ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Elementární úvod do teorie Gröbnerových bází

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Monika Bláhová

Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 22. června 2014

....

Monika Bláhová

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za inspirativní vedení mé práce, za poskytnuté rady a připomínky, za ochotu a také čas strávený při konzultacích.

Zde bude oficiální zadání bakalářské práce

Obsah

Úvod 6
1 Historie 7
2 Lidské postupy při řešení soustav algebraických rovnic 9
2.1 Algebraická rovnice 9
2.2 Metody řešení soustavy algebraických rovnic 10
2.2.1 Řešení lineárních rovnic pomocí matice 11
2.2.2 Příklady 12
3 Elementární teorie ideálů. Dělení polynomů. Normální tvar polynomu. Uspořádání termů. 24
4 Buchbergerův algoritmus. Gröbnerovy báze a jejich užití při řešení soustav algebraických rovnic 33
4.1 Gröbnerovy báze 33
4.2 Buchbergerův algoritmus 44
4.3 Využití počítačů při výpočtu Gröbnerovy báze 44
Závěr 52
Resumé 53
Seznam použité literatury 54

Úvod

Řešení soustavy rovnic je jedním ze základních problémů, které řeší již děti na základních školách. Samozřejmě řeší jen ty jednodušší soustavy rovnic. Postupně se zvyšují nároky a na středních školách děti počítají složitější soustavy pomocí některých metod. Nejjednodušší soustavou rovnic je soustava lineárních rovnic, na kterých se děti učí tuto problematiku řešit. Řešením soustavy rovnic je nalezení všech neznámých, tak aby vyhovovala všem zadaným rovnicím.

Bakalářská práce je koncipována tak, že v první části připomeneme historii, která je velmi důležitá a rozsáhlá. V další části se pak již začneme věnovat soustavě rovnic a jejich řešení. Nejdříve ukážeme, jak řešit soustavu rovnic pomocí různých metod, jako je eliminační metoda nebo aditivní metoda. S těmito metodami se lidé seznámí již na škole, při řešení jednoduchých soustav rovnic. My v naší práci tyto metody také využijeme, ovšem pro řešení těžších soustav rovnic, které se objevují v matematických olympiádách pro střední školy. Příklady, které v této práci uvedu, jsou převážně z matematických olympiád. Svoje hledání příkladů z matematických olympiád jsem rozšířila i do jiných zemí, nezaměřovala jsem se tedy jen na matematickou olympiádu v České republice. Proto zde najdete i příklad ze vzdálenějších zemí jako je například Venezuela.

Ve čtvrté části práce seznámíme čtenáře s pojmem Gröbnerovy báze. Abychom mohli pojem zavést, musíme si předtím definovat některé pojmy, což provedeme ve třetí části této práce, kde uvedeme i některé příklady pro lepší pochopení. Poslední část (tedy čtvrtá část) práce je rozdělena na dvě části. V první části je definován pojem Gröbnerovy báze a jsou zde uvedeny příklady. V druhé části je pak ukázáno jak nejen Gröbnerovy báze, ale i například S-polynom počítat pomocí počítače. Příklady, které budou uvedeny v práci, jsou řešeny v matematickém programu Maple 17.

Cílem práce je seznámit čtenáře s Gröbnerovými bázemi a díky tomu dokáže vyřešit zadanou soustavu rovnic pomocí Gröbnerových bází nejen ručně, což je velmi časově náročné, ale i pomocí počítačového programu.

1 Historie

Ve stručném úvodu se pokusím shrnout pozoruhodnou historii vývoje algebry. Uvidíme, že bylo třeba nashromáždit mnoho algebraických poznatků, než mohla být v poslední třetině minulého století rozpracována teorie Gröbnerových bází.

Na vzniku algebry, která řešila numerické problémy pomocí operací se symboly, měl velkou zásluhu Al-Chvarizmi a další islámští matematikové v letech 800 – 1 000 n. l.

Pro Evropu byl však velmi důležitý al-Chorezmího algebraický traktát, jehož název se dá přeložit jako Krátká kniha o počtu připočítáváním a porovnáváním. Algebraická část tohoto traktátu byla věnována především lineárním a kvadratickým rovnicím s celočíselnými koeficienty.

Abú Abdulláh Muhammad ibn Músá al-Chorezmí al-Mádzúsí byl arabský matematik. Díky arabským učencům se uchovaly starší poznatky, v době, kdy se Evropa potácela v kulturním úpadku. Nejen že arabští učenci starší poznatky uchovali, ale také je rozmnožovali. To, že arabští matematici měli přístup ke starším poznatkům, nastalo hlavně kvůli expanzi islámu do řady oblastí. Tak mohli arabští matematici poznat matematiku Řecka, Egypta a Mezopotámie.

Velmi důležitou se stala otázka řešitelnosti nejen lineární a kvadratické rovnice, ale obecně algebraické rovnice, která má tvar

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \ldots + a_{n-3} x^3 + a_{n-2} x^2 + a_{n-3} x + a_n = 0$, *kde* $a_0 \neq 0$.

Lineární a kvadratickou rovnici, tj. rovnice prvního a druhého stupně uměli řešit již babylónští matematici. Bylo to zhruba před 4 000 lety a tak asi nikoho z nás nepřekvapí, že místo matematické symboliky, kterou používáme dnes, vše zapisovali slovně.

Řešení lineární rovnice $ax + b = 0$ a kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, v obou případech $a \neq 0$, již bylo známo. Proto se začaly objevovat snahy o nalezení řešení rovnice o stupeň vyšší, tedy kubické rovnice. To se povedlo až po roce 1 500, kdy v Itálii profesor univerzity v Bologni Scipione del Ferro objevil metodu řešení kubických rovnic. Avšak ten, kdo publikoval vzorec pro řešení kubických rovnic, nebyl tento profesor ani Niccoló Fontana, který vzorec nezávisle na profesorovi také objevil, ale byl to Gerolamo Cardano. Již dříve bylo známé, jak z kubické rovnice odstranit kvadratický člen a tak se matematikové mohli zaměřit pouze na to, jak se zbavit kubického členu, tedy jak vyřešit rovnici $x^3 + ax + b = 0$. Tak vznikl vzorec, který se nazývá Cardanovým vzorcem, i přesto, že metodu řešení kubických rovnic vynalezl někdo jiný a Cardano ji pouze vydal. Tento vzorec zní:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Metodu pro řešení algebraické rovnice čtvrtého stupně objevil Cardanův žák Ludovico Ferrari.

Během následujících let se pokoušeli matematici nalézt i metodu pro řešení algebraických rovnic pátého a vyššího stupně, který by byl v radikálech, tak jako jsou v radikálech rovnice pro řešení algebraické rovnice prvního až čtvrtého stupně. Pojem radikál byl užíván pro používání odmocnin, proto se mluví o vyjádření kořenů algebraické rovnice v radikálech.

Teprve až v 19. století se ukázalo, že rovnice pátého a vyššího stupně nemají řešení v radikálech. Díky tomuto zjištění bylo zbytečné hledat obecné vzorce pro řešení těchto rovnic. S tímto objevem přišel norský matematik Niels Henrik Abel. [1]

Ve dvacátém století se začaly hodně využívat počítače. Počítače se dostaly i do matematické oblasti, ve které dosti usnadňovaly práci. Nejen počítače, ale i některé druhy kalkulátorů matematikům usnadňovaly práci.

Mohly tak být nalezeny některé nové algoritmy a užití Gröbnerových bází a porovnání těchto postupů s „lidskými“ metodami se budeme věnovat dále.

2 Lidské postupy při řešení soustav algebraických rovnic

2.1 Algebraická rovnice

Definice a věty v této kapitole jsou převzaty z [4].

Definice 2.1.1.: Algebraická rovnice

Buď *n* přirozené číslo a

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \dots + a_{n-3} x^3 + a_{n-2} x^2 + a_{n-3} x + a_n$

je polynom stupně n s reálnými koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$, kde $a_0 \neq 0$. Koeficient a_0 se nazývá vedoucí koeficient polynomu $P_n(x)$ a koeficient a_n absolutní člen polynomu $P_n(x)$. Člen $a_0 x^n$ nazýváme vedoucí člen polynomu $P_n(x)$. Algebraickou rovnicí stupně *n* rozumíme rovnici tvaru

$P_n(x) = 0$, *tj.* $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \dots + a_{n-3}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-3}x + a_n = 0.$

Definice 2.1.2.: Řešení algebraické rovnice

Řešením algebraické rovnice rozumíme číslo *b*, které splňuje podmínku $P_n(b) = 0$, tj. po dosazení za *x* splňuje rovnost

$a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + a_3 b^{n-3} \dots + a_{n-3} b^3 + a_{n-2} b^2 + a_{n-3} b + a_n = 0.$

Rovnice do 4. stupně se dají řešit analyticky, naopak rovnice 5. a vyššího stupně nemají obecný vzorec pro řešení, jak již zaznělo v první kapitole. Řešení polynomiálních rovnic stupně $n \geq 5$ je nutné hledat numericky.

Definice 2.1.3.: Soustava algebraické rovnice

Soustavou *m* polynomiálních (algebraických) rovnic o *n* neznámých nad oborem integrity I je každá soustava, kterou lze upravit na tvar

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{gathered}$$

kde výrazy na levých stranách jsou nenulové polynomy *n* neurčitých nad I.

2.2 Metody řešení soustavy algebraických rovnic

V této kapitole nejdříve vyjmenuji metody řešení soustavy algebraických rovnic a následně udělám několik příkladů.

Druhy metod řešení soustavy algebraických rovnic

a) Eliminační metoda – úprava některé z rovnic, často kombinovaná s aditivní metodou
b) Metoda faktorizace – metoda, kdy upravujeme rovnici do té doby, dokud jí nemáme v součinovém tvaru, kdy pak řešíme případ, aby se závorky rovnaly 0.
c) Metoda nerovností a odhadů – metoda, která je založena na různém druhu nerovností, pomocí kterých dojdeme k výsledku, při řešení soustavy algebraických rovnic můžeme využívat například nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nebo Cauchy-Schwarzovu nerovnost
d) Aditivní metoda – sečtení některých nebo všech rovnic v soustavě algebraických rovnic
e) Metoda čtverců – metoda, kde uplatňujeme doplnění na čtverec a pak již můžeme určit řešení
f) Metoda dvojmocí
g) Grafická metoda
h) Metoda extremálního prvku – tato metoda využívá maxima a minima ze všech prvků soustavy algebraických rovnic
i) Substituční metoda

[5]

Poznámka: Faktorizace neboli rozklad polynomů je při řešení algebraické rovnice lidskými postupy častokrát velmi složitý. Díky vynálezu počítačů ve dvacátém století se rozklad polynomů velmi zjednodušil. Dnes již existují symbolické výpočty realizující kalkulátory, které dokážou nalézt faktorizaci polynomů, i dosti obtížných.

2.2.1 Řešení lineárních rovnic pomocí matice

Definice a věty v této podkapitole jsou převzaty z [16].

Definice 2.2.1.1.: Matice

Číselnou obdélníkovou maticí typu (m, n) budeme rozumět obdélníkové schéma A (m, n) o m-řádcích a o n-sloupcích, které je ve tvaru $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$ a ve kterém a_{ij} jsou čísla racionální (reálná či komplexní).

Věta 2.2.1.2.: Hodnost matice

Hodností matice A (značíme hod (A)) rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů této matice.

Definice 2.2.1.3.: Soustava lineárních rovnic

Soustavou n lineárních rovnic o m neznámých nad tělesem T budeme rozumět soustavu rovnic tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = y_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = y_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = y_n,$$

kde koeficienty $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nm}$ a pravé strany $y_1, y_2, \cdots, y_n$ jsou prvky tělesa T. Maticový zápis soustavy rovnic je $A.\vec{x} = \vec{y}$.

Nyní máme formulovány všechny definice, které potřebujeme k vyslovení Frobeniovy věty a řešení lineárních rovnic.

Definice 2.2.1.4.: Frobeniova věta

Postačující a nutnou podmínkou pro to, aby soustava lineárních rovnic byla řešitelná je, že hodnost matice soustavy $hod(A)$ je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy $hod\ (A/\vec{y})$. Tedy, když $hod(A) = hod\ (A/\vec{y})$.

Věta 2.2.1.5.: Řešitelnost soustavy rovnic

Pokud je hodnost upravené matice (tzn. bez pravé strany) různá od hodnosti upravené rozšířené matice, potom soustava nemá žádné řešení (vyplývá to z Frobeniovy věty).

Je-li hodnost upravené matice stejná jako hodnost upravené rozšířené matice a současně je tato hodnost rovna počtu neznámých soustavy, pak má soustava právě jedno řešení.

Pokud hodnost upravené matice je stejná jako hodnost upravené rozšířené matice, avšak menší než počet neznámých soustavy, má soustava nekonečně mnoho řešení.

2.2.2 Příklady

Dané příklady jsou získány z [5], [8], [9], [10], [11].

Příklad 2.2.2.1.

Zadání: V R^2 řešte soustavu algebraických rovnic

$$x^2 + 1 = 2y$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Řešení:

V této soustavě algebraické rovnice použijeme metodu eliminace.

$$x^2 + 1 = 2y$$

$\underline{y^2 + 1 = 2x}$ vyjádříme si $x = \frac{y^2+1}{2}$ a dosadíme do první rovnice

$$\left(\frac{y^2 + 1}{2}\right)^2 + 1 = 2y$$

Tím jsme získali algebraickou rovnici v neznámé y.

$$\frac{y^4 + 2y^2 + 1}{4} + 1 = 2y.$$

Levou stranu převedeme na společného jmenovatele.

$$\frac{y^4+2y^2+5}{4} = 2y.$$

Teď se zbavíme zlomku a výraz na pravé straně si převedeme na levou stranu, abychom na pravé straně měli jenom 0.

$$y^4 + 2y^2 - 8y + 5 = 0.$$

Dostali jsme teď algebraickou rovnici čtvrtého stupně, pokusíme se algebraickou rovnici snížit o stupeň. Když dosadíme y = 1, zjistíme, že jedna je kořen dané rovnice. Můžeme psát:

$(y^4 + 2y^2 - 8y + 5) : (y - 1) = y^3 + y^2 + 3y - 5.$

Tím jsme získali algebraickou rovnici třetího stupně, pokud opět zkusíme dosadit číslo 1, zjistíme, že je opět jedním z kořenů a proto můžeme opět psát:

$(y^3 + y^2 + 3y - 5) : (y - 1) = y^2 + 2y + 5.$

Dostáváme algebraickou rovnici druhého stupně, kterou řešíme pomocí diskriminantu. $D = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16$. Rovnice nemá reálné řešení, jedná se o nerozložitelný kvadratický trojčlen.

Rovnici $y^4 + 2y^2 - 8y + 5 = 0$ jsme postupně upravili na tvar

$(y - 1)^2 \,.\, (y^2 + 2y + 5) = 0$, zjistili jsme, že rovnice má dvojnásobný kořen a to:

$y = 1$. Tuto hodnotu nyní můžeme dosadit do rovnice, kde jsme si vyjádřili x.

$x = \frac{y^2+1}{2} = \frac{1^2+1}{2} = 1$, výsledkem je obor pravdivosti $P = \{(1, 1)\}$.

Zkoušku u tohoto příkladu provádět nemusíme, protože jsme zde prováděli jenom ekvivalentní úpravy.

Příklad 2.2.2.2.

Zadání tohoto příkladu jsem získala ze stránek české matematické olympiády (olympiáda pro střední školy, 57. ročník – školní kolo kategorie A).

Zadání: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - y = z^2$$
$$y^2 - z = x^2$$
$$z^2 - x = y^2.$$

Řešení:

Nejdříve sečteme druhou a třetí rovnici a dostaneme $y^2 - z + z^2 - x = x^2 + y^2$ a po úpravě máme rovnici $(z + x).(z - x - 1) = 0$.

Řešení zjistíme rozborem dvou případů.

a) $z + x = 0 \Rightarrow x = -z$

Dosadíme do první rovnice. $(-z)^2 - y = z^2$

$$-y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Teď dosadíme $y = 0$ do druhé rovnice. $0 - z = (-z)^2$

$$z.(z + 1) = 0.$$

Z této rovnice dostáváme dvě složky řešení a to $z_1 = 0$ a $z_2 = -1$.

Pokud toto řešení dosadíme do rovnice $x = -z$, dostáváme dvě složky řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$.

b) $z - x - 1 = 0 \Rightarrow z = x + 1$

Opět dosadíme do první rovnice.

$x^2 - y = (x + 1)^2$

$x^2 - y = x^2 + 2x + 1$

$y = -2x - 1.$

Teď můžeme dosadit z a y do třetí rovnice.

$(x + 1)^2 - x = (-2x - 1)^2$

$x^2 + 2x + 1 - x = 4x^2 + 4x + 1$

$-3x^2 - 3x = 0$

$-3x.(x + 1) = 0.$

Z této rovnice dostáváme dvě složky řešení a to $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$.

Pokud toto řešení dosadíme do rovnice $z = x + 1$ a $y = -2x - 1$, dostáváme dvě složky řešení $z_1 = 0$ a $z_2 = 1$ a $y_1 = 1$ a $y_2 = -1$.

Zjistili jsme, že zadaná soustava rovnic má čtyři řešení a obor pravdivosti je

$P = \{(0, 0, 0), (1, 0, -1), (-1, 1, 0), (0, -1, 1)\}.$

Příklad 2.2.2.3.

Tento příklad jsem našla na stránkách britské matematické olympiády (z roku 2013).

Zadání: V R^3 řešte soustavu

$$x^2 - 4y + 7 = 0$$

$$y^2 - 6z + 14 = 0$$

$$z^2 - 2x - 7 = 0.$$

Řešení:

Nejprve si sečteme všechny tři rovnice dohromady a dostaneme jednu rovnici ve tvaru

$$x^2 - 4y + 7 + y^2 - 6z + 14 + z^2 - 2x - 7 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 14 = 0.$$

Nyní provedeme doplnění na čtverec a dostaneme rovnici

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 + 14 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 0.$$

Odtud vidíme, že řešení je ve tvaru $x = 1; y = 2; z = 3$, obor pravdivosti $P = \{(1, 2, 3)\}$.

Příklad 2.2.2.4.

Tento příklad jsem získala na stránkách slovenské matematické olympiády (53. ročník, školské kolo kategorie A).

Zadání:

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$$
$$y^2 + 2zx = 6.(z + x - 2)$$
$$z^2 + 2xy = 6.(x + y - 2).$$

Řešení:

Nejdříve si tuto soustavu zjednodušíme a to tak, že a) od druhé rovnice odečteme první rovnici a b) od třetí rovnice odečteme první rovnici.

a) $y^2 + 2zx - x^2 - 2yz = 6.(z + x - 2) - 6.(y + z - 2)$
$y^2 + 2zx - x^2 - 2yz - 6x + 6y = 0$
$y.(y - 2z + 6) - x.(x - 2z + 6) = 0$
$(y - x).(x + y - 2z + 6) = 0.$

b) $z^2 + 2xy - x^2 - 2yz = 6.(x + y - 2) - 6.(y + z - 2)$
$z^2 + 2xy - x^2 - 2yz - 6x + 6z = 0$
$z.(z - 2y + 6) - x.(x - 2y + 6) = 0$
$(z - x).(x + z - 2y + 6) = 0.$

Dostáváme tedy ekvivalentní soustavu rovnic s původní (zadanou) soustavou rovnic

$$x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$$
$$(y - x).(x + y - 2z + 6) = 0$$
$$(z - x).(x + z - 2y + 6) = 0.$$

Z ekvivalentní soustavy vidíme, že řešení zjistíme rozdělením na čtyři případy:

1) $y - x = 0 \wedge z - x = 0$
2) $y - x = 0 \wedge x + z - 2y + 6 = 0$
3) $z - x = 0 \wedge x + y - 2z + 6 = 0$
4) $x + y - 2z + 6 = 0 \wedge x + z - 2y + 6 = 0.$

Rozebereme si teď jednotlivé případy zvlášť.

1) $y - x = 0 \wedge z - x = 0$

Z těchto dvou rovností vidíme, že $y = x$ a $z = x$. Platí tedy $x = y = z$.

Dosadíme do první rovnice $x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$ a dostáváme kvadratickou rovnici.

$$x^2 + 2.x.x = 6.(x + x - 2)$$
$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$
$$3.(x^2 - 4x + 4) = 0$$
$$3.(x - 2)^2 = 0.$$

Z této rovnosti již vidíme, že $x = 2$.

Řešení: $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

2) $y - x = 0 \wedge x + z - 2y + 6 = 0$

Protože z první rovnice vidíme, že $y = x$, můžeme rovnici $x + z - 2y + 6 = 0$ upravit na tvar $x + z - 2x + 6 = 0$. Vyjádříme si $z = x - 6$ a dosadíme do první rovnice $x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$

$$x^2 + 2x.(x - 6) = 6.(x + x - 6 - 2)$$
$$3x^2 - 24x + 48 = 0$$
$$3.(x^2 - 8x + 16) = 0$$
$$3.(x - 4)^2 = 0.$$

Z rovnosti již vidíme, že $x = 4$. Dosadíme do rovnic, a tím zjistíme neznámé x, y, z.

Řešení: $(x, y, z) = (4, 4, -2)$.

3) $z - x = 0 \wedge x + y - 2z + 6 = 0$

Z první rovnice opět vidíme, že $z = x$. Můžeme tedy rovnici $x + y - 2z + 6 = 0$ upravit na tvar $x + y - 2x + 6 = 0$, odtud vyjádříme $y = x - 6$ a dosadíme do první rovnice $x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$.

$$x^2 + 2x.(x - 6) = 6.(x - 6 + x - 2)$$
$$3x^2 - 24x + 48 = 0.$$

Dostáváme stejnou kvadratickou rovnici jako v předchozím případě. Po vyřešení a dosazení do rovnic dostáváme řešení.

Řešení: $(x, y, z) = (4, -2, 4)$.

4) $x + y - 2z + 6 = 0 \wedge x + z - 2y + 6 = 0$

Od první rovnice odečteme druhou, tj. $x + y - 2z + 6 - x - z + 2y - 6 = 0$. Upravíme a dostaneme $3y - 3z = 0$, můžeme tedy psát $y = z$. Dosadíme do rovnice $x + y - 2z + 6 = 0$

$x + z - 2z + 6 = 0$

$x = z - 6.$

Získané rovnosti dosadíme do první rovnice $x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$

$$(z - 6)^2 + 2.z.z = 6.(z + z - 2)$$

$$z^2 - 12z + 36 + 2z^2 = 6z + 6z - 12$$

$$3z^2 - 24z + 48 = 0.$$

Tuto kvadratickou rovnici jsme už řešili a tak víme, že výsledkem je dvojnásobný kořen $z = 4$. Výsledek nyní dosadíme do rovností a dostáváme řešení.

Řešení: $(x, y, z) = (-2, 4, 4)$.

Zjistili jsme, že zadaná soustava rovnic má čtyři řešení a obor pravdivosti

$P = \{(2, 2, 2); (4, 4, -2), (4, -2, 4); (-2, 4, 4)\}$.

Příklad 2.2.2.5.

Tento příklad jsem našla na stránkách polské matematické olympiády (56. ročník – I. etapa).

Zadání: V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$x^2 = yz + 1$$

$$y^2 = zx + 2$$

$$z^2 = xy + 4.$$

Řešení:

a) První rovnici vynásobíme *y*, druhou *z* a třetí *x* a dostaneme soustavu rovnic:

$$x^2y = y^2z + y$$

$$y^2z = z^2x + 2z$$

$$z^2x = x^2y + 4x.$$

Nyní sečteme všechny rovnice dohromady a máme rovnici

$$x^2y + y^2z + z^2x = y^2z + y + z^2x + 2z + x^2y + 4x$$

$$0 = y + 2z + 4x.$$

b) První rovnici vynásobíme *z*, druhou *x* a třetí *y* a dostaneme soustavu rovnic:

$$x^2z = yz^2 + z$$

$$y^2x = zx^2 + 2x$$

$$z^2y = xy^2 + 4y.$$

Opět všechny rovnice sečteme dohromady a dostáváme rovnici

$$x^2z + y^2x + z^2y = yz^2 + z + zx^2 + x + xy^2 + 4y$$

$$0 = z + 2x + 4y.$$

Získali jsme nyní dvě rovnice

$$0 = y + 2z + 4x$$

$$0 = z + 2x + 4y.$$

Pokud vynásobíme rovnici $0 = z + 2x + 4y$ číslem -2 a obě rovnice sečteme, dostaneme rovnost $0 = -7y$ a odtud vidíme, že $y = 0$.

Nyní můžeme dosadit do první rovnice $x^2 = yz + 1$:

$$x^2 = 0. z + 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow\ x = \pm 1.$$

Teď nám nic nebrání k tomu, abychom *x* a *y* dosadili do druhé rovnice $y^2 = zx + 2$ a získali neznámou z.

$$0 = z. \pm 1 + 2.$$

Díky této rovnici můžeme vidět, že *z* má dvě složky řešení $z_1: z + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = -2$ a $z_2: -z + 2 = 0 \Rightarrow z_2 = 2$.

Zadaná soustava má dvě řešení.

$P = \{(1, 0, -2); (-1, 0, 2)\}$.

Příklad 2.2.2.6.

Zadání tohoto příkladu jsem opět získala na stránkách polské matematické olympiády (58. ročník – I. etapa).

Zadání: V R^3 řešte soustavu

$$x^2 + 2yz + 5x = 2$$

$$y^2 + 2zx + 5y = 2$$

$$z^2 + 2xy + 5z = 2.$$

Řešení:

Od první rovnice odečteme druhou rovnici a dostáváme

$$x^2 + 2yz + 5x - y^2 - 2zx - 5y = 2 - 2$$

$$x. (x - 2z + 5) - y. (y - 2z + 5) = 0$$

$$(x - y). (y + x - 2z + 5) = 0.$$

Nyní od první rovnice odečteme třetí rovnici

$$x^2 + 2yz + 5x - z^2 - 2xy - 5z = 2 - 2$$

$$x. (x - 2y + 5) - z. (z - 2y + 5) = 0$$

$$(x - z). (x + z - 2y + 5) = 0.$$

Vznikla nám nyní nová soustava rovnic, která je ovšem ekvivalentní se zadanou soustavou rovnic

$$x^2 + 2yz + 5x = 2$$
$$(x - y).(y + x - 2z + 5) = 0$$
$$(x - z).(x + z - 2y + 5) = 0.$$

Z této jednodušší soustavy vidíme, že řešení získáme rozdělením na čtyři případy a to:

1) $x - y = 0 \wedge x - z = 0$

2) $x - y = 0 \wedge x + z - 2y + 5 = 0$

3) $x - z = 0 \wedge x + y - 2z + 5 = 0$

4) $x + y - 2z + 5 = 0 \wedge x + z - 2y + 5 = 0$

Nyní rozebereme jednotlivé případy zvlášť.

1) $x - y = 0 \wedge x - z = 0$

$$x = y \wedge x = z \Rightarrow x = y = z.$$

Doplníme do první rovnice: $x^2 + 2yz + 5x = 2$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Vznikla nám kvadratická rovnice, kterou vyřešíme pomocí diskriminantu

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.3.(-2) = 25 + 24 = 49.$$

Z diskriminantu vidíme, že rovnice bude mít dva různé reálné kořeny $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+7}{2.3} = \frac{1}{3}$ a $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-7}{2.3} = -2.$

Dostáváme řešení: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);\ (-2, -2, -2).$

2) $x - y = 0 \wedge x + z - 2y + 5 = 0$

Z první rovnice vidíme, že $x = y$. Dosadíme do naší druhé rovnice a dostáváme: $x + z - 2x + 5 = 0$, odtud si vyjádříme $z = x - 5$ a můžeme teď dosadit do první rovnice $x^2 + 2yz + 5x = 2$

$x^2 + 2x(x - 5) + 5x = 2$

$3x^2 - 5\mathrm{x} - 2 = 0.$

Vznikla nám opět kvadratická rovnice, kterou jsme již vyřešili v předchozím případě.

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.3.(-2) = 25 + 24 = 49,$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+7}{2.3} = 2$ a $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-7}{2.3} = -\frac{1}{3}.$

Dosadíme do rovnice 2) a dostáváme řešení.

Řešení: $(x, y, z) = (2, 2, -3);\ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}\right).$

3) $x - z = 0 \quad \wedge x + y - 2z + 5 = 0$

Z první rovnice opět máme $x = z$, a dosazením do druhé rovnice dostáváme:

$x + y - 2x + 5 = 0$. Odtud $y = x - 5$.

Dosadíme-li opět do první rovnice $x^2 + 2yz + 5x = 2$, získáme kvadratickou rovnici $x^2 + 2x.(x - 5) + 5x - 2 = 0$, po úpravě $3x^2 - 5\mathrm{x} - 2 = 0$. Řešení již známe z předchozích případů a tak jen pro připomenutí

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.3.(-2) = 25 + 24 = 49$ a dostáváme dva různé kořeny

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+7}{2.3} = 2$ a $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-7}{2.3} = -\frac{1}{3}$. Dosazením do rovnic získáme řešení.

Řešení: $(x, y, z) = (2, -3, 2)$; $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

4) $x + y - 2z + 5 = 0 \wedge x + z - 2y + 5 = 0$

Druhou rovnici odečteme od první rovnice a dostáváme rovnici $z - y - 2y + 2z = 0$, po úpravě máme rovnost $z = y$. Pokud tuto rovnost dosadíme do druhé rovnice, dostáváme $x + y - 2y + 5$ odtud si můžeme vyjádřit $x = y - 5$. Dosadíme-li do první rovnice $x^2 + 2yz + 5x = 2$, dostáváme rovnici:

$(y - 5)^2 + 2.y.y + 5.(y - 5) - 2 = 0$ po úpravě dojdeme opět ke kvadratické rovnici $3y^2 - 5y - 2 = 0$, řešení této rovnice již ale známe a tak můžeme psát, že $y_1 = 2$ a $y_2 = -\frac{1}{3}$. Po dosazení do rovnic zjistíme neznámé x, y, z.

Řešení: $(x, y, z) = (-3, 2, 2)$; $\left(-\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Ze čtyř případů můžeme vidět, že zadaná soustava rovnic má osm řešení.

$P = \{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; $(-2, -2, -2)$; $(2, 2, -3)$; $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}\right)$; $(2, -3, 2)$; $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; $(-3, 2, 2)$; $\left(-\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Příklad 2.2.2.7.

Zadání tohoto příkladu jsem našla na stránkách slovenské matematické olympiády (konkrétně 63. ročník, krajské kolo, kategorie B).

<u>Zadání:</u> V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$x^2 + 6.(y + z) = 85$$
$$y + 6.(z + x) = 85$$
$$z^2 + 6.(x + y) = 85.$$

Řešení:

Při řešení tohoto příkladu budeme postupovat opět stejně jako v předchozím příkladě.

a) Odečteme druhou rovnici od první a získáme rovnici

$$x^2 + 6y + 6z - y^2 - 6z - 6x = 85 - 85$$
$$x^2 - 6x - y^2 + 6y = 0$$
$$x.(x-6) - y.(y-6) = 0$$
$$(x-y).(x+y-6) = 0.$$

b) Odečteme třetí rovnice od první a získáme rovnici

$$x^2 + 6y + 6z - z^2 - 6x - 6y = 85 - 85$$
$$x^2 - 6x - z^2 + 6z = 0$$
$$x.(x-6) - z.(z-6) = 0$$
$$(x-z).(x+z-6) = 0.$$

Vznikne nám nová soustava rovnic, která je ekvivalentní s původní soustavou rovnic

$$x^2 + 6.(y+z) = 85$$
$$(x-y).(x+y-6) = 0$$
$$(x-z).(x+z-6) = 0.$$

Ze soustavy rovnic můžeme vidět, že nám opět vzniknou čtyři případy, abychom našli řešení této soustavy rovnic.

Rozebereme si nyní jednotlivé případy zvlášť.

1) $x - y = 0 \wedge x + z - 6 = 0$

   Z první rovnice dostáváme rovnost $x = y$. Z druhé rovnice si vyjádříme $z = 6 - x$. Nyní obě upravené rovnice dosadíme do první rovnice $x^2 + 6.(y+z) = 85$ a dostáváme rovnici $x^2 + 6.(x + 6 - x) = 85$, po úpravě dostáváme rovnici $x^2 + 36 = 85$, kterou dále upravíme na $x^2 = 49$, což je po odmocnění $x = \pm 7$. Po dosazení do rovnic dostáváme dvě řešení, která jsou ve tvaru:

   $(x, y, z) = (7, 7, -1); (-7, -7, 13)$.

2) $x - y = 0 \wedge x - z = 0$

   Z první rovnice vyjde $x = y$ a z druhé rovnosti vyjde $x = z \Rightarrow x = y = z$. Dosadíme do první rovnice $x^2 + 6.(y+z) = 85$ a dostáváme kvadratickou rovnici $x^2 + 6.(x+x) = 85$, kterou dále upravíme na tvar $x^2 + 12x - 85 = 0$. Kvadratickou rovnici vyřešíme pomocí diskriminantu

$$D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4.1.(-85) = 144 + 340 = 484.$$

   Daná rovnice má dva různé kořeny x_1, x_2.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-12+22}{2.1} = 5$ a $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-12-22}{2.1} = -17.$

Po dosazení dostáváme řešení: $(x, y, z) = (5, 5, 5); (-17, -17, -17)$.

3) $x - z = 0 \wedge x + y - 6 = 0$

Z první rovnice nám vyjde $x = z$ a z druhé rovnice vyjádříme $x = 6 - z$. Dosadíme do první rovnice $x^2 + 6.(y + z) = 85$ a dostáváme rovnici $x^2 + 6.(6 - x + x) = 85$ po upravení máme rovnost $x^2 = 49$, když odmocníme, dostáváme neznámou $x = \pm 7$. Po dosazení do rovností máme dvě řešení: $(x, y, z) = (7, -1, 7); (-7, 13, -7)$.

4) $x + y - 6 = 0 \wedge x + z - 6 = 0$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostáváme rovnici $x - z = 0$, tudíž $x = z$. Z druhé rovnice si vyjádříme $x = 6 - z$. Dosadíme do první rovnice soustavy $x^2 + 6.(y + z) = 85$. Vznikne nám rovnice

$$(6 - z)^2 + 6.(z + z) = 85$$
$$36 - 12z + z^2 + 6z + 6z = 85$$
$$z^2 = 49$$
$$z = \pm 7.$$

Dosadíme do rovnice 4) a dostáváme řešení: $(x, y, z) = (-1, 7, 7); (13, -7, -7)$.

Zadaná soustava rovnic má osm řešení $P = \{(7, 7, -1); (-7, -7, 13); (5, 5, 5); (-17, -17, -17); (7, -1, 7); (-7, 13, -7); (-1, 7, 7); (13, -7, -7)\}$.

Příklad 2.2.2.8.

Tento příklad jsem získala na stránkách venezuelské matematické olympiády (z roku 2006).

Zadání: V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 = 20$$
$$2x + 2y + 2xy = 15.$$

Řešení:

Nejdříve si upravíme druhou rovnici, převedením $2x, 2y$ na pravou stranu rovnice. Dostáváme rovnici $2xy = 15 - 2x - 2y$. Nyní obě rovnice sečteme. Vznikne nám rovnice tvaru $x^2 + 2xy + y^2 = 35 - 2x - 2y$. Vidíme, že na levé straně lze psát $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$. Rovnici můžeme upravit na $(x + y)^2 = 35 - 2.(x + y)$. Nyní si zavedeme substituci $x + y = u$. Vznikla nám rovnice $u^2 = 35 - 2u$. Po převedení na levou stranu tak, abychom měli na pravé straně 0, nám vznikne kvadratická rovnice $u^2 + 2u - 35 = 0$, kterou vyřešíme pomocí diskriminantu $D = b^2 - 4ac = 144$, nyní určíme kořeny $u_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2+12}{2} = 5, u_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2-12}{2} = -7$. Řešení soustavy rovnic si rozdělíme na dva případy:

1) $x + y = 5$
2) $x + y = -7$.

Teď si rozebereme jednotlivé případy zvlášť.

1) $x + y = 5$

   Vyjádříme si $x = 5 - y$. Dosadíme do první rovnice $x^2 + y^2 = 20$ a dostáváme rovnici $(5 - y)^2 + y^2 = 20$

   $25 - 10y + y^2 + y^2 = 20$

   $2y^2 - 10y + 5 = 0.$

   Vypočítáme diskriminant $D = 10^2 - 4.2.5 = 60$. Dostáváme dva různé reálné kořeny $y_1 = \frac{10+\sqrt{60}}{4} = \frac{10+\sqrt{4.15}}{4} = \frac{10+2\sqrt{15}}{4} = \frac{5+\sqrt{15}}{2}$ a $y_2 = \frac{10-\sqrt{60}}{4} = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$.

   Dosadíme do vyjádřené rovnice a dostáváme neznámou *x*:

   $x_1 = 5 - \frac{5+\sqrt{15}}{2}, x_2 = 5 - \frac{5-\sqrt{15}}{2}.$

2) $x + y = -7$

   Vyjádříme si $x = -7 - y$. Dosadíme do první rovnice $x^2 + y^2 = 20$ a dostáváme rovnici $(-7 - y)^2 + y^2 = 20$

   $49 + 14y + y^2 + y^2 - 20 = 0$

   $2y^2 + 14y + 29 = 0.$

   Vypočítáme diskriminant $D = 14^2 - 4.2.29 = -36$. V tomto případě nemá soustava řešení v reálných číslech. Dostáváme dva různé komplexní kořeny

   $y_1 = \frac{-b+i.\sqrt{D}}{2a} = \frac{-14+6i}{4} = \frac{-7+3i}{2}, y_2 = \frac{-b-i.\sqrt{D}}{2a} = \frac{-14-6i}{4} = \frac{-7-3i}{2}.$

   Dosadíme do vyjádřené rovnice a dostáváme neznámou x:

   $x_1 = -7 - \frac{-7+3i}{2}, x_2 = -7 - \frac{-7-3i}{2}.$

Daná soustava má čtyři řešení $P = \{\left(5 - \frac{5+\sqrt{15}}{2}, \frac{5+\sqrt{15}}{2}\right); \left(5 - \frac{5-\sqrt{15}}{2}, \frac{5-\sqrt{15}}{2}\right); \left(-7 - \frac{-7+3i}{2}, \frac{-7+3i}{2}\right); \left(-7 - \frac{-7-3i}{2}, \frac{-7-3i}{2}\right)\}$.

V mé bakalářské práci jsem se zaměřila na obor reálných čísel, ovšem nechci úplně vynechat obor komplexních čísel, proto jsem zde uvedla jeden příklad.

3 Elementární teorie ideálů. Dělení polynomů. Normální tvar polynomu. Uspořádání termů.

V této kapitole uvedu několik definic a vět. U některých uvedu i několik příkladů. Definice a věty v této kapitole mi pomohou k vysvětlení Gröbnerovy báze, kterou budu definovat v další kapitole. Definice a věty v této kapitole jsou převzaty z [3], [2], [1].

Věta 3.1.: Dělení polynomů

Nechť P(x) a Q(x) jsou dva polynomy s reálnými či komplexními koeficienty, Q(x) je nenulový polynom. Pak existují polynomy S(x) a R(x) takové, že:

P(x) = Q(x) . S(x) + R(x).

Polynomy S(x) a R(x) jsou určeny jednoznačně a buď je R(x) nulový polynom nebo stupeň polynomu R(x) je menší než stupeň polynomu Q(x).

Příklad 3.1.

<u>Zadání:</u> Dělte polynom $f = 6x^7 + 19x^4 + 7$ polynomem $g = 3x^3 + 5$.

Přepsání zadání a jeho výsledek:

$$(6x^7 + 19x^4 + 7):(3x^3 + 5) = 2x^4 + 3x + \frac{-15x + 7}{3x^3 + 5}.$$

K tomuto výsledku dojdeme následujícím způsobem. Snažíme se postupně zbavovat nejvyšších mocnin, proto jako první vypočteme $6x^7 : 3x^3 = 2x^4$ a pak vynásobíme výsledek dělitelem. Tedy $(2x^4).(3x^3 + 5) = 6x^7 + 10x^4$. Od našeho zadání tento výsledek odečteme a dostaneme $9x^4 + 7$. Tento mnohočlen opět vydělíme číslem $3x^3$, tedy $9x^4 : 3x^3 = 3x$ a postupujeme stejně jako v předchozím kroku až do té doby než dostaneme nulu nebo zbytek. V našem případě se jedná o zbytek, který je ve tvaru $(-15x + 7)$.

Příklad 3.2.

V tomto příkladě použijeme dělení polynomů dvou neurčitých.

<u>Zadání:</u>

Dělte polynom $f = 4x^2y^2 - 3x^2y + 2x - y^2$ polynomem $g = x^2y + x^2 + 3y$.

<u>Řešení:</u>

$(4x^2y^2 - 3x^2y + 2x - y^2):(x^2y + x^2 + 3y) = 4y - 7$

$\underline{-4x^2y^2 - 4x^2y - 12y^2}$

$-7x^2y - 11y^2 + 2x$

$\underline{7x^2y + 7x^2 + 21y}$

$7x^2 - 11y^2 + 2x + 21y.$

Polynom f můžeme přepsat do tvaru:

$$(x^2y + x^2 + 3y).(4y - 7) + 7x^2 - 11y^2 + 2x + 21y.$$

Definice 3.2.: Definice termu

Nechť F$[x^1, x^2, \dots, x^n]$ je okruh polynomů *n* neurčitých nad tělesem F. Termem (v $x_1, x_2, \dots, x_n$) rozumíme kterýkoli prvek množiny T = $\{x_1^{i_1}x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}; i_1, i_2, \dots, i_n$ jsou celá nezáporná čísla$\}$.

Příklad 3.3.

$x_1^4x_2^5x_3, x_1^2x_2x_3^3, x_1x_2^2x_3, 1 = x_1^0x_2^0x_3^0$ jsou termy (v $x_1x_2x_3$).

Definice 3.3.: Úplné uspořádání termů

Přípustným úplným uspořádáním, značíme $<_T$, na množině termů T nazýváme uspořádání takové, že pro všechny termy *s*, *t*, *u* ϵ T platí:

a) $x_1^0x_2^0 \dots x_n^0 = 1 <_T t$
b) Jestliže $s <_T t$, pak též $s.u <_T t.u$.

Jsou různé druhy uspořádání, uvedu zde dvě a to lexikografické uspořádání termů a inverzní lexikografické uspořádání termů podle (úplného) stupně.

Definice 3.4.: Lexikografické uspořádání termů

(Čisté) lexikografické uspořádání termů $<_L$ je definováno takto:

$x_1^{i_1}x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} <_L x_1^{j_1}x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$, právě když existuje *m* ϵ N takové, že $i_m < j_m$ a zároveň $i_k = j_k$ pro k ϵ {1, 2, …, *m*-1}.

Příklad 3.4.

Zadání: Množinu termů $\{x^2y^2, xz, z^2, yz, x^2, y^2z^2, x, xy\}$ lexikograficky uspořádejte (pokud $z < y < x$).

Řešení: $z <_L z^2 <_L yz <_L y^2z^2 <_L x <_L xz <_L xy <_L x^2 <_L x^2z <_L x^2y^2 <_L$.

Definice 3.5.: Inverzní lexikografické uspořádání termů podle (úplného) stupně

Nechť $t = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ a $u = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j}$ jsou dva termy a $\deg(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k$, $\deg(u) = \sum_{k=1}^{n} j_k$ jejich (úplné) stupně. Inverzní lexikografické uspořádání termů podle (úplného) stupně nebo stručněji jen uspořádání termů podle (úplného) stupně je definováno: $t = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} <_D x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} = u$, právě když buď $\deg(t) < \deg(u)$, nebo $(\deg(t) = \deg(u) \wedge (\exists\, r \epsilon N)(i_r > j_r$ a $i_s = j_s$ pro $s = r + 1, \dots, n)$.

Definice 3.6.

Nechť f ϵ F$[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je polynom a $<_T$ přípustné uspořádání termů z množiny T$[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Každý z monomů vyskytujících se v polynomu *f* je součinem jistého prvku z tělesa F a jistého termu z množiny T$[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Největší z termů vyskytujících se v polynomu *f* nazveme vedoucím termem polynomu *f* a budeme jej značit $lt_T(f)$. Příslušný monom nazveme vedoucím monomem polynomu *f* a označíme $lm_T(f)$ a koeficient z tělesa F v tomto monomu se vyskytující nazveme vedoucím koeficientem polynomu *f* a budeme jej značit $lc_T(f)$. Platí tedy $lm_T(f) = lc_T(f).\ lt_T(f)$. Pokud je zřejmé, jaké přípustné uspořádání termů $<_T$ je v dané situaci užito, píšeme prostě jen *lt (f), lm (f), lc (f).*

Příklad 3.5.

Zadání: Určete vedoucí term, vedoucí monom a vedoucí koeficient polynomu $g = 6x^2y^2 - 2x^2z + 3xy - z$. Jednotlivé termy polynomu g jsou lexikograficky uspořádané (pokud $x > y > z$).

Řešení: Největším termem polynomu g je term x^2y^2, proto je vedoucím termem. Vedoucí monom je člen $6x^2y^2$ a vedoucí koeficient polynomu g je koeficient 6.

Definice 3.7.

Nechť p, q jsou dva nenulové polynomy z oboru integrity F$[x_1, x_2, \dots, x_n]$, kde F je komutativní těleso. Řekneme, že polynom p se redukuje modulo q (při daném přípustném uspořádání termů $<_T$), jestliže v polynomu p existuje monom *m*, který je dělitelný vedoucím monomem $lm_T(q)$ polynomu q.

Věta 3.8.

Jestliže žádný monom polynomu p není dělitelný vedoucím monomem polynomu q, pak říkáme, že polynom p je v normálním tvaru vzhledem ke q. Obdobně říkáme, že polynom p je v normálním tvaru vzhledem k množině Q = $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, jestliže žádný monom v polynomu p není dělitelný žádným z vedoucích monomů polynomů q_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

Definice 3.9.

Je-li p normální tvar polynomu f vzhledem ke Q, tj. je-li p polynom, získaný z f provedením konečného počtu redukcí, přičemž p již neobsahuje žádný monom, který by byl dělitelný vedoucími monomy polynomů z množiny Q, pak píšeme p = normalf (f, Q). Je-li speciálně Q = $\{q\}$ jednoprvková množina, píšeme pouze p = normalf (f, q).

Příklad 3.6.

Zadání: Vypočítejte normální tvar polynomu $f = 7xy^2 + 3xy - 6x + 6y$ množiny $G = \{g_1, g_2\}$, kde $g_1 = x^2y + 2xy^2 - 2x + 2y$ a $g_2 = 3xy - y^2 - 3y$.

Řešení:

Polynom f budeme postupně redukovat pomocí polynomů g_1, g_2.

Od polynomu f odečteme $\frac{7}{3}y.\,g_2$. Po dosazení dostáváme polynom

$7xy^2 + 3xy - 6x + 6y - 7xy^2 + \frac{7}{3}y^3 + 7y^2 = 3xy - 6x + 6y + \frac{7}{3}y^3 + 7y^2$.

Polynom, který nám vyšel, si označíme jako f_1. Nyní budeme od polynomu f_1 odečítat polynom g_2.

Po dosazení dostáváme polynom

$3xy - 6x + 6y + \frac{7}{3}y^3 + 7y^2 - 3xy + y^2 + 3y = -6x + 9y + \frac{7}{3}y^3 + 8y^2$. Tento polynom již nemůžeme dále zjednodušovat. Našli jsme tedy normální tvar polynomu f, který si označíme h a můžeme psát h = normalf $(f, G) = -6x + 9y + \frac{7}{3}y^3 + 8y^2$.

Definice 3.10.

Nechť p, q jsou dva polynomy z oboru integrity F$[x_1, x_2, \dots, x_n]$, na němž je zavedeno přípustné uspořádání termů $<_T$. S-polynomem polynomů p, q nazýváme polynom Spoly $(p, q) = lcm\left(lm_T\,(p), lm_T\,(q)\right).\left(\frac{p}{lm_T\,(p)} - \frac{q}{lm_T\,(q)}\right)$.

Kde lcm je nejmenší společný násobek prvků a lm_T je vedoucí monom polynomu.

Příklad 3.7.

<u>Zadání:</u> Mějme soustavu rovnic z příkladu 2.2.2.4., označme si polynomy

$$g_1 = x^2 + 2yz - 6y - 6z + 12$$
$$g_2 = 2xz - 6x + y^2 - 6z + 12$$
$$g_3 = 2xy - 6x - 6y + z^2 + 12$$

a vypočítejme S-polynomy těchto polynomů. Polynomy jsme si lexikograficky uspořádali (pokud $x > y > z$).

<u>Řešení:</u>

Určíme si nejmenší společný násobek polynomů g_1, g_2, tj. $lcm(x^2, 2xz) = 2x^2z$.

Spoly $(g_1, g_2) = 2x^2z.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_2}{2zx}\right) = 2z.g_1 - x.g_2$

$$= 2z.(x^2 + 2yz - 6y + 12 - 6z) - x.(2xz - 6x + y^2 - 6z + 12)$$
$$= 2x^2z + 4yz^2 - 12yz - 12z^2 + 24z - 2x^2z + 6x^2 - xy^2 + 6xz - 12x$$
$$= -xy^2 + 6xz + 6x^2 - 12x + 4yz^2 - 12yz - 12z^2 + 24z.$$

Nyní si určíme nejmenší společný násobek polynomů g_1, g_3, tj. $lcm(x^2, 2xy) = 2x^2y$.

Spoly $(g_1, g_3) = 2x^2y.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_3}{2xy}\right) = 2y.g_1 - x.g_3$

$$= 2y.(x^2 + 2yz - 6y + 12 - 6z) - x.(2xz - 6x + y^2 - 6z + 12)$$
$$= 2x^2y + 4y^2z - 12y^2 - 12yz + 24y - 2x^2y + 6x^2 + 6xy - xz^2 - 12x$$
$$= 6x^2 + 6xy - xz^2 - 12x + 4y^2z - 12y^2 - 12yz + 24y.$$

Jako poslední si stejným způsobem určíme nejmenší společný násobek polynomů g_2, g_3, tj. $lcm(2xz, 2xy) = 2xyz$.

Spoly $(g_2, g_3) = 2xyz.\left(\frac{g_2}{2xz} - \frac{g_3}{2xy}\right) = y.g_2 - z.g_3$

$$= y.(2yz - 6x + y^2 - 6z + 12) - z.(2xy - 6x - 6y + z^2 + 12)$$
$$= 2xyz - 6xy + y^3 - 6yz + 12y - 2xyz + 6xz + 6yz - z^3 - 12z$$
$$= 6xz - z^3 - 12z - 6xy + y^3 + 12y.$$

Příklad 3.8.

<u>Zadání:</u> Mějme soustavu rovnic z příkladu 2.2.2.6., označme si polynomy

$$g_1 = x^2 + 5x + 2yz - 2$$
$$g_2 = 2xz + y^2 + 5y - 2$$
$$g_3 = 2xy + z^2 + 5z - 2$$

a vypočítejme S-polynomy těchto polynomů. Polynomy jsme si lexikograficky uspořádali (pokud $x > y > z$).

Řešení:

Jako v předchozím příkladě si nejdříve určíme nejmenší společný násobek polynomů g_1, g_2, tj. $lcm(x^2, 2xz) = 2x^2z$.

Spoly $(g_1, g_2) = 2x^2z.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_2}{2zx}\right) = 2z.g_1 - x.g_2 =$

$$= 2z.(x^2 + 5x + 2yz - 2) - x.(y^2 + 2xz + 5y - 2) =$$
$$= 2x^2z + 10xz + 4yz^2 - 4z - 2x^2z - xy^2 - 5xy + 2x =$$
$$= 10xz + 4yz^2 - 4z - xy^2 - 5xy + 2x.$$

Nyní si určíme nejmenší společný násobek polynomůg_1, g_3, tj. $lcm(x^2, 2xy) = 2x^2y$.

Spoly $(g_1, g_3) = 2x^2y.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_3}{2xy}\right) = 2y.g_1 - x.g_3 =$

$$= 2y.(x^2 + 5x + 2yz - 2) - x.(z^2 + 2xy + 5z - 2) =$$
$$= 2x^2y + 10xy + 4y^2z - 4y - 2x^2y - xz^2 - 5xz + 2x =$$
$$= 10xy + 4y^2z - 4y - xz^2 - 5xz + 2x.$$

Jako poslední si určíme S-polynom polynomů g_2, g_3, takže si určíme nejmenší společný násobek polynomů g_2, g_3, tj. $lcm(2\text{xz}, 2xy) = 2\text{xyz}$.

Spoly $(g_2, g_3) = 2xyz.\left(\frac{g_2}{2xz} - \frac{g_3}{z^2 2xy}\right) = y.g_2 - z.g_3 =$

$$= y.(y^2 + 2xz + 5y - 2) - z.(z^2 + 2xy + 5z - 2) =$$
$$= 2xyz + y^3 + 5y^2 - 2y - 2xyz - z^3 - 5z^2 + 2z =$$
$$= y^3 + 5y^2 - 2y - z^3 - 5z^2 + 2z.$$

Příklad 3.9.

Zadání: Mějme soustavu rovnic z příkladu 2.2.2.3., označme si polynomy

$$g_1 = x^2 - 4y + 7$$
$$g_2 = y^2 - 6z + 14$$
$$g_3 = -2x + z^2 - 7$$

a vypočítejme S-polynomy těchto polynomů. Polynomy jsme si lexikograficky uspořádali (pokud $x > y > z$).

Řešení:

Jako v předchozích příkladech si nejdříve určíme nejmenší společný násobek polynomů g_1, g_2, tj. $lcm(x^2, y^2) = x^2y^2$.

Spoly $(g_1, g_2) = x^2 \mathrm{y}^2 . \left(\frac{\mathrm{g}_1}{\mathrm{x}^2} - \frac{\mathrm{g}_2}{\mathrm{y}^2}\right) = y^2 . g_1 - x^2 . g_2 =$

$$= y^2 .(x^2 - 4y + 7) - x^2 .(y^2 - 6z + 14) =$$

$= x^2y^2 - 4y^3 + 7y^2 - x^2y^2 + 6x^2z - 14x^2 = 6x^2z - 14x^2 - 4y^3 + 7y^2.$

Určíme si nejmenší společný násobek polynomů g_1, g_3, tj. $lcm(x^2, -2\mathrm{x}) = -2x^2$.

Spoly $(g_1, g_3) = -2x^2 . \left(\frac{\mathrm{g}_1}{\mathrm{x}^2} - \frac{\mathrm{g}_3}{-2\mathrm{x}}\right) = -2. g_1 - x. g_3 =$

$= -2.(x^2 - 4y + 7) - x.(-2x + z^2 - 7) = -2x^2 + 8y - 14 + 2x^2 - z^2x + 7x =$

$= -xz^2 + 7x + 8y - 14.$

Jako poslední si určíme S-polynom polynomů g_2, g_3, takže si určíme nejmenší společný násobek polynomů g_2, g_3, tj. $lcm(y^2, -2\mathrm{x}) = -2\mathrm{x}y^2$.

Spoly $(g_2, g_3) = -2xy^2 \left(\frac{\mathrm{g}_2}{\mathrm{y}^2} - \frac{\mathrm{g}_3}{-2\mathrm{x}}\right) = -2xg_2 - y^2g_3 =$

$= -2x(y^2 - 6z + 14) - y^2(-2x + z^2 - 7) =$

$= -2xy^2 + 12xz - 28x + 2xy^2 - z^2y^2 + 7y^2 = 12xz - 28x - z^2y^2 + 7y^2.$

Příklad 3.10.

<u>Zadání:</u> Mějme soustavu rovnic z příkladu 2.2.2.7., označme si polynomy

$$g_1 = x^2 + 6y + 6z - 85$$
$$g_2 = 6x + y^2 + 6z - 85$$
$$g_3 = 6x + 6y + z^2 - 85$$

a vypočítejme S-polynomy těchto polynomů. Polynomy jsme si lexikograficky uspořádali (pokud $x > y > z$).

<u>Řešení:</u>

Spoly $(g_1, g_2) = 6x^2 . \left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_2}{6x}\right) = 6. g_1 - x. g_2 =$

$$= 6.(x^2 + 6y + 6z - 85) - x.(6x + y^2 + 6z - 85) =$$
$$= 6x^2 + 36y + 36z - 510 - 6x^2 - xy^2 - 6xz + 85x =$$
$$= -xy^2 - 6xy + 85x + 36y + 36z - 510.$$

Spoly $(g_1, g_3) = 6x^2 . \left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_3}{6x}\right) = 6. g_1 - x. g_3 =$

$$= 6.(x^2 + 6y + 6z - 85) - x.(6x + 6y + z^2 - 85) =$$
$$= 6x^2 + 36y + 36z - 510 - 6x^2 - 6xy - xz^2 + 85x =$$
$$= -6xy - xz^2 + 85x + 36y + 36z - 510$$

$\text{Spoly}\ (g_2, g_3) = 6x.\left(\frac{g_2}{6x} - \frac{g_3}{6x}\right) = g_2 - g_3 =$

$$= 6x + y^2 + 6z - 85 - (6x + 6y + z^2 - 85) =$$
$$= 6x + y^2 + 6z - 85 - 6x - 6y - z^2 + 85 =$$
$$= y^2 - 6y - z^2 + 6z.$$

Příklad 3.11.

Zadání: Vypočítejte Spoly (g_1, g_2), Spoly (g_1, g_3), Spoly (g_2, g_3) a normální tvary (konkrétně normalf (Spoly $(g_1, g_2), G$), normalf (Spoly $(g_1, g_3), G$), normalf (Spoly $(g_2, g_3), G$) dané soustavy rovnic:

$$x^2 = yz + 1$$
$$y^2 = xz + 2$$
$$z^2 = xy + 4.$$

Použili jsme soustavu rovnic z příkladu 2.2.2.5.

Řešení:

Nejdříve si označíme polynomy $g_1 = x^2 - yz - 1, g_2 = -xz + y^2 - 2$, $g_3 = -xy + z^2 - 4$. Tyto polynomy jsme si již lexikograficky uspořádali (pokud $x > y > z$). Množina G je tvořena polynomy g_1, g_2, g_3.

Nyní budeme řešit S-polynom polynomů g_1, g_2. Určíme si nejmenší společný násobek $lcm\ (x^2, -xz) = -x^2z$.

$\text{Spoly}\ (g_1, g_2) = -x^2z.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_2}{-xz}\right) = -z.g_1 - x.g_2 =$

$= -z.(x^2 - yz - 1) - x.(-xz + y^2 - 2) = -x^2z + yz^2 + z + x^2z - xy^2 + 2x =$

$= 2x + yz^2 + z - xy^2.$

Teď když známe S-polynom polynomů g_1, g_2 si určíme normální tvar tohoto polynomu.

Normalf (Spoly $(g_1, g_2), G) = 2x + yz^2 + z - xy^2 - y.g_3 = 2x + yz^2 + z - xy^2 + xy^2 - yz^2 + 4y = 2x + 4y + z.$

Teď si vypočítáme S-polynom polynomů g_1, g_3. Opět si určíme nejmenší společný násobek $lcm\ (x^2, -xy) = -x^2y$.

$\text{Spoly}\ (g_1, g_3) = -x^2y.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_3}{-xy}\right) = -y.g_1 - x.g_3 =$

$= -y.(x^2 - yz - 1) - x.(-xy + z^2 - 4) = -x^2y + yz^2 + y + x^2y - xz^2 + 4x =$

$= y^2z + y - xz^2 + 4x.$

Když známe S-polynom polynomů g_1, g_3, můžeme si určit normální tvar tohoto polynomu.

Normalf (Spoly $(g_1, g_3), G) = y^2z + y - xz^2 + 4x - z. g_2 =$

$$= -xz^2 + 4x + y^2z + y + xz^2 - y^2z + 2z =$$

$$= 4x + y + 2z - 2.(2x + 4y + z) = 4x + y + 2z - 4x - 8y - 2z = -7y.$$

Poslední S-polynom, který nám chybí spočítat je S-polynom polynomů g_2, g_3. Nejprve si určíme nejmenší společný násobek $lcm\ (-xz, -xy) = -xyz$.

Spoly $(g_2, g_3) = -xyz.\left(-\frac{g_2}{-xz} + \frac{g_3}{-xy}\right) = -y. g_2 + z. g_3 =$

$$= -y.(-xz + y^2 - 2) + z.(-xy + z^2 - 4) = xyz - y^3 + 2y - xyz + z^3 - 4z =$$

$$= -y^3 + z^3 + 2y - 4z.$$

Nyní, když známe Spoly (g_2, g_3) nám nic nebrání k tomu, abychom vypočítali i normální tvar právě vzniklého polynomu.

Normalf (Spoly $(g_2, g_3), G) = -y^3 + z^3 + 2y - 4z - \frac{1}{7}y^2. g_5 =$

$$= -y^3 + 2y + z^3 - 4z + y^3 = -y^3 + z^3 + 2y - 4z + y^3 = 2y + z^3 - 4z + \frac{2}{7}. g_5 =$$

$$= 2y + z^3 - 4z - 2y = z^3 - 4z.$$

Myslím si, že jsme S-polynom dostatečně procvičili a tak můžeme přejít na definici Gröbnerových bází.

Výpočet S-polynomu se dá udělat i v matematickém programu, což ukážu v kapitole 4.3., ve které vypočítám některé tyto příklady.

4 Buchbergerův algoritmus. Gröbnerovy báze a jejich užití při řešení soustav algebraických rovnic

Veškeré definice a věty jsou převzaty z [3], [1].

4.1 Gröbnerovy báze

Užití Gröbnerovy báze je způsob řešení soustavy algebraických rovnic. Pomocí této báze můžeme soustavy upravit na jednodušší, které pak dokážeme snadno spočítat. Mohou být použity pro řešení problémů, které jsou běžně považovány za výpočetně těžké. Pomocí Gröbnerovy báze je možné například rozhodnout o řešitelnosti souboru polynomiálních rovnic nad tělesem komplexních čísel.

Poznámka:

Gröbnerovy báze byly zavedeny do matematiky v roce 1965. Jsou pojmenovány po rakouském matematikovi Wolfgangu Gröbnerovi. Přesto je do matematiky zavedl Bruno Buchberger, který je pojmenoval po svém školiteli. [13], [14].

Abychom mohli napsat definici Gröbnerovy báze, musíme si ještě říci, co znamená báze ideálu.

Definice 4.1.1.: Báze ideálu

Nechť I je ideál komutativního okruhu R. Množina $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ prvků tohoto okruhu se nazývá bází ideálu *I*, jestliže $i = \sum_{j=1}^{n} a_j r_j$, kde $r_j \in$ R pro j = 1, 2, …, *n*. Píšeme $I = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

Definice 4.1.2.: Gröbnerova báze

Nechť v oboru integrity F$[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je zavedeno přípustné uspořádání $<_T$. Báze $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ ideálu *I* se nazývá Gröbnerovou bází, právě když normální formy polynomů modulo G jsou určeny jednoznačně, tzn., že $\forall f \in$ F$[x_1, x_2, \dots, x_n]$ platí: je-li g = normalf (f, G) a *h* = normalf (*f*, G), pak $g = h$.

Věta 4.1.3.

Nechť v oboru integrity $\mathrm{F}[x_1, x_2, \cdots x_n]$ je zavedeno přípustné uspořádání termů $<_T$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

a) $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ je Gröbnerovou bází.

b) Pro všechny prvky g ideálu $\langle G \rangle$ je normalf (g, G) = 0.

c) Pro všechny f, $g \in$ G je normalf (Spoly (f, g)) = 0.

Definice 4.1.4.

Řekneme, že Gröbnerova báze G ideálu je redukovaná, jestliže pro všechny polynomy $g \in G$ je $g = normalf\ (g, G - \{g\})$. Dále řekneme, že Gröbnerova báze G je monická, jestliže pro všechny $g \in G$ je $lc(g) = 1$.

Příklad 4.1.1.

Zadání: Řešte soustavu rovnic v oboru reálných čísel pomocí Gröbnerovy báze

$$x^2 + 1 = 2y$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Použijeme soustavu rovnic z příkladu 2.2.2.1. Máme množinu $G = \{g_1, g_2\}$, kde $g_1 = x^2 - 2y + 1$ a $g_2 = -2x + y^2 + 1$. Polynomy g_1, g_2 jsou uspořádané podle lexikografického uspořádání (pokud $x > y$).

Řešení:

Vypočteme S-polynom polynomů g_1, g_2.

Spoly $(g_1, g_2) = -2x^2.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_2}{-2x}\right) = -2.(x^2 - 2y + 1) - x.(-2x + y^2 + 1) =$

$$= -2x^2 + 4y - 2 + 2x^2 - xy^2 - x = 4y - xy^2 - x - 2.$$

Nyní zjistíme normální tvar S-polynomu polynomů g_1, g_2.

$$4y - xy^2 - x - 2 - \frac{y^2}{2}.g_2 = 4y - xy^2 - x - 2 + xy^2 - \frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{2}y^2 =$$

$$= 4y - x - 2 - \frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}.g_2 = 4y - x - 2 - \frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + x - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} =$$

$$= 4y - \frac{1}{2}y^4 - y^2 - \frac{5}{2}.$$

Vzniklý polynom označíme g_3 a přidáme do množiny G a budeme počítat S-polynom polynomů g_1, g_3.

$\text{Spoly}\,(g_1, g_3) = -x^2.\frac{1}{2}y^4.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_3}{-\frac{1}{2}y^4}\right) =$

$$= -\frac{1}{2}y^4.(x^2 - 2y + 1) - x^2.\left(4y - \frac{1}{2}y^4 - y^2 - \frac{5}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2y^4 + y^5 - \frac{1}{2}y^4 - 4x^2y + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2y^4 + x^2y^2 =$$

$$= y^5 - \frac{1}{2}y^4 - 4x^2y + \frac{5}{2}x^2 + x^2y^2.$$

Zjistíme si normální tvar S-polynomu polynomů g_1, g_3, který označíme h = normalf (Spoly $(g_1, g_3), G$).

$y^5 - \frac{1}{2}y^4 - 4x^2y + \frac{5}{2}x^2 + x^2y^2 - y^2.g_1 = y^5 - \frac{1}{2}y^4 - 4x^2y + \frac{5}{2}x^2 + x^2y^2 - x^2y^2 + 2y^3 - y^2 = y^5 - \frac{1}{2}y^4 - 4x^2y + \frac{5}{2}x^2 + 2y^3 - y^2 + 4y.g_1 = y^5 - \frac{1}{2}y^4 - 4x^2y + \frac{5}{2}x^2 + 2y^3 - y^2 + 4x^2y - 8y^2 + 4y = y^5 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{5}{2}x^2 + 2y^3 - 9y^2 + 4y - \frac{5}{2}.g_1 = y^5 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{5}{2}x^2 + 2y^3 - 9y^2 + 4y - \frac{5}{2}x^2 + 5y - \frac{5}{2} = y^5 - \frac{1}{2}y^4 + 2y^3 - 9y^2 + 9y - \frac{5}{2} + 2y.g_3 = y^5 - \frac{1}{2}y^4 + 2y^3 - 9y^2 + 9y - \frac{5}{2} + 8y^2 - 5y - y^5 - 2y^3 = -\frac{1}{2}y^4 - y^2 + 4y - \frac{5}{2} - g_3 = 0.$

Normalf (Spoly $(g_1, g_3), G) = 0$, je tedy splněná podmínka věty 4.1.3.c) a my nebudeme množinu G rozšiřovat a přejdeme na řešení S-polynomu polynomů g_2, g_3.

Určím si nejmenší společný násobek *lcm* $(-2x.\frac{1}{2}y^4)$.

$\text{Spoly}\,(g_2, g_3) = -x.y^4.\left(\frac{g_2}{-2x} - \frac{g_3}{-\frac{1}{2}y^4}\right) =$

$$= -\frac{1}{2}y^4.(-2x + y^2 + 1) - 2x.\left(4y - \frac{1}{2}y^4 - y^2 - \frac{5}{2}\right) =$$

$$= xy^4 - \frac{1}{2}y^6 - \frac{1}{2}y^4 + 8xy - 5x - xy^4 - 2xy^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}y^6 - \frac{1}{2}y^4 + 8xy - 5x - 2xy^2.$$

Nyní si vypočítáme normální tvar, značíme: normalf (Spoly $(g_2, g_3), G$).

$-\frac{1}{2}y^6 - \frac{1}{2}y^4 + 8xy - 5x - 2xy^2 - y^2.g_2 = -\frac{1}{2}y^6 - \frac{1}{2}y^4 + 8xy - 5x - 2xy^2 + 2xy^2 - y^4 - y^2 = -\frac{1}{2}y^6 - \frac{3}{2}y^4 - y^2 + 8xy - 5x + 4y.(g_2) = -\frac{1}{2}y^6 - \frac{3}{2}y^4 - y^2 + 8xy - 5x - 8xy + 4y^3 + 4y = -\frac{1}{2}y^6 - \frac{3}{2}y^4 + 4y^3 - y^2 + 4y - 5x - \frac{5}{2}.g_2 = -\frac{1}{2}y^6 - \frac{3}{2}y^4 + 4y^3 - y^2 + 4y - 5x + 5x - \frac{5}{2}y^2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}y^6 - \frac{3}{2}y^4 + 4y^3 + 4y -$

$\frac{7}{2}y^2 - \frac{5}{2} - y^2 . g_3 = -\frac{1}{2}y^6 - \frac{3}{2}y^4 + 4y^3 + 4y - \frac{7}{2}y^2 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}y^6 + y^4 - 4y^3 + \frac{5}{2}y^2 = -\frac{1}{2}y^4 - y^2 - 4y - \frac{5}{2} - g_3 = 0.$

Normalf (Spoly $(g_2, g_3), G$) = 0, nebudeme tedy množinu G rozšiřovat.

Vznikla nám Gröbnerova báze, kterou tvoří tři polynomy $g_1 = x^2 + 1 - 2y$, $g_2 = y^2 + 1 - 2x, g_3 = 4y - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y^4 - y^2$. Máme množinu $G = \{g_1, g_2, g_3\}$. Polynomy si nyní upravíme podle lexikografického uspořádání (pokud $x > y$) takto: $g_1 = x^2 - 2y + 1, g_2 = -2x + y^2 + 1, g_3 = -\frac{1}{2}y^4 - y^2 + 4y - \frac{5}{2}$.

Nyní Gröbnerovu bázi upravíme do redukované Gröbnerovy báze.

Ověříme, zda nějaký term polynomu g_1 náleží ideálu $\langle lt(G - \{g_1\})\rangle$. Vidíme, že term x je dělitelný vedoucím termem polynomu g_2 a platí tedy, že x$\in \langle lt(G - \{g_1\})\rangle$. Polynom g_1 nepatří do redukované Gröbnerovy báze, a proto jej můžeme z množiny G odebrat.

Stejným způsobem ověříme polynom g_2. Polynom g_2 náleží ideálu $\langle lt(G - \{g_2\})\rangle$, proto tento polynom náleží do redukované Gröbnerovy báze. Polynom g_3 ověříme stejným způsobem jako polynom g_1, g_2. Zjistíme, že polynom g_3 patří také do redukované Gröbnerovy báze.

Nyní máme redukovanou ale ne monickou Gröbnerovu bázi, upravíme tedy redukovanou Gröbnerovu bázi na monickou a redukovanou Gröbnerovu bázi.

Aby Gröbnerova báze byla v monickém tvaru, musíme polynom g_2 vydělit -2, vznikne nám polynom $x - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}$ a polynom g_3 vynásobit -2, vznikne nám polynom $y^4 + 2y^2 - 8y + 5$.

Zadanou soustavu

$$x^2 + 1 = 2y$$
$$y^2 + 1 = 2x$$

můžeme upravit na tvar

$$x - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0$$
$$y^4 + 2y^2 - 8y + 5 = 0.$$

Z druhé rovnice si vypočítáme y, které dosadíme do první a získáme neznámou x. Usnadníme si počítání a použijeme počítač, který nám druhou rovnici zapíše v součinovém tvaru pomocí příkazu $factor(y^4 + 2y^2 - 8y + 5)$, dostáváme výsledek

$(y^2 + 2y + 5).(y - 1)^2$. Z druhého součinového tvaru vidíme, že $y = 1$. V prvním součinovém tvaru nám vznikla kvadratická rovnice, kterou vyřešíme pomocí diskriminantu $D = 4 - 20 = -16$, rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení. Máme tedy jeden výsledek $y = 1$, který dosadíme do první rovnice a dostáváme $x = 1$.
Oborem pravdivosti P je množina $\{(1, 1)\}$. Výsledek se shoduje s výsledkem, ke kterému jsme se dostali i v příkladě 2.2.2.1.

Příklad 4.1.2.

Zadání: Vypočtěte soustavu rovnic z příkladu 2.2.2.8. pomocí Gröbnerových bází.
Připomeneme si zadanou soustavu rovnic:

$$x^2 + y^2 = 20$$
$$2x + 2y + 2xy = 15.$$

Řešení:
Nejprve si určíme nejmenší společný násobek *lcm* $(x^2, 2xy) = 2x^2y$.
Označíme si polynom $g_1 = x^2 + y^2 - 20$ a polynom $g_2 = 2xy + 2x + 2y - 15$. Tyto polynomy jsou v lexikografickém uspořádání (pokud $x > y$). Máme tedy množinu G, kterou tvoří polynomy g_1, g_2.
Vypočítáme si S-polynom polynomů g_1, g_2.

$$\text{Spoly}\,(g_1, g_2) = 2x^2y.\left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_2}{2xy}\right) = 2y.g_1 - x.g_2 =$$
$$= 2y.(x^2 + y^2 - 20) - x.(2xy + 2x + 2y - 15) =$$
$$= 2x^2y + 2y^3 - 40y - 2x^2y - 2x^2 - 2xy + 15x =$$
$$= 2y^3 - 40y - 2x^2 - 2xy + 15x.$$

Určíme si normální tvar, který označíme h = normalf (Spoly (g_1, g_2), G) tak, že posloupností několika redukcí polynomů z množiny G dojdeme buď k 0, nebo k polynomu, který již nejde dělit žádným z polynomů množiny G.

$-2x^2 - 2xy + 15x + 2y^3 - 40y + 2.g_1 = -2x^2 - 2xy + 15x + 2y^3 - 40y + 2x^2 + 2y^2 - 40 = -2xy + 15x + 2y^3 + 2y^2 - 40y - 40 + g_2.(2xy + 2x + 2y - 15) = -2xy + 15x + 2y^3 + 2y^2 - 40y - 40 + 2xy + 2x + 2y - 15 = 17x + 2y^3 + 2y^2 - 38y - 55 = h.$

Tento polynom již nelze redukovat, proto si tento polynom označíme jako polynom g_3, který přidáme do množiny G. Musíme tedy vypočítat Spoly (g_1, g_3), Spoly (g_2, g_3) a normální tvar polynomů g_1, g_3 a normální tvar polynomů g_2, g_3.

Spoly $(g_1, g_3) = 17x^2 . \left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_3}{17x}\right) = 17 . g_1 - x . g_3 =$

$= 17 . (x^2 + y^2 - 20) - x . (17x + 2y^3 + 2y^2 - 38y - 55) =$

$= 17x^2 + 17y^2 - 340 - 17x^2 - 2xy^3 - 2xy^2 + 38xy + 55x =$

$= 17y^2 - 340 - 2xy^3 - 2xy^2 + 38xy + 55x.$

Určíme normální tvar *h* = normalf (Spoly (g_1, g_3), *G*).

$-2xy^3 - 2xy^2 + 38xy + 17y^2 + 55x - 340 + y^2 . g_2 = -2xy^3 - 2xy^2 + 38xy + 17y^2 + 55x - 340 + 2xy^2 + 2y^3 + 2xy^3 - 15y^2 = 38xy + 17y^2 + 55x - 340 + 2y^3 - 15y^2 - 19 . g_2 = 38xy + 17y^2 + 55x - 340 + 2y^3 - 15y^2 - 38x - 38y - 38xy + 285 = 17y^2 + 55x - 340 + 2y^3 - 15y^2 - 38x + 285 = 2y^2 + 2y^3 + 17x - 38y - 55 - g_3 = 0.$

Vyšlo nám *h* = normalf (Spoly (g_1, g_3), *G*) = 0, takže splňuje podmínku podle bodu c) věty 4.1.3. Nebudeme tedy množinu *G* rozšiřovat a budeme dále pokračovat v počítání S-polynomu polynomů g_2, g_3.

Spoly $(g_2, g_3) = 34xy . \left(-\frac{g_2}{2xy} + \frac{g_3}{17x}\right) = -17 . g_2 + 2y . g_3 =$

$= -17 . (2xy + 2x + 2y - 15) + 2y . (17x + 2y^3 + 2y^2 - 38y - 55) =$

$= -34xy - 34x - 34y + 255 + 34xy + 4y^4 + 4y^3 - 76y^2 - 110y =$

$= -34x + 4y^4 + 4y^3 - 76y^2 - 144y + 255.$

Určíme normální tvar *h* = normalf (Spoly (g_2, g_3), *G*).

$-34x + 4y^4 + 4y^3 - 76y^2 - 144y + 255 + 2 . g_3 = -34x + 4y^4 + 4y^3 - 76y^2 - 144y + 255 + 34x + 4y^3 + 4y^2 - 76y - 110 = 4y^4 + 8y^3 - 72y^2 - 220y + 145 = h$

Tento polynom již nelze redukovat, proto si ho označíme jako g_4 a přidáme ho do množiny *G*, která nyní obsahuje čtyři polynomy.

Tím, že jsme přidali polynom, musíme spočítat S-polynomy a normální tvary. Konkrétně Spoly (g_1, g_4), Spoly (g_2, g_4), Spoly (g_3, g_4) a normální tvar normalf (Spoly (g_1, g_4), *G*), normalf (Spoly (g_2, g_4), *G*), normalf (Spoly (g_3, g_4), *G*).

Spoly $(g_1, g_4) = 4x^2y^4 . \left(\frac{g_1}{x^2} - \frac{g_4}{4y^4}\right) = 4y^4 . g_1 - x^2 . g_4 =$

$= 4y^4 . (x^2 + y^2 - 20) - x^2 . (4y^4 + 8y^3 - 72y^2 - 220y + 145) =$

$= 4y^6 - 80y^4 - 8x^2y^3 + 72x^2y^2 + 220x^2y - 145x^2.$

Určíme si normální tvar h = normalf (Spoly (g_1, g_4), G).

$4y^6 - 80y^4 - 8x^2y^3 + 72x^2y^2 + 220x^2y - 145x^2 + 8y^3. g_1 = 4y^6 - 80y^4 - 8x^2y^3 + 72x^2y^2 + 220x^2y - 145x^2 + 8x^2y^3 + 8y^5 - 160y^3 = 72x^2y^2 + 220x^2y - 145x^2 + 4y^6 - 80y^4 + 8y^5 - 160y^3 - 72y^2. g_1 = 72x^2y^2 + 220x^2y - 145x^2 + 4y^6 - 80y^4 + 8y^5 - 160y^3 - 72x^2y^2 - 72y^4 + 1440y^2 = 220x^2y - 145x^2 + 4y^6 - 152y^4 + 8y^5 - 160y^3 + 1440y^2 - 220y. g_1 = 220x^2y - 145x^2 + 4y^6 - 152y^4 + 8y^5 - 160y^3 + 1440y^2 - 220x^2y - 220y^3 + 4400y = -145x^2 + 4y^6 - 152y^4 + 8y^5 - 380y^3 + 1440y^2 + 4400y + 145. g_1 = -145x^2 + 4y^6 - 152y^4 + 8y^5 - 380y^3 + 1440y^2 + 4400y + 145x^2 + 145y^2 - 2900 = 4y^6 + 8y^5 - 152y^4 - 380y^3 + 1585y^2 + 4400y - 2900 - y^2. g_4 = 4y^6 + 8y^5 - 152y^4 - 380y^3 + 1585y^2 + 4400y - 2900 - 4y^6 - 8y^5 + 72y^4 + 220y^3 - 145y^2 = -80y^4 - 160y^3 + 1440y^2 + 4400y - 2900 + 20. g_4 = -80y^4 - 160y^3 + 1440y^2 + 4400y - 2900 + 80y^4 + 160y^3 - 1440y^2 - 4400y + 2900 = 0.$

Normální tvar h = normalf (Spoly (g_1, g_4), G) = 0, proto již nebudeme množinu G rozšiřovat a budeme počítat S-polynom polynomů g_2, g_4.

Spoly $(g_2, g_4) = 4xy^4.\left(\frac{g_2}{2xy} - \frac{g_4}{4y^4}\right) = 2y^3. g_2 - x^2. g_4 =$

$= 2y^3.(2xy + 2x + 2y - 15) - x.(4y^4 + 8y^3 - 72y^2 - 220y + 145) =$

$= -4xy^3 - 30y^3 + 72xy^2 + 220xy - 145x + 4y^4.$

Určíme si normální tvar h = normalf (Spoly (g_2, g_4), G).

$-4xy^3 - 30y^3 + 72xy^2 + 220xy - 145x + 4y^4 + 2y^2. g_2 = -4xy^3 - 30y^3 + 72xy^2 + 220xy - 145x + 4xy^3 + 4xy^2 + 4y^3 - 30y^2 = 76xy^2 + 220xy - 145x + 4y^4 - 26y^3 - 30y^2 - 38y. g_2 = 76xy^2 + 220xy - 145x + 4y^4 - 26y^3 - 30y^2 - 76xy^2 - 76xy - 76y^2 + 570y = 144xy - 145x + 4y^4 - 26y^3 - 106y^2 + 570y - 72. g_2 = 144xy - 145x + 4y^4 - 26y^3 - 106y^2 + 570y - 144xy - 144x - 144y + 1080 = -289x + 4y^4 - 26y^3 - 106y^2 + 426y + 1080 + 17. g_3 = -289x + 4y^4 - 26y^3 - 106y^2 + 426y + 1080 + 34y^2 + 34y^3 + 289x - 646y - 935 = 4y^4 + 8y^3 - 72y^2 - 220y + 145 - g_4 = 0.$

Normalf (Spoly (g_2, g_4), G) = 0, proto nebudeme množinu G rozšiřovat.

Spoly $(g_3, g_4) = 68xy^4.\left(\frac{g_3}{17x} - \frac{g_4}{4y^4}\right) = 4y^4. g_3 - 17x. g_4 =$

$= 4y^4.(17x + 2y^3 + 2y^2 - 38y - 55) - 17x.(4y^4 + 8y^3 - 72y^2 - 220y + 145) = -136xy^3 + 1224xy^2 + 3740xy + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 - 2465x.$

Určíme si normální tvar *h* = normalf (Spoly (g_3, g_4), *G*).

$-136xy^3 + 1224xy^2 + 3740xy + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 - 2465x + 68y^2.g_2 = -136xy^3 + 1224xy^2 + 3740xy + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 - 2465x + 136xy^3 + 136xy^2 + 136y^3 - 1020y^2 = 1360xy^2 + 3740xy - 2465x + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 + 136y^3 - 1020y^2 - 680y.g_2 = 1360xy^2 + 3740xy - 2465x + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 + 136y^3 - 1020y^2 - 1360xy^2 - 1360xy - 1360y^2 + 10200y = 2380xy - 2465x + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 + 136y^3 - 2380y^2 + 10200y - 1190.g_2 = 2380xy - 2465x + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 + 136y^3 - 2380y^2 + 10200y - 2380xy - 2380x - 2380y + 17850 = -4845x + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 + 136y^3 - 2380y^2 + 7820y + 17850 + 285.g_3 = -4845x + 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 + 136y^3 - 2380y^2 + 7820y + 17850 + 4845x + 570y^3 + 570y^2 - 10830y - 15675 = 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 + 706y^3 - 1810y^2 - 3010y + 2175 - 2y^3.g_4 = 8y^7 + 8y^6 - 152y^5 - 220y^4 + 706y^3 - 1810y^2 - 3010y + 2175 - 8y^7 - 16y^6 + 144y^5 + 440y^4 - 290y^3 = -8y^6 - 8y^5 + 220y^4 + 416y^3 - 1810y^2 - 3010y + 2175 + 2y^2.g_4 = -8y^6 - 8y^5 + 220y^4 + 416y^3 - 1810y^2 - 3010y + 2175 + 8y^6 + 16y^5 - 144y^4 - 440y^3 + 290y^2 = 8y^5 + 76y^4 - 24y^3 - 1520y^2 - 3010y + 2175 - 2y.g_4 = 8y^5 + 76y^4 - 24y^3 - 1520y^2 - 3010y + 2175 - 8y^5 - 16y^4 + 144y^3 + 440y^2 - 290y = 60y^4 + 120y^3 - 1080y^2 - 3300y + 2175 - 15.g_4 = 0.$

Normalf (Spoly (g_3, g_4), *G*) = 0, proto nebudeme opět množinu *G* rozšiřovat.

Máme množinu $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, která je Gröbnerovou bází a tvoří je polynomy:

$g_1 = x^2 + y^2 - 20$, $g_2 = 2xy + 2x + 2y - 15$, $g_3 = 17x + 2y^3 + 2y^2 - 38y - 55$,
$g_4 = 4y^4 + 8y^3 - 72y^2 - 220y + 145$.

Asi si říkáte, že máme zbytečně mnoho polynomů. Máte pravdu. Naše získaná Gröbnerova báze obsahuje „nepotřebné“ polynomy. Těchto polynomů se zbavíme tak, že upravíme Gröbnerovu bázi na redukovanou Gröbnerovu bázi.

Ověříme, zda nějaký term polynomu g_1 náleží ideálu $\langle lt(G - \{g_1\})\rangle$. Vidíme, že term x^2 je dělitelný vedoucím termem polynomu g_3 a platí tedy, že $x^2 \epsilon \langle lt(G - \{g_1\})\rangle$. Polynom g_1 nepatří do redukované Gröbnerovi báze, a proto jej můžeme z množiny G odebrat. Stejně ověříme, zda nějaký term polynomu g_2 náleží ideálu $\langle lt(G - \{g_2\})\rangle$. Term x je dělitelný vedoucím termem polynomu g_3 a platí, že $x \epsilon \langle lt(G - \{g_2\})\rangle$. Polynom g_2 nepatří do redukované Gröbnerovi báze, a proto jej můžeme také odebrat z množiny G. Stejným způsobem ověříme i polynomy g_3 a g_4. Polynomy g_3 a g_4 patří do redukované Gröbnerovi báze.

Gröbnerovu bázi nyní tvoří polynomy g_3 a g_4 a jejich násobky, proto danou bázi musíme dát do tzv. monické báze. Monická báze je taková báze, která má u vedoucího termu koeficient 1.

Nyní máme redukovanou a monickou Gröbnerovu bázi, která je jenom jediná a má tvar:

$$g_3 = x + \frac{1}{17}y^3 + \frac{2}{17}y^2 - \frac{38}{17}y - \frac{55}{17}$$

$$g_4 = y^4 + 2y^3 - \frac{72}{4}y^2 - \frac{220}{4}y + \frac{145}{4}.$$

Původní soustavu

$$x^2 + y^2 = 20$$

$$2x + 2y + 2xy = 15$$

můžeme přepsat do tvaru

$$17x + 2y^3 + 2y^2 - 38y - 55 = 0$$

$$4y^4 + 8y^3 - 72y^2 - 220y + 145 = 0.$$

Soustavu nemáme v monickém tvaru záměrně, protože v monickém tvaru by se špatně počítala.

Danou soustavu již dokážeme snadněji vyřešit tak, že si druhou rovnici upravíme na tvar $(2y^2 + 14y + 29).(2y^2 - 10y + 5)$. Vznikly nám dvě kvadratické rovnice, které vyřešíme pomocí diskriminantu.

$D_1 = 14^2 - 4.29.2 = 196 - 232 = -36$, rovnice nemá v množině všech reálných čísel řešení. V oboru komplexních čísel má řešení a tím řešením je $y_1 = \frac{-14+6i}{4} = \frac{-7+3i}{2}$ a $y_2 = \frac{-14-6i}{4} = \frac{-7-3i}{2}$.

$D_2 = 100 - 40 = 60$, rovnice má dva různé reálné kořeny $y_1 = \frac{10+2\sqrt{15}}{4} = \frac{5+\sqrt{15}}{2}$ a $y_2 = \frac{10-2\sqrt{15}}{4} = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$.

Kdybychom neznámou y dosadili do první rovnice, získali bychom neznámou x a zjistili bychom, že výsledky, které nám vyšli, se shodují s výsledky, které jsme vypočítali v příkladě 2.2.2.8.

Poznámka: „Ruční" postup počítání Gröbnerových bází, jak jste si určitě všimli, je velmi zdlouhavý a časově náročný. Existuje jedno kritérium, díky kterému se nám práce při počítání normálního tvaru dvou polynomů trochu usnadní.

Kritérium 1:
Je-li $[i, j] \epsilon$ B taková dvojice indexů, že pro vedoucí termy polynomů $g_i, g_j \epsilon G$ platí

$$lcm\ \left(lt(g_i), lt(g_j)\right) = lt(g_i).\, lt(g_j),$$

kde lcm je nejmenší společný násobek dvou polynomů a lt je vedoucí term polynomu, pak je normalf (Spoly (g_i, g_j), $\{g_i, g_j\}$) = 0.

Na základě tohoto kritéria jsme v předchozím příkladě již nemuseli počítat S-polynom a normální tvar polynomů, kde se objevoval polynom g_4. Mohli jsme si tak ušetřit velkou část práce.

Věta 4.1.5.
Jestliže *G*, *H* jsou dvě redukované a monické Gröbnerovy báze, pro které platí $\langle G \rangle = \langle H \rangle$, potom *G* = *H*.

Věta 4.1.6.
Nechť je dána soustava polynomiálních rovnic

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

a buď $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ Gröbnerova báze ideálu $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ v oboru integrity $F = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ při jistém přípustném uspořádání termů $<_T$. Pak soustava

$$\begin{gathered} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_s(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

má stejný obor pravdivosti jakou soustava

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

Věta 4.1.7.

Nechť je dána soustava polynomiálních rovnic

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

a nechť $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ je monická Gröbnerova báze ideálu $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ v oboru integrity $F = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ při jistém přípustném uspořádání termů $<_T$. Pak má daná soustava řešení, právě když 1 nenáleží *G*.

Věta 4.1.8.

Nechť je dána soustava polynomiálních rovnic

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

a nechť $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ je Gröbnerova báze ideálu $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ v oboru integrity $F = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ nad tělesem *F* při jistém přípustném uspořádání termů $<_T$.

Daná soustava má konečný počet řešení, právě tehdy když Gröbnerova báze *G* splňuje následující podmínku: Pro každou proměnnou x_i, $i = 1, 2, \dots, n$ existuje v *G* takový prvek, že vedoucí term v tomto polynomu (vzhledem k relaci termů $<_T$) je mocninou proměnné x_i.

Věta 4.1.9.

Nechť soustava polynomiálních rovnic

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

má konečně mnoho řešení. Buď F algebraicky uzavřené těleso. Dále buď r počet prvků v množině L těch termů z $F = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, která nejsou násobkem žádného z vedoucích termů polynomů z redukované a monické Gröbnerovy báze ideálu $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$. Potom počet řešení zadané soustavy v tělese F, počítaných i s jejich násobností, je roven číslu r.

4.2 Buchbergerův algoritmus

Buchbergerův algoritmus zavedl do matematiky Bruno Buchberger. Tento algoritmus poskytuje způsob, jak transformovat libovolnou množinu polynomů na ekvivalentní Gröbnerovy báze. V této kapitole jsem čerpala z [2], [15].

<u>Postup pomocí Buchbergerova algoritmu:</u>

1) Určíme S-polynom pro každou dvojici polynomů zadané množiny a nalezneme normální tvar S-polynomů v zadané množině.
2) Pokud je normální tvar roven 0, nepřidáváme žádný polynom do zadané množiny. Pokud je některý normální tvar nenulový, přidáme ho do zadané množiny a opakujeme stejný postup do té doby, než budou všechny normální tvary nulové.

4.3 Využití počítačů při výpočtu Gröbnerovy báze

V této podkapitole ukážu, jak počítat některé příklady z kapitoly 2.2.2. pomocí matematického programu Maple 17.

Příklad 4.3.1.

Zadání: Mějme soustavu rovnic z příkladu 2.2.2.4., označme si polynomy

$$f = x^2 + 2yz - 6y - 6z + 12$$
$$g = 2y^2 + 2yz - 6y - 6z + 12$$
$$h = z^2 + 2xy - 6y - 6x + 12.$$

Vypočítejte S-polynomy této soustavy pomocí počítače. S-polynomy této soustavy rovnic jsem počítala v příkladě 3.7.

Řešení:

Pomocí počítače vypočteme S-polynom polynomů f, g.

$with(Groebner)$:

$f := x^2 + 2.y.z - 6.y - 6.z + 12$

$$f := x^2 + 2yz - 6y - 6z + 12$$

$g := 2.x.z - 6.x + y^2 - 6.z + 12$

$$g := 2xz + y^2 - 6x - 6z + 12$$

$SPolynomial\big(f, g, plex(x, y, z)\big)$

$$-xy^2 + 4yz^2 + 6x^2 + 6xz - 12yz - 12z^2 - 12x + 24z.$$

Můžeme si zkontrolovat, že výsledek pomocí počítače je stejný jako výsledek, ke kterému jsme po chvilce počítání došli i my.

Nyní si zkontrolujeme výpočet S-polynomu polynomů f, h.

$with(Groebner)$:

$f := x^2 + 2.y.z - 6.y - 6.z + 12$

$$f := x^2 + 2yz - 6y - 6z + 12$$

$h := 2.x.y - 6.x - 6.y + z^2 + 12$

$$h := 2xy + z^2 - 6x - 6y + 12$$

$SPolynomial\big(f, h, plex(x, y, z)\big)$

$$-xz^2 + 4y^2z + 6x^2 + 6xy - 12y^2 - 12yz - 12x + 24y.$$

Opět vidíme, že výsledek se shoduje s naším vypočítaným výsledkem.

Teď nám chybí ověřit poslední S-polynom z příkladu 3.7. a to S-polynom polynomů g, h.

$with(Groebner)$:

$g := 2.x.z - 6.x + y^2 - 6.z + 12$

$$g := 2xz + y^2 - 6x - 6z + 12$$

$h := 2.x.y - 6.x - 6.y + z^2 + 12$

$$h := 2xy + z^2 - 6x - 6y + 12$$

$SPolynomial\big(g, h, plex(x, y, z)\big)$

$$y^3 - z^3 - 6xy + 6xz + 12y - 12z.$$

Výsledek se opět shoduje s naším vypočítaným výsledkem. Můžeme tedy prohlásit, že při výpočtu S-polynomu jsme postupovali správně.

Nyní si stejným způsobem ověříme výsledky z příkladu 3.11.

Příklad 4.3.2.

Zadání: Pomocí počítače vypočítejte S-polynomy a normální tvary soustavy rovnic z příkladu 2.2.2.5. Jednotlivé polynomy si označíme

$$f = x^2 - yz - 1$$

$$g = y^2 - xz - 2$$

$$h = z^2 - xy - 4.$$

Řešení:

Nejprve si spočítáme S-polynom polynomů f, g.

$with(Groebner)$:

$f := x^2 - y.z - 1$

$$f := x^2 - yz - 1$$

$g := -z.x + y^2 - 2$

$$g := -xz + y^2 - 2$$

$SPolynomial\big(f, g, plex(x, y, z)\big)$

$$-xy^2 + yz^2 + 2x + z.$$

Výsledek se nám shoduje s naším vypočítaným výsledkem.

Nyní si ověříme S-polynom polynomů f, h.

$with(Groebner)$:

$f := x^2 - y.z - 1$

$$f := x^2 - yz - 1$$

$h := -x.y + z^2 - 4$

$$h := -xy + z^2 - 4$$

$SPolynomial\big(f, h, plex(x, y, z)\big)$

$$-xz^2 + y^2z + 4x + y.$$

Vidíme, že výsledek se nám opět shoduje s naším výpočtem.

Jako poslední nám chybí ověřit S-polynom polynomů g, h.

$with(Groebner)$:

$g := -z.x + y^2 - 2$

$$g := -zx + y^2 - 2$$

$h := -x.y + z^2 - 4$

$$h := -xy + z^2 - 4$$

$SPolynomial\big(g, h, plex(x, y, z)\big)$

$$-y^3 + z^3 + 2y - 4z.$$

Výsledek se nám opět shoduje s naším výsledkem. Můžeme tedy tvrdit, že při výpočtu S-polynomů jsme postupovali správně.

Teď si ověříme, zde při výpočtu normálních tvarů S-polynomů jsme postupovali správně.

Nejprve si vypočítáme normální tvar S-polynomu polynomů f, g, značíme normalf (Spoly (f, g), G).

$with(Groebner)$:

$F := 2.x + y.z^2 + z - y^2.x$

$$F := -xy^2 + yz^2 + 2x + z$$

$G := [x^2 - y.z - 1, y^2 - x.z - 2, z^2 - x.y - 4]$

$$G := [x^2 - yz - 1, y^2 - xz - 2, z^2 - xy - 4]$$

$NormalForm(F, G, plex(x, y, z))$

$$2x + 4y + z.$$

Vidíme, že normální tvar vyšel stejně, jako když jsme ho počítali „ručně“.

Při zadávání do programu dáváme za F polynom, který chceme mít v normálním tvaru, v našem případě S-polynom polynomů f, g a za G dosazujeme množinu G, která obsahuje všechny polynomy.

$NormalForm(F, G, plex(x, y, z))$ je normální tvar F z množiny G při lexikografickém uspořádání (pokud $x > y > z$).

Nyní si ověříme výpočet normálního tvaru S-polynomu polynomů f, h.

$with(Groebner)$:

$F := 4.x - x.z^2 + y + y^2.z$

$$F := -xz^2 + y^2z + 4x + y$$

$G := [x^2 - y.z - 1, y^2 - x.z - 2, z^2 - x.y - 4, 2.x + 4.y + z]$

$$G := [x^2 - yz - 1, y^2 - xz - 2, z^2 - xy - 4, 2x + 4y + z]$$

$NormalForm(F, G, plex(x, y, z))$

$$-7y.$$

Výsledek se opět shoduje s naším výsledkem. Nyní jsme museli při zadávání množiny G přidat jeden polynom. Protože nám normalf (Spoly (f, g), G) nevyšla 0, museli jsme tento polynom přidat do množiny G. Stejně tak musíme do množiny G přidat i polynom $-7y$.

Jako poslední si ověříme výpočet normálního tvaru S-polynomu polynomů g, h.

$with(Groebner)$:

$F := -y^3 + z^3 + 2.y - 4.z$

$$F := -y^3 + z^3 + 2y - 4z$$

$G := [x^2 - y.z - 1, y^2 - x.z - 2, z^2 - x.y - 4, 2.x + 4.y + z, -7.y]$

$$G := [x^2 - yz - 1, y^2 - xz - 2, z^2 - xy - 4, 2x + 4y + z, -7y]$$

$NormalForm(F, G, plex(x, y, z))$

$$z^3 - 4z.$$

Výsledek se nám shoduje s naším vypočítaným výsledkem. Můžeme tedy prohlásit, že i při výpočtu normálních tvarů jsme postupovali správně a máme všechny naše výpočty v příkladě 3.11. zkontrolované v matematickém programu Maple 17.

Teď jsme si ukázali jak spočítat S-polynom a normální tvar pomocí počítače. Ukažme si nyní, jak nalézt Gröbnerovu bázi a z toho vypočítat výsledek pomocí matematického programu.

Příklad 4.3.3.

Zadání: Ověříme si, zda v příkladě 4.1.1. jsme našli správnou Gröbnerovu bázi a zda i pomocí počítače dojdeme ke stejnému řešení soustavy z příkladu 2.2.2.1.

Řešení:

$with(Groebner)$:

$F := [x^2 - 2.y + 1, y^2 - 2.x + 1]$

$$F := [x^2 - 2y + 1, y^2 - 2x + 1]$$

$Basis\big(F, plex\ (x, y)\big)$

$$[y^4 + 2y^2 - 8y + 5, -y^2 + 2x - 1].$$

Vidíme, že úpravou druhé rovnice tak, že ji vydělíme 2, dostáváme stejnou Gröbnerovu bázi, ke které jsme došli v příkladě 4.1.1. Za F dosazujeme zadanou soustavu a

$Basis(F, plex\,(x, y))$ znamená: vypočítej Gröbnerovu bázi z F (tzn. ze zadané soustavy) při lexikografickém uspořádání (pokud $x > y$). Příkazem $solve$ zjistíme neznámou y:

$solve(y^4 + 2.y^2 - 8.y + 5)$

$$-1 - 2I, -1 + 2I, 1, 1.$$

My počítáme jen v oboru reálných čísel, tzn. že $y = 1$. Dosadíme do druhé rovnice a stejným příkazem bychom dostali $x = 1$. Řešení soustavy rovnic je stejné, ať počítáme „lidským" způsobem nebo pomocí Gröbnerových bází s použitím i bez použití počítače.

Příklad 4.3.4.

Zadání: Nalezněte Gröbnerovu bázi z příkladu 2.2.2.8. pomocí počítačového matematického programu.

Řešení: Řešení provedeme v matematickém programu Maple 17.

$with(Groebner)$:

$F := [x^2 + y^2 - 20, 2.x + 2.y + 2.x.y - 15\,]$

$$F := [x^2 + y^2 - 20, 2x + 2y + 2xy - 15\,]$$

$Basis(F, plex(x, y))$

$$[4y^4 + 8y^3 - 72y^2 - 220y + 145, 2y^3 + 2y^2 + 17x - 38y - 55\,].$$

Dostali jsme Gröbnerovu bázi, kterou nyní ještě vyřešíme.

Pomocí matematického programu Maple 17 rozložíme první polynom Gröbnerovy báze tak, aby byl v součinovém tvaru příkazem:

$factor(4.y^4 + 8.y^3 - 72.y^2 - 220.y + 145)$

$$(2y^2 + 14y + 29)\,(2y^2 - 10y + 5).$$

Nyní zjistíme neznámou y, použijeme příkaz:

$solve(4.y^4 + 8.y^3 - 72.y^2 - 220.y + 145)$

$$-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}I, -\frac{7}{2} + \frac{3}{2}I, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{15}, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

Vidíme, že dostáváme stejné řešení pomocí počítače, jako když jsme zadanou soustavu řešili bez jeho pomoci. Neznámou x bychom zjistili stejným příkazem, pokud bychom dosadili do rovnice $2y^3 + 2y^2 + 17x - 38y - 55$ postupně získané y.

Ukázali jsme si tedy tři způsoby výpočtu soustavy rovnic. První způsob bylo „lidské" řešení, druhým způsobem je výpočet Gröbnerových bází bez použití počítače, což je rozsáhlejší počítání, ale při troše trpělivosti dojdeme ke správnému výsledku, zatímco u „lidského“ řešení bychom nemuseli dojít vždy k výsledku, pokud by nás nenapadlo, jak chytře upravit rovnice a třetím způsobem je výpočet Gröbnerových bází pomocí počítače. Ukázali jsme výpočet v matematickém programu Maple 17, ale existují i jiné programy, které umí řešit Gröbnerovy báze, např. Mathematica nebo CoCoA.

Počítačem můžeme zjistit i jednotlivé kroky výpočtu Gröbnerovy báze, pomocí kterých si pak můžeme zkontrolovat naše výpočty při řešení soustavy rovnic pomocí Gröbnerových bází. Výpočet S-polynomu a normálního tvaru pomocí počítače jsme již ukázali v předchozích příkladech, proto si zde jen pro připomenutí ukážeme některé kroky výpočtu z příkladu 4.1.2. pomocí počítače. Opět budeme pracovat v matematickém programu Maple 17.

1) Ukážeme nyní jak vypočítat S-polynom polynomů g_1 a g_2.

Výpočet S-polynomu polynomů g_1 a g_2, označíme si $g_1 = f, g_2 = g$.

$with(Groebner)$:

$f := x^2 + y^2 - 20$

$$f := x^2 + y^2 - 20$$

$g := 2.x + 2.y + 2.x.y - 15$

$$g := 2x + 2y + 2xy - 15$$

$SPolynomial\big(f, g, plex(x, y)\big)$

$$2y^3 - 2x^2 - 2xy + 15x - 40y.$$

2) Ukážeme jak vypočítat normální tvar S-polynomu polynomů g_1 a g_2.

Výpočet normálního tvaru polynomů g_1 a g_2, značíme normalf (Spoly(g_1, g_2), G).

Označím si Spoly(g_1 a g_2) = F.

$with(Groebner)$:

$F := 2.y^3 - 2.x^2 - 2.x.y + 15.x - 40.y$

$$F := 2y^3 - 2x^2 - 2xy + 15x - 40y$$

$G := [x^2 + y^2 - 20, 2.x + 2.y + 2.x.y - 15]$

$$G := [x^2 + y^2 - 20, 2x + 2y + 2xy - 15]$$

$NormalForm\big(F, G, plex\ (x, y)\big)$

$$2y^3 + 2y^2 + 17x - 38y - 55.$$

Vidíme, že výsledek nám vyšel nový polynom, který si označíme g.

3) Ukážeme jak vypočítat normální tvar S-polynomu polynomů g_2 a g_3.

Postup bude úplně stejný jako u výpočtu normálního tvaru polynomů g_1 a g_2. Opět si označíme Spoly(g_2, g_3) = F.

$with(Groebner)$:

$F := -2.x.y^3 - 2.x.y^2 + 38.x.y + 17.y^2 + 55.x - 340$

$$F := -2xy^3 - 2xy^2 + 38xy + 17y^2 + 55x - 340$$

$G := [x^2 + y^2 - 20, 2.x + 2.y + 2.x.y - 15, 2.y^3 + 2.y^2 + 17.x - 38.y - 55]$

$$G := [x^2 + y^2 - 20, 2x + 2y + 2xy - 15, 2y^3 + 2y^2 + 17x - 38y - 55]$$

$NormalForm\big(F, G, plex\ (x, y)\big)$

$$0.$$

Tentokrát nám výsledek vyšel 0, což je stejný výsledek, jaký nám vyšel i bez použití počítače.

Příklad 4.3.5.

Zadání: Nalezněte Gröbnerovu bázi pomocí počítačového programu ze zadané soustavy

$$x^2 - y = z^2$$
$$y^2 - z = x^2$$
$$z^2 - x = y^2.$$

Zadaná soustava je řešená „lidským“ způsobem v druhé kapitole této práce.

Řešení:

Do matematického programu zadáme:

$with(Groebner)$:

$F := [x^2 - y - z^2, y^2 - z - x^2, z^2 - x - y^2]$

$$F := [x^2 - z^2 - y, -x^2 + y^2 - z, -y^2 + z^2 - x]$$

$Basis(F, plex(x, y, z))$

$$[z^3 - z, 2yz + z^2 + z, y^2 - z^2 - y - z, z + y + x].$$

Nalezli jsme Gröbnerovu bázi, příkazem $solve$ bychom postupně zjistili neznámé x, y, z.

$solve(z^3 - z)$

$$0,1,-1.$$

Pokud bychom dosadili neznámou z do druhé a třetí rovnice, dostali bychom neznámou y. Pak už bychom snadno dopočetli neznámou x.

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s pojmem Gröbnerovy báze, ukázat výpočet soustavy algebraických rovnic „lidským“ způsobem, následně pak vypočítat Gröbnerovy báze bez použití počítače a pak při řešení soustavy algebraických rovnic pomocí Gröbnerovy báze použít matematický software, který snadno a rychle umí Gröbnerovy báze vypočítat.

V první části práce jsme si ukázali, jak řešit příklady „lidským“ způsobem, což vyžadovalo určité nápady při řešení těžších příkladů, které se objevují v matematických olympiádách. Uvedli jsme si i několik metod, díky kterým jsme pak byli schopni některé příklady vyřešit.

Ve druhé části jsme se již věnovali pojmu Gröbnerovy báze. K definování tohoto pojmu jsme si museli nejdříve zavést pojmy uspořádání termů, S-polynom a normální tvar polynomů. Ke každému pojmu jsme uvedli minimálně jeden příklad, díky kterým jsme snadněji pochopili tyto pojmy. Následně jsme si vyřešili soustavy nelineárních rovnic pomocí Gröbnerovy báze. Zjistili jsme, že toto počítání je poměrně časově náročné a tak jsme si ukázali, jak dané příklady spočítat mnohem rychleji a téměř bez práce pomocí matematického programu Maple 17.

Díky této práci jsem prostudovala nový způsob řešení soustavy algebraických rovnic, který jsem dříve neznala. Velkým přínosem pro mě bylo také seznámení s matematickým programem Maple 17.

Praktické ukázky mnou vypočítaných příkladů v tomto programu jsou v přiloženém CD ve složce Příklady v Maple17.

Resumé

Aim of my bachelor´s thesis is to get familiar with the term of Groebner basis. Showing their use and explanation at the practical examples. This work is focused on system of algebraic equations and their ways of dealing.

In the first part my work is focused on system of algebraic equations using “human” solution. Not everybody can solve given equation using different methods, because this solution needs idea. Groebner basis allows to solve given system even without the idea. Given system adjust into different system of algebraic equation. The new system of algebraic equation contains at least one equation which has only one unknown variable and the rest is already possible to calculate.

The second part is given to Groebner basis and their use. It is shown here how to count Groebner basis step by step. At the end it is shown how to solve Groebner basis using mathematic computer programme Maple 17. The examples counted in this programme are on the added CD in the section examples in Maple17.

Seznam použité literatury

[1] DRÁBEK, Jaroslav a HORA, Jaroslav. *Algebra. Polynomy a rovnice*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2001, 125 s. ISBN 80-708-2787-4.

[2] VERSCHELDE, Jan. *Analytic Symbolic Computation* [online]. 2014 [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://homepages.math.uic.edu/~jan/mcs563/lec06.pdf.

[3] HECK, André. *A Bird´s-Eye View of Gröbner Bases* [online]. 1996 [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.25.4733&rep=rep1&type=pdf.

[4] MAŘÍK, Robert. *Algebraické rovnice* [online]. 2009 [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/kraj/slidy-ar.pdf.

[5] ŠVRČEK, Jaroslav. *Metody řešení soustav algebraických rovnic* [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.kag.upol.cz/ucitprir/texty%5CMetResSousAR_JS.pdf.

[6] *Polynomy s reálnými či komplexními koeficienty*. Přednáška 5. [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.kmt.zcu.cz/subjects/zm1/prednaska5.pdf.

[7] *MATEMATIKA.CZ* [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/deleni-mnohoclenu.

[8] *Matematická olympiáda* [online]. 57. ročník, tj. rok 2007-2008 [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly/57-rocnik-07-08.

[9] *British Mathematical Olympiad* [online]. 2012 [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.bmoc.maths.org/home/bmo1-2013.pdf.

[10] SK.MO. *Oficiálna stránka Slovenskej komisie Matematickej olympiády* [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://skmo.sk/dokumenty.php.

[11] *Olimpiada Matematyczna* [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.om.edu.pl/?q=zadania/zadania.

[12] *Olimpíada juvenil de matemática* [online]. 2006 [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/juvenil2006nac-1div.pdf.

[13] *Gröbner basis*. WIKIPEDIA. The Free Encyclopedia [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Gröbner_basis.

[14] *Bruno Buchberger*. WIKIPEDIA. The Free Encyclopedia [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Bruno_Buchberger.

[15] *Buchberger´s algorithm*. SCHOLARPEDIA [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.scholarpedia.org/article/Buchberger's_algorithm.

[16] *Matice. Determinant Soustavy lineárních rovnic* [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://mant.upol.cz/soubory/MC/p7.pdf.

[17] *Frobeniova věta* [online], [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.aristoteles.cz/matematika/linearni_algebra/soustavy/frobeniova-veta.php.