ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Paradoxy teorie množin

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Královec

Přírodovědná studia

Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 20. března 2014

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji za odbornou pomoc a řadu cenných podnětů vedoucímu mé bakalářské práce panu Mgr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D.

OBSAH

ÚVOD

Pro svou bakalářskou práci jsem si vybral téma Paradoxy teorie množin. Některé paradoxy jsou ryze matematického charakteru a v běžném životě se s nimi nesetkáme, jiné však v běžném životě hojně využíváme, aniž bychom si to uvědomovali. Existují také paradoxy, které jsou veřejností brány spíše jako iluze či podvrhy. Na všechny tyto typy paradoxů se zaměřuje šestá kapitola, která je v této práci klíčová.

Bakalářská práce je rozdělena do šesti kapitol. První kapitola se zabývá historickým vývojem předmnožinové matematiky, vznikem Cantorovy teorie množin a vznikem axiomatické teorie množin.

Na pojmy, které jsou důležité pro pochopení některých paradoxů, jsou zaměřeny kapitoly druhá až pátá. Setkáváme se zde s vysvětlením množiny dle Zermela-Frankela, třídami, či ordinálními a kardinálními čísly.

Šestá kapitola je zaměřena na vysvětlení jednotlivých paradoxů. V části 6.1 ukážu, že i zdánlivě naprosto absurdní výrok může být pravdivý. V kapitole 6.2 se zaměřím na vizuální triky, které mají matematický podtext a racionální vysvětlení.

Poslední kapitola 6.3 se zaměřuje na paradoxy vedoucí ke sporným důsledkům. Zde jsou zařazeny paradoxy, které vedly k zavrhnutí Cantorovy teorie množin a následným nahrazením axiomatickou teorií.

Tato bakalářská práce, i přes některé odborné termíny, by se měla snažit popularizovat matematiku a ukázat její široké využití i pro širší veřejnost.

1 HISTORICKÝ VÝVOJ TEORIE MNOŽIN

1.1 PŘEDMNOŽINOVÁ MATEMATIKA

Teorii množin lze chápat jako základní stavební kámen řady disciplín, které dnes tvoří podstatnou část matematiky. Nežli však vznikla samotná, dnes užívaná, axiomatická teorie, musíme se vrátit do minulosti a zjistit, co jí předcházelo.

S rozvojem novověké vědy nezůstávala matematika pozadu za ostatními vědami a začala studovat stále širší třídu objektů. Vedle tradičních pojmů aritmetiky a geometrie, jako jsou přirozená, racionální a reálná čísla, body, přímky, roviny a kuželosečky, začíná pracovat i s novými pojmy, jako například proměnná veličina, relace, či funkce. [1] Právě tyto pojmy měly zcela zásadní vliv na dosavadní vývoj a postupem času se i jejich samotný obsah rozšiřoval. Jako příklad zde můžeme uvést původně jednoduché předpisy funkce $y = (x+1)^n$ nebo $y = \cos(x)$. Tyto funkce lze graficky zobrazit. Později však pod pojmem funkce byly zahrnuty takové předpisy, které již graficky zobrazit nelze. Jedná se o předpisy dané mocninnými nebo trigonometrickými řadami. Jako příklad lze uvést Weierstrassovu funkci, která je ve všech bodech spojitá, ale v žádném bodě nemá derivaci. Výše uvedené funkce jsou ve své podstatě velice odlišné. Mají však jedno společné - jsou dány jediným předpisem.

Dalším krokem k zobecnění pojmu funkce byla možnost definovat ji po částech. Příkladem je Dirichletova funkce, která je definována následujícím předpisem:

$$d(x) = \begin{cases} 1, & je - li\ x\ racionální\ číslo \\ 0, & je - li\ x\ iracionální\ číslo \end{cases}$$

Matematická analýza hrála v rozvoji moderní matematiky důležitou roli. Ještě v první polovině 19. století však neexistovala korektní teorie reálných čísel, a tak se opírala o geometrické představy o reálných číslech. Matematici však studovali stále složitější části reálné přímky (obory spojitosti, obory konvergence posloupností funkcí). Někteří matematikové se také nemohli smířit s faktem, že tehdejší důkazy základních vět matematické analýzy se odvolávají na geometrickou názornost. Byla zde pociťována nutnost vytvoření nové teorie reálných čísel.

1.2 ZAVEDENÍ POJMU "MNOŽINA"

První vážný pokus v tomto směru provedl český matematik a filosof Bernard Bolzano[1]. Ten zavedl pojem množina a detailně prozkoumal vlastnosti nekonečných množin. Bolzano definoval množinu jako souhrn, u kterého nezáleží na uspořádání částí, tedy prvků. [10]. Pokud srovnáme dnešní chápání pojmu množina s Bolzanovým, tak Bolzano neuvažuje prázdné a jednoprvkové množiny.

S pojmem nekonečno bojoval už v 5. století př. n. l. řecký matematik Zénón z Eleje[2]. V matematice Bolzanovy doby se krom aktuálního nekonečna, kde aktuálně nekonečná množina je brána jako nekonečný celek, objevovalo pouze nekonečno potenciální. Potenciálně nekonečná množina je brána jako konečná množina s možností dle vlastní potřeby přibírání prvků. Jednalo se o reakci na volné užívání nekonečně velkých a nekonečně malých veličin, které v počátcích infinitezimálního[3] počtu vedlo i k odvození některých nesprávných tvrzení. Tato forma nekonečna byla později z analýzy vyloučena z důvodu, že se nepodařilo formulovat korektní pravidla pro nekonečně velké a nekonečně malé veličiny. C. F. Gauss v jednom z jeho dopisů napsal: *"Nekonečno nelze v matematice použít jako něco definitivního, je to jen způsob vyjádření, které označuje jistou hranici, k níž se mohou některé veličiny libovolně blížit, pokud jisté veličiny rostou neomezeně."* [1]

Nekonečné množiny však nelze vtěsnat do takto vymezeného rámce potenciálního nekonečna, jelikož představují jinou, aktuální podobu nekonečna. [1] Zřejmě z tohoto důvodu se Bolzano na sklonku svého života ve své knize *Paradoxy nekonečna*, která byla

---

[1] Bernard Bolzano (5. října 1781, Praha – 18. prosince 1848, Praha) byl český německy hovořící matematik, filosof a kněz. Narozen do rodiny obchodníka. V roce 1796 vystudoval piaristické gymnázium v Praze. V tříleté filosofické přípravce se věnoval studiu matematiky a logiky. Ve školním roce 1799-1800 soukromě studoval matematiku a filosofii a současně navštěvoval přednášky prvního a druhého ročníku na Filozofické fakultě Karlo–Ferdinandovy univerzity. Poté se rozhodl pro studium teologie.
Roku 1805 byl vysvěcen na kněze a následně promován doktorem filosofie. Stal se profesorem filosofie náboženství. Mezi lety 1805-1819 byl univerzitním kazatelem v kostele Nejsvětějšího Salvátora v Praze. Roku 1819 mu bylo dekretem císaře Františka I. znemožněno učit a pro jeho reformátorské názory byl suspendován a odešel do penze.
Od roku 1820 žil v ústraní a věnoval se své vědecké práci. Zajímavostí je, že jeho jméno, je společně se 72 jmény českých osobností, umístěno pod okny Národního muzea v Praze.

[2] Zénón z Eleje (490 př. n. l. – 430 př. n. l.)byl řecký filosof. Je známý spoustou filosofických myšlenek, jako paradox pohybu, paradox stadionu a paradox místa.

[3] Infinitezimální počet je souhrnný název pro integrální a diferenciální počet. Jeho předmětem je počítání mezních hodnot, kterým se blíží funkce proměnných veličin, pokud rostou nebo klesají do mezí, blíží-li se nule, nebo rostou nade všechny meze.

vydána jedním z jeho žáků v roce 1851, omezil pouze na shrnutí výsledků a paradoxních vlastností nekonečných množin. Žádný z jeho žáků bohužel na jeho výsledky nenavázal, avšak vývoj matematiky se nezastavil.

1.3 ZAVEDENÍ DISCIPLÍNY "TEORIE MNOŽIN"

V 60. letech 19. století zásluhou K. Weierstrasse, G. Cantora a H. C. Méraye byla vybudovaná nová teorie iracionálních a reálných čísel. Tato teorie se již neopírala o názorné geometrické představy a k jejímu rozvoji postačila všeobecně přijímaná forma potenciálního nekonečna. Matematická analýza se však dostala do fáze, kdy bylo nutné pracovat s nekonečnými soubory reálných čísel. Tento problém se snažil v letech 1873−1897 vyřešit G. Cantor, který zavedl aktuální nekonečno do matematiky. Své výsledky publikoval v sérii svých prací, ve kterých rozvíjel matematické prostředky ke studiu nekonečných množin. Stal se tak zakladatelem nové matematické disciplíny: *teorie množin*.

Počátky G. Cantora v utváření nové teorie množin začaly u problémů teorie reálných funkcí, kde se zabýval reprezentací funkcí trigonometrickými řadami. Problém jednoznačnosti takové reprezentace ho přivedl k otázce, zda má funkce konečný nebo nekonečný počet singulárních bodů. Při zkoumání vzájemně jednoznačných zobrazení mezi množinami si Cantor položil otázku, zda lze vzájemně jednoznačně zobrazit množinu přirozených čísel na množinu čísel reálných. Ukázal, že takovéto zobrazení nelze sestrojit. Nekonečné množiny tedy můžeme dělit do dvou skupin: množiny spočetné a nespočetné. Záleží, zda existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny přirozených čísel na danou množinu, či ne. Cantor došel také k velice zajímavému tvrzení.

Věta 1.1. Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je spočetná a množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ je nespočetná. [1]

Další zkoumání vzájemně jednoznačného zobrazení vedlo k zavedení pojmu mohutnost množiny a kardinální číslo. Cantor definoval abstrakci kardinálního čísla jako vlastnost, která je společná všem prvkům nějaké třídy množin, z nichž každé dvě lze na sebe vzájemně jednoznačně zobrazit. Tuto vlastnost nazval mohutnost. [1] Došel také k závěru, že škála nekonečných mohutností je nekonečná a není shora omezená. K tomuto faktu se dostal zjištěním, že ke každé nekonečné množině existuje množina větší mohutnosti. Přes uspořádání přirozených čísel dle velikosti dospěl Cantor k pojmu dobré uspořádání a abstrakcí zavedl pojem ordinální číslo jako typ dobře uspořádaných množin. Zabýval se také studiem množiny reálných čísel.

I přes úspěšné důkazy obecných vět o množinách, pojem množina byl pojmem intuitivním nebo odvozený od filosofických pojmů. Byly to pojmy, jako třída nebo totalita[4]. Cantor vymezil pojem množina jako:

Definice 1.1. Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů m našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku M. [1]

Pojmy celek a souhrn nevnášejí do pojmu množina více světla. Tyto nejasnosti se už však nenacházejí u pojmu prvek množiny. Jsou navzájem různé, to znamená, že každý prvek nemůže být opakovaně prvkem téže množiny. Prvky množiny mají být určité, to však neznamená, že má-li být dána nějaká množina, předpokládá to, aby pro každý objekt bylo možné určit, zda je či není její prvkem. [1] Takové určení nemusí být vždy jednoduché. Dosud je problém rozhodnout u některých reálných čísel, zda jsou transcendentní[5] či algebraická[6].

Takové vymezení pojmu množina nelze považovat za definici. I přes spíše intuitivní představu, co to množina je, se tento pojem stal výchozím v rozvoji teorie množin. Teorie množin se rychle dostávala i do dalších oblastí matematiky a její význam byl například v odvození metod topologie pro teorii reálných a komplexních funkcí.

1.4 CANTOROVA TEORIE MNOŽIN - ANTINOMIE

V teorii množin se však postupem času začaly objevovat antinomie, na které nebylo řešení. Rozpory se začaly objevovat v prvopočátcích pouze u ordinálních a kardinálních čísel. Cantor a nezávisle C. Burali-Forti ukázali, že množina ordinálních čísel je dobře uspořádaná. Typem jejího uspořádání by mělo být také ordinální číslo, ale větší, než všechna ordinální čísla. V roce 1899 se objevil Cantorův paradox, který se týká mohutnosti množiny všech množin. Celý tento problém antinomií se v prvopočátku nebral vůbec váž-

[4] Totalita vyjadřuje univerzální souvislost věcí a jevů v přírodě a společnosti.
[5] Transcendentální číslo je takové komplexní číslo, které není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.
[6] Algebraické číslo je každé komplexní číslo, které je kořenem nějakého polynomu (mnohočlenu) s racionálními koeficienty.

ně a zřejmě se věřilo, že paradoxy budou odstraněny v průběhu vývoje teorie množin za pomoci zpřesnění vět okolo ordinálních a kardinálních čísel.

Zlomový byl však rok 1902, kdy Bertrand Russell otřásl celou teorií množin. Nalezl antinomii za užití nejelementárnějších prostředků. Tuto antinomii nazýváme Russellovým paradoxem. Tento paradox nám říká, že Cantorova intuitivní teorie množin je vnitřně sporná. [9]

Základní principy intuitivně zařazené do Cantorovy teorie byly tímto paradoxem pošramoceny a zejména díky tomuto paradoxu mnoho matematiků přehodnocovalo svůj postoj k dosavadní platné teorii množin. Nedlouho poté přicházely další paradoxy, jako např.: Richardův paradox. Tato krize se nedotýkala pouze teorie množin, nýbrž vedla k přehodnocení samostatných principů, na kterých dosavadní matematika stála. Toto zkoumání vedlo k rozvoji logiky a radikální změně představ o základech matematiky. Cantor nikdy nepřestal věřit, že se podaří udržet podstatný obsah teorie v jejím původním intuitivním pojetí. Poukázal na to, že při většině množinových úvah lze napřed určit rámcovou množinu tak, že celá úvaha se provádí jen s jinými prvky, a z prvků takové množiny nelze sestrojit spor podle žádné z antinomií. [1]. Dodnes je Cantorova teorie množin (dnes známá také jako naivní teorie množin) užívaná ve většině běžných aplikací v algebře a analýze. Tato teorie však nebyla vhodná ke studiu základních principů matematiky.

1.5 AXIOMATICKÁ TEORIE MNOŽIN

Odstranění všech paradoxů se povedlo až axiomatickou metodou, jež byla založena Fregem a Peanem. Axiomatická metoda však nebyla žádnou novinkou ve světě matematiky, užívala se již ve starověké geometrii, v 19. století prošla svou renesancí a dodnes je užívaná. Brzo po Russellově paradoxu publikoval E. Zermelo axiomatický systém teorie množin, který klade jistá omezení na pojmy intuitivní teorie množin, a to taková, která nepřipouští spor podle žádné ze známých antinomií. [1]. Zernelova původní axiomatika byla později doplněna A. A. Freankelem o tzv. schéma axiomů nahrazení a Zermelo připojil dále axiom fundovanosti.[1] Tato teorie se stala na počátku 30. let 20. století nejrozšířenější a vžil se pro ni název Zermelova a Fraenkelova teorie množin (ZF). Tuto teorii můžeme ještě obohatit o axiom výběru, pak píšeme ZFC. ZFC je všeobecně uznávána jako teorie, která přesně popisuje platné matematické pravdy, tj. matematická věta je pokládána za pravdivou, právě když je dokazatelná v ZFC. Ve 30. letech 20. století P. I. Bernays navrhl axiomatickou teorii založenou na pojmu třída. Rámcovou podobu tomuto systému dal K. Gödel (1906-1978). Pro tuto axiomatiku se vžil název Gödelova a Bernaysova teorie množin (GB). Mezi přístupy v ZF a GB není rozdíl ve smyslu vět, které se dají dokázat. Rozdíl je však v přístupu řešení problémů s antinomiemi. Dalo by se tedy říci, že teorie jsou totožné, liší se však pouze v matematickém vyjádření. Jako další axiomatickou teorii lze zmínit Kelleyovu-Morseovu teorii množin, která zesiluje GB.

Pro řešení paradoxů v Cantorově teorii množin je výhodné užívat Zernelovy a Freankelovy axiomatiky z důvodu zachování Cantorovy představy množiny, jako souboru předmětů. Dotváří ji a současně omezuje dvojím způsobem. Nejprve předpokládá, že všechny objekty této teorie jsou množiny. Jinými slovy, množiny jsou jediné předměty, které mohou být prvkem množiny. Navíc předpokládá, že universum množin vzniká postupně v jednotlivých krocích. V každém kroku je dána množina všech doposud sestrojených množin a nové množiny vznikají jako její části, tedy jako prvky její potence. [1] Tato iterace probíhá podle dobrého uspořádání. [1]

2 MNOŽINA DLE ZERMELA-FRAENKELA

2.1 JAZYK TEORIE MNOŽIN

Paradoxy v Cantorově teorii množin ukázaly, že je potřeba co nejpřesněji vymezit jazyk teorie množin. Pro takto přesné vymezení se užívá axiomatické metody, která má dlouhou tradici zejména v oblasti geometrie. Pokud se však zaměříme na množiny, dostáváme jinou úroveň abstrakce, na rozdíl od názorných pojmů elementární geometrie. [1]

Nežli se však zavedla axiomatická teorie množin, byla potřeba nějaká představa, zkušenost, či neformální popis této oblasti. Takovou základní představou byla Cantorova teorie množin. Výhoda axiomatizace pramení z práce s pojmy. Pokud axiomatizujeme nějakou teorii, nemusíme hned od začátku pracovat se všemi pojmy, nýbrž vybereme pojmy, které pokládáme za nejjednodušší a které nám umožní definovat pojmy další. Takové pojmy nazýváme základní pojmy axiomatizace. Předpoklady základních pojmů vyjádříme jako tvrzení − axiomy. Z těchto axiómů pak odvozujeme další tvrzení − věty. Při takovémto postupu, při kterém se držíme určitých pravidel, obohacujeme jazyk o nové a složitější pojmy. [1]

V tomto procesu má jazyk, kterým se vyjadřujeme (v našem případě čeština), dvojí úlohu. [1] Vyjadřujeme v něm definice a věty teorie množin, v této funkci jej chápeme jako jazyk teorie množin. [1] Stejným jazykem však mluvíme o definicích, větách a o teorii, jako celku. Můžeme říci *"tato definice je příliš dlouhá"*, *"takové tvrzení nelze z axiómů dokázat"* nebo *"axiomy jsou nezávislé"*. [1] V této funkci nám čeština vystupuje jako metajazyk.[7] [1] Většina matematických disciplín užívá živý jazyk v obou funkcích, aniž by docházelo k paradoxům. Richardův paradox nám však ukazuje, že v teorii množin je důležité rozlišovat obě jazykové hladiny. [1]

Jazyk teorie množin obsahuje:

1) Proměnné pro množiny a, b, c, d

2) Binární predikátový symbol $\in, =$

[7] Metajazyk je jazyk používaný pro popis jiných jazyků. O důležitosti rozlišování jazykových hladin v teorii množin se pojednává v Richardově paradoxu.

3) Logické spojky $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \Leftarrow \ \neg$

4) Kvantifikátory $\exists, \forall$

5) Pomocné symboly – různé druhy závorek

V axiomatické teorii můžeme mluvit pouze o množinách, jelikož nemáme žádný jiný druh proměnných, než množiny.

2.2 FORMULE

Formuli lze chápat jako speciální posloupnost symbolů jazyka teorie množin.

(i) Jsou-li proměnné x, y proměnné množiny, výrazy

$$(x \in y), (x = y)$$

jsou formule, které nazýváme atomické. [1]

(ii) Jsou-li výrazy φ, ψ formule, potom výrazy $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou formule. [1]

(iii) Je-li x proměnná pro množiny a φ je formule, potom výrazy $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ jsou formule. [1]

Užitím konečného počtu pravidel (i) - (iii) vznikají všechny formule a za pomoci těchto pravidel můžeme jasně říci, zda libovolný výraz je nebo není formulí.

Příklad 2.1. Mějme výraz $(\exists x)(x \in y) \vee (y \in x)$ a rozhodněme, zda se jedná o formuli, či ne.

(1) $$(\exists x)(x \in y) \vee (y \in x)$$

Rozhodnutí provedeme na základě pokusu o vytvoření výrazu za pomoci pravidel (i)-(iii).

(2) $(x \in y)$ - je formule podle (i),

(3) $(y \in x)$ - je formule podle (i),

(4) $(x \in y) \vee (y \in x)$ - je formule podle (ii),

(5) $(\exists x)(x \in y) \vee (y \in x)$ - je formule podle (iii).

Můžeme tedy říci, že výraz (1) je formulí, jelikož obsahuje všechny podformule (2), (3), (4), (5).

Pravidla (i) - (iii) nám také předepisují pravidla při psaní závorek ve formulích. Tato pravidla lze brát volněji, tedy určité množství závorek vynechat, pokud nedojde ke ztrátě srozumitelnosti.

2.3 VOLNÉ A VÁZANÉ PROMĚNNÉ

Definice 2.1. Říkáme, že výskyt proměnné na nějakém místě ve formuli φ je vázaný, je-li součástí nějaké podformule ve tvaru $(\forall x)\psi$ nebo $(\exists x)\psi$ formule φ. Není-li výskyt proměnné vázaný, říkáme, že je volný. [1]

Definice 2.2. Říkáme, že proměnná je vázaná v nějaké formuli, má-li v ní vázaný výskyt. Říkáme, že proměnná je volná v nějaké formuli, má-li v ní volný výskyt. [1]

Příklad 2.2.

1) $(\forall a)(a \in b \Longrightarrow a \in c)$ Proměnná a je vázaná, proměnné b, c jsou volné

2) $(a \in c) \wedge (\exists a)(a \in b)$ Proměnná a je současně vázaná i volná. Volný výskyt se nachází na druhém místě a vázaný výskyt na devátém a dvanáctém místě. Proměnné b, c jsou volné. Musíme tedy nalézt takový výraz, kde se vyvarujeme, aby jedna proměnná byla volná a vázaná zároveň. Podotýkám, že takový výraz najdeme vždy.

Mějme formule $(\exists u)(u \in b)$ a $(\exists a)(a \in b)$. Tyto formule jsou si logicky ekvivalentní, a tak lze psát

$$(a \in c) \wedge (\exists u)(u \in b)$$

Pokud máme formule s volnými proměnnými, ptáme se, zda platí či neplatí v závislosti na volbě hodnot proměnných. Pokud však máme uzavřenou formuli, tedy formuli, kde všechny proměnné jsou vázané, dostáváme formuli vyjadřující obecná tvrzení. Pro takovouto formuli má smysl ptát se, zda platí, či ne.

3) $(\forall a)(a \neq a)$ Proměnná a je vázaná. Formule se nazývá uzavřenou.

2.4 AXIOMY

Po prostudování oblasti jazyka a formule teorie množin se můžeme blíže seznámit s axiomatickou teorií množin a jejími axiomy. Nejrozšířenější axiomatická teorie z počátku třicátých let minulého století se nazývá Zermelova-Fraenkelova teorie množin, někdy označována zkratkou ZF, a stojí za ní A. A. Fraenkel a E. Zermelo. Axiomatická teorie musí zaručit dostatečně bohaté univerzum množin. Zároveň musí z univerza vyloučit takové množiny, které by vedly k paradoxům. Většina axiomů se tak zabývá problémem existence množin. Základním principem ZF je postupná konstrukce množin a objektů množinového universa z několika základních axiomů za předpokladu, že vzniklá teorie bude dostatečně bohatá, ale zároveň neumožní existenci množin, které povedou k paradoxům známým z Cantorovy teorie množin.

Za pomoci axiomatické teorie lze zkonstruovat všechny matematické objekty, jako jsou grupy a grafy. Díky axiomům popisující vlastnosti množin lze odvodit všechna pravdivá matematická tvrzení ze všech oblastní matematiky.

2.4.1 Axiom existence množin

Definice 2.3. Množiny se stejnými prvky se rovnají

$$(\exists x)(x = x)$$

Axiom existence množin nám zaručuje, že univerzum množin není prázdné, tedy existuje alespoň jedna množina. Tento axiom je důsledkem axiomu nekonečna. Axiom nekonečna postuluje existenci alespoň jedné nekonečné množiny [1]. Axiom existence množin je nezbytný v dílčích axiomatikách teorie množin, které neobsahují axiom nekonečna. [1]

2.4.2 Axiom extenzionality

Definice 2.4. Pro každé dvě množiny x, y platí $x = y$ právě tehdy, když pro každé u je $u \in x$ právě tehdy, když $u \in y$.

$$(\forall u)(u \in x \Leftrightarrow u \in y) \Longrightarrow (x = y)$$

Axiom extenzionality popisuje vztah mezi predikáty rovnosti a náležení. Říká, že množiny se stejnými prvky, se rovnají. Tvrdí, že rovnost dvou množin je závislá pouze na prvcích množin. Není to vždy samozřejmé, zavítáme-li do oblasti lineární algebry a rovnosti dvou vektorů, pak rovnost zde závisí nejen na prvcích vektoru, ale také na pořadí.

2.4.3 Schéma axiomů vydělení

Definice 2.5. Je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volně proměnnou z, potom formule

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)[x \in z \Leftrightarrow \big(x \in a \wedge \varphi(x)\big)] \tag{6}$$

je axiom. Množina z je částí množiny a, z sestává ze všech množin $x \in a$, pro které platí $\varphi(x)$. [1]

Srozumitelněji řečeno, zvolením rozumného kritéria, které je popsatelné formulí jazyka teorie množin, lze zvolit množinu, z které lze vybrat prvky, a výsledkem je opět množina. Díky tomuto axiomu lze pomocí různých formulí konstruovat menší množiny. Zavádíme zde nový pojem - podmnožina. Díky tomuto axiomu má smysl hovořit o prázdné množině, průniku a rozdílu dvou množin.

Definice 2.6. Zápis $X \subseteq Y$ označuje, že X, Y jsou množiny a každý prvek množiny X je též prvkem množiny Y. Tento vztah mezi množinami se nazývá inkluse. Je-li $X \subseteq Y$, pak říkáme, že množina X je podmnožinou množiny Y. [2]

Definice 2.7. Průnikem množin X, Y rozumíme množinu, jejíž prvky jsou právě ty objekty, které náleží jak do množiny X, tak do množiny Y. Značit ji budeme $X \cap Y$. [2]

Definice 2.8. Rozdílem množin X, Y v uvedeném pořadí rozumíme množinu, jejíž prvky jsou právě ty objekty, které náleží do množiny X a nenáleží do množiny Y. Značit ji budeme $X \setminus Y$. [2]

Definice 2.9. Prázdná množina je množina, která nemá žádné prvky. Protože množina je svými prvky jednoznačně určena, existuje toliko jediná prázdná množina. Značit ji budeme $\emptyset$. [2]

Proč však nepíšeme axiom vydělení, místo schéma axiomů vydělení? Mějme formuli φ. Pro každou volbu formule φ je formule (6) jeden axiom teorie množin - axiom vydělení pro φ. [1] To však znamená, že schéma axiomu vydělení zastupuje nekonečně mnoho axiomů, které vzniknou tím, že φ proběhne všechny formule. [1]

2.4.4 Axiom dvojice

Definice 2.10. K libovolným dvěma množinám a, b existuje množina, která má právě dva prvky a a b. Podle axiomu extenzionality je taková množina jednoznačně určena prvky a, b. [1]

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

Definice 2.11. Jsou-li a, b množiny, pak množinu, která sestává z prvků a, b, nazveme neuspořádanou dvojicí množin a, b a označíme ji výrazem $\{a, b\}$. Říkáme také, že $\{a, b\}$ je dvouprvková množina s prvky a, b. Místo $\{a, a\}$ píšeme krátce $\{a\}$ a říkáme, že $\{a\}$ je jednoprvková množina určená prvkem a. [1]

Definice 2.12. Uspořádaná dvojice množin a, b je množina $\langle a, b\rangle$ definovaná vztahem

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Je to dvouprvková množina, jejíž prvek $\{a, b\}$ určuje, o které dvě množiny jde, a druhý prvek $\{a\}$ vyznačuje, která množina je první. [1]

2.4.5 Axiom sumy

Definice 2.13. K libovolné množině a existuje množina z, která sestává z množin, které jsou prvkem nějakého prvku množiny a. Podle axiomu extenzionality je množina z jednoznačně určena volbou množiny a. [1]

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$$

Pokud máme definované znění axiomu sumy, lze hovořit o pojmech suma a sjednocení množin.

Definice 2.14. Suma množiny a je množina $\bigcup a$ definovaná vztahem

$$\bigcup a = \{x: (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\}.$$

Je-li speciálně $a = \{b, c\}$, potom platí

$$\bigcup\{b, c\} = \{x: x \in b \vee x \in c\}.$$

Plyne to z definice sumy a faktu

$$y \in \{b, c\} \Leftrightarrow (y = b \vee y = c). \quad [1]$$

Definice 2.15. Sjednocení množin b, c je množina $b \cup c$ definovaná vztahem

$$b \cup c = \{x: x \in b \vee x \in c\}. \text{ [1]}$$

Za pomoci axiomu dvojice jsme definovali jednoprvkovou a dvouprvkovou množinu. Pomocí axiomu sumy, přesněji operace sjednocení, lze definovat tříprvkovou množinu.

$$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}.$$

Tento postup lze opakovat k získání *k-prvkové* množiny.

2.4.6 Axiom potence

Definice 2.16. Pro každou množinu $P(a)$ existuje jiná množina, která sestává ze všech podmnožin množiny a, tedy

$$P(a) = \{x : x \subseteq a\}$$

se nazývá potenční množina. [1]

Axiomy sumy a potence postulují existenci množin, pro které platí

(7) $$x \subseteq a \Rightarrow x \in P(a),$$

(8) $$x \in a \Rightarrow x \subseteq \bigcup a.$$

Mezi oběma formulemi je jednoduchý duální vztah: zaměníme-li symboly $\in$ a $\subseteq$ a výrazy $P(a)$, $\bigcup a$, jedna formule přejde na druhou a naopak. Přitom potenční množina $P(a)$ je nejmenší množinou, pro kterou platí (7). Je-li y taková množina, že každá podmnožina $x \subseteq a$ je jejím prvkem, z definice $P(a)$ plyne $P(a) \subseteq y$. Ve stejném smyslu je $\bigcup a$ nejmenší množina, pro kterou platí (8). [1]

2.4.7 Schéma axiomů nahrazení

Definice 2.17. Je-li $\psi(u, v)$ formule, která neobsahuje volně proměnné w, z, potom formule

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u, v) \wedge \psi(u, w) \Longrightarrow v = w) \Longrightarrow$$

$$(\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \Leftrightarrow (\exists u)\big(u \in a \wedge \psi(u, v)\big))$$

je axiom teorie množin, který nazýváme axiom nahrazení. [1]

Axiom nahrazení nám říká, že obrazem libovolné množiny při definovatelném zobrazení je opět množina.

2.4.8 Axiom nekonečna

Definice 2.18. Existuje množina z, pro níž $\emptyset \in z$ a dále pokud $x \in z$, pak $x \cup \{x\} \in z$. [2]

$$(\exists z)(\emptyset \in z \wedge (\forall x)(x \in z \Longrightarrow x \cup \{x\} \in z)).$$

Tento axiom postuluje existenci aktuálně nekonečné množiny. Nepopisuje však operaci, která by vedla ke vzniku takovéto množiny z již daných množin. Tím je odlišný od ostatních axiomů. Axiom nekonečna taktéž překračuje princip omezené velikosti množin.[8]

2.4.9 Axiom fundovanosti

Definice 2.19. Pro každou množinu a platí, že pokud $a \neq \emptyset$, pak existuje x tak, že $x \in a$ a zároveň $x \cap a = \emptyset$. [2]

$$(\forall a)\big(a \neq \emptyset \Longrightarrow (\exists x)(x \in a \land x \cap a = \emptyset)\big)$$

Axiom fundovanosti, též nazývaný axiom regularity, vylučuje některé typy množin. Stává se tak spíše globální charakteristikou množinového universa. Jako příklad takovéto vyloučené množiny lze uvést množinu y, pro kterou platí $y \in y$. V tomto případě by žádný prvek neprázdné množiny $a = \{y\}$ nevyhovoval axiomu fundovanosti, jelikož $y \cap \{y\} \neq \emptyset$.

2.4.10 Axiom výběru

Definice 2.20. Pro každý neprázdný soubor neprázdných množin existuje funkce, která z každé množiny tohoto souboru vybírá právě jeden prvek.

[8] Omezená velikost lze definovat pro množiny $\mathbb{R}$ nebo obecněji pro metrické prostory, což je matematická struktura, pomocí které lze formálním způsobem definovat pojem vzdálenosti.

3 TŘÍDY

Třída je pojem z oboru teorie množin označující soubor objektů. Mějme soubor objektů, který je dobře popsán z hlediska náležení. O takovém souboru pak lze případ od případu určit, zda do dané třídy náleží, či nenáleží.

Definice 3.1. Každá formule $\varphi(x)$ přirozeným způsobem určuje soubor všech množin x, pro které platí $\varphi(x)$. Budeme jej označovat výrazem

(9) $$\{x: \varphi(x)\}.$$

Definice 3.2. Je-li $\varphi(x)$ formule jazyka teorie množin, soubor všech množin x, pro které platí $\varphi(x)$, označíme výrazem (9). Takovýto výraz nazýváme **třídovým termem**, a soubor, který označuje, nazveme **třídou**, která je určena formulí $\varphi(x)$.

Ve smyslu definice 3.1 je třeba si uvědomit, že každá množina je třídou, ne však každá třída je množinou. Pro libovolnou množinu y platí $y = \{x: x \in y\}$. Pojem třída je širší, než pojem množina. Na následujících příkladech ukážeme, kdy třída je, popř. není množinou.

Příklad 3.1. Mějme třídu $\{x: x \in a \wedge \varphi(x)\}$, kde a, φ představují proměnné ze schématu vydělení. Schéma vydělení nám říká, že je možno za pomoci různých formulí konstruovat menší množiny, tzn. podmnožiny. Dle tohoto schématu je třída množinou.

Příklad 3.2. Uvažujme nyní předpis $\{x: x = x\}$. Takováto třída nereprezentuje množinu. Neexistuje tedy množina všech množin. Takovouto třídu, která nereprezentuje množinu, nazveme vlastní třídou. Pojem vlastní třída je důležitý pro objasnění mnoha paradoxů, jako je paradox Cantorův, Russellův nebo Burali-Fortiho paradox.

Při pohledu do dob platnosti Cantorovy teorie množin zjistíme, že pojem třída splýval s pojmem množina. Pojem množina v Cantorově pojetí je definován jako dobře popsaný soubor objektů. Pro „příliš velké“ množiny se však začaly objevovat antinomie, které se v prvopočátcích nebraly příliš vážně. Byl předpoklad, že paradoxy se odstraní zpřesněním důkazů některých vět z oboru teorie množin. Tato myšlenka však byla mylná a paradoxy byly odstraněny až zavedením axiomatické teorie a pojmu třída.

Vraťme se k pojmu třídový term. Každý třídový term označuje jednu určitou třídu. Jazyk teorie množin rozšířený o třídové termy dává tedy možnost vyjádřit tvrzení o jednotlivých třídách, nikoli však globálně o všech třídách. Proto je dobré zavést pojem *proměnná pro třídy*. Proměnné značíme velkými písmeny a zastupují libovolný třídový term.

Pomocí třídových proměnných lze definovat operace sjednocení, průniku a rozdílu pro libovolné dvě třídy. Jsou-li X, Y třídy, definujeme

(i)	Průnik tříd X, Y	$X \cap Y=\{x: x \in X \wedge x \in Y\}$
(ii)	Sjednocení tříd X, Y	$X \cup Y=\{x: x \in X \vee x \in Y\}$
(iii)	Rozdíl tříd X, Y	$X - Y=\{x: x \in X \wedge x \notin Y\}$

Za předpokladu, platí-li výraz $X \cap Y = \emptyset$ říkáme, že třídy X, Y jsou disjunktní.

Definice 3.3. Je-li $\varphi(x)$ formule $y = y$, potom třída $\{y: y = y\}$ sestává ze všech množin, protože pro každou množinu y platí $y = y$. Tuto třídu označujeme symbolem $\mathbb{V}$ a říkáme, že $\mathbb{V}$ je *univerzální třída*. [1]

Definice 3.3. je velice důležitá pro objasnění Cantorova paradoxu, kde, jak se později dozvíme, univerzální třída $\mathbb{V} = \{y: y = y\}$ není množina, ale vlastní třída. Univerzální třída zároveň obsahuje každou množinu nejen jako svůj prvek, ale i jako svou podmnožinu.

Definice 3.4. Doplňkem třídy X nazýváme třídu $-X = \mathbb{V} - X$, která sestává ze všech množin, které nejsou prvkem třídy X.

Definice 3.5. Říkáme, že třída X je částí (podtřídou) třídy Y, a píšeme $X \subseteq Y$, jestliže každý prvek třídy X je prvkem třídy Y. Říkáme, že X je *vlastní částí třídy* Y, a píšeme $X \subset Y$, je-li $X \subseteq Y$ a $X \neq Y$.

Z uvedených definic vyplývá, že každá třída je součástí univerzální třídy. Platí také, že univerzální třída $\mathbb{V}$ není jedinou vlastní třídou, existují také „menší" vlastní třídy, například třída všech ordinálních čísel On.

Lemma 3.1. Univerzální třída $\mathbb{V}$ není množina. [1]

Lemma 3.2. Pro libovolnou třídu X a množinu x je $x \cap X$ množina. [1]

Lemma 3.3. Pro libovolné třídy X, Y, Z platí:

Idempotence	$X = X \cap X = X \cup X$
Komutativnost	$X \cup Y = Y \cup X, X \cap Y = Y \cap X$

Asociativita	$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
	$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
Distributivnost	$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
	$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

4 ORDINÁLNÍ ČÍSLA[9]

Ordinální čísla lze chápat jako čísla rozšiřující množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ za hranice konečných množin. Jako motivační příklad pro zavedení pojmu *ordinální číslo* lze uvést příklad s vojáky. Mějme sto vojáků stojících v řadě za sebou. Pořadí každého z nich lze vyjádřit pomocí nějakého přirozeného čísla. Pokud máme nekonečnou řadu vojáků, přirozená čísla nám stále postačují, avšak jsou užita všechna. Pokud však postavíme za tuto nekonečnou řadu ještě jednoho vojáka, přirozené číslo, které by označovalo jeho pořadí, už nebude existovat. Jeho pořadovým číslem se stává nejmenší nekonečné ordinální číslo označované ω.

4.1 POJEM „ORDINÁLNÍ ČÍSLO“

Pro ordinální čísla platí princip (transfinitní) indukce[10] a mají svou aritmetiku. Abychom mohli zavést pojem *ordinální číslo*, je potřeba znalost pojmu *dobrého uspořádání*.

Definice 4.1. Neostré lineární uspořádání na množině M budeme nazývat dobré právě tehdy, když v každé neprázdné podmnožině množiny M existuje nejmenší prvek. [1]

Příklad 4.1. Jako příklad dobrého uspořádání lze uvést obvyklé uspořádání množiny $\mathbb{N}$. Vezmeme-li však v potaz množinu všech celých čísel $\mathbb{Z}$, tak tato množina není dobře uspořádanou, jelikož s uspořádáním menší nebo rovno, množina záporných čísel nemá nejmenší prvek. Stejné tomu bude i u množiny reálných čísel, kde s uspořádáním menší nebo rovno nejsme schopni najít na otevřeném intervalu $(0;1)$ nejmenší prvek.

Ordinální čísla jsou typy všech dobře uspořádaných množin, zatímco přirozená čísla $\mathbb{N}$ jsou typy dobrých uspořádání konečných množin. Přirozená čísla také patří do třídy ordinálních čísel, jelikož splývají s konečnými ordinálními čísly. Pomocí dvou základních vlastností přirozených čísel lze definovat širší třídu, nazývanou ordinální čísla.

---

[9] Důkazy lemm v kapitole 4 zde nejsou uvedeny, jelikož nejsou prioritou této bakalářské práce. Důkazy lze nalézt v publikaci Teorie množin, Belcar B., Štěpánek P.,

[10] Transfinitní indukce je v teorii množin používaný postup důkazu obdobný matematické indukci, ale rozšířený z přirozených čísel na čísla ordinální.

Definice 4.2. Dobře uspořádaná množina x je ekvivalentní s dobře uspořádanou množinou y právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny x na množinu y, které zachovává jejich uspořádání. [1]

Platí také, že definice 4.2 je aplikovatelná na libovolné uspořádané množiny, zahrnující i množiny nekonečné.

Relace podobnosti uvedena v definici 4.2 má vlastnosti ekvivalence a budeme ji označovat $x \cong y$. Tato relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Dobře uspořádanou množinu budeme zapisovat úplným výčtem prvků a nad tento výčet připíšeme symbolické znázornění Hasseova diagramu.

$$\{\overrightarrow{0,1,2,3, \dots}\}$$

$$\{\overrightarrow{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \dots}\}$$

$$\{\overrightarrow{c, b, e, d, f, a}\}$$

Věta 4.1. Jsou-li x, y, z dobře uspořádané množiny, potom platí

i) $(\forall x)\ x \cong x$
ii) $(\forall x, y)\ x \cong y \ \Rightarrow y \cong x$
iii) $(\forall x, y, z)\ x \cong y \ \wedge y \cong z \ \Rightarrow x \cong z$

Platí zde tedy relace ekvivalence $x \cong y$.

Definice 4.3. Ekvivalence $\cong$ indukuje rozklad třídy všech dobře uspořádaných množin. V každé třídě rozkladu leží všechny navzájem podobné a dobře uspořádané množiny a každá dobře uspořádaná množina je obsažena v právě jedné třídě rozkladu. Tyto třídy tohoto rozkladu budeme nazývat ordinálními čísly nebo krátce ordinály. [1]

Definice 4.4. Nechť existuje třída X. Třída X je tranzitivní, pokud každý prvek $x \in X$ je podmnožinou X, to znamená, že platí

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Z definice 4.1.6 vyplývá, že třída X je tranzitivní, právě když pro libovolné prvky x, y platí

$$y \in x \in X \Rightarrow y \in X$$

Poslední implikace nám však neříká, že relace $\in$ je tranzitivní na X. Třída X je tranzitivní právě tehdy, pokud platí vztah $\bigcup X \subseteq X$. Tranzitivnost můžeme potvrdit u univerzální třídy a prázdné množiny. Množina všech přirozených čísel je taktéž tranzitivní a také každé přirozené číslo tvoří tranzitivní množinu.

Definice 4.5. Říkáme, že množina x je ordinální číslo nebo krátce ordinál, jestliže je množina x tranzitivní a relace náležení je dobré ostré uspořádání množiny x. Třídu všech ordinálních čísel budeme značit On, tedy

$$On = \{x : x \text{ } je \text{ } ordinální \text{ } číslo\}$$

Pro třídu všech ordinálních čísel platí, že relace $\in$ je ostré uspořádání na množině x, jestliže je antireflexivní a tranzitivní na x. Je to dobré uspořádání, jestliže každá neprázdná podmnožina $y \subseteq x$ má nejmenší prvek.

Lemma 4.1. On je tranzitivní třída.

Lemma 4.2.Třída On je vlastní třída, a není tedy ordinál. [3]

Věta 4.2. Relace náležení je dobré ostré uspořádání třídy On.

Lemma 4.3. Jsou-li x, y ordinály, potom platí

i) $x \notin x$,
ii) $x \cap y$ *je ordinál,*
iii) $x \in y \Leftrightarrow x \subset y$.

Je důležité poznamenat, že třída On není množinou. Dle lemmy 4.1. je On tranzitivní a dle věty 4.2. je dobře uspořádaná relací náležení. Pokud by třída On byla množinou, pak by musela být ordinálním číslem a platilo by, že $On \in On$. To je však ve sporu s lemmou 4.3.

Rozdělme si nyní ordinální čísla konečných dobře uspořádaných množin a čísla nekonečných dobře uspořádaných množin. Pokud vezmeme přirozená čísla, jako čísla ordinální konečně dobře uspořádaných množin, nesmíme zapomenout na důležitou vlastnost konečných množin, tj. vlastnost, která nám říká, že konečnou množinu můžeme uspořádat různými způsoby.

Mějme množinu $y = \{0; 1; 2\}$. Počet různých dobrých uspořádání takovéto množiny, která má n prvků, je $n!$. Množinu y lze tedy zapsat celkem šesti způsoby:

$$\overrightarrow{\{0; 1; 2\}}$$
$$\overrightarrow{\{0; 2; 1\}}$$
$$\overrightarrow{\{1; 0; 2\}}$$
$$\overrightarrow{\{1; 2; 0\}}$$
$$\overrightarrow{\{2; 0; 1\}}$$
$$\overrightarrow{\{2; 1; 0\}}$$

Vezmeme-li z těch šesti dobře uspořádaných množin dvě libovolné, můžeme si být jisti, že jsou si podobné a všechny budou mít ordinální číslo 3. Značíme $ord\ y = 3$.

Věta 4.3. Přirozená čísla jsou ordinálními čísly konečných množin. [1]

Věta 4.4. Nechť existuje ordinální číslo dobře uspořádané množiny x a množiny y, pak platí vztah

$$ord\ x = ord\ y \ \Leftrightarrow x \cong y$$

Tedy platí např.: $ord\ \{\vec{a}\} = ord\overrightarrow{\{0\}} = 1$

Přejděme od konečných dobře uspořádaných množin k množinám nekonečným dobře uspořádaným. Definujme si ordinální číslo ω.

Definice 4.6. *Ordinální číslo* $\omega = \overrightarrow{\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}}$ *je supremem množiny všech přirozených čísel ve třídě* On. *To znamená, že ω je nejmenší nekonečné ordinální číslo. Konečná ordinální čísla jsou právě přirozená čísla.* [2]

Vyslovme ještě princip, který je zmíněn na začátku této kapitoly. Princip transfinitní indukce je zobecněním principu indukce na množině všech přirozených čísel.

4.2 ORDINÁLNÍ ARITMETIKA

4.2.1 Ordinální součet a součin

Nechť α, β jsou ordinální čísla.

i) *Ordinální číslo, které je typem množiny* $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ *při lexikografickém uspořádání, označíme* $\alpha + \beta$ *a nazveme ho součtem ordinálů* α *a* β.
ii) *Ordinální číslo, které je typem množiny* $\beta \times \alpha$ *při lexikografickém uspořádání, označíme* $\alpha \cdot \beta$ *a nazveme ho součinem ordinálů* α *a* β.

Množiny $x = \{0\} \times \alpha$ a $y = \{1\} \times \beta$ jsou z definice ordinálního součtu disjunktní a při lexikografickém uspořádání jsou izomorfní po řadě s ordinály α a β.

4.2.2 Vlastnosti součtu a součinu

Pro libovolné ordinály α, β, γ platí, že ordinální součet a součin jsou asociativní operace. Pro libovolné konečné ordinály platí komutativnost vzhledem k operacím součtu a součinu.

$$\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$$

$$\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$$

$$\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Pro libovolné nekonečné ordinály ω platí, že ordinální součet a součin nejsou komutativní operace a ordinální součin je distributivní pouze zleva.

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$$

$$2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2$$

4.2.3 Monotónnost sčítání

Pro libovolné ordinály α, β, γ platí [2]

i) $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$,
ii) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

4.2.4 Monotónnost součinu

Pro libovolné ordinály α, β, γ platí [2]

i) $\alpha < \beta \Rightarrow (\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta)$,
ii) $\alpha \leq \beta \Rightarrow (\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma)$.

4.2.5 Distributivnost

Pro libovolné ordinály α, β, γ platí

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

Ordinální součin je tedy zleva distributivní. Naproti tomu podle 4.2.2

$$(1 + 1) \cdot \omega \neq \omega + \omega.$$

Ordinální součet tedy není zprava distributivní.

Lemma 4.3. *Je-li $\alpha \leq \beta$, pak existuje právě jeden ordinál γ takový, že $\alpha + \gamma = \beta$.*

Příklad 4.1. Součet

Mějme dvě ordinální čísla $\alpha = 4$ a $\beta = 3$. Pak ordinální součet lze zapsat jako

$$(\{0\} \times 4) \cup (\{1\} \times 3) =$$

$$(\{0\} \times \{0,1,2,3\}) \cup (\{1\} \times \{0,1,2\}) =$$

$$\{[0,0], [0,1], [0,2], [0,3]\} \cup \{[1,0], [1,1], [1,2]\} =$$

$$\{[0,0], [0,1], [0,2], [0,3], [1,0], [1,1], [1,2]\}$$

Typem této množiny v lexikografickém uspořádán je ordinál $4 + 3 = 7$. Pokud ovšem budeme sčítat ordinální číslo $\alpha = 1$ a ordinální číslo ω_0, označující množinu všech přirozených čísel, součet $1 + \omega_0$ vypadá následovně

$$(\{0\} \times 1) \cup (\{1\} \times \omega_0) =$$

$$(\{0\} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times \{0,1,2,3, \dots\}) =$$

$$\{[0,0]\} \cup \{[1,0], [1,1], [1,2], [1,3], \dots\} =$$

$$\{[0,0], [1,0], [1,1], [1,2], [1,3], \dots\}$$

Součet $\omega_0 + 1$ však bude mít jiný výsledek. Dle 4.2.2 platí vztah $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$.

$$(\{0\} \times \omega_0) \cup (\{1\} \times 1) =$$

$$(\{0\} \times \{0,1,2,3, \dots\}) \cup (\{1\} \times \{0\}) =$$

$$\{[0,0], [0,1], [0,2], [0,3], \dots\} \cup \{1,0\} =$$

$$\{[1,0], [0,0], [0,1], [0,2], [0,3], \dots\}$$

Příklad 4.2. Součin

Mějme dvě ordinální čísla $\alpha = 4$ a $\beta = 3$. Součin $\alpha \cdot \beta$ bude vypadat následovně

$$3 \times 4 = \{0,1,2\} \times \{0,1,2,3\} =$$

$$\{[0,0], [0,1], [0,2], [0,3], [1,0], [1,1], [1,2], [1,3], [2,0], [2,1], [2,2], [2,3]\}$$

Typem této množiny s lexikografickým uspořádáním je číslo 12. Vezměme ordinální číslo ω_0 a vynásobme ho zprava ordinálním číslem $\alpha = 2$.

$$\omega_0 \times 2 = \{0,1,2,3, \dots\} \times \{0,1\} =$$

$$\{[0,0], [0,1], [1,0], [1,1], [2,0], [2,1], [3,0], [3,1], \dots\}$$

Typem této množiny s lexikografickým uspořádáním je ω_0. Pokud ordinální číslo ω_0 vynásobíme ordinálním číslem $\alpha = 2$ zleva, dostaneme jiný výsledek.

$$2 \times \omega_0 = \{0,1\} \times \{0,1,2,3, \dots\} =$$

$$\{[0,0], [0,1], [0,2], [0,3], \dots, [1,0], [1,1], [1,2], [1,3], \dots\}$$

Typem této množiny s lexikografickým uspořádáním již není ω_0, ale větší ordinální číslo $\omega_0 + \omega_0 = 2 \cdot \omega_0$

5 KARDINÁLNÍ ČÍSLA

Už od dávných dob vzniku naší civilizace lidé poznali, zda počet kožešin, které nabízeli kupcům, je stejný (popřípadě větší) než počet pytlíčků soli, které za ně požadovali. Tito lidé nemuseli umět ani počítat. V případě neznalosti základních počtů rozprostřeli kožešiny na zem a na každou kožešinu položili jeden pytlíček soli.

Počet prvků nějaké množiny, o nějž v tomto případě jde, je nesen toliko její mohutností (to znamená, že je lhostejné, jakou povahu mají její prvky a v jakých vztazích jsou zasazeny), a je tedy z dané množiny odečitatelný, aniž by bylo nutno (a někdy dokonce vůbec možno) její prvky přepočítat. [2] Mějme tedy množiny M a N, které mají stejnou mohutnost právě tehdy, když je lze vzájemně jednoznačně na sebe zobrazit.

Odloučíme-li z nějaké množiny její mohutnost a tuto mohutnost vyložíme jako objekt, dostaneme kardinální číslo. Pak základní počet prvků množiny, z níž jsme odloučili mohutnost, udává kardinální číslo. Takto zavedl Cantor kardinální číslo taktéž pro nekonečné množiny.

Definice 5.1. Nechť m označuje kardinální číslo množiny M a n kardinální číslo množiny N. Z našeho vymezení kardinálních čísel plyne $m = n$ právě tehdy, když množiny M, N lze na sebe vzájemně jednoznačně zobrazit. [2]

Můžeme také definovat kardinální číslo m menší nebo rovno číslu n, tedy pokud množina M má mohutnost stejnou, jako podmnožina množiny N. Lze tedy vytvořit vzájemně jednoznačné zobrazení F množiny M do množiny N.

Kardinální číslo m je menší, než n, pokud platí, že $(m \neq n) \wedge (m \leq n)$. Tzn. pokud množiny M, N na sebe nelze vzájemně jednoznačně zobrazit, a zároveň lze množinu M jednoznačně zobrazit do množiny N.

Příklad 5.1. Mějme množinu M všech sudých přirozených čísel a množinu N všech přirozených čísel. Množina M má stejnou mohutnost, jako množina N, i když by se na první pohled mohlo zdát, že je tomu naopak. Jak je to možné? Zobrazení, které každému přirozenému číslu k přiřadí číslici $2k$, je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech přirozených čísel na množinu všech sudých přirozených čísel. [2]

Nyní však přejděme do moderní matematiky s přesným vymezením kardinálního čísla.

Kardinální čísla vyjadřují mohutnost množin, pro které existuje dobré uspořádání. Za předpokladu axiomu výběru vyjadřují kardinální čísla mohutnosti všech množin.

Věta 5.1. Mějme třídu všech ordinálních čísel On. Pak kardinální čísla jsou podtřídou On a existuje normální funkce *alef*, označovaná $\aleph$, která zobrazuje On na třídu nekonečných kardinálních čísel.

Definice 5.2. Řekneme, že $\varkappa$ je kardinální číslo, jestliže $\varkappa$ je ordinál, který nelze prostě zobrazit na žádné menší ordinální číslo. Třídu všech kardinálních čísel označíme Cn, tedy $Cn = \{\varkappa \in On: (\forall \alpha < \varkappa)(\alpha \not\approx \varkappa)\}$,

kde α je ordinální číslo. Řekneme také, že kardinální číslo $\varkappa$ je mohutnost množiny x, a píšeme $|x| = \varkappa$, jestliže existuje prosté zobrazení množiny x na $\varkappa$.[1]

Můžeme také říci, že kardinální čísla symbolizují mohutnosti množin, které lze dobře uspořádat. Takové množiny, které nelze dobře uspořádat, nemají stejnou mohutnost s žádným kardinálním číslem. Avšak i pro tyto množiny lze definovat mohutnost splňující podmínku $x \approx y \Leftrightarrow |x| = |y|$, kde x, y značí množiny a $|x|, |y|$ mohutnost množin. Jak již bylo napsáno v této kapitole, po přijetí axiomu výběru lze z principu dobrého uspořádání ke každé množině x přiřadit právě jedno kardinální číslo $\varkappa$, $|x| = \varkappa$.

Příklad 5.2. Nechť 0 a ω jsou kardinální čísla. Již víme, že ω značí nekonečnou množinu. Nemůže tedy platit ekvivalence $\omega \approx n$ pro žádné přirozené číslo $n < \omega$.

Příklad 5.3. Nechť $\omega \subseteq Cn$. Pokud n je libovolné přirozené číslo a zároveň platí $m < n$, pak $m \subset n$. Platí také, že pokud existuje konečná množina, pak má vždy větší mohutnost než libovolná vlastní podmnožina. Konečná množina n nemůže mít stejnou mohutnost s vlastní podmnožinou m. Platí tedy $n \in Cn$.

Lemma 5.1. Každý ordinál $\alpha \leq \omega$ je kardinálním číslem, ale za kardinálním číslem ω následuje velký interval ordinálních čísel, které nejsou kardinály. [1]

Lemma 5.2. Ke každému kardinálu existuje větší kardinál. [1]

5.1 FUNKCE $\aleph$

Definice 5.3. Jednoznačně určenou normální funkci, která zobrazuje On na třídu všech nekonečných kardinálních čísel, označíme $\aleph$ (alef) a její hodnoty $\aleph_{(\alpha)}$ označujeme $\aleph_{\alpha}$.

Pokud tedy máme nekonečný kardinál $\aleph_{\alpha}$, označuje α-tý nekonečný kardinál. Pro $\omega = \aleph_0$, kde $\aleph_0$ je tzv. limitní kardinál.

6 MATEMATICKÉ A LOGICKÉ PARADOXY

Tato kapitola je zaměřena na přehled matematických a logických paradoxů v matematice. Máme celkem tři druhy paradoxů, které lze rozdělit dle jejich principů.

I) Tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

II) Tvrzení vypadá věrohodně, ale neplatí;

III) Výroky vedoucí ke sporným důsledkům.

6.1 TYP I. – TVRZENÍ PLATÍ, ALE JE ABSURDNÍ

Jak již název této podkapitoly napovídá, obsahem budou paradoxy, které i přes jejich absurdní znění platí. Budeme se zde moci přesvědčit o rozdílnosti matematického a fyzikálního světa (Banachův-Tarského paradox), či o tom, že každá změna neznamená změnu k lepšímu (Braessův paradox).

6.1.1 Banachův-Tarského paradox

Paradox Stefana Banacha[11] a Alfreda Tarského[12] spatřil světlo světa roku 1924. Tento zdánlivě bizarní paradox, stavící na předešlé práci Felixe Hausdorffa,[13] ukazuje, že ačkoliv v trojrozměrném euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ se dá bez potíží provozovat klasická stereometrie, existují i množiny, jejichž vlastnosti odporují jakékoliv geometrické intuici. Banachův-Tarského paradox (dale jen BT) je závislý na axiomu výběru (AC). Výsledky BT vypadají natolik paradoxně, že mnoho matematiků dovedly až k myšlence, že axiom

[11] Stefan Banach se narodil 30. března 1892 v Krakově v Rakousku-Uhersku, dnešním Polsku. Zemřel 31. srpna 1945 ve Lvově, dnešní Ukrajina. Po ukončení školy v Krakově od roku 1919 přednášel na Ústavu technologie ve Lvově, od roku 1922 přednášel na Univerzitě ve Lvově a v roce 1927 se stal profesorem této univerzity. Je zakladatelem moderní funkcionální analýzy a významně přispěl k teorii topologických vektorových prostorů. V roce 1920 axiomaticky definoval ve své disertační práci tzv. Banachův prostor.

[12] Alfred Tarski se narodil 14. ledna 1902 ve Varšavě a zemřel 26. října 1983 v Berkeley v Californii, USA. Významně přispěl k rozvoji matematické logiky, teorii množin, teorii míry, teorii modelování, obecné algebry a Lebesgueova integrálu. Přednášel na Univerzitě ve Varšavě, na Harvarské univerzitě a v roce 1942 se stal členem Kalifornské univerzity v Berkeley. Od roku 1949 užíval titul profesor matematiky. V letech 1958 – 1960 byl výzkumným profesorem na Millerově institutu základního výzkumu ve vědě.

[13] Felix Hausdorff (8. listopadu 1868 – 26. ledna 1942) byl německý matematik, který je považován za jednoho ze zakladatelů moderní topologie a významně přispěl k rozvoji teorie množin, teorie míry, teorie funkcí a funkcionální analýzy.

výběru je chybný. V mnoha matematických oborech je však natolik užitečný a užívaný, že jej matematici ve svých větách a důkazech často užívají.

BT je příkladem, jak lze z matematické disciplíny *teorie grup* přejít do odlišného oboru *teorie míry*. Paradox pracuje s velmi komplikovaně propletenými a neměřitelnými podmnožinami (kousky) a mezi hranicemi a objemy fyzického světa nemají tyto podmnožiny přímé protějšky. BT neplatí pro dvourozměrný prostor, pro všechny vyšší už ano.

Věta 6.1. (Paradox Banachův-Tarského silnější forma). Pro jakékoliv dvě omezené množiny $A, B \in \mathbb{R}^3$, které mají neprázdný vnitřek (tj. obsahují jako podmnožinu nějakou kouli), existuje $n \in \mathbb{N}$, disjunktní množiny $A_1, \ldots, A_n$ a disjunktní množiny $B_1, \ldots, B_n$ takové, že $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ a množiny A_i a B_i jsou přímo shodné (tedy liší se jen posunutím a otočením) pro $1 \leq i \leq n$ (neformálně, A lze „rozřezat“ a „přeskládat“ na B) [27]

Věta 6.2. (Banachův-Tarského, populární forma). Lze nalézt disjunktní rozdělení koule *S* na konečně mnoho částí takové, že tyto části lze pomocí operací otočení a posunutí přeskládat tak, aby utvořily dvě koule se stejným poloměrem, jako měla koule původní. [52]

Důkaz 6.1. Mějme nekonečnou množinu *A*, kterou lze rozložit na dvě disjunktní množiny *B* a *C*. Lze pak nalézt bijektivní zobrazení *B* na *A* a *C* na *A*. Platí, že každou množinu lze rozložit na dvě množiny, které jsou stejně velké, jako ta původní.

Uveďme příklad z oboru přirozených čísel ℕ. Přirozená číslo ℕ lze rozložit na sudá a lichá čísla a následně vybrat bijektivní zobrazení $n \to \frac{n}{2}$ a $n \to \frac{n+1}{2}$.

V našem případě se pokoušíme o obdobnou bijekci, musí se však jednat o přeskládání. Pro každý dílek je povolena pouze operace posouvání a otáčení. Z tohoto důvodu bude zapotřebí více, než dva dílky.

Obdobně provedeme rozklad tzv. *volné grupy*[14] *na dvou generátorech a, b*. Hledaným bijektivním zobrazením zde bude levá translace příslušná jednomu z generátorů.

[14] Je-li X podmnožina grupy F, potom F je volná grupa s bází X, jestliže pro každou grupu G a každou funkci $f: X \to G$ existuje právě jeden homomorfismus $\varphi: F \to G$ rozšiřující f.[29]

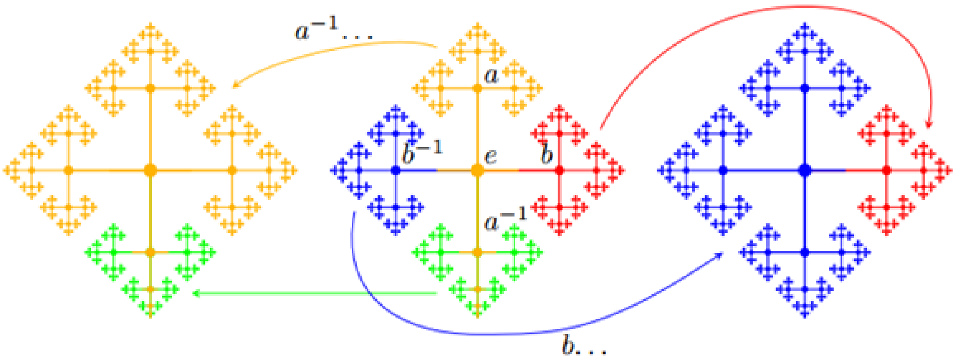
Uvažujme množinu všech konečných slov skládajících se ze znaků a, a^{-1}, b, b^{-1}. Zaveďme si také pojem *redukované slovo*, které neobsahuje žádnou z následujících posloupností znaků aa^{-1}, $a^{-1}a$, bb^{-1}, $b^{-1}b$. Definujme operaci násobení na redukovaných slovech tím, že dané znaky spojíme za sebe. Pokud vznikne při tomto spojení slovo, které obsahuje nějakou z posloupností aa^{-1}, $a^{-1}a$, bb^{-1}, $b^{-1}b$, tak ji vynecháme. Pokud je potřeba, vynechávání opakujeme, než máme redukované nebo prázdné slovo.

Prázdné slovo ω definujme jako slovo, které neobsahuje žádný znak. Pro prázdné slovo pak bude platit $a \cdot \omega = a = \omega \cdot a$.

Množina redukovaných slov s takto definovaným násobením se nazývá nekomutativní grupa s jednotkovým prvkem ω a rozumně definovanou inverzí. Tuto grupu označme S.

Naším dalším krokem bude rozklad grupy S na čtyři části. Definujme množinu všech redukovaných slov začínajícím na a jako množinu S_a, obdobně definujme množiny $S_{a^{-1}}$ začínající znakem a^{-1}, S_b začínající znakem b a v neposlední řadě $S_{b^{-1}}$ začínající znakem b^{-1}. Platí $S = S_a \cup S_{a^{-1}} \cup S_b \cup S_{b^{-1}}$.

Platí také analogický výraz $S = S_a \cup aS_{a^{-1}}$ a $S = S_b \cup S_{b^{-1}}$. O platnosti analogie se lze jednoduše přesvědčit. Množina $S_{a^{-1}}$ obsahuje všechna redukovaná slova, která začínají znakem a^{-1}. Pokud tuto množinu vynásobíme zleva znakem a, dostaneme všechna redukovaná slova začínající znaky a^{-1}, b, b^{-1}. Obdobně zdůvodníme pro případ s b. Po zanedbání množiny $\{\omega\}$ jsme rozložili grupu S na čtyři čtvrtiny. Pokud vynásobíme libovolnou čtvrtinu vhodným prvkem, získáme tři čtvrtiny grupy S. Toto zvláštní chování nazýváme paradoxní rozklad.



Obrázek 1 – Paradoxní rozklad

Nyní najdeme analogii volné grupy[15] v prostoru, kterou bychom v rovině nenalezli. Namísto znaku a uvažujme otočení kolem osy x o $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, namísto znaku a^{-1} otočení kolem osy x o $-\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, místo znaku b otočení kolem osy z o $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ a místo znaku b^{-1} otočení kolem osy z o $-\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. Prázdné slovo berme jako identitu.

Z důvodu existence spočetně mnoha redukovaných slov existuje na jednotkové sféře $S^2 \in \mathbb{R}^3$ pouze spočetně mnoho bodů zachovávajících se při rotaci. Takovouto množinu bodů budeme značit D. Mějme množinu $S^2 \setminus D$. Tato množina charakterizuje body, které se nacházejí na povrchu sféry a zároveň se nezachovávají při rotaci. Rozdělme množinu $S^2 \setminus D$ na čtyři části, z nichž pouhým přeskládáním uděláme dvě kopie $S^2 \setminus D$. Nyní se musíme odkázat na axiom výběru. Dle tohoto axiomu lze vybrat z každé orbity[16] dané grupy právě jednoho zástupce. Množinu všech zástupců značme A. Označme $S_a = S_a(A)$, $S_b = S_b(A)$. Pak také platí $S^2 \setminus D = S_a \cup S_b \cup S_{a^{-1}} \cup S_{b^{-1}} \cup S_\omega$. Analogicky $S^2 \setminus D = S_a \cup aS_{a^{-1}} = S_b \cup bS_{b^{-1}}$.

Množina S_a v sobě navíc zahrnuje všechna otočení okolo osy x o úhel $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. Množina $aS_{a^{-1}}$ zahrnuje všechna ostatní otočení, tedy otočení o -$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ kolem osy x a otočení kolem osy z o úhel $\pm\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Poslední problém tkví ve zbavení se množiny D (množina bodů zachovávající se při otočení) a jakým způsobem rozdělení povrchu koule zobecnit na celou kouli. Zaměřme se nejprve na druhou část problému. Pokud bod X ležel v S_a, pak zařadím do S_a i všechny vnitřní body, které leží na spojnici středu koule a bodu X. Neodborně řečeno, sféru „ztlustíme“.

V posledním kroku se musíme zbavit nepohodlné množiny D a středu koule. Zde nám pomůže pojem *stejná rozložitelnost*.

[15] Grupu G nazveme volnou, jestliže má (alespoň jednu) volnou bázi. [58]

[16] Nechť je daná permutace φ n-prvkové množiny M. Pro každé $a \in M$ nazveme posloupnost $a, \varphi(a), \varphi^2(a), \varphi^3(a), \ldots$ orbitou prvku a v permutaci φ. Množinu všech navzájem různých prvků této posloupnosti značíme O_i.

Věta 6.3. Dvě množiny A a B nazveme stejně rozložitelné, pokud existuje rozdělení A na konečně mnoho po dvou disjunktních částí $A_1, A_2, \dots A_n$ a shodnosti v prostoru $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ takové, že $B = \rho_1(A_1) \cup \rho_2(A_2) \dots \rho_n(A_n)$, přičemž části $\rho_i(A_i)$ jsou navzájem po dvou disjunktní. [52]

Věta 6.4.

(i) Kružnice a kružnice bez jednoho bodu jsou stejně rozložitelné.

(ii) Povrch koule a povrch koule bez spočetně mnoha bodů jsou stejně rozložitelné.

(iii) Koule a koule bez středu jsou stejně rozložitelné.

Věta 6.4. (i) nám říká, že kružnici lze přeskládat na kružnici bez jednoho bodu, v případě (ii) lze sféru přeskládat opět na sféru bez spočetně mnoha bodů a v případě (iii) lze kouli přeskládat na kouli bez středu.

Díky (i)-(iii) si stačí uvědomit fakt, že relace stejné rozložitelnosti je ekvivalencí. Problém přeskládání koule redukujeme na přeskládání množiny $S^2 \setminus D$, tedy sféry bez spočetně mnoha bodů, což jsme již vyřešili.

Je jasné, že Banachův-Tarského paradox nedává ve fyzikálním pojetí smysl. Bylo by však krásné bankovku v hodnotě 1 000 Kč rozstříhat na nekonečně mnoho kousků a následně seskládat dvě bankovky, každou v hodnotě 1 000 Kč.

Po vydání BT roku 1924 nastala kontroverze mezi matematiky. Studenti se chodili ptát, zda opravdu matematici umějí zdvojnásobit objem. V Illinois dokonce jeden občan požadoval zákon, který by výuku takových nesmyslů zakázal.

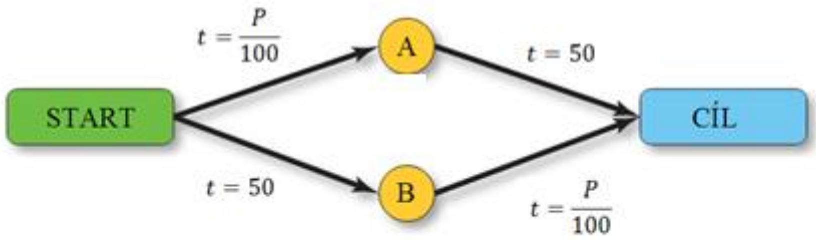
„Každý dobrý křesťan by se měl mít na pozoru před matematiky, kteří již po staletí pomáhají ďáblu zatemnit lidem ducha.“ [K]

Svatý Augustin, 390 n. l.

6.1.2 Braessův paradox

Steinberg a Zangwill našli roku 1983 nutné a postačující podmínky ke vzniku Braessova paradoxu (dále BP). Dostáváme se tedy k paradoxu, který není řešitelný pouze v matematické sféře, ale je také aplikovatelný v reálném životě. BP je připisován matematikovi Dietrichu Braessovi[17] a je založen na sobectví.

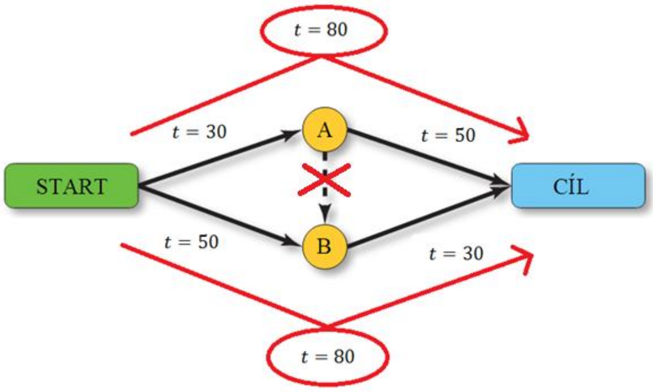
Mějme pohybující se objekty. Tyto objekty si bez domluvy mezi sebou volí cestu pro ně nejlepší. Přidání cesty, která má zlepšit rychlost toku, může paradoxně zhoršit celkový výkon.



Obrázek 2 – Braessův paradox

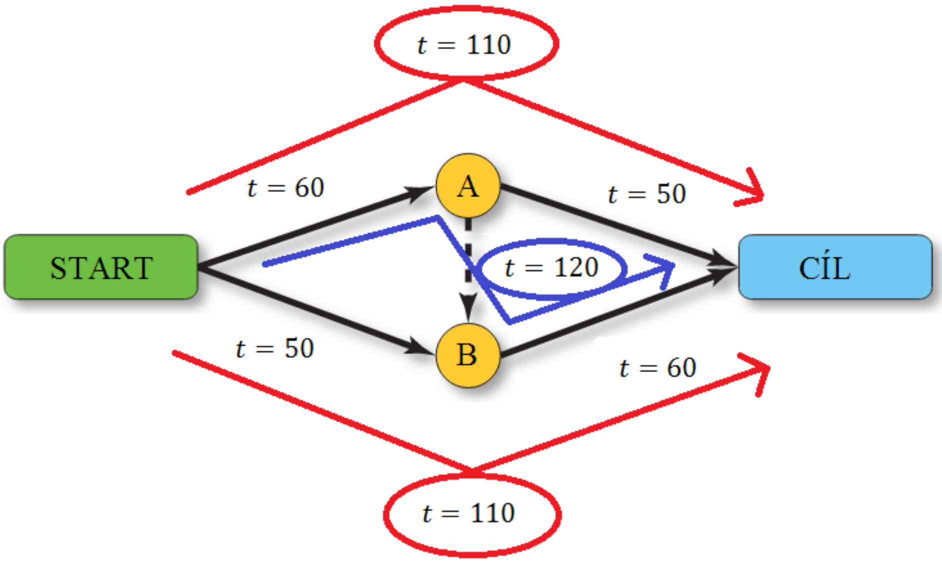
Předpokládejme silniční síť o celkovém počtu $P = 6\,000$ automobilů. Automobily se snaží cestovat ze startu do cíle. Cestovní čas bereme v minutách. Na prvním obrázku je možné využít pouze dvě cesty. (S-A-C a S-B-C). Čas strávený na trase S-A-C je $t_1 = \frac{A}{100} + 50$. Čas strávený na trase S-B-C je roven $t_2 = \frac{B}{100} + 50$. Pokud by nastala rovnováha počtu automobilů na daných trasách, tedy $A = B = 3000$, pak obě cesty trvají stejně dlouho, tedy $t = \frac{3000}{100} + 50 = 80$ minut.

[17] Dietrich Braess (16. ledna 1938, Hamburg) je německý matematik zabývající se numerickou matematikou. V roce 1964 získal doktorát na univerzitě v Hamburgu (teoretická jaderná fyzika). V roce 1968 působil na univerzitě v Münsteru, kde se stal později profesorem. Od konce roku 1970 byl profesorem na Ruhr-Universität Bochum v Bochumu. Je známý tzv. Braessovým paradoxem užívaným v dopravním plánování.



Obrázek 3 – Braessův paradox

Přidejme však do silniční sítě tunel, kterým cesta trvá zanedbatelný čas menší, než jedna minuta. V tomto případě řidiči, díky své sobeckosti, zvolí nejprve cestu S-A, která bude v nejhorším možném případě trvat $\frac{6\,000}{100} = 60$ minut, zatímco silnice S-B zabere vždy 50 minut. Řidič v místě A přejede tunelem do místa B a pokračuje do cíle s maximálním časem $\frac{6\,000}{100} = 60$ minut. Pokud každý řidič pojede stejnou trasou, pak celkový čas bude 120 minut. To je však horší výsledek, než původní délka cesty 80 minut. Žádný z řidičů navíc nemůže ovlivnit svou situaci. Původní trasy S-A-C a S-B-C tak nyní trvají 110 minut.



Obrázek 4 – Braessův paradox

6.1.2.1 *Příklady ze života*

V Soulu bylo urychlení dopravy ve městě viděno po odstranění dálnice jako součást projektu Cheonggyecheon, jenž je projektem 8,4 kilometru dlouhého moderního veřejného rekreačního parku v centru Soulu. Park vznikl na místě potoka, který byl vybudován v období velkého poválečného rozvoje. Projekt Cheonggyecheon stál 900 000 000 dolarů a původně přitahoval velkou kritiku veřejnosti. Po jeho otevření v roce 2005 se však stal mezi obyvateli a turisty velice populární.

Obrázek 5 - Projekt Cheonggyecheon

Ve Stuttgartu se po investicích do silniční sítě v roce 1969 situace nezlepšila. Zlepšení nastalo až po částečném uzavření nové silnice.

V roce 1990 byla uzavřena na Den Země 42. ulice v New Yorku a snížilo se tím přetížení v této oblasti. V New Yorku však tato ulice nebyla jedinou. Od května roku 2009 byly uzavřeny ulice 42. až 47. na Broadwayi a byla pozorována menší hustota dopravy v části města.

Návrhy nových cest by tak měly obsahovat nejen moderní vědecké a inženýrské standarty, ale musí taktéž počítat s plným pochopením lidského myšlení a přihlédnout k lidské vlastnosti – sobectví.

6.1.3 Simpsonův paradox

Simpsonův paradox je tzv. statistický paradox. O jeho objevení se postaral britský statistik Edward Hugh Simpson.[18] Princip paradoxu je založen na pozorování dvou subjektů. I když ve všech pozorováních je první subjekt úspěšnější, než druhý, v celkovém součtu se může stát, že úspěšnější bude druhý subjekt.

Příklad 6.1. Martin a Vendulka studují na dvou různých školách dva různé obory. Oba píší za semestr 2 testy. Martin měl v prvním případě úspěšnost 40 %, ve druhém 100 %. Vendulka měla v prvním případě úspěšnost 30 %, ve druhém 80 %.

	Martin	**Vendulka**
1. test	40 %	30 %
2. test	100 %	80 %

Tabulka 1 – Simpsonův paradox

Na první pohled se zdá, že úspěšnějším studentem je Martin. Nyní ale rozeberme každý test a porovnejme jeho bodové hodnocení.

	Martin	**Vendulka**
1. test	4/10	3/10
2. test	2/2	8/10
Celkem	6/12 (50 %)	11/20 (55 %)

Tabulka 2 – Simpsonův paradox

Jelikož Martin v prvním testu zodpověděl na 4 otázky z 10 a ve druhém na 2 otázky ze 2, je jeho úspěšnost 6 otázek z 12, tedy přesně 50 %. Vendulka sice byla procentuelně horší v obou testech, avšak v prvním testu zodpověděla na 3 otázky z 10, ve druhém testu na 8 otázek z 10. Její úspěšnost tak byla 11 otázek z 20, tedy 55 %. Z tohoto pohledu je úspěšnější Vendulka.

[18] Edward Hugh Simpson (1922) je britský statistik známý díky tzv. Simpsonovu paradoxu.

6.1.4 Lékařský paradox

Mějme pacienta, který má podezření, že je nemocný. Pacient absolvuje test na různé nemoci, který mu sdělí, že je skutečně nemocný. Ve skutečnosti ale může být pravděpodobnost, že nemoc má, mnohem menší, než že nemoc nemá.

Pacient, říkejme mu Tomáš, jde k doktorovi zjistit, zda má žloutenku, či ne. Podrobí se testu, který je pozitivní. Tento test má úspěšnost 99,9 %. Šance, že se test zmýlil, je 0,1 %. Test se tedy zdá být věrohodný. Jaká je však pravděpodobnost, že Tomáš skutečně má žloutenku?

- Test potvrdí 100 % případů, že nemoc má, pokud ji skutečně má.
- Pokud Tomáš nemoc nemá, v 99,9 % je test úspěšný. Pokud tedy nemoc nemá, tak v 0,1 % mu test řekne, že nemoc má.
- Pokud test řekne, že Tomáš nemoc nemá, tak ji určitě nemá.
- Pokud test řekne, že nemoc má, mohou nastat dvě situace. Buď je Tomáš nemocný, nebo zdravý.

Dalším faktorem ovlivňující pravděpodobnost nemoci je počet nemocných v populaci.

a) Velký počet nemocných

Mějme populaci *H*, kde 270 lidí z 9 000 má žloutenku, tzn. 3 % lidí je infikováno. Pokud test provedeme na vzorku 2 000 000 lidí, pak 60 000 lidí je infikovaných, zbytek je zdravý. Test má úspěšnost 99,9 %, tedy 0,1 % neúspěšnost. Test označí $1\,940\,000 \cdot 0{,}001 = 1\,940$ lidí za nemocné, přestože jsou zdraví. Celkově test označí $61\,940$ lidí, jako nemocné. Z tohoto množství je však nemocných pouze 60 000 lidí. Pravděpodobnost, že Tomáš je skutečně nemocný, je $\frac{60\,000}{61\,940} = 96{,}87$ %.

b) Malý počet nemocných

Nyní mějme populaci *M*, kde nemoc má pouze 0,02 %, tedy 1 z 5 000 obyvatel. Test provedeme na stejném vzorku 2 000 000 lidí.

Z 2 000 000 lidí je jich nemocných pouze 400, které test označil, že jsou nemocní a nemocní skutečně jsou. Z 1 999 600 lidí, kteří jsou zdraví, test označí 0,1 % jako nemocné, i když jsou zdraví, tzn. 1999,6 lidí. Test tedy označí 2399,6 lidí za nemocné. Ostatní jsou označeni za zdravé a zdravými skutečně jsou.

Z těchto lidí je však nemocných pouze 400. Pravděpodobnost, že Tomáš skutečně má nemoc, je $\frac{400}{2\,399{,}6} = 16{,}67\ \%$. I když test označil Tomáše, jako nemocného, má stále větší šanci, že je zdravý.

c) Jeden nemocný

Převeďme situaci do extrému. Mějme jednoho nemocného člověka z populace 2 000 000 lidí. Test, kterým se testuje, má úspěšnost 95 % v případě pozitivní odpovědi. To znamená, že test z 1 999 999 lidí označí 5 % za nemocné, i když jsou zdraví, tj. 99999,95 lidí. Skutečně je nemocný pouze jeden člověk. Pokud test označí Tomáše za nemocného, má šanci, že je nemocný, pouze $\frac{1}{100000{,}95} = 0{,}001\ \%$.

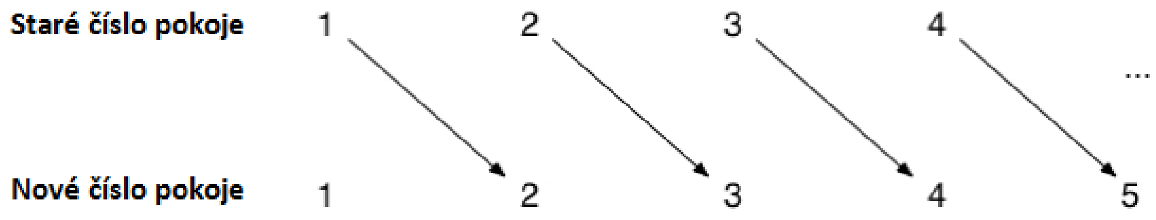
6.1.5 Hilbertův hotel

Paradox známý jako Hilbertův hotel byl formulován ve 20. letech 20. století německým matematikem Davidem Hilbertem[19]. Paradox popisuje podivuhodné vlastnosti nekonečna a ukazuje, že nekonečno je relativní a může být o různých velikostech.

Mějme běžný hotel se čtyřmi sty pokoji, které jsou však obsazeny. Turista dorazí do hotelu a chce se ubytovat, je mu však řečeno, že hotel je plně obsazený, a tak turista zklamaný odchází. Na tomto jevu není nic paradoxního. Turista se však rozhodne zkusit ještě jeden hotel, a to Hilbertův. Tento hotel má nekonečný počet pokojů a rovněž jsou všechny obsazeny. Turista však neodchází smutný, jelikož recepční pokoj turistovi dá. Jak je to možné?

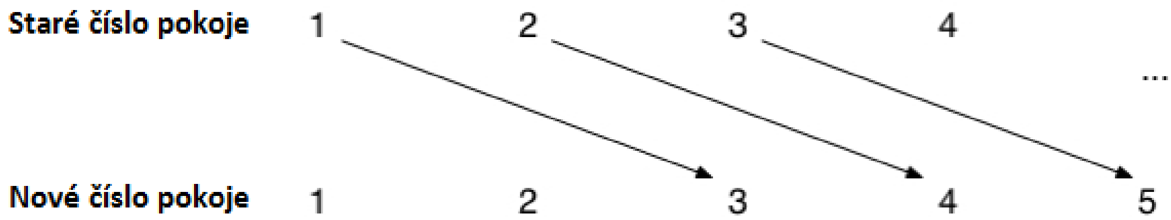
Mějme plně obsazený hotel. Pokud do plně obsazeného hotelu přijde turista, recepční pro něj uvolní místo tím, že přesune hosta z pokoje číslo 1 do pokoje číslo 2. Původní obyvatel pokoje číslo 2 přejde do pokoje číslo 3, host z pokoje n přejde do pokoje $n + 1$. Tímto krokem se uvolní pokoj číslo 1 a turista se může nastěhovat.

[19] David Hilbert (23. ledna 1862, Znamensk – 14. února 1943, Göttingen) byl německý matematik. Je považován za jednoho z nejvýznamnějších a nejvlivnějších matematiků 20. století. Vystudoval gymnázium a univerzitu v Královci a roce 1885 získal doktorát. V roce 1886 se stal docentem v Královci. V roce 1892 se stal mimořádným profesorem a v roce 1893 řádný profesorem. V roce 1895 plnil funkci vedoucího katedry na univerzitě v Göttingenu. Zde působil do roku 1930. V roce 1925 těžce onemocněl, ale ke své tvůrčí činnosti se už nevrátil. Měl celkem 69 doktorandů.



Obrázek 6 – Hilbertův hotel (n+1)

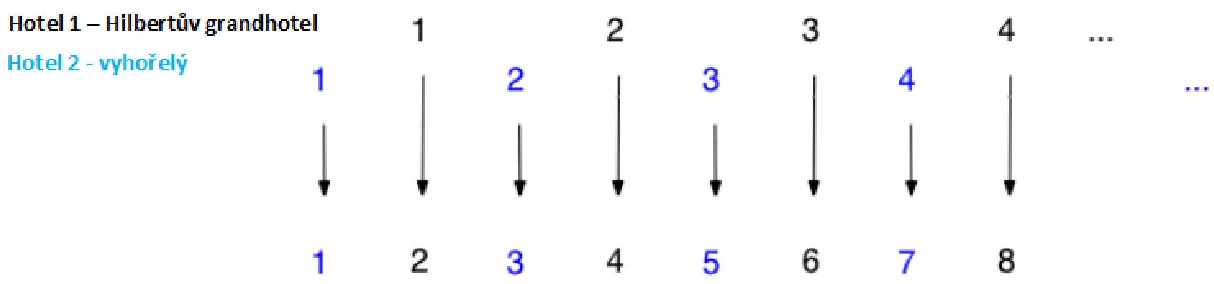
Nyní přijdou do hotelu dva páry. Jak recepční tento problém vyřeší, aniž by vyhazoval současné hosty z hotelu? Poprosí hosta z pokoje 1, aby se přesunul do pokoje 3. Hosta z pokoje 2 do pokoje 4 a hosta z pokoje n do pokoje $n + 2$. Všichni jsou ubytováni a recepční nemusí nikoho vyhazovat.



Obrázek 7 - Hilbertův hotel (n+2)

Ve městě, kde sídlí Hilbertův hotel, sídlí ještě jeden hotel takového typu. Stane se ale katastrofa a tento hotel shoří. Hosté jsou zachráněni, avšak nemají kde bydlet. Majitel shořelého hotelu volá do druhého hotelu, zda může poslat nekonečně mnoho hostů k ubytování. Majitel Hilbertova hotel souhlasí. Jak však ubytovat nekonečně mnoho hostů do plně obsazeného hotelu?

Recepční požádá hosty hotelu, aby se přemístili do pokojů se sudými čísly. Jedná se o pokoje s číslem dvakrát větším, než jejich současný pokoj. Tím je zajištěna neobsazenost pokojů s lichými čísly. Tedy host z pokoje číslo 1 přejde do pokoje číslo 2, host z pokoje číslo 2 přejde do pokoje číslo 4, host z čísla n přejde do pokoje číslo $2n$ a tak dále. Recepční má uvolněny pokoje s lichými čísly a může ubytovat nekonečný zástup hostů z vyhořelého hotelu. Ty ubytuje do pokojů s lichými čísly. Obecně platí, že host, který byl ve vyhořelém hotelu ubytován v pokoji n, je nyní ubytován v pokoji $2n - 1$.



Obrázek 8 - Hilbertův hotel (2n-1)

Přejděme nyní do ještě větší absurdity. Představme si město, které má pro každé celé číslo jednu verzi Hilbertova hotelu. Na město přijde bouře a všechny hotely jsou spáleny. Naštěstí je v nedalekém městě postaven zbrusu nový Hilbertův hotel. Je možné nastěhovat hosty ze zničených hotelů do zbrusu nového?

Způsob samozřejmě existuje. Recepční na hotelu začne rozřazovat nové hosty podle tohoto algoritmu:

$$\begin{array}{c} Osoba\ z\ hotelu\ m \\ Osoba\ z\ pokoje\ n \end{array} \rightarrow pokoj\ 2^n \cdot 3^m$$

Mějme například hosta, který bydlel v hotelu 5 a na pokoji 4. V novém hotelu bude bydlet na pokoji $2^4 \cdot 3^5 = 3888$.

Tento algoritmus umožňuje, aby každý host měl svůj vlastní pokoj a žádní dva hosté nebyli přiděleni do téhož pokoje. Je to zaručeno jedinečností rozkladu na prvočísla. Tento algoritmus také ponechává mnoho pokojů volných, například pokoje 1,5,7,10,11 a mnoho dalších. Na následujícím diagramu lze vidět, co se děje při přiřazování hostů z jednotlivých hotelů do nových pokojů.

Hotel # / Pokoj #	1	2	3	4
1	6	18	54	162
2	12	36	108	324
3	24	72	216	648
4	48	144	432	1296

Obrázek 9 - Hilbertův hotel ($2^n \cdot 3^m$)

Paradox Hilbertova hotelu lze pochopit na základě použití Cantorovy teorie nekonečných čísel. V běžném (konečném) hotelu s více než jedním pokojem je množství pokojů s lichými čísly nižší, než celkový počet pokojů. V Hilbertově hotelu však počet pokojů s lichými čísly není nižší, než celkový počet pokojů. Platí totiž, že kardinální číslo podmnožiny obsahující pokoje s lichým číslem je stejné, jako kardinální číslo množiny všech pokojů. Pro spočetné množiny (množiny se stejným kardinálním číslem, jako čísla přirozená), je toto kardinální číslo $\aleph_0$.[20]

Množina o nekonečně mnoha prvcích nemůže být nikdy zcela zaplněna a vždy lze do ní přidávat i po celých nekonečnech.

[20] Cantor ukázal svou diagonální metodou, že z každé množiny lze přirozeným způsobem sestrojit jinou (množinu všech jejích podmnožin), která má mohutnost opět větší. Vznikne tak nekonečná škála nekonečných mohutností, kde jejich velikost je vyjádřena kardinálním číslem a jejich uspořádání číslem ordinálním. [59]

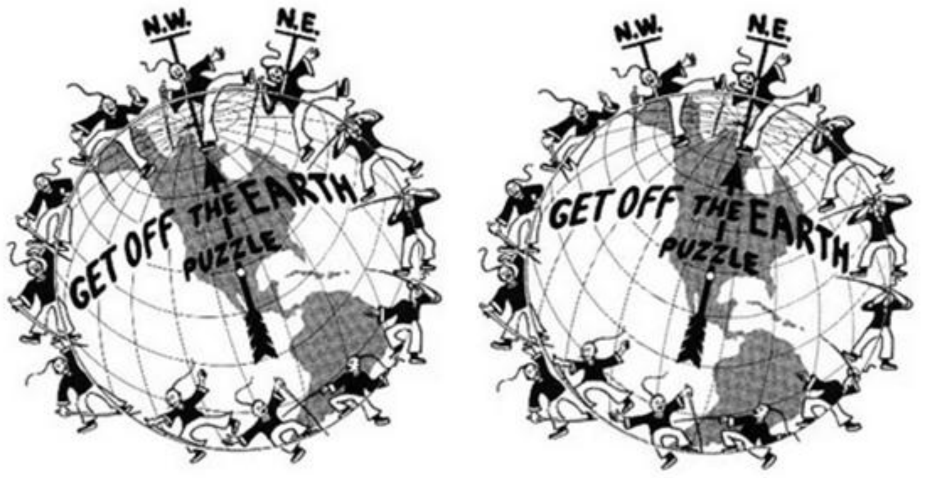
6.2 TYP II. – VĚROHODNÉ TVRZENÍ, KTERÉ NEPLATÍ

Paradoxy tohoto typu bývají spíše podvrhy, než složité matematické důkazy. Tímto typem paradoxů se zabýval zejména americký šachista, šachový skladatel a tvůrce různých hlavolamů a matematických hříček Samuel Loyd[21].

Následující dva příklady jsou na první pohled rozdílné, jsou však založeny na témže triku. U tohoto typu paradoxů jde zejména o vizuální trik a na první pohled nedůležité detaily obrázků.

6.2.1 GET OFF THE EARTH puzzle (Samuel Loyd)

Samuel Loyd si tyto puzzle nechal patentovat roku 1896 a prodal jich za celý život více než 10 miliónů kusů. Tento hlavolam tak patří k nejpopulárnějším hlavolamům všech dob.

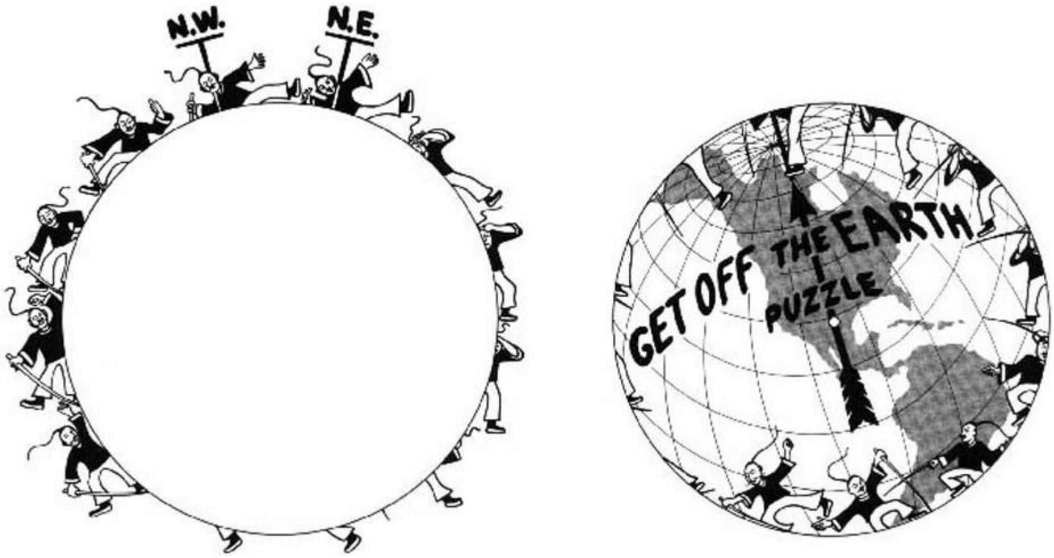


Obrázek 10 - GET OFF THE EARTH puzzle

Puzzle ukazují čínské bojovníky na dvou kruhových kartonech, z nichž vnitřní kruh je pohyblivý a vnější statický. Na obou kruzích se nachází některá z částí každého bojovníka (nohy, ruce, šavle, hlavy).

[21] Samuel Loyd (30. ledna 1841, Filadelfie – 11. dubna 1911, New York) byl americký tvůrce hlavolamů, šachista a šachový skladatel. V USA patřil k silným šachistům. V roce 1903 vyhrál 1. cenu Checkmate, kdy dokázal zahrát mat na 3 tahy.

Při otáčení kruhu každý z dvanácti bojovníků předá část svého těla svému sousedovi. Každý bojovník dostane méně, než dává, a tyto přebytečné kousky tvoří nového, třináctého bojovníka.



Obrázek 11 - GET OFF THE EARTH puzzle

6.2.2 Objevující se skřítek

Obrázek obsahuje celkem čtrnáct skřítků. Kresbu rozdělíme na tři části. Po přesunutí horních dvou částí se objeví patnáctý skřítek. Po opětovném přesunutí zmizí. Jak je to možné?

Obrázek 12 – Objevující se skřítek

Pro lepší představivost je dobré se podívat na následující obrázek. Na první pohled pozorovatele nenapadne, že chybějící část kolene prvního skřítka může mít za následek vznik nového skřítka. Každý z původních čtrnácti skřítků předá některou část svého těla následujícímu. Každý skřítek dostane méně, než dává. Právě tyto přebytečné kousky vytvoří nového skřítka.

Obrázek 13 – Objevující se skřítek

6.3 TYP III. – TVRZENÍ VEDOUCÍ KE SPORNÉMU ZÁVĚRU

Dostáváme se k poslednímu typu paradoxů, kde se v tvrzeních dostáváme ke spornému závěru. V této podkapitole najdeme paradoxy, které měly za následek pád Cantorovy teorie množin.

6.3.1 Cantorův paradox

G. Cantor narazil roku 1899 na rozpor týkající se mohutnosti „množiny" všech množin. Definujme pojem „množina" v pojetí Cantora.

Definice 6.5 Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů m našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku M. [3]

Věta 6.5. (Cantorova věta): Každá množina A má menší mohutnost než její potenční množina $P(A)$. [2]

Důkaz 6.2 Cantorova věta říká, že pro libovolnou množinu m platí, že její mohutnost je menší, než mohutnost její potenční množiny $P(m)$. Platí tedy: $|m| < |P(m)|$. Nemůže zde tedy existovat prosté zobrazení $P(m)$ do m. Důkaz Cantorovy věty provedeme ve dvou fázích.

1. Mějme prvek $x \in m$, potom však existuje i jednoprvková množina $\{x\} \in M$. Z toho jasně plyne, že $|m| \leq |P(m)|$.

2. Druhou část důkazu provedeme sporem. Předpokládejme, že mohutnost množiny m je rovna mohutnosti své potenční množiny: $|m| = |P(m)|$. Pak ovšem existuje prosté zobrazení $f: m \to P(m)$. Definujme nyní množinu $D = \{x \in m;\ x \notin f(x)\}$. Platí ale také, že $D \in P(m)$ a vezmeme-li v úvahu vlastnosti funkce f, která je prostá, pak existuje právě jedno $d \in m$ takové, pro které platí, že $D = f(d)$. Otázkou nyní zůstává, zda $d \in D$ nebo naopak $d \notin D$.

Pokud řekneme, že $d \in D$, pak to však znamená, že $d \notin f(d) = D$. To je spor.

Pokud $d \notin D$, pak $d \in f(d) = D$. To je spor.

■

Uvažujme nyní identické zobrazení. Pro toto zobrazení existuje prosté zobrazení z $P(m)$ do m. Mějme množinu $m = \{3,4\}$. Pak potenční množina bude vypadat následovně:

$P(m) = \{\emptyset; \{3\}; \{4\}; \{3,4\}\}$. Je-li I identické zobrazení definované na množině $P(m)$, pak potenční množina potenční množiny se zobrazí opět sama do sebe. Oborem hodnot je tedy $P(m)$.

Řešením tohoto paradoxu je axiomatická teorie množin. V axiomatické teorii množin se již žádným způsobem nedá provést konstrukce množiny m. Platí, že soubor všech množin již není množina, ale vlastní třída. O potenční množině tedy nemá smysl mluvit. Cantorův paradox tak slouží jako důkaz toho, že v dnešní axiomatické teorii množin nemůže být libovolná třída množinou, ale je vlastní třídou.

6.3.2 Russellův paradox

Bertrand Russell v roce 1902 způsobil zemětřesení v tehdejší teorii množin. Do té doby se objevovaly paradoxy, jako paradox Buralli-Fortiho a paradox Cantorův. Tyto paradoxy předpokládaly s pozdějším odstraněním za pomoci zpestření důkazů některých vět o ordinálních a kardinálních číslech. Výjimečnost Russellova paradoxu však byla v nalezení sporu v teorii množin za pomocí nejelementárnějších prostředků. Jádro sporu se nachází v následující úvaze: je-li soubor všech objektů, které mají určitou vlastnost, množina, uvažujme množinu všech množin, které nejsou obsaženy samy v sobě jako prvek. [1]

Důkaz 6.3. Definujme si množinu $x = \{y : y \notin y\}$. Tento zápis nám říká, že množina x je množina, která obsahuje všechny množiny, které mají tu vlastnost, že neobsahují samy sebe. Nastává otázka, zda množina x je sama svým prvkem či ne. Obě odpovědi nás dovedou ke sporu s definicí množiny x. Rozeberme si nyní dva případy, které mohou nastat:

1) Pokud platí, že x je prvkem x (píšeme $x \in x$), pak však x musí mít tu vlastnost, která definuje prvky množiny x. To tedy znamená, že x nemůže být prvkem x (píšeme $x \notin x$). To je spor, jelikož platí následující tvrzení: $x \in x \Rightarrow x \notin x$.

2) Pokud platí, že x není prvkem x (píšeme $x \notin x$), pak však x musí mít tu vlastnost, která určuje prvky množiny x. To tedy znamená, že x musí být prvkem x (píšeme $x \in x$). To je spor, jelikož platí následující tvrzení: $x \notin x \Rightarrow x \in x$.

Russellův paradox nám říká, že v principu Cantorovy teorie množin nelze sestrojit množinu všech množin, jelikož rozborem jsme zjistili, že platí následující vztah: $x \in x \Leftrightarrow x \notin x$.

■

Intuitivně zřejmými základními principy začleněnými do Cantorovy teorie množin bylo otřeseno a tento zvrat vedl k přehodnocení názorů na dosavadní teorii množin. Brzy po Russellově paradoxu se začaly objevovat další antinomie, jako např. Richardův paradox.

Tento paradox pomohla vyřešit, dnes nejčastěji užívaná, Zermelova-Fraenkelova teorie množin. Russellově paradoxu se vyhýbá pomocí axiomu regularity. Tento axiom zakazuje množiny, které obsahují samy sebe.

Russellův paradox byl také zpopularizován pro širší veřejnost jako *Paradox holiče.*

„V jisté obci vydá starosta nařízení, podle kterého musí místní holič holit právě ty muže, kteří se neholí sami. Má se holič holit sám?“

1. Pokud se holič holí sám, tak se holit nemůže, jelikož holič holí pouze ty muže, kteří se sami neholí.
2. Pokud se holič neholí sám, tak se holit musí, jelikož holič holí právě ty muže, kteří se sami neholí.

Dalo by se říci, že takový holič ve městě neexistuje. V matematice však nelze nepracovat s množinou, která splňuje definici, jen proto, že vede ke spornému závěru. Odmítnutí takové množiny znamená, že příslušná definice je nevyhovující.

6.3.3 Petrohradský paradox

V Petrohradu je kasino, které nabízí hru *„Hod mincí“*. Pravidla jsou jednoduchá. Hráč vstoupí do hry a obsluha začne házet mincí. Pokud padne panna, hra končí a výhra je rovna 1 rublu. Pokud padne orel, hra pokračuje. Jestliže ve druhém kole padne panna, hra končí a výhra je rovna 2 rublům. Pokud padne orel, hra pokračuje. Po zobecnění můžeme vyhrát v k-tém kole, pokud padne panna, 2^{k-1} rublům. Nyní však nastává otázka, jaké nastavit férové vstupné do hry.

Aby bylo vstupné férové, mělo by se odvíjet od očekávané výhry. V průměru můžeme vyhrát 2 rubly[22], tedy vstupné by mělo být o něco vyšší, aby kasino vydělalo. V následující tabulce jsou rozepsány možné výhry a šance na výhru.

Výhra	1	2	4	8	16	32	…
Šance	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	…

Tabulka 3 – Petrohradský paradox

Očekávaná hodnota je střední hodnota, kterou vypočteme následovně:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \frac{1}{32} \cdot 16 + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Zde dojdeme k paradoxnímu výsledku. Očekávaná střední hodnota výhry je rovna nekonečně mnoha rublům (idealizovaný případ). To ale znamená, že i vstup by musel být rovný nekonečně mnoha rublům, což je nesmysl.

Je samozřejmě jasné, že nelze hrát donekonečna a vyhrát nekonečně velkou sumu i za předpokladu zavedení maximálního počtu hodů mincí. Pokud bychom zavedli strop při 31 hodech, vyhráli bychom 2^{30} rublů, což je něco přes miliardu. Kasino s takovou finanční jistinou s největší pravděpodobností ani neexistuje.

Je však naivní si myslet, že by racionální člověk zaplatil nekonečnou sumu. Dokonce i lidé se schopností riskovat zaplatí jen konečnou sumu a to ne větší, než dvoucifernou. Většina lidí dokonce ani jednocifernou. Proč tomu tak je? Střední hodnota výhry je zkreslena vidinou astronomické výhry v mizivém počtu případů. Lidé racionálně přemýšlející tento fakt dobře vycítí a nejsou ochotni přistoupit na cenu ve výši střední hodnoty výhry bez ohledu na subjektivní postoj k riziku.

[22] Průměrná hodnota 2 rubly (přesně 1,83 rublu) byla zjištěna provedením sta náhodných pokusů hodu mincí, a následném provedení váženého průměru.

6.3.4 Richardův paradox

Richardův paradox, ležící na rozhraní paradoxů naivní teorie množin a logických paradoxů, byl poprvé formulován francouzským matematikem Julem Richardsem[23] v roce 1905.

Podstata paradoxu tkví v myšlence, že pro všechny možné vlastnosti přirozených čísel, které jsou definovatelné v nějakém přirozeném jazyce (čeština, němčina, ruština…) je spočetně mnoho. To znamená, že lze takovouto vlastnost očíslovat přirozenými čísly. Označme vlastnost $B =$ "*Být přirozeným číslem, které nemá vlastnost, jejímž je číslem v daném očíslování vlastností*". Takováto vlastnost je také vlastností přirozených čísel. To znamená, že v našem očíslování je jí přiřazeno nějaké číslo n. Pak se však dostáváme do sporu, jelikož pokud platí, že "n *má vlastnost* B" $\Longrightarrow$ "n *nemá vlastnost* B". Toto tvrzení platí i naopak, tedy "n *má vlastnost* B" $\Longleftarrow$ "n *nemá vlastnost* B". Řešením tohoto paradoxu je rozlišování jazyka na formální a tzv. metajazyk. [47]

Uveďme si dva protipříklady, jak lze pomocí slovních útvarů a vět definovat číslo:

1) „První dva Keplerovy zákony byly vydány v díle *Astronomie nova* roku…“ definuje číslo **1609.**
2) „První Keplerův zákon říká, že planety obíhají po eliptických drahách, v jejichž společném ohnisku se nachází Slunce.“ Tento výraz nedefinuje číslo.

„Mějme nyní přirozené číslo n. Toto číslo nelze definovat méně, než dvaceti slovy českého jazyka.“ (15 slov)

Řekněme, že český jazyk má $2\,000\,000$ slov. Určitě některá z nich tvoří definici čísel. Těchto slov je konečně mnoho. Přirozených čísel je však nekonečně. Pak tedy existuje takové číslo, pro které platí $15 < 20$. Zde je však spor, jelikož číslo, o kterém věta mluví, nesplňuje podmínku.

Mějme lexikograficky uspořádaná tvrzení o číslech:

- „být sudé“

[23] Jules Richards (12. srpna 1862, Blet – 14. října 1956, Châteauroux) byl francouzský matematik. Ve věku 39 let získal doktorát na univerzitě v Paříži. Pracoval zejména na základech matematiky a geometrie, které se týkaly Hilberta, von Staudta a Meraye.

- „být liché“
- „být prvočíslo“
- …

Definice 6.6. Přirozené číslo n nazveme Richardovské právě tehdy, když n nemá vlastnost, kterou formuluje tvrzení na místě n v daném uspořádání. [1]

Mějme definováno Richardovské číslo. Toto číslo se nachází v našem uspořádání a má nějaké pořadové číslo X.

- Číslo X je Richardovské[24] $\Longrightarrow$ nemá vlastnost, kterou formuluje tvrzení na místě X. Nemá tedy vlastnost Richardovského čísla a také není Richardovským číslem.
- Číslo X není Richardovské $\Longrightarrow$ má vlastnost, kterou formuluje tvrzení na místě X. Má tedy vlastnost Richardovského čísla a také je Richardovským číslem.

Nastává však spor, kdy číslo X je a zároveň není Richardovským.

Spor Richardova paradoxu tkví ve smíšení matematického tvrzení $(3 \cdot 2 = 6)$ a tvrzení o matematice $("3 \cdot 2 = 6"$ je matematická rovnice) Řešení tohoto paradoxu vychází z rozdělení obecného jazyka na jazyk formální a metajazyk. Pokud se vyhneme tomuto prolínání pojmů, Richardův paradox nemůže nastat.

6.3.4.1 Gödelovo očíslování

Kurt Gödel[25] přišel s trikem, jak mluvit o číslech a zároveň nemluvit *mimo* čísla. Gödelovo očíslování přiřadí Gödelova čísla každému tvrzení tak, že lze zpětně dekódovat přesný tvar formule.

- Prvočísly $p_1, p_2, \ldots$ se očíslují místa výskytu (pořadí) symbolů
- Každý symbol dostane po řadě jedinečné číslo $1,2,3, \ldots$
- Nachází-li se na místě p_i symbol, pak vytvoříme tzv. Gödelův koeficient p_i^s.
- Gödelovo číslo formule $g(F)$ je součin všech Gödelových koeficientů.

---

[24] číslo je Richardovské právě tehdy, když platí: „Holič stříhá ty, co se sami nestřihají.“ (Russellův paradox)
[25] Kurt Gödel (28. dubna 1906, Brno – 14. ledna 1978, Princeton (USA)) byl matematik rakouského původu, který se stal jedním z nejvýznamnějších logiků všech dob. V roce 1931 byl zásadní objev jeho kariéry. Objevil dvě věty pojednávající o neúplnosti axiomatických formálních systémů s aritmetikou“. Tyto věty ukončily úsilí matematiků plně formalizovat matematiku. Představil se také v oblasti fyziky, kde obohatil Einsteinovu teorii relativity. V roce 1949 formuloval kosmologický model vesmíru s „časovými smyčkami“, které umožňují návrat do minulosti. V roce 1952 vydal článek pojednávající širokou třídu rotujících a rozpínajících se vesmírů.

- Z čísla $g(F)$ lze jednoznačně zrekonstruovat formuli F, jelikož rozklad čísla $g(F)$ na prvočísla je jednoznačný.

Příklad 6.2. Mějme formuli $(\forall x, y)(x \cdot y = y \cdot x)$, která obsahuje 15 znaků $\Longrightarrow$ 15 prvočísel.

$$\text{Symboly:} \begin{cases} 1. & (\\ 2. & \forall \\ 3. & x \\ 4. & , \\ 5. & y \\ 6. &) \\ 7. & \cdot \\ 8. & = \end{cases}$$

$$Gödelovo\ číslo = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^5 \cdot 13^6 \cdot 17^1 \cdot 19^3 \cdot 23^7 \cdot 29^5 \cdot 31^8 \cdot 37^5 \cdot 41^7 \cdot 43^3 \cdot 47^5$$

Výsledné Gödelovo číslo je extrémně vysoké číslo a pro účely této práce je nepodstatné jeho přesné znění. Pokud bychom Gödelovo číslo rozložili na prvočísla, dostali bychom možnost zrekonstruovat formuli, a to díky jednoznačnosti rozkladu na prvočísla.

6.3.5 Buralli-Fortiho paradox

Burali-Fortiho paradox (dále jen BFP) byl publikován C. Burali-Fortim (1861 – 1931) roku 1897 a i přes to, že se předpokládalo, že tento paradox bude odstraněn zpřesněním důkazů některých vět o ordinálních číslech, vedl ke krizi v Cantorově teorii množin a následnému nahrazení axiomatickým systémem.

Považujme každé ordinální číslo za množinu, pro kterou je splněna podmínka dobrého uspořádání relace $\in$ a každý její prvek je zároveň její podmnožinou. Uvažujme „množinu“ všech ordinálních čísel On. Tato „množina“ obsahuje všechna ordinální čísla. Je zde splněna věta ostrého dobrého uspořádání relací $\in$ a každý svůj prvek, tedy ordinální číslo, obsahuje i jako podmnožinu. Zde však nastává problém, jelikož „množina” On je také ordinální číslo, které je větší, než všechna ostatní ordinální čísla a tedy i než ona sama a to je spor.

V předešlém odstavci je uvedena „množina“ všech ordinálních čísel On. To je však ve sporu s lemmou 4.1, jelikož On není množinou, ale tranzitivní třídou. O třídě všech ordinálních čísel On můžeme dokonce říci, že se jedná o vlastní třídu, která je tranzitivní a dobře ostře uspořádanou relací $\in$. Důvodem, proč bylo uváděno, že On je množinou, je fakt, že v době, kdy byla v platnosti Cantorova teorie množin, neexistoval pojem třída. V době publikování BFP, tedy v roce 1897, nebyl tento paradox brán vážně a jeho význam byl zlehčován z důvodu, že se jedná o příliš velkou množinu a na rozumně velkých množinách k paradoxu dojít nemůže. Až později, zejména po paradoxech Russella a Cantora, vedl tento výsledek k přepracování teorie množin a zavedení axiomatické teorie.

ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo vysvětlení některých paradoxů, které se objevovaly v původní, Cantorově teorii množin. Dále paradoxů, které jsou zajímavé z hlediska využitelnosti v běžném životě.

Snažil jsem se práci psát v popularizační formě a ukázat, že matematika není jen světem čísel a vzorců, ale je široce využívána v praktickém životě. V tomto směru bych chtěl zejména vyzdvihnout Braessův paradox, neboť je jeho využití v lidském životě nezanedbatelné. Z vlastního pozorování jsem zjistil, že málokterého člověka by napadlo pro zrychlení dopravy uzavřít silnici, a přeci je to možné řešení v některých případech dopravní infrastruktury.

Naopak Banachův-Tarského paradox je příkladem nutnosti rozlišování matematického světa od světa fyzikálního a svým absurdním výsledkem se stává, dle mého názoru, nejzajímavějším z hlediska možností matematiky. Už jen samotné následky po zveřejnění paradoxu, kdy byli matematici bráni za čaroděje, kteří umí zdvojnásobit objem, jsou pro mě fascinující.

Doufám, že se moje bakalářská práce bude líbit a pomůže k popularizaci matematiky.

RESUMÉ

Main point of my bachelor work was made specialized text, which deal with Paradox of set theory. This work should popularize mathematics to wider community and show the useability in daily life. The work is devided to 6 chapters. The first chapter is focused on historical progression of mathematics. From the second to the fifth chapter the topic is mainly focused on Zermelo–Fraenkel set theory, classes, cardinal and ordinal numbers. The last chapter deals with paradoxes of set theory.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] BELCAR, Bohuslav a Petr ŠTĚPÁNEK. *Teorie množin*. 1. vyd. Praha: Academia, 1986. ISBN 21-022-86

[2] VOPĚNKA, Petr. *Úvod do klasické teorie množin*. 1. vyd. Plzeň: Nakladatelství Fragment, 2011. ISBN 978-80-7043-986-9.

[3] PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: Od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky*. 1. vyd. Praha: Dokořán, 2012. ISBN 978-80-257-0705-0.

[4] BURIAN, Květoslav. *Kapitoly z teorie množin*. 1. vyd. Ostrava: Pedagogická fakulta v Ostravě, 1985.

[5] FUCHS, Eduard. *Teorie množin pro učitele*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 1999. ISBN 80-210-2201-9.

[6] ŠALÁT, Tibor a Jaroslav SMÍTAL. *Teória množín*. 1. vyd. Praha: Alfa, 1986. ISBN 63-568-86.

[7] ČADA, Roman, Tomáš KAISER, Zdeněk RYJÁČEK. KATEDRA MATEMATIKY FAV, Západočeská univerzita v Plzni. *Diskrétní matematika*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2004, 170 s. ISBN 80-708-2939-7.

[8] DRÁBEK. *Kategorie nekonečna v matematice: faktické a potenciální nekonečno*. 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň, 2004, 81 s. ISBN 80-702-0138-X.

[9] MEDUNOVÁ, Pavlína a Jaroslav DRÁBEK. *Kategorie nekonečna v matematice*. 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň, 2004, 81 s. ISBN 80-702-0138-X.

[10] Zermelo-Frankelova teorie množin. In: *Wikipedia* [online]. 2013. vyd. 2013 [cit. 2013-9-27]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkelova_teorie_mno%C5%BEin#Sch.C3.A9ma_axiom.C5.AF_vyd.C4.9Blen.C3.AD

[11] Mohutnost množiny. In: *Matematické forum* [online]. 2009, [cit. 2013-10-10]. Dostupné z: http://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=10594

[12] Cantorův paradox. In: *Wikipedia* [online]. 2013, [cit. 2013-11-15]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Cantor%C5%AFv_paradox

[13] Cantorův paradox. In: *Matematické forum* [online]. 2013, [cit. 2013-11-16]. Dostupné z: http://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=63752

[14] Třídy. In: *Wikipedia* [online]. 2013, 3.7.2013 [cit. 2013-11-18]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/T%C5%99%C3%ADda_(matematika)

[15] MELKA, Jakub. Teorie množin. In: MELKA, Jakub. *Matematicko-fyzikální fakulta* [online]. 18. 2. 2007. 2007 [cit. 2013-12-10]. Dostupné z: http://mff.lokiware.info/TeorieMnozin/files?get=ail063.pdf

[16] Russellův paradox. *Wikipedia* [online]. 2013. vyd. 2013 [cit. 2013-12-12]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Russell%C5%AFv_paradox

[17] Bernard Bolzano. In: KEJKULA, Martin. *VŠE Praha* [online]. 2002. vyd. 2002 [cit. 2013-9-14]. Dostupné z: http://nb.vse.cz/kfil/elogos/science/kejkula1-02.htm

[18] MATOUŠEK, Tomáš. MATEMATICKÝ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ. *Teorie množin* [online]. 2008 [cit. 2014-01-11]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/library/TeorieMnozinTM/TeorieMnozinTM.pdf

[19] Vlastní třída. *Wikipedia* [online]. 2013, 31.3.2013 [cit. 2013-08-11]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Vlastn%C3%AD_t%C5%99%C3%ADda

[20] David Hilbert. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-10-11]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

[21] Ordinální čísla. *Katerdra matematiky PF UJEP* [online]. 2013 [cit. 2013-09-10]. Dostupné z: http://www.pf.ujep.cz/files/KMA_studium_AsD2material03.pdf

[22] Doc. RnDr. CSc. MAREŠ, Jan. Paradoxy teorie množin. *FJFI ČVUT Praha* [online]. 2013 [cit. 2013-12-14]. Dostupné z: http://people.fjfi.cvut.cz/maresjan/data/temno.pdf

[23] Ordinální čísla. *Wikipedia* [online]. 10.2.2014 [cit. 2014-02-13]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Ordin%C3%A1ln%C3%AD_%C4%8D%C3%ADslo

[24] Ordinální aritmetika. *Wikipedia* [online]. 9.3.2013 [cit. 2013-11-15]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Ordin%C3%A1ln%C3%AD_aritmetika

[25] ROSICKÝ, Jiří. Teorie množin. *Masarykova univerzita Brno* [online]. 2014 [cit. 2013-12-11]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~rosicky/lectures/TMnn.pdf

[26] PICK, Luboš. Paradoxy teorie množin. *KMA MFF UK Praha* [online]. 29.1.2013 [cit. 2013-12-15]. Dostupné z:

http://www.amathnet.cz/Portals/0/workshopy/Horni%20Becva%202013/Prednasky/Pick.pdf

[27] SLÁVIK, Alexandr "Olin". Banach-Tarského paradox. *Matematický korespondenční seminář* [online]. 2013 [cit. 2013-10-12]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/library/BanachTarskehoParadoxAOS/BanachTarskehoParadoxAOS.pdf

[28] VOKŘÍNEK, Lukáš. Banach-Tarského paradox. *Masarykova univerzita Brno* [online]. 2013 [cit. 2013-10-11]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~koren/BanachTarski.pdf

[29] RŮŽIČKA, Pavel. Existence volné grupy. *Katedra didaktiky matematiky MFF UK* [online]. 2013 [cit. 2013-10-10]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~ruzicka/ctg/kapitola3.pdf

[30] Simpsonův paradox. *Matematika polopatě* [online]. 2013 [cit. 2013-9-12]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/simpsonuv-paradox

[31] Edward Hugh Simpson. *Wikipedia.de* [online]. 3.4.2013 [cit. 2014-1-11]. Dostupné z: http://de.wikipedia.org/wiki/Edward_Hugh_Simpson

[32] Matematické a logické paradoxy. *Gymnázium Cheb* [online]. 2013 [cit. 2013-10-13]. Dostupné z: http://absolventi.gymcheb.cz/2008/sttezka/cssmatika/hotel.html

[33] YORGEY, Brent A. Ordinals. *Computer & Information Science* [online]. 26.1.2009 [cit. 2013-12-03]. Dostupné z: http://www.cis.upenn.edu/~byorgey/settheory/03-ordinals-induction.pdf

[34] Burali-Forti Paradox. *Proofwiki* [online]. 6.4.2013 [cit. 2013-11-13]. Dostupné z: http://www.proofwiki.org/wiki/Burali-Forti_Paradox

[35] Petrohradský paradox. *Matematika polopatě* [online]. 2013 [cit. 2013-11-02]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/petrohradsky-paradox

[36] Lékařský paradox. *Matematika polopatě* [online]. 2013 [cit. 2013-11-02]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/false-positive

[37] Sam Loyd. *Wikipedia* [online]. 21.3.2013 [cit. 2013-10-13]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Sam_Loyd

[38] Braessův paradox. *Wikipedia* [online]. 6.4.2013 [cit. 2013-11-13]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Braess%C5%AFv_paradox

[39] Funkce alef. *Wikipedia* [online]. 4.4.2013 [cit. 2013-8-17]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Funkce_alef

[40] Kurt Gödel. *Wikipedia* [online]. 29.11.2013 [cit. 2013-12-02]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del

[41] Kardinální číslo. *Wikipedia* [online]. 10.2.2014 [cit. 2014-2-14]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Kardin%C3%A1ln%C3%AD_%C4%8D%C3%ADslo

[42] Richard's paradox. *Princeton University* [online]. 2013 [cit. 2013-09-19]. Dostupné z: http://www.princeton.edu/~achaney/tmve/wiki100k/docs/Richard_s_paradox.html

[43] Jules Richard. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-12-03]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Jules_Richard

[44] Puzzle - GET OF THE EARTH. *FUTILITY CLOSET* [online]. 2010 [cit. 2013-10-09]. Dostupné z: http://www.futilitycloset.com/2010/01/15/a-vanishing/

[45] Banach–Tarski paradox. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-10-12]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox

[46] JAKUBÍČEK, Miloš. Gödelovy věty o neúplnosti. *Fakulta informatiky, Masarykova univerzita* [online]. 23.11.2007 [cit. 2013-8-10]. Dostupné z: http://kix.fsv.cvut.cz/~vanicek/vyuka_l10/godel.pdf

[47] Paradoxy naivní teorie množin. *Wikipedia* [online]. 10.2.2014 [cit. 2014-02-15]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Paradoxy_naivn%C3%AD_teorie_mno%C5%BEin

[48] BRITTON, Jill. The Vanishing Leprechaun. *Jill Britton* [online]. 2013 [cit. 2013-10-11]. Dostupné z: http://britton.disted.camosun.bc.ca/jblep1.htm

[49] Petrohradský paradox. *Wikipedia* [online]. 21.7.2013 [cit. 2013-11-17]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Petrohradsk%C3%BD_paradox

[50] Burali-Fortiho paradox. *Wikipedia* [online]. 9.3.2013 [cit. 2013-10-10]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Burali-Fortiho_paradox

[51] MORANDI, Patrick J. The Hilbert hotel. *Minnesota State University* [online]. 24.1.2014 [cit. 2014-02-10]. Dostupné z: http://sierra.nmsu.edu/morandi/math210/Lectures/2014-01-24%20Hilbert%20Hotel-web.pdf

[52] Sbírka temno. *Katedra didaktiky matematiky MFF UK* [online]. 2013 [cit. 2013-08-02]. Dostupné z: http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~papa/texty/sbirka-temno.pdf

[53] Braessův paradox. *Resources for the future* [online]. 2011 [cit. 2013-11-19]. Dostupné z: http://www.rff.org/Publications/WPC/Pages/Designing-Transportation-Infrastructure-to-Include-the-Human-Element.aspx

[54] Cheonggyecheon. *Wikipedia* [online]. 28.12.2013 [cit. 2014-02-20]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Cheonggyecheon

[55] Braess's paradox. *Wikipedia* [online]. 15.1.2014 [cit. 2014-01-19]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Braess's_paradox

[56] Infinitezimální počet. *EProjekt - mezipředmětové vztahy v projektové výuce* [online]. 2013 [cit. 2013-12-04]. Dostupné z: http://www.eprojekt.gjs.cz/EntityDisplay.aspx?id=318

[57] Sam Loyd. *School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland* [online]. 2003 [cit. 2013-11-04]. Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Loyd.html

[58] Teorie grup. *Katedra algebry, Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze* [online]. 2000 [cit. 2013-08-12]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~spinka/grupy/grupy.pdf

[59] Cantorova teorie množin. *Vesmir.cz* [online]. 2013 [cit. 2013-08-12]. Dostupné z: http://www.vesmir.cz/clanek/cantorova-teorie-mnozin

[60] Dietrich Braess. *Dietrich Braess* [online]. 5.2.2014 [cit. 2014-02-20]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Dietrich_Braess

[61] Kardinální čísla. *Katedra matematiky PF UJEP* [online]. 2013 [cit. 2013-11-24]. Dostupné z: http://www.pf.ujep.cz/files/KMA_studium_AsD2material01.pdf

[62] Bernard Bolzano. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-10-14]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano

[63] Zénón z Eleje. *Necyklopedie* [online]. 20.11.2012 [cit. 2013-10-14]. Dostupné z: http://necyklopedie.wikia.com/wiki/Z%C3%A9n%C3%B3n_z_Eleje

[64] Transcendentní číslo. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-10-10]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Transcendentn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADslo

[65] Algebraické číslo. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-10-11]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Algebraick%C3%A9_%C4%8D%C3%ADslo

[66] Metajazyk. *Wikipedia* [online]. 10.3.2013 [cit. 2013-10-15]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Metajazyk

[67] Nekonečno. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-10-18]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Nekone%C4%8Dno

[68] Omezená množina. *Wikipedia* [online]. 22.5.2013 [cit. 2013-11-12]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Omezen%C3%A1_mno%C5%BEina

[69] Metrický prostor. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-11-12]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Metrick%C3%BD_prostor

[70] Transfinitní indukce. *Wikipedia* [online]. 5.7.2013 [cit. 2013-11-14]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Transfinitn%C3%AD_indukce

[71] Edward H. Simpson. *Wikipedia* [online]. 19.4.2013 [cit. 2013-10-10]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Edward_H._Simpson

SEZNAM INTERNETOVÝCH ZDROJŮ OBRÁZKŮ

Obrázek 1 SLÁVIK, Alexander „Olin". *Matematický korespondenční seminář* [online]. 2013 [cit. 11.9.2013]. Dostupné z: htt-ps://mks.mff.cuni.cz/library/BanachTarskehoParadoxAOS/BanachTarskehoParadoxAOS.pdf

Obrázek 2 Braessův paradox. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-12-19]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Braess%C5%AFv_paradox

Obrázek 3 Braessův paradox. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-12-19]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Braess%C5%AFv_paradox

Obrázek 4 Braessův paradox. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-12-19]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Braess%C5%AFv_paradox

Obrázek 5 Cheonggyecheon. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-12-19]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Cheonggyecheon

Obrázek 6 The Hilbert Hotel. *New Mexico State University, Department of Mathematical Sciences* [online]. 2014 [cit. 2014-01-10]. Dostupné z: http://sierra.nmsu.edu/morandi/math210/Lectures/2014-01-24%20Hilbert%20Hotel-web.pdf

Obrázek 7 The Hilbert Hotel. *New Mexico State University, Department of Mathematical Sciences* [online]. 2014 [cit. 2014-01-10]. Dostupné z: http://sierra.nmsu.edu/morandi/math210/Lectures/2014-01-24%20Hilbert%20Hotel-web.pdf

Obrázek 8 The Hilbert Hotel. *New Mexico State University, Department of Mathematical Sciences* [online]. 2014 [cit. 2014-01-10]. Dostupné z: http://sierra.nmsu.edu/morandi/math210/Lectures/2014-01-24%20Hilbert%20Hotel-web.pdf

Obrázek 9 The Hilbert Hotel. *New Mexico State University, Department of Mathematical Sciences* [online]. 2014 [cit. 2014-01-10]. Dostupné z: http://sierra.nmsu.edu/morandi/math210/Lectures/2014-01-24%20Hilbert%20Hotel-web.pdf

Obrázek 10 Puzzle Get Off the Earth. *FUTILITY CLOSED* [online]. 2013 [cit. 2013-12-13]. Dostupné z: http://www.futilitycloset.com/2010/01/15/a-vanishing/

Obrázek 11 Puzzle Get Off the Earth. *MIGHTY OPTICAL ILLUSIONS* [online]. 2013 [cit. 2013-12-13]. Dostupné z: http://www.moillusions.com/get-off-earth-optical-illusion/

Obrázek 12 BRITTON, Jill. Jill Britton's Website. *The Vanishing Leprechaun* [online]. 2013 [cit. 2013-12-19]. Dostupné z: http://britton.disted.camosun.bc.ca/jblep1.htm

Obrázek 13 BRITTON, Jill. Jill Britton's Website. *The Vanishing Leprechaun* [online]. 2013 [cit. 2013-12-19]. Dostupné z: http://britton.disted.camosun.bc.ca/jblep3.htm

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK