMI, R., KARGARNOVIN, M.H. *Vibration Base Identification of Impact Force using Genetic Algorithm*. Příspěvek v International Journal of Mechanic Systems Engineering IJMSE. Volume 1 Number 4. ISSN 2226-6461.

[3] ŠIMANDL, M. *Identifikace systémů a filtrace*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2011. ISBN 978-80-7082-170-1.

[4] LJUNG, L. *System identification: theory for the user. 2nd ed.*. Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 1999. ISBN 01-365-6695-2.

[5] VERHAEGEN, M., VERDULT, V. *Filtering and system identification: a least squares approach*. New York: Cambridge University Press, 2007. ISBN 05-218-7512-9.

[6] NORGAARD, M. *Neural networks for modelling and control of dynamic systems*. London: Springer, 2000. ISBN 18-523-3227-1

[7] HAYKIN, S. *Neural networks*. Prentice Hall, 1999. ISBN 81-7808-320-0.

[8] HERING, P. *Odhad parametrů a návrh struktury neuronové sítě v identifikaci nelineárních stochastických systémů*. Disertační práce. Plzeň: Západočeská univerzita, 2005.

[9] VYBÍRAL, B. *Mechanika pružného tělesa: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku*. [online]. [cit. 2014-03-21]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/pruznost.pdf>.

[10] DRIML, B. *Základní vlastnosti materiálů a jejich zkoušení*. [online]. [cit. 2014-03-24]. Dostupné z: <http://www.ateam.zcu.cz/zkousky_mat.pdf>.

[11] HAJŠMAN, V. *Přednášky z předmětu Modelování a simulace 1*. Západočeská univerzita v Plzni. [online]. [cit. 2014-03-24]. Dostupné z: <http://vendulka.zcu.cz/Download/Prednasky/index.php?dir=MS1/>.

[12] KŘIVÝ, I., KINDLER, E. *Simulace a modelování*. Učební text Ostravské univerzity. [online]. [cit. 2014-03-24]. Dostupné z: <http://vendulka.zcu.cz/Download/Free/SkriptaKindlerMS.pdf>.

[13] LAŠ, V. *Úvod do modelování v mechanice: mechanika kompozitních materiálů*. Učební text k předmětu Úvod do modelování v mechanice. Západočeská univerzita v Plzni. [online]. [cit. 2014-03-25]. Dostupné z: <http://www.kme.zcu.cz/download/predmety/229-umm-6.pdf>.

[14] *Kompozitní materiály*. Učební text. Katedra materiálového inženýrství a chemie. ČVUT v Praze. [online]. [cit. 2014-03-25]. Dostupné z: <http://tpm.fsv.cvut.cz/vyuka/main/MI11.pdf>.

[15] MICHNA, Š. *Kompozitní materiály*. Přednášky z předmětu progresivní technologie. Univerzita J.E.Purkyně v Ústí nad Labem. [online]. [cit. 2014-03-26]. Dostupné z: <http://www.stefanmichna.com/download/progresivni-technologie/kompozitni_materialy.pdf>.

[16] *Kompozitní materiály*. Učební text. Ústav materiálového inženýrství. ČVUT v Praze. [online]. [cit. 2014-03-27]. Dostupné z: <http://umi.fs.cvut.cz/files/6_kompozitni-materialy.pdf>.

[17] DAĎOUREK, K. *Kompozitní materiály - definice a rozdělení*. Technická univerzita v Liberci. [online]. [cit. 2014-03-27]. Dostupné z: <http://www.kmt.tul.cz/edu/podklady_kmt_magistri/KM/Kompozity\%20Dad/02defrozd.pdf>.

[18] Wikipedia. *Uhlíkové vlákno*. [online]. [cit. 2012-07-19]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Uhlíkové_vlákno>.

[19] KOŘÍNEK, Z. *Kompozity: vlákna*. [online]. [cit. 2014-03-28]. Dostupné z: <http://mujweb.cz/zkorinek/vlakna.pdf>.

[20] Toray Carbon Fiber America. *Produkty společnosti.*. [online]. [cit. 2014-03-28]. Dostupné z: <http://www.toraycfa.com/product.html>.

[21] E-konstrukter. *Hodnoty mezí pevnosti, kluzu, únavy a dovolených napětí pro ocel*. [online]. [cit. 2014-03-28]. Dostupné z: <http://e-konstrukter.cz/prakticka-informace/hodnoty-mezi-pevnosti-kluzu-unavy-a-dovolenych-napeti-pro-ocel>.

[22] Svarinfo. *Vybrané oceli - vlastnosti a použití*. [online]. [cit. 2014-03-28]. Dostupné z: <http://www.svarbazar.cz/phprs/showpage.php?name=oceli_pouziti>.

[23] HŘEBÍČEK, J., ŠKRDLA, M. *Úvod do matematického modelování*. [online]. [cit. 2014-03-31]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/Bi3101/um/skripta.pdf>.

[24] Wikipedia. *Metoda konečných prvků*. [online]. [cit. 2012-07-19]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_konečných_prvků>.

[25] EVEKTOR. *Statické a dynamické analýzy*. [online]. [cit. 2014-03-31]. Dostupné z: <http://www.evektor.cz/staticke-a-dynamicke-analyzy.aspx>.

[26] PHYSIK INSTRUMENTE. *P-876 DuraAct Patch Transducer*. [online]. [cit. 2014-04-01]. Dostupné z: <http://www.physikinstrumente.com/en/products/prdetail.php?sortnr=101790>.

[27] B & K. *Official site*. [online]. [cit. 2014-04-01]. Dostupné z: <http://www.bksv.com/>.