

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI**

**FAKULTA EKONOMICKÁ**

Bakalářská práce

**Dualita úloh lineárního programování**

**The Duality of linear programming problems**

Jakub Petelík

CHEB 2014

## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma:

Dualita úloh lineárního programování

vypracoval samostatně pod odborným dohledem vedoucího bakalářské práce

za použití pramenů uvedených v přiložené bibliografii.

V Chebu, dne

...

.....

podpis autora

## Obsah

ÚVOD.....	5
1. TEORETICKÁ ČÁST.....	7
1.1 Teorie lineárního programování.....	7
1.2 Dualita úloh lineárního programování .....	9
1.2.1 Symetrické duální úlohy .....	10
1.2.2 Nesymetrické duální úlohy .....	12
1.2.3 Vlastnosti duálně sdružených úloh .....	14
1.2.4 Řešení duálně sdružených úloh.....	16
1.2.5 Ekonomická interpretace duálních proměnných.....	27
2. PRAKTICKÁ ČÁST .....	31
2.1 O společnosti Trost autoservice technik .....	31
2.1.1 Historie firmy.....	32
2.1.2 Produkty a služby firmy.....	33
2.2 Praktický příklad .....	37
2.2.1 Zadání příkladu .....	37
2.2.2 Formulace matematického modelu.....	38
2.2.3 Tvorba duální úlohy.....	39
2.2.4 Řešení úlohy simplexovou metodou.....	40
2.2.5 Ekonomická interpretace duálně sdružené úlohy .....	44
Závěr .....	52
Seznam obrázků.....	53
Seznam tabulek .....	54
Seznam použitých zkratk .....	54
Seznam použité literatury .....	54
Seznam příloh .....	55

## ÚVOD

Tématem mé bakalářské práce je dualita úloh lineárního programování (LP), která je disciplínou operačního výzkumu neboli operační analýzy. Lineární programování je odvětví optimalizace, řeší problém nalezení minima či maxima předem definovaného kritéria (např. zisk, náklady, objem výroby, atd...) na množině všech možných přípustných variant dané úlohy. Prakticky to znamená hledání extrému zmíněného kritéria při platnosti jistých omezujících podmínek. Dané kritérium je vyjádřené lineární funkční závislostí a omezující podmínky jsou vyjádřeny soustavou rovnic či nerovnic. Slouží k řešení optimalizačních úloh z různých oblastí, využívá k tomu matematické poznatky především z oblasti lineární algebry. Je nejpracovanější oblastí operačního výzkumu a základem kvantitativních rozhodovacích modelů. Veliké množství typů a variant důležitých manažerských problémů je možné formulovat pomocí těchto modelů, které lze pak rychle řešit na počítači pomocí dobrých programových prostředků (např. aplikace řešitel v rozhraní MS Excel). Toto lineární programování se začalo rozvíjet po druhé světové válce, kdy byla v roce 1947 vynalezena nejpoužívanější metoda řešení těchto problémů – simplexová metoda. Postup LP spočívá v převedení reálného ekonomického problému na matematický model, který se pak řeší některou z uvedených metod. Důležitou součástí těchto získaných výsledků je pak jejich správná ekonomická interpretace. Po získání řešení je pak možné provést i tzv. postoptimalizační analýzu, která odhalí spoustu důležitých informací potřebných pro manažerské rozhodování. Dualita úloh LP pak pojednává o možnosti vytvoření jiné úlohy pomocí správných postupů, která je s původní úlohou úzce propojena. Této úloze se pak říká úloha duální a celá dvojice úloh se nazývá duálně sdružená úloha. Správná znalost vztahů mezi těmito dvěma úlohami poskytuje zajímavé ekonomické informace a zejména zcela odlišný pohled na stejné zadání, než je obvyklé. Řešení duální úlohy je pak často také možno využít z důvodu snížení časové a paměťové náročnosti oproti řešení úlohy primární.

Tato bakalářská práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. Teoretická část obsahuje zodpovězení všech potřebných témat pro vytvoření části praktické. Obsahuje

potřebné definice pro pochopení lineárního programování i duality úloh, rozdělení duálních úloh včetně jejich charakteristických znaků a poukazuje na veškeré vlastnosti duálně sdružených úloh, které jsou potřebné pro jejich správnou tvorbu, pochopení, řešení i ekonomickou interpretaci. Další stránky teoretické části jsou zaměřeny na řešení duálně sdružené úlohy, kde detailně popisují potřebný algoritmus nejužívanější metody řešení těchto úloh, a to simplexové metody. Pro přehled a lepší pochopení je v této části obsaženo i pár vzorových příkladů a její součástí je i poukázání na možnosti, jak duální úlohu ekonomicky interpretovat. Pro praktickou část jsem si pak zvolil konkrétní podnik, kde jsem vykonával brigádu a poznatky obsažené v teoretické části jsem aplikoval na konkrétní příklad z praxe, který se týká tohoto podniku. Tento příklad jsem vyřešil simplexovou metodou, vytvořil k němu duální úlohu včetně jejího řešení a získané výsledky ekonomicky interpretoval i pomocí postoptimalizační analýzy.

Téma této práce jsem si vybral z důvodu kladného vztahu k veškerým matematickým a logickým úlohám včetně optimalizace. Předmět operační výzkum jsem na bakalářském studiu ekonomické fakulty řadil mezi mé nejoblíbenější, a tak jsem od počátku plánoval si vybrat téma, které bylo učivem tohoto předmětu. Dalším důvodem je, že bych se podobné problematice rád v budoucnu nadále věnoval. K vytvoření této práce mi napomohlo několik knižních zdrojů, nejvíce jsem však čerpal z knihy Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování od autorů Miroslav Plevný a Miroslav Žížka. Tuto literaturu považuji za stručnou, ale zároveň za nejpřehlednější a nejlépe pochopitelnou.

Cílem bakalářské práce je přeformulování příkladu z praxe na matematický model a jeho správné vyřešení včetně řešení duální úlohy tohoto příkladu. Záměrem práce je pak shrnutí veškerých výsledků, zhodnocení všech získaných údajů a správná ekonomická interpretace výsledných hodnot předem nadefinovaných proměnných. Mezi mé cíle jsem si stanovil i vytvoření analýzy získaných a správně interpretovaných výsledků, která by mohla, v případě potřeby, směřovat k vytvoření návrhů na zlepšení získaných hodnot a výsledků.

# 1. TEORETICKÁ ČÁST

## 1.1 Teorie lineárního programování

Nejprve by bylo vhodné si definovat úlohu programování a připomenout si charakteristiku ekonomického a matematického modelu, neboť tyto pojmy se budou nést celou mou prací a znalost jejich charakteristik či jejich formulaci budu nezdídkou využívat.

**Ekonomický model** lze charakterizovat jako zjednodušený popis reálného systému, který obsahuje, s ohledem na analyzovaný problém, pouze nejpodstatnější prvky a vazby mezi nimi. Měl by obsahovat zejména *cíl analýzy* – jednoznačné určení cílového stavu modelovaného systému (např. maximalizace zisku, minimalizace rizika, nákladů ...), *popis procesů, které v systému probíhají* – procesem se rozumí jakási reálná aktivita, která probíhá s nějakou intenzitou a má vliv na cíl analýzy (např. proces – výroba výrobku, intenzita – objem výroby), *popis činitelů ovlivňujících provádění procesů* – procesy nemohou být realizovány s neomezenou intenzitou, jsou ovlivňovány celou řadou činitelů (např. spotřeba omezených zdrojů, požadavky na maximální či minimální objem výroby ...) a *popis vzájemného vztahu mezi procesy, činiteli a cílem analýzy*. Ekonomický model je v podstatě slovním a numerickým popisem problému, a aby jej bylo možné řešit, je třeba ho nějakým způsobem formalizovat - převést tedy ekonomický model na **matematický model**, který je poté řešitelný standardními postupy. Obsahuje stejné prvky jako ekonomický model, ale mají jiné vyjádření. Cíl analýzy, máme-li ho vůbec definovaný, je většinou vyjádřen ve formě lineární či nelineární funkce. Procesy v tomto modelu jsou vyjádřeny jako proměnné a jejich intenzita pak jako hodnoty těchto proměnných. Činitelé mohou být velmi rozliční v souvislosti s povahou analyzovaného problému, nejběžněji jsou vyjádřeny ve formě lineárních či nelineárních rovnic či nerovnic. Vazby mezi procesy, činiteli a cílem analýzy jsou popisovány pomocí parametrů, jejichž hodnoty nemůže uživatel ovlivňovat.

Modely operačního výzkumu jsou velmi různorodé a zabývají se rozdílnými sférami ekonomického života. Vzhledem k tomuto faktu se objevila potřeba specifických přístupů k řešení jednotlivých tříd problémů a časem se ustálily relativně samostatné disciplíny či odvětví operačního výzkumu. Mezi tato odvětví patří i **matematické programování**. Matematické programování se zabývá řešením optimalizačních úloh, ve kterých se jedná o nalezení extrému daného kritéria na množině variant určených soustavou omezujících podmínek. Matematický model úlohy matematického programování lze zapsat následovně (obr. 1):

**Obrázek 1: obecný matematický model**

Maximalizovat (minimalizovat)	$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
za podmínek	$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0,$
	$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0,$
	:
	$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0,$
	$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n,$

Zdroj: Plevný, 2010

kde:  $n$  ... počet proměnných modelu,

$m$  ... počet omezujících podmínek,

$f(x), g_i(x)$  ... obecné funkce  $n$  proměnných .

(Plevný, 2010, s.18)

Z matematického hlediska se tedy jedná o určení hodnot proměnných modelu  $x_j$  tak, aby byly respektovány všechny omezující podmínky úlohy, a aby byl dosažen extrém dané kritériální funkce. Jestliže je kritériální funkce lineární a všechny rovnice i nerovnice použité v modelu jsou rovněž lineární, potom se jedná o úlohu **lineárního**

**programování.** Pokud je alespoň jedna z funkcí nelineární, jde o úlohu nelineárního programování. Mezi možné aplikace lineárního programování patří například optimalizace výrobního programu, směšovací úlohy nebo optimalizace portfolia.

## 1.2 Dualita úloh lineárního programování

Dualita vyjadřuje jakýsi vzájemný vztah. I v oblasti lineárního programování tomu není jinak. Neboť ke každé úloze LP lze podle určitých pravidel zformulovat jinou úlohu lineárního programování, která je k té první sdružená, má k ní nějaký vzájemný vztah. Jedna z těchto úloh se pak nazývá **úloha primární** a druhá se označuje jako **úloha duální**. Při tomto označování je nutno mít na vědomí, že se jedná o vzájemný symetrický vztah a tudíž není mezi úlohami žádný vztah nadřazenosti a podřízenosti. Důkazem může být i fakt, že duální úlohou k duální úloze je úloha primární. Kdybych tedy aplikoval proces transformace jedné úlohy na druhou dvakrát po sobě, dostal bych zpět původní primární úlohu. Nejvýstižnějším termínem se proto může jevit termín **dvojice duálně sdružených úloh**.

Primární úloha → transformace → duální úloha → transformace → primární úloha

Dualita má značný význam v celé teorii LP. Duální problém a jeho řešení mají důležitou ekonomickou interpretaci. Jeho optimální řešení lze pak využít v analýze citlivosti. Často je znalost a interpretace duálních proměnných, v závislosti na cílech analýzy, důležitější než znalost a interpretace proměnných primárního modelu. Je možno tak někdy snížit časovou a paměťovou náročnost řešením duální úlohy namísto řešení úlohy primární. Dalším významem či výhodou může být, že na výsledcích teorie duality jsou založeny některé metody pro řešení úloh LP, které jsou za určitých okolností výhodnější než simplexová metoda. Duálně sdružené modely se často rozlišují na souměrné (symetrické) a nesouměrné (nesymetrické), kterým se budu věnovat samostatně.

(Jablonský, 2001, s.79)



### 1.2.1 Symetrické duální úlohy

Duálně sdružené úlohy k sobě mají úzký vztah. Při porovnání primárního a duálního modelu lze vypožorovat, že jedna úloha je maximalizační a druhá minimalizační. Dalším znakem je, že jeden z modelů duálně sdružených úloh obsahuje tolik proměnných, kolik má druhý model podmínek (a naopak). Při porovnání modelů duálně sdružené úlohy je také patrné, že k-tý sloupec modelu jedné úlohy odpovídá k-tému řádku modelu druhé úlohy a naopak. Tento fakt vlastně znamená, že sloupcový vektor koeficientů podmínek příslušících k-té proměnné jednoho modelu odpovídá řádkovému vektoru koeficientů příslušících k-té podmínce druhého modelu. Je i patrné, že k-tý koeficient účelové funkce jednoho modelu je pravou stranou k-té podmínky druhého modelu. Tyto vlastnosti splňuje každá dvojice duálně sdružených úloh. Pokud k těmto vlastnostem je splněno i to, že v maximalizační úloze jsou všechny podmínky typu menší nebo rovno a v minimalizační úloze jsou všechny podmínky typu větší nebo rovno a zároveň jsou proměnné obou úloh nezáporné, mluvíme o **symetrických duálně sdružených úlohách (obr. 2)**.

Obrázek 2: obecný zápis symetricky duálně sdružené úlohy

Primární model:
Maximalizovat
$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
za podmínek:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$
.....
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Duální model:

Minimalizovat

$$g(\mathbf{w}) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$$

za podmínek:

$$a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m \geq c_1$$

$$a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m \geq c_2$$

.....

$$a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m \geq c_n$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Zdroj: Plevný, 2010

Při definici symetricky duálně sdružených úloh lze použít i maticového zápisu (obr. 3).

**Obrázek 3: maticový zápis duálně sdružené úlohy**

Primární problém:

Maximalizovat

$$f = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

za podmínek:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Duální problém:

Minimalizovat

$$g = b^T w$$

za podmínek:

$$A^T w \geq c,$$

$$w \geq 0$$

Zdroj: Plevný, 2010

kde,

A ..... matice strukturních koeficientů typu  $m, n$

b ..... vektor pravých stran omezení typu  $m, 1$

$c^T$  ..... vektor cenových koeficientů typu  $1, n$

x ..... vektor primárních proměnných typu  $n, 1$

$u^T$  ..... řádkový vektor duálních proměnných typu  $1, m$  ;

(Plevný, 2010, s.121)

### 1.2.2 Nesymetrické duální úlohy

Nesymetrický duální problém se formuluje z primárního problému, jehož všechna nebo alespoň některá omezení jsou formulována jako rovnice. Omezení nesymetrických duálních úloh jsou opět všechna formulována jako nerovnice a jejich smysl se stejně jako u symetrických duálních úloh řídí extrémem účelové (kriteriální) funkce. Lze vycházet buď z minimalizační či maximalizační primární úlohy. Jejich maticový zápis by mohl vypadat takto (obr. 4):

Obrázek 4: maticový zápis nesymetrických duálních úloh

1. Primární problém	2. Duální problém
$z = c^T x \dots \max$ $A x = b$ $x \geq 0$	$f = u^T b \dots \min$ $u^T A \leq c^T$
$z = c^T x \dots \min$ $A x = b$ $x \geq 0$	$f = u^T b \dots \max$ $u^T A \leq c^T$

Zdroj: Lagová, 2009

(Lagová, 2009, s.144)

Schéma převodu duálně sdružených úloh, uvedené v kapitole symetrické duální úlohy, však platí pouze pro symetrické duálně sdružené úlohy. Proto lze jednoduše v případě potřeby tyto nesymetrické duální úlohy přetransformovat na potřebné symetrické. Pro tuto transformaci se nejčastěji využívá těchto prostředků:

- Převod minimalizace účelové funkce na maximalizaci a naopak
  - změnou znamének účelové funkce
- Převod podmínky typu  $\leq$  na  $\geq$  a naopak
  - tento prostředek se používá, protože často není dodrženo to, že při maximalizaci účelové funkce musí být všechny podmínky typu  $\leq$  a při minimalizaci typu  $\geq$
  - tento převod se uskuteční vynásobením rovnice číslem -1
- transformace podmínky typu  $=$  na nerovnost
  - rozšířením této podmínky na dvě podmínky, přičemž jedna bude typu  $\geq$  a druhá typu  $\leq$
  - např. :  $x_1 + 2x_2 = 3 \rightarrow x_1 + 2x_2 \leq 3$   
 $\rightarrow x_1 + 2x_2 \geq 3$

- převední reálných proměnných na nezáporné
  - matematickou substitucí

### 1.2.3 Vlastnosti duálně sdružených úloh

I když jde o různé modely stejného problému, jsou duálně sdružené úlohy pevně svázány. Mezi dvojicí duálně sdružených úloh a jejich řešeními existuje několik vztahů. Důležité vztahy duálně sdružených úloh lze formulovat tzv. **větou o dualitě**.

Tato věta definuje vztah hodnot účelových funkcí duálně sdružených úloh a říká: *„Existuje-li optimální řešení jedné z duálně sdružených úloh, potom existuje optimální řešení i duálně sdružené úlohy a hodnoty účelových funkcí obou úloh se pro toto optimální řešení rovnají“* (Plevný, 2010, s.123). Věta o dualitě má za důsledek mnoho dalších vztahů mezi duálně sdruženými úlohami:

- Jestliže jedna z úloh nemá řešení z důvodů neomezenosti množiny přípustných řešení, pak nemá duálně sdružená úloha žádné přípustné řešení
- Pro libovolná přípustná řešení duálně sdružených úloh platí, že hodnota účelové funkce maximalizačního modelu je vždy nižší nebo rovna hodnotě účelové funkce minimalizačního modelu
  - toto tvrzení se také někdy označuje jako slabá věta o dualitě
- Má-li jedna ze sdružených úloh optimální řešení, má i druhá sdružená úloha optimální řešení
- Mají-li obě sdružené úlohy přípustné řešení, mají také optimální řešení

Z věty o dualitě lze také vyvodit možnost řešení praktických problémů dvěma přístupy. Problémy v praxi lze řešit tzv. primárním přístupem. Při řešení problémů tímto přístupem hledáme jedno výchozí přípustné řešení původního modelu a poté se toto řešení snažíme vylepšit. Pokud již další vylepšení není možné, prohlásí se poslední nalezené řešení za hledané řešení (např. Simplexová metoda). Druhým přístupem,

kterým lze řešit praktické problémy, je duální přístup. Tento přístup začíná duálně přípustným řešením, kterému odpovídá primárně nepřípustné řešení (nesplňuje omezující podmínky primárního modelu), avšak s velmi dobrou hodnotou primárního kritéria. V dalším kroku se hledají taková řešení, při kterých budou postupně splněny všechny primární podmínky s co nejmenším zhoršením primárního kritéria. První nalezené přípustné primární řešení je hledaným řešením (např. metody řešení dopravního problému).

Tyto přístupy k řešení téže úlohy jsou možné uskutečnit jednak proto, že se hodnoty účelových funkcí duálně sdružených úloh pro optimum rovnají, a jednak také z toho důvodu, že známe-li optimální řešení jedné úlohy, je možné z něj poměrně jednoduše určit i optimální řešení duálně sdružené úlohy. K tomuto určení napomáhá i **věta o rovnováze**.

Touto větou lze formulovat další důležité vztahy duálně sdružených úloh a říká: „*Je-li pro optimální řešení jedné ze symetrických duálně sdružených úloh splněna k-tá podmínka jako ostrá nerovnost (příslušná přídatná proměnná je kladná), bude se v optimálním řešení duálně sdružené úlohy k-tá proměnná rovnat nule*“ (Plevný, 2010, s.123). Toto lze formulovat i v obměněném stavu: „*Není-li k-tá proměnná v optimálním řešení nulová (tzn. je kladná), potom je k-tá podmínka pro optimální řešení duálně sdružené úlohy splněna jako rovnost*“ (Plevný, 2010, s.124). Tato věta má za důsledek to, že je-li v optimálním řešení jedno z dvojice duálně sdružených omezení splněno jako ostrá nerovnost, je druhé omezení splněno jako rovnost. Je-li však v optimálním řešení jedno z dvojice duálně sdružených omezení splněno jako rovnost, neplyne z tohoto vztahu nic pro druhé z dvojice omezení, tj. může být splněno jako ostrá nerovnost i jako rovnost. Věta opačná tedy rozhodně neplatí.

Význam duálních proměnných i úzce souvisí s pojmem **stínové ceny**. Stínové ceny jsou strukturální duální proměnné a jejich určení je důležité pro manažerské rozhodování, neboť jde o znalost toho, jak se hodnota účelové funkce bude měnit v závislosti na změně hodnoty pravé strany určité podmínky. Stínová cena je vlastně definována jako hodnota, o kterou se změní hodnota účelové funkce při změně hodnoty pravé strany i-té podmínky o hodnotu 1. Z hlediska duálních proměnných je stínová cena pro i-tou podmínku dána optimální hodnotou i-té duální proměnné. Pro příklad je dáno optimální řešení duální úlohy:  $[0, 0, 3/7, 0, 0, 0, 0, 2/5]$ . Tyto hodnoty právě udávají stínové ceny

zdrojů v primární úloze. Konkrétně pro tento příklad optimálního řešení jsou všechny stínové ceny vyjma 3. a 8. Zdroje nulové. Stínová cena pro 3. zdroj činí  $3/7$  a stínová cena pro 8. zdroj činí  $2/5$ .

(Plevný, 2010, s.123)

#### 1.2.4 Řešení duálně sdružených úloh

Pro získání optimálního řešení dvojice duálně sdružených úloh lze jednoduše využít simplexovou metodu, neboť se v obou případech jedná o standardní úlohy LP. Každou z obou duálně sdružených úloh lze tedy řešit samostatně simplexovou metodou. Pro určení řešení obou úloh, jak primární, tak duální, však postačuje díky větě o rovnováze pouze znalost optimálního řešení jedné z úloh. K optimálnímu řešení druhé úlohy se lze dopracovat i bez složitých transformací v simplexové metodě, a to následujícím způsobem:

Mějme pro příklad ze simplexové tabulky vyřešené optimální řešení duální úlohy  $(0, 0, 0, 0, 3/8, 0, 0, 3/14)$ . Hodnota účelové funkce této duální úlohy je 15. Zcela zřejmou věcí tak bude hodnota účelové funkce pro primární úlohu. Hodnota účelové funkce primáru bude jako důsledek věty o dualitě shodný s hodnotou účelové funkce duálu, pro můj příklad tedy 15. Pro nalezení hodnot optimálního řešení primární úlohy lze použít větu o rovnováze, ať už v jejím původním nebo dle potřeby přeformulovaném tvaru. Podle této věty platí, že 5. a 8. podmínka musí být pro optimální řešení splněna jako rovnost, protože v optimu duálu jsou právě na těchto pozicích hodnoty větší než nula. Po vyřešení této soustavy o dvou rovnicích (dvě podmínky duálu jsou větší než nula) bych dostal optimální řešení primární úlohy ve tvaru  $x_{opt} = (x_1, x_2)$ . Poté lze spíše jen pro kontrolu jednoduše dopočítat hodnotu účelové funkce pro primární problém, a to dosazením hodnot  $x_1$  a  $x_2$  do účelové funkce. Z věty o dualitě už je známo, že se bude rovnat optimu duálu.

(Plevný, 2010, s.124)

### 1.2.4.1 Simplexová metoda

Tato metoda je jedním z možných způsobů, jak se dopracovat k optimálnímu řešení úlohy LP. A protože s ní budu pracovat a řešit duální problém v mé praktické části, bylo by vhodné si ji v této podkapitole připomenout a poukázat na všechny ekvivalentní úpravy a postupy směřující ke správnému ukončení této metody a tím správnému nalezení optimálního řešení. Dalšími možnými způsoby, jak se dopracovat k řešení úlohy lineárního programování jsou např. grafické řešení či řešení v rozhraní MS Excel nebo jiných počítačových softwarů. Grafickou metodu pro získání optimálního řešení úlohy LP lze použít jen pro úlohy se dvěma rozhodovacími proměnnými, proto je simplexová metoda zřejmě nejznámější a nejvíce užívanou metodou a je pilířem k pochopení lineárního programování jako takového.

Pro samotné řešení modelu (ať primárního nebo duálního) LP simplexovou metodou je nejprve nutné převést tento model do tzv. **kanonického tvaru**. Matematický model, respektive soustava jeho podmínek, je v kanonickém tvaru, pokud splňuje několik kritérií:

- 1) všechny podmínky modelu jsou ve tvaru rovnosti
- 2) všechny hodnoty pravých stran podmínek jsou nezáporné
- 3) v matici koeficientů levých stran podmínek existuje jednotková submatice, tzn. matice s 0-1 bází

Splnění těchto tří kritérií lze docílit prostým postupem, který předpokládá, že je daná úloha v maximalizačním tvaru. Převod z minimalizačního na maximalizační tvar je však velmi jednoduchý. Pro získání maximalizace postačuje v původním minimalizačním tvaru obrátit všechna znaménka u koeficientů účelové funkce. Neboť pokud chci nějakou hodnotu minimalizovat, vlastně pouze maximalizuji její opačnou hodnotu.

$$\text{Např. } \min z = 5x_1 + 2x_2 \quad \rightarrow \quad \max z = -5x_1 - 2x_2$$

Po převodu na maximalizační tvar lze pro získání kanonického tvaru řešeného modelu dodržovat tento postup:

- 1) vynásobení dané podmínky hodnotou  $-1$ , v případě, že je její pravá strana záporná – tímto vynásobením se získají nezáporné hodnoty



pravé strany příslušné podmínky a splní se tak druhé výše zmíněné kritérium. Při tomto násobení je však potřeba dbát na změnu znaménka nerovnosti.

2) *doplnění přídatných (doplňkových) proměnných, v případě nerovnosti alespoň některé z podmínek* – tyto proměnné se doplňují do rovnice za účelem získání rovnosti. U nerovnic typu  $\leq$  se na levou stranu rovnice přídatná proměnná přičítá (např.  $2x_1 - x_2 \leq 5 \rightarrow 2x_1 - x_2 + x_3 = 5$ ) a u nerovnic typu  $\geq$  se odčítá (např.  $2x_1 - x_2 \geq 5 \rightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 5$ ). Proměnná  $x_3$  představuje právě přídatnou doplňkovou proměnnou, která má v řešených úlohách reálný ekonomický význam a vyjadřuje, pokud je přídatná proměnná kladná, nespoteřované množství zdroje. Pokud je přídatná proměnná záporná, vyjadřuje pak množství získané nad stanovený minimální limit. Toto nespoteřované množství nebo překročení jakéhosi limitu přímo neovlivňuje hodnotu účelové funkce.

3) *přidání pomocných (umělých) proměnných pro získání jednotkové submatice v matici levých stran podmínek řešeného modelu* – tato proměnná se uměle doplňuje do té rovnice podmínky, pro kterou neexistuje v matici koeficientů podmínek levých stran jednotkový sloupcový (bazický vektor).

$$\text{Např. } \max z = 2x_1 - 3x_2 (+0x_3 + 0x_4) - \omega x_5 - \omega x_6$$

$$\text{za podmíněk: } -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_6 = 6$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

matice koeficientů podmínek levých stran:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Černě označená matice je pak jednotková submatice, kterou určují pomocné proměnné doplněné v příkladu. Tyto pomocné proměnné nemají žádný reálný ekonomický význam, slouží pouze k vytvoření tzv. bazického řešení v modelu, o kterém budu psát dále. Úprava, kdy se přičte člen jen na jednu stranu rovnice, samozřejmě není ekvivalentní, a proto je zapotřebí, aby všechny přičtené proměnné měly nulovou hodnotu. K dosažení nulových hodnot pomocných proměnných je pak potřeba tyto proměnné zatížit velmi vysokými zápornými koeficienty. Tyto koeficienty jsou znázorněny v příkladu symboly  $\omega$ . Pokud by tedy ve výsledku pomocná proměnná vyšla kladná, velmi by to snižovalo účelovou funkci, což je nepřipustné a mohl bych prohlásit, že řešení takovéto úlohy LP neexistuje. Po správném převedení matematického modelu na kanonický tvar a určení jednotkové submatice se lze propracovat k tzv. **bazickému přípustnému řešení**.

Toto řešení se nalezne, pokud se položí rovny nule hodnoty všech proměnných, které netvoří jednotkovou submatici. U proměnných tvořící tuto submatici (v mém příkladu je to  $x_3$ ,  $x_5$  a  $x_6$ ) se pak tyto proměnné rovnají pravé straně podmínky, kde má proměnná hodnotu 1.

$x_3$	$x_5$	$x_6$	pravá strana podmínek	
1	0	0	6	$\rightarrow x_3 = 6$
0	1	0	8	$\rightarrow x_5 = 8$
0	0	1	6	$\rightarrow x_6 = 6$

Výsledné bazické přípustné řešení lze pak zapsat následovně:  $x = [ 0, 0, 6, 0, 8, 6 ]$

Toto řešení je jen jedno z mnoha možných řešení a není optimální, které chceme získat. Z předešlých znalostí o úlohách LP je známo, že se optimální řešení hledá v krajních bodech konvexního polyédro (množina všech konvexních kombinací konečné neprázdné množiny bodů). Každé bazické přípustné řešení úlohy LP v kanonickém tvaru odpovídá krajnímu bodu příslušné množiny přípustných řešení a naopak každý krajní bod z množiny přípustných řešení odpovídá bazickému přípustnému řešení dané úlohy. Tento fakt nám zdůvodňuje důležitost nalezení bazického přípustného řešení, neboť lze namísto prozkoumávání krajních bodů prozkoumávat a zaměřit se právě na toto řešení. A to hlavně proto, že je jasné, že pokud má úloha LP nějaké optimální

řešení, je mezi těmito řešeními i bazické přípustné řešení soustavy omezujících podmínek. Pokud má pak úloha jediné optimální řešení, musí toto řešení být zároveň bazickým přípustným řešením. Na těchto faktech je založen **princip** a myšlenka celé **simplexové metody**:

- 1) *Nalezení bazického přípustného řešení* – toto bazické přípustné řešení obsahuje kanonický tvar, spočívá to v nalezení jednotkové submatice, jak uvádím výše
- 2) *Přechod z jednoho bazického přípustného řešení do jiného bazického přípustného řešení s lepší hodnotou účelové funkce* – tento krok se provede tak, že se ekvivalentními úpravami nahradí jeden ze sloupcových bazických jednotkových vektorů jiným (podobně jako při řešení soustavy rovnic), který není v bázi. To znamená, že v bazickém přípustném řešení bude analogicky jedna z bazických proměnných nahrazena jinou. Hodnoty  $z_j - c_j$  ( $C_B^T A_j - c_j$ ) v pomocném řádku (viz tab. 1) nám pak říkají, který sloupec nově zavedeme do báze. Pro maximalizační úlohy zavedeme do báze sloupec s nejnižší zápornou hodnotou  $z_j$  v pomocném řádku. Tomuto pravidlu se pak říká sloupcové pravidlo. Pro určení který sloupec vypadne z báze je pak zapotřebí ještě určit na které pozici (ve kterém řádku) v určeném sloupci bude hodnota 1. Tento koeficient se nazývá určující prvek neboli pivot. Tento určující prvek nesmí být záporný ani nula, a tak mohou říci, že ve vybraném sloupci se vybírá určující prvek ze všech kladných koeficientů  $a_{is}$  v tom řádku, pro který je hodnota podílu  $b_i/a_{is}$  minimální. Tato regule se pak nazývá řádkové pravidlo.
- 3) *Kontrola, zda lze nalézt bazické přípustné řešení s vyšší hodnotou účelové funkce* – pokud je v pomocném řádku některá z hodnot záporná, vyplývá z toho, že zavedením odpovídajícího řádku do báze a správným nalezením pivota lze dosáhnout ještě lepšího řešení s vyšší hodnotou účelové funkce (pro maximalizaci). Jsou-li tedy na všech pozicích v pomocném řádku nezáporné hodnoty, mohou toto aktuální bazické přípustné řešení prohlásit za nejlepší možné řešení, tedy za optimální řešení (tzv. kritérium optimality). Pokud se tedy v pomocném řádku nachází na nějaké pozici záporné číslo, je zapotřebí znovu tabulku transformovat dle výše zmíněných pravidel. Tato transformace se neustále opakuje až do fáze, kdy je splněno kritérium optimality (v pomocném řádku jsou všechna čísla nezáporná).

**Tabulka 1: uspořádání simplexové tabulky**

		$c_1$	$c_2$	...	$c_n$	
<b>B</b>	<b><math>C_B</math></b>	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	<b>b</b>
$x_{B1}$	$C_{B1}$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$	$b_1$
...	...	...	...	...	...	...
$x_{Bm}$	$C_{Bm}$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	$b_m$
		$Z_1 - c_1$	$Z_2 - c_2$	...	$Z_n - c_n$	HÚF

Zdroj: Plevný, 2010

V horním řádku představují proměnné  $c_1, c_2, \dots, c_n$  koeficienty účelové funkce. Do třetího až pátého řádku se pak vypisují jednotlivé podmínky, poslední sloupec je pak sloupec pravých stran podmínek. V prvním sloupci B se nacházejí jednotlivé bazické proměnné a v následujícím sloupci  $C_B$  pak koeficienty účelové funkce pro tyto bazické proměnné. Poslední řádek je pomocný řádek, který je potřeba k využití sloupcového pravidla a na jeho konci se nachází HÚF, což je hodnota účelové funkce pro zadaný model. Algoritmus simplexové metody je sestaven tak, že automaticky předpokládá, že všechny proměnné použité v řešeném modelu jsou nezáporné. Proto se do výchozí tabulky nikdy nezařazují obligátní podmínky. Proto se do výchozí tabulky nikdy nezařazují obligátní podmínky. Pro lepší přehlednost a zkoušku, jak celý algoritmus funguje, zde uvádím jeden příklad. Pro tento účel není třeba zadaný model ekonomicky interpretovat.

Příklad:

$$\max \quad z = 600 x_1 + 900 x_2$$

$$\text{za podmínek:} \quad 3 x_1 + 5 x_2 \leq 1000$$

$$4 x_1 + 5 x_2 \leq 2000; \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Nejprve je potřebné upravit model na kanonický tvar, podle postupu, který uvádím výše.

$$\max \quad z = 600 x_1 + 900 x_2$$

$$\text{za podmínek:} \quad 3 x_1 + 5x_2 + x_3 = 1000$$

$$4 x_1 + 5x_2 + x_4 = 2000$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Tento příklad už se nachází v maximalizačním tvaru, a proto není třeba jakkoli měnit znaménka účelové funkce. Pravé strany podmínek jsou také nezáporné, jak je pro převedení do kanonického tvaru nezbytné, a proto prvním krokem, který je třeba udělat, je převedení podmínek ze tvaru nerovnosti do tvaru rovnosti. Tohoto kroku se docílí přidáním doplňkových proměnných do podmínek. Protože obě podmínky byly ve tvaru  $\leq$ , přídatné (doplňkové) proměnné se přičítají. Po prozkoumání modelu s přídatnými proměnnými a nanesením podmínek do matice je patrné, že model obsahuje jednotkovou submatici a není tak třeba přidávat další pomocné proměnné. Výše uvedený model lze tak prohlásit za model v kanonickém tvaru a je možno ho nyní přepsat do simplexové tabulky (tab. 2).

**Tabulka 2: výchozí simplexová tabulka**

		600	900	0	0	
<b>B</b>	<b>C<sub>B</sub></b>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	<b>b</b>
x <sub>3</sub>	0	3	5	1	0	1000
x <sub>4</sub>	0	4	5	0	1	2000
		-600	-900	0	0	0

Zdroj: Vlastní zpracování, 2014

Při zapisování modelu do simplexové tabulky je třeba dávat pozor, aby proměnné v bázi, které se zapisují do sloupce B (v mém případě x<sub>3</sub> a x<sub>4</sub>), byly zapsány v tom řádku, ve kterém obsahuje bazický sloupec odpovídající této proměnné hodnotu 1. Sloupec C<sub>B</sub> pak obsahuje hodnoty opsané z prvního řádku tabulky. Hodnoty z<sub>j</sub> - c<sub>j</sub> v pomocném řádku se vypočítají podle zmíněného vztahu C<sub>B</sub><sup>T</sup>A<sub>j</sub> - c<sub>j</sub>. Pro sloupec x<sub>1</sub> se hodnota v pomocném řádku rovná tomuto vztahu: z<sub>1</sub> - c<sub>1</sub> = (0\*3 + 0\*14) - 600 = -600.

Pro sloupec  $x_2$  pak  $z_2 - c_2 = (0 \cdot 5 + 0 \cdot 5) - 900 = -900$ . Obdobný způsob se užívá pro všechny zbylé řádky představující jednotlivé proměnné. Z takto správně sestavené tabulky lze jednoduše splnit první krok, kterým je nalezení bazického přípustného řešení. Proměnné, které netvoří jednotkovou submatici  $(x_1, x_2)$ , se položí rovny nule a bazické proměnné se pak rovnají hodnotě pravé strany, kde má konkrétní bazická proměnná hodnotu 1. Bazické přípustné řešení se tedy v tomto případě rovná  $x = [0, 0, 1000, 2000]$ . Po dosazení tohoto řešení do účelové funkce vyjde její hodnota nulová. Jelikož chceme výsledek maximalizovat, je zjevné, že toto řešení není optimální. Nicméně neodporuje podmínkám a lze ho prohlásit za přípustné. Dalším krokem je hledání nového přípustného řešení s lepší (v mém případě větší) hodnotou účelové funkce. Pro nalezení tohoto lepšího řešení je nejprve třeba správně využít sloupcového i řádkového pravidla a najít pivota. Moje úloha je maximalizační, a tak budu tedy do báze dle sloupcového pravidla nově zavádět proměnnou s nejnižší zápornou hodnotou v pomocném řádku. V mém případě je to proměnná  $x_2$  s hodnotou  $-900$  v tomto řádku. Z důvodu zjištění, na kterém řádku se bude nově nacházet hodnota 1, využiji řádkové pravidlo. Porovnáním podílů pravých stran podmínek s příslušnou hodnotou v mnou nalezeném sloupci  $x_2$  zjistím, že pivot se bude nacházet v prvním řádku tohoto sloupce ( $1000/5 < 2000/5$ ). Nyní je zapotřebí přetransformovat tuto tabulku do nové výchozí simplexové tabulky, tak aby byla v bázi zavedena proměnná  $x_2$ . Transformace probíhá stejně jako při řešení soustavy rovnic v maticovém tvaru tzv. Gauss – Jordanovou metodou. Získané hodnoty lze opět nanést do simplexové tabulky (tab. 3).

**Tabulka 3: simplexová tabulka po první transformaci**

		600	900	0	0		
<b>B</b>	<b>C<sub>B</sub></b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	<b>B</b>	
$x_2$	900	3/5	1	1/5	0	200	
$x_4$	0	1	0	-1	1	1000	
		-60	0	180	0	180000	

Zdroj: Vlastní zpracování, 2014

Z této simplexové tabulky lze stejným způsobem vyčíst nové lepší bazické přípustné řešení.  $x^{(1)} = [0, 200, 0, 1000]$ . Po dosazení tohoto řešení do účelové funkce získám její hodnotu rovnu 180 000. Je tak jasné, že jsem se opravdu dopracoval k lepšímu řešení, neboť hodnota účelové funkce oproti minulé hodnotě stoupla (maximalizace). Nemohu však stále prohlásit, že nalezené řešení je optimální, neboť se v pomocném řádku stále nachází záporné číslo a je tak potřeba uvedený postup ještě nejméně jednou opakovat.

Opět je zapotřebí z nové simplexové tabulky vybrat pomocí sloupcového a řádkového pravidla určující prvek. Z této tabulky je patrné, že budu nově do báze zavádět proměnnou  $x_1$ , neboť má nejnižší zápornou hodnotu v pomocném řádku (-60). Dle řádkového pravidla pak zjistím, že pivot se bude nacházet v prvním řádku, protože  $200/0,6 < 1000/1$ . Stejnou transformací jako v prvním kroku dostanu nové hodnoty, které lze opět zapsat do simplexové tabulky (tab. 4).

**Tabulka 4: simplexová tabulka s optimálním řešením**

		600	900	0	0	
<b>B</b>	<b>C<sub>B</sub></b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	<b>b</b>
$x_1$	600	1	5/3	1/3	0	1000/3
$x_4$	0	0	-5/3	-4/3	1	2000/3
		0	100	200	0	200000

Zdroj: Vlastní zpracování, 2014

Dopočítáním pomocného řádku výše zmíněným způsobem vidím, že všechny hodnoty v tomto řádku jsou nezáporné a tudíž nové nalezené bazické přípustné řešení mohu prohlásit za optimální řešení. Jinými slovy už nelze získat žádné jiné řešení vyhovující podmínkám, které by mělo pro moji maximalizační úlohu větší hodnotu účelové funkce. Po dosazení optimálního řešení  $x^{(2)} = [1000/3, 0, 0, 2000/3]$  do účelové funkce dostanu její hodnotu rovnu 200000. Tento ukázkový příklad je tedy u konce a jeho optimální řešení lze zapsat i takto:  $x_1 = 1000/3, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2000/3$ .

Při řešení modelů lineárního programování simplexovou metodou mohou však nastat i zvláštní případy. Simplexovou tabulku v těchto případech nelze upravit do

požadovaného tvaru, kdy se v pomocném řádku nachází všechny hodnoty nezáporné a je třeba ji ukončit jiným způsobem. Existují čtyři takovéto případy jiného ukončení výpočtu simplexové metody. Prvním případem je případ, kdy v pomocném řádku existuje hodnota, která je záporná a lze tak uplatnit sloupcové pravidlo, ale v každém řádku tohoto sloupce jsou hodnoty záporné nebo se rovnají nule. V takovémto případě nelze najít pivota a poslední nalezené řešení tak není optimální, ale nové nelze určit, je nedosažitelné. V tomto případě se simplexová metoda ukončuje prohlášením, že optimální řešení neexistuje z důvodu neomezenosti množiny přípustných řešení. Druhý případ, který může nastat při řešení modelu LP simplexovou metodou, je případ, kdy pomocné (umělé) proměnné vyjdou v optimálním řešení nenulové. Tyto proměnné, jak už bylo řešeno, slouží pouze k získání modelu v kanonickém tvaru a kladné hodnoty těchto proměnných tak vyjadřují fakt, že některé omezující podmínky nejsou splněny a optimální řešení původní úlohy tak neexistuje z důvodu neexistence ani jednoho přípustného řešení. Za speciální případ se považuje i případ, kdy se v pomocném řádku výsledné optimální simplexové tabulky vyskytuje hodnota 0 pro jinou než bazickou proměnnou. V tomto případě nastává optimum pro více krajních bodů a optimálním řešením je tak každé řešení se stejnou hodnotou účelové funkce. Posledním zvláštním případem je případ, kdy se během výpočtu objeví tzv. degenerované bazické řešení, které má za důsledek neustálé cyklení výpočtu a nelze ho tak ukončit žádným z výše uvedených výpočtů. Toto degenerované bazické řešení se dá rozpoznat tak, že ve sloupci pravých stran simplexové tabulky se nacházejí nulové hodnoty.

(Plevný, 2010,s.72)

Už je známo, že řešením primární úlohy se získá i řešení duální úlohy, neboť duální úlohu lze prohlásit za primární a primární za duální. To znamená, že i řešením duální úlohy lze získat řešení primární úlohy. Právě na tomto poznatku je založena tzv. **duální simplexová metoda (duální simplexový algoritmus)**. Tato metoda je používána za jistých podmínek pro řešení primární úlohy, která však řeší duální úlohu a řešení primární úlohy je vlastně jeho vedlejší produkt. Duální simplexová metoda je uzpůsobena tak, aby ji bylo možno použít v primární simplexové tabulce. Nepracuje s umělými proměnnými, a proto v případech, kdy ji lze použít, je výhodnější než normální simplexová metoda. Narozdíl od primárního simplexového algoritmu, kde se nejprve najde řešení, které je primárně přípustné (tzn. transformované pravé strany jsou



nezáporné), ale není duálně přípustné. Tento algoritmus se opakuje až do té doby než je nalezené řešení přípustné i duálně (tzn. v maximalizační úloze jsou všechny koeficienty v pomocném řádku nezáporné, v minimalizační úloze nekladné). To znamená až do doby, než se nalezne optimální řešení. Z věty o dualitě však vyplývá, že při řešení úloh LP lze postupovat i opačně. Začne se řešením, které je přípustné duálně, ale není přípustné primárně. V dalších krocích pak probíhají transformace až k řešení, které je primárně i duálně přípustné. Tento postup se pak nazývá onen duální simplexový algoritmus. Výchozí řešení sdružených úloh je pro přehled znázorněno v následující tabulce (obr. 5).

**Obrázek 5: výchozí řešení sdružených úloh**

<b>Primární problém</b>	<b>Duální problém</b>	<b>Metoda řešení</b>
Přípustné řešení	Nepřípustné řešení	Simplexová metoda
Nepřípustné řešení	Přípustné řešení	Duálně simplexová metoda
Přípustné řešení	Přípustné řešení	Optimální řešení

Zdroj: Lagová, 2009

Samotný algoritmus duální simplexové metody se začíná tzv. testem optimality, kdy se zjišťuje, zda je nové bazické řešení přípustné primárně i duálně, čili zda je optimální. V případě, že řešení je přípustné pouze duálně, lze použít duální simplexový algoritmus, ve kterém je dalším krokem určení vektoru, který se vyloučí z původní báze. Je to vektor ležící v  $l$ -tém řádku, který má nejmenší hodnotu proměnné  $x$  ( $x_{il} = \min$ ). Tento řádek se nazývá vedoucí řádek. Dalším krokem je podobně jako u primárního simplexového algoritmu, kde uplatňuji sloupcové a řádkové pravidlo, určení vektoru, který se nově do báze zavede. Je to sloupec s nejnižší hodnotou  $(z_j - c_j) / p_{lj}$ . Pokud jsou všechny hodnoty  $p_{lj}$  větší než nula, je to signál pro to, že úloha nemá přípustné řešení. Po nalezení vektoru, který se zavede do báze, je na řadě klasická transformace prvků simplexové tabulky podle obvyklých postupů. Tento postup se opakuje až do doby, kdy nalezené řešení je optimální (je duálně i primárně přípustné).

(Lagová, 2009, s.164)

### 1.2.5 Ekonomická interpretace duálních proměnných

Předem by bylo vhodné říci, že neexistuje žádný všeobecný návod, jak interpretovat duální proměnné. Je to hlavně z toho důvodu, že jejich ekonomický význam úzce souvisí s konkrétním problémem, jehož matematický model řešíme jako úlohu LP. Sdružené modely mají řadu vlastností, které jsou definovány ve větách o dualitě, pro přehlednost a lepší viditelnost ekonomického významu duálních proměnných zde uvedu jeden ilustrační příklad:

$$\text{maximalizace} \quad z = 77x_1 + 27x_2 + 56x_3$$

$$\text{za podmínek:} \quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 28$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 21$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

Způsob propracování se k optimálnímu řešení pomocí simplexové metody jsem uvedl výše. Po převedení modelu na kanonický tvar a správným doplněním do simplexové tabulky a jejími následnými správnými transformacemi jsem se dopracoval k optimálnímu řešení této úlohy lineárního programování (obr. 6):

**Obrázek 6: optimální řešení úlohy**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$b_i$
$x_1$	1	0	5/4	3/4	1/2	-1/2	21/2
$x_2$	0	1	1/4	-1/4	-1/2	1/2	7/2
$z_j$	0	0	47	51	25	-25	903
Duální proměnné	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_1$	$u_2$		

Zdroj: Lagová, 2002

V této tabulce jsou  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  proměnné základní. Při převodu na potřebný kanonický tvar bylo nezbytné využít přidatných proměnných, které jsou v tabulce znázorněny jako  $x_4$ ,  $x_5$ . Pro získání jednotkové submatice bylo zapotřebí využít i pomocné proměnné,

která je kvůli větší přehlednosti a faktu, že nemá vliv na řešení znázorněna jako  $y_1$ . Poslední řádek duálních proměnných je v tabulce obsažen pro větší přehlednost a přesné určení jednotlivých duálních proměnných. V tabulce je znázorněno jak optimální řešení výše zadaného primárního modelu  $x^0 = (21/2, 7/2, 0, 0, 0)$ , tak optimální řešení duálního modelu  $u^0 = (51, 25, 0, 0, 47)$ . Hodnoty účelových funkcí obou úloh jsou stejné a rovnají se 903. Toto duální řešení se jednoduše získá z řádku  $z_j$  účelové funkce, kdy se začíná díky zmíněným společným vlastnostem duálně sdružených úloh od sloupce první přídatné proměnné a končí se v posledním sloupci základní proměnné. Z tabulky je tak patrné, že strukturální duální proměnné jsou ve sloupcích přídatných proměnných a přídatné proměnné duálního problému lze najít pod strukturálními proměnnými primárního problému. Optimální řešení duální úlohy ke vzorovému příkladu v předcházející kapitole by bylo po poukázání na tuto závislost  $u^0 = (200, 0, 0, 100)$ . Strukturální duální proměnné, jak už jsem psal, se také nazývají stínové nebo redukované ceny. Tyto proměnné lze interpretovat jako ocenění jedné jednotky kapacity ve vztahu k hodnotě účelové funkce, jedná se tedy vlastně o marginální ocenění kapacit. Stínové ceny vlastně ukazují vztah činitelů k hodnotě účelové funkce primárního problému. Zvýší-li se pravá strana  $i$ -tého omezení o jednu jednotku, zvýší se (popř. sníží) hodnota účelové funkce o hodnotu duální proměnné  $u_i$ . V tomto vzorovém příkladě je hodnota první strukturální duální proměnné rovna 51. Zvýší-li se tak  $b_1$  o jednotku, zvýší se i hodnota účelové funkce primárního problému o 51. Hodnota druhé duální proměnné se rovná 25, zvýší-li se tak  $b_2$  o jednotku, sníží se hodnota účelové funkce primárního modelu o 25. To zda se hodnota účelové funkce zvýší či sníží, určuje znaménko koeficientu u pomocné proměnné  $y_1$ . Přídatné duální proměnné odpovídají stínovým neboli redukováným cenám primární proměnné. Tyto duální proměnné konkrétně ukazují, o kolik se musí zvýšit popřípadě snížit cenový koeficient primárního problému tak, aby proměnná byla z hlediska hledaného extrému účelové funkce výhodná. Přídatné duální proměnné  $u_3$  a  $u_4$  jsou rovny nule. Jejich odpovídající strukturální primární proměnné  $x_1$  a  $x_2$  jsou tak proměnné základní a jejich cenový koeficient není třeba měnit. Přídatná duální proměnná  $u_5$  je rovna hodnotě 47. Právě alespoň o tuto hodnotu je třeba zvýšit její odpovídající strukturální proměnnou primárního problému  $x_3$ , aby tato proměnná byla v této maximalizační úloze výhodná.

(Lagová, 2002, s.105)

Jak už bylo napsáno výše, neexistuje žádný obecný návod, jak interpretovat duální proměnné. Proto všechny výše popsané vztahy platí jen pro dané optimální řešení. Jistý velmi zjednodušený návod pro lepší pochopení ekonomického významu duálních proměnných existuje pro jednu z nejvyužívanějších úloh operačního výzkumu, a to úlohu plánování výroby. Z následující úlohy budou jasně shrnuté a patrné veškeré vztahy mezi primární a duální úlohou a zejména mezi jejími ekonomickými interpretacemi.

Mějme tedy příklad, kdy výrobce vyrábí 2 druhy výrobků  $V_1, V_2$ , které prodává na trhu za ceny  $c_1, c_2$ . K jejich výrobě potřebuje 3 různé suroviny  $S_1, S_2, S_3$ . Normované spotřeby (množství  $i$ -té suroviny potřebné k výrobě jednotkového množství  $j$ -tého výrobku) označím jako  $a_{ij}$ . Po nějaké době dojde k rozhodnutí výrobce, že zruší tuto výrobu, přičemž mu zůstalo jisté množství vyrobených výrobků a nespotřebovaná množství  $b_1, b_2, b_3$  surovin  $S_1, S_2, S_3$ , která chce prodat. Otázkou je za jaké ceny má tyto suroviny prodat? Při řešení tohoto příkladu je dobré vycházet z úvahy, že se výrobce bude chtít nepotřebných surovin co nejdříve zbavit, tzn. bude je chtít prodat co nejlevněji. Pokud by však šel s cenami příliš nízko, je možnost, že suroviny koupí někdo, kdo z nich bude chtít vyrábět stejné výrobky a prodávat je levněji, čímž zbylé výrobky původního výrobce vytlačí z trhu. Aby bylo této situaci zabráněno, musí výrobce určit vhodné prodejní ceny  $y_1, y_2, y_3$  surovin  $S_1, S_2, S_3$  tak, aby ten, kdo je koupí, nemohl vyrábět levněji. Cena výrobku  $V_1$ , za kterou by jej bylo možno vyrábět při výprodejních cenách  $y_1, y_2, y_3$  (cenu práce, režii a další položky v tomto zjednodušeném modelu nebudu uvažovat, lze je do něj však samozřejmě zapracovat) a která nesmí klesnout pod cenu  $c_1$  je potom dána vztahem:  $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3$ . Obdobně bude vyjádřena cena druhého výrobku, která nesmí klesnout pod cenu  $c_2$ :  $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3$ . Celková cena vyprodávaných surovin pak dle zadaných proměnných bude:  $b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$ . Dle takto zapsaných cen už lze jednoduše zapsat matematický model této úlohy.

Minimalizace  $b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$

Za podmínek:  $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geq c_2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Proměnné  $y_1, y_2, y_3$  vyjadřují, jakou skutečnou hodnotu mají v daný okamžik suroviny  $S_1, S_2, S_3$  pro podnik. Tyto ceny nemusí mít s objektivními cenami na trhu žádnou souvislost.

Zkonstruuji-li k tomuto modelu dle výše zmíněných pravidel a postupů model duální úlohy dostanu následující model:

$$\text{Maximalizace} \quad c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{Za podmíněk} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Při porovnání tohoto duálního modelu s modelem klasické úlohy plánování výroby je patrné, že se jedná o model úlohy, která představuje výrobní program původního výrobce. Proměnné  $x_1, x_2$  pak vyjadřují konkrétní počet vyrobených kusů výrobků  $V_1, V_2$ . Formulace této úlohy plánování výroby (duální úloha k mé výše zapsané vzorové primární úloze) by pak mohla znít například tak, že je potřeba stanovit plán výroby s maximálním celkovým ziskem z prodeje výsledných výrobků tak, aby pro žádný typ zdroje nebyl překročen limit jeho spotřeby. Z tohoto příkladu a jeho utvořené duální úlohy je patrná úzká provázanost obou modelů a zejména jejich ekonomická interpretace.

(Linda, 2009, s.66)

## **2. PRAKTICKÁ ČÁST**

V této části mé práce jsem spolupracoval s podnikem na výrobu autodílů a jiných příslušenství, který mi také ochotně poskytl potřebné informace pro správné vyhotovení praktického příkladu v této části. Společnost se nazývá Trost autoservice technik a již téměř rok v ní úspěšně vykonávám brigádu prostřednictvím dohody o provedení práce (DPP) případně dohody o pracovní činnosti (DPČ). Tato firma má mnoho poboček v šesti zemích Evropy. Pobočka, kde jsem já vykonával svou činnost, se nacházela v Nýřanech, přibližně 15 kilometrů od Plzně. Výše sepsaná teoretická část by mi pak měla sloužit jako dostatečný podklad pro vyřešení praktického případu týkajícího se duality úloh LP, který přímo souvisí s plánováním výroby v této společnosti. Samotný příklad bude obsahovat sestavení matematického modelu primární úlohy a jeho následný převod na úlohu duální, řešení obou úloh pomocí simplexové metody a v neposlední řadě ekonomickou interpretaci získaných výsledků.

### **2.1 O společnosti Trost autoservice technik**

Společnost Trost auto service technik vyrábí a prodává náhradní díly na osobní i nákladní automobily včetně ostatních příslušenství. Mezi její produkty patří i různá nářadí a vybavení dílen, a také kvalitní logistické služby. Firma Trost expanduje jako žádná jiná firma v oboru, a také proto je jedním z předních velkoobchodů s náhradními díly na automobily v Evropě. Společnost zaměstnává 4000 lidí na 160 místech po celé Evropě. Firma má více jak 150 poboček v 6 zemích Evropy (Příloha A). Hlavní pobočky se nacházejí v Německu, kde je také jejich počet nejvyšší. Dalšími zeměmi, kde firma působí, jsou Rakousko, Slovensko, Rumunsko, Ukrajina a 11 poboček se také nachází na území České republiky. Konkrétní seznam poboček je umístěn v příloze. Trost autoservice technik má, co se týče výroby, 4 hlavní oddělení (osobní automobily, nákladní automobily, nářadí, garážové vybavení), které jsou dále členěny do dalších

několika samostatných dílen. Celkový počet těchto pododdělení (dílen) je pak přesně padesát.

### **2.1.1 Historie firmy**

Ernst Misol, praotec současného majitele firmy Trost Joachima E. Trosta, se pohyboval, jako konstruktér motorů u Gottlieba Daimlera v automobilovém průmyslu již od jeho prvopočátků. V roce 1904 založil pravděpodobně první velkoobchod s náhradními díly v Německu: Ernst Misols 'Motoreninstandsetzungsbetrieb und Motorenteilehandel' v Bad Cannstattu, poblíž Stuttgartu. První výhradní zastoupení výrobců náhradních dílů na automobily získává v roce 1927. V roce 1934 přebírá vedení společnosti od Ernsta Misola jeho zeť Eugen Trost, který mimo jiné přejmenuje společnost podle sebe na Trost. Eugen Trost se orientuje na prodej motorových náhradních dílů, kdy získává generální zastoupení pro celé Německo, zvláště silnou pozici si buduje v oblasti Baden und Württemberg, čímž vytváří základ pro dnešní úspěch firmy.

Firma TROST dnes již nenabízí svým partnerům pouhý prodej náhradních dílů. Od roku 1996 v rámci nově zavedeného servisního konceptu Autofit také kompletní soubor technických, organizačních a komunikačních služeb. V roce 2005 následuje tento servisní koncept i koncept Truckfit, který je zaměřený na užitková vozidla. Od roku 2007 nabízí firma Trost v rámci servisních konceptů tři nová označení pro své partnery, kterými jsou AutoAuto, autonetto a Autogo. V roce 2008 se firmě Trost podařilo, díky fúzi se skupinou Meteor, rozšířit svou distribuční síť ve střední a východní Evropě a stát se tak jednou z mála evropských společností působících v oblasti velkoobchodu s automobilovými díly. Důkazem je i působení firmy na 160 místech v šesti zemích Evropy.

S platností od 1. dubna 2009 schválil antimonopolní úřad podnikatelskou činnost společnosti firmě Trost auto service technik SE (evropská společnost) se sídlem ve Stuttgartu. Společnost vznikla spojením skupin Trost a KSM, kdy 60% podíl náleží rodině Trost a 40% podíl nadaci JoachimaHerze. Nově vzniklá společnost Trost auto service technik SE s ročním obratem 825 milionů EUR a 4000 zaměstnanci zaujímá přední místo mezi distributory náhradních dílů v Německu i v ostatních částech Evropy. Díky 107 pobočkám po celém Německu se podařilo vytvořit přední prodejní a distribuční síť zavedenou na německém trhu s náhradními díly pro automobily.

S dalšími 63 pobočkami v Rakousku, Rumunsku, Slovensku, České republice a Ukrajině disponuje Trost autoservice technik silnou prodejní sítí i mimo Německo, což této firmě otevírá dveře na rostoucí trhy ve střední a východní Evropě.

### 2.1.2 Produkty a služby firmy

Společnost nabízené produkty třídí do skupin dle jednotlivých výrobních oddělení. Vzniknou tak čtyři hlavní skupiny nabízených produktů, které se dále rozdělují do podskupin, které ve výrobě mají na starost samostatná menší oddělení. Firma Trost nabízí více než 500.000 značkových položek i cenově přijatelnějších alternativních značek. Většina produktů či výrobků míří i do automobilové prvovýroby, což svědčí o jejich vysoké kvalitě.

První oddělením je oddělení zabývající se výrobou sortimentu pro osobní automobily. Do této skupiny produktů spadá 12 podskupin, které se každé týkají jiných částí aut. První z nich jsou produkty týkající se *výfukových systémů*. Firma prodává veškeré moderní produkty z této podkategorie, které splňují veškeré požadavky na ochranu ovzduší, ale také snižují spotřebu a mají vyšší životnost. Tento druh sortimentu zahrnuje díly od katalyzátoru, přes střední výfukový díl, až po sportovní koncový díl výfuku, a to pro veškeré značky a typy automobilů. Tyto díly navíc splňují veškeré emisní limity (EURO 1 – EURO 4). Dalšími produkty jsou výrobky, které mají na starost *pohon vozidla*. Toto pododdělení vyrábí a prodává poloosy, sady homokinetických kloubů či různá ložiska. Podskupina *osvětlení* pak nabízí pracovní reflektory, hlavní světlomety, zadní světla, žárovky, postranní obrysová světla a náhradní a přídatná světla. Dalším výrobním pododdělením jsou *brzdy*. Tento druh sortimentu zahrnuje ABS senzory, brzdové kotouče, lanovody a brzdové obložení na více než 1.800 modelů automobilů. Produkty sloužící k vnitřnímu či vnějšímu čištění vozidla jsou starostí pododdělení *chemické produkty*. Tato skupina produktů nabízí prostředky na ochranu před korozí, různé typy olejů a údržbářské, opravárenské, čisticí a ošetřující přípravky. Podskupina *elektrika a elektronika* pak zprostředkovává výrobu a prodej autobaterií, alternátorů, startérů a díly z oblasti zapalování nebo řízení motoru. Nabídka dalšího z pododdělení, a to *podvozek*, zahrnuje pak rozmanitý sortiment poloos, ložiskových uložení, čepů a pružin, pryžových a kovových dílů podvozku, spodních ramen, závěsů kol a jejich součástí, opravárenských sad, vzpěr stabilizátorů, prachovek, tlumičů a korekčních



šroubů odklonu kol. Další podskupina produktů pro osobní automobily se nazývá *karoserie*. Vedle rozměrově přesných plechařských a dalších karosářských dílů a autoskel nabízí také tažná zařízení. Pododdělení *klimatizace a chlazení* pak nabízí více jak 50.000 dílů pro klimatizační jednotky. Důležitou podskupinou výrobků je *řízení*. Tímto oddělením jsou nabízeny axiální klouby, čepy a kompletní řízení. Dílna mající na starost skupinu *motor* vyrábí a prodává filtry, váčkové hřídele, řemenice, bloky motoru, hlavy válců, turbodmychadla, pístní kroužky a těsnění a šrouby hlav válců. Z tohoto výrobního oddělení se mi povedlo získat potřebné informace a bude se ho tak týkat můj praktický příklad. Posledním pododdělením týkající se osobních automobilů jsou produkty zaměřené na *příslušenství*. Jedná se o tažná lana či tyče, přepravní systémy, sněhové řetězy nebo přepravní boxy.

Toto bylo hlavní a nejčastější oddělení, které nabízí nejvíce produktů. Další oddělení produktů budu pro přehlednost uvádět v schématickém tvaru.

#### Sortiment pro nákladní automobily:

*Výfukové systémy* – ohebné díly, tlumiče výfuků, koncovky, chemické přísady pro čištění výfukových plynů, filtry pevných částic a katalazátory

*Náprava* – díly podvozku, ráfky kol a jejich ložiska, čepy řízení, stabilizátory a kompletní kola

*Pohon* – přítlačný talíř, spojková lamela a ložisko, setrvačnick, těsnící kroužky, vypínací spojkové systémy, senzory a hydraulické a pneumatické ovládací systémy

*Osvětlení* – pracovní světla, reflektory, žárovky, boční obrysová světla a výstražná světla

*Brzdy* – mechanické, pneumatické a hydraulické brzdové součástky

*Chemické produkty* – oleje a maziva, čisticí prostředky na lak a plasty

*Elektrika a elektronika* – alternátory, akumulátory, snímače a regulátory

*Kabina řidiče* – karosářské díly, dveře, nárazníky, spodní a vrchní spoilery, zrcátkové a stírací systémy, skla, sluneční clony, deflektory, sedadla řidiče a spolujezdce, potahy sedadel, chladničky, kávovary, klimatizační zařízení, nezávislé topení a tachografy

*Podvozek* – díly pro podvozek, systémy pro zvedání náprav, nápravy, závěsy, pružiny, stabilizátory, ložiska, měchy, regulační ventily a řídicí ventily

*Konstrukční díly* – kompletní nápravy, závěsné systémy, systémy odpružení, hlavní čepy, podpěrné patky, zadní, spodní a boční ochranné kryty, paletové schránky a jiné druhy příslušenství, speciální komponenty pro přepravu kontejnerů

*Klimatizace a chlazení* – střešní klimatizační zařízení, kompresory klimatizace, radiátory a výparníky, vložky vysoušečů a chladiwa

*Řízení* – kulové čepy, řídicí tyče, čerpadla a posilovače řízení

*Motor* – těsnění, turbodmychadla, písty, klikové hřídele

*Příslušenství* – tažné tyče, schránky na nebezpečný materiál, varovné štítky, hasicí přístroje, chladič boxy, sněhové řetězy a upevňovací popruhy

*Tažné zařízení* – zařízení na tažné vozidla a koncové oje

#### Nářadí:

*Pneumatické nářadí* – rázové šroubové utahováky, pneumatické ráčny, brusky a pily

*Elektrické nářadí* – přímočaré pily, pájky, vrtačky, svítidla, elektrické šroubováky

*Ruční nářadí* – všechny druhy klíčů, kleště

#### *Speciální nářadí*

*Dílenské vybavení* – pracovní oděv a ochranné pomůcky, spojovací materiál, elektromateriál, autokosmetika, karoserie a lak, kola a pneumatiky, podpůrné servisní produkty, dílenská hygiena

#### Garážové vybavení

*Servis autobaterií* – bateriové testery, nabíječky, startovací a jiné akumulátory

*Brzdy a podvozek* – brzdové dynamometry, měřicí systémy podvozku, brzdové servisní nářadí a přípravky

*Zařízení dílny* – skříně, regály, speciální zařízení pro skladování nebezpečných materiálů

*Elektrická zařízení a odsávání* – kompresory, generátory, kabelové navijáky, odtahové ventilátory a filtry pro zdravé pracovní prostředí

*Zvedací technika* – montážní jámy, zvedáky, výtahy a dílenské jeřáby

*Karoserie a lak* – svařovací, vytahovací, odsávací a lakýrnické nářadí

*Servis klimatizace* – sady pro detekci netěsností, infračervené teploměry, přístroje pro plnění klimatizací

*Diagnostika* – malé testery a výfukové testery

*Olejové hospodářství*

*Pneuservis* – přístroje pro obouvání a vyvažování pneumatik, myčky kol, zařízení pro plnění dusíkem

*Čistící systémy* – vysokotlaké čističe, mokré a suché vysavače a automatické čističky

Firma Trost nabízí také k těmto produktům službu instalace servisním technikem a program školení pro zvýšení životnosti a správného užívání těchto přístrojů. Důležitou součástí je také dobře propracovaná logistika, které napomáhá spuštění největšího skladu automobilových dílů ve střední a východní Evropě. Sklad se nachází v Nýřanech u Plzeň, kde také vykonávám zmíněnou brigádu. Disponuje kapacitou 150.000 druhů položek na více než 200.000 skladových místech a celkovou skladovou plochou 40.000 m<sup>2</sup>. Šíře sortimentu a rychlost dodání zboží zákazníkům je tak největší výhodou tohoto skladu. Důkazem může být fakt, že firma z tohoto skladu najíždí za svými zákazníky více než 22.000 kilometrů denně. Samotná doprava firmy je outsorsována<sup>1</sup> a v rámci zkvalitňování výstupů pro zákazníka vyhodnocuje management firmy chybovost dodávek a monitoruje časy jejich plnění. Firma vlastní certifikát a splňuje požadavky normy ISO 9001:2008.

---

<sup>1</sup> Outsourcing = zajišťování části provozu či služeb pracoviště jinou organizací

## 2.2 Praktický příklad

V následujících kapitolách se budu zabývat a řešit příklad plánování výroby jednoho z výrobních pododdělení firmy Trost autoservice technik. Je to pododdělení zabývající se výrobou součástí do motorů veškerých osobních automobilů. Po zadání příkladu bude následovat formulace primárního i duálního modelu úlohy, pak jeho řešení pomocí simplexové metody a posledním krokem bude ekonomická interpretace obou získaných řešení.

### 2.2.1 Zadání příkladu

Firma Trost autoservice technik se zabývá výrobou a prodejem autodílů a jiných příslušenství. Výroba firmy je rozdělena do několika oddělení a pododdělení, jejichž výroba je relativně samostatná. Poddělení mající na starost výrobu součástek týkající se motoru osobních automobilů se zabývá výrobou filtrů, pístních kroužků a váčkových hřídelí. Na výrobu těchto dílů jsou dodávány dva druhy materiálu ve stejných baleních. Denně má k dispozici toto oddělení 1120 balení prvního druhu materiálu a 540 balení druhého materiálu.

Na výrobu jednoho filtru je potřeba dvě balení prvního druhu materiálu, na výrobu jedné sady pístních kroužků je potřeba 3,5 balení prvního druhu materiálu a 1 balení druhého druhu materiálu a na výrobu jedné váčkové hřídele 4 balení prvního druhu materiálu a dvě balení druhého materiálu. V tomto pododdělení pracuje 10 pracovníků a pracovní doba je 16 hodin čistého času denně. Výroba jednoho filtru trvá 40 minut, výroba jedné sady pístních kroužků trvá 30 minut a výroba jedné váčkové hřídele trvá také 30 minut.

Prodejní cena<sup>2</sup> za jeden filtr je 600 korun, za jednu sadu pístních kroužků 1000 korun a za jednu váčkovou hřídel 1200 korun.

Úkolem je maximalizovat tržby za výrobky vyrobené za den, tak aby nebyla překročena pracovní doba pracovníků s ohledem na omezenou spotřebu materiálu.

---

<sup>2</sup> Poznámka: veškeré získané údaje jsou zaokrouhlené na jedno desetinné místo

### 2.2.2 Formulace matematického modelu

Při formulaci matematického modelu na základě znalosti výše zadaného ekonomického modelu je vždy prvním důležitým krokem definování rozhodovacích proměnných. Tento krok je zejména důležitý proto, že rozhodovací proměnné jsou vlastně číselné hodnoty, které chceme vyřešením modelu získat. A tak je zapotřebí všechny použité proměnné jednoznačně a srozumitelně formulovat. Bez správné formulace a uvedení významu těchto proměnných ztrácí jakékoli řešení této úlohy ekonomický smysl.

Jedná se o úlohu plánování výroby a jejím cílem je maximalizace tržeb. Proto když se zamyslím nad tím, jaké všechny číselné hodnoty by bylo potřeba znát, abych mohl považovat úlohu za vyřešenou, dostanu tyto proměnné:

$x_1$  ... počet vyrobených váčkových hřidelí za den

$x_2$  ... počet vyrobených filtrů za den

$x_3$  ... počet vyrobených sad pístních kroužků za den

Po definování proměnných je už celkem snadnou záležitostí formulování účelové (kriteriální funkce). Tato funkce je v podstatě měřítkem kvality či efektivnosti aktuálního řešení. Je závislá na hodnotách výše definovaných proměnných. Ze zadání úlohy je jednoznačné, že mnou vytvořená účelová funkce bude v maximalizačním tvaru, a jelikož chceme vyjádřit tržby (cena výrobku x počet výrobků), bude vypadat takto:

Maximalizace  $z = 1200 x_1 + 600 x_2 + 1000 x_3$

Poslední krokem úspěšné formulace matematického modelu je vyjádření všech omezení úlohy do tvaru rovnic či nerovnic. Ze zadání příkladu je zřejmé, že jsme omezeni dodávkami materiálu. Při výrobě požadovaných produktů nemůžeme překročit 1120 balení prvního druhu materiálu a 540 balení druhého druhu materiálu za den (16 pracovních hodin). Spotřeba materiálu na jeden výrobek je pak uvedena v zadání příkladu a omezující podmínky tak budou vypadat takto:

$$4 x_1 + 2 x_2 + 3,5 x_3 \leq 1120$$

$$2 x_1 + \quad \quad x_3 \leq 540$$

Kromě spotřeby materiálu jsme dle zadání příkladu omezení i dispozičním množstvím výrobního času. Každý z vyráběných produktů se vyrábí jinou časovou hodnotou, uvedenou v zadání. Součet těchto hodnot však nesmí překročit právě toto dispoziční množství výrobního času, které je vyjádřeno jako počet pracovníků  $\times$  16 hodin pracovního času. Jelikož se výrobky vyrábí v řádu minut, je dobré si uvedené dispoziční množství převést na stejné jednotky. A tedy počet pracovníků  $\times$  16  $\times$  60, což se rovná 9600. Poslední omezující podmínka tak bude mít takovýto tvar:

$$30 x_1 + 40 x_2 + 30 x_3 \leq 9600$$

Při tvorbě matematického modelu se nesmí zapomínat i na tzv. obligátní podmínky. Je jasné, že nelze vyrábět záporné množství výrobků, toto omezení vyjadřují právě tyto podmínky. Uvedená úloha se nebude řešit jako celočíselná. Finální matematický model úlohy lze tedy napsat následovně:

$$\text{Maximalizace } z = 1200 x_1 + 600 x_2 + 1000 x_3$$

$$\text{za podmínek } \quad \quad 4 x_1 + \quad 2 x_2 + \quad 3,5 x_3 \leq 1120$$

$$\quad \quad 2 x_1 + \quad \quad \quad x_3 \leq 540$$

$$\quad \quad 30 x_1 + 40 x_2 + \quad 30 x_3 \leq 9600$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

### 2.2.3 Tvorba duální úlohy

Při tvorbě duální úlohy z úlohy primární postačuje využít schématu, který je obsahem teoretické části práce. Duální úloha má vždy tolik omezujících podmínek, kolik má primární úloha proměnných a naopak. Má úloha je ve čtvercovém tvaru o rozměru  $3 \times 3$ , a proto bude ve stejném tvaru i úloha duální. Nejprve zapíšeme kriteriální funkci, která se bude lišit zejména hledaným extrémem. Mezitím co byla primární úloha v maximalizačním tvaru, bude duální úloha k ní vytvořená hledat minimum (např.

minimální ceny výrobků, za které je možno je prodat, aby to pro podnik bylo ještě výhodné). Účelovou funkci pak tvoří pravé strany podmínek primárního modelu.

$$\text{Minimalizace } g = 1120 w_1 + 540 w_2 + 9600 w_3$$

Levou stranu první omezující podmínky duálního modelu pak tvoří všechny koeficienty proměnné  $x_1$  primárního modelu. Na pravé straně se nachází hodnota koeficientu proměnné  $x_1$  účelové funkce primáru (prodejní cena jedné váčkové hřídele). Obdobně je to u druhé i třetí omezující podmínky duálního modelu, ke kterým se vztahuje proměnná  $x_2$ , respektive  $x_3$  primární úlohy. Všechny nerovnice omezujících podmínek duálního modelu mají opačná znaménka než podmínky v úloze primární.

$$4 w_1 + 2 w_2 + 30 w_3 \geq 1200$$

$$2 w_1 + 40 w_3 \geq 600$$

$$3,5 w_1 + w_2 + 30 w_3 \geq 1000$$

Výsledný matematický model duální úlohy je pak zapsán následovně:

$$\text{Minimalizace } g = 1120 w_1 + 540 w_2 + 9600 w_3$$

$$4 w_1 + 2 w_2 + 30 w_3 \geq 1200$$

$$2 w_1 + 40 w_3 \geq 600$$

$$3,5 w_1 + w_2 + 30 w_3 \geq 1000$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

#### 2.2.4 Řešení úlohy simplexovou metodou

Každý z modelů, jak primární tak duální, lze řešit samostatně simplexovou metodou. Správným vyřešením jednoho z modelů, např. primárního, však dostaneme finální simplexovou tabulku obsahující řešení obou úloh, neboť jsou spolu duálně sdružené úlohy úzce spjaté. Z této tabulky lze také vyčíst ekonomický význam obou úloh. Před zapsáním modelu do výchozí simplexové tabulky je vždy zapotřebí převést

matematický model do kanonického tvaru. Primární model mého praktického příkladu se nachází v maximalizačním tvaru, a tak není třeba jakkoliv měnit znaménka účelové funkce. Pravé strany omezujících podmínek jsou všechny kladné, a tak ani zde není potřeba násobit žádnou podmínku hodnotou -1 a změnit tím znaménko nerovnosti příslušné podmínky. Prvním krokem při převodu modelu této úlohy na kanonický tvar bude přidání přídatných proměnných za účelem získání rovnosti všech omezujících podmínek modelu. Získáme tak tři nové proměnné,  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$ . Všechny omezující podmínky primárního modelu jsou ve tvaru  $\leq$ , a tak se všechny přídatné proměnné budou do těchto podmínek přičítat. Přičtení těchto podmínek nám vytvoří jednotkovou submatici, která je nutností pro získání kanonického tvaru. Z tohoto důvodu se již do primárního modelu nemusí přidávat žádné další doplňkové proměnné a získaný tvar lze prohlásit za kanonický (obr. 7)

Obrázek 7: kanonický tvar primárního modelu praktické úlohy

Maximalizace	$z = 1200x_1 + 600x_2 + 1000x_3 (+ 0x_4 + 0x_5 + 0x_6)$						
Za podmínek:	$4x_1 +$	$2x_2 +$	$3,5x_3 +$	$x_4$	$=$	$1120$	
	$2x_1 +$	$+$	$x_3 +$	$x_5$	$=$	$540$	
	$30x_1 +$	$40x_2 +$	$30x_3 +$	$x_6$	$=$	$9600$	

Zdroj: Vlastní zpracování, 2014

Nyní lze tento tvar zapsat do výchozí simplexové tabulky, kterou pak budu transformovat, dle postupů v teoretické části, až do získání optimálního řešení.

Tabulka 5: výchozí simplexová tabulka praktického příkladu

		1200	600	1000	0	0	0	
B	$C_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	<b>b</b>
$x_4$	0	4	2	3,5	1	0	0	1120
$x_5$	0	2	0	1	0	1	0	540
$x_6$	0	30	40	30	0	0	1	9600
Zdroj: Vlastní zpracování		-1200	-600	-1000	0	0	0	0



Po zapsání do výchozí simplexové tabulky (tab. 5) je dalším potřebným krokem před první transformací určení pivotu. Dle sloupcového pravidla se bude pivot nacházet v tom sloupci, ve kterém je nejnižší záporná hodnota v pomocném řádku. Je to sloupec odpovídající proměnné  $x_1$ . Pro připomenutí se jeho hodnota v pomocném řádku vypočetla jako  $0x_4 + 0x_2 + 0x_3 - 1200$ . Podle řádkového pravidla se bude určující prvek nacházet v tom řádku, ve kterém je nejnižší hodnota podílu pravých stran podmínek  $b$  s odpovídající hodnotou v určujícím sloupci. Pivot nesmí být v žádném případě záporný ani roven nule. Po využití těchto pravidel zjistíme, že se pivot bude nacházet ve druhém řádku prvního sloupce ( $540/2 < 1120/4 < 9600/30$ ). Tento sloupec budu nově zavádět do báze, přičemž hodnota 1 bude na místě zjištěného pivotu. Po první transformaci Gauss-Jordanovou metodou dostanu tuto simplexovou tabulku (tab. 6):

**Tabulka 6: simplexová tabulka po první transformaci**

		1200	600	1000	0	0	0	
<b>B</b>	<b>C<sub>B</sub></b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	<b>b</b>
$x_4$	0	0	2	3/2	1	-2	0	40
$x_1$	1200	1	0	1/2	0	1/2	0	270
$x_6$	0	0	40	15	0	-15	1	1500
		0	-600	-400	0	0	0	324000

Zdroj: Vlastní zpracování, 2014

Ve výchozí simplexové tabulce bylo obsaženo řešení  $x^{(0)} = (0, 0, 0, 1120, 540, 9600)$ . Toto řešení je bazické přípustné řešení, ale protože je hodnota účelové funkce nulová, je jasné, že se nejedná o optimální řešení. V praxi by toto řešení znamenalo, že se nebude nic vyrábět a zbydou nám veškeré balení materiálu i všechny čas, nicméně toto řešení neodporuje omezujícím podmínkám. V simplexové tabulce po první transformaci dostaneme nové řešení  $x^{(1)} = (270, 0, 0, 40, 0, 1500)$ . Toto řešení je z hlediska hodnoty účelové funkce lepší, ale protože v pomocném řádku jsou ještě hodnoty, které jsou záporné, není optimální. Toto řešení nám říká, že se bude vyrábět pouze 270 kusů váčkových hřidel, zbyde nám 40 balení prvního druhu materiálu a 1500 minut

nespotřebovaného času. Toto řešení by nám přineslo tržby ve výši 324000 korun. Zmíněný postup transformace simplexové tabulky je tak zapotřebí ještě nejméně jednou opakovat. Po využití všech pravidel budu do báze zavádět sloupec odpovídající proměnné  $x_2$  s hodnotou 1 v prvním řádku.

Tabulka 7: simplexová tabulka po druhé transformaci (optimální řešení)

		1200	600	1000	0	0	0	
<b>B</b>	<b>C<sub>B</sub></b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>x<sub>4</sub></b>	<b>x<sub>5</sub></b>	<b>x<sub>6</sub></b>	<b>b</b>
x <sub>2</sub>	600	0	1	3/4	1/2	-1	0	20
x <sub>1</sub>	1200	1	0	1/2	0	1/2	0	270
x <sub>6</sub>	0	0	0	-15	-20	25	1	700
Zdroj: Vlastní zpracování		0	0	50	300	0	0	336000

Získané řešení  $x^{(2)} = (270, 20, 0, 0, 0, 700)$  je pak optimálním řešením primární úlohy zadaného praktického příkladu (v pomocném řádku není žádná hodnota záporná). To vlastně znamená, že nelze najít žádné jiné řešení s větší (pro maximalizaci) hodnotou účelové funkce, než je hodnota 336.000 získaná po dosazení optimálního řešení do účelové funkce. Model této úlohy jsem si namodeloval i do softwaru MS Excel, použil správné potřebné vzorce a vyřešil v aplikaci tohoto softwaru, která se nazývá řešitel. Pro porovnání a potvrzení správnosti tohoto řešení sem vkládám výsledkovou zprávu získanou v řešiteli (obr. 8)

Obrázek 8: výsledková zpráva primárního řešení v řešiteli

Buňka cíle (Max)

Buňka	Název	Původní hodnota	Konečná hodnota
\$B\$9	Účelová funkce	0	336000

Proměnné buňky

Buňka	Název	Původní hodnota	Konečná hodnota	Celé číslo
\$G\$3	x <sub>i</sub> proměnné	0	270	Pokračovat
\$H\$3	X <sub>i</sub>	0	20	Pokračovat
\$I\$3	X <sub>i</sub>	0	0	Pokračovat

### Omezující podmínky

Buňka	Název	Hodnota buňky	Vzorec	Stav	Odchylka
\$E\$3	p 1	1 120,0	$\$E\$3 \leq 1120$	Platí	0
\$E\$4	p 2	540	$\$E\$4 \leq 540$	Platí	0
\$E\$5	p 3	8 900	$\$E\$5 \leq 9600$	Neplatí	700

Zdroj: Vlastní zpracování v MS Excel, 2014

### 2.2.5 Ekonomická interpretace duálně sdružené úlohy

Z řešení primární úlohy simplexovou metodou je patrné, že optimální výrobní plán je stanoven tak, že se bude vyrábět 270 váčkových hřidelů a 20 filtrů. V tomto optimálním řešení, které nám zaručí maximální tržby, se nebudou vyrábět žádné sady pístních kroužků. Protože má firma Trost spousty jiných poboček a výrobních oddělení, je výroba této sady pístních kroužků předmětem jiné pobočky či jiného výrobního oddělení, kde jsou výrobky vyráběny přímo na požadavky odběratelů či je výroba omezena minimálním potřebným množstvím vyrobených výrobků právě kvůli těmto odběratelům. Optimální řešení úlohy přinese firmě tržby 336.000 Kč. Z konečné simplexové tabulky je také patrné, že zbyde 700 minut dispozičního množství času. V tomto čase přímo neprobíhá výroba, ale je to čas potřebný na veškerou přípravu k výrobě, např. zajištění správného chodu strojů, čas na zaskladnění a vyskladnění výrobků či materiálu, čas potřebný k výměně směny spojený s úklidem a potřebnou manipulací se stroji. V tomto čase je také zahrnuto 300 minut povinné pracovní přestávky (30 minut x 10 pracovníků). K řešení duální úlohy by se pak dalo dopracovat obdobnou cestou pomocí simplexové metody, kde by bylo pro získání potřebného kanonického tvaru potřeba vynásobit účelovou funkci hodnotou -1. Protože jsou v duálním modelu všechny podmínky ve tvaru  $\geq$ , nezískali bychom přidáním přídatných proměnných jednotkovou submatici a bylo by zapotřebí ještě využít v každé podmínce možnost přidání doplňkové proměnné, která by nám již výskyt této submatice zajistila. Řešení duálního modelu je však obsaženo i v získané konečné simplexové tabulce primární úlohy. Protože přídatné proměnné primární úlohy představují strukturální proměnné úlohy duální (stínové ceny primární úlohy) a strukturální proměnné primární

(redukované ceny) pak tvoří přídatné proměnné duálu a naopak, dostaneme řešení duální úlohy  $w = (300, 0, 0, 0, 0, 50)$ . Pro potvrzení a lepší znázornění jsem do mé práce vložil výsledkovou zprávu řešení této úlohy pomocí aplikace řešitel v programu MS Excel (obr. 9).

**Obrázek 9: výsledková zpráva řešení duální úlohy v řešiteli**

Nastavovaná buňka  
(Min)

Buňka	Název	Původní hodnota	Konečná hodnota
\$B\$9	Účelová funkce	336000	336000

Měněné buňky

Buňka	Název	Původní hodnota	Konečná hodnota
\$G\$3	xi proměnné	300	300
\$H\$3	Xi	0	0
\$I\$3	Xi	0	0

Omezující podmínky

Buňka	Název	Hodnota buňky	Vzorec	Stav	Odchylka
\$E\$4	p 2	600	\$E\$4 >= 600	Platí	0
\$E\$3	p 1	1 200,0	\$E\$3 >= 1200	Platí	0,0
\$E\$5	p 3	1 050	\$E\$5 >= 1000	Neplatí	50

Zdroj: Vlastní zpracování v MS Excel, 2014

V optimální simplexové tabulce pak lze nalézt stínové ceny jednoho balení materiálu a jedné minuty práce pracovníků, které jsou určeny duálními proměnnými přiřazenými k jednotlivým omezením. Z optimálních řešení obou úloh nám vychází strukturální duální proměnná přiřazená prvnímu omezení  $w_1 = 300$ . Jedná se o stínovou cenu prvního druhu materiálu. Pokud bychom tedy zvýšili zásobu prvního druhu materiálu o jedno balení, došlo by i ke zvýšení hodnoty účelové funkce, a to právě o hodnotu 300. Důkazem by bylo řešení té samé úlohy se zvýšenou pravou stranou první podmínky o hodnotu 1. Správnými transformacemi simplexové tabulky či jiným způsobem řešení (např. aplikace řešitel v rozhraní MS Excel) bychom získali řešení  $x^{(+1)} = (270, 20,5, 0, 0, 0, 680)$  s hodnotou účelové funkce 336 300. Došlo by tak ke zvýšení tržeb o právě hodnotu první strukturální duální proměnné neboli stínové ceny.

Zvýšení zásoby materiálu však stále nemělo za důsledek potřebu vyrábět v tomto oddělení sady pístních kroužků. Další logickou věcí v tomto řešení je snížení zbylého množství času, a to na hodnotu 680 minut. Zvyšovaly by se tedy nadále zásoby materiálu, musely by se prodloužit i směny pracovníků, popřípadě zkrátit veškerá potřebná množství času na správný chod výroby. Strukturální duální proměnné  $w_2$  a  $w_3$  jsou rovny nule. Zvýšili bychom tedy množství dodaného druhého druhu materiálu o jedno balení nebo zvýšili pracovní fond pracovníků o jednu minutu, nedocílili bychom žádného zvětšení tržeb. Pro změnu hodnoty účelové funkce by bylo patrně zapotřebí většího zvětšení pravých stran omezujících podmínek. Primární strukturální proměnné (přídavné duální proměnné) pak vyjadřují redukované ceny výrobků. Protože se váčkové hřídele a filtry v tomto oddělení a v tomto optimálním plánu vyrábějí, jsou jejich redukované ceny rovny nule. Netřeba tak jakkoliv zvyšovat či snižovat jejich cenu. Redukovaná cena sady pístních kroužků je rovna 50. Proto, aby bylo pro firmu v tomto oddělení výhodné tento výrobek vyrábět, musela by jeho cena stoupnout právě o 50 Kč, tedy na 1 050 korun.

Mimo vlastního optimálního řešení poskytuje cenné informace potřebné pro rozhodovací proces i optimalizační analýza neboli analýza citlivosti. Při manažerském rozhodování nás může nezřídka zajímat, jak se můžou změnit určité údaje modelu, tak aby bylo zachováno stávající optimální řešení. Může nás zajímat, v jakém intervalu se mohou pohybovat prodejní ceny jednotlivých výrobků či jak se mohou změnit pravé strany jednotlivých omezujících podmínek, to vše tak, aby řešením takto pozměněných modelů bylo stále stejné optimální řešení jako u původního modelu. Při jednodušších modelech, které mají pouze dvě rozhodovací proměnné, lze dosáhnout získání těchto informací bez nutnosti kompletně propočítávat nově vzniklý model. K citlivosti optimálního řešení modelu vzhledem ke změně jednoho z koeficientu účelové funkce se lze poměrně jednoduše dopracovat i grafickým přístupem. Pomocí tohoto přístupu lze velmi přehledně ukázat vztahy, které mezi optimálním řešením a hodnotami jednotlivých dat modelu LP platí, a které by bylo jinak velmi obtížné srozumitelně vysvětlit. Při této grafické analýze je nejprve zapotřebí znázornit všechny krajní body, které nám určí množinu přípustných řešení. Po nanesení směrnice izoprofitové přímky původního modelu je pro zachování stávajícího optimálního řešení nutné, aby tato hodnota směrnice izoprofitové přímky účelové funkce ležela mezi hodnotami směrníc hraničních přímků těch podmínek, které určují bod optimálního řešení.

Vychýlila by se tato přímka mimo tyto hodnoty směrnic, došlo by tak ke změně optimálního řešení a jeho přesunu do jiného krajního bodu. Toto přehledné grafické řešení lze pak vyjádřit i číselně, a to určením směrnice účelové funkce, která je při dvou rozhodovacích proměnných ve tvaru  $-(c_1/c_2)$ . Dalším krokem by bylo konkrétní číselné vyjádření směrnic přímek omezujících podmínek. Za jeden z koeficientů  $c$  v směrnici účelové funkce by se dosadila původní hodnota (v úloze plánování výroby prodejní cena) a vyřešila by se soustava dvou získaných nerovnic. Při analýze citlivosti vzhledem ke změně pravé strany některé z podmínek by se směrnice přímky zkoumané podmínky stále rovnoběžně posouvala po grafu s původní směrnici přímky stejné podmínky. Řešení by bylo dáno hraničními přímkami původních aktivních podmínek a bylo tak zachováno, až do doby kdy by se směrnice přímky zkoumané podmínky přesunula do jiného krajního bodu. Z toho vyplývá, že optimální řešení úlohy je dané tímtož bazickým přípustným řešením pokud bude platit, že krajní bod určující optimální řešení musí být dán průsečíkem hraničních přímek stejných podmínek jako u výchozího optimálního řešení. Po dosazení souřadnic bodů, které určují hraniční přímku, právě do jedné z hraničních přímek, dostaneme číselný interval, ve kterém se optimální řešení nezmění. Protože můj praktický příklad má více než dvě rozhodovací proměnné bylo by velmi obtížné se k údajům postoptimalizační analýzy dopracovávat nějakou matematickou metodou. V tomto případě je nejvhodnější pro získání potřebných údajů využití počítačových softwarů. V aplikaci řešitel lze získat postoptimalizační analýzu jako takový vedlejší produkt samotného řešení (obr. 10)

**Obrázek 10: citlivostní zpráva primární úlohy**

Měněné buňky

Buňka	Název	Konečná hodnota	Snížené náklady	Cílový Koeficient	Povolený nárůst	Povolený Pokles
\$G\$3	xi proměnné	270	0	1200	1E+30	0
\$H\$3	xi	20	0	600	0	66,66666667
\$I\$3	xi	0	-50	1000	50	1E+30

### Omezující podmínky

<b>Buňka</b>	<b>Název</b>	<b>Konečná hodnota</b>	<b>Stínová cena</b>	<b>Omezující podmínka Pravá strana</b>	<b>Povolený nárůst</b>	<b>Povolený pokles</b>
\$E\$3	p 1	1 120,0	300,0	1120	35	40
\$E\$4	p 2	540	0	540	20	28
\$E\$5	p 3	8 900	0	9600	1E+30	700

Zdroj: Vlastní zpracování v MS Excel, 2014

V této citlivostní zprávě jsou uvedeny dvě tabulky. První z nich obsahuje vlastní výsledky analýzy citlivosti řešení dané úlohy vzhledem na koeficienty účelové funkce. V této tabulce je ve sloupci konečná hodnota obsaženo získané optimální řešení úlohy, ve sloupci cílový koeficient je původní hodnota příslušného koeficientu účelové funkce. Další dva řádky pak určují možný nárůst či pokles hodnoty účelové funkce, tak aby nedošlo ke změně optimálního řešení. Ve sloupci povolený nárůst u proměnné vyjadřující počet vyrobených váčkových hřidelí je obsažen symbol 1E+30. Tento symbol vkládá software Excel v případě, že se jedná o vysoké číslo, které se nevejde do buňky. 1E+30 má svoji konkrétní hodnotu, a to  $10^{30}$ , pro příklad by se symbol 1E+4 rovnal 10000 ( $10^4$ ). Z toho vyplývá, že se koeficient účelové funkce pro proměnnou  $x_1$  nesmí snížit (viz. sloupec povolený pokles), ale za to se může navyšovat až do řádu  $10^{30}$  a získané optimální řešení bude stále stejné. V praxi si ale zřejmě těžko představit, že by se prodejní cena jedné váčkové hřídele pohybovala až do takovýchto řádů. Pro cenový koeficient proměnné vyjadřující počet vyrobených filtrů ( $x_2$ ) pak platí, že nesmí stoupnout a dle získané citlivostní analýzy a sloupci povolený pokles může klesnout až na hodnotu 533,33 (600 – 66,67). Prodejní cena jednoho filtru se tak může pohybovat v intervalu  $\langle 533,33; 600 \rangle$  a získané optimální řešení se nezmění, stále se bude vyrábět 270 kusů váčkových hřidelí a 20 kusů filtrů během jednoho pracovního dne. Podobně pro cenový koeficient proměnné  $x_3$ , vyjadřující počet vyrobených sad pístních kroužků. Aby zůstalo optimální řešení nezměněné, tedy aby tato proměnná nebyla do výrobního plánu zahrnuta, může prodejní cena jedné takovéto sady pístních kroužků stoupnout o 50 Kč, jedná se o zmíněnou redukovanou cenu. Větší nárůst by znamenal zařazení tohoto výrobku do výrobního plánu. A protože se tyto sady pístních kroužků v optimálním výrobním plánu nevyrábí, je jasné, že prodejní cena může libovolně klesat a pro firmu Trost bude čím dál tím méně výhodné tento výrobek v tomto konkrétním výrobním oddělení vyrábět. Ve sloupci povolený pokles se tak opět

nachází hodnota  $1E+30$ . Druhá tabulka obsahuje údaje týkající se analýzy citlivosti řešení dané úlohy vzhledem na hodnoty pravých stran jednotlivých podmínek. Ve sloupci konečná hodnota v této tabulce se nachází hodnoty výrazu levých stran daných podmínek ve výsledném řešení. V dalším sloupci se nachází stínová cena pro danou podmínku. Ve sloupci omezující podmínka/ pravá strana se nachází hodnota pravé strany podmínky. V dalších dvou sloupcích se opět nachází důležité hodnoty, o které je možné zvýšit (nárůst) nebo snížit (pokles) původní hodnoty pravé strany podmínky, při kterém se báze optimálního řešení nezmění. Pravá strana podmínky vyjadřující omezení týkající se dispozičního množství prvního druhu materiálu se tak může zvýšit o 35 balení a snížit o 40 balení. Pro zachování stávající báze optimálního řešení se tak pravá strana této podmínky může pohybovat v intervalu  $\langle 1080; 1155 \rangle$ . Pravá strana druhé podmínky, která vyjadřuje počet balení dodaného druhého druhu materiálu za pracovní den, se může zvýšit o 20 balení a snížit o 28 balení. Pokud se tedy bude toto množství druhého druhu materiálu nacházet v intervalu  $\langle 512; 560 \rangle$ , nezmění se báze optimálního řešení. Pravou stranu třetí podmínky vyjadřující dispoziční množství času všech pracovníků dohromady (v minutách) je možno teoreticky neustále zvyšovat a báze optimálního řešení se nezmění. Je to dáno tím, že jsme omezeni dodávkami materiálu, které by zůstaly stejné a vyčerpaly by se tak za stejnou dobu. Je proto z pohledu příkladu jedno, jestli je na pravé straně hodnota 9600 minut nebo vyšší, protože se dodávky materiálu spotřebují již za 8900 minut, jak je patrné z řešení úlohy. Právě rozdíl dispozičního množství času a času, kdy dojde k vyčerpání materiálu, nám ukazuje, o kolik je možné snížit toto dispoziční množství, aby báze optimálního řešení zůstala nezměněná. Čas 8900 minut nám však ukazuje, jak dlouho probíhá samotná výroba, od spuštění strojů do jejich vypnutí. Nebylo by proto vhodné snižovat pracovní dobu pracovníků, neboť je potřeba právě 700 minut pracovního času k ostatním záležitostem, které je potřeba k plynulému chodu výroby.

Stejný mechanismus se pak využívá i pro citlivostní analýzu duální úlohy (obr. 11), kde proměnné  $w_1$ ,  $w_2$  a  $w_3$  mohou znamenat například vhodné výprodejní ceny zbylého materiálu. Koeficienty účelové funkce pak nespotebovaná množství materiálu, levé strany podmínek ceny výrobků, za které by je bylo možno vyrábět při výprodejních cenách materiálu. Tyto levé strany podmínek by pak nesměly klesnout pod prodejní tržní ceny výrobků.



Obrázek 11: citlivostní analýza duální úlohy

Měněné buňky

Buňka	Název	Konečná hodnota	Snížené náklady	Cílový koeficient	Povolený nárůst	Povolený Pokles
\$G\$3	xi proměnné	300	0	1120	35	40
\$H\$3	Xi	0	0	540	20	28
\$I\$3	Xi	0	700	9600	1E+30	700

Omezující podmínky

Buňka	Název	Konečná hodnota	Stínová cena	Omezující podmínka Pravá strana	Povolený nárůst	Povolený pokles
\$E\$4	p 2	600	20	600	0	66,66666667
\$E\$3	p 1	1 200,0	270,0	1200	1E+30	0
\$E\$5	p 3	1 050	0	1000	50	1E+30

Zdroj: Vlastní zpracování v MS Excel, 2014

Manažery firmy Trost může nadále zajímat, zda-li by pro ně bylo výhodné dokoupit některý nebo více výrobních faktorů (v mé úloze se výrobními faktory rozumí počet balení obou druhů materiálu a dispoziční množství času). Toto dokoupení by mohlo vést k pozměnění výrobního programu a tím i k možnému zvýšení tržeb. K tomuto účelu také poslouží stínové ceny, kdy při kladné stínové ceně v maximalizační úloze dojde k navýšení objemu výroby. Dále je pro tento účel zapotřebí znát jednotkové náklady jednotlivých výrobních faktorů. Protože v mém příkladu vyšla v primární maximalizační úloze jediná stínová cena, a to stínová cena prvního druhu materiálu, jejíž hodnota byla 300, je zapotřebí znát jednotkové náklady právě tohoto výrobního faktoru.

Zvýšila-li by firma dodávku prvního druhu materiálu o jedno balení, bylo by zapotřebí vydat následující množství peněz:

Nákupní cena prvního druhu materiálu: **100 Kč/balení**

Celkové mzdové náklady: 8.640 Kč/16 hodin

- Z řešení a postoptimalizační analýzy úlohy vyplývá, že při zvýšení zásoby prvního druhu materiálu o jedno balení se zvýší i pracovní doba pracovníků (resp. sníží potřebné množství času na plynulý chod výroby)

o 20 minut. Proto je zapotřebí tyto celkové náklady převést na požadovaný čas. Podílem celkových mzdových nákladů za den a počtu pracovních hodin za den nám vyjde 540 Kč za hodinu. Pro získání mzdových nákladů za potřebný časový úsek 20 minut, je zapotřebí tyto hodinové mzdové náklady vydělit třemi. Mzdové náklady za 20 minut práce budou tedy **180 Kč**.

Náklady na vedení provozu: 135 Kč/hod.

- Tudíž  $135/3 = 45 \text{ Kč/20 minut}$

Náklady na skladování: 6 Kč/hod. = **2 Kč/20 minut**

Provozní náklady (chod strojů) = **60 Kč/hod = 20 Kč/20 minut**

Aby pro firmu Trost bylo výhodné dokoupit balení prvního druhu materiálu, musely by být jednotkové náklady tohoto výrobního faktoru menší než stínová cena tohoto faktoru. Jednotkové náklady jsou rovny součtu všech výše zmíněných nákladových položek, tedy  $100 + 180 + 45 + 2 + 20 = 347$ . Stínová cena prvního druhu materiálu je však rovna 300 a jednotkové náklady tohoto výrobního faktoru jsou tedy vyšší než tato cena, a tudíž by pro firmu nebylo výhodné zakoupení dalšího balení prvního druhu materiálu.

## Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo přeformulování konkrétního příkladu z praxe na matematický model a jeho správné vyřešení. Ke splnění tohoto cíle bylo zapotřebí vytvořit k vytvořenému matematickému modelu i duální model tohoto modelu včetně jeho řešení. Součástí správného řešení je i ekonomická interpretace získaných hodnot předem nadefinovaných proměnných. Dílčím cílem pak bylo i vytvoření postoptimalizační analýzy, která mohla případně odhalit možná řešení, která by vedla ke zlepšení získaných výsledků.

Zvolil jsem postup obecného seznámení s disciplínou lineárního programování, včetně nadefinování všech důležitých pojmů, které jsou klíčové k pochopení této problematiky. Ukázal jsem potřebné postupy vedoucí k vytvoření duální úlohy, seznámil s možnými způsoby řešení úloh LP a na vzorových příkladech ukázal jejich funkčnost. Tyto znalosti, které jsem čerpal zejména z odborné literatury, jsem pak aplikoval na konkrétní příklad z praxe. Příklad se týkal jen jednoho z výrobních oddělení jedné pobočky firmy na výrobu autodílů a jiných příslušenství. V příkladu bylo úkolem určit výrobní plán, který by firmě přinesl největší tržby, při aktuálních prodejních cenách. Získané výsledky korespondovaly s výrobním plánem tohoto oddělení v této pobočce. Pro další práce by byla možnost rozšířit tento příklad na více produktů nabízené firmou se spojením více poboček najednou, kde v každé pobočce jsou jiné omezující podmínky a ve většině z nich i podmínky na minimální počet vyrobených kusů plynoucí z požadavků odběratelů. Pro splnění stanovených cílů a správné nastínění a ukázání všech vztahů, které v dané problematice probíhají, však tento konkrétní praktický příklad postačuje. K výsledným hodnotám jsem se dopracoval nejužívanější metodou (simplexovou metodou) a postupně jsem popisoval kroky vedoucí ke správnému výsledku. Algoritmus simplexové metody je prostý, ale bez podpory počítačových programů v něm hrozí vysoká chybovost. Pro kontrolu a ověření správnosti mi posloužila aplikace řešitel v softwaru MS Excel, jejíž výsledkovou zprávu jsem vložil do obsahu práce. Po vyřešení praktického příkladu a jeho správné ekonomické interpretaci jsem se rozhodl vytvořit ještě analýzu získaných výsledků, která vždy poskytuje zajímavé informace související s příkladem.

Stanovené cíle práce tak považuji za splněné, příklad jsem přetransformoval do matematického modelu a správně, povoleným postupem vypočítal jeho řešení, které se ztotožňuje s aktuálním výrobním programem daného výrobního oddělení v dané pobočce firmy. K příkladu jsem pak utvořil duální úlohu, s původní úlohou úzce spjatou, a vyjádřil její řešení. Řešení obou úloh jsem poté ekonomicky interpretoval i za pomoci zmíněné postoptimalizační analýzy. Jelikož se jedná o velkou a úspěšnou firmu, nevyplývaly z této analýzy žádné výrobní nedostatky či možnosti, jak za daných podmínek vylepšit získaná řešení a tím zvýšit tržby firmy. Důkazem je, že získané výsledky jsem porovnal s veškerými náklady, které by v případě zakoupení jedné jednotky výrobního faktoru přesáhly tržby navíc získané touto dodatečnou koupí.

Téma této práce se mi zdálo opravdu zajímavé. Líbí se mi, že stačí dodržovat několik nesložitéch postupů a správně pochopit problematiku lineárního programování a záležitostí s ním spojených, a získané výsledky pak poskytnou spousty důležitých informací, které často nejsou obsaženy v zadání úlohy, ale nicméně umí výborně posloužit pro manažerské rozhodování. Myslím si, že informace obsažené v této práci mi napomohly si veškerou problematiku rozšířit, ucelit a správně pochopit. Tomu napomohlo rozšíření si vědomostí této problematiky, kterou nebylo možné za jeden semestr pochytit v předmětu operační výzkum, prostřednictvím dalších knižních zdrojů.

## Seznam obrázků

Obrázek 1: obecný matematický model.....	8
Obrázek 2: obecný zápis symetricky duálně sdružené úlohy .....	10
Obrázek 3: maticový zápis duálně sdružené úlohy.....	11
Obrázek 4: maticový zápis nesymetrických duálních úloh .....	13
Obrázek 5: výchozí řešení sdružených úloh .....	26
Obrázek 6: optimální řešení úlohy .....	27
Obrázek 7: kanonický tvar primárního modelu praktické úlohy .....	41
Obrázek 8: výsledková zpráva primárního řešení v řešiteli.....	43
Obrázek 9: výsledková zpráva řešení duální úlohy v řešiteli .....	45
Obrázek 10: citlivostní zpráva primární úlohy .....	47
Obrázek 11: citlivostní analýza duální úlohy .....	50

## Seznam tabulek

Tabulka 1: uspořádání simplexové tabulky .....	21
Tabulka 2: výchozí simplexová tabulka .....	22
Tabulka 3: simplexová tabulka po první transformaci .....	23
Tabulka 4: simplexová tabulka s optimálním řešením .....	24
Tabulka 5: výchozí simplexová tabulka praktického příkladu .....	41
Tabulka 6: simplexová tabulka po první transformaci .....	42
Tabulka 7: simplexová tabulka po druhé transformaci (optimální řešení) .....	43

## Seznam použitých zkratk

LP = lineární programování

Obr. = obrázek

Tab. = tabulka

Tzv. = tak zvané

## Seznam použité literatury

JABLONSKÝ, Josef a Josef JABLONSKÝ. *Operační výzkum*. 3. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2001, 305 s. ISBN 80-245-0162-7.

LAGOVÁ, Milada a Josef JABLONSKÝ. *Lineární modely*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Oeconomica, 2009, 300 s. ISBN 978-80-245-1511-3.

LAGOVÁ, Milada a Josef JABLONSKÝ. *Lineární modely v příkladech*. 1.vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, 2002, 273 s. ISBN 80-245-0456-1.

LINDA, Bohdan a Josef VOLEK. *Lineární programování*. Vyd. 3. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2009, 139 s. ISBN 978-80-7395-207-5.

PLEVNÝ, Miroslav a Miroslav ŽIŽKA. *Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování*. Vyd. 2. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010, 296 s. ISBN 978-80-7043-933-3.

## Seznam příloh

**Příloha A:** seznam poboček firmy Trost

## **Příloha A**

Seznam poboček firmy Trost autoservice technik:

### Česká republika (11 poboček):

Brno, Hostivice, Jičín, Nýřany, Olomouc, Ostrava - Hrabová, Otovice (Karlovy Vary),  
Pardubice, Plzeň, Praha 9 – Horní Počernice, České Budějovice.

### Německo (96):

Aachen, Aalen, Albstadt – Ebingen, Amberg, Ansbach, Aschaffenburg, Augsburg, Bad  
Kreuznach, Bamberg, Bautzen, Bayreuth, 3x Berlin, Birkenfeld, Bochum, Bonn,  
Braunschweig, Bremen, Bubenreuth, Boblingen, Darmstadt, Deggendorf, Dresden,  
Duisburg, Dorflès – Esbach(Coburg), 2x Dusseldorf, Erfurt, Feldkirchen, Fellbach,  
Flensburg, Frankfurt, Frechen, Freiburg, Fulda, Giesen, Greifswald (Neuenkirchen),  
Goppingen, Hamburg, Hannover - Langenhagen, Hof, Ingolstadt, Itzehoe,  
Kaiserslautern, Karlsruhe, Kassel, Kempten, Kiel, Kolbermoor, Korntal – Munchingen,  
Krefeld, Kronach, Koln, 2x Landau (Pfalz), Leipzig, Limburg, Lubeck, Magdeburg,  
Maintal, Mainz, 2x Mannheim, Marburg, Menningen, Muhlendorf am Inn, Mulheim –  
Karlich, Neckarsulm, Neu – Ulm, Neustadt (Aisch), Nieder – Eschbach, Norderstedt,  
Nordlingen, Nurnberg, Offenburg, Passau, Pirmasens, Puchheim, Regensburg,  
Reutlingen, Rostock, Saarbrücken, Schweinfurt, Schwerin, Singen, Straubing, Stuttgart,  
Suhl, Trier, Villingen, Weiden, Weingarten, Weisenburg, Winsen, Wurzburg.

### Rakousko (9):

Graz, Innsbruck, Klagenfurt, Linz, Perchtoldsdorf, Salzburg, 3x Wien.

### Rumunsko (25):

Alba Iulia, Bacau, Baia Mare, Bistrita, Brasov, 3x Bucuresti, Caransebes, Cluj –  
Napoca, Constanta, Craiova, Focsani, Galati, Huneodara, Iasi, Miercuera – Ciuc,  
Oradea, Pitesti, Ploiesti, Ramnicu Valcea, Sfantu Gheorghe, Sibiu, Suceava, Timisoara,  
Targu Mures.

Slovensko (6):

Banská Bystrica, Bratislava, Košice, Nitra, Trnava, Žilina.

Ukrajina (2):

2x Kyiv

+ nově Srbsko (1)

## **Abstrakt**

PETELÍK, J. *Dualita úloh lineárního programování*. Bakalářská práce. Cheb: Fakulta ekonomická ZČU v Plzni, 55 s., 2014.

**Klíčová slova:** aplikace řešitel, dualita, kanonický tvar, lineární programování, matematický model, omezující podmínky, proměnné, redukované ceny, simplexová metoda, stínové ceny, účelová funkce.

Předložená práce je zaměřena na řešení optimalizačních úloh potřebných k manažerskému rozhodování. Její nedílnou součástí je i tvorba a řešení úlohy s ní úzce spjaté a k ní závislé, duální úlohy. K řešení je využita simplexová metoda. Dále je práce zaměřena na správnou interpretaci zjištěných výsledků s patřičným ekonomickým významem. Vypočtené výsledky jsou pak porovnány s výsledky zjištěnými pomocí počítačového programu. Po tomto porovnání je vytvořena analýza, která výsledky praktické optimalizační úlohy rozebírá a ukazuje na důležité fakty spojené s úlohou, ale které nejsou přímo obsažené v zadání úlohy. Uvedená problematika je součástí tzv. lineárního programování, které je disciplínou operačního výzkumu. Operační výzkum se řadí mezi hlavní předměty bakalářského studia na ekonomické fakultě Západočeské univerzity.



## **Abstract**

PETELÍK, J. *The duality of linear programming problems*. Bachelor thesis. Cheb: Faculty of Economics, University of West Bohemia in Pilsen, 55 s., 2014.

**Key words:** a canonical form, a duality, a linear programming, a mathematical model, an objective function, a simplex method, a solver application, the constraints, the reduced costs, the shadow prices, the variables.

The present work is focused on solving optimization tasks necessary for management decisions. It is also an integral part of the creation and solution of the problem closely related and it depends, dual task. The simplex method is use to solution. Further work is focused on the correct interpretation of the obtained results due to economic significance. The calculated results are then compared with the results found by a computer program. After this comparison is made, the analysis results of practical optimization problem analyzes and demonstrates the important facts related to the task, but not directly contained in the specified task. These issues are part of the so-called linear programming, which is a discipline of operational research. Operational research is among the main subjects bachelor's degree at the Faculty of Economics, University of West Bohemia.



