

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Kmitání lopatek a olopatkování disků s třecími
členy**

Plzeň, 2014

Jan Brůha

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je součástí této práce.

V Plzni dne 31.5.2014

.....

Podpis

Poděkování

Na tomto místě bych velmi rád poděkoval vedoucímu mé diplomové práce, Prof. Ing. Vladimíru Zemanovi, DrSc., za velmi osobní a motivující přístup, precizně zpracované veškeré podklady, cenné rady a čas, který mi byl kdykoliv ochoten věnovat během celého mého studia na Fakultě aplikovaných věd.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům za materiální i psychickou podporu, bez níž by tato práce nikdy nemohla vzniknout.

Jan Brůha

Abstrakt

Tato práce je zaměřena na modelování kmitání turbínových lopatek. Na základě poskytnutých parametrů experimentálního zařízení testovaného v Ústavu termomechaniky Akademie věd České republiky je navržen výpočtový model dvojice lopatek vetknutých do tuhého rotujícího disku, mezi jejichž nástavce je vložen třecí člen. Každá z lopatek je diskretizována metodou konečných prvků. Za tímto účelem jsou v práci nejprve odvozeny matice jedno-dimenzionálního nosníkového prvku v lokálním souřadnicovém systému rotující lopatky. Uvažovány jsou ohybové kmity lopatky v rovině definované podélnou osou lopatky a osou rotace kombinované s torzními kmity okolo podélné osy. Na základě matematického modelu jedné rotující lopatky s nástavcem byla vyšetřena vlastní čísla lopatky v závislosti na provozních otáčkách disku a pro vybrané otáčky zobrazeny tři nejnižší vlastní tvary kmitů lopatky. Následně byl sestaven model dvojice rotujících lopatek se třecím členem a za předpokladu pulsního buzení nerotujícím elektromagnetem zkoumány vlivy vybraného parametru třecí charakteristiky a přítomnosti třecího členu na ohybové kmitání lopatek. Tento model je dále linearizován metodou ekvivalentní linearizace a využit k optimalizacím vybraných parametrů třecího členu a součinitele smykového tření v kontaktních plochách z hlediska potlačení ohybového kmitání lopatek a potlačení dynamické napjatosti v ohybu. V závěru práce je stručně odvozen matematický model kompletního olopatkování rotujícího disku, které se skládá z 60ti lopatek, mezi jejichž nástavce jsou vloženy třecí členy, a provedeno řešení harmonicky buzených kmitů lopatek.

Klíčová slova: kmitání lopatek, metoda konečných prvků, vlastní čísla, tření, třecí člen, metoda ekvivalentní linearizace, optimalizace parametrů třecího členu

Abstract

Presented work deals with a modeling of a vibration of turbine blades. In accordance with the experimental arrangement tested in IT AS CR, the computational model of a couple of clamped blades into a rotating rigid disk with a friction element is designed. Either of the blades is discretized by the finite element method. To discretize the blades in a rotating space, one-dimensional beam element's matrices in a local coordinate system of the rotating blade have been derived. We assume a bending vibration of the blade in its one plane of symmetry combined with a torsional vibration along the longitudinal axis. The sensitivity of eigenvalues of the blade with respect to the revolution speed is evaluated. In this work, the friction element is considered a mass point elastically placed in a wedge gap between the blade shrouds. The friction in central contact points between the blade shrouds and the friction element is approximated by a continuous function depending on slip velocities of the shrouds relative to the friction element. Considered friction characteristic respects the micro-slip phase at the very low slip velocities and the macro-slip (full-slip) phase at the higher slip velocities. Both of the blades are excited in axial direction by non-rotating electromagnet. The friction element impact and also a chosen parameter of the friction characteristic impact on bending vibration of the blades are analyzed. Then, the equivalent linearization method is applied on this strongly nonlinear system. An optimization of chosen parameters of the friction element and coefficient of friction for the bending vibration suppression of the blades and also an optimization for the dynamic bending stress suppression are performed. In the last chapter, a modeling of a vibration of a whole harmonically excited bladed disk with friction elements placed between neighbouring blade shrouds is described.

Keywords: blade vibration, finite element method, eigenvalues, friction, friction element, equivalent linearization method, optimization of friction element parameters

Obsah

Obsah	6
Seznam hlavních veličin	8
1 Úvod	12
1.1 Problematika kmitání olopatkovaných disků.....	12
1.2 Cíl práce.....	13
2 Modelování lopatky za rotace	14
2.1 Matematický model lopatky.....	14
2.2 Problém vlastních hodnot lopatky.....	21
3 Modelování kmitání dvojice lopatek s třecím členem za rotace	27
3.1 Matematický model dvojice rotujících lopatek	28
3.2 Vliv parametru třecí charakteristiky na ohybové kmitání lopatek.....	30
3.3 Vliv třecího členu na ohybové kmitání lopatek	33
3.4 Aplikace metody ekvivalentní linearizace	36
4 Optimalizace vybraných parametrů třecího členu	40
4.1 Stručný úvod do problematiky parametrické optimalizace	40
4.2 Optimalizace třecího členu z hlediska potlačení kmitání dvojice lopatek	41
4.2.1 Potlačení ohybového kmitání v okolí nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek	42
4.2.2 Potlačení ohybového kmitání v okolí druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek	45
4.3 Optimalizace třecího členu z hlediska potlačení dynamické napjatosti lopatek v ohybu.....	49
5 Modelování kmitání olopatkování disku s třecími členy	54
5.1 Stručné odvození matematického modelu olopatkování disku s třecími členy.....	54
5.2 Modální analýza přidruženého konzervativního modelu.....	58
5.3 Metoda vyšetřování harmonicky buzených kmitů.....	63

6 Závěr	66
Literatura	69
Publikace autora související s tématem práce	71

Seznam hlavních veličin

Skalární veličiny

a_A, a_B	m	amplituda skluzové výchylky v bodu A, B
A	m^2	plocha průřezu
b_e, b_A, b_B	$kg \cdot s^{-1}$	koeficient ekvivalentního viskózního tlumení, v bodu A, B
c_A, c_B	$m \cdot s^{-1}$	skluzová rychlost v bodu A, B
c_r	$m \cdot s^{-1}$	kritická skluzová rychlost
d		součinitel poklesu třecí charakteristiky
E	Pa	Youngův modul pružnosti
$E_k^{(e)}, E_k^{(N)}$	J	kinetická energie lopatkového prvku, nástavce
$E_p^{(e)}$	J	potenciální energie lopatkového prvku
f	Hz	frekvence
f, f_d, f_s		součinitel smykového tření, dynamický součinitel smykového tření, statický součinitel smykového tření
$F(t), F_0$	N	budicí síla, amplituda budicí síly
$F_{t,A}, F_{t,B}$	N	třecí síla v bodu A, B
G	Pa	modul pružnosti ve smyku
H		Heavisideova funkce
i		imaginární jednotka
J_k	m^4	moment odporu v krutu
J_p	m^4	polární moment
J_η, J_ζ	m^4	kvadratické momenty průřezu
k_e	$N \cdot m^{-1}$	tuhost pružiny
l	m	délka lopatkového prvku

m_e	kg	hmotnost třecího členu
m_N	kg	hmotnost nástavce lopatky
M		počet lopatek
n	$ot. min^{-1}$	otáčky
N		počet uzlů
N_A, N_B	N	normálová síla v bodu A, B
p_d		počet dýzových lopatek
p_i, p_i^d, p_i^h		optimalizační parametr, dolní, horní závora optimalizačního parametru
p_o		počet oběžných lopatek
q		zobecněná souřadnice
r_A, r_B	m	kolmá vzdálenost bodu A, B od podélné osy lopatky
r_e, r_i	m	rádus středu hmotnosti třecího členu, uzlu i od osy rotace
$S_0^{(e)}$	N	odstředivá síla
t	s	čas
T_b, T_0	s	perioda buzení, jedné otáčky disku
u_x, u_y, u_z	m	posuv ve směru osy x, y, z
v, v_e	m	příčná výchylka, výchylka třecího členu
α	$^\circ$	úhel, který spolu svírají podélné osy sousedních lopatek
β	$^\circ$	úhel sklonu třecího členu
γ_{xy}, γ_{xz}		zkosy
δ_{ij}		Kroneckerovo delta
ε_x		poměrné prodloužení ve směru osy x
λ_v	$rad. s^{-1}$	vlastní číslo
ρ	$kg. m^{-3}$	hustota materiálu
$\sigma^{(e)}$	Pa	normálové napětí
φ	rad	torzní natočení
ψ	rad	ohybové natočení
$\psi(\mathbf{p})$		cílová funkce
ω, ω_0	$rad. s^{-1}$	úhlová rychlost, úhlová rychlost otáčení disku

Matice a vektory

B, B_B	matice tlumení systému, lopatky
B_C, B_e	matice ekvivalentního tlumení systému, dvojice lopatek
c_1, c_2	vektory koeficientů báзовých funkcí
E	jednotková matice
$f(t)$	vektor buzení
f^*	vektor třecích účinků
$G, G_B, G^{(e)}$	matice popisující gyroskopické účinky systému, lopatky, lopatkového prvku
G_N	matice popisující gyroskopické účinky nástavce
I_N	matice setrvačnosti nástavce
J	matice kvadratických momentů průřezu
$K_s, K_{s,B}, K_s^{(e)}$	matice statické tuhosti systému, lopatky, lopatkového prvku
K_C	matice tuhosti vnitřních elastických vazeb
$K_d, K_{d,B}, K_d^{(e)}$	matice popisující změkčení systému, lopatky, lopatkového prvku v rotujícím prostoru
$K_{d,N}$	matice popisující změkčení nástavce
$K_\omega, K_{\omega,B}, K_\omega^{(e)}$	matice popisující zpevnění systému, lopatky, lopatkového prvku vlivem odstředivých sil
$M, M_B, M^{(e)}$	matice hmotnosti systému, lopatky, lopatkového prvku
M_e	matice hmotnosti třecích členů
M_N	matice hmotnosti nástavce
p	vektor optimalizačních parametrů
p^*	vektor optimalizovaných parametrů
$q, q_B, q^{(e)}, q_e$	vektor zobecněných souřadnic systému, lopatky, lopatkového prvku
q_N	vektor výchylek nástavce v jeho středu hmotnosti
T	transformační matice
u_v	pravostranný vlastní vektor

\mathbf{U}	modální matice pravostranných vlastních vektorů
$\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_{S,N}$	vektor rychlosti středu hmotnosti tělesa, nástavce
\mathbf{w}_v	levostranný vlastní vektor
\mathbf{W}	modální matice levostranných vlastních vektorů
Λ	spektrální matice
$\Phi(x)$	kubická bázová funkce
$\Psi(x)$	lineární bázová funkce
$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_N$	vektor úhlové rychlosti tělesa, nástavce

Kapitola 1

Úvod

Mechanické kmitání (někdy též nazývané vibrace) můžeme charakterizovat jako proces, při kterém dochází ke střídavému zvyšování a snižování hodnot určitých fyzikálních veličin, jako jsou například výchylka, rychlost, zrychlení, síla, napětí, ... Současně se změnou těchto hodnot se neustále přeměňuje kinetická energie na energii potenciální a naopak. Typickým příkladem mechanického kmitání je pohyb kyvadla.

Na kmitání jakožto doprovodný jev provozování mnoha mechanických zařízení je často nahlíženo negativně. Tzv. únava materiálu způsobená cyklickým namáháním má za následek snižování životnosti daného zařízení. V místech koncentrace napětí dochází k inicializaci únavové trhliny, postupnému spojování mikrotrhlin v dominantní trhlínu a při překročení kritické hodnoty lomové houževnatosti nastává finální dolomení součásti. U dopravních prostředků má kmitání zásadní vliv na snižování cestovního komfortu, ať už přenosem vibrací z vozidla na cestujícího, či vyzářováním nepříjemného hluku. V krajních případech může kmitání konstrukce vést až k její destrukci. Z těchto důvodů bývá snahou konstruktérů vibrace takových zařízení co nejvíce potlačit a vyhnout se tak popsáním problémům.

1.1 Problematika kmitání olopatkovaných disků

S rostoucími výkony moderních parních turbín vzrůstají také nároky na samotné olopatkování. Zatížení tlakem páry 4-7 MPa při otáčkách rotoru turbíny 3000 ot/min doprovázené tlakovými pulsacemi způsobuje rozkmitávání lopatek a jejich vysokocyklové namáhání. Toto namáhání významně ovlivňuje životnost lopatek a v kritickém případě může způsobit ulomení jedné či více lopatek, což má za následek odstávku turbíny a značné finanční ztráty. Výrobci turbín proto aktivně spolupracují s výzkumem a snaží se identifikovat přesné příčiny vibrací lopatek [12]. K základním metodám potlačování kmitání olopatkovaných disků patří vkládání třecích členů mezi nástavce lopatek. Detailní zkoumání vlivů tření na dynamickou odezvu nosníku můžeme nalézt například v [3], [5]. Z hlediska výpočtového času je však řešení těchto silně nelineárních systémů pomocí numerických simulací značně problematické.

Snahou je proto vyšetřit, za jakých podmínek lze dané matematické modely linearizovat srovnáním výsledků s výsledky numerických simulací [17]. Vhodnost použití metody ekvivalentní linearizace spočívající v náhradě třecích účinků ekvivalentním viskózním tlumením byla experimentálně ověřována například v publikaci [4].

Experimentálním zjišťováním dynamických vlastností olopatkovaných disků se dlouhodobě zabývá také Ústav termomechaniky AV ČR. Na nerotujícím olopatkovaném disku zde byly zkoumány vlivy tření v kontaktních plochách nástavců lopatek se třecím členem vloženým do klínové drážky mezi nástavce lopatek [16], [14].

1.2 Cíl práce

Cílem této diplomové práce je modelovat kmitání dvojice rotujících lopatek vetknutých do tuhého disku, mezi jejichž nástavce je vložen třecí člen, a optimalizovat vybrané parametry třecího členu vzhledem k provoznímu režimu s cílem potlačit kmitání lopatek. Na základě časové posloupnosti prováděných úkonů lze tento cíl práce dekomponovat do následujících kroků:

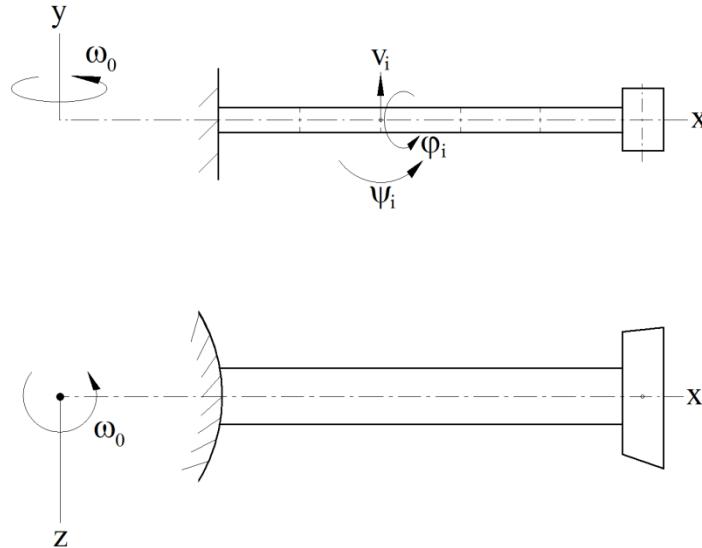
- Na základě dat poskytnutých Ústavem termomechaniky AV ČR navrhnout výpočtový a posléze matematický model nejprve jedné rotující lopatky s nástavcem, který respektuje vlivy rotace. Vyšetřit vlastní hodnoty lopatky v závislosti na provozních otáčkách a ověřit stabilitu pro vybrané provozní otáčkové spektrum.
- Sestavit model dvojice rotujících lopatek, které odpovídají dvojici sousedních lopatek olopatkovaného disku, mezi jejichž nástavce je vložen třecí člen. Prozkoumat vlivy třecího členu na ohybové kmitání harmonicky buzených lopatek. Linearizovat model využitím metody ekvivalentní linearizace.
- V závislosti na provozním režimu lopatek definovaném frekvencí budící síly provést optimalizaci vybraných parametrů třecího členu a součinitele smykového tření v kontaktních plochách mezi nástavci lopatek a třecím členem vzhledem k potlačení ohybového kmitání lopatek.
- Stručně odvodit matematický model kompletního olopatkování rotujícího tuhého disku sestávajícího z 60ti oběžných lopatek, mezi jejichž nástavce jsou vloženy třecí členy, a popsat metodu modelování harmonicky buzených kmitů lopatek.

Kapitola 2

Modelování lopatky za rotace

2.1 Matematický model lopatky

Uvažujme lopatku obdélníkového průřezu s nástavcem pevně vetknutou do horizontálně umístěného tuhého disku rotujícího konstantní úhlovou rychlostí ω_0 okolo osy y dle obr. 2.1. K diskretizaci samotné lopatky bez nástavce použijeme metodu konečných prvků. Pomocí N uzlů je lopatka rozdělena na $N - 1$ nosníkových lopatkových prvků.



Obr. 2.1: Rotující lopatka s nástavcem

Pro diskretizaci lopatky v rotujícím prostoru je nezbytné odvodit matice 1-dimenzionálního nosníkového lopatkového prvku v lokálním souřadnicovém systému xyz rotujícího konstantní úhlovou rychlostí ω_0 [7]. Uvažujeme ohybové kmity lopatky v její rovině symetrie \widehat{xy} kombinované s torzními kmity lopatky okolo její podélné osy.

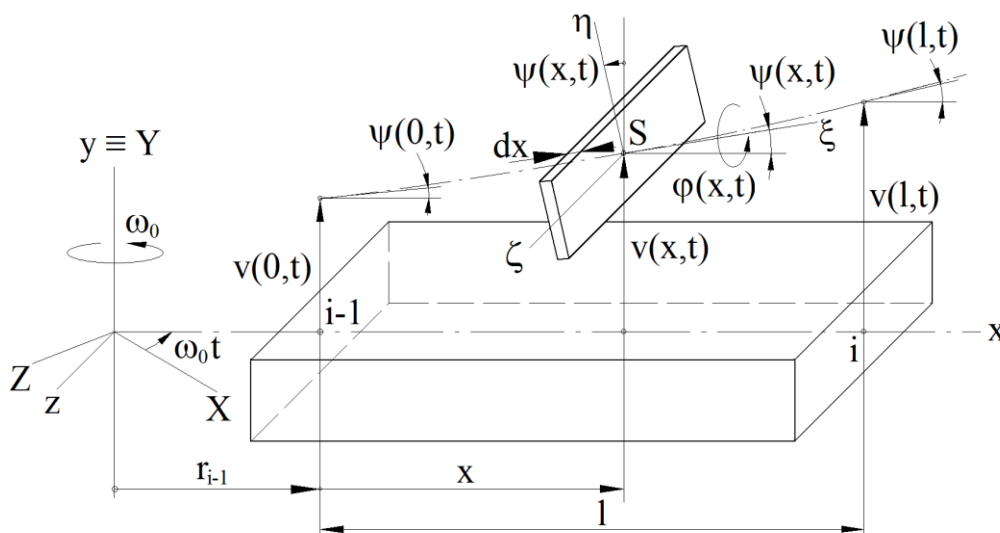
Prostorový pohyb lopatkového hmotnostního elementu délky dx ve vzdálenosti x od počátku lopatkového nosníkového prvku mezi uzly $i - 1$ a i je popsán základním rozkladem pohybu na posuvný pohyb s vektorem rychlosti jeho středu hmotnosti S vyjádřeného v rotujícím souřadnicovém systému xyz (viz obr. 2.2) ve tvaru

$$\mathbf{v}_s(x, t) = [0, \dot{v}(x, t), -\omega_0(r_{i-1} + x)]^T, \quad (2.1)$$

kde r_{i-1} je kolmá vzdálenost (rádius) počátečního uzlu $i - 1$ lopatkového nosníkového prvku od osy rotace y (obr. 2.2), a na relativní sférický pohyb okolo tohoto středu hmotnosti S . Okamžitá úhlová rychlost sférického pohybu je popsána vektorem

$$\boldsymbol{\omega} = [\dot{\varphi}(x, t) + \omega_0 \sin \psi(x, t), \omega_0 \cos \psi(x, t), \dot{\psi}(x, t)]^T \quad (2.2)$$

vyjádřeným v souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$, kde $\widehat{\eta\zeta}$ je rovina průřezu lopatky po ohybové deformaci. Deformace v libovolném místě x lopatkového nosníkového prvku jsou tedy v každém čase popsány pomocí příčné výchylky $v(x, t)$, ohybového natočení $\psi(x, t)$ a torzního natočení $\varphi(x, t)$ průřezu lopatky kolem osy ξ kolmé na rovinu řezu.



Obr. 2.2: Deformace lopatkového nosníkového prvku

Uvažujme, že ohybové $\psi(x, t)$ a torzní $\varphi(x, t)$ výchylky jsou malé. V takovém případě lze matematický model netlumeného nosníkového lopatkového prvku mezi uzly $i - 1$ a i odvodit v konfiguračním prostoru

$$\mathbf{q}^{(e)} = [v_{i-1}, \psi_{i-1}, v_i, \psi_i, \varphi_{i-1}, \varphi_i]^T, \quad (2.3)$$

kde platí $v_{i-1} = v(0, t)$, $\psi_{i-1} = \psi(0, t)$, $v_i = v(l, t)$, $\psi_i = \psi(l, t)$, $\varphi_{i-1} = \varphi(0, t)$, $\varphi_i = \varphi(l, t)$. Kinetická energie konečného lopatkového prvku délky l , plochy průřezu A a hustoty materiálu ρ může být vyjádřena ve tvaru

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^1 [A \mathbf{v}_s^T(x, t) \mathbf{v}_s(x, t) + \boldsymbol{\omega}^T(x, t) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}(x, t)] \rho dx, \quad (2.4)$$

kde matice setrvačnosti $\mathbf{J} \rho dx$ lopatkového hmotnostního elementu je popsána maticí kvadratických momentů plochy průřezu

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_\eta + J_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

k hlavním osám průřezu $\eta\zeta$. Potenciální energie lopatkového nosníkového prvku má tvar

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{(A)} \{E \varepsilon_x^2(x, t) + G[\gamma_{xy}^2(x, t) + \gamma_{xz}^2(x, t)]\} dA dx, \quad (2.6)$$

kde E je *Youngův* modul pružnosti a G je modul pružnosti ve smyku. Za předpokladu malých deformací platí $\psi = \frac{\partial v}{\partial x}$ a při uvažování *Bernoulliovy-Navierovy* hypotézy (průřezy lopatky, které jsou rovinné a kolmé na střednici před deformací, zůstávají rovinné a kolmé na střednici i po deformaci: $y = \eta$, $z = \zeta$) lze přepsat složky vektoru přetvoření (argumenty x, t jsou vynechány) v místě řezu určeném souřadnicemi η, ζ vyjádřené ve tvaru

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (2.7)$$

kde pro posuvy platí

$$u_x = -y\psi, \quad u_y = v - z\varphi, \quad u_z = y\varphi, \quad (2.8)$$

do tvaru

$$\varepsilon_x = -\eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xy} = -\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \eta \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.9)$$

V souladu s těmito předpoklady a dosazením výrazů (2.9) do (2.6) dostaneme potenciální energii ve tvaru

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{(A)} [E \left(\eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 (\eta^2 + \zeta^2)] dA dx. \quad (2.10)$$

Příčné deformace podél lopatkového prvku aproximujeme pomocí kubických bázových funkcí [2]

$$v(x, t) = \boldsymbol{\Phi}(x) \mathbf{c}_1(t), \quad \boldsymbol{\Phi}(x) = [1, x, x^2, x^3], \quad (2.11)$$

$$\psi(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(x)}{\partial x} \mathbf{c}_1(t)$$

a torzní natočení pomocí lineární bázové funkce

$$\varphi(x, t) = \boldsymbol{\Psi}(x)\mathbf{c}_2(t), \quad \boldsymbol{\Psi}(x) = [1, x]. \quad (2.12)$$

Vektory $\mathbf{c}_1(t), \mathbf{c}_2(t)$ koeficientů bázových funkcí vyloučíme z okrajových podmínek pro případy $x = 0$ a $x = l$

$$\begin{bmatrix} v(0, t) \\ \psi(0, t) \\ v(l, t) \\ \psi(l, t) \end{bmatrix} = \mathbf{q}_1(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_1} \mathbf{c}_1(t), \quad \begin{bmatrix} \varphi(0, t) \\ \varphi(l, t) \end{bmatrix} = \mathbf{q}_2(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_2} \mathbf{c}_2(t). \quad (2.13)$$

Dosazením vektorů koeficientů bázových funkcí

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1(t), \quad \mathbf{c}_2(t) = \mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2(t) \quad (2.14)$$

do rovnic (2.11), (2.12) získáme vztahy mezi deformacemi lopatkového konečného prvku a zobecněnými souřadnicemi uzlů $i - 1$ a i

$$v(x, t) = \boldsymbol{\Phi}(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1(t), \quad \psi(x, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(x)}{\partial x}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1(t), \quad \varphi(x, t) = \boldsymbol{\Psi}(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2(t). \quad (2.15)$$

Za rotace se vlivem odstředivé síly lopatka natahuje a tím se zvyšuje její odpor proti ohybu. Tento jev lze vyjádřit pomocí deformační energie [6]. Hmotnostní element lopatky se natáhne tak, že jeho původní délka dx se zvětší na [7]

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}. \quad (2.16)$$

Při uvažování malých deformací získáme z *Taylorova* rozvoje

$$ds \cong dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]. \quad (2.17)$$

Přírůstek deformační energie v hmotnostním elementu lopatkového konečného prvku e je dán prací odstředivé síly $S_0^{(e)}(x)$

$$dE_p^{(e)} = S_0^{(e)}(x)(ds - dx) = \frac{1}{2} S_0^{(e)}(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \quad (2.18)$$

a v celém lopatkovém konečném prvku

$$\Delta E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l S_0^{(e)}(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (2.19)$$

Využijeme-li první z aproximačních vztahů (2.15), přírůstek deformační energie v lopatkovém konečném prvku lze při uvažování konstantní odstředivé síly podél prvku $S_0^{(e)}(x) = S_0^{(e)}$ přepsat do tvaru

$$\Delta E_p^{(e)} = \frac{1}{2} S_0^{(e)} \mathbf{q}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \int_0^l \boldsymbol{\Phi}'^T(x) \boldsymbol{\Phi}'(x) dx \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t), \quad (2.20)$$

kde čárkou označujeme parciální derivaci podle x .

Matematický model netlumeného lopatkového konečného prvku je odvozen přepsáním *Lagrangeových* rovnic do matematického tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial (E_p^{(e)} + \Delta E_p^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} &= \\ &= \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{G}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + [\mathbf{K}_s^{(e)} + \omega_0^2 (\mathbf{K}_\omega^{(e)} - \mathbf{K}_d^{(e)})] \mathbf{q}^{(e)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Použitím aproximačních vztahů (2.15) a dle (2.4), (2.10), (2.20) jsme schopni vyjádřit kinetickou a potenciální energii lopatkového konečného prvku a z identity (2.21) získat symetrické matice hmotnosti $\mathbf{M}^{(e)}$, statické tuhosti $\mathbf{K}_s^{(e)}$, zpevnění proti ohybu v důsledku odstředivých sil $\omega_0^2 \mathbf{K}_\omega^{(e)}$ a změkčení v důsledku modelování v rotujícím prostoru $-\omega_0^2 \mathbf{K}_d^{(e)}$ a antisymetrickou matici gyroskopických účinků $\omega_0 \mathbf{G}^{(e)}$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)} &= \rho \begin{bmatrix} A \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}_1^{-1} + J_\zeta \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_p \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_\Psi \mathbf{S}_2^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}^{(e)} &= \rho \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -J_p \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{\Phi, \Psi} \mathbf{S}_2^{-1} \\ J_p \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_{\Psi, \Phi} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_s^{(e)} &= \begin{bmatrix} E J_\zeta \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G J_k \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_\Psi \mathbf{S}_2^{-1} \end{bmatrix}, \\ \omega_0^2 \mathbf{K}_\omega^{(e)} &= S_0^{(e)} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} \rho J_p \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Každý z lopatkových konečných prvků je definován veličinami A (plocha průřezu), J_ζ (kvadratický moment plochy průřezu k ose ζ), J_p (polární moment), J_k (modul odporu v krutu) a materiálovými parametry ρ (hustota), E (*Youngův* modul pružnosti) a G (modul pružnosti ve smyku). V těchto maticích (2.22) lopatkového konečného prvku délky l jsou použity integrální matice

$$\mathbf{I}_\Phi = \int_0^1 \Phi^T(x)\Phi(x)dx, \quad \mathbf{I}_\Psi = \int_0^1 \Psi^T(x)\Psi(x)dx, \quad \mathbf{I}_{\Phi'} = \int_0^1 \Phi'^T(x)\Phi'(x)dx, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{I}_{\Psi'} = \int_0^1 \Psi'^T(x)\Psi'(x)dx, \quad \mathbf{I}_{\Phi''} = \int_0^1 \Phi''^T(x)\Phi''(x)dx, \quad \mathbf{I}_{\Phi\Psi} = \int_0^1 \Phi'^T(x)\Psi(x)dx.$$

Konfigurační prostor (2.3) je výhodný pro modelování lopatkového prvku, protože matice (2.22) mají jednoduchou blokově-diagonální strukturu. Vzhledem k řetězové topologii lopatky a postupnému číslování uzlů je však účelné transformovat matice lopatkového konečného prvku do konfiguračního prostoru

$$\mathbf{q}_e = [v_{i-1}, \psi_{i-1}, \varphi_{i-1}, v_i, \psi_i, \varphi_i]^T \quad (2.24)$$

s odlišným pořadím zobecněných souřadnic. Díky této transformaci budou mít globální matice celé lopatky $\mathbf{M}_B, \mathbf{G}_B, \mathbf{K}_{s,B}, \mathbf{K}_{\omega,B}, \mathbf{K}_{d,B}$ blokově-diagonální strukturu. Transformační matici \mathbf{T} můžeme snadno odvodit pomocí vztahu

$$\mathbf{q}^{(e)} = \begin{bmatrix} v_{i-1} \\ \psi_{i-1} \\ v_i \\ \psi_i \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i-1} \\ \psi_{i-1} \\ \varphi_{i-1} \\ v_i \\ \psi_i \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{q}_e. \quad (2.25)$$

Transformované matice hmotnosti $\tilde{\mathbf{M}}^{(e)}$, gyroskopických účinků $\omega_0 \tilde{\mathbf{G}}^{(e)}$, statické tuhosti $\tilde{\mathbf{K}}_s^{(e)}$, zpevnění při ohybu $\omega_0^2 \tilde{\mathbf{K}}_\omega^{(e)}$ a změkčení $-\omega_0^2 \tilde{\mathbf{K}}_d^{(e)}$ lopatkového prvku jsou poté definovány vztahem

$$\tilde{\mathbf{X}}^{(e)} = \mathbf{T}^T \mathbf{X}^{(e)} \mathbf{T}, \quad \mathbf{X}^{(e)} = \mathbf{M}^{(e)}, \omega_0 \mathbf{G}^{(e)}, \mathbf{K}_s^{(e)}, \omega_0^2 \mathbf{K}_\omega^{(e)}, -\omega_0^2 \mathbf{K}_d^{(e)}. \quad (2.26)$$

Matice tuhého nástavce připevněného na konci lopatky v rotujícím prostoru odvodíme z jeho kinetické energie

$$E_k^{(N)} = \frac{1}{2} m_N \mathbf{v}_{S,N}^T \mathbf{v}_{S,N} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_N^T \mathbf{I}_N \boldsymbol{\omega}_N, \quad (2.27)$$

kde m_N je hmotnost nástavce, $\mathbf{v}_{S,N}$ je vektor rychlosti středu hmotnosti nástavce při posuvném pohybu, $\boldsymbol{\omega}_N$ je vektor úhlové rychlosti sférického pohybu nástavce kolem jeho středu hmotnosti a $\mathbf{I}_N = \text{diag}(I_{x,N}, I_{y,N}, I_{z,N})$ je matice setrvačnosti nástavce. Využitím vztahů

$$\mathbf{v}_{S,N} = [0, \dot{v}_N, -\omega_0 r_N]^T, \quad \boldsymbol{\omega}_N = [\dot{\varphi}_N + \omega_0 \sin \psi_N, \omega_0 \cos \psi_N, \dot{\psi}_N]^T \quad (2.28)$$

a za předpokladu malých deformací ($\sin \psi_N \approx \psi_N$, $\cos \psi_N \approx 1$) zapíšeme kinetickou energii nástavce lopatky

$$E_k^{(N)} = \frac{1}{2}m(\dot{v}_N^2 + \omega_0^2 r_N^2) + \frac{1}{2}I_{x,N}(\dot{\varphi}_N + \omega_0\psi_N)^2 + \frac{1}{2}I_{y,N}\omega_0^2 + \frac{1}{2}I_{z,N}\dot{\psi}_N^2. \quad (2.29)$$

Z ekvivalence

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(N)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_N} \right) - \frac{\partial E_k^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_N} = \mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{q}}_N + \omega_0 \mathbf{G}_N \dot{\mathbf{q}}_N - \omega_0^2 \mathbf{K}_{d,N} \mathbf{q}_N, \quad (2.30)$$

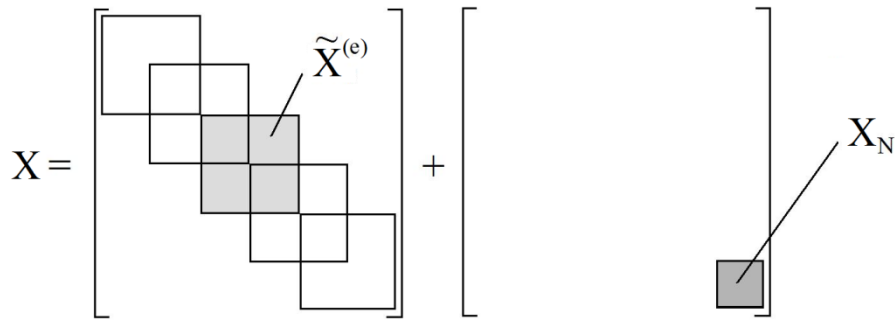
kde vektor výchylek nástavce v jeho středu hmotnosti je

$$\mathbf{q}_N = [v_N, \psi_N, \varphi_N]^T, \quad (2.31)$$

vyjádříme matice hmotnosti \mathbf{M}_N , gyroskopických účinků $\omega_0 \mathbf{G}_N$ a změkčení $-\omega_0^2 \mathbf{K}_{d,N}$ nástavce ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(N)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_N} \right) - \frac{\partial E_k^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_N} = & \underbrace{\begin{bmatrix} m_N & 0 & 0 \\ 0 & I_{z,N} & 0 \\ 0 & 0 & I_{x,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{v}_N \\ \ddot{\psi}_N \\ \ddot{\varphi}_N \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}_N} + \omega_0 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{x,N} \\ 0 & I_{x,N} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_N \\ \dot{\psi}_N \\ \dot{\varphi}_N \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}_N} - \\ & - \omega_0^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{x,N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{d,N}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_N \\ \psi_N \\ \varphi_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_N}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Globální matice lopatky s nástavcem jsou složeny z transformovaných matic všech lopatkových konečných prvků a matice hmotnosti, gyroskopických účinků a změkčení jsou navíc doplněny o matice tuhého nástavce příslušející zobecněným souřadnicím koncového uzlu lopatky (střed hmotnosti nástavce je totožný s koncovým uzlem lopatky).



Obr. 2.3: Globální matice lopatky s nástavcem

Po zahrnutí materiálového tlumení aproximovaného maticí proporcionálního tlumení ve tvaru

$$\mathbf{B}_B = \alpha \mathbf{M}_B + \beta \mathbf{K}_{s,B}, \quad (2.33)$$

kde koeficienty α, β jsou určeny pomocí odhadnutých poměrných útlumů dvou rezonančně nejnižších vlastních tvarů kmitání lopatky, má matematický model rotující tlumené lopatky s nástavcem tvar

$$\mathbf{M}_B \dot{\mathbf{q}}_B + (\mathbf{B}_B + \omega_0 \mathbf{G}_B) \mathbf{q}_B + [\mathbf{K}_{s,B} + \omega_0^2 (\mathbf{K}_{\omega,B} - \mathbf{K}_{d,B})] \mathbf{q}_B = \mathbf{0}, \quad (2.34)$$

kde

$$\mathbf{q}_B = [\dots, v_i, \psi_i, \varphi_i, \dots]^T, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.35)$$

je vektor zobecněných souřadnic lopatky.

2.2 Problém vlastních hodnot lopatky

Uvažujme obecný matematický model proporcionálně tlumené lopatky s nástavcem respektující vlivy odstředivých sil ve tvaru (2.34). Vzhledem k antisymetrické matici gyroskopických účinků $\omega_0 \mathbf{G}_B$ a symetrické matici tlumení \mathbf{B}_B v součtu je tento model silně nekonzervativní. S využitím identity

$$\mathbf{M}_B \dot{\mathbf{q}}_B(t) - \mathbf{M}_B \dot{\mathbf{q}}_B(t) = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

přepíšeme soustavu rovnic (2.36), (2.34) do maticového zápisu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_B \\ \mathbf{M}_B & \mathbf{B}_B + \omega_0 \mathbf{G}_B \end{bmatrix}}_N \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_B(t) \\ \mathbf{q}_B(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{M}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{s,B} + \omega_0^2 (\mathbf{K}_{\omega,B} - \mathbf{K}_{d,B}) \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_B(t) \\ \mathbf{q}_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

a zavedením stavového vektoru

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_B(t) \\ \mathbf{q}_B(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \quad (2.38)$$

zapišeme model ve stavovém prostoru dimenze $2N$

$$\mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.39)$$

kde matice \mathbf{N} , \mathbf{P} jsou blokově symetrické. K modelu (2.39) sestavíme model adjungovaný s transponovanými maticemi \mathbf{N} a \mathbf{P} ve tvaru

$$\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{P}^T \mathbf{w}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

kde analogicky k (2.38) platí

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_B(t) \\ \mathbf{r}_B(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \quad (2.41)$$

a pro transponované matice vztahy

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_B \\ \mathbf{M}_B & \mathbf{B}_B + \omega_0 \mathbf{G}_B^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{P}. \quad (2.42)$$

Nyní přistoupíme k samotnému řešení problému vlastních hodnot. Rovnicím (2.39) a (2.40) vyhovují řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t}, \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}e^{\lambda t}. \quad (2.43)$$

Zpětným dosazením těchto řešení do (2.39) a (2.40) dostaneme

$$(\lambda \mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{0}, \quad (\lambda \mathbf{N}^T + \mathbf{P})\mathbf{w}e^{\lambda t} = \mathbf{0}. \quad (2.44)$$

Tyto rovnice musí platit pro libovolný čas t , tedy i pro čas $t = 0$:

$$(\lambda \mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (\lambda \mathbf{N}^T + \mathbf{P})\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

Soustavy (2.45) mají netriviální řešení, pokud determinant matice soustavy je roven nule. Tedy například pro první ze vztahů (2.45) musí platit charakteristická rovnice

$$\det(\lambda \mathbf{N} + \mathbf{P}) = 0. \quad (2.46)$$

Kořeny této rovnice jsou po dvojicích komplexně sdružená vlastní čísla, která následně řadíme vzestupně podle velikosti imaginární části v pořadí

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, N \quad (2.47)$$

$$\lambda_{N+\nu} = \alpha_\nu - i\beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, N.$$

Každému komplexnímu vlastnímu číslu λ_ν odpovídají komplexní pravostranné \mathbf{u}_ν a levostranné \mathbf{w}_ν vlastní vektory, pro které platí

$$(\lambda_\nu \mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{u}_\nu = \mathbf{0}, \quad (\lambda_\nu \mathbf{N}^T + \mathbf{P})\mathbf{w}_\nu = \mathbf{0}. \quad (2.48)$$

Vzhledem k tomu, že rovnice (2.48) jsou homogenní, vlastní vektory nejsou jednoznačně určeny a je třeba je normovat. Nejčastěji se používá tzv. N -norma ve tvaru

$$\mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_\nu = 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2N. \quad (2.49)$$

Pro odvození podmínek biortogonality budeme uvažovat dvě různá netriviální řešení problému vlastních hodnot. První řešení nechť je definováno vlastním číslem λ_i a příslušejícími vlastními vektory \mathbf{w}_i a \mathbf{u}_i , druhé řešení pak vlastním číslem λ_j a vlastními vektory \mathbf{w}_j a \mathbf{u}_j . Dosazením řešení do rovnic (2.48) lze psát

$$\mathbf{P} \mathbf{u}_j = -\lambda_j \mathbf{N} \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{P} \mathbf{w}_i = -\lambda_i \mathbf{N}^T \mathbf{w}_i. \quad (2.50)$$

První rovnici vztahů (2.50) dále násobíme zleva vektorem \mathbf{w}_i^T a druhou rovnici zleva vektorem \mathbf{u}_j^T

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{P} \mathbf{u}_j = -\lambda_j \mathbf{w}_i^T \mathbf{N} \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{u}_j^T \mathbf{P} \mathbf{w}_i = -\lambda_i \mathbf{u}_j^T \mathbf{N}^T \mathbf{w}_i. \quad (2.51)$$

Transponováním druhé rovnice vztahu (2.51) a odečtením od první dostáváme podmínku biortogonality, neboť platí

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{w}_i^T \mathbf{N} \mathbf{u}_j, \quad (2.52)$$

tedy pro $\lambda_i \neq \lambda_j$ dostáváme

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{N} \mathbf{u}_j = 0, \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{P} \mathbf{u}_j = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (2.53)$$

Za předpokladu normování dle (2.49) můžeme zapsat podmínky biortogonality a normy (tzv. podmínky biortonormality) ve tvaru

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{N} \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{P} \mathbf{u}_j = -\lambda_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2N. \quad (2.54)$$

Po zavedení spektrální matice

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_v) \in \mathbb{C}^{2N, 2N} \quad (2.55)$$

a modálních matic levostranných a pravostranných vlastních vektorů

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_v] \in \mathbb{C}^{2N, 2N}, \quad \mathbf{U} = [\mathbf{u}_v] \in \mathbb{C}^{2N, 2N}, \quad (2.56)$$

kteřé jsou v maticích \mathbf{W} a \mathbf{U} uspořádaný do sloupců, můžeme přepsat podmínky biortonormality do tvaru

$$\mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{P} \mathbf{U} = -\mathbf{\Lambda},$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice řádu $2N$.

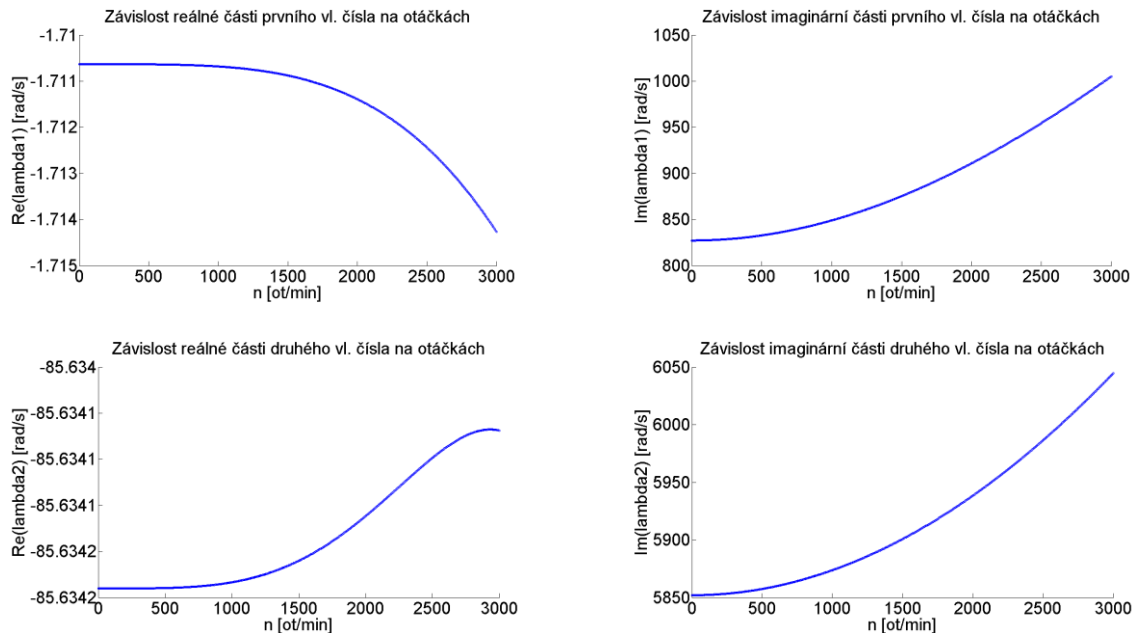
Pro konkrétní geometrické a materiálové parametry lopatky s nástavcem odpovídající experimentálnímu zařízení v ÚT AV ČR [9], tedy ocelové lopatce obdélníkového průřezu délky 210 mm, u které uvažujeme ohybové kmity v rovině $\widehat{x\hat{y}}$ kombinované s torzními kmity okolo podélné osy lopatky (tedy tři stupně volnosti v každém uzlu, viz obr. 2.1), jsou za předpokladu rozdělení lopatky na pět nosíkových prvků a uvažování pevného vetknutí lopatky do rotujícího tuhého disku (snížení počtu stupňů volnosti lopatky s nástavcem z 18 na 15) zanesena vlastní čísla modelu (2.34) v závislosti na otáčkách do tabulky 2.1.

2. Modelování lopatky za rotace

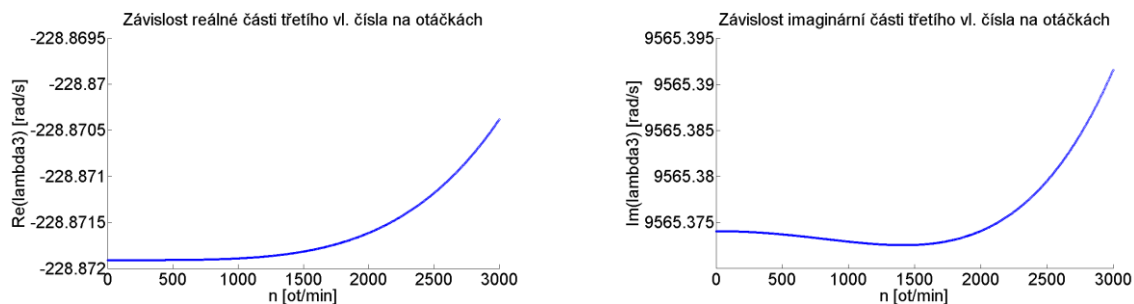
Pořadí vl. čísla	Vlastní čísla lopatky s nástavcem [rad/s]		
	n = 0 [ot/min]	n = 1000 [ot/min]	n = 3000 [ot/min]
1.	$-1,7 \pm 827,2i$	$-1,7 \pm 848,9i$	$-1,7 \pm 1005,2i$
2.	$-85,6 \pm 5852i$	$-85,6 \pm 5873,7i$	$-85,6 \pm 6044,6i$
3.	$-228,9 \pm 9565,4i$	$-228,9 \pm 9565,4i$	$-228,9 \pm 9565,4i$
4.	$-727,6 \pm 17044,8i$	$-727,6 \pm 17066,8i$	$-727,6 \pm 17241,9i$
5.	$-2848,1 \pm 33632i$	$-2848,1 \pm 33653,9i$	$-2848,1 \pm 33828,6i$
6.	$-3850,2 \pm 39054,4i$	$-3850,2 \pm 39054,4i$	$-3850,2 \pm 39054,5i$
7.	$-7612,5 \pm 54653,8i$	$-7612,5 \pm 54674,8i$	$-7612,5 \pm 54842,6i$
8.	$-15007,1 \pm 76010,7i$	$-15007,1 \pm 76010,7i$	$-15007,1 \pm 76010,4i$
9.	$-16182 \pm 78809,4i$	$-16182 \pm 78826,7i$	$-16181,9 \pm 78964,6i$
10.	$-35097 \pm 113167i$	$-35097 \pm 113189i$	$-35097 \pm 113358i$
11.	$-37763 \pm 116958i$	$-37763 \pm 116958i$	$-37763 \pm 116958i$
12.	$-71713 \pm 153435i$	$-71713 \pm 153457i$	$-71713 \pm 153635i$
13.	$-73172 \pm 154644i$	$-73172 \pm 154644i$	$-73172 \pm 154644i$
14.	$-145111 \pm 192321i$	$-145111 \pm 192346i$	$-145111 \pm 192545i$
15.	$-269513 \pm 187531i$	$-269513 \pm 187567i$	$-269513 \pm 187850i$

Tab. 2.1: Vlastní čísla lopatky s nástavcem v závislosti na otáčkách

Závislosti reálných a imaginárních částí prvních tří vlastních čísel lopatky s nástavcem na provozních otáčkách jsou ukázány na obrázku 2.4.



2. Modelování lopatky za rotace

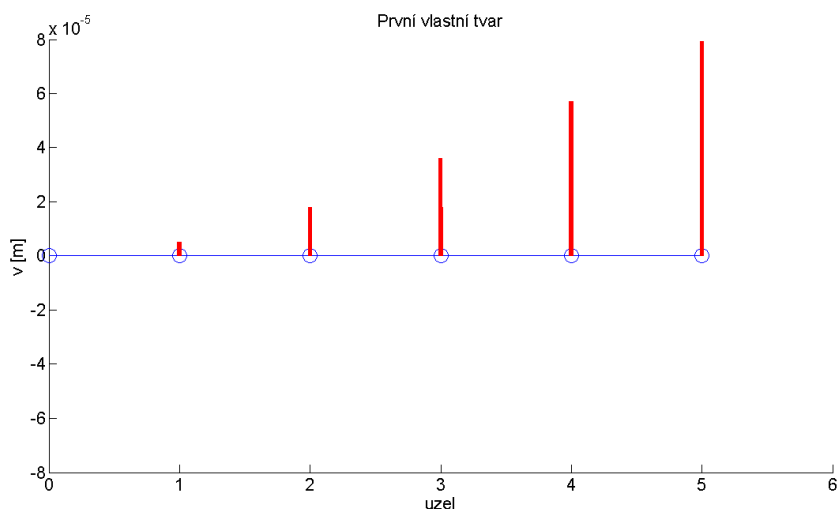


Obr. 2.4: Závislosti reálných a imaginárních částí vlastních čísel na otáčkách

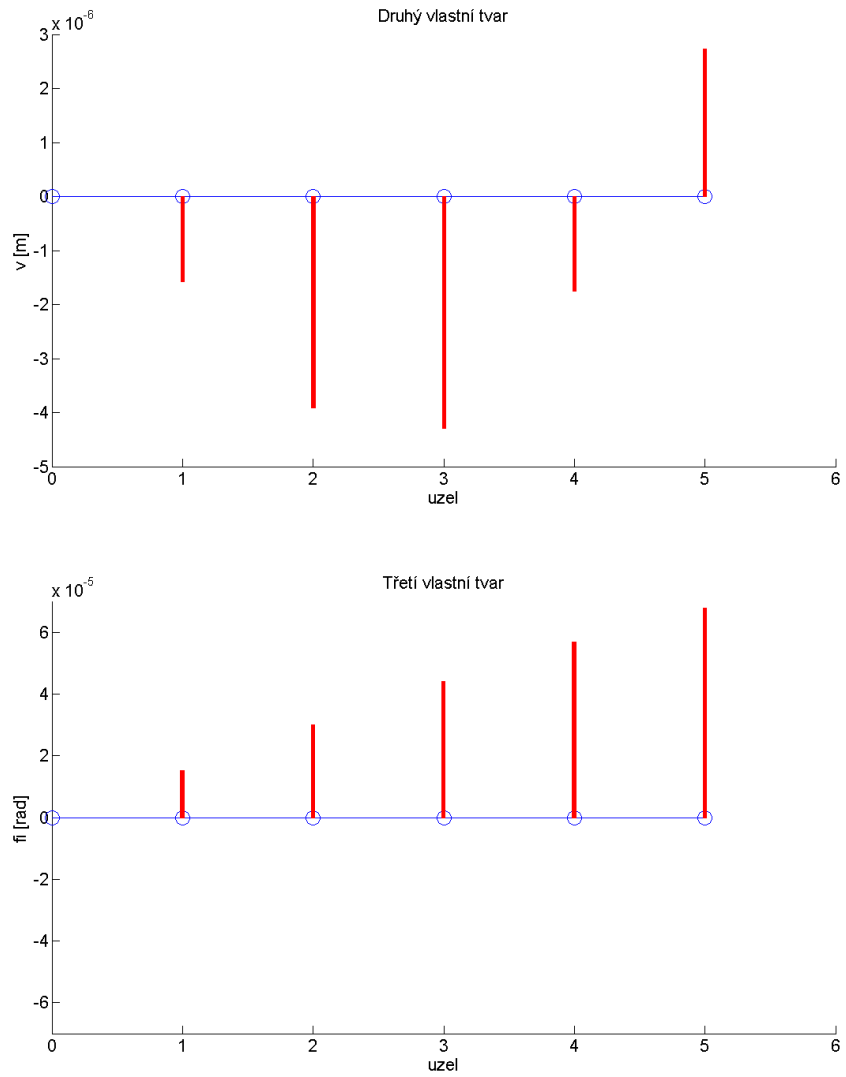
Z tabulky 2.1 je zřejmé, že pro provozní otáčky v rozsahu $0 \div 3000 \text{ ot/min}$ leží všechna po dvojicích komplexně sdružená vlastní čísla v levé komplexní polorovině a systém je tedy pro toto otáčkové spektrum asymptoticky stabilní. Toto zjištění je jen potvrzením vlastnosti systémů modelovaných ve tvaru (2.34) se symetrickou a pozitivně definitní celkovou maticí tuhosti.

Z grafů na obr. 2.4 vyplývá zvyšování vlastních frekvencí (imaginárních částí vlastních čísel) u ohybových vlastních tvarů kmitání s růstem otáček a prakticky nezávislost vlastní frekvence torzního tvaru na otáčkách.

Vzhledem ke komplexním pravostranným a levostranným vlastním vektorům nenabývají výchylky v jednotlivých uzlech lopatky svých maxim ve stejný okamžik, ale s fázovým zpožděním. Vlastní tvary kmitů je proto nutné zobrazovat v komplexní rovině, v níž reálná osa je vodorovná a imaginární osa je svislá. Na obrázku 2.5 jsou zobrazeny vlastní tvary kmitů lopatky s nástavcem (příslušné složky pravostranných vlastních vektorů) odpovídající nejnižším třem vlastním frekvencím při otáčkách $n = 3000 \text{ ot/min}$, přičemž první dva tvary představují ohybové kmitání v rovině \widehat{xy} popsané příčnou výchylkou v a třetí tvar pak torzní kmitání okolo podélné osy lopatky popsané natočením φ .



2. Modelování lopatky za rotace

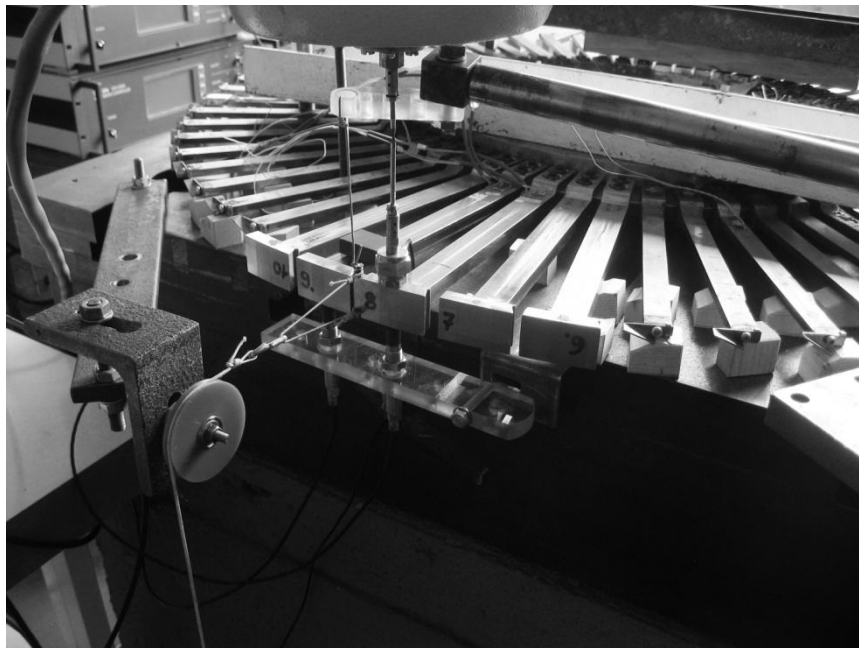


Obr. 2.5: Vlastní tvary kmitů lopatky s nástavcem

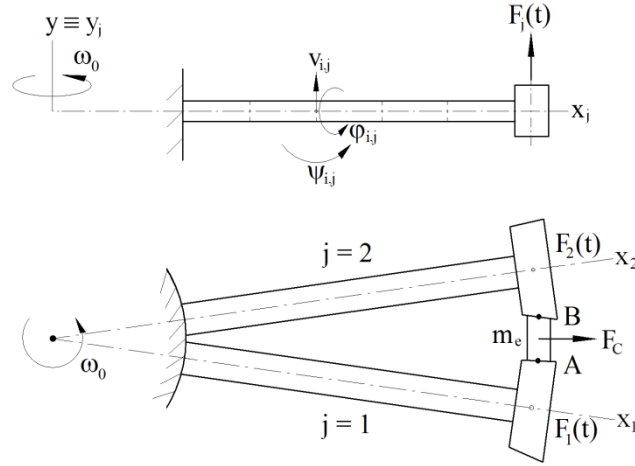
Kapitola 3

Modelování kmitání dvojice lopatek s třecím členem za rotace

Uvažujme nyní dvojici rotujících lopatek vetknutých do tuhého disku a popsanych v kapitole 2. Tyto lopatky reprezentují dvojici sousedních lopatek olopatkovaného disku (obrázek 3.1). Jejich podélné osy spolu svírají úhel $\alpha = 360/M$ [°], kde M je počet lopatek disku. Mezi nástavce lopatek je vložen třecí člen ve tvaru klínu, jehož kontaktní plocha s nástavcem první lopatky je radiální, zatímco kontaktní plocha s nástavcem druhé lopatky je od radiálního směru skloněna o úhel β (viz obrázek 3.4). Třecí člen uvažujeme jako tuhé těleso o hmotnosti m_e , které může konat v klínové drážce mezi nástavci lopatek pouze posuv v_e ve směru osy y . Elasticou vazbu mezi třecím členem a nástavci lopatek představují vertikálně (ve směru osy y) orientované měkké pružiny o tuhosti k_e procházející středem hmotnosti třecího členu, které zabraňují vypadnutí třecího členu z klínové drážky.



Obr. 3.1: Olopatkovaný disk v ÚT AV ČR



Obr. 3.2: Dvojice lopatek se třecím členem

3.1 Matematický model dvojice rotujících lopatek

Matematický model systému dvojice rotujících lopatek s třecím členem můžeme s ohledem na matematický model jedné rotující lopatky s nástavcem (2.34) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{v}_e \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \omega_0 \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 + \omega_0 \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{v}_e \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \\
 & + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{s,1} + \omega_0^2 (\mathbf{K}_{\omega,1} - \mathbf{K}_{d,1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{s,2} + \omega_0^2 (\mathbf{K}_{\omega,2} - \mathbf{K}_{d,2}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_s + \omega_0^2 (\mathbf{K}_\omega - \mathbf{K}_d)} + \mathbf{K}_C \right) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ v_e \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = (3.1) \\
 & = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ 0 \\ \mathbf{f}_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{f}_A(c_A) \\ \mathbf{F}_{tA}(c_A) + \mathbf{F}_{tB}(c_B) \\ -\mathbf{f}_B(c_B) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^*},
 \end{aligned}$$

kde dolní indexy 1 a 2 odpovídají pořadí lopatek. Zanedbáme-li vliv torzního natáčení lopatek, matice tuhosti \mathbf{K}_C vnitřních elastických vazeb mezi nástavci lopatek a třecím členem je ve své komprimované formě vyjádřena jako

$$\widetilde{\mathbf{K}}_C = k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

a za předpokladu diskretizace každé z lopatek na 5 lopatkových prvků jsou prvky této komprimované matice tuhosti $\widetilde{\mathbf{K}}_C$ vnitřních elastických vazeb v matici \mathbf{K}_C lokalizovány na pozicích výchylek $v_{5,1}$, v_e a $v_{5,2}$ ve vektoru zobecněných souřadnic dvojice lopatek se třecím členem $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, v_e, \mathbf{q}_2^T]^T$. Na pravé straně pohybových rovnic (3.1) se vyskytuje vektor buzení lopatek $\mathbf{f}(t)$ a vektor třecích účinků \mathbf{f}^* mezi nástavci lopatek a třecím členem.

Třecí síly v kontaktních plochách, které soustředíme do centrálních kontaktních bodů A , B (obrázek 3.2), jsou aproximovány spojitou funkcí příslušné skluzové rychlosti

$$c_A = \dot{v}_{5,1} + r_A \dot{\phi}_{5,1} - \dot{v}_e, \quad c_B = \dot{v}_{5,2} - r_B \dot{\phi}_{5,2} - \dot{v}_e, \quad (3.3)$$

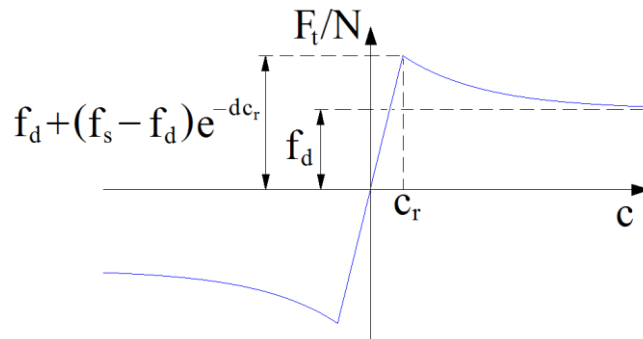
kde r_A a r_B jsou kolmé vzdálenosti mezi kontaktními body a podélnými osami lopatek. Třecí síly respektují sofistikovanou třecí charakteristiku ve tvaru

$$F_{tX} = \begin{cases} N_X [f_d + (f_s - f_d) e^{-d|c_X|}] \text{sign}(c_X), & |c_X| > c_r \\ N_X \frac{c_X}{c_r} [f_d + (f_s - f_d) e^{-d c_r}], & |c_X| \leq c_r \end{cases}, \quad X = A, B, \quad (3.4)$$

znázorněnou na obrázku 3.3. Tato charakteristika zahrnuje kromě fáze makro-posuvů i fázi mikro-posuvů při velmi malých skluzových rychlostech [15]. Fáze jsou vzájemně odděleny kritickou skluzovou rychlostí c_r definující velikost intervalu skluzových rychlostí během mikro-posuvů $-c_r \leq c_X \leq c_r$, $X = A, B$, kde je tření aproximováno strmou přímkou. Normálové síly působící v kontaktních plochách jsou dány geometrií třecího členu a vyplývají z rovnováhy sil působících na třecí člen v horizontální rovině (v rovině \widehat{xz} , viz obrázek 3.4)

$$N_A = m_e r_e \omega_0^2 \frac{\cos(\beta + \delta)}{\sin \beta}, \quad N_B = m_e r_e \omega_0^2 \frac{\cos \delta}{\sin \beta}, \quad (3.5)$$

kde $m_e r_e \omega_0^2$ (na obrázku 3.2 označeno jako F_C) je odstředivá síla působící na třecí člen v jeho středu hmotnosti a δ je odchylka radiální osy procházející středem hmotnosti třecího členu od radiální kontaktní plochy mezi třecím členem a nástavcem první lopatky. Parametry třecí charakteristiky (3.4) jsou dynamický součinitel smykového tření f_d , statický součinitel smykového tření f_s , součinitel poklesu třecí charakteristiky d a kritická skluzová rychlost c_r .

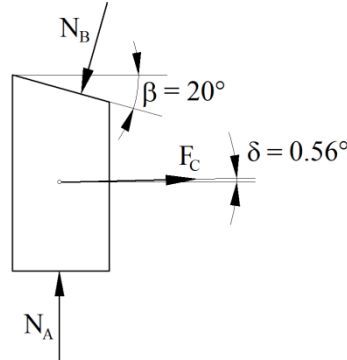


Obr. 3.3: Charakteristika třecích sil v kontaktních plochách

Vektory třecích sil v pohybových rovnicích (3.1) mohou být zapsány ve tvaru

$$\mathbf{f}_A(\mathbf{c}_A) = F_{tA} [0, 0, \dots, 1, 0, r_A]^T, \quad \mathbf{f}_B(\mathbf{c}_B) = F_{tB} [0, 0, \dots, 1, 0, -r_B]^T. \quad (3.6)$$

Vektory buzení $\mathbf{f}_j(t)$, $j = 1, 2$, závisí na konkrétní realizaci buzení lopatek.



Obr. 3.4: Detail třecího členu mezi nástavci lopatek

3.2 Vliv parametru třecí charakteristiky na ohybové kmitání lopatek

Uvažujme buzení dvojice rotujících lopatek jedním nerotujícím elektromagnetem umístěným v blízkosti nástavců lopatek a vytvářejícím harmonickou sílu $F(t) = F_0 \sin 2\pi ft$ ve směru osy rotace. Vektor buzení lopatek modelu (3.1) tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{f}(t) = [0, \dots, 0, \underbrace{F_1(t)}_{\dots 13}, 0, \dots, 0, \underbrace{F_2(t)}_{\dots 29}, 0, 0]^T, \quad (3.7)$$

kde $F_1(t)$, $F_2(t)$ představují pulsy harmonické budicí síly elektromagnetu působící na nástavce první a druhé lopatky při průchodu pod elektromagnetem. V souladu se smyslem otáčení disku a pořadím lopatek na obrázku 3.2 pro ně platí vztahy

$$F_2(t) = F_0 \sin 2\pi ft \sum_{k=0}^K [H(t - kT_0) - H(t - kT_0 - t_1)], \quad (3.8)$$

$$F_1(t) = F_0 \sin 2\pi ft \sum_{k=0}^K [H(t - kT_0 - t_2) - H(t - kT_0 - t_1 - t_2)],$$

kde H představuje Heavisideovu funkci, $T_0 = \frac{60}{n}$ je perioda jedné otáčky disku, n je počet otáček za minutu, $t_1 = \frac{\alpha_L \cdot \pi}{180 \cdot \omega_0}$ je doba trvání pulsu, α_L [°] je úhel, který spolu svírají osy procházející centrálními body kontaktních ploch a které se protínají ve středu otáčení disku, a $t_2 = \frac{\alpha \cdot \pi}{180 \cdot \omega_0}$ je zpoždění pulsu na první lopatku závislé na roztečném úhlu α [°] mezi osami lopatek. Čas $t = 0$ odpovídá okamžiku, kdy průvodič krajního bodu nástavce druhé lopatky je na okraji elektromagnetického pole elektromagnetu pro

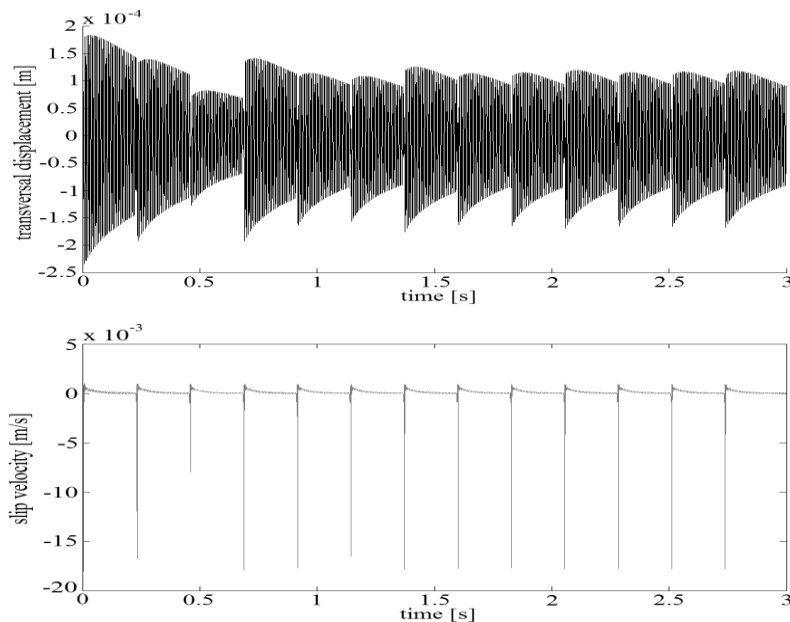
$k = 0$. Amplituda budící síly byla zvolena $F_0 = 15 \text{ N}$ a frekvence $f = 131,65 \text{ Hz}$ odpovídá nejnižší ohybové vlastní frekvenci lopatky s nástavcem při otáčkách $n = 0 \text{ ot/min}$. Otáčky disku $n = 263,3 \text{ ot/min}$ zajišťují opačný smysl buzení sousedních lopatek. Zpoždění pulsu mezi lopatkami při $\alpha = 6^\circ$ je pak $t_2 \doteq 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, což odpovídá polovině doby periody buzení elektromagnetem $T_b = \frac{1}{f} \doteq 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Ke zjištění časových závislostí zobecněných výchylek je použit software MATLAB. Nejprve je matematický model (3.1) přepsán na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{K}_s + \omega_0^2(\mathbf{K}_\omega - \mathbf{K}_d) + \mathbf{K}_c] & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B} + \omega_0\mathbf{G}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} + \quad (3.9) \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{f}(t) + \mathbf{f}^*] \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice, a následně je tato soustava řešena numerickým řešičem *ODE23* založeným na explicitní Rungeově-Kuttaově metodě [13] využívajícím formuli Bogacki-Shampine.

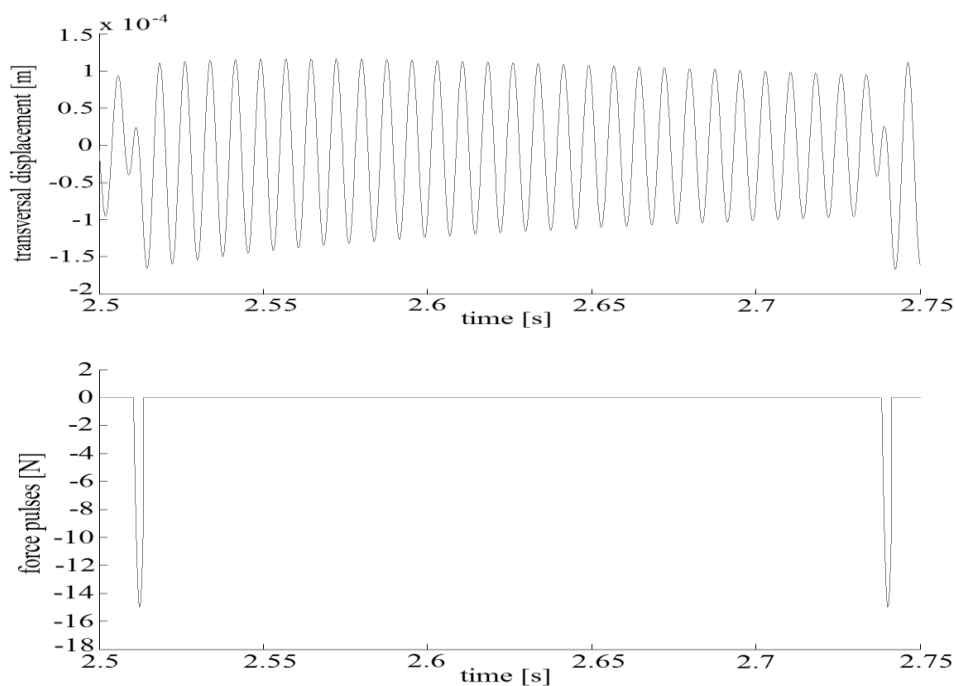
S ohledem na charakteristiku třecích sil v kontaktních plochách popsanou vztahy (3.4) byl zkoumán vliv koeficientu poklesu třecí charakteristiky na ohybové kmitání lopatek. Na obrázcích 3.5 – 3.8 jsou zobrazeny časové průběhy příčné výchylky nástavce druhé lopatky a skluzové rychlosti nástavce druhé lopatky vůči třecímu členu pro koeficienty poklesu třecí charakteristiky $d = 2$ a $d = 50$.



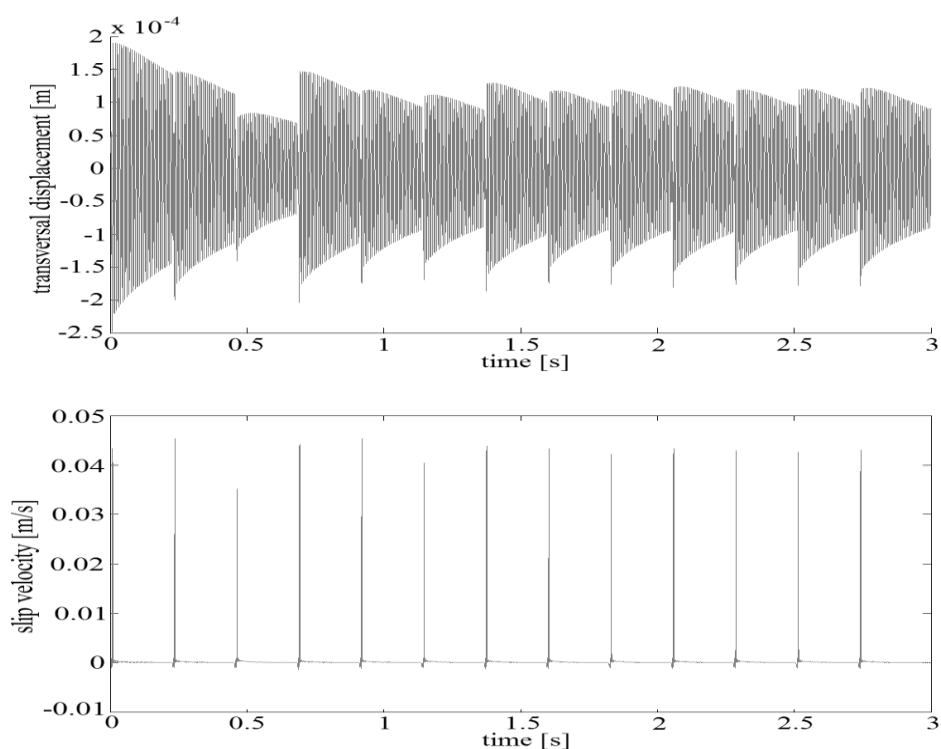
Obr. 3.5: Časové průběhy příčné výchylky nástavce druhé lopatky a skluzové rychlosti téhož nástavce vůči třecímu členu, parametry třecí charakteristiky:

$$f_d = 0,3; f_s = 0,6; d = 2 \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}; c_r = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. Modelování kmitání dvojice lopatek s třecím členem za rotace

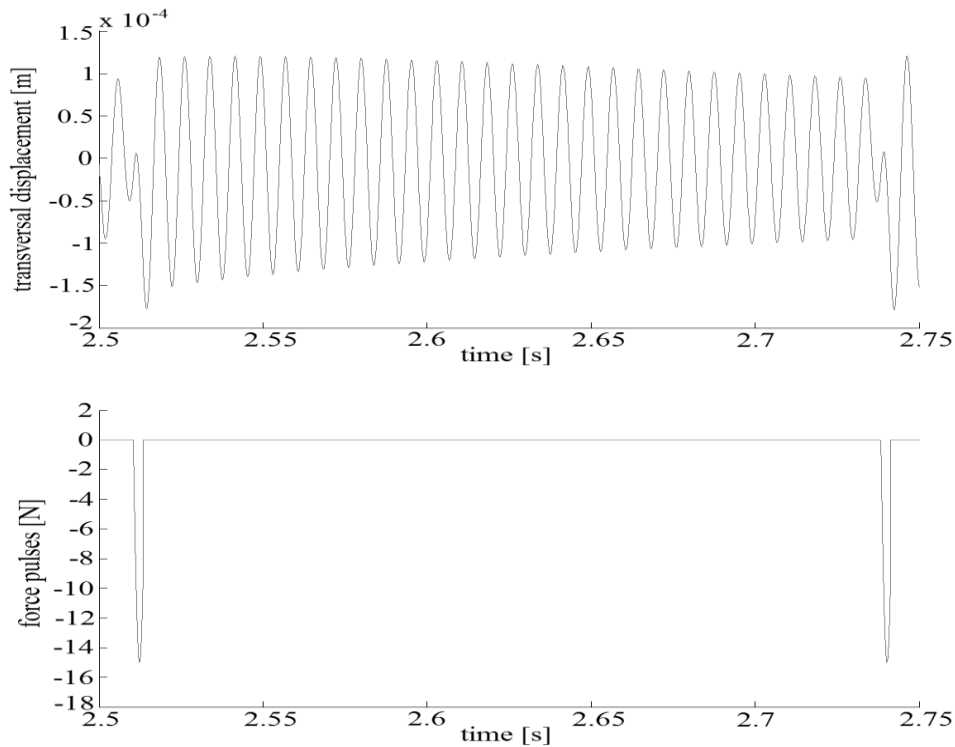


Obr. 3.6: Detail časového průběhu příčné výchylky z obrázku 3.5 a průběhu pulsního buzení lopatky



Obr. 3.7: Časové průběhy příčné výchylky nástavce druhé lopatky a skluzové rychlosti téhož nástavce vůči třecímu členu, parametry třecí charakteristiky:

$$f_d = 0,3; f_s = 0,6; d = 50 \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}; c_r = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Obr. 3.8: Detail časového průběhu příčné výchylky z obrázku 3.7 a průběhu pulsního buzení lopatky

Z grafů na obrázcích 3.5 – 3.8 vyplývá malý vliv parametru d na kmitání lopatek. Příčinou jsou převážně velmi malé skluzové rychlosti ve fázi mikro-posuvů ($c_r < 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), kdy dvojice lopatek je mimo dosah buzení elektromagnetem. Velké skluzové rychlosti se projevují jen při opětovném průchodu dvojice lopatek pod elektromagnetem, které se opakuje s periodou $T_o = \frac{60}{n} = 0,2278 \text{ s}$. Ve fázích makro-posuvů se vliv parametru d projevuje podstatně větším prokluzem u charakteristiky s rychlým poklesem součinitele smykového tření z hodnoty f_s na f_d (tj. pro $d = 50$).

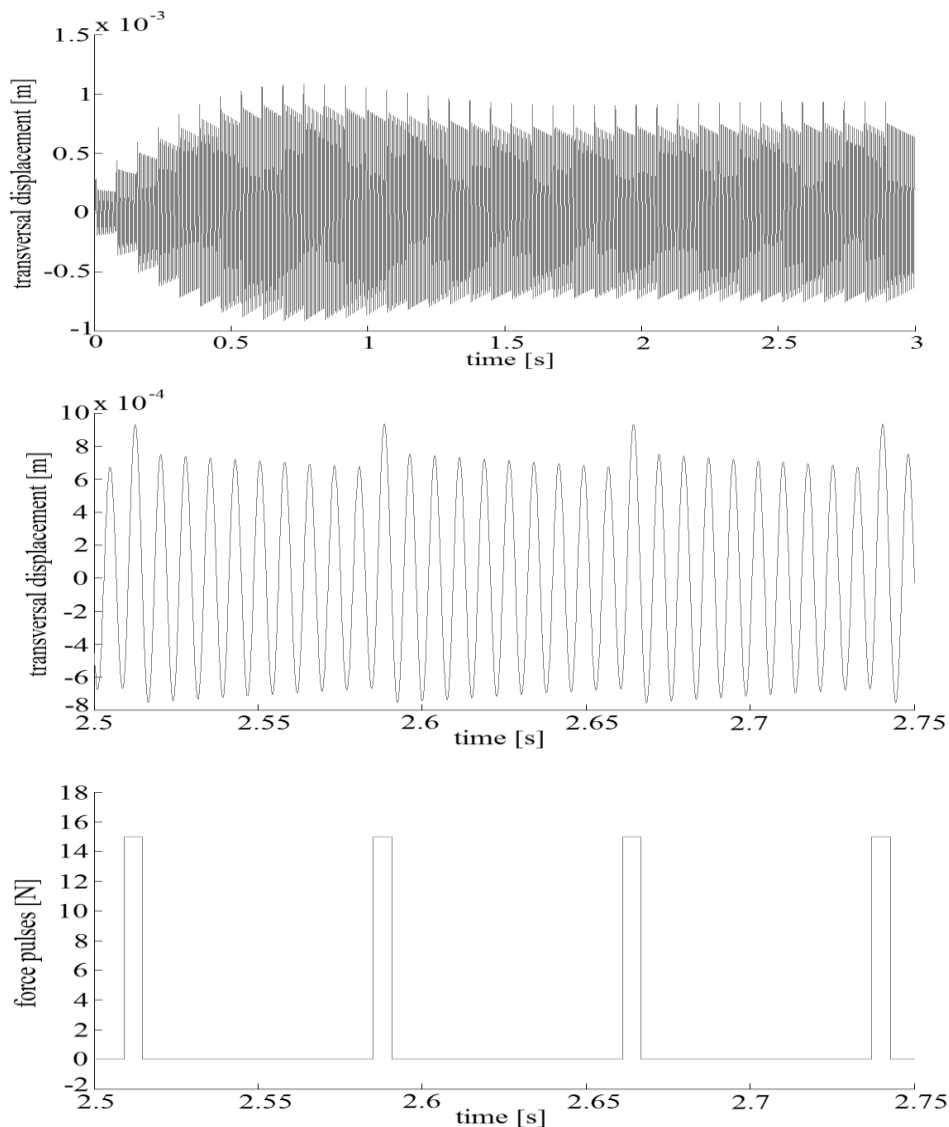
3.3 Vliv třecího členu na ohybové kmitání lopatek

Jako druhý příklad analýzy vlivů tření v kontaktních plochách mezi nástavci lopatek a třecím členem je uvažováno synchronizované rezonanční buzení realizované pomocí dvojice nerotujících elektromagnetů radiálně umístěných (naproti sobě) v blízkosti rotujících nástavců lopatek. Průběhy budících sil působících na lopatky jsou aproximovány obdélníkovými pulsy (viz obrázky 3.9 - 3.10) [10] a můžeme je vyjádřit ve tvaru

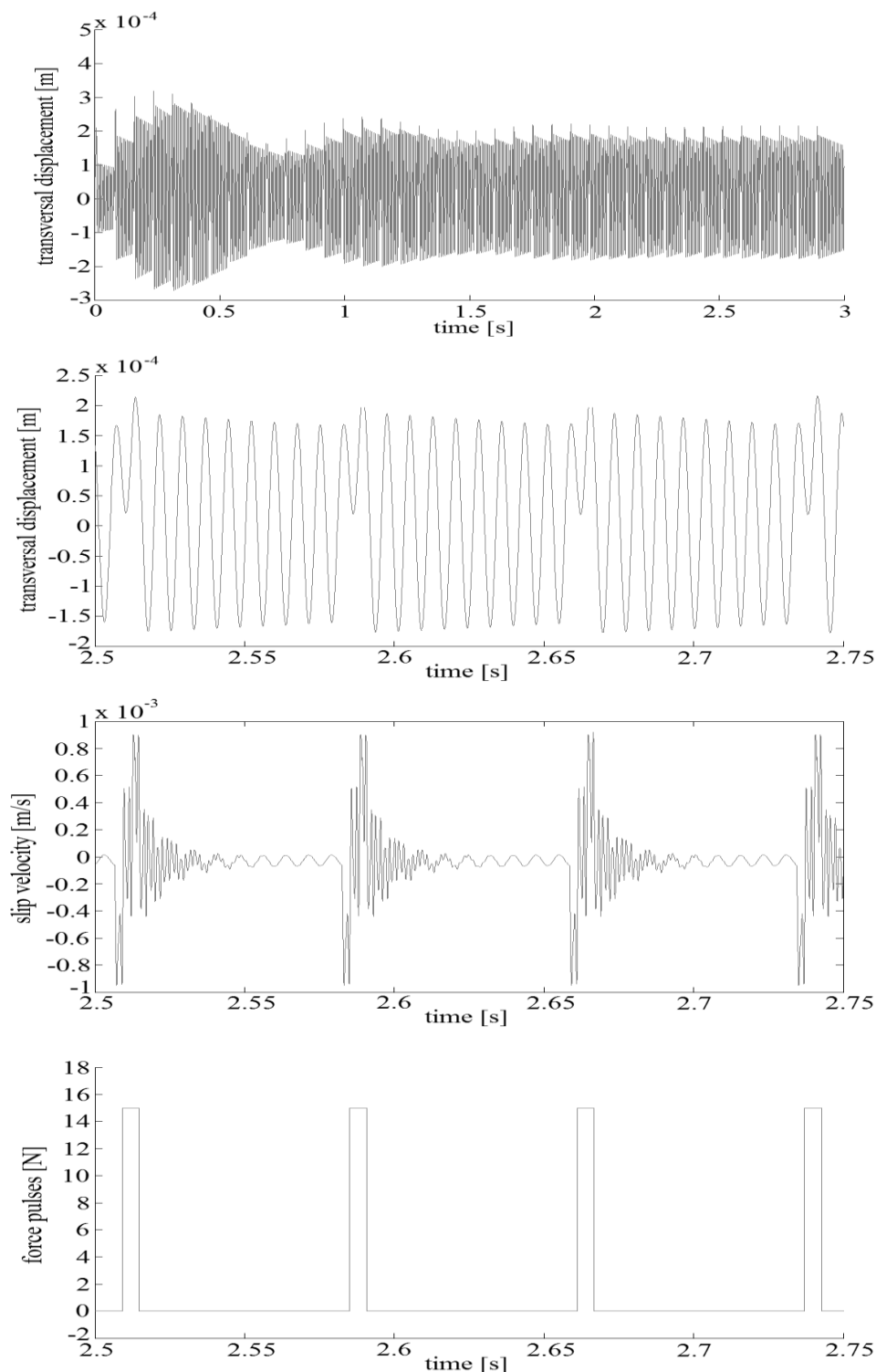
$$F_2(t) = F_0 \sum_{k=0}^K \{H(t - kT_b) - H[t - (kT_b + \tau)]\}, \quad (3.10)$$

$$F_1(t) = F_0 \sum_{k=0}^K \{H[t - (kT_b + \Delta t)] - H[t - (kT_b + \Delta t + \tau)]\},$$

kde $F_0 = 15N$ je amplituda obdélníkových pulsů, $T_b = \frac{m}{f_1}$ je perioda rezonančního pulsního buzení, $m = 10$ je poměr periody buzení vůči periodě nejnižšího ohybového vlastního tvaru kmitu lopatky s nástavcem, $\tau = 0,00566 s$ je šířka pulsu a $\Delta t = 0,00253 s$ je časové zpoždění pulsu na první lopatku odpovídající roztečnému úhlu $\alpha = 6^\circ$ a otáčkám $n = 394,95 \text{ ot/min}$. Na obrázcích 3.9 – 3.10 jsou zobrazeny časové průběhy ohybového kmitání druhé lopatky. Časové průběhy ohybového kmitání dvojice lopatek bez třecího členu ($f_s = f_d = 0$, obrázek 3.9) jsou porovnány s časovými průběhy ohybového kmitání dvojice lopatek s třecím členem a parametry třecí charakteristiky $f_d = 0,3$; $f_s = 0,6$; $d = 2 s.m^{-1}$; $c_r = 10^{-3} m.s^{-1}$ (obrázek 3.10).



Obr. 3.9: Časové průběhy příčné výchylky nástavce druhé lopatky modelu bez třecího členu, detail průběhu této příčné výchylky a detail synchronizovaného rezonančního buzení



Obr. 3.10: Časové průběhy příčné výchylky nástavce druhé lopatky modelu s třecím členem, detail průběhu této příčné výchylky, detail průběhu skluzové rychlosti tohoto nástavce vzhledem k třecímu členu a detail synchronizovaného rezonančního buzení

Z obrázků 3.9 a 3.10 je zřejmý velmi pozitivní vliv třecího členu na potlačení kmitání dvojice lopatek (pokles amplitud na cca 20 % oproti dvojici lopatek bez třecího členu). Během periody buzení mezi obdélníkovými pulsy se vazba mezi nástavcem lopatky a třecím členem téměř uzamkne.

3.4 Aplikace metody ekvivalentní linearizace

Z hlediska výpočtového času bývá velmi výhodné při zjišťování ustálených amplitud výchylek v okolí vlastních frekvencí a za předpokladu harmonického buzení linearizovat matematický model (3.1). Třecí účinky v kontaktních plochách mezi nástavci lopatek a třecím členem jsou v takovém případě nahrazeny fiktivními viskózními tlumiči. Koeficient ekvivalentního tlumení b_e viskózních tlumičů odvodíme pro případ *Coulombova tření*, které odpovídá třecí charakteristice (3.4) při volbě $f_d = f_s, c_r \rightarrow 0$.

Metoda ekvivalentní linearizace [1] je přibližná analytická metoda, jež převádí původně nelineární pohybovou rovnici na lineární. Je založena na předpokladu, že hledané periodické řešení nebude příliš odlišné od řešení harmonického. Uvažujme harmonicky buzenou mechanickou soustavu s obecně nelineárními tuhostními a tlumivými charakteristikami popsanou pohybovou rovnicí [19]

$$m\ddot{q} + g(q, \dot{q}) = F_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.11)$$

přičemž F_0 je amplituda budící síly, ω je frekvence budící síly a φ je fázové zpoždění ustálených kmitů za budící silou. Řešení budeme předpokládat ve tvaru

$$q = a_0 + a \cdot \cos(\omega t). \quad (3.12)$$

Nyní nalezneme formálně lineární model s parametry závislými na amplitudě kmitání a . Pokud nahradíme nelineární funkci $g(q, \dot{q})$ lineární funkcí

$$g(q, \dot{q}) = b_e(a)\dot{q} + k_e(a)(q - a_0(a)), \quad (3.13)$$

lineární model bude mít tvar

$$m\ddot{q} + b_e(a)\dot{q} + k_e(a)(q - a_0(a)) = F_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.14)$$

kde $b_e(a)$ je koeficient ekvivalentního tlumení, $k_e(a)$ je koeficient ekvivalentní tuhosti a $a_0(a)$ je posunutí centra kmitání. Dosazením (3.12) do funkce $g(q, \dot{q})$ zjistíme, že $g(q, \dot{q}) = g(a_0 + a \cdot \cos(\omega t), -a\omega \cdot \sin(\omega t))$ je periodická s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$ a lze ji rozvinout ve Fourierovu řadu. Budeme uvažovat pouze první tři členy (řešení v prvním přiblížení)

$$g(q, \dot{q}) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t) + \beta_1 \sin(\omega t). \quad (3.15)$$

Po zavedení substituce $\tau = \omega t$ platí pro Fourierovy koeficienty

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a_0 + a \cos \tau, -a\omega \sin \tau) d\tau, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(a_0 + a \cos \tau, -a\omega \sin \tau) \cos \tau d\tau, \\ \beta_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(a_0 + a \cos \tau, -a\omega \sin \tau) \sin \tau d\tau.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Po srovnání pravých stran (3.15) a (3.13), kam je za $q(t)$ dosazeno (3.12), získáme rovnici

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos \tau + \beta_1 \sin \tau = -b_e(a)\omega a \sin \tau + k_e(a)a \cos \tau. \quad (3.17)$$

Tato rovnice musí platit pro všechna τ , proto můžeme určit koeficienty

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} g(a_0 + a \cos \tau, -a\omega \sin \tau) d\tau = 0, \\ k_e(a)a &= \alpha_1 \Leftrightarrow k_e(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} g(a_0 + a \cos \tau, -a\omega \sin \tau) \cos \tau d\tau, \\ b_e(a)\omega a &= -\beta_1 \Leftrightarrow b_e(a) = -\frac{1}{\pi \omega a} \int_0^{2\pi} g(a_0 + a \cos \tau, -a\omega \sin \tau) \sin \tau d\tau.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Pro soustavu se suchým třením, pro kterou platí nelineární tlumicí charakteristika odpovídající *Coulombovu zákonu* $b(\dot{q}) = fN \text{sign}(\dot{q})$, a za předpokladu lineární tuhostní charakteristiky $k(q) = k_e(a) = k$ nabývá funkce $g(q, \dot{q})$ tvar

$$g(q, \dot{q}) = kq + fN \text{sign}(\dot{q}). \quad (3.19)$$

Jelikož je tlumicí charakteristika lichá funkce, nebude docházet k posunutí centra kmitání $a_0(a)$. Za těchto podmínek je koeficient ekvivalentního tlumení

$$b_e(a) = -\frac{1}{\pi \omega a} \int_0^{2\pi} [ka \cos \tau + fN \text{sign}(-a\omega \sin \tau)] \sin \tau d\tau. \quad (3.20)$$

Vzhledem k tomu, že platí $\int_0^{2\pi} \cos \tau \sin \tau d\tau = 0$ a funkce $\text{sign}(-a\omega \sin \tau)$ nabývá hodnoty 1 pro $\tau \in (\pi, 2\pi)$ a hodnoty -1 pro $\tau \in (0, \pi)$, dostáváme

$$b_e(a) = -\frac{1}{\pi \omega a} \left[\int_0^{\pi} -fN \sin \tau d\tau + \int_{\pi}^{2\pi} fN \sin \tau d\tau \right] = \frac{4fN}{\pi \omega a}. \quad (3.21)$$

Matematický model linearizovaného systému dvojice rotujících lopatek se třecím členem má potom tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{B} + \mathbf{B}_e(\mathbf{q}, \omega) + \omega_0 \mathbf{G}]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}_s + \omega_0^2(\mathbf{K}_\omega - \mathbf{K}_d) + \mathbf{K}_c]\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (3.22)$$

kde vektor třecích účinků \mathbf{f}^* na pravé straně pohybových rovnic (3.1) je nahrazen tlumícími silami fiktivních viskózních tlumičů axiálně umístěných (ve směru osy y) v centrálních kontaktních bodech mezi nástavci lopatek a třecím členem. Tlumící síly těchto tlumičů mohou být zapsány ve tvaru

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega) = - \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b_A c_A \\ 0 \\ r_A b_A c_A \\ -b_A c_A - b_B c_B \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b_B c_B \\ 0 \\ -r_B b_B c_B \end{bmatrix} \dots 13 \dots 29 = -\mathbf{B}_e(\mathbf{q}, \omega) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.23)$$

kde $\mathbf{B}_e(\mathbf{q}, \omega)$ je čtvercová matice ekvivalentního tlumení, kterou můžeme ve své komprimované formě zapsat jako

$$\widetilde{\mathbf{B}}_e(\mathbf{q}, \omega) = \begin{bmatrix} b_A & r_A b_A & -b_A & 0 & 0 \\ r_A b_A & r_A^2 b_A & -r_A b_A & 0 & 0 \\ -b_A & -r_A b_A & b_A + b_B & -b_B & r_B b_B \\ 0 & 0 & -b_B & b_B & -r_B b_B \\ 0 & 0 & r_B b_B & -r_B b_B & r_B^2 b_B \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

a jejíž prvky jsou v matici $\mathbf{B}_e(\mathbf{q}, \omega)$ lokalizovány na pozicích $\dot{v}_{5,1}$, $\dot{\phi}_{5,1}$, \dot{v}_e , $\dot{v}_{5,2}$ a $\dot{\phi}_{5,2}$ v derivovaném globálním vektoru zobecněných souřadnic dvojice lopatek se třecím členem $\dot{\mathbf{q}}$. Koeficienty ekvivalentního tlumení b_A , b_B fiktivních viskózních tlumičů v centrálních kontaktních bodech A , B jsou v souladu se vztahem (3.21) uvažovány ve tvaru

$$b_X(a_X) = \frac{4fN_X}{\pi\omega a_X}, \quad X = A, B, \quad (3.25)$$

kde a_X je amplituda skluzové výchylky nástavce příslušné lopatky vůči třecímu členu.

K výpočtu ustálených amplitud výchylek linearizovaného modelu nejprve přepíšeme pohybovou rovnici do komplexního tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_e + \omega_0 \mathbf{G})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + [\mathbf{K}_s + \omega_0^2(\mathbf{K}_\omega - \mathbf{K}_d) + \mathbf{K}_c]\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}e^{i\omega t}, \quad (3.26)$$

kde $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ je komplexní vektor zobecněných souřadnic a \mathbf{f} je vektor amplitud buzení. Dosazením partikulárního řešení ve tvaru $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}e^{i\omega t}$ do rovnice (3.26) můžeme vyjádřit vektor komplexních amplitud výchylek $\tilde{\mathbf{q}}$:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \{-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega(\mathbf{B} + \mathbf{B}_e + \omega_0 \mathbf{G}) + [\mathbf{K}_s + \omega_0^2(\mathbf{K}_\omega - \mathbf{K}_d) + \mathbf{K}_c]\}^{-1} \mathbf{f} \quad (3.27)$$

Nyní může začít iterační proces. V prvním kroku zvolíme $\mathbf{B}_e = \mathbf{0}$ a vypočítáme amplitudy skluzových výchylek

$$a_A = |\tilde{v}_{5,1} + r_A \tilde{\varphi}_{5,1} - \tilde{v}_e|, \quad a_B = |\tilde{v}_{5,2} - r_B \tilde{\varphi}_{5,2} - \tilde{v}_e|, \quad (3.28)$$

kde souřadnice označené tildou odpovídají složkám vektoru $\tilde{\mathbf{q}}$. V dalším kroku použijeme vypočítané amplitudy skluzových výchylek ke zpřesnění matice $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_e(a_A, a_B, \omega)$ a opakujeme celý iterační proces. Vektor amplitud ustálených výchylek nakonec vyjádříme ve tvaru

$$\mathbf{q} = |\tilde{\mathbf{q}}|. \quad (3.29)$$

Kapitola 4

Optimalizace vybraných parametrů třecího členu

4.1 Stručný úvod do problematiky parametrické optimalizace

Optimalizace návrhových (optimalizačních) parametrů mechanických soustav je jedním z vůbec nejdůležitějších účelů matematického modelování. Během tohoto procesu se snažíme pomocí zvolené optimalizační metody (algoritmu) najít takové modifikované (optimalizované) parametry soustavy, aby tato soustava měla z určitého preferovaného pohledu co nejlepší možné (optimální) mechanické vlastnosti [18]. Návrhové parametry, které mohou být geometrické, materiálové a u diskretních soustav také hmotnostní, tlumicí a tuhostní, uspořádáváme do vektoru optimalizačních parametrů

$$\mathbf{p} = [p_i], \quad i = 1, 2, \dots, S. \quad (4.1)$$

Dále je třeba definovat tzv. přípustnou oblast \mathcal{P} , která určuje rozsah hodnot, jakých mohou námi vybrané návrhové parametry během optimalizačního procesu dosahovat. Přípustná oblast má tvar S -rozměrného kvádrů a můžeme ji zapsat ve tvaru

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^S, p_i^d \leq p_i \leq p_i^h, i = 1, 2, \dots, S\}, \quad (4.2)$$

kde p_i^d a p_i^h jsou tzv. dolní a horní závory optimalizačních parametrů. Omezující podmínky kladené na optimalizační parametry mohou být samozřejmě i výrazně komplikovanější, ale těmi se v této práci nebudeme zabývat.

Na základě analýzy vlastností mechanické soustavy pak formulujeme cílovou funkci $\psi(\mathbf{p})$ takovým způsobem, abychom její minimalizaci na přípustné oblasti \mathcal{P} našli hledané optimalizované parametry jako argument této funkce. Matematicky můžeme proces optimalizace zapsat ve tvaru

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \psi(\mathbf{p}), \quad (4.3)$$

kde \mathbf{p}^* je vektor optimalizovaných parametrů. Pokles hodnoty cílové funkce $\psi(\mathbf{p})$ představuje jakousi míru kvality optimalizace. V případech, kdy je cílem parametrické optimalizace potlačení provozních vibrací daného zařízení, bývá nejjednodušší volbou cílové funkce suma amplitud ustálených výchylek.

Díky rychlému rozvoji počítačů a nárůstu jejich výpočetního výkonu je možné optimalizovat parametry složitějších (a tedy i přesnějších) výpočtových modelů a formulovat sofistikovanější cílové funkce. Zároveň i samotné optimalizační metody zažívají dynamický vývoj.

4.2 Optimalizace třecího členu z hlediska potlačení kmitání dvojice lopatek

Uvažujme soustavu dvojice rotujících lopatek se třecím členem, které odpovídá matematický model (3.1). Geometrické a materiálové parametry lopatek jsou v souladu s parametry experimentálního zařízení v ÚT AV ČR. Vlastní čísla lopatek jsou shrnuta v tabulce 2.1. Předpokládáme harmonické dýzové buzení lopatek s frekvencí ω ve směru osy rotace y definovanou vztahem

$$\omega = p_d \omega_0, \quad (4.4)$$

kde $p_d = 32$ představuje počet dýzových (statorových) lopatek. Pro harmonickou budící sílu působící na nástavec druhé lopatky potom platí s ohledem na směr rotace disku a číslování lopatek (viz obrázek 3.2) vztah

$$F_2(t) = F_0 \sin \omega t \quad (4.5)$$

a pro sílu působící na nástavec první lopatky vztah

$$F_1(t) = F_0 \sin \omega(t - \Delta t), \quad (4.6)$$

kde časové zpoždění za druhou lopatkou je

$$\Delta t = \frac{2\pi}{p_o \omega_0} \quad (4.7)$$

a $p_o = 60$ reprezentuje počet oběžných (rotorových) lopatek celého disku. Amplituda budící síly byla zvolena $F_0 = 15 \text{ N}$. Vektor buzení lopatek v rovnici (3.1) má v takovém případě tvar

$$\mathbf{f}(t) = [0, 0, \dots, 0, \underbrace{F_1(t)}_{\dots 13}, 0, \dots, 0, \underbrace{F_2(t)}_{\dots 29}, 0, 0]^T \in \mathbb{R}^{31}. \quad (4.8)$$

Cílem optimalizace je potlačení ustáleného ohybového kmitání v okolí nejnižší a druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence. Jako optimalizační parametry byly zvoleny úhel sklonu třecího členu β a součinitel smykového tření v kontaktních plochách f . Vektor optimalizačních parametrů má tedy tvar

$$\mathbf{p} = [\beta, f]. \quad (4.9)$$

Vzhledem k referenčním hodnotám $\beta = 20^\circ$ a $f = 0,3$ byla zvolena přípustná oblast

$$10^\circ \leq \beta \leq 40^\circ, \quad (4.10)$$

$$0,15 \leq f \leq 0,6.$$

K výpočtům ustálených amplitud příčných výchylek lopatek byla z důvodu časové náročnosti výpočtu použita metoda ekvivalentní linearizace (viz kapitola 3.4) s koeficienty ekvivalentního tlumení ve tvaru (3.25), která v okolí rezonančních vlastních frekvencí poskytuje velice dobrou shodu výsledků s metodou numerické simulace. Cílová funkce představuje sumu ustálených amplitud příčných výchylek obou lopatek ve všech uzlech, tedy

$$\psi(\mathbf{p}) = \sum_j \sum_i \{ |\tilde{v}_{i,1}(\mathbf{p}, \omega_j)| + |\tilde{v}_{i,2}(\mathbf{p}, \omega_j)| \}, \quad i = 1, 2, \dots, 5, \quad (4.11)$$

kde index i přísluší pořadí uzlu lopatky, index j pořadí budící frekvence lopatek a indexy 1, 2 pořadí lopatek. Z důvodu použití metody ekvivalentní linearizace jsou amplitudy příčných výchylek v cílové funkci počítány jako velikost komplexních amplitud označených tildou.

Optimalizační výpočty byly provedeny v prostředí MATLABu s využitím procedury *fmincon* [8]. Jelikož tato procedura je schopna nalézt pouze lokální minima cílové funkce, bylo nutné opakovat výpočet pro různé počáteční hodnoty vektoru optimalizačních parametrů $\mathbf{p}_0 = [\beta_0, f_0]$.

4.2.1 Potlačení ohybového kmitání v okolí nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek

Uvažujme cílovou funkci ve tvaru (4.11). Ustálené amplitudy příčných výchylek, které se započítávají do cílové funkce, odpovídají frekvencím harmonických budících sil v okolí nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek, konkrétně

$$\omega_j = 2\pi f_j, \quad f_j = 130; 130,1; 130,2; \dots; 135 \text{ Hz}. \quad (4.12)$$

V tabulkách 4.1 až 4.3 jsou zobrazeny výsledky optimalizace pro některé vybrané počáteční hodnoty vektoru optimalizačních parametrů.

Iterace	Hodnota cílové funkce ψ [m]	β [°]	f [-]
0	2,31145	20	0,3
1	1,9524	19,9847	0,6
2	1,95094	19,9465	0,6
...
8	1,12163	10	0,6

Tab. 4.1: Výsledky optimalizace pro počáteční vektor optimalizačních parametrů $\mathbf{p}_0 = [20; 0,3]$

Iterace	Hodnota cílové funkce ψ [m]	β [°]	f [-]
0	2,47464	30	0,2
1	2,18849	29,9961	0,6
2	2,18829	29,9817	0,6
...
16	1,12163	10	0,6

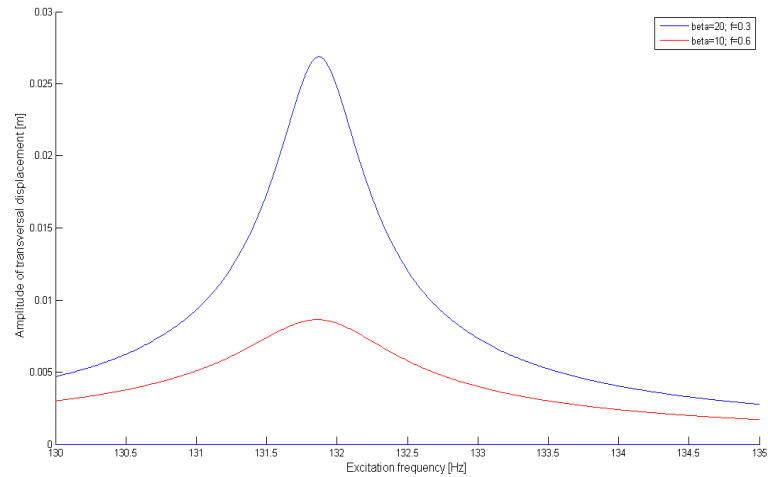
Tab. 4.2: Výsledky optimalizace pro počáteční vektor optimalizačních parametrů $\mathbf{p}_0 = [30; 0,2]$

Iterace	Hodnota cílové funkce ψ [m]	β [°]	f [-]
0	2,26591	30	0,5
1	2,18838	29,9886	0,6
2	2,18817	29,9740	0,6
...
16	1,12163	10	0,6

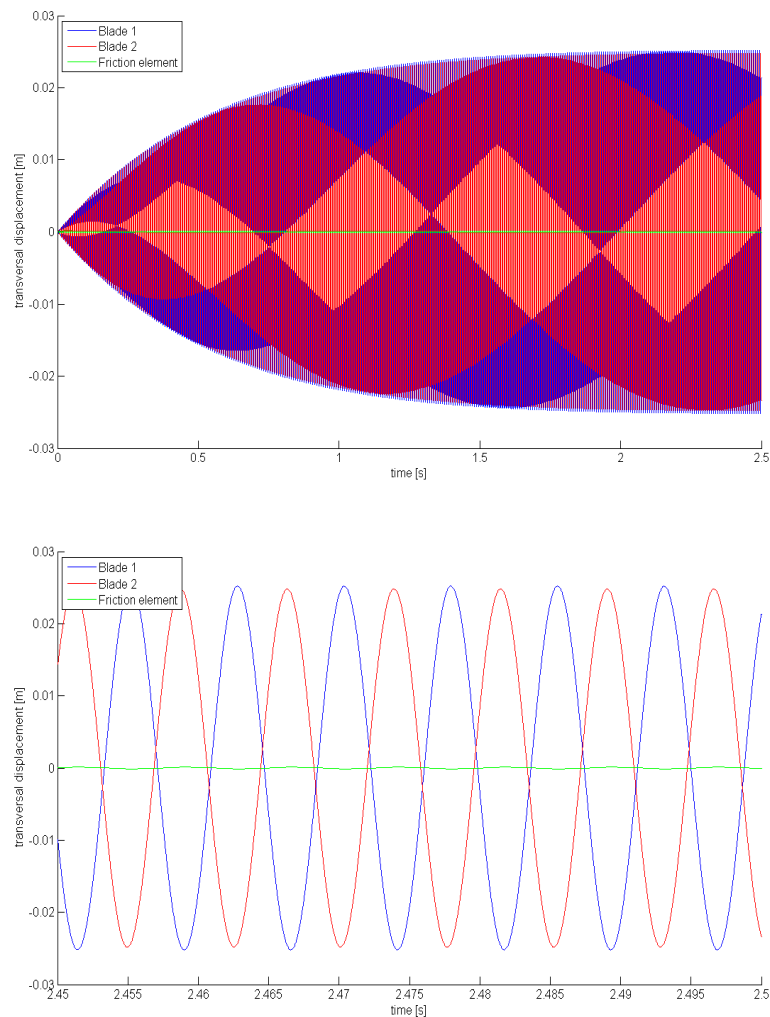
Tab. 4.3: Výsledky optimalizace pro počáteční vektor optimalizačních parametrů $\mathbf{p}_0 = [30; 0,5]$

Na obrázku 4.1 jsou znázorněny amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky koncového uzlu druhé lopatky před optimalizací ($\beta = 20^\circ$, $f = 0,3$) a po optimalizaci ($\beta = 10^\circ$, $f = 0,6$). Časové průběhy příčných výchylek nastavců obou lopatek a třecího členu zjištěné metodou numerické simulace jsou zobrazeny pro případ rezonanční budící frekvence $f = 131,9$ Hz před optimalizací na obrázku 4.2, po optimalizaci na obrázku 4.3.

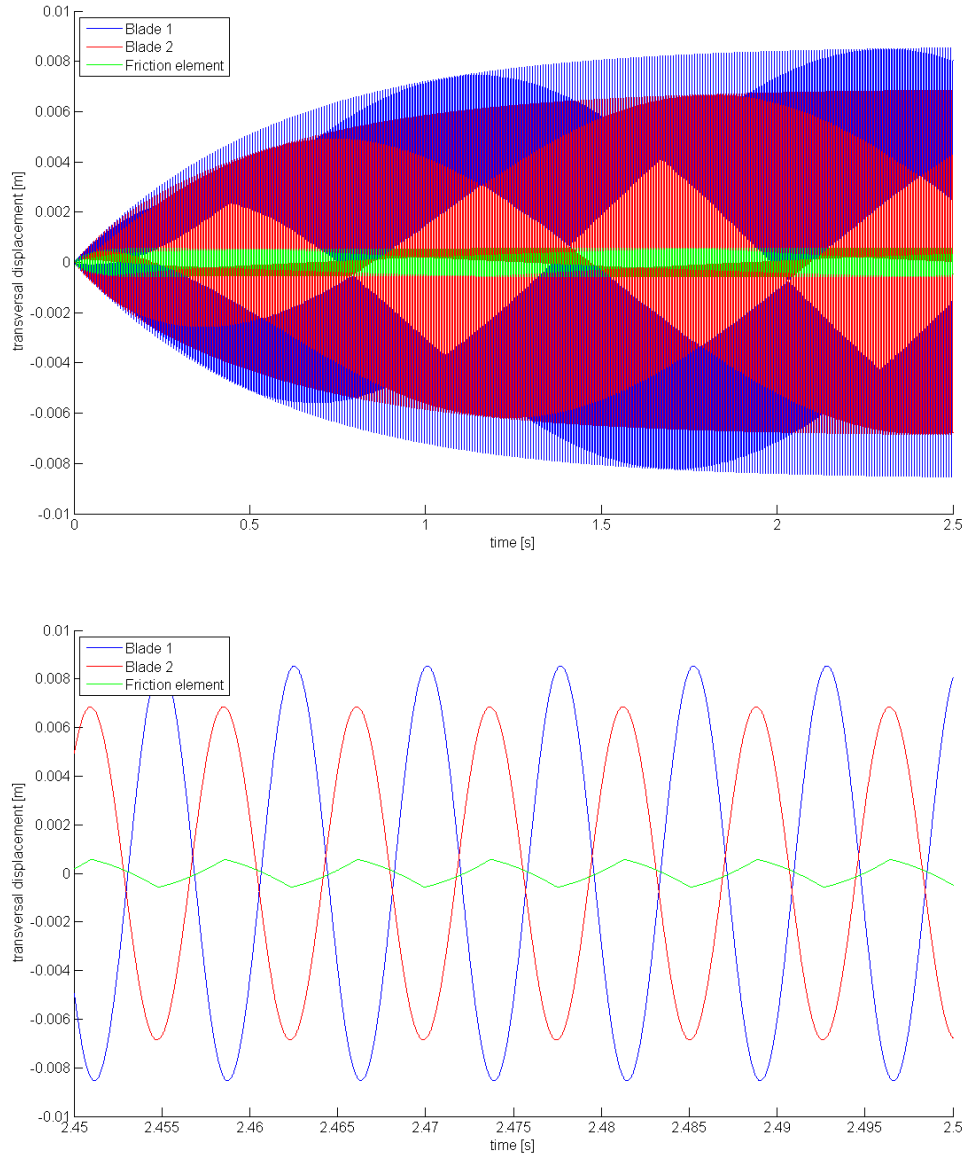
4. Optimalizace vybraných parametrů třecího členu



Obr. 4.1: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky koncového uzlu druhé lopatky



Obr. 4.2: Časové průběhy příčných výchylek nástavců obou lopatek a třecího členu před optimalizací a detail těchto průběhů v ustáleném stavu, $f = 131,9 \text{ Hz}$



Obr. 4.3: Časové průběhy příčných výchylek nástavců obou lopatek a třecího členu po optimalizaci a detail těchto průběhů v ustáleném stavu, $f = 131,9 \text{ Hz}$

4.2.2 Potlačení ohybového kmitání v okolí druhé nejnížší ohybové vlastní frekvence lopatek

V tomto případě budeme do cílové funkce (4.11) započítávat ustálené amplitudy příčných výchylek uzlů lopatek, které odpovídají frekvencím harmonických budících sil v okolí druhé nejnížší ohybové vlastní frekvence lopatek (přibližně 943 Hz) linearizovaného systému dvojice lopatek se třecím členem (3.22), konkrétně

$$\omega_j = 2\pi f_j, \quad f_j = 900; 900,1; 900,2; \dots; 1000 \text{ Hz}. \quad (4.13)$$

4. Optimalizace vybraných parametrů třecího členu

V tabulkách 4.4 až 4.6 jsou zobrazeny výsledky optimalizace pro některé vybrané počáteční hodnoty vektoru optimalizačních parametrů.

Iterace	Hodnota cílové funkce ψ [m]	β [°]	f [-]
0	0,0674179	20	0,3
1	0,0674178	20	0,2998
2	0,0672615	20,0022	0,15
...
174	0,0660915	40	0,15

Tab. 4.4: Výsledky optimalizace pro počáteční vektor optimalizačních parametrů $\mathbf{p}_0 = [20; 0,3]$

Iterace	Hodnota cílové funkce ψ [m]	β [°]	f [-]
0	0,0671954	30	0,2
1	0,0671771	30	0,1958
2	0,0668023	30,0003	0,15
...
117	0,0660915	40	0,15

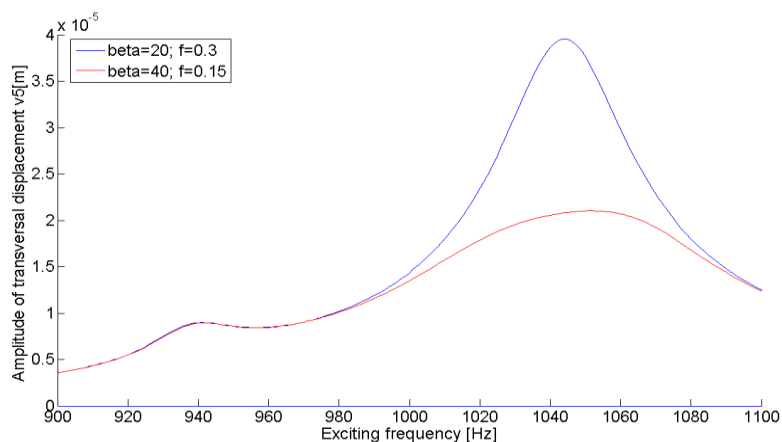
Tab. 4.5: Výsledky optimalizace pro počáteční vektor optimalizačních parametrů $\mathbf{p}_0 = [30; 0,2]$

Iterace	Hodnota cílové funkce ψ [m]	β [°]	f [-]
0	0,0674228	30	0,5
1	0,0674228	30	0,4999
2	0,0674225	30,0001	0,4942
...
166	0,0660915	40	0,15

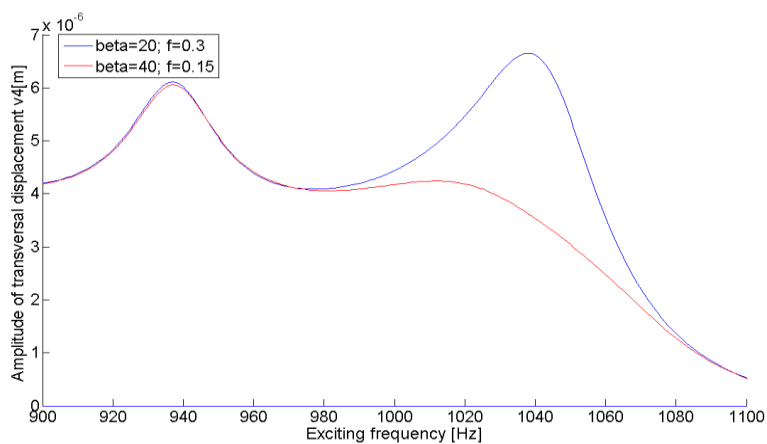
Tab. 4.6: Výsledky optimalizace pro počáteční vektor optimalizačních parametrů $\mathbf{p}_0 = [30; 0,5]$

Na obrázcích 4.4 až 4.6 jsou znázorněny amplitudo-frekvenční charakteristiky příčných výchylek posledních tří uzlů druhé lopatky před optimalizací ($\beta = 20^\circ$, $f = 0,3$) a po optimalizaci ($\beta = 40^\circ$, $f = 0,15$). Na těchto obrázcích je kromě rezonančního vrcholu v okolí druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek (přibližně 943 Hz) linearizovaného systému dvojice lopatek se třecím členem patrný i druhý rezonanční vrchol v okolí 1040 Hz. Tento druhý rezonanční vrchol neodpovídá žádné ohybové vlastní frekvenci lopatek, ale je způsoben druhou nejnižší torzní vlastní frekvencí

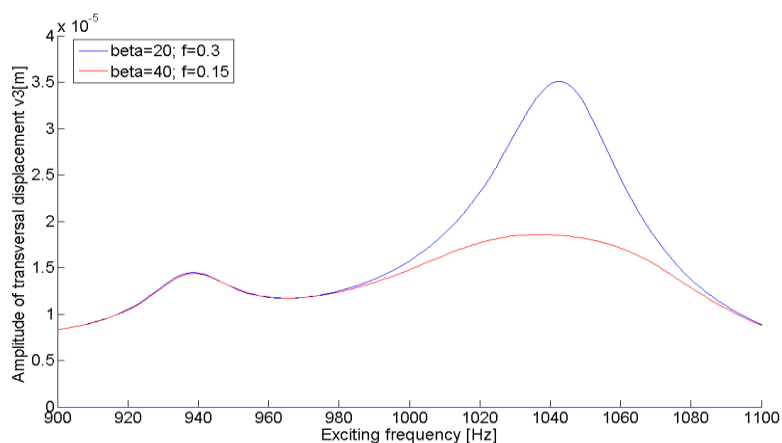
lopatek (viz obrázek 4.7) a provázáním ohybových a torzních kmitů v důsledku matice gyroskopických účinků.



Obr. 4.4: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky pátého (koncového) uzlu druhé lopatky

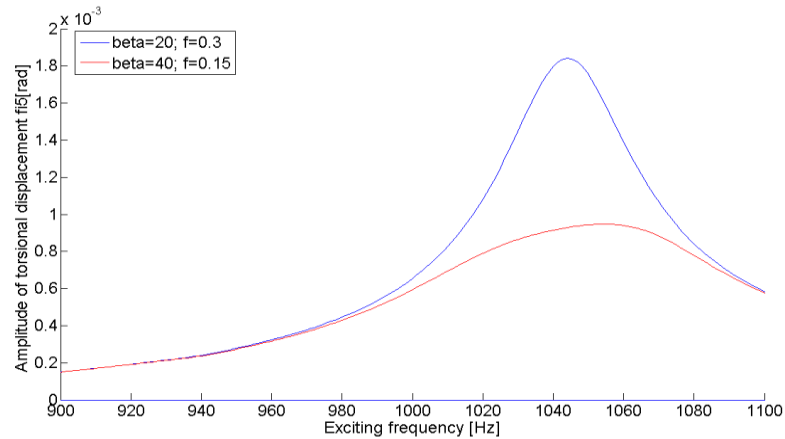


Obr. 4.5: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky čtvrtého uzlu druhé lopatky



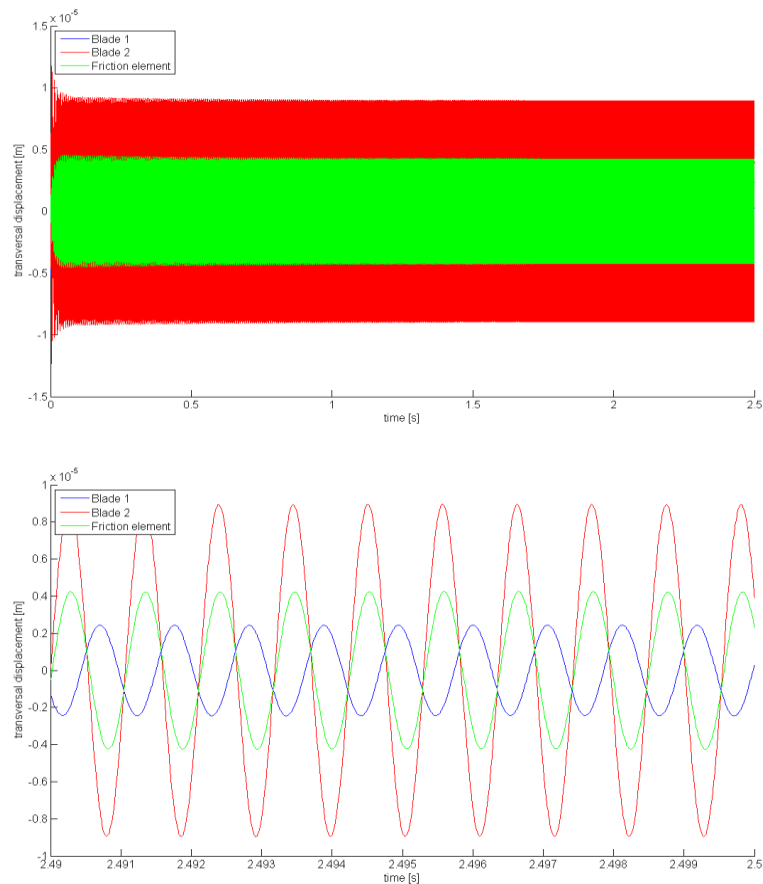
Obr. 4.6: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky třetího uzlu druhé lopatky

4. Optimalizace vybraných parametrů třecího členu

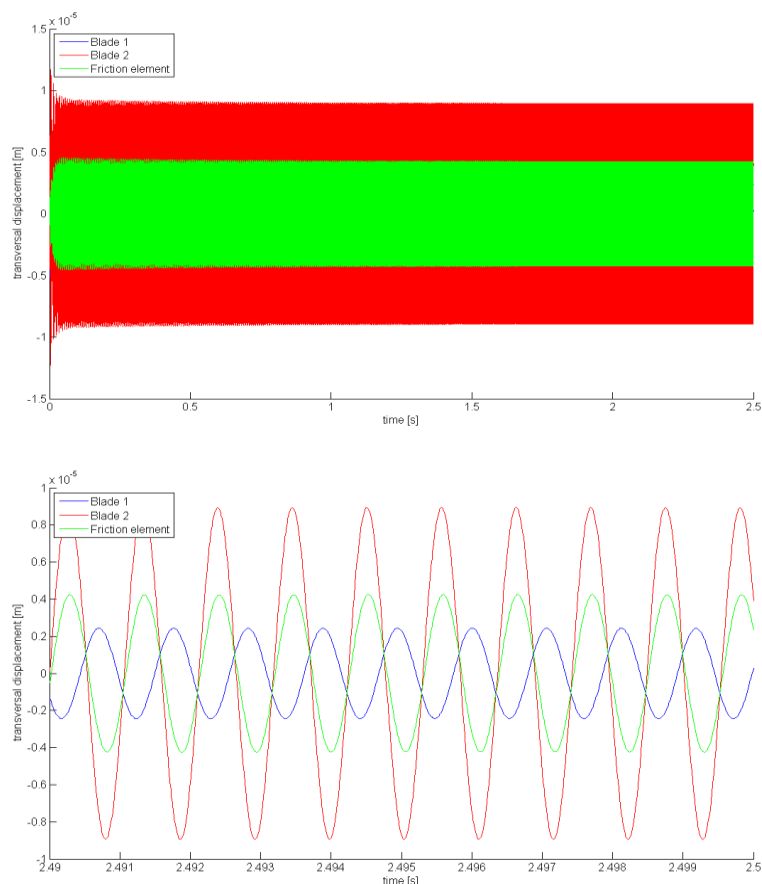


Obr. 4.7: Amplitudo-frekvenční charakteristiky torzního natočení pátého (koncového) uzlu druhé lopatky

Na obrázku 4.8 jsou znázorněny časové průběhy příčných výchylek nástavců obou lopatek a třecího členu zjištěné metodou numerické simulace pro případ rezonanční budící frekvence $f = 943 \text{ Hz}$ pro referenční hodnoty $\beta = 20^\circ$, $f = 0,3$ a na obrázku 4.9 pro optimalizované hodnoty $\beta = 40^\circ$, $f = 0,15$.



Obr. 4.8: Časové průběhy příčných výchylek nástavců obou lopatek a třecího členu před optimalizací a detail těchto průběhů v ustáleném stavu, $f = 943 \text{ Hz}$



Obr. 4.9: Časové průběhy příčných výchylek nástavců obou lopatek a třecího členu po optimalizaci a detail těchto průběhů v ustáleném stavu, $f = 943 \text{ Hz}$

Z amplitudo-frekvenčních charakteristik (na obrázcích 4.4 – 4.6) je patrné, že optimalizace parametrů β a f v daném rozsahu nemá na potlačení ohybového kmitání lopatek v okolí druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek (přibližně 943 Hz) linearizovaného systému dvojice lopatek se třecím členem příliš velký vliv. V okolí rezonančního vrcholu způsobeného druhou nejnižší torzní vlastní frekvencí lopatek (přibližně 1040 Hz) naopak dochází pro případ optimalizovaných parametrů $\beta = 40^\circ$, $f = 0,15$ k výraznému potlačení ohybového i torzního kmitání.

4.3 Optimalizace třecího členu z hlediska potlačení dynamické napjatosti lopatek v ohybu

Cílem optimalizačního procesu je potlačení dynamické napjatosti lopatek v ohybu způsobené harmonickým dýzovým buzením lopatek v axiálním směru popsaným v kapitole 4.2. Dynamická napjatost má vliv na inicializaci únavových trhlin v kritickém místě a omezení životnosti olopatkování disků. Jako optimalizační parametry byly zvoleny úhel sklonu třecího členu β , součinitel smykového tření

v kontaktních plochách f a hmotnost třecího členu m_e uspořádané do vektoru optimalizačních parametrů

$$\mathbf{p} = [\beta, f, m_e]. \quad (4.14)$$

Vzhledem k referenčním hodnotám $\beta = 20^\circ$, $f = 0,3$ a $m_e = 8,6 \text{ g}$ byla zvolena přípustná oblast

$$\begin{aligned} 10^\circ &\leq \beta \leq 40^\circ, \\ 0,15 &\leq f \leq 0,6, \\ 1,72 \text{ g} &\leq m_e \leq 43 \text{ g}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dosažením rovnice pro $v(x, t)$ ze vztahu (2.15) do rovnice pro ε_x ze vztahu (2.9) a za předpokladu platnosti *Hookeova* zákona můžeme vyjádřit dynamické napětí v ohybu v libovolném místě lopatkového prvku ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma^{(e)}(x, \eta, t) = \text{En} & \left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) v(0, t) + \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \psi(0, t) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} \right) v(l, t) + \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \psi(l, t) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cílová funkce respektuje dynamické napětí v ohybu v krajním vlákně v nultém a posledním 5. uzlu každé z lopatek (index j) a má tvar

$$\psi(\mathbf{p}) = \sum_j \sum_i \{ |\widetilde{\sigma}_{0,j}(\mathbf{p}, \omega_i)| + |\widetilde{\sigma}_{5,j}(\mathbf{p}, \omega_i)| \}, \quad j = 1, 2. \quad (4.17)$$

Z důvodu použití metody ekvivalentní linearizace jsou amplitudy dynamického napětí v ohybu v cílové funkci počítány jako absolutní hodnota komplexních amplitud označených tildou.

Porovnávány byly různé provozní režimy. Otáčky byly voleny ve dvou rozsazích takovým způsobem, aby frekvence harmonické budící síly působící na lopatky byla v okolí dvou nejnižších ohybových vlastních frekvencí lopatek. Pro každý otáčkový rozsah byly uvažovány tři různé amplitudy budící síly. Optimalizační výpočty byly opět provedeny v prostředí MATLABu s využitím procedury *fmincon*. Dosažené výsledky před a po optimalizaci jsou zaneseny do tabulky 4.7.

Provozní režim	n_{min} [ot/min]	243,75			1687,5		
	n_{max} [ot/min]	253,13			2062,5		
	F_0 [N]	5	10	15	5	10	15
Před optimalizací	ψ [GPa]	152	427	691	1,4	2,8	4,17
	β [°]	20	20	20	20	20	20
	f [–]	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	m_e [g]	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6
	σ_{max} [MPa]	312	1063	1812	8,2	16,3	23,8
	v_{max} [mm]	4,5	15,6	26,8	0,014	0,027	0,04
Po optimalizaci	ψ [GPa]	5,1	97,3	334	1,4	2,5	3,3
	β [°]	10	10	10	40	40	40
	f [–]	0,6	0,6	0,6	0,15	0,15	0,15
	m_e [g]	43	43	17,4	43	43	43
	σ_{max} [MPa]	9,8	155	609	7,3	10,8	11,8
	v_{max} [mm]	0,13	2,2	8,5	0,012	0,018	0,018

Tab. 4.7: Výsledky optimalizace třecího členu z hlediska potlačení dynamické napjatosti lopatek v ohybu

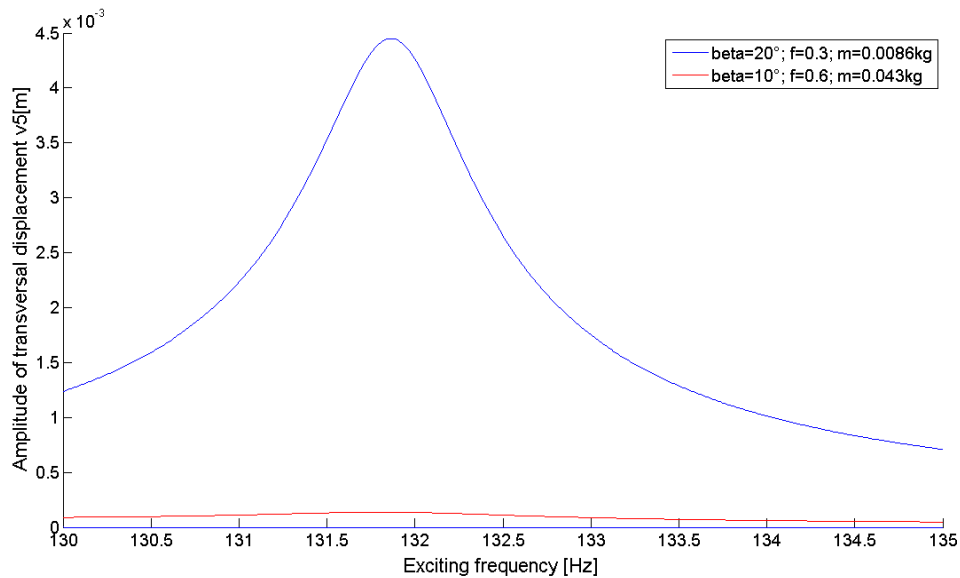
Porovnáním hodnot parametrů β a f optimalizovaných z hlediska potlačení ohybového kmitání nebo dynamické napjatosti z tabulek 4.4 a 4.7 vyplývá, že optimalizační proces minimalizace cílových funkcí (4.11) nebo (4.17) vede k prakticky stejným hodnotám optimalizovaných parametrů v obou rezonančních stavech. Optimalizované parametry se však výrazně liší při potlačení kmitání v okolí 1. a 2. nejvyšší ohybové vlastní frekvence lopatek. Efektivnost optimalizace v okolí 1. nejvyšší ohybové vlastní frekvence je dominantní.

Na obrázku 4.10 jsou znázorněny amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky koncového uzlu druhé lopatky v okolí nejvyšší ohybové vlastní frekvence lopatek před optimalizací ($\beta = 20^\circ$, $f = 0,3$, $m_e = 0,0086 \text{ kg}$) a po optimalizaci ($\beta = 10^\circ$, $f = 0,6$, $m_e = 0,043 \text{ kg}$). Amplituda budící síly je $F_0 = 5 \text{ N}$.

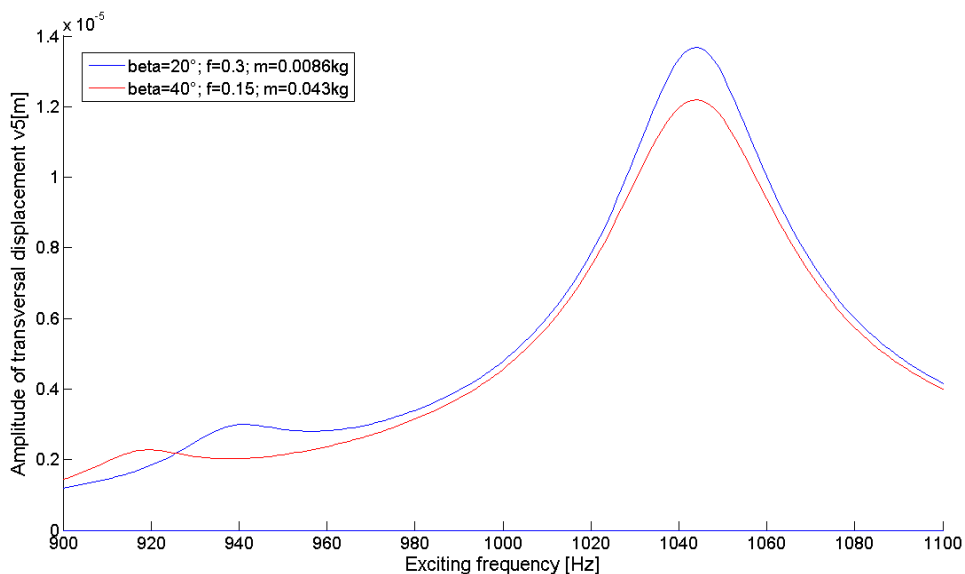
Na obrázcích 4.11 – 4.13 jsou znázorněny amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky koncového (pátého) uzlu, třetího uzlu a prvního uzlu druhé lopatky v okolí druhé nejvyšší ohybové vlastní frekvence lopatek před optimalizací ($\beta = 20^\circ$, $f = 0,3$, $m_e = 0,0086 \text{ kg}$) a po optimalizaci ($\beta = 40^\circ$, $f = 0,15$, $m_e = 0,043 \text{ kg}$).

4. Optimalizace vybraných parametrů třecího členu

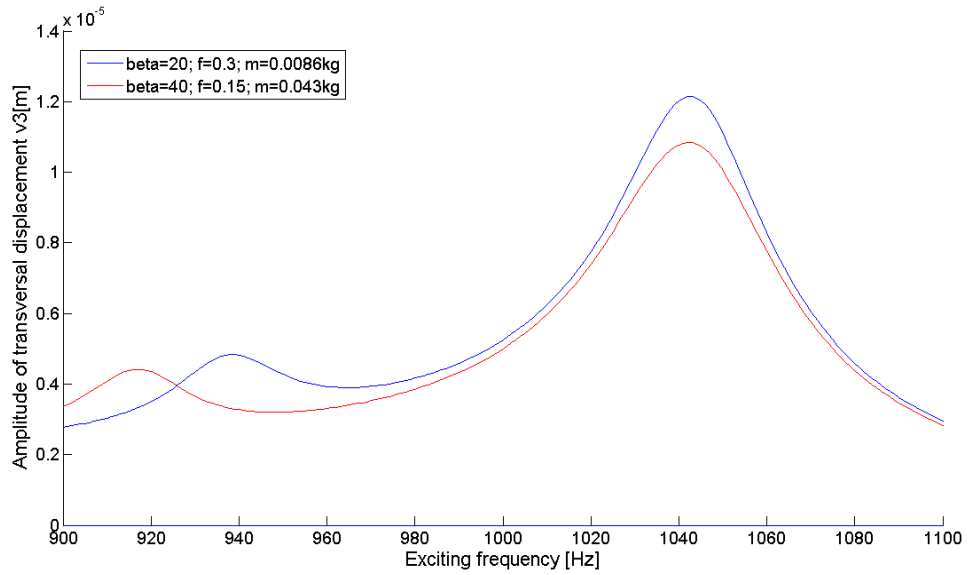
Amplituda budící síly je $F_0 = 5 \text{ N}$. Na těchto obrázcích je opět vidět kromě rezonančního vrcholu v okolí druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek (přibližně 943 Hz) linearizovaného systému dvojice lopatek se třecím členem i druhý rezonanční vrchol v okolí 1040 Hz související s druhou nejnižší torzní vlastní frekvencí lopatek.



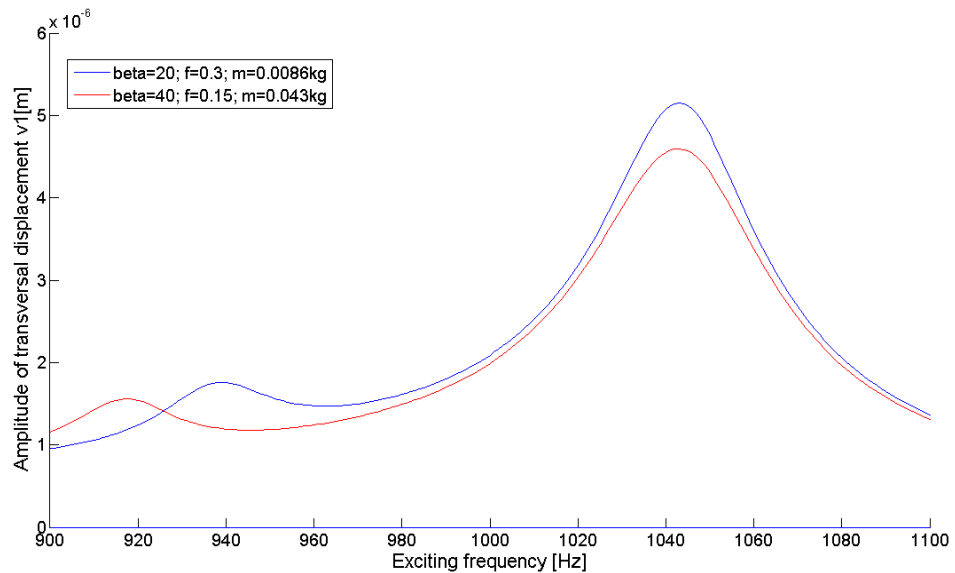
Obr. 4.10: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky koncového uzlu druhé lopatky v okolí její nejnižší ohybové vlastní frekvence



Obr. 4.11: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky koncového uzlu druhé lopatky v okolí její druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence



Obr. 4.12: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky třetího uzlu druhé lopatky v okolí její druhé nejnížší ohybové vlastní frekvence



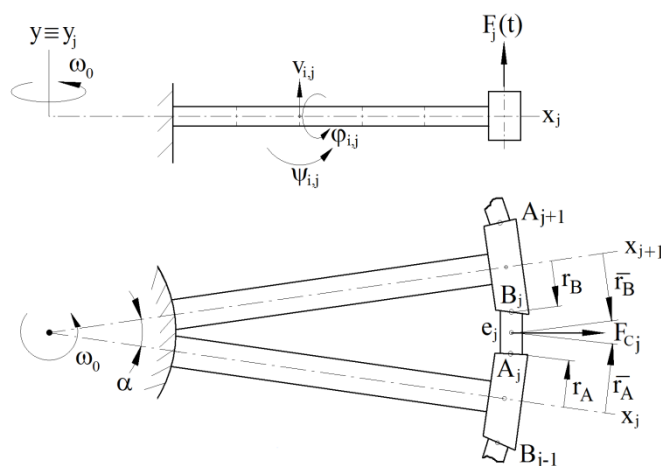
Obr. 4.13: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčné výchylky prvního uzlu druhé lopatky v okolí její druhé nejnížší ohybové vlastní frekvence

Kapitola 5

Modelování kmitání olopatkování disku s třecími členy

5.1 Stručné odvození matematického modelu olopatkování disku s třecími členy

Uvažujme olopatkování tuhého rotujícího disku skládající se z 60 rovnoměrně rozmístěných, pevně vetknutých lopatek s nástavci, jejichž matematický model je odvozen v kapitole 2. Mezi každou dvojicí nástavců sousedních lopatek jsou vloženy třecí členy (viz analogie s modelováním dvojice rotujících lopatek s třecím členem popsaným v kapitole 3). Elastické vazby mezi jednotlivými třecími členy a příslušnými nástavci lopatek představují axiálně orientované měkké pružiny o tuhosti k_e .



Obr. 5.1: Olopatkování disku s třecími členy

Konfigurační prostor takového olopatkování disku můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \dots, \mathbf{q}_{60}^T, \underbrace{v_{e_1}, v_{e_2}, \dots, v_{e_{60}}}_{\mathbf{q}_E^T}]^T \in \mathbb{R}^{960}, \quad (5.1)$$

přičemž \mathbf{q}_j , $j = 1, \dots, 60$, je vektor zobecněných souřadnic j -té lopatky s nastavcem ve tvaru

$$\mathbf{q}_j = [\dots, v_{i,j}, \psi_{i,j}, \varphi_{i,j}, \dots]^T \in \mathbb{R}^{15}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (5.2)$$

a v_{e_j} , $j = 1, \dots, 60$, je posuv j -tého třecího členu v axiálním směru. Třecí účinky v kontaktních plochách mezi třecími členy a příslušnými nastavci lopatek jsou za předpokladu využití metody ekvivalentní linearizace nahrazeny fiktivními viskózními tlumiči. Matematický model j -té lopatky zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}_j + (\mathbf{B}_B + \omega_0 \mathbf{G}_B) \dot{\mathbf{q}}_j + [\mathbf{K}_{S,B} + \omega_0^2 (\mathbf{K}_{\omega,B} - \mathbf{K}_{d,B})] \mathbf{q}_j = \mathbf{f}_j^C, \quad (5.3)$$

kde dolní index matic B přísluší lopatce a vektor vazeb \mathbf{f}_j^C obsahuje jak elastické síly pružin mezi třecími členy a nastavci lopatek, které soustředíme do středu hmotnosti třecího členu, tak tlumicí síly fiktivních viskózních tlumičů, které působí v centrálních bodech kontaktních ploch:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_j^C &= \left. \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_j^{C*} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12 \\ 3 \end{array} \quad (5.4) \\ \mathbf{f}_j^{C*} &= \begin{bmatrix} -b_{B_{j-1}} c_{B_{j-1}} - b_{A_j} c_{A_j} - k_e \bar{a}_{B_{j-1}} - k_e \bar{a}_{A_j} \\ 0 \\ b_{B_{j-1}} c_{B_{j-1}} r_B - b_{A_j} c_{A_j} r_A + k_e \bar{a}_{B_{j-1}} \bar{r}_B - k_e \bar{a}_{A_j} \bar{r}_A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -b_{B_{j-1}} (\dot{v}_{5,j} - r_B \dot{\varphi}_{5,j} - \dot{v}_{e_{j-1}}) - b_{A_j} (\dot{v}_{5,j} + r_A \dot{\varphi}_{5,j} - \dot{v}_{e_j}) - \\ 0 \\ b_{B_{j-1}} (\dot{v}_{5,j} - r_B \dot{\varphi}_{5,j} - \dot{v}_{e_{j-1}}) r_B - b_{A_j} (\dot{v}_{5,j} + r_A \dot{\varphi}_{5,j} - \dot{v}_{e_j}) r_A + \\ - k_e (v_{5,j} - \bar{r}_B \varphi_{5,j} - v_{e_{j-1}}) - k_e (v_{5,j} + \bar{r}_A \varphi_{5,j} - v_{e_j}) \\ 0 \\ + k_e (v_{5,j} - \bar{r}_B \varphi_{5,j} - v_{e_{j-1}}) \bar{r}_B - k_e (v_{5,j} + \bar{r}_A \varphi_{5,j} - v_{e_j}) \bar{r}_A \end{bmatrix} = \quad (5.5) \\ &= - \underbrace{\begin{bmatrix} 2k_e & 0 & -k_e (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_e (\bar{r}_B - \bar{r}_A) & 0 & k_e (\bar{r}_B^2 + \bar{r}_A^2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{C,j}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{5,j} \\ \psi_{5,j} \\ \varphi_{5,j} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_{C,j}} - \begin{bmatrix} -k_e & -k_e \\ 0 & 0 \\ k_e \bar{r}_B & -k_e \bar{r}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{e_{j-1}} \\ v_{e_j} \end{bmatrix} - \\ &- \underbrace{\begin{bmatrix} b_{B_{j-1}} + b_{A_j} & 0 & -(b_{B_{j-1}} r_B - b_{A_j} r_A) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(b_{B_{j-1}} r_B - b_{A_j} r_A) & 0 & b_{B_{j-1}} r_B^2 + b_{A_j} r_A^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{C,j}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_{5,j} \\ \dot{\psi}_{5,j} \\ \dot{\varphi}_{5,j} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}_{C,j}} - \begin{bmatrix} -b_{B_{j-1}} & -b_{A_j} \\ 0 & 0 \\ b_{B_{j-1}} r_B & -b_{A_j} r_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_{e_{j-1}} \\ \dot{v}_{e_j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ve vztahu (5.5) jsme zavedli označení c_{A_j} pro relativní skluzovou rychlost nástavce j -té lopatky vůči j -tému třecímu členu, $c_{B_{j-1}}$ pro relativní skluzovou rychlost nástavce j -té lopatky vůči třecímu členu číslo $j-1$ a zcela analogicky také pro relativní skluzové výchylky. Pokud dále označíme

$$\mathbf{k}_{e,B} = \begin{bmatrix} -k_e \\ 0 \\ k_e \bar{r}_B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{e,A} = \begin{bmatrix} -k_e \\ 0 \\ -k_e \bar{r}_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{e,B_{j-1}} = \begin{bmatrix} -b_{B_{j-1}} \\ 0 \\ b_{B_{j-1}} r_B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{e,A_j} = \begin{bmatrix} -b_{A_j} \\ 0 \\ -b_{A_j} r_A \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

můžeme matematický model j -té lopatky (5.3) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}_j + \left(\mathbf{B}_B + \omega_0 \mathbf{G}_B + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{C,j} \end{bmatrix} \right) \dot{\mathbf{q}}_j + \\ & + \left[\mathbf{K}_{S,B} + \omega_0^2 (\mathbf{K}_{\omega,B} - \mathbf{K}_{d,B}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{C,j} \end{bmatrix} \right] \mathbf{q}_j + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{e,B} \end{bmatrix} v_{e_{j-1}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{e,A} \end{bmatrix} v_{e_j} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{e,B_{j-1}} \end{bmatrix} \dot{v}_{e_{j-1}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{e,A_j} \end{bmatrix} \dot{v}_{e_j} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Model j -tého třecího členu má v souladu s obrázkem (5.1) tvar

$$\begin{aligned} m_e \ddot{v}_{e_j} &= k_e (v_{5,j} + \bar{r}_A \varphi_{5,j} - v_{e_j}) + k_e (v_{5,j+1} - \bar{r}_B \varphi_{5,j+1} - v_{e_j}) + \\ & b_{A_j} (\dot{v}_{5,j} + r_A \dot{\varphi}_{5,j} - \dot{v}_{e_j}) + b_{B_j} (\dot{v}_{5,j+1} - r_B \dot{\varphi}_{5,j+1} - \dot{v}_{e_j}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

který dále upravíme:

$$\begin{aligned} m_e \ddot{v}_{e_j} &= \underbrace{\begin{bmatrix} k_e & 0 & k_e \bar{r}_A \\ & & -k_{e,A}^T \end{bmatrix}}_{-\mathbf{k}_{e,A}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{5,j} \\ \psi_{5,j} \\ \varphi_{5,j} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_{C,j}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_e & 0 & -k_e \bar{r}_B \\ & & -k_{e,B}^T \end{bmatrix}}_{-\mathbf{k}_{e,B}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{5,j+1} \\ \psi_{5,j+1} \\ \varphi_{5,j+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_{C,j+1}} + \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{A_j} & 0 & b_{A_j} r_A \\ & & -b_{e,A_j}^T \end{bmatrix}}_{-\mathbf{b}_{e,A_j}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_{5,j} \\ \dot{\psi}_{5,j} \\ \dot{\varphi}_{5,j} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}_{C,j}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{B_j} & 0 & -b_{B_j} r_B \\ & & -b_{e,B_j}^T \end{bmatrix}}_{-\mathbf{b}_{e,B_j}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_{5,j+1} \\ \dot{\psi}_{5,j+1} \\ \dot{\varphi}_{5,j+1} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}_{C,j+1}} - \\ & - 2k_e v_{e_j} - (b_{A_j} + b_{B_j}) \dot{v}_{e_j} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Poté již můžeme přistoupit k sestavení matematického modelu kompletního olopatkování disku s třecími členy:

$K_C =$	$K_{c,1}$...		$k_{e,A}$...	$k_{e,B}$	$q_{c,1}$			
		$K_{c,1}$...		$k_{e,B}$	$k_{e,A}$...	$q_{c,2}$			
			$K_{c,1}$...			$k_{e,B}$	$k_{e,A}$...	$q_{c,3}$		
				\ddots					\ddots	\vdots		
					$K_{c,1}$				$k_{e,A}$	$q_{c,59}$		
						$K_{c,1}$			$k_{e,B}$	$k_{e,A}$	$q_{c,60}$	
							$2k_e$			$v_{e,1}$		
								$2k_e$		$v_{e,2}$		
									$2k_e$	$v_{e,3}$		
										\ddots		
										$2k_e$	$v_{e,59}$	
											$2k_e$	$v_{e,60}$
												$v_{e,60}$

sym.

5.2 Modální analýza přidruženého konzervativního modelu

Uvažujme přidružený konzervativní model k modelu (5.10) ve tvaru

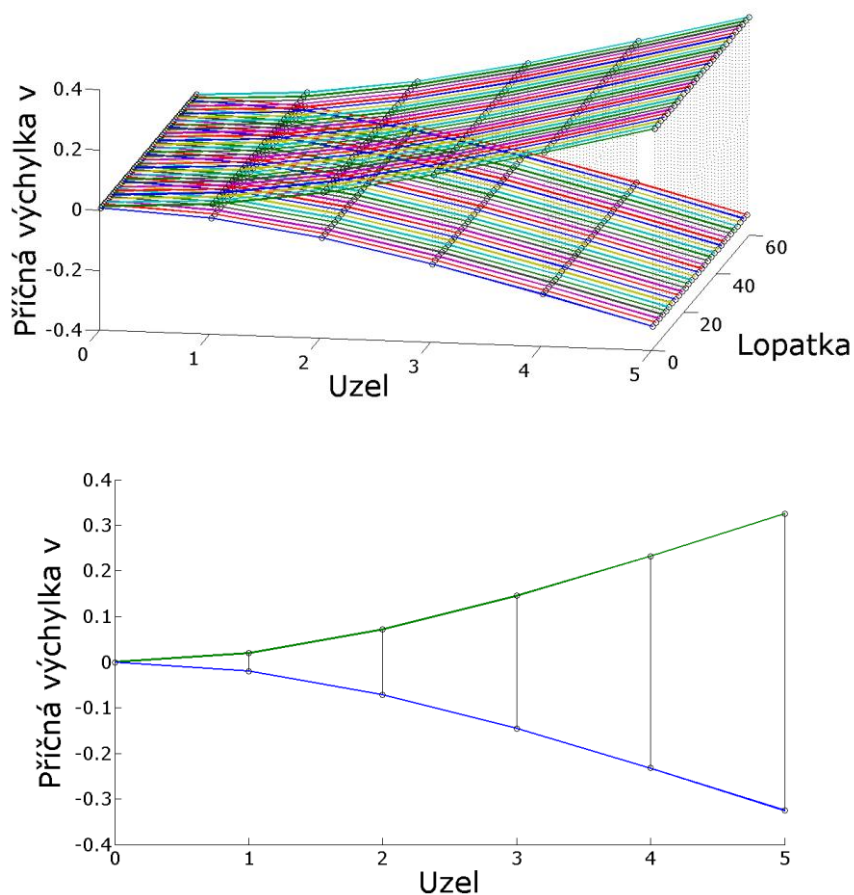
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_S + \mathbf{K}_C)\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (5.11)$$

kteřý nezahrnuje vlivy tlumení ani odstředivých sil ($\mathbf{K}_S = \mathbf{K}(\omega_0)$ pro $\omega_0 = 0 \text{ rad. s}^{-1}$). Po seřazení vlastních frekvencí olopatkování tuhého disku s vloženými třecími členy podle velikosti získáme jednu skupinu 60 blízkých vlastních frekvencí, které odpovídají dominantnímu kmitání třecích členů pružně vázaných v klínových drážkách, a 15 skupin 60 blízkých vlastních frekvencí, které odpovídají určitému vlastnímu tvaru kmitání (módu) lopatek. V tabulce 5.1 jsou zaneseny závislosti rozsahu skupiny vlastních frekvencí odpovídajících dominantnímu prvnímu ohybovému vlastnímu tvaru kmitání lopatek (Ω_1) a rozsahu skupiny vlastních frekvencí odpovídajících dominantnímu druhému ohybovému vlastnímu tvaru kmitání lopatek (Ω_2) na hodnotě vazební tuhosti pružin. Pro případ vazební tuhosti $k_e = 0 \text{ N.m}^{-1}$ se jedná o systém zcela neprovázaných lopatek a třecích členů a každé ze 16 skupin obsahuje 60 identických vlastních frekvencí.

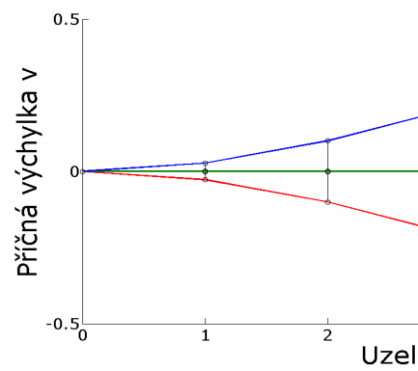
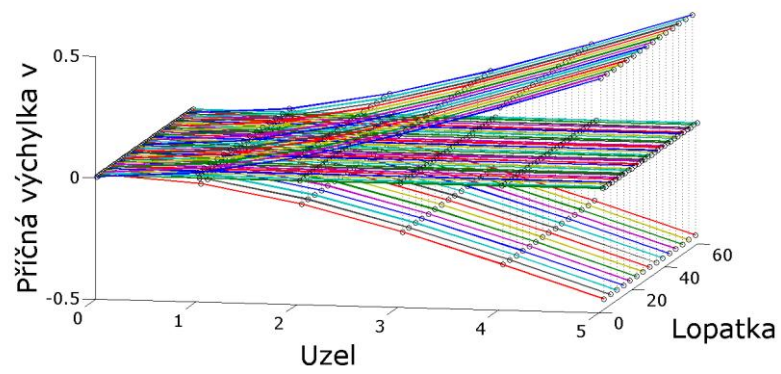
Skupina vlastních frekvencí	$k_e = 0$ [$N \cdot m^{-1}$]	$k_e = 200$ [$N \cdot m^{-1}$]	$k_e = 1000$ [$N \cdot m^{-1}$]	$k_e = 5000$ [$N \cdot m^{-1}$]
Ω_1 [Hz]	131,65	131,90 ÷ 131,91	132,87 ÷ 133,47	171,33 ÷ 181,22
Ω_2 [Hz]	931,48	931,49 ÷ 931,49	931,54 ÷ 931,54	931,78 ÷ 931,79

Tab. 5.1: Vlastní frekvence olopatkování disku

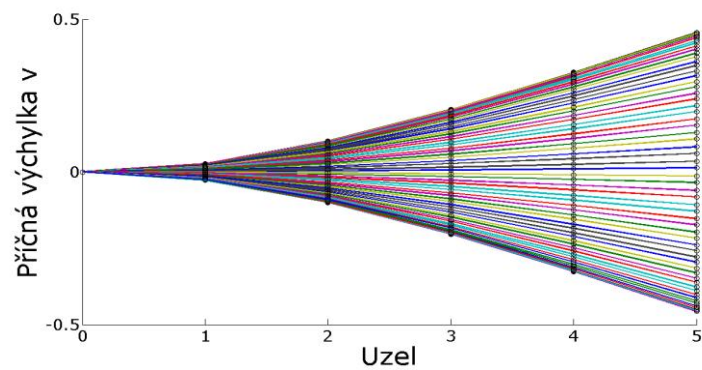
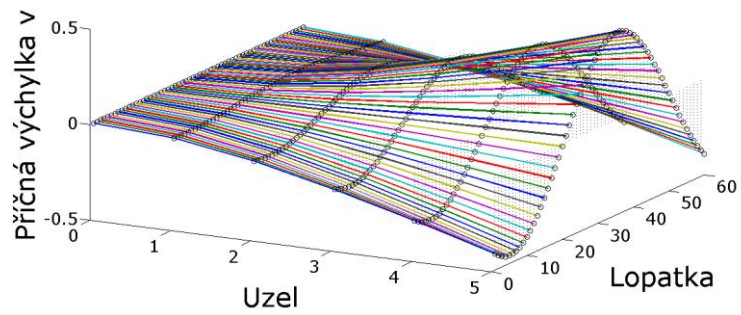
Na obrázku 5.2 je znázorněn 61. vlastní tvar kmitání olopatkování přiřazený vlastní frekvenci 132,87 Hz pro $k_e = 1000 N \cdot m^{-1}$, při kterém jednotlivé lopatky kmitají prvním ohybovým vlastním tvarem a každá dvojice sousedních lopatek kmitá v protifázi se stejnou amplitudou.



Obr. 5.2: Vybraný 61. vlastní tvar kmitání olopatkování



Obr. 5.3: Vybraný 90. vlastní tvar kmitání olopatkování



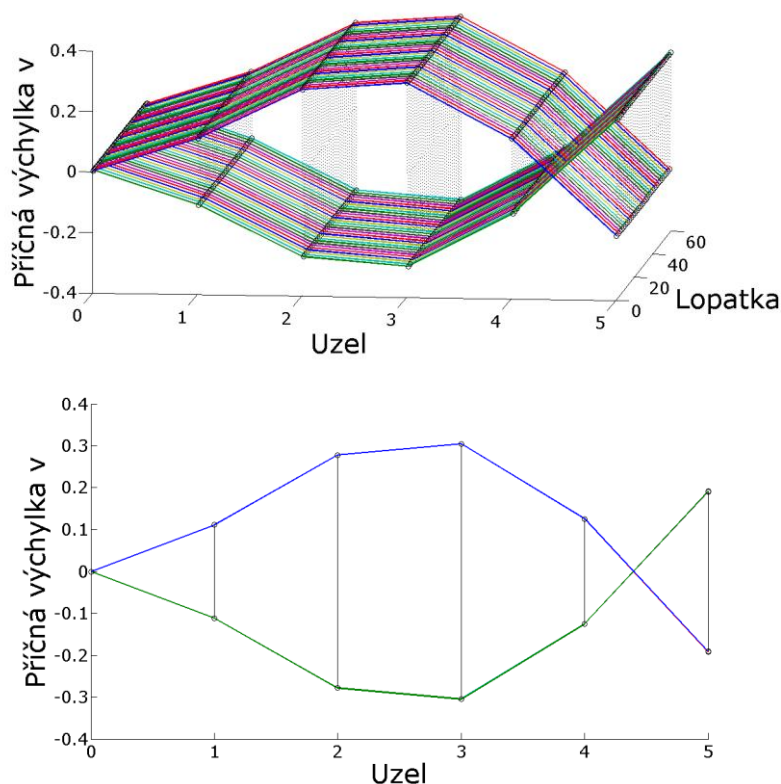
Obr. 5.4: Vybraný 119. vlastní tvar kmitání olopatkování

Na obrázku 5.3 je znázorněn 90. vlastní tvar kmitání olopatkování přiřazený vlastní frekvenci $133,17 \text{ Hz}$ pro $k_e = 1000 \text{ N.m}^{-1}$, při kterém jednotlivé lopatky kmitají prvním ohybovým vlastním tvarem a dále všechny sudé a liché lopatky kmitají se stejnou amplitudou.

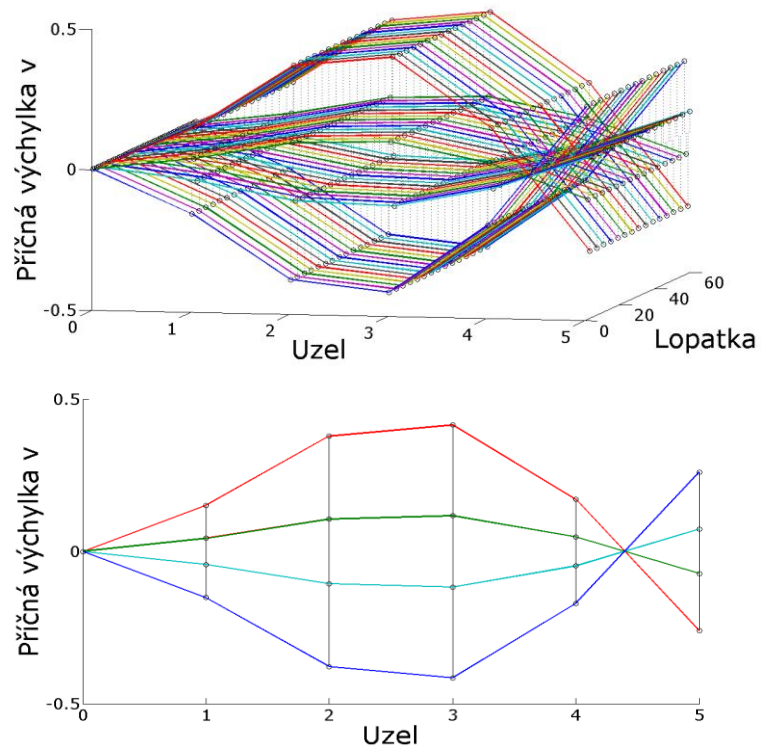
Na obrázku 5.4 je znázorněn 119. vlastní tvar kmitání olopatkování přiřazený vlastní frekvenci $133,46 \text{ Hz}$ pro $k_e = 1000 \text{ N.m}^{-1}$, při kterém jednotlivé lopatky kmitají prvním ohybovým vlastním tvarem. Tento vlastní tvar je charakterizován jednou uzlovou přímkou (jedna dvojice protilehlých lopatek téměř nekmitá).

Na obrázku 5.5 je znázorněn 121. vlastní tvar kmitání olopatkování přiřazený vlastní frekvenci $931,54 \text{ Hz}$ pro $k_e = 1000 \text{ N.m}^{-1}$, při kterém jednotlivé lopatky kmitají druhým ohybovým vlastním tvarem a každá dvojice sousedních lopatek kmitá v protifázi se stejnou amplitudou.

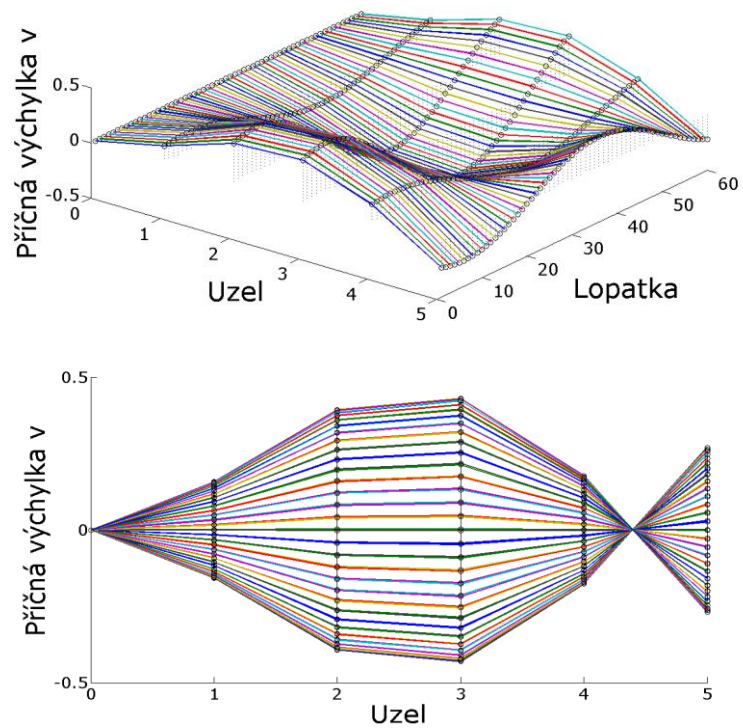
Na obrázku 5.6 je znázorněn 150. vlastní tvar kmitání olopatkování přiřazený vlastní frekvenci $931,54 \text{ Hz}$ pro $k_e = 1000 \text{ N.m}^{-1}$, při kterém jednotlivé lopatky kmitají druhým ohybovým vlastním tvarem a dále všechny sudé a liché lopatky kmitají se stejnou amplitudou.



Obr. 5.5: Vybraný 121. vlastní tvar kmitání olopatkování



Obr. 5.6: Vybraný 150. vlastní tvar kmitání olopatkování



Obr. 5.7: Vybraný 179. vlastní tvar kmitání olopatkování

Na obrázku 5.7 je znázorněn 179. vlastní tvar kmitání olopatkování přiřazený vlastní frekvenci $931,54 \text{ Hz}$ pro $k_e = 1000 \text{ N.m}^{-1}$, při kterém jednotlivé lopatky kmitají druhým ohybovým vlastním tvarem. Tento vlastní tvar je charakterizován jednou uzlovou přímkou a jednou uzlovou kružnicí.

5.3 Metoda vyšetřování harmonicky buzených kmitů

Uvažujme harmonické dýzové buzení lopatek ve směru osy rotace popsané v kapitole 4.2 a aplikované na dvojici lopatek. V případě kompletního olopatkování disku, které se skládá z 60ti oběžných lopatek, a zcela v analogii s popisem v kapitole 4.2 zapíšeme harmonickou budící sílu působící na nástavec j -té lopatky ve tvaru

$$F_j(t) = F_0 \cos \omega[t - (j - 1)\Delta t], \quad (5.12)$$

kde $F_0 = 5 \text{ N}$ je amplituda budící síly, $\omega = p_d \omega_0$ je frekvence dýzového buzení a Δt představuje časové zpoždění buzení j -té lopatky za lopatkou číslo $j + 1$. Opět pro něj platí vztah (4.7), jehož dosazením do (5.12) dostaneme

$$F_j(t) = F_0 \cos[\omega t - \underbrace{2\pi \frac{p_d}{p_o} (j - 1)}_{\varphi_j}], \quad (5.13)$$

kde φ_j je fázové zpoždění j -té lopatky. Počet dýzových lopatek je $p_d = 32$ a počet oběžných lopatek $p_o = 60$. Matematický model olopatkování disku s třecími členy nyní doplníme na pravé straně vektorem buzení

$$\mathbf{f}(t) = [0, \dots, 0, \underbrace{F_1(t)}_{\dots 13}, 0, \dots, 0, \underbrace{F_j(t)}_{\dots 15(j-1)+13}, 0, \dots, 0, \underbrace{F_{60}(t)}_{\dots 898}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{960} \quad (5.14)$$

a poté ho přepíšeme do komplexního tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{B}(\omega_0) + \mathbf{B}_c(\mathbf{q}, \omega)]\dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K}(\omega_0) + \mathbf{K}_c]\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t), \quad (5.15)$$

kde pro komplexní vektor buzení platí vztah

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = F_0 [0, \dots, 0, \underbrace{e^{-i\varphi_1}}_{\dots 13}, 0, \dots, 0, \underbrace{e^{-i\varphi_j}}_{\dots 15(j-1)+13}, 0, \dots, 0, \underbrace{e^{-i\varphi_{60}}}_{\dots 898}, 0, \dots, 0]^T e^{i\omega t}. \quad (5.16)$$

Po dosazení partikulárního řešení $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}} e^{i\omega t}$ můžeme vyjádřit vektor komplexních amplitud

$$\tilde{\mathbf{q}} = \{-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega[\mathbf{B}(\omega_0) + \mathbf{B}_c(\mathbf{q}, \omega)] + \mathbf{K}(\omega_0) + \mathbf{K}_c\}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}. \quad (5.17)$$

V iteračním procesu pak obdobně, jako v kapitole (3.4), nejprve zvolíme $\mathbf{B}_C(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{0}$, což fyzikálně odpovídá hladkým kontaktním plochám mezi třecím členem a nástavci lopatek, a vypočítáme amplitudy skluzových výchylek

$$a_{A_j} = |\tilde{v}_{5,j} + r_A \tilde{\varphi}_{5,j} - \tilde{v}_{e_j}|, \quad a_{B_j} = |\tilde{v}_{5,j+1} - r_B \tilde{\varphi}_{5,j+1} - \tilde{v}_{e_j}|, \quad (5.18)$$

kteřé následně dosadíme do vztahů pro výpočet koeficientů ekvivalentního tlumení

$$b_{A_j} = \frac{4fN_A}{\pi a_{A_j} \omega}, \quad b_{B_j} = \frac{4fN_B}{\pi a_{B_j} \omega}, \quad (5.19)$$

pomocí nichž zpřesníme matici $\mathbf{B}_C(\mathbf{q}, \omega)$ a celý iterační proces opakujeme.

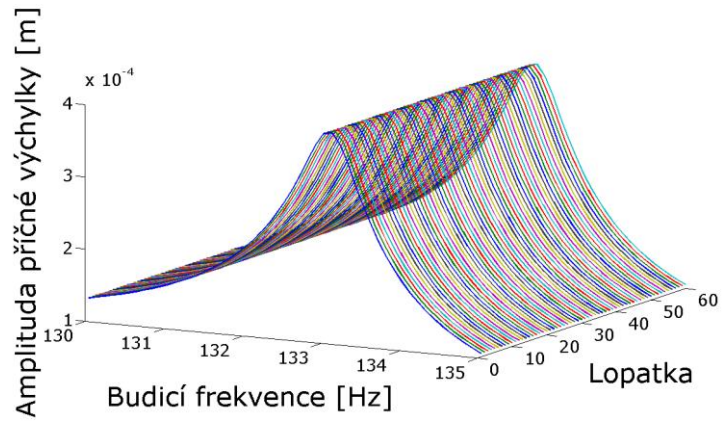
V tabulce 5.2 jsou zaneseny závislosti amplitud příčných výchylek nástavců lopatek a frekvenční polohy rezonančního vrcholu na hodnotě součinitele smykového tření f v kontaktních plochách nástavců lopatek se třecími členy a vazební tuhosti pružin k_e v rezonanci s první ohybovou vlastní frekvencí lopatek.

Rezonanční Vrchol	f = 0,15 [-]			f = 0,3 [-]			f = 0,6 [-]		
	$k_e = 200$ [N.m ⁻¹]	$k_e = 1000$ [N.m ⁻¹]	$k_e = 5000$ [N.m ⁻¹]	$k_e = 200$ [N.m ⁻¹]	$k_e = 1000$ [N.m ⁻¹]	$k_e = 5000$ [N.m ⁻¹]	$k_e = 200$ [N.m ⁻¹]	$k_e = 1000$ [N.m ⁻¹]	$k_e = 5000$ [N.m ⁻¹]
Amplituda [mm]	4,6	4,4	3,8	0,43	0,38	0,23	0,0015	0,0013	0,0007
Frekvence [Hz]	132,2	133	137,6	132,2	133	137,6	132,2	133,1	137,7

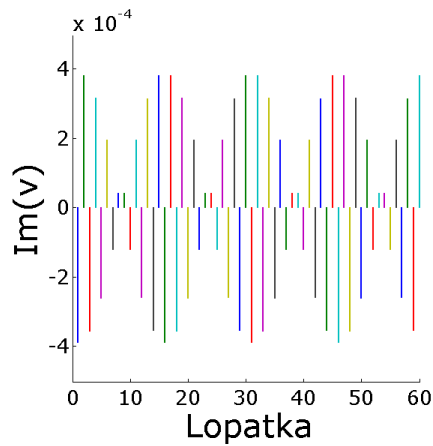
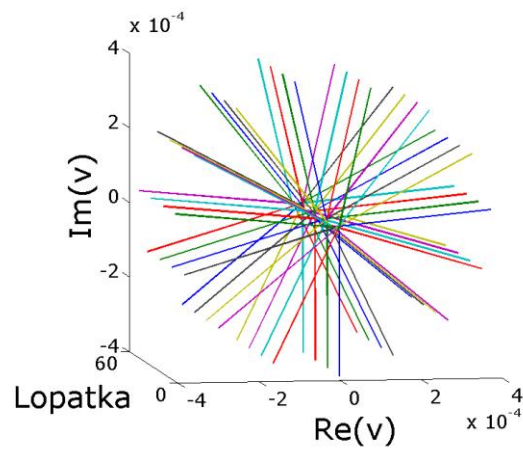
Tab. 5.2: Amplitudy příčných výchylek nástavců lopatek v rezonanci s první ohybovou vlastní frekvencí

Velikost i poloha rezonančního vrcholu je pro všechny lopatky téměř identická (viz obr. 5.8), ale lopatky kmitají s různou fází (obr. 5.9), přičemž lopatky vzájemně svírající úhel rovný celočíselnému násobku $\frac{\pi}{2}$ kmitají soufázně.

Z tabulky 5.2 je zřejmý pozitivní vliv nárůstu součinitele smykového tření f i vazební tuhosti pružin k_e na potlačení ohybových kmitů olopatkování v rezonanční oblasti, kde jednotlivé lopatky kmitají prvním ohybovým vlastním tvarem.



Obr. 5.8: Amplitudo-frekvenční charakteristiky příčných výchylek nástavců lopatek pro $f = 0,3$; $k_e = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$



Obr. 5.9: Amplitudo-fázové charakteristiky příčných výchylek nástavců lopatek v nejnižší rezonanci pro $f = 0,3$; $k_e = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

Kapitola 6

Závěr

Předkládaná diplomová práce se zabývá modelováním kmitání rotujících lopatek s třecími kontaktními plochami. Na základě dat poskytnutých Ústavem termomechaniky AV ČR byl v souladu s experimentálním zařízením vyvinutém v této vědeckovýzkumné instituci vytvořen model lopatky obdélníkového průřezu s nástavcem pevně vetknuté do horizontálně umístěného tuhého disku rotujícího konstantní úhlovou rychlostí. Lopatka byla dále diskretizována metodou konečných prvků na nosníkové prvky, přičemž uvažovány byly ohybové kmity v rotující rovině určené podélnou osou lopatky a osou rotace kombinované s torzními kmity okolo podélné osy lopatky. Matematický model rotující lopatky obsahuje kromě matic hmotnosti, materiálového tlumení (uvažovaného jako proporcionální) a statické tuhosti také antisymetrickou matici gyroskopických účinků a matice zpevnění proti ohybu v důsledku odstředivých sil a změkčení v důsledku modelování v rotujícím prostoru. Pro vybrané provozní otáčky jsou vypočítána vlastní čísla lopatky s nástavcem a v komplexní rovině zobrazeny tři rezonančně nejnižší vlastní tvary kmitání. Bylo ověřeno, že uvažovaný model lopatky je pro provozní otáčky v rozsahu $0 \div 3000 \text{ ot/min}$ asymptoticky stabilní.

Na základě modelu jedné lopatky byl dále sestaven matematický model dvojice rotujících lopatek, které reprezentují dvojici sousedních lopatek olopatkovaného disku. Mezi nástavce lopatek je vložen třecí člen ve tvaru klínu, u kterého, vzhledem k velmi malým torzním kmitům lopatek ve zkoumané oblasti, uvažujeme pouze posuv ve směru osy rotace. Elastickou vazbu mezi třecím členem a nástavci lopatek představují pružiny orientované ve směru osy rotace. Charakteristika třecích sil v kontaktních plochách, které jsou soustředěné do centrálních kontaktních bodů, zahrnuje kromě fáze makro-posuvů i fázi mikro-posuvů při velmi malých skluzových rychlostech. V první úloze bylo buzení lopatek zajištěno nerotujícím elektromagnetem umístěným v blízkosti rotujících nástavců lopatek, jehož magnetické pole působí na nástavce pulsy harmonické budicí síly ve směru osy rotace lopatek s frekvencí odpovídající nejnižší vlastní frekvenci lopatky s nástavcem. Zkoumán byl vliv zvoleného parametru třecí charakteristiky na ohybové kmitání lopatek. Nižší hodnota koeficientu poklesu třecí charakteristiky v oblasti makro-posuvů $d = 2$ má za následek výrazně nižší skluzové rychlosti nástavců lopatek vůči třecímu členu a částečně také potlačení ohybového kmitání lopatek oproti variantě $d = 50$. Druhá úloha byla zaměřena na zkoumání

přínosu třetího členu pro případ synchronizovaného a rezonančního buzení lopatek obdélníkovými pulsy realizovaného dvojicí nerotujících elektromagnetů umístěných naproti sobě v blízkosti rotujících nástavců lopatek. Bylo prokázáno, že vložení třetího členu do klínové drážky mezi nástavce lopatek má pozitivní efekt na potlačení extrémních hodnot příčných výchylek lopatky v důsledku disipace energie v kontaktních plochách přibližně o 75 %.

Za stěžejní část diplomové práce lze považovat optimalizaci vybraných parametrů třetího členu. Řešeny byly dva různé přístupy: optimalizace z hlediska potlačení ohybového kmitání lopatek a optimalizace z hlediska potlačení dynamické napjatosti lopatek v ohybu. Každá z těchto problematik byla dále rozdělena na optimalizaci v okolí nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek a optimalizaci v okolí druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek. Za optimalizační parametry byly zvoleny úhel sklonu třetího členu a součinitel smykového tření v kontaktních plochách, v případě optimalizace z hlediska potlačení dynamické napjatosti lopatek v ohybu pak ještě hmotnost třetího členu. Pro zjišťování ustálených amplitud příčných výchylek lopatky byla využita metoda ekvivalentní linearizace. Výsledky optimalizačních procesů můžeme formulovat v následujících závěrech:

- Výsledné optimalizované parametry zásadně závisí na zvoleném provozním režimu definovaném rozsahem otáček (resp. frekvencí harmonické budicí síly) a v případě optimalizace z hlediska potlačení dynamické napjatosti lopatek v ohybu i amplitudou budicí síly.
- V případě optimalizace v okolí nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek jsou optimalizované parametry $\beta = 10^\circ$ (dolní hranice) a $f = 0,6$ (horní hranice) a extrémní hodnoty amplitud příčných výchylek lopatek oproti referenčním hodnotám před optimalizací poklesly cca na 25%.
- Při optimalizaci v okolí druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek jsou optimalizované parametry na opačné hranici přípustné oblasti, tedy $\beta = 40^\circ$ (horní hranice) a $f = 0,15$ (dolní hranice), a pokles extrémních hodnot amplitud příčných výchylek je malý.
- Dosažené optimalizované parametry β a f jsou v daných provozních režimech shodné pro optimalizaci z hlediska potlačení ohybového kmitání lopatek, i z hlediska potlačení dynamické napjatosti lopatek v ohybu.
- Dosažené výsledky optimalizačních procesů se staly námětem pro experimentální ověření vlivu hmotnosti třetího členu na tlumení dvojice nerotujících lopatek v ÚT AV ČR [11]. Bylo potvrzeno, že s rostoucí hmotností třetího členu dochází významnému zlepšení tlumicích vlastností třetího členu v okolí první ohybové vlastní frekvence lopatek.
- Amplitudy příčné výchylky v okolí nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek dosahují mnohem větších hodnot, než amplitudy příčné výchylky v okolí druhé nejnižší ohybové vlastní frekvence lopatek, a proto je zpravidla

výhodnější upřednostnit optimalizované parametry v okolí nejnižší ohybové vlastní frekvence.

V poslední kapitole je odvozen matematický model kompletního olopatkování disku s vloženými třecími členy mezi sousední nástavce lopatek. Třecí účinky v kontaktních plochách mezi třecími členy a příslušnými nástavci lopatek jsou za předpokladu využití metody ekvivalentní linearizace nahrazeny fiktivními viskózními tlumiči. Na přidruženém konzervativním modelu nezahrnujícím vlivy tlumení ani odstředivých sil je provedena modální analýza s cílem prozkoumat vliv vazební tuhosti pružin, kterými jsou třecí členy k nástavcům sousedních lopatek vázány, na změnu vlastních frekvencí. V dalším kroku jsou jednotlivé lopatky v axiálním směru buzeny harmonickou budicí silou a na původním nekonzervativním modelu je zkoumán vliv hodnoty součinitele smykového tření a vazební tuhosti pružin na polohu a velikost rezonančního vrcholu v rezonanci s první ohybovou vlastní frekvencí. Bylo prokázáno, že vzrůstající tuhost pružin má významný vliv na rozsah skupiny 60 vlastních frekvencí lopatek, které odpovídají prvnímu ohybovému vlastnímu tvaru kmitání lopatek. Rostoucí hodnota součinitele smykového tření, jakož i vazební tuhosti pružin, má ve zkoumaném rozsahu za následek výrazný pokles amplitud příčných výchylek nástavců lopatek v rezonanci s první ohybovou vlastní frekvencí.

Výsledky řešení všech úloh potvrdily efektivnost účinku třecích členů vložených mezi nástavce lopatek pro potlačení ohybového kmitání lopatek a důležitost optimalizace parametrů třecích členů pro zvýšení jejich účinnosti v daném provozním režimu olopatkovaných turbinových disků.

Vyvinutý vlastní software v prostředí MATLAB umožňuje analyzovat vlivy návrhových konstrukčních i provozních parametrů lopatek s třecími členy na jejich ohybové kmitání. Uvedenou problematiku lze do budoucna dále rozvíjet mnoha směry, především pak uvažováním prostorových kmitů lopatek se šesti stupni volnosti v každém uzlu, případně modelováním poddajného disku.

Literatura

- [1] Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: *Mechanické kmitání*, Sobotáles, Praha, 1994
- [2] Byrtus, M., Hajžman, M., Zeman, V.: *Dynamika rotujících soustav*, ZČU v Plzni, 2010
- [3] Cigeroglu, E., An, N., Menq, C.H.: A microslip friction model with normal load variation induced by normal motion, In *Nonlinear Dynamics*, 50 (2007) 609-626
- [4] Csaba, G.: Forced response analysis in time and frequency domains of a tuned bladed disk with friction dampers, In *Journal of Sound and Vibrations*, 214 (1998) 395-412
- [5] Firrone, C.M., Zucca, S.: Underplatform dampers for turbine blades: The effect of damper static balance on the blade dynamics, In *Mechanics Research Communications*, 36 (2009) 515-522
- [6] Géradin, M., Rixen, D.: *Mechanical vibration*, John Wiley and Sons, Chichester, 1997
- [7] Kellner, J.: *Kmitání turbínových lopatek a olopatkovaných disků*, Disertační práce, ZČU v Plzni, 2009
- [8] MathWorks: *Optimization Toolbox User's Guide*, MathWorks, Inc., electronic documentation
- [9] Pešek, L.: *Vibration Attenuation of the Blade Couple Damped by ARAMID Friction Element*, Extract from a research report, IT AS CR
- [10] Pešek, L. a kol.: Excitation of blade vibration under rotation by synchronous electromagnet, In *Engineering Mechanics*, Vol. 18, 2011, No. ¾, pp. 249-257
- [11] Pešek, L. a kol.: Experimentální ověření vlivu hmotnosti třecího členu na tlumení dvojice lopatek podle návrhu numerické optimalizace, In *Proceedings of the National Colloquium with International Participation Dynamics of*

- Machines 2014*, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, 2014, pp. 105-112
- [12] Procházka, P. a kol.: Výzkum tlakových pulsací a vibrací na turbíně 1000 MW, In *Proceedings of the National Colloquium with International Participation Dynamics of Machines 2013*, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, 2013, pp. 85-92
- [13] Příkryl, P., Brandner, M.: *Numerické metody II*, ZČU, Plzeň, 2010
- [14] Půst, L., Horáček, J., Radolfová, A.: *Kmitání nosníků s třecí ploškou na kolmých nástavcích*, Výzkumná zpráva Z-1421/08, ÚT AV ČR, 2008
- [15] Půst, L., Pešek, L.: Non-proportional nonlinear damping in experimental bladed disk, In *Engineering Mechanics*, Vol. 17, 2010, pp. 237-250
- [16] Půst, L. a kol.: *Vliv rozladění nosníku s třecím tlumičem na výšku rezonančních vrcholů*, Výzkumná zpráva Z-1441/09, ÚT AV ČR, v.v.i, 2009
- [17] Sextro, W.: *Dynamical Contact Problems with Friction*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007
- [18] Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V.: *Základy dynamiky strojů*, ČVÚT Praha, 1997
- [19] Zeman, V., Hlaváč, Z.: *Kmitání mechanických soustav*, ZČU Plzeň, 2004

Publikace autora související s tématem práce

- [A1] Brůha, J., Zeman, V.: Ohybové kmitání lopatky se třecí kontaktní plochou, *Sborník rozšířených abstraktů Studentské Vědecké Konference 2010*, Vydavatelství ZČU, Plzeň, 2010
- [A2] Brůha, J., Zeman, V.: Detuning impact of couple of blades with friction element on bending oscillation, In *26th Conference with International Participation Computational Mechanics 2010*, ZČU, Plzeň, 2010
- [A3] Brůha, J., Zeman, V.: Vliv rozladění dvojice lopatek se třecím členem na ohybové kmitání, In *Proceedings of the National Colloquium with International Participation Dynamics of Machines 2011*, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, 2011, pp. 5-10
- [A4] Brůha, J., Zeman, V.: Zkoumání vlivu tření na ohybové kmitání lopatek, *Sborník rozšířených abstraktů Studentské Vědecké Konference 2011*, Vydavatelství ZČU, Plzeň, 2011
- [A5] Brůha, J., Zeman, V.: Friction characteristic impact on bending vibration of couple of blades with friction element, In *27th Conference with International Participation Computational Mechanics 2011*, ZČU, Plzeň, 2011, pp. 1-2
- [A6] Brůha, J., Zeman, V.: Detuning impact of couple of blades with friction element on bending vibration, In *Engineering Mechanics*, Vol. 18, 2011, pp. 237-248
- [A7] Brůha, J., Zeman, V.: Analýza vlivu parametrů třecí charakteristiky na kmitání dvojice lopatek se třecím členem, In *Proceedings of the National Colloquium with International Participation Dynamics of Machines 2012*, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, 2012, pp. 15-22
- [A8] Brůha, J., Zeman, V.: Friction element optimization with respect to vibration of couple of blades, In *28th Conference with International Participation Computational Mechanics 2012*, ZČU, Plzeň, 2012, pp. 1-2

- [A9] Brůha, J., Zeman, V.: Analysis of friction characteristic parameters impact on vibration of couple of blades with friction element, In *Engineering Mechanics*, Vol. 19, 2012, pp. 309-323
- [A10] Brůha, J., Zeman, V.: Optimalizace parametrů třecího členu dvojice rotujících lopatek z hlediska dynamické napjatosti, In *Proceedings of the National Colloquium with International Participation Dynamics of Machines 2013*, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, 2013, pp. 7-14
- [A11] Brůha, J., Zeman, V.: Kmitání olopatkování disku s třecími členy, In *Proceedings of the National Colloquium with International Participation Dynamics of Machines 2014*, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, 2014, pp. 15-22