ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Nerovnosti a jejich důkazy (včetně počítačových)

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lenka Janková

Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 25. června 2014

....

Lenka Janková

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za inspirativní vedení mé bakalářské práce, za poskytnuté rady a připomínky, za ochotu a také čas strávený při konzultacích.

Zde bude oficiální zadání bakalářské práce

Obsah

Úvod

Při psaní a zpracovávání této bakalářské práce na téma Nerovnosti a jejich důkazy (včetně počítačových) byl kladen důraz ne na kompletnost, ale hlavně na srozumitelnost, názornost, porozumění a širší použitelnost vysvětlovaných metod. Využila jsem řadu knižních, ale i internetových zdrojů. Většina příkladů je převzata z matematických olympiád. Matematická řešení jsou také převážně převzata právě z matematických olympiád, ovšem doplněná o vlastní komentáře a výklad k řešení příkladů. Myšlenky důkazů jsou většinou převzaty.

Hned na úvod by bylo dobré vysvětlit, co je to vlastně nerovnost? Každý jistě ví, co je to nerovnice, ale často si jí plete s nerovností. Rozdíl je značný. U nerovnic pátráme po tom, kdy daný vztah platí, tj. jde nám hlavně o nějaký konkrétní výsledek. U nerovností ale dokazujeme, že platí pro jakákoliv čísla, ať už přirozená, celá či reálná. Nerovnosti si můžeme představit všelijak. Mezi ty hodně lehké patří např.

$$x^2 \geq 0, \;\; (pro\ všechna\ x \in \mathbb{R}).$$

Ovšem existují i opravdu hodně těžké nerovnosti, jako např.

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2} + \frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2} + \frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2} \leq \frac{1}{3},$$

se kterou dlouhé měsíce zápasil i takový skvělý a nadaný matematik jako je pan Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Na nerovnostech je zajímavé, že pro ně neexistuje žádná univerzální metoda řešení. Proto musíme u každé nerovnosti dobře promyslet, jakou metodu řešení použijeme. V této práci se budu snažit o to, abych tyto základní metody a postupy řešení řádně vysvětlila, dokázala a uvedla konkrétní příklady tak, aby každý pochopil a porozuměl tomu, co to vlastně nerovnosti jsou, jak poznat jakou metodu řešení použít a následně jak celou nerovnost vyřešit.

Tato bakalářská práce je koncipována tak, že její první tři kapitoly jsou věnovány převážně teorii, tj. vysvětlení základních pojmů, základních metod řešení a uvedení konkrétních příkladů ke každé definici, či větě. V druhé části mé práce se budu zabývat výpočty a dokazováním dalších příkladů, které budou přehledně rozděleny do jednotlivých podkapitol, tak aby bylo vše jasné a přehledné. V poslední kapitole se budu věnovat programu Mathematica, díky kterému budu moci dokázat platnost většiny příkladů, které se vyskytují v mé bakalářské práci.

Výstupem mojí práce by měl být ucelený a hlavně přehledný výklad o tom, co jsou to nerovnosti a jak je řešit.

Kapitola 1 (Definice a vlastnosti číselných nerovností)

Definice v první kapitole jsem čerpala a převzala z (1), (2), (3).

Definice 1.1 (Kladná a záporná čísla)

Každé reálné číslo $x \neq 0$ je buď kladné, nebo záporné. Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, je tedy rozdělena do tří skupin:

- $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel,
- $\mathbb{R}^-$ množinu všech záporných reálných čísel
- jednoprvkovou množinu $\{0\}$.

Základní pravidla:

i. $a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{R}^+$,
ii. $a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (ab) \in \mathbb{R}^+$,
iii. $a \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow (-a) \in \mathbb{R}^+$,
iv. $a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow (ab) \in \mathbb{R}^-$,
v. $a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}^+$.
vi. Jsou-li $a_1, a_2, \cdots, a_n$ nezáporná čísla, je číslo $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ také nezáporné. Přitom $s = 0$ jen tehdy, když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Definice 1.2 (Zavedení nerovností)

Řekneme, že číslo a je větší (resp. menší) než číslo b, právě tehdy když číslo $a - b$ je kladné (resp. záporné).

$$a > b \Leftrightarrow (a-b) \in \mathbb{R}^+$$
$$a < b \Leftrightarrow (a-b) \in \mathbb{R}^-$$

Zákon trichotomie: (plyne z rozkladu $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$)

Pro libovolná dvě čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí právě jeden ze vztahů $a > b, a = b, a < b$. V případě, kdy neplatí $a > b$, resp. $a < b$, píšeme $a \geq b$, resp. $a \leq b$. Nerovnosti se nazývají ostré ($<$ a $>$), resp. neostré ($\leq$ a $\geq$). Neostrá nerovnost znamená, že $(a-b) \in \mathbb{R}_0^+$.

Definice 1.3 (Tranzitivnost)

Je-li $a > b$ a $b > c$, pak $a > c$.

Obecně: je-li $a_1 \geq a_2, a_2 \geq a_3, \ldots, a_{n-1} \geq a_n$, pak $a_1 \geq a_n$, přičemž $a_1 = a_n$, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Důkaz 1.3: Je-li $a > b$ a $b > c$, tj. $(a-b) \in \mathbb{R}^+$ a $(b-c) \in \mathbb{R}^+$, pak podle definice 1.1 (i) je $(a-b)+(b-c) \in \mathbb{R}^+$, tj. $a > c$. Obecnější tvrzení plyne z definice 1.1 (vi) a rovnosti $a_1 - a_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n)$.

Definice 1.4 (Přičtení čísla)

Je-li $a > b$, pak $a + c > b + c$ pro každé c.

Důkaz 1.4: Jeli $a > b$, pak $(a+c)-(b+c) = (a-b) \in \mathbb{R}^+$, tj. $a + c > b + c$.

Poznámka: nahrazením čísla c číslem $(-c)$ dostaneme pravidlo „odečtení čísla“: je-li $a > b$, pak $a - c > b - c$ pro každé c.

Definice 1.5 (Sčítání nerovností)

Je-li $a > b$ a $c > d$, pak $a + c > b + d$.

Obecně: je-li $a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2, \dots, a_n \geq b_n$, pak $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, přitom rovnost nastane, právě když $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Důkaz 1.5: Je-li $a > b$ a $c > d$, pak podle definice 1.4 je $a + c > b + c$ a $b + c > b + d$, což podle definice 1.3 dává $a + c > b + d$. Obecnější tvrzení plyne z definice 1.1 (vi) a rovnosti $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)$.

Definice 1.6 (Násobení číslem)

Je-li $a > b$, pak $ac > bc$ pro každé $c > 0$ a $ac < bc$ pro každé $c < 0$.

Důkaz 1.6: Je-li $a > b$, pak $(a-b) \in \mathbb{R}^+$. Podle definice 1.1 (ii) je $(a-b)c \in \mathbb{R}^+$ pro každé $c \in \mathbb{R}^+$, podle definice 1.1 (iv) je $(a-b)c \in \mathbb{R}^-$ pro každé $c \in \mathbb{R}^-$. Protože $(a-b)c = ac - bc$, je v prvním případě $ac > bc$ a ve druhém případě $ac < bc$.

Poznámka: nahrazením čísla c číslem $\frac{1}{c}$ dostaneme pravidlo „dělení číslem“: je-li $a > b$, pak $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ pro $c > 0$ a $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ pro $c < 0$.

Definice 1.7 (Odčítání nerovností)

Je-li $a > b$ a $c > d$, pak $a - d > b - c$.

Obecně: je-li $a \geq b$ a $c \geq d$, pak $a - d \geq b - c$, přičemž rovnost $a - d = b - c$ nastane, právě když $a = b$ a $c = d$.

Důkaz 1.7: Podle definice 1.6 nerovnost $c > d$ platí, právě když $-c < -d$. Proto odčítání nerovností plyne z definice 1.5 pro dvojici nerovností $a \geq b$ a $-d \geq -c$.

Definice 1.8 (Násobení nerovností)

Je-li $a > b > 0$ a $c > d > 0$, pak $ac > bd$.

Obecně: je-li $a_1 \geq b_1 > 0, a_2 \geq b_2 > 0, \dots, a_n \geq b_n > 0$, pak $a_1 a_2 \dots a_n \geq b_1 b_2 \dots b_n$ přitom rovnost nastane, právě když $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Důkaz 1.8: Z $a_1 \geq b_1 > 0$ a $a_2 \geq b_2 > 0$ plyne podle definice 1.6 $a_1 a_2 \geq b_1 a_2$ a $b_1 a_2 \geq b_1 b_2$. Odtud podle definice 1.3 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$. Protože $b_1 b_2 > 0$ podle definice 1.1 (ii), můžeme postup v případě $n \geq 3$ zopakovat. Dostaneme tak $a_1 a_2 a_3 \geq b_1 b_2 b_3$ atd., až nakonec $a_1 a_2 \dots a_n \geq b_1 b_2 \dots b_n$. Posledním krokem je řetězec

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \geq a_1 a_2 \cdots a_{n-1} b_n \geq b_1 b_2 \dots b_n.$$

Definice 1.9 (Dělení nerovností)

Je-li $a > b > 0$ a $c > d > 0$, pak $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Obecně: je-li $a \geq b > 0$ a $c \geq d > 0$, pak $\frac{a}{d} \geq \frac{b}{c}$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = b$ a $c = d$. Zejména pro $a = b = 1$ tak dostáváme: je-li $c > d > 0$, pak $\frac{1}{d} > \frac{1}{c}$.

Důkaz 1.9: Protože $cd > 0$, platí $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ podle definice 1.6, právě tehdy, když $ac > bd$. Proto tato definice o dělení nerovností plyne z definice 1.8.

Definice 1.10 (Umocnění číslem)

Je-li $a > b > 0$, pak $a^m > b^m$ a $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ pro každé celé $m \geq 2$.

Obecně: je-li $a > b > 0$, pak $a^r > b^r$ pro každé $r > 0$ a $a^r < b^r$ pro každé $r < 0$.

Důkaz 1.10: Nechť $a > b > 0$. Podle definice 1.8 z m stejných nerovností $a > b$ plyne $a^m > b^m$. Připusťme, že $\sqrt[m]{a} \leq \sqrt[m]{b}$. Pak podle předchozího platí $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m \leq \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$, tj. $a \leq b$, což je spor. Je-li $r > 0$ a $r \in \mathbb{Q}$, pak $r = \frac{m}{n}$, $(m, n \in \mathbb{N})$ a podle předchozího postupně dostáváme $a^m > b^m$, $\sqrt[n]{a^m} > \sqrt[n]{b^m}$, tj. $a^r > b^r$. Je-li nakonec $r < 0$, pak podle předchozího $a^{-r} > b^{-r}$ (neboť $-r > 0$), což podle definice 1.9 znamená, že $\frac{1}{a^{-r}} < \frac{1}{b^{-r}}$, tj. $a^r < b^r$.

Definice 1.11 (Exponování nerovností)

Je-li $a > b$ a $0 < c < 1 < d$, pak $c^a < c^b$ a $d^a > d^b$.

Důkaz 1.11: Nechť $0 < c < 1 < d$ a $r = a - b > 0$. Pak podle definice 1.10 platí $c^r < 1^r < d^r$, tj. $c^{a-b} < 1$ a $d^{a-b} > 1$. Násobíme-li poslední dvě nerovnosti čísly c^b, resp. d^b, dostaneme podle definice 1.6 $c^a < c^b$ a $d^a > d^b$.

Definice 1.12 (Symetrie)

Výraz $V(a,b,c)$ nazveme symetrický, pokus se nezmění libovolnou záměnou proměnných. Stejně platí pro více proměnných.

$V(a,b,c) = V(a,c,b) = V(b,a,c) = V(b,c,a) = V(c,a,b) = V(c,b,a)$.

Symetrické výrazy: $a + b + c$, $\frac{abc}{(ab+bc+ca)^2}$, $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$.

Definice 1.13 (Cykličnost)

Výraz $V(a,b,c)$ nazveme cyklický, pokud se nezmění při provedení libovolné cyklické záměny, tj. $V(a,b,c) = V(b,c,a) = V(c,a,b)$.

Cyklickou záměnou pro více proměnných rozumíme posunutí o několik pozic. Cyklickou záměnou pořadí proměnných $x_1, x_2, \cdots, x_n$ je tedy pořadí $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$ pro libovolné $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Cyklické výrazy (nikoli však symetrické): $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$, $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$.

Definice 1.14 (Homogenita)

Výraz $V(a,b,c)$ nazveme homogenní stupně α, pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t > 0$ platí: $V(ta,tb,tc) = t^\alpha V(a,b,c)$.

Homogenní výrazy: $a + 2b + 3c$, $\frac{a}{b} + \frac{bc}{a^2} + 5$, $\frac{1}{a^3} + \frac{2b}{a^4} - \frac{1}{abc}$.

Shrnutí vlastností nerovností:

$$a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$$

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c \wedge a - c > b - c$$

$$a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

$$a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc \wedge \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc \wedge \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$a > b \wedge c > d \Rightarrow a - d > b - c$$

$$a > b > 0 \wedge c > d > 0 \Rightarrow ac > bd \wedge \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$$

$$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a > b > 0 \wedge r > 0 \Rightarrow a^r > b^r$$

$$a > b > 0 \wedge r < 0 \Rightarrow a^r < b^r$$

$$a > b \wedge 0 < c < 1 \Rightarrow c^a < c^b$$

$$a > b \wedge d > 1 \Rightarrow d^a > d^b$$

Kapitola 2 (Základní metody řešení nerovností)

Definice, zadání příkladů a jejich důkazů jsem čerpala z (1) (2) (3). Do řešení příkladů jsem se snažila vnést své vlastní pojetí.

Definice 2.1 (Ekvivalentní úpravy)

Nemění platnosti či neplatnost upravené nerovnosti, patří k nim např. přičtení téhož výrazu k oběma stranám nerovnosti, násobení nerovnosti kladným výrazem, umocnění na r-tou (r > 0) nerovnosti mezi kladnými výrazy,…

Patří sem i algebraické úpravy obou stran nerovností. Při zápisu důkazu často volíme opačný postup. Konečnou zřejmou nerovnost postupně upravujeme, až dospějeme k výchozí dokazované nerovnosti.

Příklad 2.1.1: Dokažte, že $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$.

Důkaz 2.1.1: Protože jsou obě čísla kladná, stačí podle definice 1.10 ukázat, že $\left(\sqrt[8]{8!}\right)^{72} < \left(\sqrt[9]{9!}\right)^{72}$, tj. $(8!)^9 < (9!)^8$. Protože $9! = 9 \cdot 8!$, můžeme nerovnost upravit na $(8!)^9 < 9^8 \cdot (8!)^8$. Po vydělení nerovnosti číslem $(8!)^8$ podle definice 1.6 dostaneme $8! < 9^8$, což platí podle definice 1.8 i podle výpočtu (40 320 < 43 046 721).

Příklad 2.1.2: Rozhodněte, které ze tří čísel x, y, z je největší za předpokladu, že $a < b < c < d$.

$$x = (a+b)(c+d), y = (a+c)(b+d), z = (a+d)(b+c)$$

Řešení 2.1.2: Vypočteme si rozdíl např. y – x:

$$\begin{aligned} y - x &= (ab + cb + ad + cd) - (ac + bc + ad + bd) = ab - ac + cd - bd \\ &= a(b-c) + d(c-b) = d(c-b) - a(c-b) = (c-b)(d-a) \end{aligned}$$

$(c-b)(d-a) > 0$, neboť obě čísla $(d-a)$ a $(c-b)$ jsou kladná. Je tedy $y > x$.

Dále se přesvědčíme, jak je na tom číslo z. Vypočteme proto rozdíl z – y:

$$\begin{aligned} z - y &= (ab + bd + ac + cd) - (ab + bc + ad + cd) = bd + ac - bc - ad \\ &= a(c-d) - b(c-d) = (a-b)(c-d) \end{aligned}$$

Obě čísla $(a-b)$ a $(c-d)$ jsou záporná, ale jejich součin $(a-b)(c-d) > 0$. Je tedy $z > y$.

Shrnutím těchto dvou výpočtů zjistíme, že $z > y > x$. Číslo z je tedy největší.

Příklad 2.1.3: Dokažte, že pro každé $a > 1$ platí nerovnost $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$.

Důkaz 2.1.3: Protože $a + 1 > a - 1 > 0$, je podle definice 1.10 $\sqrt{a+1} > \sqrt{a-1}$. Obě strany zadané nerovnosti jsou tedy kladné a podle definice 1.10 můžeme srovnávat jejich druhé mocniny: $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 < \left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}\right)^2$

Po umocnění dostaneme $\frac{1}{a} < (a+1) - 2\sqrt{a+1}\sqrt{a-1} + (a-1)$,

po úpravě $\frac{1}{a} < 2a - 2\sqrt{a^2-1}$,

což je $2a - \frac{1}{a} > 2\sqrt{a^2-1}$, obě strany nerovnosti jsou opět kladné.

Umocníme a dále upravujeme až k platné nerovnosti.

$$4a^2 - 4 + \frac{1}{a^2} > 4(a^2 - 1),$$

$$4a^2 - 4 + \frac{1}{a^2} > 4a^2 - 4,$$

$$\frac{1}{a^2} > 0$$

a to platí vždy. Tímto je nerovnost dokázána.

Definice 2.2 (Neekvivalentní úpravy)

To jsou takové úpravy, které nejsou ekvivalentní. Postup řešení od výchozích (zřejmých) nerovností k dokazovaným nerovnostem nelze obrátit.

Například nerovnost $L \geq P$ můžeme dokázat tak, že najdeme takové rozklady $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ a $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, že platí $L_k \geq P_k$ pro každé $k = 1,2, \dots, n$.

Příklad 2.2.1: Jsou-li a, b délky odvěsen a c délka přepony pravoúhlého trojúhelníka, pak pro každé celé $k > 2$ platí $a^k + b^k < c^k$, dokažte.

Důkaz 2.2.1: Podle Pythagorovy věty platí $c^2 = a^2 + b^2$. Násobením číslem c^{k-2} dostaneme $c^k = a^2c^{k-2} + b^2c^{k-2}$. Protože $a < c$ a $k > 2$, platí podle definice 1.10 $a^{k-2} < c^{k-2}$. Proto $a^k = a^2a^{k-2} < a^2c^{k-2}$. Stejně tak platí $b^k < b^2c^{k-2}$. Sečtením těchto nerovností dostaneme:

$$a^k + b^k < a^2c^{k-2} + b^2c^{k-2} = c^k.$$

Definice 2.3 (Metoda odhadů)

Čísla či obecněji výrazy D a H splňující nerovnosti $D \leq Q \leq H$ se nazývají dolní a horní odhad výrazu Q. Dolní odhad $D1$ je přesnější než odhad D, pokud platí $D < D_1 \leq Q$. Analogicky definujeme i přesnější horní odhad.

Příklad 2.3.1: Najděte odhady výrazu.

$$R = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}, (a, b, c, d \in \mathbb{R}^+).$$

Řešení 2.3.1: Po chvíli numerických pokusů výpočtů zjistíme, že není snadné najít konkrétní hodnoty a, b, c, d tak, aby platilo $R \leq 1$ nebo $R \geq 2$. Je to v podstatě nemožné, dokážeme totiž odhady $R < 1$ a $R > 2$:

$$R > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1,$$

$$R < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2.$$

Vhodnou volbou čísel a, b, c, d lze ukázat, že přesnější odhady výrazu R pomocí čísel neexistují.

Příklad 2.3.2: Nejjednodušší postup pro získání odhadů součtu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Řešení 2.3.2: Najdeme největší a nejmenší z hodnot $a_1, a_2, \dots, a_n$ a celý součet odhadneme jejich n-násobky. Tak pro součet $S(n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}, (n > 1)$ dostáváme $S(n) > n \cdot \left(1/\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}$ a $S(n) < n \cdot 1 = n$.

Definice 2.4 (Algebraické vzorce)

1. Rozklad $A^n - B^n$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

Příklad 2.4.1.1: Dokažte: je-li $a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq b$, pak

$$a^{n+1} + nb^{n+1} > (n+1)ab^n.$$

Řešení 2.4.1.1: Podle výše definovaného vzorce upravíme nerovnost na

$$L - P = a(a^n - b^n) - nb^n(a - b)$$
$$= a(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) - nb^n(a - b)$$
$$= (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - nb^n).$$

Po sečtení $a^k b^{n-k} > b^n$ (je-li $a > b$) resp. $a^k b^{n-k} < b^n$ (je-li $a < b$) pro $k = 1,2,\dots,n$ dostaneme v obou případech $L - P > 0$, tj. $L > P$.

2. Odhady $A^n - B^n$

$$n(A-B)B^{n-1} < A^n - B^n < n(A-B)A^{n-1}, \qquad (A > B \geq 0, n \geq 2)$$

z předchozího rozkladu:

$$nB^{n-1} < A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1} < nA^{n-1}$$

Příklad 2.4.2.1: Dokažte: je-li $0 < a < 1$, pak $n + (1+a)^n < na + 2^n$, pro $n \geq 2$.
Řešení 2.4.2.1: Je-li $1 < 1 + a < 2$, pak podle levé části odhadu pro $A = 2$ a $B = 1 + a$ platí: $2^n - (1+a)^n > n(1-a)(1+a)^{n-1} > n(1-a) \cdot 1^{n-1}$, odkud snadnou úpravou už plyne tvrzení.

3. Odhad geometrickou řadou

Ze vzorce pro rozklad $A^n - B^n$ pro $A = 1$ a $B = q$ plyne:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q}$$

pro každé $q < 1$ a každé $m = 1,2,3,\dots$. (číslo $\frac{1}{1-q}$ je součtem nekonečné geometrické řady $1 + q + q^2 + \cdots$).

Výše uvedenou nerovnost můžeme využít pro získání horního odhadu součtu $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ v případě, kdy najdeme čísla $b_j \geq a_j$ taková, že $b_{j+1} \leq qb_j$ pro každé j, přičemž $0 < q < 1$. Tímto způsobem dokážeme následující odhad:

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+k)!} < \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

Z nerovnosti $(n+j)! > (n+2)!\,(n+2)^{j-2}$ pro $j \geq 3$ a z výše uvedeného vzorce pro odhad geometrickou řadou pro $q = \frac{1}{n+2}$ plyne následující:

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+k)!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}}\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

4. Užití rozvoje $(A+B)^n$, Binomický rozvoj

$$(A+B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1}B + \binom{n}{2} A^{n-2}B^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} AB^{n-1} + B^n$$

Tento rozvoj lze využít při důkazech některých nerovností, ve kterých vystupují mocniny celého stupně $n \geq 2$. Vypustíme-li v pravé straně tohoto rozvoje několik sčítanců, dostaneme dolní odhad mocniny $(A+B)^n$ pro kladná A, B. Například platí: $(A+B)^n > A^n + B^n$

Příklad 2.4.4.1: Pro reálná čísla x, y, z platí $xyz > 0$ a $x+y+z > 0$.
Dokažte, že nerovnost $x^n + y^n + z^n > 0$ platí pro každé $n \geq 2$.
Důkaz 2.4.4.1: Protože $xyz > 0$, jsou buď všechna tři čísla x, y, z kladná, nebo je jedno kladné a zbylá dvě jsou záporná.
V prvním případě není třeba nerovnost dokazovat, tvrzení je zřejmé.
Druhý případ: Nechť např. $x = a, y = -b, z = -c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.
Z $x+y+z = a-b-c > 0$ plyne, že $a > b+c$, odkud podle výše zmíněného příkladu plyne, že $a^n > (b+c)^n > b^n + c^n$, což lze pro lichá n zapsat takto:

$$x^n + y^n + z^n = a^n - b^n - c^n > 0.$$

Pro sudá n je nerovnost $x^n + y^n + z^n > 0$ zřejmá, není třeba dokazovat.

Definice 2.5 (Metoda čtverců)

Mezi základní úpravy patří tzv. doplnění na čtverec podle vzorce:

$$X^2 + 2XY = (X+Y)^2 - Y^2$$

Nerovnost $X^2 + Y^2 > 2XY, (X, Y \in \mathbb{R}, X \neq Y)$ plyne snadnou úpravou z nerovnosti $(X-Y)^2 > 0$. Položme si obecnější otázku, která čísla $p \in \mathbb{R}$ mají tu vlastnost, že nerovnost $x^2 + y^2 \geq pxy$ (dále značená $L \geq P$) platí pro všechna čísla $x, y \in \mathbb{R}$? V rozdílu $L - P$ se objeví dvojčlen $x^2 - pxy$, který doplníme na čtverec a dostaneme:

$$L - P = x^2 + y^2 - pxy = \left(x - \frac{py}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4 - p^2)y^2.$$

Volbou $x = \frac{py}{2}, y \neq 0$, dostaneme nutnou podmínku $4 - p^2 \geq 0$, která je vzhledem k tomuto rozdílu postačující. Řešením nerovnice $4 - p^2 \geq 0$ získáme odpověď:

$$-2 \leq p \leq 2.$$

Příklad 2.5.1: Dokažte, že platí nerovnost:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\ ,(a, b\ \in \mathbb{R}^+).$$

Důkaz 2.5.1: Po úpravě a vynásobení nerovnosti číslem a^2b^2 dostaneme:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b),$$

po následném vydělení nerovnosti výrazem $(a + b)$ dostaneme:

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab,$$

což je

$$(a - b)^2 \geq 0$$

a to platí vždy.

Definice 2.5.A (Dolní odhad $A + B$)

Podle odhadu $X^2 + 2XY = (X + Y)^2 - Y^2$ pro čísla $X = \sqrt{A}$ a $Y = \sqrt{B}$ platí

$$A + B \geq 2\sqrt{AB}, (A, B\ \in \mathbb{R}_0^+)$$

Přitom rovnost nastane, jen když $A = B$. Tento dolní odhad součtu $A + B$ můžeme využít v následujících příkladech.

Příklad 2.5.A.1: Dokažte, že pro každá čísla $a, b, c\ \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$ab + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{ac}$$

Důkaz 2.5.A.1: Nerovnost plyne z nerovnosti $A + B \geq 2\sqrt{AB}$ pro $A = ab$ a $B = \frac{c}{b}$.

Příklad 2.5.A.2: Dokažte. Je-li $a, b\ \in \mathbb{R}^+$, pak

$$ab(12 - 2a - 5b) < 2a + 5b.$$

Důkaz 2.5.A.2: Využijeme toho, že tvar $2a + 5b$ se vyskytuje v obou stranách nerovnosti. Upravíme ji proto na následující tvar:

$$12ab < (2a + 5b)(1 + ab)$$

Podle výše zmíněného odhadu $A + B \geq 2\sqrt{AB}, (A, B\ \in \mathbb{R}_0^+)$ můžeme obě poslední závorky odhadnout zdola pomocí: $\sqrt{ab}$: $(2a + 5b) \geq 2\sqrt{10ab}$ a $ab \geq 2\sqrt{ab}$. Vynásobením těchto nerovností dostaneme: $(2a + 5b)(1 + ab) \geq 4\sqrt{10}ab > 12ab$, neboť $\sqrt{10} > 3$.

Příklad 2.5.A.3: Dokažte. Je-li $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+$, pak

$$a + b + c + d \geq 4 \cdot \sqrt[4]{abcd}.$$

Důkaz 2.5.A.3: Protože podle $A + B \geq 2\sqrt{AB}, (A, B \in \mathbb{R}_0^+)$ platí tyto dvě nerovnosti:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$c + d \geq 2\sqrt{cd},$$

stačí dokázat, že

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq 2 \cdot \sqrt[4]{abcd}.$$

Což je úplně stejné jako

$$A + B \geq 2\sqrt{AB}, (A, B \in \mathbb{R}_0^+),$$

ale pro čísla $A = \sqrt{ab}$ a $B = \sqrt{cd}$.

Definice 2.5.B (Horní odhad A * B)

Úpravou předchozí nerovnosti $A + B \geq 2\sqrt{AB}, (A, B \in \mathbb{R}_0^+)$ dostaneme nerovnost

$$AB \leq \left(\frac{A + B}{2}\right)^2 \quad (A, B \in \mathbb{R}_0^+)$$

přitom rovnost nastane, jen když $A = B$. S pomocí tohoto odhadu můžeme vyřešit následující příklady.

Příklad 2.5.B.1: Dokažte. Je-li $a, b \in \mathbb{R}^+$ a $a + b = 1$, pak

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

Důkaz 2.5.B.1: Ze součtu čísel $a + b = 1$ podle nerovnosti horního odhadu plyne, že $ab \leq \frac{1}{4}$. Proto platí:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a+b+1}{ab} = 1 + \frac{2}{ab} \geq 1 + \frac{2}{\frac{1}{4}} = 9.$$

Příklad 2.5.B.2: Dokažte. Je-li $0 < b < a$, pak

$$a + \frac{1}{ab - b^2} \geq 3.$$

Důkaz 2.5.B.2: Podle nerovnosti horního odhadu $AB \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$ pro $A = a - b$ a $B = b$ platí nerovnost

$$(a - b)b \leq \frac{a^2}{4},$$

jejímž důsledkem je odhad

$$a + \frac{1}{ab - b^2} \geq a + \frac{a^2}{4}.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$a + \frac{a^2}{4} \geq 3.$$

Tuto nerovnost upravíme na tvar

$$(a + 1)(a - 2)^2 \geq 0$$

a to platí vždy.

V této nerovnosti nastane rovnost, jen když $a - b = b$ a $a - 2 = 0$, tj. $a = 2$ a $b = 1$.

Definice 2.5.C (Dolní odhad A + A^{-1})

Položíme-li v nerovnosti pro dolní odhad $A + B \geq 2\sqrt{AB}, (A, B \in \mathbb{R}_0^+)$ číslo $B = 1/A$ dostaneme nerovnost

$$A + \frac{1}{A} \geq 2, (A \in \mathbb{R}^+)$$

Přitom rovnost nastane, jen když $A = 1$. Tento dolní odhad je užitečný při řešení řady úloh. Před užitím tohoto odhadu je zpravidla nutné zkoumanou nerovnost vydělit vhodným výrazem.

Příklad 2.5.C.1: Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$$

Důkaz 2.5.C.1: Nejprve vydělíme nerovnost číslem abc a poté upravíme.

$$\frac{ab(a + b)}{abc} + \frac{bc(b + c)}{abc} + \frac{ac(a + c)}{abc} \geq 6$$

$$\frac{(a + b)}{c} + \frac{(b + c)}{a} + \frac{(a + c)}{b} \geq 6$$

Vhodně přeskupíme a upravíme na tvar:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6$$

což je součet tří nerovností podle vzorce $A + \frac{1}{A} \geq 2, (A \in \mathbb{R}^+)$, pro $A = \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$.

Příklad 2.5.C.2: Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1) \geq 81abcd$$

Důkaz 2.5.C.2: Po vydělení nerovnosti číslem $abcd$ a následném upravení, dostaneme nerovnost ve tvaru:

$$\left(a + 1 + \frac{1}{a}\right)\left(b + 1 + \frac{1}{b}\right)\left(c + 1 + \frac{1}{c}\right)\left(d + 1 + \frac{1}{d}\right) \geq 81.$$

Podle definice dolního odhadu není žádná ze čtyř závorek nalevo menší než 3, jejich součin je tedy alespoň $3^4 = 81$. Tím je nerovnost dokázána.

Kapitola 3 (Základní typy nerovností a jejich důkazy)

Definice, věty a jejich důkazy, příklady a jejich důkazy jsem čerpala z (1) (2) (3). Do řešení příkladů jsem se snažila vnést vlastní postupy a myšlenky.

Definice 3.1 (Diskriminant a Cauchyova nerovnost)

Augustin Cauchy (čteme *kóši*) byl francouzský matematik, který značně přispěl k rozvoji matematické analýzy. Ve své publikaci Oeuvres z roku 1821 se zmiňuje o nerovnosti, která se stala jedním ze základních pojmů celé vysokoškolské matematiky. Cauchyova nerovnost je jedním ze základních nástrojů při práci s nerovnostmi vůbec a pro ambiciózní řešitele matematických olympiád je její znalost ji nutností.

Z kvadratického trojčlenu $F(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ doplněním na čtverec dostaneme vyjádření:

$$F(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \text{ kde } D = b^2 - 4ac.$$

Číslo D se nazývá diskriminantem trojčlenu F(x).

Z předchozího vyjádření plyne následující věta.

Věta 3.1.1: Nechť $F(x)$ je trojčlen s kladným koeficientem a a diskriminantem D. Potom platí:

i. $F(x) > F\left(\frac{-b}{2a}\right)$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{-b}{2a}$,

ii. $F(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, právě když $D < 0$,

iii. Je-li $D = 0$, pak $F(x) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, přitom $F(x) = 0$, právě když $x = \frac{-b}{2a}$,

iv. Je-li $D > 0$, má rovnice $F(x) = 0$ dva reálné kořeny $x_1 > x_2$; přitom $F(x) > 0$, jestliže $x < x_2$ nebo $x > x_1$, a $F(x) < 0$, jestliže $x_2 < x < x_1$.

Důkaz 3.1.1: Je-li $a > 0$, pak podle výše zmíněného vyjádření

$$F(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \text{ kde } D = b^2 - 4ac,$$

platí nerovnost

$$F(x) \geq -\frac{D}{4a}, (x \in \mathbb{R}).$$

Přitom rovnost nastane jedině pro $x = \frac{-b}{2a}$. Odtud dostáváme předchozí tvrzení (i)-(iii). Kořeny x_1, x_2 z části (iv) jsou dány známým vzorcem

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Vlastnosti diskriminantu popsané ve větě 3.1 využijeme v následujících typech příkladů.

Příklad 3.1.1.1: Dokažte, že kladná čísla a, b, c jsou délkami stran některého trojúhelníka, právě když platí nerovnost

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Důkaz 3.1.1.1: Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 < 0$$

Protože rovnice

$$x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b^2 - c^2)^2 = 0$$

má dva kořeny $x_1 = (b + c)^2$ a $x_2 = (b - c)^2$, platí výše dokazovaná nerovnost podle věty 3.1.1, právě když

$$(b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2,$$

tj. právě když

$$|b - c| < a < b + c.$$

Příklad 3.1.1.2: Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou daná reálná čísla. Zjistěte, pro které $x \in \mathbb{R}$ má součet

$$S = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$$

nejmenší hodnotu.

Řešení 3.1.1.2: Protože $S = nx^2 + bx + c$, kde $b = -2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, nabývá S podle věty 3.1.1 nejmenší hodnotu pro

$$x = -\frac{b}{2n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Definice 3.2 (Cauchyho nerovnost)

Též Cauchy-Schwarzova, nebo Cauchy-Schwarz-Buňakovského nerovnost.

Pro dvě libovolné n-tice reálných čísel $u_1, u_2, \cdots, u_n$ a $v_1, v_2, \cdots, v_n$ platí nerovnost

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$$

Rovnost nastane jen tehdy, je-li $u_k = 0, (1 \leq k \leq n)$ nebo existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $u_k = tu_k, (1 \leq k \leq n)$.

Důkaz 3.2.a: Je-li $u_k = 0, (1 \leq k \leq n)$, platí v Cauchyově nerovnosti rovnost. Nechť tedy $u_k \neq 0$ pro některé $k = 1,2, \ldots, n$. Položme

$$F(x) = (u_1x - v_1)^2 + (u_2x - v_2)^2 + \cdots + (u_nx - v_n)^2$$

Výpočtem zjistíme, že $F(x)$ je kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, kde

$$a = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 > 0\,, b = \sum_{k=1}^{n} u_kv_k\,, c = \sum_{k=1}^{n} v_k^2$$

S diskriminantem $D = 4(b^2 - ac)$. Podle

$$F(x) = (u_1x - v_1)^2 + (u_2x - v_2)^2 + \cdots + (u_nx - v_n)^2$$

je $F(x) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Podle věty 3.1.1 platí

$$D \leq 0, \text{ tj. } b^2 \leq ac,$$

což je $(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$.

Rovnost nastane, právě když $D = 0$, tj. právě když $F(t) = 0$ pro některé $t \in \mathbb{R}$. Poslední závorka $(u_nx - v_n)^2$ znamená, že $u_kt - v_k = 0$ pro každé $k = 1,2, \ldots, n$.

Poznámka 3.2: Z Cauchyovy nerovnosti

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$$

plyne slabší nerovnost

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \leq \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)}.$$

Tvrzení 3.2: (Zlomkobijec)

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$. Pak platí

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Příklad 3.2.1: Dokažte. Je-li $2x + 4y = 1$ pro některá $x, y \in \mathbb{R}$, pak

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}.$$

Důkaz 3.2.1: Podle Cauchyovy nerovnosti s $n = 2$ platí:

$$(2x + 4y)^2 \leq (2^2 + 4^2)(x^2 + y^2),$$

odkud v případě $2x + 4y = 1$ dostáváme

$$1 \leq 20(x^2 + y^2), \text{ tj. } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}.$$

Příklad 3.2.2: Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

Zjistěte, kdy v nerovnosti nastane rovnost.

Důkaz 3.2.2: V Cauchyově nerovnosti s $n = 3$ položme $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}, v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Dostaneme tak

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}\right)$$

Což je $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$. Protože $v_1 = xu_1, v_2 = yu_2, v_3 = zu_3$ a $u_k \neq 0, (1 \leq k \leq 3)$, rovnost v dokazované nerovnosti nastane, právě když $x = y = z$.

Příklad 3.2.3: Dokažte tzv. Trojúhelníkovou nerovnost

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$$

pro dvě libovolné n-tice reálných čísel $u_1, u_2, \dots, u_n$ a $v_1, v_2, \dots, v_n$. Výše dokazovanou nerovnost lze pomocí vektorů zapsat ve tvaru $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$, kde $|\cdot|$ značí velikost vektoru. Význam přívlastku „trojúhelníková“ je jasný z geometrické konstrukce vektorového součtu $\vec{u} + \vec{v}$.

Důkaz 3.2.3: Tuto nerovnost lze dokázat dvěma způsoby.

a) Po umocnění na druhou, odečtení čísla $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$ a dělení dvěma, dostaneme slabší nerovnost

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \leq \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)}$$

Odtud plyne kritérium pro rovnost trojúhelníkové nerovnosti

b) Existuje ještě jeden důkaz s obratem, který lze využít i při důkazu obecnější, tzv. Minkowského nerovnosti. Sečteme-li dvě nerovnosti typu

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \leq \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)}$$

a to

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)u_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)^2 \sum_{k=1}^{n} u_k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)v_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)^2 \sum_{k=1}^{n} v_k^2}$$

dostaneme

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)^2 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)^2} \cdot \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}\right).$$

Odvodili jsme tak nerovnost $L^2 \leq L \cdot P$, kde $L \leq P$ je trojúhelníková nerovnost

$$\textstyle\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}.$$

Platí tedy $L(L - P) \leq 0$. Je-li $L = 0$, je tato trojúhelníková nerovnost triviální. Je-li $L \neq 0$, pak $L > 0$, proto z nerovnosti $L(L - P) \leq 0$ plyne, že $L - P \leq 0$, což dokazuje trojúhelníkovou nerovnost.

Definice 3.3 (Princip indukce)

Používáme ve dvou případech.

a) Nerovnosti typu $L(n) \geq P(n)$, tj. nerovnosti, jejichž strany jsou funkce celočíselné proměnné n. Přitom v nerovnosti vystupuje konečný součet nebo součin, případně mocnina s exponentem závislým na čísle n.

b) Nerovnosti typu $L(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, kdy užíváme indukci vzhledem k počtu n proměnných $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

3.3.1 Princip indukce

Nechť platí $L(n_0) \geq P(n_0)$ a nechť pro každé $n > n_0$ je splněna některá ze dvou podmínek:

i. čísla $L(n), P(n), L(n+1), P(n+1)$ jsou kladná a platí

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \geq \frac{P(n+1)}{P(n)},$$

ii. $L(n+1) - L(n) \geq P(n+1) - P(n)$.

Potom nerovnost $L(n) \geq P(n)$ platí pro každé $n > n_0$. Je-li navíc $L(n_1) > P(n_1)$ pro některé $n_1 \geq n_0$, pak i $L(n) > P(n)$ pro každé $n > n_1$.

3.3.2 Indukce podle počtu proměnných

Tato metoda se využívá při řešení úloh o nerovnostech ve tvaru $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$. Zpravidla lze odvodit následující nerovnost $Q(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \geq 0$ z předchozí nerovnosti $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n) \geq 0$, kde $y_1, y_2, \cdots, y_n$ je některá n-tice, vhodně zvolená k dané (n+1)-tici $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$.

V nejjednodušší situaci je možné volit $y_1 = x_{1,}\, y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$. Ve složitějších případech, kdy proměnné $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ jsou vázány doplňujícími podmínkami, musíme výběr $y_1, y_2, \cdots, y_n$ podřídit stejným podmínkám.

Příklad 3.3.2.1: Pro čísla $a_1, a_1, \ldots a_n$ platí buď $a_k \geq 0, (1 \leq k \leq n)$, nebo $-1 \leq k \leq 0, (1 \leq k \leq n)$. Dokažte nerovnost

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Důkaz 3.3.2.1: Metodou konečné indukce dokážeme, že pro $k = 1,2, \ldots, n$ platí

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Pro $k = 1$ nastane v této nerovnosti rovnost. Platí-li výše uvedená nerovnost pro některé $k < n$, pak po násobení obou stran nezáporným číslem $1 + a_{k+1}$ dostaneme

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_{k+1}) \geq (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) =$$
$$= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} + b_k,$$

Kde $b_k = a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+1} + \cdots + a_k a_{k+1} \geq 0$, neboť všechna čísla $a_j a_{k+1}$ jsou podle předpokladů úlohy nezáporná. Proto platí

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_{k+1}) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}.$$

Tímto je důkaz indukcí ukončen.

Definice 3.4 (Čebyševova nerovnost)

Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821 - 1894) byl ruský matematik. Pracoval zejména v oblasti teorie pravděpodobnosti, statistice, teorii čísel a analytické geometrii. Je po něm pojmenována například Čebyševova nerovnost nebo Čebyševovy polynomy.

Věta 3.4.1: Řekneme, že dvě n-tice $u_1, u_1, \ldots, u_n$ a $v_1, v_1, \ldots, v_n$ reálných čísel jsou souhlasně, resp. opačně uspořádané, platí-li

$$(u_j - u_i)(v_j - v_i) \geq 0, \;\; (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

respektive

$$(u_j - u_i)(v_j - v_i) \leq 0, \;\; (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

Věta 3.4.2: Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou dvě n-tice reálných čísel. Součet

$$S = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n,$$

kde $z_1, z_2, \dots, z_n$ je libovolné pořadí čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$, je maximální, resp. minimální, právě když $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $z_1, z_2, \dots, z_n$ jsou souhlasně, resp. opačně uspořádané n-tice. Zejména platí: jsou-li n-tice $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $y_1, y_2, \dots, y_n$ souhlasně uspořádané a zároveň n-tice $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$ opačně uspořádané, pak každý ze zmíněných n součtů S splňuje nerovnosti

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 \leq S \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Věta 3.4.3: (Čebyševova nerovnost)

Předpokládejme, že jsou dány dvě uspořádané n-tice reálných čísel $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ a $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$. Označme

$$S_{min} = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1$$

$$S_{max} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Pak platí nerovnosti

$$nS_{min} \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \leq nS_{max},$$

Přitom rovnosti v této nerovnosti nalevo a napravo nastanou jen současně, a to jen tehdy, pokud $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ nebo $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$.

Důkaz 3.4.2: Podle věty 3.4.2 a podle věty 3.4.3 platí:

$$S_{max} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

$$S_{max} \geq x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_n y_1,$$

$$S_{max} \geq x_1 y_3 + x_2 y_4 + \cdots + x_n y_2,$$

$$\vdots$$

$$S_{max} \geq x_1 y_n + x_2 y_1 + \cdots + x_n y_{n-1}.$$

Sečtením všech vztahů dostaneme

$$nS_{max} \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n),$$

tj. pravou část Čebyševovy nerovnosti. Podobně můžeme dokázat i levou část.

Příklad 3.4.2.1: (typická ukázka užití Čebyševovy nerovnosti) Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnosti

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3(a^5 + b^5 + c^5)$$

a

$$(a^4 + b^4 + c^4)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(a^3 + b^3 + c^3),$$

Přitom rovnost v obou výše uvedených nerovnostech nastane, jen když $a = b = c$.

Důkaz 3.4.2.1: Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat, že $0 < a \leq b \leq c$.

Pak ovšem $a^n \leq b^n \leq c^n$ pro $n = 2,3,4$ a $c^{-1} \leq\ b^{-1} \leq\ a^{-1}$.

Proto je první nerovnost pravou částí Čebyševovy nerovnosti s $n = 3, x_1 = a^2,\ x_2 = b^2$, $x_3 = c^2,\ y_1 = a^3, y_2 = b^3, y_3 = c^3$.

Podobně druhá nerovnost je levou částí Čebyševovy nerovnosti s $n = 3, x_1 = a^4$, $x_2 = b^4,\ x_3 = c^4,\ y_1 = c^{-1}, y_2 = b^{-1}, y_3 = a^{-1}$.

V obou případech je trojice x_1, x_2, x_3 a y_1, y_2, y_3souhlasně uspořádány.

Tím je důkaz hotov.

Definice 3.5 (Nerovnosti mezi průměry – AG-nerovnost)

- **Definice 3.5a:** Aritmetickým průměrem čísel $x1, x2, \ldots, xn$ rozumíme číslo

$$A_n(x_{1,}\ x_{2,\ldots,}\ x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

slovně lze tento průměr vyjádřit jako součet všech čísel, vydělený jejich počtem.

- **Definice 3.5b:** Geometrickým průměrem čísel $a1, a2, \ldots, an$ rozumíme číslo

$$G_n(x_{1,}\ x_{2,\ldots,}\ x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

slovně lze tento průměr vyjádřit jako *n-tá* odmocnina z *n* čísel.

AG-nerovnost

Nerovnost aritmetického a geometrického průměru říká, že aritmetický průměr nezáporných čísel je vždy větší nebo roven geometrickému průměru těchto čísel. Rovnost nastává tehdy, pokud jsou všechna průměrovaná čísla stejná.

Pro libovolná reálná kladná čísla $x1, x2, \ldots, xn$ platí nerovnost

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

rovnost nastane, jen když $a1\ =\ a2\ =\ \ldots\ =\ an.$

Užití AG-nerovnosti

- Dolní odhad součtu $A_1 + A_2 + \cdots + A_n \geq n \cdot \sqrt[n]{A_1 A_2 \cdots A_n}$
- Horní odhad součinu $A_1 A_2 \cdots A_n \leq \left(\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}\right)^n$

Oba odhady platí pro libovolnou n-tici nezáporných čísel $A_1, A_2, \cdots, A_{n.}$

Rovnost nastane, jen když jsou všechna tato čísla stejná.

Příklad 3.5.1: Dokažte. Je-li $a \geq 0$, pak

$$a^{11} - 3a^5 + a^4 + 1 \geq 0.$$

Poslední nerovnost je ostrá, je-li $a \neq 0$.

Důkaz 3.5.1: Podle dolního odhadu součtu pro trojici čísel $a^{11}, a^4, 1$ platí:

$$a^{11} + a^4 + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^{11} \cdot a^4 \cdot 1} = 3a^5,$$

Rovnost nastane, jen když $a^{11} = a^4 = 1$, tj. když $a = 1$. Odtud plyne tvrzení.

Příklad 3.5.2: Určete největší hodnotu $p \in \mathbb{R}$, při které nerovnost

$$a^2b^2c^2 + ab + bc + ca \geq pabc$$

platí pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Důkaz 3.5.5: Položíme-li $a = b = c = 1$, dostaneme podmínku $p \leq 4$. Na druhé straně podle dolního odhadu součtu pro čtveřici $a^2b^2c^2, ab, bc, ca$ platí

$$a^2b^2c^2 + ab + bc + ca \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a^2b^2c^2abbcca} = 4abc.$$

Proto je největší hledaná hodnota p rovna číslu 4.

Příklad 3.5.3: Dokažte nerovnost $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \leq n^n$ pro každé $n > 1$.

Důkaz 3.5.3: Podle horního odhadu součinu pro čísla $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ platí

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) < \left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n}\right]^n = \left(\frac{n^2}{n}\right)^n = n^n,$$

Neboť $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Příklad 3.5.4: Dokažte. Je-li $0 < b < 2a$, pak $16b(2a-b)^3 \leq 27a^4$.

Důkaz 3.5.4: Použijeme horní odhad součinu pro čtveřici čísel $3b, 2a-b, 2a-b,$ $2a-b$ (kde koeficient 3 u čísla b je vybrán tak, aby součet všech 4 čísel nezávisel na b)

$$(3b)(2a-b)^3 \leq \left[\frac{3b+3(2a-b)}{4}\right]^4 = \left(\frac{3a}{2}\right)^4,$$

odkud po násobení číslem $\frac{16}{3}$ dostaneme dokazovanou nerovnost.

Definice 3.6 (Vážené průměry)

Při určení průměrné hodnoty z čísel $x_{1,}\, x_{2,\dots,}\, x_n$ přisuzujeme různým číslům x_j různou důležitost, vyjádřenou váhovými koeficienty $p_j \in \mathbb{R}^+$.

Vážený aritmetický průměr je pak vyjádřen vzorcem

$$A_n^{váž}(x_{1,}\, x_{2,\dots,}\, x_n) = \frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots p_n}.$$

Váhové koeficienty p_j je výhodné normovat tak, aby jejich součet byl roven 1. Dosáhneme toho tím, že zavedeme nové koeficienty

$$v_j = \frac{p_j}{p_1+p_2+\cdots+p_n}, (1 \le j \le n),$$

neboť zřejmě $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 1$, vzorec pro průměr se tak zjednoduší na

$$A_n^{váž}(x_{1,}\, x_{2,\dots,}\, x_n) = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n.$$

Vážený geometrický průměr

$$G_n^{váž}(x_{1,}\, x_{2,\dots,}\, x_n) = x_1^{v_1}x_2^{v_2}\cdots x_n^{v_n}.$$

Věta 3.6: Nechť součet kladných čísel $v_1, v_2, \cdots v_n$ je roven 1. Pak libovolná čísla $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$v_1a_1 + v_2a_2 + \cdots + v_na_n \ge a_1^{v_1}a_2^{v_2}\cdots a_n^{v_n},$$

přitom rovnost nastane, jen když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Důkaz věty 3.6: Omezíme se nyní na případ, kdy čísla $v_1, v_2, \cdots v_n$ jsou racionální. Tehdy existuje číslo $k \in \mathbb{N}$ takové, že všechna čísla $m_j = kv_j, (1 \le j \le n)$ jsou přirozená. Navíc platí

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = k \cdot 1 = k.$$

Vypíšeme nyní AG-nerovnost pro skupinu k čísel:

m_1 čísel a_1, m_2 čísel a_2, …, m_n čísel a_n. Dostaneme tak

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{k} \ge \sqrt[k]{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\dots a_n^{m_n}},$$

což dokazuje nerovnost věty 3.6, neboť $\frac{m_j}{k} = v_1, (1 \le j \le n)$. Podle výsledku AG-nerovnosti nastane ve výše uvedené nerovnosti nerovnost, jen když uvedená skupina k čísel obsahuje jen stejná čísla, tj. když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Odtud plyne tvrzení o rovnosti ve větě 3.6. Tím je důkaz (v případě $v_j \in \mathbb{Q}, 1 \le j \le n$) hotov.

Příklad 3.6.1: Kladná čísla p, q nazveme sdružená, platí-li $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (Obě sdružená čísla jsou větší než 1). Dokažte tzv. Youngovu nerovnost: jsou-li p, q sdružená čísla, pak nerovnost

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

platí pro libovolná čísla $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Důkaz 3.6.1: Jsou-li p, q sdružená čísla, je možné v nerovnosti z věty 3.6.1 s $n = 2$ položit $v_1 = \frac{1}{p}$ a $v_2 = \frac{1}{q}$. Pak pro $a_1 = x^p$ a $a_2 = y^q$ dostaneme přímo dokazovanou Youngovu nerovnost. Poznamenejme ještě, že Youngova nerovnost je vlastně ekvivalentní s nerovností z věty 3.6.1 pro $n = 2$: jsou-li v_1, v_2 váhové koeficienty v takové nerovnosti z věty 3.6.1, jsou čísla $p = \frac{1}{v_1}, q = \frac{1}{v_2}$ sdružená.

Příklad 3.6.2: Dokažte. Je-li $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ a $c \neq 1$, pak platí

$$ac^b + \frac{b}{c^a} > a + b.$$

Důkaz 3.6.2: Položíme-li v nerovnosti z věty 3.6.1 s $n = 2$

$$v_1 = \frac{a}{a+b}, v_2 = \frac{b}{a+b}, a_1 = c^b, a_2 = c^{-a},$$

Dostaneme (vzhledem k tomu, že $a_1 \neq a_2$) ostrou nerovnost.

$$\frac{a}{a+b} \cdot c^b + \frac{b}{a+b} \cdot c^{-a} > (c^b)^{\frac{a}{a+b}} \cdot (c^{-a})^{\frac{b}{a+b}} = 1,$$

odkud po násobení číslem $a + b$ vychází potřebná nerovnost.

Příklad 3.6.3: Dokažte obecnou Bernoulliovu nerovnost: je-li $x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^+, x > -1$ a $p \neq 1$, pak platí

$$(1 + x)^p \geq 1 + px, \;\; (p > 1),$$

respektive

$$(1 + x)^p \leq 1 + px, \;\; (0 < p < 1),$$

Přitom rovnost v obou případech nastane, jen když $x = 0$.

Důkaz 3.6.3: Je-li $0 < p < 1$, položíme v nerovnosti podle věty 3.6 $n = 2, v_1 = p, v_2 = 1 - p, a_1 = 1 + x > 0, a_2 = 1$, dostaneme tak

$$p(1 + x) + (1 - p) \cdot 1 \geq (1 + x)^p \cdot 1^{1-p},$$

tj. druhou Bernoulliovu nerovnost, s rovností v jediném případě, a to když $a_1 = a_2$, což znamená, že $x = 0$. Nechť dále $p > 1$. Je-li $1 + px \leq 0$, platí zřejmě v první

Bernoulliově nerovnosti ostrá nerovnost. Je-li $1 + px > 0$, pak podle dokázané druhé Bernoulliovy nerovnosti platí

$$(1 + px)^{\frac{1}{p}} \leq 1 + \frac{1}{p} \cdot px = 1 + x.$$

Rovnost jen pro $x = 0$. Odtud po umocnění číslem p dostaneme první Bernoulliovu nerovnost.

Definice 3.7 (Mocninné průměry)

Průměrem stupně r čísel $a_1, a_2, \cdots, a_n$ nazveme hodnotu

$$M_n^r(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}},$$

která má smysl pro každé $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Věta 3.7.1: je-li $r < 0 < s$, pak platí

$$M_n^r(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq G_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq M_n^s(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

přitom rovnost někde nastane, jen když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Důkaz 3.7.1: Pravou část nerovnosti dostaneme, umocníme-li kladným číslem $\frac{1}{s}$ AG-nerovnost $G_n(a_1^s, a_2^s, \dots, a_n^s) \leq A_n(a_1^s, a_2^s, \dots, a_n^s)$, levou část nerovnosti po umocnění záporným číslem $\frac{1}{r}$ AG-nerovnosti $G_n(a_1^r, a_2^r, \dots, a_n^r) \leq A_n(a_1^r, a_2^r, \dots, a_n^r)$. Zároveň odtud plyne i tvrzení o rovnosti v dokazované větě.

Věta 3.7.2: Nechť $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$ a $rs \neq 0$. Potom platí nerovnost

$$M_n^r(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq M_n^s(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

přitom rovnost nastane, jen když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Příklad 3.7.1: Najděte nejmenší hodnotu součtu $a^3 + b^3 + c^3$ pro kladná čísla a, b, c splňující podmínku $a^2 + b^2 + c^2 = 27$

Řešení 3.7.1: Pro mocninné průměry stupňů 2 a 3 uvažovaných čísel a, b, c platí podle věty 3.7.2 nerovnost

$$\sqrt[2]{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}.$$

Odtud po dosazení $a^2 + b^2 + c^2 = 27$ a po úpravě plyne odhad $a^3 + b^3 + c^3 \geq 81$. Přitom podle téže věty 3.7.2 rovnost $a^3 + b^3 + c^3 = 81$ nastane, právě když

$a = b = c (= 3)$. Hledaná nejmenší hodnota součtu $a^3 + b^3 + c^3$ je tedy rovna 81. Pokud bychom hledali jeho největší hodnotu, tak podle Jensenovy nerovnosti bychom získali odhad $a^3 + b^3 + c^3 < \left(\sqrt{27}\right)^3 = 81 \cdot \sqrt{3}$. Zároveň je jasné, že hodnota součtu $a^3 + b^3 + c^3$ může být k číslu $81 \cdot \sqrt{3}$ libovolně blízká. Největší hodnota daného součtu tedy neexistuje (na množině trojic kladných čísel a, b, c splňujících podmínku $a^2 + b^2 + c^2 = 27$).

Kapitola 4 (Příklady)

Zadání příkladů a jejich důkazů v této kapitole jsem převážně převzala z (3), (4) a doplnila o své vlastní postupy a myšlenky. V této kapitole se budu zabývat příklady již vysvětlených nerovností, ale také dalšími nerovnostmi, které budou vysvětleny přímo při řešení konkrétního příkladu. Budu zde používat již vysvětlené metody a jejich kombinaci.

Příklady 4.1 (AG-nerovnosti)

Příklad 4.1.1: Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Důkaz 4.1.1: Podle AG-nerovnosti platí

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3},$$

Po vynásobení obou stran nerovnosti číslem 3 dostaneme

$$x^3 + y^3 + z^3 \ \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}$$

a po konečné úpravě dostaneme dokazovaný výraz

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Rovnost nastává pro $x = y = z$.

Příklad 4.1.2: Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$dokažte

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y.$$

Důkaz 4.1.2: Tentokrát použijeme AG-nerovnost ne pro dvojici čísel $2x^3, y^3$, ale pro trojici čísel x^3, x^3, y^3. Dostaneme nerovnost

$$2x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^6y^3}.$$

Po úpravě dokazovanou nerovnost

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y.$$

Příklad 4.1.3: Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x.$$

Důkaz 4.1.3: Nejprve nerovnost vynásobíme třemi, což je ekvivalentní úprava a smysl nerovnosti se tím nezmění:

$$3x^3 + 3y^3 + 3z^3 \geq 3x^2y + 3y^2z + 3z^2x$$

Poté využijeme důkazu z předchozího příkladu, že $2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$, analogicky

$$2y^3 + z^3 \geq 3y^2z,\ 2z^3 + x^3 \geq 3z^2x.$$

Sečtením těchto tří nerovností získáme dokazovanou nerovnost.

Příklady 4.2 (Cauchyova nerovnost)

Příklad 4.2.1: Dokažte pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Důkaz 4.2.1: Podle následující Cauchyovy nerovnosti

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)\big((y+z) + (z+x) + (x+y)\big) \geq (x+y+z)^2$$

Vidíme, že druhá závorka na levé straně je rovna $2(x+y+z)$ a můžeme tedy krátit s pravou stranou. Poté ještě vydělíme číslem 2 a tím dostaneme přímo dokazovanou nerovnost.

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)2(x+y+z) \geq (x+y+z)^2$$

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)2 \geq (x+y+z)$$

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq \frac{(x+y+z)}{2}$$

Příklad 4.2.2: Dokažte pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Důkaz 4.2.2: Nejprve rozšíříme zlomky tak, abychom si v čitatelích vytvořili druhé mocniny:

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}.$$

Ty nás později zbaví odmocnin. Nyní použijeme „zlomkobijce“:

$$L \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Nerovnost, kterou máme nyní dokázat, se po pár úpravách ukáže ekvivalentní nerovností

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

o které víme, že platí. Dokázali jsme tedy, že

$$L \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2},$$

a tím je důkaz hotov.

Příklady 4.3 (Nerovnosti jedné proměnné)

V těchto typech příkladů využíváme AG-nerovnost a rozklad na součin.

Příklad 4.3.1: Pro $x \in \mathbb{R}^+$ ukažte, že platí nerovnost

$$8x^3 + x^2 - 8x + 3 \geq 0.$$

Řešení 4.3.1: Výše uvedenou nerovnost získáme sečtením dvou AG-nerovností:

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

$$8x^3 + 1 + 1 \geq 3 \cdot 2x$$

U kterých můžeme jednoznačně říci, že platí.

Hlavní myšlenkou při řešení této nerovnosti je pomocí členů, u nichž je kladný koeficient odhadnout členy, u nichž je koeficient záporný. Při použití AG-nerovnosti pro tři prvky je podstatné, že x je kladné číslo. Pokud by bylo x pouze reálné, druhý odhad bychom nemohli použít. Nerovnost by dokonce neplatila.

Příklad 4.3.2: Pro $x \in \mathbb{R}$ ukažte, že platí nerovnost

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 \geq 0.$$

Řešení 4.3.2: Polynom (levou stranu nerovnosti) rozložíme na součin

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2) = (x-1)^2 \cdot ((x+1)^2 + 1) \geq 0.$$

Tím je důkaz hotov.

Při dokazování této nerovnosti bylo důležité všimnout si, že pro $x = 1$ nastává rovnost. Jednotka je tedy kořen polynomu a člen $(x-1)$ se z něj musí vytknout. Při vytýkání je naším úkolem rozdělit výraz na menší skupinky tak, abychom člen $(x-1)$ uměli vytknout z každé z nich.

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - 2x + 2 &= (x^4 - x^2) - 2(x-1) = \\ &= x^2(x^2 - 1) - 2(x-1) = \\ &= x^2(x-1)(x+1) - 2(x-1) = \\ &= (x-1)[x^2(x+1) - 2] = \\ &= (x-1)(x^3 + x^2 - 2). \end{aligned}$$

Došli jsme k tomu, že poslední závorka je pro $x = 1$ nulová. Vytýkejme proto $(x - 1)$ znovu a dostaneme

$$(x-1)(x^3+x^2-2) = (x-1)\big((x^3-1)+(x-1)\big) = (x-1)^2 \cdot (x^2+2x+2).$$

Nyní zbývá ukázat, že $x^2 + 2x + 2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, což není problém, protože to víme, že platí.

Příklady 4.4 (Nerovnosti dvou proměnných)

U nerovností dvou proměnných můžeme kromě obvyklých postupů použít také nové techniky, jako je např. vytýkání, nebo symetrická substituce. Hodí pro nerovnosti homogenní a symetrické.

Příklad 4.4.1: Pro $a, b > 0$ ukažte, že platí nerovnost

$$a^4 + 2b^4 \geq a^2b^2 + 2ab^3.$$

Řešení 4.4.1: Výše uvedená nerovnost je homogenní, zvolme proto $b = 1$. Podle předchozího příkladu víme, že

$$a^4 - a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 \cdot ((a+1)^2 + 1) \geq 0.$$

A tím je naše nerovnost dokázaná.

Vidíme tedy, že homogenní nerovnosti dvou proměnných lze převádět na nerovnosti jedné proměnné, které již pohodlně umíme řešit.

Příklad 4.4.2: Pro kladná čísla a, b ukažte, že platí nerovnost

$$a^2(a+1) + b^2(b+1) + 1 \geq 5ab.$$

Řešení 4.4.2: Výše uvedená nerovnost je symetrická. Zvolíme proto substituci $s = a + b, p = ab$ a nerovnost přepíšeme do nových proměnných s a p.

$$(a^3 + b^3) + (a^2 + b^2) + 1 \geq 5ab$$

$$\Updownarrow$$

$$s(s^2 - 3p) + (s^2 - 2p) + 1 \geq 5p.$$

Nerovnost je v proměnné p lineární, stačí ji tedy ověřit pro krajní hodnoty p. Pro hodnotu s se p pohybuje v intervalu $(0, \frac{s^2}{4}\rangle$. Kromě nezápornosti čísel a, b jsme využili odhad $(a+b)^2 \geq 4ab$. V případě $p = 0$ je jedno z čísel a, b nulové, což podle zadání nelze. V případě $4p = s^2$ je nerovnost (jedné proměnné) ekvivalentní nerovnosti

$$(s+1)(s-2)^2 \geq 0.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklady 4.5 (Symetrické a homogenní nerovnosti tří proměnných)

Příklad 4.5.1: Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$(a-b)^2(a+b-c) + (b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) \geq 0.$$

Důkaz 4.5.1: Nerovnost je symetrická, zvolíme $a \geq b \geq c$. Dále vidíme, že nerovnost je homogenní, zvolíme tedy $c = 1$ a budeme psát $b = 1 + x$, kde $x \geq 0$ a $a = 1 + x + y$, kde $y \geq 0$ a můžeme přejít k nerovnosti dvou proměnných

$$y^2(1+2x+y) + x^2(1-y) + (x+y)^2(1+y) \geq 0,$$

Z jejíž levé strany jediný záporný člen x^2y po úpravě zmizí, takže ji můžeme prohlásit za platnou a tím dokázanou.

Kapitola 5 (Nerovnosti v úlohách matematické olympiády)

Zadání a důkazy příkladu v této kapitole jsem převzala hlavně z (5) a z dalších matematických olympiád a doplnila o svoje postupy a poznatky.

Příklady 5.1 (Aritmeticko-geometrické nerovnosti)

Příklad 5.1.1: základní AG nerovnost

Pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Důkaz 5.1.1: ekvivalentními úpravami dojdeme ke tvaru $(a-b)^2 \geq 0$ a to platí vždy.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Rovnost nastane v případě, když $a = b$.

Příklad 5.1.2: Pro libovolná reálná čísla a, b, c dokažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Důkaz 5.1.2: Z předchozího příkladu víme, že dle AG-nerovnosti platí

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ca$$

Po sečtení všech tří nerovností a následným vydělením dvěma, dostaneme požadovaný výsledek. Rovnost nastane, když $a = b = c$.

Zmíněná nerovnost je též ekvivalentní s výrazem

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,$$

což platí vždy.

Příklad 5.1.3: Nechť jsou $a_1, a_2, \cdots, a_n$ kladná reálná čísla taková, že $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Dokažte, že platí $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n$

Důkaz 5.1.3: podle AG nerovnosti platí

$$1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1}$$

$$1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_2}$$

$$\vdots$$

$$1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n}$$

Vynásobením výše uvedených nerovností a skutečností, že $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ dostaneme náš požadovaný výsledek. Rovnost platí pro $a_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$.

Příklad 5.1.4: Nechť jsou a, b, c nezáporná reálná čísla. Dokažte, že

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Důkaz 5.1.4: Podle AG-nerovnosti, je tato nerovnost ekvivalentní s

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{b+c}{\sqrt{bc}}\right)\left(\frac{c+a}{\sqrt{ca}}\right) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Rovnost nastane pouze tehdy, pokud $a = b = c$.

Příklad 5.1.5: Nechť jsou čísla $a, b, c > 0$. Dokažte, že $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$.

Důkaz 5.1.5: Podle AG-nerovnosti odvodíme, že

$$\frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} = 3a$$

$$\frac{b^3}{ca} + c + a \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca} \cdot c \cdot a} = 3b$$

$$\frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab} \cdot a \cdot b} = 3c$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2(a+b+c) \geq 3(a+b+c)$ a po následném upravení dostaneme výraz, který jsme měli na začátku

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Příklady 5.2 (Vážené AG-nerovnosti)

Příklad 5.2.1: Nechť jsou a, b, c kladná reálná čísla taková, že $a + b + c = 3$.

Ukažte, že $a^b b^c c^a \leq 1$

Důkaz 5.2.1:

$$1 = \frac{a + b + c}{3}$$

$$1 \geq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

$$1 \geq (a^b b^c c^a)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

což znamená, že $a^b b^c c^a \leq 1$.

Příklad 5.2.2: (Nguyen Manh Dung)

Nechť jsou čísla $a, b, c > 0$ taková, že $a + b + c = 1$. Dokažte, že

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1.$$

Důkaz 5.2.2: Z vážené aritmeticko-geometrické nerovnosti nám plyne

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq a^a b^b c^c,$$

$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq (a^b b^c c^a)^{\frac{1}{a+b+c}} \Rightarrow ab + bc + ca \geq a^a b^b c^c,$$

$$\frac{ac+ba+cb}{a+b+c} \geq (a^c b^a c^b)^{\frac{1}{a+b+c}} \Rightarrow ab + bc + ca \geq a^c b^a c^b.$$

Shrnutím těchto tří nerovností dostaneme

$$(a + b + c)^2 \geq a^a b^b c^c + a^a b^b c^c + b^a c^b a^c.$$

A to je

$$a^a b^b c^c + a^a b^b c^c + a^c b^a c^b \leq 1.$$

Příklady 5.3 (Cauchyova nerovnost)

Příklad 5.3.1: Nechť a, b, c jsou reálná čísla. Ukažte, že

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Důkaz 5.3.1: Podle Cauchyovy nerovnosti můžeme přepsat na tvar, který víme, že platí:

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2.$$

Příklad 5.3.2: Pro nezáporná reálná čísla x, y, z dokažte, že

$$\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx}\le 2(x+y+z).$$

Důkaz 5.3.2: Podle Cauchyovy nerovnosti můžeme přepsat na tvar, který víme, že platí:

$$\sum\sqrt{x(3x+y)}\le\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\sum(3x+y)\right)}=\sqrt{4(x+y+z)^2}=2(x+y+z).$$

Příklad 5.3.3: Nechť jsou a, b, c kladná reálná čísla taková, že $abc=1$. Dokažte, že:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

Důkaz 5.3.3: Nechť $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$. Pak za daných podmínek získáme $xyz=1$. Všimněte si, že

$$\sum\frac{1}{a^3(b+c)}=\sum\frac{1}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=\sum\frac{x^2}{y+z}.$$

Nyní podle Cauchyovy nerovnosti

$$\sum\frac{x^2}{y+z}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2},$$

kde poslední nerovnost vyplývá z AG-nerovnosti.

Příklad 5.3.4: Pro kladná reálná čísla a, b, c dokažte, že

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\le 1.$$

Důkaz 5.3.4: Máme

$$\begin{aligned}&\sum\frac{a}{2a+b}\le 1\\ \Leftrightarrow&\sum\left(\frac{a}{2a+b}-\frac{1}{2}\right)\le 1-\frac{3}{2}\\ \Leftrightarrow&-\frac{1}{2}\sum\frac{b}{2a+b}\le-\frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow&\sum\frac{b}{2a+b}\ge 1\end{aligned}$$

Z Cauchyovy nerovnosti vyplývá

$$\sum\frac{b}{2a+b}=\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ca+a^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)+b^2+c^2+a^2}=1.$$

Příklady 5.4 (Čebyševova nerovnost)

Příklad 5.4.1: Pro $a, b, c > 0$ dokažte, že

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Důkaz 5.4.1: Použitím Čebyševovy nerovnosti jsme došli k závěru, že

$$3(a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c) \geq (a + b + c)(a + b + c).$$

Příklad 5.4.2: Nechť $a, b, c > 0$. Dokažte, že

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Důkaz 5.4.2: Podle Čebyševovy nerovnosti dojdeme k závěru, že

$$3(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^6 + b^6 + c^6)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$3(a^8 + b^8 + c^8) \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$3(a^8 + b^8 + c^8) \geq 3a^2b^2c^2(ab + bc + ca)$$

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{ab + bc + ca}{abc}$$

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Tím jsme požadovanou nerovnost dokázali.

Příklad 5.4.3: Nechť $a \geq b \geq c \geq 0$ a $0 \leq x \leq y \leq z$. Dokažte, že

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3\left(\frac{a+b+c}{x+y+z}\right).$$

Důkaz 5.4.3: Použitím Čebyševovy nerovnosti pro $a \geq b \geq c$ a $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ odvodíme, že

$$3\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq (a + b + c)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 9\left(\frac{a+b+c}{x+y+z}\right),$$

Což je to, co jsme chtěli dokázat. Poslední dvě nerovnosti vyplývají z AG-nerovnosti.

Kapitola 6 (Počítačové postupy, řešení v programu Mathematica)

V této kapitole budu dokazovat již vyřešené příklady z předchozích kapitol pomocí matematického programu Mathematica. Vždy se odkážu na konkrétní již řešený příklad. K samotnému řešení příkladů a vůbec pochopení celého programu jsem využívala spoustu webových stránek, blogů o programu Mathematica a v neposlední řadě i samotnou nápovědu v tomto programu.

Program Mathematica

Mathematica je software pro dělání matematiky na počítači. Umožňuje např. numerické i symbolické výpočty, práci s přesnými i s přibližnými čísly s nastavitelnou přesností, se skaláry, vektory, maticemi i tenzory vyšších řádů, s reálnými i komplexními čísly, řešení algebraických, diferenciálních i diferenčních rovnic. Umožňuje výstup v podobě dvou i třírozměrných barevných animovaných grafů i zvukový výstup. Součástí systému je bohatá dokumentace včetně nápověd, definic i příkladů. Systém Mathematica vyniká svou vynikající logickou propracovaností jak samotného programu, jeho syntaxe a celkové konstrukce, tak i dokumentace.

Autor programu Mathematica

Stephen Wolfram (*1959, Londýn) vystudoval teoretickou fyziku. Vedle fyziky se zabýval celulárními automaty. Od roku 1986 se věnuje vývoji systému Mathematica. Verze 1 se objevila v roce 1988. Dnes již je k dispozici verze 9, která je o mnoho dokonalejší než její předchůdkyně. Dnes již můžeme v tomto programu řešit nerovnosti, dříve by to nešlo, program to ještě neuměl.

Práce s programem a používané příkazy

Hlavní součástí, kterou potřebujeme pro práci je tzv. Notebook. Do Notebooku zapisujeme veškeré příkazy, které se spouští pomocí kláves Shift+Enter. Po spuštění příkazu nám program vyhodí výsledek. Při dokazování nerovností nás ale nezajímá konkrétní výsledek, jako například u nerovnic, ale chceme se dozvědět, zda daná nerovnost platí, či nikoli. Naším výsledkem proto bude buď výstup True, nebo False.

Při dokazování nerovností budu používat následující příkazy:

- Reduce – snížit, zredukovat, zmenšit
- Resolve – vyřešit

- ForAll – tvrzení, které znamená, že výraz je pravdivý pro všechny hodnoty zadaných proměnných
- Exists – tvrzení, které znamená, že existuje hodnota proměnné, pro kterou je výraz pravdivý

Názorná ukázka řešení nerovností v programu Mathematica

Příklad 1: Dokažte nerovnost $x^2 \geq 0$, pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad řešíme pomocí příkazu Resolve a ForAll. V doslovném překladu by níže uvedený příkaz znamenal: Vyřeš pro všechna x, že $x^2 \geq 0$.

In[1]:= Resolve[ForAll[x, x^2 $\geq$ 0]]

Out[1]:= True

Výstup True znamená, že výše dokazovaná nerovnost je pravdivá. V případě, že by nám místo True vyskočilo False, nebyla by nerovnost pravdivá, podle zadaných parametru.

Příklad 2: Dokažte nerovnost $a + b \geq a - b$, pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a \geq b$.

In[2]:= Resolve[ForAll[$\{a, b\}, a \geq b, a + b \geq a - b$]]

Out[2]:= False

Podle výstupu v tomto příkladu vidíme, že tato nerovnost opravdu pravdivá není. Doslovný překlad příkazu říká: Vyřeš pro všechna a, b taková, že $a \geq b$, nerovnost $a + b \geq a - b$.

Příklad 3: Pro libovolná kladná čísla a, b, c dokažte, že platí

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2} + \frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2} + \frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Tuto nerovnost jsem zmiňovala již v úvodu své práce a opravdu není pěkná. Ten kdo by ji chtěl dokázat, bude mít opravdu hodně práce. Ale program Mathematica, který je každým rokem zdokonalován nám během pár vteřin vyhodí výsledek True.

In[3]:=Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& c > 0, (a * b/(4 * a^\wedge 2 + b^\wedge 2 + 4 * c^\wedge 2)) + (b * c/(4 * b^\wedge 2 + c^\wedge 2 + 4 * a^\wedge 2)) + (c * a/(4 * c^\wedge 2 + a^\wedge 2 + 4 * b^\wedge 2)) \leq 1/3$]]

Out[3]:= True

6.1 (Příklady)

Příklad 2.1.1: Dokažte, že $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$.

Příkaz: Reduce[$\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$]

Odpověď: True

V tomto příkladu použiji jen příkaz Reduce, který nám celou nerovnost zjednoduší a vyhodí výsledek True.

Příklad 2.1.3: Dokažte, že pro každé $a > 1$ platí nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$a, a > 1, 1/\sqrt{a} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$]]

Odpověď: True

Příklad 2.5.1: Dokažte nerovnost: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $(a, b \in \mathbb{R}^+)$.

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b\}, a \geq 0 \&\& b \geq 0, a/b^\wedge 2 + b/a^\wedge 2 \geq 1/a + 1/b$]]

Odpověď: True

V tomto příkladu se již vyskytují dvě proměnné, které se musí přesně nadefinovat. Symbolem && značíme, že nerovnosti platí zároveň, tzn. Pro všechny proměnné a, b, kdy $a \geq 0$ a zároveň $b \geq 0$.

Příklad 2.5.A.1: Dokažte, že pro každá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$ab + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{ac}$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& c > 0, a * b + c/b \geq 2 * \sqrt{a * c}$]]

Odpověď: True

Příklad 2.5.A.2: Dokažte. Je-li $a, b \in \mathbb{R}^+$, pak

$$ab(12 - 2a - 5b) < 2a + 5b.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b\}, a > 0 \&\& b > 0, a * b * (12 - 2 * a - 5 * b) < 2 * a + 5 * b$]]

Odpověď: True

Příklad 2.5.A.3: Dokažte. Je-li $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+$, pak

$$a + b + c + d \geq 4 \cdot \sqrt[4]{abcd}.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c, d\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& c > 0 \&\& d > 0, a + b + c + d \geq 4 * \sqrt[4]{a * b * c * d}$]]

Odpověď: True

Příklad 2.5.B.1: Dokažte. Je-li $a, b \in \mathbb{R}^+$ a $a + b = 1$, pak

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& a + b == 1, (1 + 1/a) * (1 + 1/b) \geq 9$]]

Odpověď: True

Příklad 2.5.B.2: Dokažte. Je-li $0 < b < a$, pak

$$a + \frac{1}{ab - b^2} \geq 3.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b\}$,$0 < b < a, a + 1/(a * b - b^2) \geq 3$]]

Odpověď: True

Příklad 2.5.C.1: Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& c > 0, a * b * (a + b) + b * c * (b + c) + a * c * (a + c) \geq 6 * a * b * c$]]

Odpověď: True

Příklad 2.5.C.2: Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1) \geq 81abcd$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c, d\}, a > 0\&\&b > 0\&\&c > 0\&\&d > 0, (a\text{^}2 + a + 1) * (b\text{^}2 + b + 1) * (c\text{^}2 + c + 1) * (d\text{^}2 + d + 1) \geq 81 * a * b * c * d$]]

Odpověď: True

Příklad 3.2.1: Dokažte. Je-li $2x + 4y = 1$ pro některá $x, y \in \mathbb{R}$, pak $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{x, y\}$,$2 * x + 4 * y == 1, x\text{^}2 + y\text{^}2 \geq 1/20$]]

Odpověď: True

Příklad 3.2.2: Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{x, y, z\}, (x/2 + y/3 + z/6)\text{^}2 \leq (x\text{^}2)/2 + (y\text{^}2)/3 + (z\text{^}2)/6$]]

Odpověď: True

Příklad 3.4.2.1: (typická ukázka užití Čebyševovy nerovnosti) Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnosti

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3(a^5 + b^5 + c^5)$$

a

$$(a^4 + b^4 + c^4)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(a^3 + b^3 + c^3),$$

Přitom rovnost v obou výše uvedených nerovnostech nastane, jen když $a = b = c$.

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0\&\&b > 0\&\&c > 0, (a\text{^}2 + b\text{^}2 + c\text{^}2) * (a\text{^}3 + b\text{^}3 + c\text{^}3) \leq 3 * (a\text{^}5 + b\text{^}5 + c\text{^}5)$]]

Odpověď: True

a

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0\&\&b > 0\&\&c > 0, (a\text{^}4 + b\text{^}4 + c\text{^}4) * (1/a + 1/b + 1/c) >= 3 * (a\text{^}3 + b\text{^}3 + c\text{^}3)$]]

Odpověď: True

Příklad 3.5.4: Dokažte. Je-li $0 < b < 2a$, pak $16b(2a - b)^3 \leq 27a^4$.

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b\}$,$0 < b < 2 * a, 16 * b * (2 * a - b)\text{^}3 \leq 27 * a\text{^}4$]]

Odpověď: True

Příklad 4.1.1: Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{x, y, z\}, x > 0 \&\& y > 0 \&\& z > 0, x\verb|^|3 + y\verb|^|3 + z\verb|^|3 \geq 3 * x * y * z$]]

Odpověď: True

Příklad 4.1.2: Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$dokažte

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{x, y, z\}, x > 0 \&\& y > 0 \&\& z > 0, 2 * x\verb|^|3 + y\verb|^|3 \geq 3 * x\verb|^|2 * y$]]

Odpověď: True

Příklad 4.1.3: Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{x, y, z\}, x > 0 \&\& y > 0 \&\& z > 0, x\verb|^|3 + y\verb|^|3 + z\verb|^|3 \geq x\verb|^|2 * y + y\verb|^|2 * z + z\verb|^|2 * x$]]

Odpověď: True

Příklad 4.2.1: Dokažte pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{x, y, z\}, x > 0 \&\& y > 0 \&\& z > 0, x\verb|^|2/(y + z) + y\verb|^|2/(z + x) + z\verb|^|2/(x + y) \geq (x + y + z)/2$]]

Odpověď: True

Příklad 4.2.2: Dokažte pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Příkaz:

Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& c > 0, (a/(b + c)) + (b/(c + a)) + (c/(a + b)) \geq 3/2$]]

Odpověď: True

Příklad 4.3.1: Pro $x \in \mathbb{R}^+$ ukažte, že platí nerovnost

$$8x^3 + x^2 - 8x + 3 \geq 0.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$x, x > 0{,}8 * x$^3 $+ x$^2 $- 8 * x + 3 \geq 0$]]

Odpověď: True

Příklad 4.3.2: Pro $x \in \mathbb{R}$ ukažte, že platí nerovnost

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 \geq 0.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[x, x^4 $- x$^2 $- 2 * x + 2 \geq 0$]]

Odpověď: True

Příklad 4.4.1: Pro $a, b > 0$ ukažte, že platí nerovnost

$$a^4 + 2b^4 \geq a^2b^2 + 2ab^3.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[{a, b}, $a > 0$&&$b > 0, a$^4 $+ 2 * b$^4 $\geq a$^2 $* b$^2 $+ 2 * a * b$^3]]

Odpověď: True

Příklad 4.4.2: Pro kladná čísla a, b ukažte, že platí nerovnost

$$a^2(a + 1) + b^2(b + 1) + 1 \geq 5ab.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[{a, b}, $a > 0$&&$b > 0, a$^2 $* (a + 1) + b$^2 $* (b + 1) + 1 \geq 5 * a * b$]]

Odpověď: True

Příklad 4.5.1: Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$(a - b)^2(a + b - c) + (b - c)^2(b + c - a) + (c - a)^2(c + a - b) \geq 0.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[{a, b, c}, $a > 0$&&$b > 0$&&$c > 0, (a - b)$^2 $* (a + b - c) + (b - c)$^2 $* (b + c - a) + (c - a)$^2 $* (c + a - b) \geq 0$]]

Odpověď: True

Příklad 5.1.1: základní AG nerovnost

Pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b\}, a > 0 \&\& b > 0, (a + b)/2 \geq \sqrt{a * b}$]]

Odpověď: True

Příklad 5.1.2: Pro libovolná reálná čísla a, b, c dokažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a\hat{}2 + b\hat{}2 + c\hat{}2 \geq a * b + b * c + c * a$]]

Odpověď: True

Příklad 5.1.4: Nechť jsou a, b, c nezáporná reálná čísla. Dokažte, že

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& c > 0, (a + b) * (b + c) * (c + a) \geq 8 * a * b * c$]]

Odpověď: True

Příklad 5.1.5: Nechť jsou čísla $a, b, c > 0$. Dokažte, že $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$.

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& c > 0, (a\hat{}3)/(b * c) + (b\hat{}3)/(c * a) + (c\hat{}3)/(a * b) \geq a + b + c$]]

Odpověď: True

Příklad 5.3.1: Nechť a, b, c jsou reálná čísla. Ukažte, že

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}$,$3 * (a\hat{}2 + b\hat{}2 + c\hat{}2) \geq (a + b + c)\hat{}2$]]

Odpověď: True

Příklad 5.3.4: Pro kladná reálná čísla a, b, c dokažte, že $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.

Příkaz: Resolve[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0 \&\& b > 0 \&\& c > 0, (a/(2 * a + b)) + (b/(2 * b + c)) + (c/(2 * c + a)) \leq 1$]]

Odpověď: True

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo podat ucelený a hlavně přehledný výklad na téma nerovnosti a jejich důkazy. Domnívám se, že vzhledem k rozčlenění textu do jednotlivých kapitol a podkapitol, se mi to povedlo.

Jednotlivé příklady v této práci slouží zejména hlavně k uvedení do problematiky nerovností a k znázornění a vysvětlení užití jednotlivých definic a vět o nerovnostech.
V textu jde hlavně o vysvětlení základních typů nerovností, jako je např. Cauchyova, nebo AG-nerovnost, a následné použití na příkladech.

Velkým přínosem pro mě bylo seznámení a práce s programem Mathematica. Tento program je, dle mého názoru, pro matematiky velmi užitečný. V poslední kapitole jsem proto ukázala jeho výhody a usnadnění práce při dokazování nerovností. Na přiloženém CD si můžete prohlédnout pár názorných příkladů řešení nerovností pomocí programu Mathematica.

Resumé

The aim of my Bachelor thesis was to provide a comprehensive, clear and interpretation of the theme of inequality and their evidence.

The examples in this work are mainly mainly the introduction to the problems of inequality and representation and explanation of the use of different definitions and theorems on inequalities.

The text is mainly an explanation of the basic types of inequalities such as Cauchy, or AG-inequality and the subsequent use of examples.

A great benefit for me was to learn about and work with the program Mathematica. This program is, in my opinion, very useful for mathematics. In the last chapter, I therefore proved the benefits and ease of operation in proving inequalities. On the enclosed CD you can see some illustrative examples of inequalities using Mathematica.

Použité zdroje a literatura

1. **Herman, Jiří, Kučera, Radan a Šimša, Jaromír.** *Metody řešení matematických úloh I.* Brno : Masarykova univerzita, 2011.

2. Wikipedie otevřená encyklopedie. [Online] http://cs.wikipedia.org/.

3. **Šimša, Jaromír.** Seriál - Nerovnosti. *Matematický korespondenční seminář.* [Online] http://mks.mff.cuni.cz/.

4. **Šalom, Pavel.** Diplomová práce - nerovnosti pro nadané žáky středních škol. [Online] http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/.

5. **Riasat, Samin.** Basics of Olympiad Inequalities. [Online] http://www.mathlinks.ro.