ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

POKROČILÉ SUMAČNÍ ALGORITMY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Daniel Tyr

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Fy

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, ……………………………… 2014

……………………………………………………………

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu diplomové práce, **doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc.,** za ochotu, vstřícnost, trpělivost, rady a užitečné připomínky, které mi pomohly vytvořit tuto práci.

Obsah

ÚVOD ... 4

1 PRÁCE SE SUMAMI BEZ UŽITÍ POČÍTAČE ... 5

1.1 Od polynomu ke kombinačním číslům ... 5

(Věta 1.1.1) O platnosti identity $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ ... 5

(Příklad 1.1.1) ... 6

(Příklad 1.1.2) ... 7

(Příklad 1.1.3) ... 7

(Příklad 1.1.4) ... 10

1.2 Užití binomické věty ... 11

(Věta 1.2.1) Binomická věta ... 11

(Věta 1.2.2) O platnosti identity $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ ... 13

(Příklad 1.2.1) ... 13

(Příklad 1.2.2) ... 14

(Příklad 1.2.3) ... 15

(Příklad 1.2.4) ... 16

(Příklad 1.2.5) ... 17

(Příklad 1.2.6) ... 17

(Příklad 1.2.7) ... 18

2 GOSPERŮV ALGORITMUS ... 20

2.1 Kdo je R. William Gosper? ... 20

2.2 Jak pracuje algoritmus ... 21

(Definice 2.2.1) Hypergeometrická posloupnost ... 21

(Věta 2.2.1) O racionální funkci $x(n)$ ... 22

(Věta 2.2.2) O podílu polynomů $a(n)$, $b(n)$ a $c(n)$ ... 23

2.3 Příklady ... 25

(Příklad 2.3.1) ... 25

(Příklad 2.3.2) ... 26

(Příklad 2.3.3) ... 27

(Příklad 2.3.4) ... 31

(Příklad 2.3.5) 32
3 HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ REKURENTNÍ ROVNICE *k – tého* ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY 34
3.1 Rekurentní rovnice a její řešení 34
(Definice 3.1.1) Homogenní lineární rekurentní rovnice $k-t\acute{e}ho$ řádu s konstantními koeficienty 34
(Definice 3.1.2) Řešení homogenní lineární rekurentní rovnice 34
3.2 Homogenní lineární rekurentní rovnice *prvního* řádu 34
(Příklad 3.2.1) 34
(Příklad 3.2.2) 35
(Příklad 3.2.3) 35
(Příklad 3.2.4) 36
3.3 Homogenní lineární rekurentní rovnice *druhého* a *třetího* řádu 37
(Příklad 3.3.1) 37
(Příklad 3.3.2) 38
(Příklad 3.3.3) 38
4 METODA SESTRY MARY CELINE FASENMYER 40
4.1 Kdo byla Sister Mary Celine Fasenmyer? 40
4.2 Jak pracuje algoritmus 41
(Příklad 4.2.1) 42
(Příklad 4.2.2) 45
4.3 Teoretický základ algoritmu 49
(Definice 4.3.1) Řádně hypergeometrická posloupnost $F(n,k)$ 49
(Věta 4.3.1) O existenci netriviálního rekurentního vyjádření pro $F(n,k)$ 49
(Příklad 4.3.1) 50
5 ZEILBERGERŮV ALGORITMUS 52
5.1 Kdo je Doron Zeilberger? 52
5.2 Zeilbergerův algoritmus (Creative Telescoping) - úvod 53
(Věta 5.2.1) Zeilbergerův teorém 53
5.3 Jak pracuje algoritmus 54
5. 4 Příklady 58
(Příklad 5.4.1) 58
(Příklad 5.4.2) 61
(Příklad 5.4.3) 66
(Příklad 5.4.4) 68
ZÁVĚR 71

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ 72
SEZNAM OBRÁZKŮ 74
SEZNAM TABULEK 75
RESUMÉ 76

Úvod

Obsah této diplomové práce navazuje na obsah mé bakalářské práce, v níž jsem se zabýval popisem základních sumačních technik, které však nebyly určeny ke stanovení hodnoty daného konečného součtu, v jehož sumandu figurují kombinační čísla. Proto jsem se rozhodl prostudovat některé způsoby, jimiž je možno určovat hodnoty těchto konečných součtů. Složitější početní operace provádím v prostředí *Wolfram Mathematica* 9® a *Maple* 14®. Práci jsem rozčlenil do pěti kapitol a jejich obsah je následující.

V první kapitole uvádím některé možnosti stanovení hodnoty daného součtu běžným způsobem, tj. způsobem, v němž nedominuje výpočetní technika, ale pouze lidské úvahy. Jedná se o využití kombinačních čísel, binomické věty, vhodných úprav sumandu, využití diferenciálního nebo integrálního počtu.

Druhá kapitola podává popis Gosperova sumačního algoritmu. Tento algoritmus nebyl prioritně vytvořen pro stanovení hodnoty součtu, v němž figurují kombinační čísla, ale je **nezbytným** nástrojem pro práci Zeilbergerova algoritmu (více o něm níže v tomto textu). Z tohoto důvodu byl Gosperův algoritmus do této práce zařazen.

Třetí kapitola obsahuje způsoby řešení některých lineárních rekurentních rovnic. Rekurentní rovnice je výsledkem práce sumačních algoritmů, které jsou popsány ve **čtvrté** a **páté kapitole** této práce. Z tohoto důvodu je nezbytné zabývat se takovou rovnicí, neboť její řešení (společně s počátečními podmínkami) určuje hodnotu součtu, který je hledán těmito algoritmy.

Čtvrtá kapitola popisuje metodu Sestry Mary Celine Fasenmyerové, tato metoda slouží ke stanovení hodnoty součtu, jehož sumand je tzv. *řádně hypergeometrický*, což znamená, že představuje součin, jehož činitelé jsou kombinační čísla, polynom a výraz x^k, kde x je předem zvoleno. Metoda je plně algoritmizovatelná, byla autorkou vytvořena již v roce 1945, využití však našla až o několik desítek let později, nicméně vytvoření této metody poskytlo základ pro vytváření dalších sumačních algoritmů.

Pátá kapitola podává popis Zeilbergerova algoritmu, která je také nazývána metodou *Creative telescoping*. Jedná se o sumační algoritmus, který je inspirován metodou Sestry Mary Celine Fasenmyerové a využívá postupů Gosperova algoritmu. Díky tomu je práce algoritmu Creative telescoping rychlejší a efektivnější než metoda Sestry Mary Celine Fasenmyerové. Zeilbergerův algoritmus rovněž pracuje se sumou, jejíž sumand je *řádně hypergeometrický*.

1 Práce se sumami bez užití počítače

Tato kapitola je čerpána z literatury [1], [2], [3] a [4].

1.1 Od polynomu ke kombinačním číslům

Úvodem nejprve poznamenejme, že práce s kombinačními čísly v počítačové sumaci představuje závažnou problematiku. Je-li samotným sumandem kombinační číslo, popř. součin kombinačních čísel, algoritmy, kterými se budeme zabývat ve čtvrté a páté kapitole zapracují tak, že nejprve vypočítají jisté podíly daných kombinačních čísel. Tím dojde k eliminaci **kombinačních čísel** a nadále algoritmy pracují s **polynomy**, resp. racionálními funkcemi. To nás samozřejmě může vést k myšlence, že pro stroj je mnohem výhodnější pracovat s polynomy.

Budeme-li však usilovat o nalezení hodnoty daného konečného součtu, jehož sumandem je **polynom** daného stupně $n \in \mathbb{N}$ a budeme-li zároveň chtít pracovat **bez pomoci počítače**, zjistíme, že přechod od polynomu ke kombinačnímu číslu není nikterak zvláště komplikovaný a že navíc tento přechod se ukazuje být výhodným (není-li ovšem stupeň polynomu příliš vysoký). Nyní se zabývejme právě tímto přístupem. Nejprve je potřeba vyslovit známou kombinatorickou identitu.

(Věta 1.1.1) (převzata z [4])

Pro všechna celá nezáporná čísla $n,\ k$; kde $n > k$, platí: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

<u>**Důkaz**</u>**:**

Pro pravou stranu rovnosti výše platí

$$\binom{n+1}{k+1}=\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{(n+1)n!}{(n-k)!(k+1)k!}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k},$$

pro levou stranu dostáváme

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}+\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}=\binom{n}{k}+\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)k!}=$$

$$=\binom{n}{k}+\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!(k+1)}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k}\frac{(n-k)(n-k-1)!}{(n-k-1)!(k+1)}=$$

$$=\binom{n}{k}+\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right)=\binom{n}{k}\frac{k+1+n-k}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n+1}{k+1}\ .$$

□

Tuto větu použijeme v několika následujících příkladech.

(Příklad 1.1.1)

Stanovme hodnotu součtu $\sum_{k=1}^{n}(-1+2k)$.

Zřejmě platí: $\sum_{k=1}^{n}(-1+2k) = -\sum_{k=1}^{n}1 + 2\sum_{k=1}^{n}k = -n + 2\sum_{k=1}^{n}k$.

Středem našeho zájmu bude tedy hodnota součtu $\sum_{k=1}^{n}k$. Nyní se nabízí dva způsoby řešení:

<u>První způsob</u>:

Označme $S_n = \sum_{k=1}^{n}k$ a pišme

$$S_n = 1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n \qquad (1.1.1).$$

Nyní sčítance pravé strany rovnosti (1.1.1) zapišme tak, že prvním sčítancem bude nyní poslední, druhým předposlední, atd. Následně obdržíme

$$S_n = n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1 \qquad (1.1.2).$$

Sečteme-li obě rovnosti (1.1.1) a (1.1.2), obdržíme vztah

$$2S_n = (n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)+(n+1)+(n+1) \qquad (1.1.3).$$

Pravá strana rovnosti (1.1.1) obsahuje právě n sčítanců, pravá strana rovnosti (1.1.2) také obsahuje n sčítanců. Proto tedy i pravá strana rovnosti (1.1.3) obsahuje n sčítanců a je možné psát

$$2S_n = (n+1)n \text{ a odtud } S_n = \frac{(n+1)n}{2}\text{, neboli } \sum_{k=1}^{n}k = \frac{(n+1)n}{2}\text{, a tudíž bude platit}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1+2k) = -\sum_{k=1}^{n}1 + 2\sum_{k=1}^{n}k = -n + 2\sum_{k=1}^{n}k = -n + 2\cdot\frac{(n+1)n}{2} = n(n+1-1) = n^2.$$

Poznamenejme, že při tomto postupu jsme vůbec nevyužili kombinačních čísel. Bylo však vhodné tento způsob zde uvést, protože stejnou myšlenku postupu použijeme v příkladě (1.2.1).

<u>Druhý způsob</u>:

Platí: $\sum_{k=1}^{n}k = 1+2+3+4+...+n = \binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1}+...+\binom{n}{1}$. Jelikož $\binom{1}{1}=\binom{2}{2}$, lze rovněž psát $\sum_{k=1}^{n}k = \binom{2}{2}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1}+...+\binom{n}{1}$. Nyní podle věty **1.1.1** sečteme první dvě kombinační čísla, dostáváme součet $S_2 = \binom{2}{2}+\binom{2}{1}=\binom{3}{2}$. Součet S_3 získáme přičtením dalšího členu posloupnosti, opět použijeme větu **1.1.1.**, dostáváme $S_3 = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = \binom{4}{2}$.

Zcela analogicky postupujeme až k poslednímu členu posloupnosti – nakonec obdržíme

$$S_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}.$$

Je tedy $\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = \frac{(n+1)n}{2}$ a proto $\sum_{k=1}^{n} (-1+2k) = -n + (n+1)n = n^2$.

(Příklad 1.1.2)

Stanovme hodnotu součtu $\sum_{k=1}^{n} (k+2)(k+1)k$.

Sumand nejprve zapišme jako podíl „faktoriálových součinů“, tj.

$$(k+2)(k+1)k = \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(k+2)!}{(k-1)!}.$$

Nyní podíl $\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$ vyjádříme kombinačním číslem, tj. $\frac{(k+2)!}{(k-1)!} = 3!\binom{k+2}{3}$. Dále je možno psát $\sum_{k=1}^{n} (k+2)(k+1)k = \sum_{k=1}^{n} 3!\binom{k+2}{3} = 6\left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \ldots + \binom{n+2}{3}\right]$. Postupujme analogicky jako v předchozím příkladě – jelikož $\binom{3}{3} = \binom{4}{4}$, přepišme součet $\sum_{k=1}^{n} 3!\binom{k+2}{3}$ do tvaru $\sum_{k=1}^{n} 3!\binom{k+2}{3} = 6\left[\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \ldots + \binom{n+2}{3}\right]$. Dále budeme opět postupně sčítat všechny členy posloupnosti (určující zadanou sumu) s využíváním věty **1.1.1**.

Platí: $S_2 = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} = \binom{5}{4}$, $S_3 = \binom{5}{4} + \binom{5}{3} = \binom{6}{4}$, …, $S_n = \binom{n+2}{4} + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$.

Je tedy $\sum_{k=1}^{n} (k+2)(k+1)k = 6\binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)!}{(n-1)!4!} = \frac{1}{4}(n+3)(n+2)(n+1)n$.

(Příklad 1.1.3)

Stanovme hodnotu součtu $\sum_{k=1}^{n} k(5k-2)$.

Opět jsme vedeni k tomu, abychom sumand zapsali jistým kombinačním číslem. V předchozím příkladě byla situace jednodušší – na výraz reprezentující sumand, tj. $(k+2)(k+1)k$, jsme mohli nahlížet jako na výraz představující součin několika po sobě jdoucích přirozených čísel (konkrétně tří). Právě díky tomu, že sumand byl v onom tvaru vyjádřen, jsme jej mohli ihned zapsat ve tvaru podílu faktoriálů a následně kombinačním číslem. Nyní je situace komplikovanější – sumand $k(5k-2)$ bude nejprve potřeba upravit. Platí: $k(5k-2)=5k^2-2k=5k^2-k-k=5k(k-1)+3k$. Dále je možno pro názornost konstatovat, že $\sum_{k=1}^{n} k(5k-2)=\sum_{k=1}^{n}\left[5k(k-1)+3k\right]=5\sum_{k=1}^{n} k(k-1)+3\sum_{k=1}^{n} k$. Středem našeho zájmu je tedy součet $5\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$, neboť hodnotu součtu $\sum_{k=1}^{n} k$ jsme již nalezli v příkladě **1.1.1.** a navíc je všeobecně známá.

Dále tedy pišme $k(k-1)=\frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!}=\frac{k!}{(k-2)!}=2!\binom{k}{2}$, následně dostáváme $5\sum_{k=1}^{n} 2!\binom{k}{2}=10\left[\binom{1}{2}+\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}\right]$. Jak nyní přistupovat k tomuto součtu? Drobný problém způsobuje první sčítanec, tj. číslo $\binom{1}{2}$. Podle běžné definice kombinačního čísla toto číslo nemá smysl, protože definice klade podmínku $n>k$, zde však máme $n=1$ a $k=2$. Kombinační číslo $\binom{1}{2}$ tedy není definováno, proto nezbývá nic jiného, než uvažovat součet $5\sum_{k=2}^{n} 2!\binom{k}{2}=10\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}\right]$. Dále platí $\binom{2}{2}=\binom{3}{3}$ a proto pišme $5\sum_{k=1}^{n} 2!\binom{k}{2}=10\left[\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}\right]$. Nyní využijeme větu **1.1.1.**, získáváme $S_2=$ $=\binom{3}{3}+\binom{3}{2}=\binom{4}{3}$, $S_3=\binom{4}{3}+\binom{4}{2}=\binom{5}{3}$, …, $S_n=\binom{n}{3}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$. Závěrem snadno nalezneme hodnotu hledaného součtu:

$$\sum_{k=1}^{n} k(5k-2)=5\sum_{k=1}^{n} k(k-1)+3\sum_{k=1}^{n} k=10\binom{n+1}{3}+3\cdot\frac{(n+1)n}{2}=\frac{1}{6}(n+1)n(10n-1).$$

Postup výše uvedený (tj. přechod od polynomu ke kombinačnímu číslu), zřejmě můžeme uplatnit v těch situacích, v nichž sumand je polynom stupně $n\in\mathbb{N}$. Postup má však nevýhodu spočívající v tom, že s rostoucím stupněm polynomu roste obtížnost v úpravě sumandu. Pokud bychom chtěli stanovit např. hodnotu součtu $\sum_{k=1}^{n}\left(k^6+2k^5+3k^4-k^3+2k^2\right)$, je možno postupovat tak, že nejprve vhodně upravíme výrazy $k^2,\ k^3,\ k^4,\ k^5,\ k^6$ do takových tvarů, ze kterých následně povede cesta přímo k samotným kombinačním číslům. Platí:

1) $k^2 = k\cdot k = (k-1+1)k = k(k-1)+k$,

2) $k^3 = k\cdot k^2 = k(k^2-1+1) = k(k^2-1)+k = (k+1)k(k-1)+k$,

3) $k^4 = (k^4-k^2)+k^2 = k^2(k^2-1)+k^2 = k\cdot k(k^2-1)+k^2 = k(k+2-2)(k^2-1)+k^2 =$

$= k(k+2)(k^2-1)-2k(k^2-1)+k^2 = (k+2)(k+1)k(k-1)-2(k+1)k(k-1)+k^2$.

Podle bodu **1)** můžeme nyní psát $k^4 = (k+2)(k+1)k(k-1)-2(k+1)k(k-1)+k(k-1)+k$.

4) $k^5 = k\cdot k^4 = k(k^4-1+1) = k(k^4-1)+k = k(k^2-1)(k^2+1)+k = k(k^2-1)k^2+k(k^2-1)+k =$

$= k(k^2-1)(k^2-4+4)+k(k^2-1)+k = k(k^2-1)(k^2-4)+4k(k^2-1)+k(k^2-1)+k =$

$= k(k^2-1)(k^2-4)+5k(k^2-1)+k = (k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)+5(k+1)k(k-1)+k$.

5) $k^6 = (k^6-k^4)+k^4 = k^4(k^2-1)+k^4 = (k^4-16+16)(k^2-1)+k^4 =$

$= (k^4-16)(k^2-1)+16(k^2-1)+k^4 = (k^2-4)(k^2+4)(k^2-1)+16(k^2-1)+k^4 =$

$= (k^2-4)(k^2-1)k(k+3-3)+4k^2(k^2-1)-16(k^2-1)+16(k^2-1)+k^4 =$

$= (k^2-4)(k^2-1)k(k+3)-3k(k^2-4)(k^2-1)+4k(k-2+2)(k^2-1)+k^4 =$

$= (k^2-4)(k^2-1)k(k+3)-3k(k^2-4)(k^2-1)+4k(k-2)(k^2-1)+8k(k^2-1)+k^4 =$

$= (k+3)(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)-3(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)+$

$+\ 4(k+1)k(k-1)(k-2)+8(k+1)k(k-1)+k^4$.

Nakonec s využitím výše uvedeného můžeme dosadit za k^4:

$k^6 = (k+3)(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)-3(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)+$

$+\ 4(k+1)k(k-1)(k-2)+8(k+1)k(k-1)+(k+2)(k+1)k(k-1)-2(k+1)k(k-1)+$

$+\ k(k-1)+k$.

Nyní využijeme vztahy uvedené v odstavcích **1)** až **5)** výše k vyjádření výrazů $k^2,\ k^3,\ k^4,\ k^5,\ k^6$ pomocí kombinačních čísel. Získáváme vztahy

$$k^2 = k(k-1)+k = \frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!}+\frac{k!}{(k-1)!} = \frac{k!}{(k-2)!}+\frac{k!}{(k-1)!} = 2!\binom{k}{2}+\binom{k}{1} \qquad (1.1.4)\ ,$$

$$k^3 = (k+1)k(k-1)+k = \frac{(k+1)k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!}+\frac{k!}{(k-1)!} = 3!\binom{k+1}{3}+\binom{k}{1} \qquad (1.1.5)\ ,$$

$$k^4 = (k+2)(k+1)k(k-1)-2(k+1)k(k-1)+k(k-1)+k = \frac{(k+2)!}{(k-2)!}-2\frac{(k+1)!}{(k-2)!}+\frac{k!}{(k-2)!}+\frac{k!}{(k-1)!} =$$

$$= 4!\binom{k+2}{4} - 2\cdot 3!\binom{k+1}{3} + 2!\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \qquad (1.1.6)\,,$$

$$k^5 = (k+2)(k+1)k(k-1)(k-2) + 5(k+1)k(k-1) + k = \frac{(k+2)!}{(k-3)!} + 5\frac{(k+1)!}{(k-2)!} + \frac{k!}{(k-1)!} =$$

$$= 5!\binom{k+2}{5} + 5\cdot 3!\binom{k+1}{3} + \binom{k}{1} \qquad (1.1.7)\,,$$

$$k^6 = (k+3)(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2) - 3(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2) + \ 4(k+1)k(k-1)(k-2) +$$

$$+8(k+1)k(k-1) + (k+2)(k+1)k(k-1) - 2(k+1)k(k-1) + \ k(k-1) + k =$$

$$= \frac{(k+3)!}{(k-3)!} - 3\frac{(k+2)!}{(k-3)!} + 4\frac{(k+1)!}{(k-3)!} + 8\frac{(k+1)!}{(k-2)!} + \frac{(k+2)!}{(k-2)!} - 2\frac{(k+1)!}{(k-2)!} + \frac{k!}{(k-2)!} + \frac{k!}{(k-1)!} =$$

$$= 6!\binom{k+3}{6} - 3\cdot 5!\binom{k+2}{5} + 4\cdot 4!\binom{k+1}{4} + 8\cdot 3!\binom{k+1}{3} + 4!\binom{k+2}{4} - 2\cdot 3!\binom{k+1}{3} + 2!\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$$

$$(1.1.8)\,.$$

Nyní je vše připraveno k nalezení hodnoty součtu $\sum_{k=1}^{n}\left(k^6 + 2k^5 + 3k^4 - k^3 + 2k^2\right)$. Snadno však nahlédneme, že bychom zabrali mnoho místa v textu. Postup by samozřejmě byl analogický postupu užitého v příkladech výše. Nalezněme proto hodnotu součtu $2\sum_{k=1}^{n} k^5$ v následujícím příkladě a zájemci o toto téma přenechme hledání hodnot $\sum_{k=1}^{n} k^6$, $3\sum_{k=1}^{n} k^4$, $-\sum_{k=1}^{n} k^3$ a $2\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(Příklad 1.1.4)

Hledáme hodnotu součtu $2\sum_{k=1}^{n} k^5$. S využitím vztahu (1.1.8) lze psát:

$$2\sum_{k=1}^{n} k^5 = 2\sum_{k=1}^{n} 5!\binom{k+2}{5} + 2\sum_{k=1}^{n} 5\cdot 3!\binom{k+1}{3} + 2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = 240\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{5} + 60\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{3} + 2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}.$$

a) Nejprve stanovme hodnotu součtu $240\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{5}$. Platí:

$$240\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{5} = 240\left[\binom{3}{5} + \binom{4}{5} + \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \ldots + \binom{k+2}{5}\right] = 240\left[\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \ldots + \binom{k+2}{5}\right],$$

přepíšeme první sčítanec do tvaru $\binom{5}{5} = \binom{6}{6}$ a dále užitím věty **1.1.1** obdržíme:

$$\binom{6}{6}+\binom{6}{5}=\binom{7}{6},\ \binom{7}{6}+\binom{7}{5}=\binom{8}{6},\ \dots,\ \binom{n+2}{6}+\binom{n+2}{5}=\binom{n+3}{6}.$$

Je tedy $240\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{5}=240\binom{n+3}{6}=240\cdot\frac{(n+3)!}{(n-3)!6!}=\frac{1}{3}(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)$.

b) Dále stanovme hodnotu součtu $60\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{3}$. Platí:

$$60\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{3}=60\left[\binom{2}{3}+\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\dots+\binom{k+1}{3}\right]=60\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\dots+\binom{k+1}{3}\right],$$

přepíšeme první sčítanec do tvaru $\binom{3}{3}=\binom{4}{4}$ a dále užitím věty **1.1.1** obdržíme:

$$\binom{4}{4}+\binom{4}{3}=\binom{5}{4},\ \binom{5}{4}+\binom{5}{3}=\binom{6}{4},\ \dots,\ \binom{n+1}{4}+\binom{n+1}{3}=\binom{n+2}{4}.$$

Je tedy $60\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{3}=60\binom{n+2}{4}=60\cdot\frac{(n+2)!}{(n-2)!4!}=\frac{5}{2}(n+2)(n+1)n(n-1)$.

c) Nakonec stanovme hodnotu součtu $2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}$. Platí:

$2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=2\left[\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1}+\dots+\binom{k}{1}\right]$, přepíšeme první sčítanec do tvaru $\binom{1}{1}=\binom{2}{2}$,

dále užitím věty **1.1.1** obdržíme $\binom{2}{2}+\binom{2}{1}=\binom{3}{2},\ \binom{3}{2}+\binom{3}{1}=\binom{4}{2},\ \dots,\ \binom{n}{2}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$.

Závěrem shrňme, že platí $2\sum_{k=1}^{n}k^5=(n+1)n\left[\frac{1}{3}(n+3)(n+2)(n-1)(n-2)+\frac{5}{2}(n+2)(n-1)+1\right]$.

1.2 Užití binomické věty

(Věta 1.2.1) (**Binomická věta**) (převzata z [4])

Pro všechna reálná čísla $a,\ b$, všechna $n\in\mathbb{N}$ a $k\in\mathbb{N}_0$ platí

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

<u>**Důkaz**</u> (matematickou indukcí):

Ověříme rovnost pro nejmenší přípustné $n\in\mathbb{N}$, jím je $n=1$:

$$(a+b)^1=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b.$$

Indukčním předpokladem bude rovnost $n = m$ a tedy

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k .$$

Následuje indukční krok – rovnost výše vynásobme výrazem $(a+b)$, dostáváme

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k (a+b) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} .$$

Pro názornost nyní rozepišme získané dvě sumy (výše vpravo) a označme je A, B:

$$A = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k = \binom{m}{0} a^{m+1} b^0 + \binom{m}{1} a^m b^1 + \binom{m}{2} a^{m-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ \binom{m}{m-2} a^3 b^{m-2} + \binom{m}{m-1} a^2 b^{m-1} + \binom{m}{m} a^1 b^m$$

$$B = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} = \binom{m}{0} a^m b^1 + \binom{m}{1} a^{m-1} b^2 + \binom{m}{2} a^{m-2} b^3 + \ldots +$$
$$+ \binom{m}{m-2} a^2 b^{m-1} + \binom{m}{m-1} a^1 b^m + \binom{m}{m} a^0 b^{m+1}$$

Nyní sečteme sumy A, B tak, že druhý člen sumy A sečteme s prvním členem sumy B, třetí člen sumy A s druhým členem sumy B, …, poslední člen sumy A sečteme s předposledním členem sumy B, přičemž budeme využívat větu $(1.1.1)$, tj. identitu $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$:

$$(a+b)^{m+1} = \binom{m}{0} a^{m+1} b^0 + \left[\binom{m+1}{1} a^m b^1 + \binom{m+1}{2} a^{m-1} b^2 + \ldots + \binom{m+1}{m} a^1 b^m \right] + \binom{m}{m} a^0 b^{m+1} .$$

Jelikož $\binom{m}{0} a^{m+1} b^0 = \binom{m+1}{0} a^{m+1} b^0$ a také $\binom{m}{m} a^0 b^{m+1} = \binom{m+1}{m+1} a^0 b^{m+1}$, je možné součet sum A, B, neboli výraz $(a+b)^{m+1}$, zapsat ve tvaru $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k$, čímž je důkaz hotov.

□

Jaký má pro nás význam binomická věta, hovoříme-li o konečných součtech? Je zřejmé, že dosadíme-li za a, b jistá čísla, obdržíme daný součet. Asi nejznámějším příkladem je volba $a = b = 1$, která pak popisuje rovnost $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Zajímavou volbou jsou také čísla $a = 1, b = 2$. Po jejich dosazení do binomické věty obdržíme

$$3^n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} ... + 2^n\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}.$$

My samozřejmě nebudeme pouze experimentovat s čísly a, b, ale budeme se snažit často daný součet upravit tak, abychom mohli na základě binomické věty určit jeho hodnotu. Ještě než začneme řešit první úlohu, připomeňme známou kombinatorickou identitu – tu rovněž v první úloze využijeme.

(Věta 1.2.2) (převzata z [4])

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k; kde $n > k$, platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

<u>**Důkaz:**</u> $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

□

(Příklad 1.2.1)

Stanovme hodnotu součtu $S = \sum_{k=0}^{n} (2k-1)\binom{n}{k}$. Nabízejí se dva způsoby řešení.

<u>***První způsob:***</u>

$$S = -\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + ... + (2n-5)\binom{n}{n-2} + (2n-3)\binom{n}{n-1} + (2n-1)\binom{n}{n} \qquad (1.2.1)$$

S využitím věty **1.2.2** přepíšeme výše uvedený součet S:

$$S = -\binom{n}{n} + 1\binom{n}{n-1} + 3\binom{n}{n-2} + ... + (2n-5)\binom{n}{2} + (2n-3)\binom{n}{1} + (2n-1)\binom{n}{0} \qquad (1.2.2)$$

Nyní použijeme stejnou myšlenku, kterou jsme použili v příkladě (1.1.1) – zaměníme pořadí sčítanců ve vztahu (1.2.2) tak, že první sčítanec se stane posledním, druhý předposledním, atd., tím získáme vztah (1.2.3).

$$S = (2n-1)\binom{n}{0} + (2n-3)\binom{n}{1} + (2n-5)\binom{n}{2} + ... + 3\binom{n}{n-2} + 1\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n} \qquad (1.2.3)$$

Dále rovnosti (1.2.1) a (1.2.3) sečteme, dostaneme

$$2S = \left[2n\binom{n}{0} - 2\binom{n}{0}\right] + \left[2n\binom{n}{1} - 2\binom{n}{1}\right] + ... + \left[2n\binom{n}{n-1} - 2\binom{n}{n-1}\right] + \left[2n\binom{n}{n} - 2\binom{n}{n}\right].$$

Odtud je zřejmé, že

$$S = n\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}\right] - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}\right] = n \cdot 2^n - 2^n = 2^n(n-1).$$

Druhý způsob:

Zadaný součet nejprve upravme: $\sum_{k=0}^{n}(2k-1)\binom{n}{k}=2\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}-2^n$.

Dále bude platit $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n(n-1)!}{(n-k)!k(k-1)!}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=$

$=n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right]=n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}=n\cdot 2^{n-1}$. Poznamenejme, že hodnota součtu $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$, resp. součtu $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$ vyplynula z binomické věty tím, že jsme volili $a=b=1$ a index n jsme v binomické větě snížili o 1. To znamená, že jsme ji mohli zapsat ve tvaru $(a+b)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k-1}b^k$. Je tedy možno postupovat analogicky např. v situaci, v níž bychom měli stanovit hodnotu součtu $\sum_{n=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$. V tom případě bychom v binomické větě snížili index u n o 2 a opět volili $a=b=1$. Této analogie využijeme v následujícím příkladě.

(Příklad 1.2.2)

Stanovme hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n}k^3\binom{n}{k}$.

V předchozím příkladě bylo naší strategií eliminovat k, kterým bylo kombinační číslo násobeno. Poté jsme obdrželi podíl faktoriálů, který bylo ihned možno zapsat kombinačním číslem. V této úloze budeme postupovat obdobně, cílem tedy bude eliminovat k^3. Provedeme následující úpravy sumandu:

$$k^3\binom{n}{k}=k^3\frac{n!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)(k-3)!}=\frac{k^2}{(k-1)(k-2)}\cdot\frac{n!}{(n-k)!(k-3)!}=$$

$$=\frac{k^2-3k+2+3k-2}{k^2-3k+2}\cdot\frac{n!}{(n-k)!(k-3)!}=\left[1+\frac{3k-2}{(k-1)(k-2)}\right]\cdot\frac{n!}{(n-k)!(k-3)!}=$$

$$=\left[1+3\cdot\frac{k-1+1}{(k-1)(k-2)}-\frac{2}{(k-1)(k-2)}\right]\cdot\frac{n!}{(n-k)!(k-3)!}=$$

$$=\left[1+\frac{3}{k-2}+\frac{1}{(k-1)(k-2)}\right]\cdot\frac{n!}{(n-k)!(k-3)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-k)!(k-3)!}+\frac{3n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-2)(k-3)!}+\frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)(k-2)(k-3)!}=$$

$$= n(n-1)(n-2)\binom{n-3}{k-3} + 3n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + n\binom{n-1}{k-1}$$

Proto lze psát

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)\sum_{k=3}^{n}\binom{n-3}{k-3} + 3n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= n(n-1)(n-2)\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k} + 3n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} + n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}.$$

Užijeme-li binomickou větu, dostáváme

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)\cdot 2^{n-3} + 3n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1},$$

což po drobných úpravách dává

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k} = 2^{n-3} n^2 (n+3) .$$

Závěrem dodejme, že obdobným způsobem lze nalézt hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Následující příklad **1.2.3** není obtížné řešit, přesto však jej zde uveďme, protože jeho řešení využijeme v příkladech **1.2.4** a **1.2.5**.

(Příklad 1.2.3)

Stanovme hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Připomeňme, že v důkazu věty **1.1.1** jsme obdrželi rovnost $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Tuto nyní využijeme. Hledejme tedy hodnotu součtu $(n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. Snadno nahlédneme, že platí

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \left[\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+1}{n}\right] = 2^{n+1} - 1.$$

Tudíž musí platit $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

(Příklad 1.2.4)

$$\text{Stanovme hodnotu součtu } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k}.$$

S využitím příkladu **1.2.3** můžeme získat domněnku, že cesta k řešení povede stanovením hodnoty součtu $\sum_{k=0}^{n} \frac{n+2}{k+2}\binom{n}{k}$. Analogií vztahu $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ je vztah

$$\frac{n+2}{k+2}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+2} \tag{1.2.4}$$,

který využijeme (lze jej snadno ověřit). Nejprve upravme sumand s využitím věty **1.1.1**. Platí:

$$\frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+2}\binom{n}{k} + \frac{1}{k+2}\binom{n}{k+1} - \frac{1}{k+2}\binom{n}{k+1} = \frac{1}{k+2}\binom{n+1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\binom{n}{k+1}.$$

A proto lze psát $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n+1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k+1}$.

a) Nyní stanovme hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n+1}{k+1}$ pomocí sumy $\sum_{k=0}^{n} \frac{n+2}{k+2}\binom{n+1}{k+1}$.

Pro tuto sumu bude s využitím vztahu (1.2.4) platit $\sum_{k=0}^{n} \frac{n+2}{k+2}\binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} = \binom{n+2}{2} +$

$+\binom{n+2}{3} + \ldots + \binom{n+2}{n+2} + \left[\binom{n+2}{0} + \binom{n+2}{1} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1}\right] = 2^{n+2} - 1 - (n+2)$. V důsledku toho obdržíme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n+1}{k+1} = \frac{2^{n+2} - 1 - (n+2)}{n+2}$.

b) Dále stanovme hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k+1}$.

Platí $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k+1} = \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} + \frac{1}{n+2}\binom{n}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. Z příkladu **1.2.3** víme, že $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$, a proto $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{2-1}{0+1} = \frac{2^{n+1} - 2 - n}{n+1}$.

Shrňme, že $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n+1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k+1} = \frac{2^{n+2} - 1 - (n+2)}{n+2} - \frac{2^{n+1} - 2 - n}{n+1}$.

Po drobných úpravách nakonec dostaneme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$. Závěrem ještě poznamenejme, že tento příklad lze řešit obdobným způsobem jako příklad **1.2.2**, tj. strategií by v tom případě byla eliminace výrazu $\dfrac{1}{k+2}$.

(Příklad 1.2.5)

Stanovme hodnotu součtu $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}$.

Postupujme tak, že nejprve nalezneme hodnotu součtu $\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\dfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$. Podle vztahu $\dfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ je možno psát $\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\dfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}$, tj. $\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}=$ $=2^2\binom{n+1}{2}+2^3\binom{n+1}{3}+2^4\binom{n+1}{4}+...+2^{n-1}\binom{n+1}{n-1}+2^n\binom{n+1}{n}+2^{n+1}\binom{n+1}{n+1}$. Nyní užitím vztahu $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ dostaneme $\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}=2^2\binom{n+1}{n-1}+2^3\binom{n+1}{n-2}+2^4\binom{n+1}{n-3}+...+$ $+2^{n-1}\binom{n+1}{2}+2^n\binom{n+1}{1}+2^{n+1}\binom{n+1}{0}$. Zvýšením indexu n v binomické větě o 1 a volbou $a=2,\ b=1$ obdržíme součet $3^{n+1}=2^{n+1}\binom{n+1}{0}+2^n\binom{n+1}{1}+...+2^3\binom{n+1}{n-2}+2^2\binom{n+1}{n-1}+$ $+2^1\binom{n+1}{n}+2^0\binom{n+1}{n+1}$ a proto platí $\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}=3^{n+1}-2^1\binom{n+1}{n}-2^0\binom{n+1}{n+1}=3^{n+1}-$ $-2(n+1)-1=\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\dfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$. Tudíž platí $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\dfrac{3^{n+1}-2n-3}{n+1}$.

Zajímavou technikou hledání hodnot konečných součtů (v nichž figuruje kombinační číslo) je také způsob, který využívá derivování, resp. integrování. Technika spočívá v tom, že volíme vhodná $a,\ b$, která dosadíme do binomické věty, a z ní získaný vztah derivujeme, popř. integrujeme (dle potřeby). Tato technika je uvedená v [3] a nyní ji použijme k vyřešení příkladů **1.2.6** a **1.2.7**.

(Příklad 1.2.6)

V příkladě **1.2.1** jsme hledali hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n}(2k-1)\binom{n}{k}$. Zvolíme-li $a=1,\ b=x^2$, kde x má nyní význam proměnné, vzorec uvedený v binomické větě bude mít podobu

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{2k}=(1+x^2)^n\ .$$

Obě strany této rovnosti nyní derivujeme, dostáváme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2kx^{2k-1}=n(1+x^2)^{n-1}2x$, ale výraz $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2kx^{2k-1}$ je ještě potřeba upravit do takového tvaru, který bude obsahovat výraz $\sum_{k=0}^{n}(2k-1)\binom{n}{k}$. Pišme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1+1)x^{2k-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)x^{2k-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k-1}$. Je tedy $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)x^{2k-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k-1}=n(1+x^2)^n 2x$. Nyní zvolíme vhodné x, musí být takové, abychom nalezli hodnotu hledaného součtu. Je jím samozřejmě $x=1$. Po jeho dosazení získáváme $\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}(2k-1)\right]+2^n=n\cdot 2^n\cdot 2$ a odtud $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)=2^n(n-1)$.

(Příklad 1.2.7)

V příkladě **1.2.4** jsme hledali hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}$.

Položme $a=1,\ b=x$ a dosaďme je do vzorce uvedeného v binomické větě. Obdržíme vztah $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$, který ještě vynásobme výrazem x, tj. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}=x(1+x)^n$. Nyní obě strany integrujeme.

Pro levou stranu platí $\int\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}dx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+2}}{k+2}+C_1$.

Při integraci pravé strany použijme větu *per partes* (derivujme x a integrujme $(1+x)^n$).

Dostáváme $\int x(1+x)^n dx=x\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}-\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+2)(n+1)}+C_2$.

A proto lze psát $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+2}}{k+2}=x\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}-\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+2)(n+1)}+C$. Dále je potřeba nalézt hodnotu konstanty C. Položíme-li $x=0$, obdržíme $0=-\frac{2^{n+2}}{(n+2)(n+1)}+C$, odtud $C=\frac{2^{n+2}}{(n+2)(n+1)}$.

Lze tedy psát $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+2}}{k+2}=x\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}-\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+2)(n+1)}+\frac{2^{n+2}}{(n+2)(n+1)}$. Nakonec volme $x=1$

a dostáváme hledanou hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+2}=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^{n+2}}{(n+2)(n+1)}+\frac{2^{n+2}}{(n+2)(n+1)}$, což po drobných úpravách dává $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+2}=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+2)(n+1)}$.

2 Gosperův algoritmus

Lze říci, že Gosperův algoritmus je známý ve dvou verzích. O té první je možno dočíst se v [11], nebo např. v [8]. S druhou verzí je možno seznámit se prostřednictvím četby [5] nebo [6] a právě tuto verzi využívá Zeilbergerův algoritmus. Jím se budeme zabývat v páté kapitole, proto se nyní zabývejme touto verzí. Gosperův algoritmus nachází uplatnění např. v situaci, v níž chceme stanovit hodnotu konečného (popř. nekonečného) součtu, jehož sumandem je např. polynom daného stupně (nebo jeho převrácená hodnota), racionální funkce, výraz reprezentující geometrickou posloupnost, apod. Gosperův algoritmus nebyl však prioritně vytvořen pro ty součty, které obsahují kombinační čísla, ačkoli některé takové součty určit dovede, viz [5], str. 74.

2.1 Kdo je R. William Gosper?

obr. 1

R. William Gosper, Jr., nar. 1943, viz obr. 1, je současným matematikem a programátorem, pochází z města Pennsauken v New Jersey. On a Richard Greenblatt jsou považováni za zakladatele prvních počítačových komunit. William Gosper je chloubou společnosti *Lisp community*, která se zabývá programováním. Je známý díky práci, ve které se zabýval reprezentací reálných čísel a rovněž také vytvořením algoritmu, který je po něm pojmenován. Jím vytvořený algoritmus je v knize nesoucí název A=B označen jedním z pěti základních. V roce 1961 začal studovat na univerzitě MIT (Massachusettský technologický institut) matematický obor a získal titul v roce 1965. Přispěl k rozvoji počítačového programu *Macsyma*. V roce 1970 se přestěhoval do Kalifornie, kde po dobu tří let přednášel na Stanfordské univerzitě a pomáhal Donaldovi Knuthovi (významný programátor) psát druhý díl knihy *The Art Of Computer Programming*. W. Gosper samozřejmě také přispíval do jiných publikací, jejichž seznam nalezneme na adrese <http://gosper.org/bill.html>. Tam můžeme také nalézt další informace o tomto matematikovi a programátorovi. Od roku 1970 pracuje pro firmy *Xerox PARC*, *Symbolics*, *Wolfram Research*, *The Lawrence Livermore Laboratory* a *Macsyma Inc*.

Čerpáno z [9] a [12].

2.2 Jak pracuje algoritmus

Úvodem poznamenejme, co představuje pojem *hypergeometrická posloupnost*. Ta je v publikaci [8] definována následovně.

(Definice 2.2.1)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *hypergeometrickou* právě tehdy, když pro všechna přirozená n lze podíl dvou následujících členů posloupnosti vyjádřit ve tvaru $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{u(n)}{v(n)}$, kde $u(n)$, $v(n)$ jsou polynomy.

□

Následující text je čerpán z [5] a [6].

Smyslem algoritmu je nalézt hodnotu sumy $s_n=\sum_{k=0}^{n-1} t_k$. Naší snahou je tuto sumu zapsat součtem hypergeometrické posloupnosti a reálné konstanty. Musíme najít takovou hypergeometrickou posloupnost z_n, pro kterou platí $z_{n+1}-z_n=t_n$. Pokud existuje taková z_n, řekneme, že t_n je gosperovsky sčítatelná (*Gosper summable*). V takovém případě bude platit:

$s_n=\sum_{k=0}^{n-1} t_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(z_{k+1}-z_k\right)=(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+...+(z_n-z_{n-1})=z_n-z_0$, kde z_0 je reálná konstanta.

Mějme racionální funkci $r(n)=\frac{t_{n+1}}{t_n}$. Ukažme, že $\frac{z_n}{t_n}$ je racionální funkce.

$$\frac{z_n}{t_n}=\frac{z_n}{z_{n+1}-z_n}=\frac{1}{\frac{z_{n+1}}{z_n}-1}.$$

Vidíme, že $\frac{z_n}{t_n}$ je racionální funkce, proto lze psát $\frac{z_n}{t_n}=y(n)$. Dosazením $y(n)t_n$ do vztahu $z_{n+1}-z_n=t_n$ obdržíme $t_{n+1}y(n+1)-t_ny(n)=t_n$, a vydělením obou stran této rovnosti výrazem t_n dostáváme $\frac{t_{n+1}}{t_n}y(n+1)-y(n)=1$, neboli $r(n)y(n+1)-y(n)=1$.

Předpokládejme, že

$$r(n)=\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{a(n)}{b(n)}\cdot\frac{c(n+1)}{c(n)} \qquad (2.2.1),$$

kde $a(n)$, $b(n)$ a $c(n)$ jsou polynomy, pro něž platí

$$D\big(a(n),\ b(n+h)\big)=1,\ \forall h\in\mathbb{N}_0 \qquad (2.2.2).$$

Gosperův algoritmus přichází se zajímavým výsledkem

$$y(n)=\frac{b(n-1)}{c(n)}x(n) \qquad (2.2.3),$$

kde $x(n)$ je neznámá racionální funkce proměnné n. Nyní odvodíme podmínku, kterou musí splňovat polynom $x(n)$. Ze vztahu $(2.2.3)$ plyne, že $b(n)=\frac{y(n+1)}{x(n+1)}c(n+1)$. Dosazením takového $b(n)$ do vztahu $(2.2.1)$ obdržíme $r(n)=\frac{a(n)}{c(n)}\cdot\frac{x(n+1)}{y(n+1)}$ a takové $r(n)$ dosaďme do vztahu $r(n)y(n+1)-y(n)=1$. Po vynásobení obou stran polynomem $c(n)$ obdržíme $a(n)x(n+1)-y(n)c(n)=c(n)$, což s využitím vztahu $(2.2.3)$ dává

$$a(n)\cdot x(n+1)-b(n-1)\cdot x(n)=c(n) \qquad (2.2.4).$$

(Věta 2.2.1)

Nechť $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ jsou polynomy proměnné n splňující podmínku $(2.2.2)$. Pokud $x(n)$ je racionální funkce proměnné n splňující podmínku $(2.2.4)$, potom $x(n)$ je polynom proměnné n.

□

Důkaz je možno nalézt v [5] na str. 76. Při jeho provádění vyplyne rovnost $z_n=\frac{b(n-1)}{c(n)}x(n)t_n$, která je pro nás velmi důležitá, je totiž závěrečným výstupem algoritmu a společně s počáteční podmínkou určuje hodnotu hledaného součtu. Nyní si ukažme, co dělat v případě, v němž je narušena podmínka $(2.2.2)$. Nechť $r(n)=\frac{t_{n+1}}{t_n}=Z\frac{f(n)}{g(n)}$, kde $f(n)$, $g(n)$ jsou monické nesoudělné polynomy a Z je konstanta. Označme $R(h):=res_n\big(f(n),\ g(n+h)\big)$. Utvořme množinu $S=\{h_1,\ h_2,\ ...,\ h_N\}$, kde $N\geq 0$, $0\leq h_1\leq h_2\leq ...\leq h_N$, jejíž prvky jsou nezáporné a celé nulové body polynomu $R(h)$.

1) Označme $p_0:=f(n)$, $q_0:=g(n)$.
2) Pro $j=1,\ 2,\ ...,\ N$ označme:

$$s_j(n) := D\left(p_{j-1}(n),\ q_{j-1}(n+h_j)\right),$$

$$p_j(n) := \frac{p_{j-1}(n)}{s_j(n)},$$

$$q_j(n) := \frac{q_{j-1}(n)}{s_j(n-h_j)},$$

$$a(n) := Z \cdot p_N(n),$$

$$b(n) := q_N(n),$$

$$c(n) := \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{h_i} s_i(n-j).$$

Takto předefinované polynomy výše uvedeným postupem mohou být použity v následující větě.

(Věta 2.2.2)

Nechť K je těleso a $r \in K[n]$ nenulová racionální funkce. Potom existují polynomy $a,\ b,\ c \in K[n]$ takové, že $b,\ c$ jsou monické a platí:

$$r(n) = \frac{a(n)}{b(n)} \cdot \frac{c(n+1)}{c(n)},$$

kde

1) $D\left(a(n),\ b(n+h)\right) = 1$, pro všechna nezáporná a celá h,

2) $D\left(a(n),\ \mathrm{c}(n)\right) = 1$,

3) $D\left(b(n),\ \mathrm{c}(n+1)\right) = 1$.

□

Výše uvedené předefinování polynomů $a(n)$, $b(n)$ a $c(n)$ bylo demonstrováno precizním popisem. Postup předefinování lze však podat i jiným (možná názornějším) popisem. Ten je následující. Vypočteme podíl $\frac{t_{n+1}}{t_n}$. Tento podíl přepíšeme do tvaru $Z\frac{f(n)}{g(n)}$, kde $f(n)$ a $g(n)$ jsou nesoudělné a monické polynomy. Dále nalezneme nulové body polynomu $f(n)$. Dejme tomu, že nalézáme nulové body $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_r \in \mathbb{R}$, kde $r \in \mathbb{N}$. Definujeme polynom $R(h)$ jako součin polynomů $g(n_1+h) \cdot g(n_2+h) \cdot \ldots \cdot g(n_r+h)$. Nyní hledáme nezáporné, celé, nulové body polynomu $R(h)$. Nechť $h_{\min}$ je nejmenší z takových nalezených nulových bodů. Dále ještě definujeme polynom $u(n) := D\left(f(n), g(n+h_{\min})\right)$ a nyní již přistoupíme k předefinování polynomů $a(n)$, $b(n)$ a $c(n)$:

$$\bar{a}(n) := Z\frac{f(n)}{u(n)},\ \bar{b}(n) := \frac{g(n)}{u(n-h_{\min})},\ \bar{c}(n) := u(n-h_{\min})\cdot u(n-h_{\min}-1)\cdot\ldots\cdot u(n-1).$$

Nyní dokončeme popis Gosperova algoritmu.

Připomeňme, že chceme nalézt hodnotu sumy $\sum_{k=p}^{n-1} t_k$. Označíme $t_n := t_k$ a vypočteme podíl $\frac{t_{n+1}}{t_n}$. Zapíšeme tento podíl jako $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{a(n)}{b(n)}\cdot\frac{c(n+1)}{c(n)}$, kde $D\left(a(n), b(n+h)\right) = 1$, pro všechna $h \in \mathbb{N}_0$. Dále hledáme stupeň neznámého polynomu $x(n)$. Tento stupeň určíme algoritmicky, postup je následující a nalezneme jej v [7].

Případ (1):

Je-li $st\left(a(n)\right) \neq st\left(b(n)\right)$ nebo $lc\left(a(n)\right) \neq lc\left(b(n)\right)$, potom

$$st\left(x(n)\right) = st(c(n)) - \max\left(st\left(a(n)\right),\ st\left(b(n)\right)\right),$$

kde $lc\left(a(n)\right)$ je vedoucí koeficient polynomu $a(n)$.

Případ (2):

Je-li $st\left(a(n)\right) = st\left(b(n)\right)$ a zároveň $lc\left(a(n)\right) = lc\left(b(n)\right)$, potom

označme $s := lc\left(b(n)\right)$ a dále případ (2) dělíme na další dva případy (2A), (2B).

Případ (2A):

$$st\left(x(n)\right) = st\left(c(n)\right) - st\left(a(n)\right) + 1$$

nebo

Případ (2B):

$$st\left(x(n)\right) = slc\left(b(n-1)\right) - \frac{slc\left(a(n)\right)}{s},$$

kde $slc\left(a(n)\right)$ je druhý vedoucí koeficient polynomu $a(n)$.

Poznamenejme, že pokud nastane případ (2), může se stát, že oba případy (2A), (2B) budou úspěšné. Tím získáme dvě možnosti volby stupně polynomu $x(n)$. Po nalezení stupně polynomu $x(n)$ klademe požadavek, že $x(n)$ musí splňovat podmínku

$a(n)\cdot x(n+1)-b(n-1)\cdot x(n)=c(n)$, jak již bylo výše zmíněno. Dosazením polynomu $x(n)$ do této podmínky nalezneme neznámé koeficienty $\{c_i\}_{i=0}^{m}$ tohoto polynomu, kde $st\big(x(n)\big)=m$. To provedeme metodou neurčitých koeficientů. Dále nalezneme posloupnost $\{z_n\}_{n=p}^{n-1}$, která splňuje rovnost $z_n=\dfrac{b(n-1)}{c(n)}x(n)t_n$. Z této rovnosti určíme počáteční podmínku p. Nakonec obdržíme $s_n=z_n-p=\sum\limits_{n=p}^{n-1}t_k$.

2.3 Příklady

(Příklad 2.3.1)

$$\text{Stanovme součet } \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Označme $t_n:=\dfrac{1}{n(n+1)}$. Vypočteme podíl $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}=\dfrac{n}{n+2}$. Označme $a(n):=n$, $b(n):=n+2$, $c(n):=1$. Prověříme, zda $D\big(a(n),\ b(n+h)\big)=1$, $\forall h\in\mathbb{N}_0$. To představuje řešit rovnici $res_n\big(n,\ n+h+2\big)=0$. Dostáváme $res_n\big(n,\ n+h+2\big)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & h+2\end{vmatrix}=h+2$. Rovnice má jediný kořen $h=-2$, ten není nezáporný. Algoritmus bude nadále pracovat s výše zavedenými polynomy $a(n)$, $b(n)$ a $c(n)$, protože jsou splněny všechny tři podmínky uvedené ve větě **2.2.2**, tj. platí $D\big(n,\ n+h+2\big)=1$ pro všechna nezáporná celá h, $D\big(n,\ 1\big)=1$ a také $D\big(n+2,\ 1\big)=1$. Dále se pokusíme určit stupeň neznámého polynomu $x(n)$. Zjišťujeme, že $st\big(a(n)\big)=st\big(b(n)\big)=1$ a $lc\big(a(n)\big)=lc\big(b(n)\big)=1$, to znamená, že nastává případ (2). Bude tedy potřeba zabývat se oběma případy $(2\mathrm{A})$, $(2\mathrm{B})$. Označme $s:=1$. Pro případ $(2\mathrm{A})$ dostáváme $st\big(x(n)\big)=st\big(c(n)\big)-st\big(a(n)\big)+1=0-1+1=0$. Naproti tomu případ $(2\mathrm{B})$ dává $st\big(x(n)\big)=slc\big(b(n-1)\big)-\dfrac{slc\big(a(n)\big)}{s}=1-0=1$. V případě $(2\mathrm{A})$ je polynom $x(n)$ nultého stupně, tj. $x(n)=c_0$. Po dosazení takového $x(n)$ do podmínky $a(n)\cdot x(n+1)-b(n-1)\cdot x(n)=c(n)$ zjišťujeme, že $x(n)=-1$. V případě $(2\mathrm{B})$ je polynom $x(n)$ prvního stupně, tj. $x(n)=c_0+c_1n$. Po dosazení takového $x(n)$ do téže podmínky opět zjišťujeme, že $x(n) = -1$. Nyní můžeme dosadit do vzorce $z_n = \frac{b(n-1)}{c(n)} x(n) t_n$. Dostáváme $z_n = \frac{n+1}{1}(-1)\frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n}$. Připomeňme, že hledáme hodnotu sumy $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$ a proto počáteční podmínkou bude $z_1 = \frac{b(0)}{c(1)} x(1) t_1 = \frac{2}{1}(-1)\frac{1}{2} = -1$. Nakonec získáváme $s_n = z_n - z_1 = -\frac{1}{n} - (-1) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Je tedy $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n}$.

(Příklad 2.3.2)

Stanovme součet $\sum_{k=1}^{n-1} k^3$.

Označíme-li $t_n := n^3$, bude platit $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3}$. Označme $a(n) := 1$, $b(n) := 1$ a $c(n) := n^3$. Při takto zvolených polynomech $a(n)$, $b(n)$ a $c(n)$ je okamžitě zřejmé, že $D\big(a(n),\, b(n+h)\big) = 1,\ \forall h \in \mathbb{N}_0$. Tím je splněna první podmínka věty **2.2.2**. Dále je splněna druhá podmínka této věty, tj. $D\left(1,\, n^3\right) = 1$ a rovněž i třetí podmínka, tj. $D\left(1,\, (n+1)^3\right) = 1$. Poznamenejme, že kdybychom volili $a(n) := (n+1)^3$, $b(n) := n^3$ a $c(n) := 1$, následně bychom museli vyčíslit jistý determinant šestého stupně. Poté bychom této determinant položili roven nule, což by nás vedlo řešit jistou polynomiální rovnici proměnné h. Bohužel tato rovnice má jediný devítinásobný kořen $h = 1$. V takovém případě bychom takto zavedené polynomy $a(n)$, $b(n)$ a $c(n)$ museli předefinovat. Z tohoto příkladu plyne užitečná rada – po vypočtení podílu $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ se vždy snažme polynom $c(n)$ volit tak, aby nebyl konstantní a monický (samozřejmě takovou možnost nemusíme mít vždy). Nyní se vraťme zpět k výpočtu. Algoritmus tedy bude pracovat s polynomy $a(n) = 1$, $b(n) = 1$ a $c(n) = n^3$. Pokusíme se určit stupeň neznámého polynomu $x(n)$. Zjišťujeme, že $st\big(a(n)\big) = st\big(b(n)\big) = 0$ a $lc\big(a(n)\big) = lc\big(b(n)\big) = 1$, to znamená, že nastává případ (2). Bude tedy potřeba zabývat se oběma případy $(2A)$, $(2B)$. Označme $s := 1$. Pro případ $(2A)$ dostáváme $st\big(x(n)\big) = st\big(c(n)\big) - st\big(a(n)\big) + 1 = 3 - 0 + 1 = 4$. Naproti tomu případ $(2B)$ dává

$st\big(x(n)\big) = slc\big(b(n-1)\big) - \dfrac{slc\big(a(n)\big)}{s} = 0 - \dfrac{0}{1} = 0$. V případě (2A) je polynom $x(n)$ čtvrtého stupně, tj. $x(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3 + c_4 n^4$. Po dosazení takového $x(n)$ do podmínky $a(n)\cdot x(n+1) - b(n-1)\cdot x(n) = c(n)$ a následných úpravách obdržíme rovnost

$$-n^3 + c_1 + c_2 + 2nc_2 + c_3 + 3nc_3 + 3n^2 c_3 + c_4 + 4nc_4 + 6n^2 c_4 + 4n^3 c_4 = 0.$$

Dále porovnáme koeficienty nezáporných celých mocnin neznámé n:

$$\begin{array}{lr} n^3: & -1 + 4c_4 = 0 \\ n^2: & 3c_3 + 6c_4 = 0 \\ n^1: & 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 = 0 \\ n^0: & c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \end{array}$$

Tato soustava má kořeny $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{1}{4}$, $c_3 = -\dfrac{1}{2}$ a $c_4 = \dfrac{1}{4}$. Nalézáme tedy polynom $x(n) = \dfrac{1}{4}(n^2 - 2n^3 + n^4) = \dfrac{n^2}{4}(n-1)^2$. Dosadíme-li jej do vzorce $z_n = \dfrac{b(n-1)}{c(n)} x(n) t_n$, obdržíme $z_n = \dfrac{n^2}{4}(n-1)^2$. Stanovme počáteční podmínku $z_1 = \dfrac{b(0)}{c(1)} x(1) t_1 = 0$. Nakonec nalézáme hodnotu sumy $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = z_n - z_1 = \dfrac{n^2}{4}(n-1)^2$. Závěrem bychom ještě měli vyšetřit případ (2B). Lze vůbec tento případ použít? Ve výše uvedeném jsme již zjistili, že v případě (2B) je polynom $x(n)$ nultého stupně, tj. $x(n) = c_0$. Takový polynom dosadíme do podmínky $a(n)\cdot x(n+1) - b(n-1)\cdot x(n) = c(n)$. Obdržíme $c_0 - c_0 - n^3 = 0$. Při snaze porovnat koeficienty u neznámé n zjišťujeme pro n^3, že $1 = 0$. Odtud je vidět, že případ (2B) selhal.

(Příklad 2.3.3)

$$\text{Stanovme součet } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+4)}.$$

Označíme-li $t_n := \dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$, bude platit $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+5)}$. Zde není jiná možnost než volit $a(n) := (n+1)(n+4)$, $b(n) := (n+2)(n+5)$, $c(n) := 1$. Ihned je vidět, že při takto zavedených polynomech je splněna druhá podmínka věty **2.2.2**, tj. platí $D\big(a(n),\ c(n)\big) = 1$, rovněž je splněna i třetí podmínka této věty, tj. platí $D\big(b(n),\ c(n+1)\big) = 1$. Zbývá prověřit, zda je splněna i první podmínka, tj. zda existuje takové $h \in \mathbb{N}_0$, pro které platí $D\big(a(n),\ b(n+h)\big) \neq 1$. Pišme

$$res_n\big(a(n),\ b(n+h)\big) = res_n\big(n^2+5n+4,\ (n+h)^2+7(n+h)+10\big) =$$

$$= res_n\big(n^2+5n+4,\ n^2+n(2h+7)+h^2+7h+10\big) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2h+7 & h^2+7h+10 & 0 \\ 0 & 1 & 2h+7 & h^2+7h+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2h+2 & h^2+7h+6 & 0 \\ 0 & 1 & 2h+7 & h^2+7h+6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} h^2+7h+6 & 0 \\ 2h+7 & h^2+7h+10 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2h+2 & 0 \\ 1 & h^2+7h+10 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2h+2 & h^2+7h+6 \\ 1 & 2h+7 \end{vmatrix} =$$

$$= (h^2+7h+10)(h^2+7h+6) - 5(h^2+7h+10)(2h+2) + 4\Big[(2h+2)(2h+7) - h^2 - 7h - 6\Big].$$

Po úpravách obdržíme $res_n\big(a(n),\ b(n+h)\big) = (h-2)(h+1)^2(h+4)$. Položíme-li tento determinant roven nule, obdržíme kořeny $2, -1, -4$. Proto existuje jisté h, které narušuje první podmínku věty **2.2.2**, je jím $h^* = 2$. Polynomy $a(n)$, $b(n)$ a $c(n)$ budeme muset předefinovat. Následující předefinování je zároveň ukázkou, že jsme s rezultantem výše nemuseli pracovat, pouze jsme jeho vyčíslením obdrželi informaci, že je narušena první podmínka věty **2.2.2**. Kompletní postup předefinování je následující. Máme podíl $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ zapsat ve tvaru $Z\frac{f(n)}{g(n)}$, kde Z je konstanta a polynomy $f(n)$, $g(n)$ jsou monické a nesoudělné.

Označme $Z := 1$, $f(n) := (n+1)(n+4)$, $g(n) := (n+2)(n+5)$. Poznamenejme, že $g(n+h) = (n+h+2)(n+h+5)$. Nulové body polynomu $f(n)$ jsou $n_1 = -1$, $n_2 = -4$ a proto zavedeme polynomy

$$g(n_1+h) := g(-1+h) = (-1+h+2)(-1+h+5) = (h-1)(h+4),$$

$$g(n_2+h) := g(-4+h) = (-4+h+2)(-4+h+5) = (h-2)(h-1).$$

Dále definujeme polynom

$$R(h) := g(n_1+h)g(n_2+h) = (h-2)(h+1)^2(h+4).$$

Nulové body polynomu $R(h)$ jsou $h_1 = -4$, $h_2 = -1$ a $h_3 = 2$. Jelikož nás zajímají pouze nezáporné a celé nulové body, označme $h_{\min} := 2$. Dále označme:

$$u(n) := D\left(f(n),\ g(n+h_{\min})\right) = D\left(f(n),\ g(n+2)\right) = D\left((n+1)(n+4),\ (n+4)(n+7)\right) = n+4$$

$$\bar{a}(n) := Z\frac{f(n)}{u(n)} = \frac{(n+1)(n+4)}{n+4} = n+1,$$

$$\bar{b}(n) := \frac{g(n)}{u(n-h_{\min})} = \frac{g(n)}{g(n-2)} = \frac{(n+2)(n+5)}{n+2} = n+5,$$

$$\bar{c}(n) := u(n-h_{\min}) \cdot u(n-h_{\min}-1) = u(n-2) \cdot u(n-1) = (n+2)(n+3).$$

Tento příklad nadále řešme v prostředí *Wolfram Mathematica* 9 ® a tím zároveň ukážeme návod, kterým by bylo možno řešit obtížnější příklady. Definujme výraz t_n a výše uvedené polynomy $\bar{a}(n)$, $\bar{b}(n)$ a $\bar{c}(n)$:

```
In[1]:= t[n_] := 1/((n + 1) (n + 4))

In[2]:= a[n_] := (n + 1)

In[3]:= b[n_] := (n + 5)

In[4]:= c[n_] := (n + 2) (n + 3)
```

Dále se pokusíme určit stupeň neznámého polynomu $x(n)$, proto definujme:

```
In[5]:= st[a[n]] := Exponent[Expand[a[n]], n]

In[6]:= st[b[n]] := Exponent[Expand[b[n]], n]

In[7]:= lc[a[n]] := Coefficient[Expand[a[n]], n, st[a[n]]]

In[8]:= lc[b[n]] := Coefficient[Expand[b[n]], n, st[b[n]]]

In[9]:= {st[a[n]], st[b[n]], lc[a[n]], lc[b[n]]}

Out[9]= {1, 1, 1, 1}
```

Vidíme, že $st\left(\bar{a}(n)\right) = st\left(\bar{b}(n)\right) = lc\left(\bar{a}(n)\right) = lc\left(\bar{b}(n)\right) = 1$, tedy nastává případ (2). Proto ještě nadefinujme:

```
In[10]:= st[c[n]] := Exponent[Expand[c[n]], n]

In[11]:= s := lc[b[n]]
```

Prověříme, zda bude možné použít případ (2A):

```
In[12]:= st[c[n]] - st[a[n]] + 1

Out[12]= 2
```

Předpokládejme tedy, že polynom $x(n)$ je druhého stupně. Takový polynom nyní definujeme:

```
In[13]:= x[n_] := Sum[c_i * n^i, {i, 0, 2}]

In[14]:= x[n]

Out[14]= c0 + n c1 + n^2 c2
```

Polynom $x(n)$ dosadíme do podmínky $\overline{a}(n)x(n+1)-\overline{b}(n-1)x(n)-\overline{c}(n)$:

```
In[15]:= a[n] * x[n + 1] - b[n - 1] * x[n] - c[n]

Out[15]= - (2 + n) (3 + n) - (4 + n) (c0 + n c1 + n^2 c2) +
           (1 + n) (c0 + (1 + n) c1 + (1 + n)^2 c2)
```

Metodou neurčitých koeficientů stanovíme koeficienty c_0, c_1 a c_2.

```
In[16]:= CoefficientList[%, n]

Out[16]= {-6 - 3 c0 + c1 + c2, -5 - 2 c1 + 3 c2, -1 - c2}

In[17]:= Map[Equal[#, 0] &, %]

Out[17]= {-6 - 3 c0 + c1 + c2 == 0, -5 - 2 c1 + 3 c2 == 0, -1 - c2 == 0}

In[18]:= Reseni = Solve[%, {c0, c1, c2}]

Out[18]= {{c0 -> -11/3, c1 -> -4, c2 -> -1}}
```

Je tedy $c_0=-\dfrac{11}{3}$, $c_1=-4$ a $c_2=-1$. Definujeme posloupnost $\{z_n\}_{n=p}^{n-1}$, která splňuje rovnost $z_n=\dfrac{\overline{b}(n-1)}{\overline{c}(n)}x(n)t_n$:

```
In[19]:= z[n_] := b[n - 1]/c[n] * x[n] * t[n]
```

Výsledek s_n očekáváme ve tvaru $s_n=z_n-z_1$, proto pišme:

```
In[20]:= Together[z[n] - z[1]]

Out[20]= (18 c0 - 11 n c0 - 6 n^2 c0 - n^3 c0 - 6 c1 + 13 n c1 - 6 n^2 c1 - n^3 c1 -
            6 c2 - 11 n c2 + 18 n^2 c2 - n^3 c2) / (24 (1 + n) (2 + n) (3 + n))
```

Dosadíme nalezené koeficienty c_0, c_1 a c_2:

```
In[21]:= Together[% /. Reseni]

Out[21]= {(-54 - n + 42 n^2 + 13 n^3)/(36 (1 + n) (2 + n) (3 + n))}
```

Je tedy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+4)}=\frac{-54-n+42n^2+13n^3}{36(6+11n+6n^2+n^3)}$. Závěrem bychom ještě mohli provést zkoušku, zda jsme počítali správně:

In[22]:= $\text{Sum}\left[\dfrac{1}{(k+1)\ (k+4)},\ \{k,\ 1,\ n-1\}\right]$

Out[22]= $\dfrac{-54-n+42\,n^2+13\,n^3}{36\ (1+n)\ (2+n)\ (3+n)}$

(Příklad 2.3.4)

V příkladě **1.1.2** podkapitoly **1.1** jsme hledali hodnotu součtu $\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+1)k$. Stanovme ji nyní Gosperovým algoritmem. Označme $t_n := (n+2)(n+1)n$, dostáváme $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{n+3}{n}$. Definujme polynomy $f(n) := n+3$, $g(n) := n$. Je tedy $Z = 1$. Nulovým bodem polynomu $f(n)$ je $n_1 = -3$ a proto dále označme $R(h) := g(n_1 + h) = g(-3+h) = h-3$. Nezáporným nulovým bodem polynomu $R(h)$ je $h = 3$, proto označme $h_{\min} = 3$. Ještě je potřeba zavést následující polynomy:

$$u(n) := D\big(f(n),\ g(n+h_{\min})\big) = D\big(f(n),\ g(n+3)\big) = D\big(n+3,\ n+3\big) = n+3$$

$$\bar{a}(n) := Z\,\frac{f(n)}{u(n)} = \frac{n+3}{n+3} = 1,$$

$$\bar{b}(n) := \frac{g(n)}{u(n-h_{\min})} = \frac{g(n)}{g(n-3)} = \frac{n}{n} = 1,$$

$$\bar{c}(n) := u(n-h_{\min})\cdot u(n-h_{\min}-1)\cdot u(n-h_{\min}-2) = u(n-3)u(n-2)u(n-1) = n(n+1)(n+2).$$

Algoritmus tedy bude pracovat s polynomy $\bar{a}(n) = 1$, $\bar{b}(n) = 1$ a $\bar{c}(n) = n(n+1)(n+2)$. Nyní určíme stupeň polynomu $x(n)$. Zjišťujeme, že $st\big(\bar{a}(n)\big) = st\big(\bar{b}(n)\big) = 0$ a $lc\big(\bar{a}(n)\big) = lc\big(\bar{b}(n)\big) = 1$, to znamená, že nastává případ (2). Dále pro případ (2A) dostáváme $st\big(x(n)\big) = st\big(\bar{c}(n)\big) - st\big(\bar{a}(n)\big) + 1 = 3 - 0 + 1 = 4$. V případě (2A) je polynom $x(n)$ čtvrtého stupně, tj. $x(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3 + c_4 n^4$. Po dosazení takového $x(n)$ do podmínky $\bar{a}(n)\cdot x(n+1) - \bar{b}(n-1)\cdot x(n) = \bar{c}(n)$ a následných úpravách obdržíme rovnost $-2n - 3n^2 - n^3 + c_1 + c_2 + 2nc_2 + c_3 + 3nc_3 + 3n^2c_3 + c_4 + 4nc_4 + 6n^2c_4 + 4n^3c_4 = 0$. Porovnáme koeficienty nezáporných celých mocnin neznámé n:

$$\begin{aligned} n^3: &\qquad -1+4c_4=0\\ n^2: &\qquad -3+3c_3+6c_4=0\\ n^1: &\qquad -2+2c_2+3c_3+4c_4=0\\ n^0: &\qquad c_1+c_2\ +\ c_3+\ c_4=0 \end{aligned}$$

Tato soustava má kořeny $c_1=-\dfrac{1}{2}$, $c_2=-\dfrac{1}{4}$, $c_3=\dfrac{1}{2}$ a $c_4=\dfrac{1}{4}$. Nalézáme polynom $x(n)=\dfrac{n^4}{4}+\dfrac{n^3}{2}-\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{n}{2}$. Ten dosadíme do vzorce $z_n=\dfrac{b(n-1)}{c(n)}x(n)t_n$, dostáváme $z(n)=x(n)$. Dále stanovíme počáteční podmínku $z_1=\dfrac{b(0)}{c(1)}x(1)t_1=0$ a následně nalézáme $\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)(k+1)k=z_n-z_1=\dfrac{n^4}{4}+\dfrac{n^3}{2}-\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{n}{2}$. A proto $\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+1)k=\dfrac{n^4}{4}+\dfrac{n^3}{2}-\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{n}{2}+$ $+(n+2)(n+1)n=\dfrac{1}{4}n(1+n)(2+n)(3+n)$. Tím je úloha vyřešena. Závěrem dodejme, že situace, které nastávaly v tomto příkladě, jsou podobné těm, které by nastaly při řešení ostatních příkladů, jimiž jsme se zabývali v podkapitole **1.1**.

Gosperův algoritmus nebyl vytvořen k určení hodnot sum, ve kterých figurují kombinační čísla, např. $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m}{k}$ není gosperovsky sčítatelná. Je však zajímavé, že např. $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m}{k}$ již gosperovsky sčítatelná je. „*Drobná změna sumandu zapříčinila úspěch algoritmu*“ píše se v [5].

(Příklad 2.3.5)

Stanovme součet $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m}{k}$.

Označme $t_n:=(-1)^n\binom{m}{n}$. Dostáváme podíl $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}=\dfrac{n-m}{n+1}$. Označme $a(n):=n-m$, $b(n):=n+1$ a $c(n):=1$. Tyto polynomy je možno nadále používat, protože platí

$$res_n\left(a(n),\ b(n+h)\right)=res_n\left(n-m,\ n+h+1\right)=\begin{vmatrix}1 & -m\\ 1 & h+1\end{vmatrix}=h+1+m=0 \Leftrightarrow h=-1-m\,.$$

Dále zjišťujeme, že $st\left(a(n)\right)=st\left(b(n)\right)=1$ a $lc\left(a(n)\right)=lc\left(b(n)\right)=1$, to znamená, že nastává případ (2). Případ $(2A)$ dává $st\left(x(n)\right)=st\left(c(n)\right)-st\left(a(n)\right)+1=0-1+1=0$, proto získáváme polynom $x(n)=c_0$ a po jeho dosazení do podmínky $a(n)\cdot x(n+1)-b(n-1)\cdot x(n)=c(n)$ a drobných úpravách zjišťujeme, že $c_0=-\frac{1}{m}$ a tedy $x(n)=-\frac{1}{m}$. Dosadíme-li $x(n)$ do vzorce $z_n=\frac{b(n-1)}{c(n)}x(n)t_n$, obdržíme $z_n=-\frac{n}{m}(-1)^n\binom{m}{n}$. Získáváme počáteční podmínku $z_0=0$ a hodnotu hledaného součtu $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m}{k}=z_n-z_0=$ $=-\frac{n}{m}(-1)^n\binom{m}{n}$. Závěrem poznamenejme, že zde může být navozen pocit, zda vůbec posloupnost z_n je hypergeometrická. Je skutečně hypergeometrická, totiž platí $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{n-m}{n}$.

Všechny sumy, jimiž jsme se zabývali v podkapitole **1.2**, jsou gosperovsky nesčítatelné, což se dá snadno ověřit. Závěrem dodejme, že obecné příčiny neúspěchu algoritmu při pokusu stanovení hodnoty daného součtu jsou tři:

1) Může nastat situace, v níž podíl $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ není racionální funkcí proměnné n.
2) Může se stát, že soustava lineárních rovnic s neurčitými koeficienty c_i, kde $i\in\mathbb{N}_0$, nemá řešení.
3) Může nastat situace, v níž je nalezen záporný stupeň polynomu $x(n)$.

3 Homogenní lineární rekurentní rovnice *k – tého* řádu s konstantními koeficienty

Tato kapitola je čerpána ze zdrojů [13] a [14]. Symbolika je upravena pro potřeby čtvrté a páté kapitoly této práce.

3.1 Rekurentní rovnice a její řešení

(Definice 3.1.1)

Homogenní lineární rekurentní rovnice $k - t\acute{e}ho$ řádu s konstantními koeficienty je zápis

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + ... + a_k f(n) = 0,\ n \geq n_0 \quad (3.1.1)\ ,$$

kde $k \geq 1$ je pevně zvolené přirozené číslo, $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_k$ jsou reálná čísla a $a_0 \neq 0$.

Rovnici $(3.1.1)$ přísluší charakteristická rovnice

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + ... + a_k = 0 \qquad (3.1.2)\ .$$

□

(Definice 3.1.2)

Řešením rovnice $(3.1.1)$ je kterákoli posloupnost z posloupností $\{y_{0n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_{1n}\}_{n=0}^{\infty}$, …, která po dosazení za $f(n)$ splňuje rovnost $(3.1.1)$.

□

Postup při řešení homogenních lineárních rekurentních rovnic $k - t\acute{e}ho$ řádu s konstantními koeficienty je velice podobný postupu, který se používá k vyřešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic $k - t\acute{e}ho$ řádu s konstantními koeficienty. Nyní uveďme jednoduchý příklad rovnice, která splňuje definici **3.1.1** a kde $k = 1$. Poznamenejme, že je-li rekurentní rovnice prvního řádu, není potřeba používat charakteristickou rovnici.

3.2 Homogenní lineární rekurentní rovnice *prvního* řádu

(Příklad 3.2.1)

Nalezněme všechna řešení rovnice $f(n+1) = 2f(n)$ s počáteční podmínkou $f(1) = 1$.

Zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
f(n) &= 2f(n-1) \\
f(n-1) &= 2f(n-2) \\
\vdots \quad & \quad \quad \vdots \\
f(3) &= 2 \quad f(2) \\
f(2) &= 2 \quad f(1)
\end{aligned}$$

Počet rovností výše činí $(n-1)$. Jestliže tyto rovnosti mezi sebou vynásobíme, dostaneme vztah $f(n)f(n-1)\cdot\ldots\cdot f(3)f(2) = 2^{n-1}f(n-1)f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(2)f(1)$, po úpravě obdržíme $f(n) = 2^{n-1}f(1)$. Jelikož $f(1)=1$, platí $f(n)=2^{n-1}$. Snadno nahlédneme, že pokud bychom v rovnosti $f(n+1)=2f(n)$ číslo 2 nahradili nenulovým číslem λ, tj. řešili bychom rekurentní rovnici $f(n+1)=\lambda f(n)$ s počáteční podmínkou $f(1)$, dostali bychom řešení ve tvaru $f(n)=\lambda^{n-1}f(1)$.

V následujících dvou příkladech uveďme rovnice, které nevyhovují definici **3.1.1**. Bude se jednat o homogenní rekurentní rovnice prvního řádu s **polynomiálními** koeficienty. S takovými rovnicemi se také setkáme v počítačové sumaci. Postup řešení takových rovnic je zcela analogický postupu uvedeném v předchozím příkladě.

(Příklad 3.2.2)

Nalezněme všechna řešení rovnice $f(n+1)=(n+1)\cdot f(n)$ s počáteční podmínkou $f(1)=1$. Zřejmě platí

$$\begin{aligned}
f(n) &= n\cdot f(n-1) \\
f(n-1) &= (n-1)f(n-2) \\
f(n-2) &= (n-2)f(n-3) \\
\vdots \quad & \quad \quad \vdots \\
f(3) &= \quad 3f(2) \\
f(2) &= \quad 2f(1)
\end{aligned}$$

Rovnosti výše vynásobme, tj.

$$f(n)f(n-1)f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(3)f(2) = f(n-1)f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(2)f(1)\cdot n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2,$$

po úpravě obdržíme $f(n) = f(1)\cdot n! = n!$.

(Příklad 3.2.3)

Nalezněme všechna řešení rovnice $(n+3)f(n+1)=(n+2)f(n)$ s počáteční podmínkou $f(1)=\dfrac{1}{4}$. Z této rovnice plyne rovnost $f(n)=\dfrac{(n+1)}{(n+2)}f(n-1)$. Dále pišme

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n+1}{n+2} f(n-1) \\ f(n-1) &= \frac{n}{n+1} f(n-2) \\ f(n-2) &= \frac{n-1}{n} f(n-3) \\ &\vdots \\ f(3) &= \frac{4}{5} f(2) \\ f(2) &= \frac{3}{4} f(1) \end{aligned}$$

Vynásobením rovností výše dostáváme

$$f(n)f(n-1)\cdot\ldots\cdot f(3)f(2) = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} f(n-1)\cdot\ldots\cdot f(2)f(1),$$

což po úpravě dává $f(n) = \frac{3}{n+2} f(1) = \frac{3}{4(n+2)}$. Tím je úloha vyřešena. V počítačové sumaci, konkrétně při studiu Zeilbergerova algoritmu, se setkáme s jistým vztahem – ten (při této příležitosti) odvoďme v následujícím příkladě.

(Příklad 3.2.4)

Nalezněme všechna řešení rovnice $a_0(n)\cdot f(n) + a_1(n)\cdot f(n+1) = 0$ s předepsanou hodnotou $f(0)$, kde $a_0(n), a_1(n)$ jsou polynomy libovolných kladných stupňů. Rovnici $a_0(n)\cdot f(n) + a_1(n)\cdot f(n+1) = 0$ zapišme následovně:

$$a_0(n-1)\cdot f(n-1) + a_1(n-1)\cdot f(n) = 0.$$

Dále platí rovnosti:

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{-a_0(n-1)}{a_1(n-1)} f(n-1) \\ f(n-1) &= \frac{-a_0(n-2)}{a_1(n-2)} f(n-2) \\ &\vdots \\ f(2) &= \frac{-a_0(1)}{a_1(1)} f(1) \\ f(1) &= \frac{-a_0(0)}{a_1(0)} f(0) \end{aligned}$$

Počet rovností výše činí n. Vynásobíme-li je mezi sebou, dostaneme:

$$f(n)f(n-1)\cdot\ldots\cdot f(2)f(1)=(-1)^n\frac{a_0(n-1)}{a_1(n-1)}\cdot\frac{a_0(n-2)}{a_1(n-2)}\cdot\ldots\cdot\frac{a_0(0)}{a_1(0)}\cdot f(n-1)f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(1)f(0)$$

Úpravou rovnosti výše dostáváme řešení $f(n)=(-1)^n f(0)\prod_{j=0}^{n-1}\frac{a_0(j)}{a_1(j)}$.

3.3 Homogenní lineární rekurentní rovnice *druhého* a *třetího* řádu

Při řešení takových rovnic již budeme využívat charakteristickou rovnici $(3.1.2)$. Každý kořen charakteristické rovnice $(3.1.2)$ přispěje do obecného řešení rovnice $(3.1.1)$ právě tolika posloupnostmi, kolik činí jeho násobnost. Platí, že součet násobností kořenů charakteristické rovnice $(3.1.2)$ je roven stupni rovnice $(3.1.1)$. Má-li kořen λ_1 násobnost k_1, příslušné posloupnosti budou následující:

$$\lambda_1^n,\quad \text{pro } n\geq n_0.$$

$$n\lambda_1^n,\quad \text{pro } n\geq n_0.$$

$$n^2\lambda_1^n,\quad \text{pro } n\geq n_0.$$

$$\vdots$$

$$n^{k_1-1}\lambda_1^n,\quad \text{pro } n\geq n_0.$$

Má-li charakteristická rovnice ještě další kořeny $\lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_r$, kterým přísluší násobnosti $k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_r$, tyto kořeny přispívají analogicky jako kořen λ_1. Případy, ve kterých kořeny $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r$ jsou komplexní, se nezabývejme. Soustřeďme se na rovnice s **konstantními** koeficienty – většinu takových rovnic lze opět řešit jednoduše.

(Příklad 3.3.1)

Nalezněme všechna řešení rovnice $f(n+2)=5f(n+1)-6f(n)$ s počátečními podmínkami $f(0)=2$, $f(1)=8$. Této rovnici přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2-5\lambda+6=0$, jejíž levou stranu rozložíme v součin lineárních faktorů: $(\lambda-2)(\lambda-3)=0$. Vidíme, že charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, a proto obecné řešení rekurentní rovnice očekáváme ve tvaru $f(n)=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$ neboli $f(n)=C_1 2^n+C_2 3^n$, kde C_1, C_2 jsou reálné konstanty. Tyto konstanty nyní určíme pomocí počátečních podmínek – to nás vede řešit následující soustavu rovnic:

$$2 = C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot 3^0 \qquad (\text{pro } n = 0)$$

$$8 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 3^1 \qquad (\text{pro } n = 1)$$

Kořeny této soustavy jsou $C_1 = -2$, $C_2 = 4$. Proto obecné řešení rovnice $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$ je $f(n) = -2 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n$, po drobné úpravě máme $f(n) = -2^{n+1} + 4 \cdot 3^n$. Tím je zadaná rovnice vyřešena. Poznamenejme, že výše uvedená soustava lineárních rovnic je nehomogenní – obecně vzato pokud by taková soustava řešení neměla, neexistovalo by žádné řešení příslušné rekurentní rovnice. Závěrem dodejme, že jsme nalezli dvě posloupnosti $y_{0n} = -2 \cdot 2^n$, $y_{1n} = 4 \cdot 3^n$, takové, že obě po dosazení za $f(n)$ splňují rovnost $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$ – viz definice **3.1.2** a **3.1.1**.

(Příklad 3.3.2)

Nalezněme všechna řešení rovnice $f(n+3) = -6f(n+2) - 12f(n+1) - 8f(n)$ s počátečními podmínkami $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$. Této rovnici přísluší charakteristická rovnice $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$, kterou lze upravit na tvar $(\lambda + 2)^3 = 0$. Vidíme, že charakteristická rovnice má jeden reálný trojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$, a proto obecné řešení rekurentní rovnice očekáváme ve tvaru $f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_2^n + C_3 n^2 \lambda_3^n$, neboli $f(n) = C_1(-2)^n + C_2 n(-2)^n + C_3 n^2(-2)^n$, kde C_1 , C_2 a C_3 jsou reálné konstanty. Tyto konstanty nyní určíme pomocí počátečních podmínek – to nás vede řešit následující soustavu rovnic:

$$1 = C_1 \cdot (-2)^0 \qquad (\text{pro } n = 0)$$

$$2 = C_1 \cdot (-2)^1 + C_2 \cdot (-2)^1 + C_3 \cdot (-2)^1 \qquad (\text{pro } n = 1)$$

$$4 = C_1 \cdot (-2)^2 + C_2 \cdot 2 \cdot (-2)^2 + C_3 \cdot 2^2 \cdot (-2)^1 \qquad (\text{pro } n = 2)$$

Kořeny této soustavy jsou $C_1 = 1$, $C_2 = -4$ a $C_3 = 2$. Obecné řešení rovnice $f(n+3) = -6f(n+2) - 12f(n+1) - 8f(n)$ je tedy $f(n) = (-2)^n - 4n \cdot (-2)^n + 2n^2 \cdot (-2)^n$.

(Příklad 3.3.3)

Nalezněme všechna řešení rovnice $f(n+3) - 3f(n+2) = 24f(n+1) - 80f(n)$ s počátečními podmínkami $f(0) = -2$, $f(1) = -6$, $f(2) = 2$. Této rovnici přísluší charakteristická rovnice $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 24\lambda + 80 = 0$. Z algebry víme, že kořeny této rovnice mohou být dělitelé absolutního členu této rovnice. Přichází tedy v úvahu kořeny ± 1, ± 2, ... Zřejmě ± 1 ani ± 2 nejsou kořeny této rovnice. Otestujeme kořeny ± 3, ± 4, ... Pro $\lambda = 3$ máme $-27 - 27 - 72 + 80 \neq 0$ a pro $\lambda = -3$ je $-27 - 27 + 72 + 80 \neq 0$. Až teprve při $\lambda = 4$ zjišťujeme, že $64 - 48 - 96 + 80 = 0$, označme $\lambda_1 = 4$. Polynom $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 24\lambda + 80$ vydělíme polynomem $\lambda - 4$ a obdržíme polynom $\lambda^2 - \lambda - 20$. Je tedy $\dfrac{\lambda^3 - 3\lambda^2 - 24\lambda + 80}{\lambda - 4} = \lambda^2 - \lambda - 20$ a tudíž $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 24\lambda + 80 = (\lambda - 4)^2(\lambda + 5)$. Charakteristická rovnice $(\lambda + 5)(\lambda - 4)^2 = 0$ má jeden dvojnásobný reálný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ a jeden jednonásobný (jednoduchý) reálný kořen $\lambda_3 = -5$, a proto obecné řešení rekurentní rovnice očekáváme ve tvaru $f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3 n\lambda_3^n$ neboli $f(n) = C_1(-5)^n + C_2 4^n + C_3 n 4^n$, kde C_1, C_2 a C_3 jsou reálné konstanty. Tyto konstanty nyní určíme pomocí počátečních podmínek – to nás vede řešit následující soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
-2 &= C_1 \cdot (-5)^0 + C_2 \cdot 4^0 && (\text{pro } n = 0) \\
-6 &= C_1 \cdot (-5)^1 + C_2 \cdot 4^1 + C_3 \cdot 1 \cdot 4^1 && (\text{pro } n = 1) \\
2 &= C_1 \cdot (-5)^2 + C_2 \cdot 4^2 + C_3 \cdot 2 \cdot 4^2 && (\text{pro } n = 2)
\end{aligned}
$$

Kořeny této soustavy jsou $C_1 = \dfrac{2}{9}$, $C_2 = -\dfrac{20}{9}$ a $C_3 = 1$. Obecné řešení rovnice $f(n+3) - 3f(n+2) = 24f(n+1) - 80f(n)$ je tedy $f(n) = \dfrac{2}{9}(-5)^n - \dfrac{20}{9}4^n + n4^n$.

V počítačové sumaci se bohužel setkáváme i s lineárními rekurentními rovnicemi takovýchto řádů s **polynomiálními** koeficienty – tyto již nelze vyřešit tak snadno a tato problematika je zčásti vyřešena *Petkovšekovým* algoritmem.

4 Metoda Sestry Mary Celine Fasenmyer

4.1 Kdo byla Sister Mary Celine Fasenmyer?

obr. 2

Mary Celine Fasenmyer (1906 – 1996), viz obr. 2, byla americká matematička. V dětství navštěvovala římskokatolickou školu *St Joseph's Academy* v *Titusville*, městě severozápadní Pennsylvanie. Na této škole Mary ukázala svůj matematický talent, ale v roce 1923, kdy absolvovala studium, neměla možnost pokračovat ve studiu na žádné univerzitě. Proto začala vyučovat a v této činnosti setrvala následujících deset let. V roce 1926 byla založena škola *Catholic Mercyhurst College* v pennsylvánském městě Erie, na níž Mary Fasenmyer v témže roce začala studovat a v rámci studia vstoupila do řádu *Sister Of Mercy* v roce 1933. Tento řád měl bohatý program ve vzdělávání, také sociální a zdravotní programy pro nemocné i pro starší lidi nebo osiřelé děti. Sestra Celine byla v rámci svého studia poslána vyučovat na *St Justin's High School* v Pittsburghu. Později absolvovala na *University of Pittsburgh* – nejprve absolvovala magisterské studium, její hlavní specializace byla matematika a vedlejší specializace fyzika. V roce 1937 jí byl udělen titul. Na této škole v letech 1942 – 1946 ještě získala doktorát. Studovala pod vedením Earla Rainvilla, který jí navrhl, aby se zabývala kombinatorickými problémy, které souvisí s hypergeometrickými řadami. Při sepisování své doktorské práce sestavila algoritmus, který umožňuje nalézt rekurentní vztahy mezi těmito řadami. *Sestra Celine* sepsala pouze dvě matematické práce. První nesla název *Some generalized hypergeometric polynomials*, ta byla publikována v roce 1947. V této práci se zabývala některými speciálními typy hypergeometrických polynomů, jako jsou např. *Legendreův*, *Jacobiův*, *Batemanův*, aj. Druhá práce nesla název *On Recurrence Relations*, která byla publikována v roce 1949. Obsahuje algoritmy, které objevila během sepisování své doktorské práce a které podrobně v této práci rozebírala. Tato práce však v tehdejší době nevzbudila příliš velký zájem. Později se Sestra Mary vrátila zpět na *Mercyhurst College* do Erie, kde působila jako profesorka matematiky mnoho let. Po odchodu do důchodu žila v katolickém domově důchodců v témže městě. Matematikou se již nadále nezabývala. Význam jejího přínosu v matematice poznala veřejnost v roce 1960, kdy Earl Rainville vydal knihu *Special functions*, ve které prezentoval teorie Sestry Mary (kapitoly 14, 18). V roce 1974 si Doron Zeilberger uvědomil význam její teorie a použil její metodu k dokazování kombinatorických identit. Později Doron Zeilberger společně s Herbertem Wilfem její teorii rozvinuli – takovou dnes známe pod názvem *WZ – Theory*.

Text a obr. 2 byly čerpány z [18].

4.2 Jak pracuje algoritmus

Následující text byl čerpán z [5], [16] a [17].

Je dána suma $f(n)=\sum_k F(n,k)$. Předpokládejme, že $F(n,\ k)$ je *dvojnásobně hypergeometrická* – to znamená, že oba podíly $\dfrac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}$, $\dfrac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)}$ musí být racionálními funkcemi v n a k. Chceme najít rekurentní vyjádření pro sumu $f(n)$, ale nejprve budeme hledat rekurentní vyjádření sumandu $F(n,\ k)$ ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n)\cdot\frac{F(n+j,\ k+i)}{F(n,\ k)}=0 \qquad (4.2.1)\,.$$

Další průběh algoritmu udávají následující kroky:

1) Volíme zkušební hodnoty $I=J=1$.

2) Předpokládáme, že rekurentní vyjádření je ve tvaru $(4.2.1)$, kde $a_{i,j}(n)$ jsou neznámé polynomy, které se pokusíme stanovit.

3) Výraz $(4.2.1)$ upravíme tak, aby neobsahoval žádné faktoriály. Tím zjistíme, zda podíly $\dfrac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}$, $\dfrac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)}$ představují racionální funkce proměnných $n,\ k$.

4) Zlomky na levé straně rovnosti $(4.2.1)$ převedeme na společného jmenovatele a čitatel převedeme do takového tvaru, aby neznámé koeficienty $a_{0,0},\ a_{0,1},\ ...,\ a_{0,J}$; $a_{1,0},\ a_{1,1},\ ...,\ a_{1,J}$; $a_{I,0},\ a_{I,1},\ ...,\ a_{I,J}$ závisely pouze na proměnné n, nikoli na k.

5) Řešíme homogenní soustavu o neznámých $a_{0,0},\ a_{0,1},\ ...,\ a_{0,J}$; $a_{1,0},\ a_{1,1},\ ...,\ a_{1,J}$; $a_{I,0},\ a_{I,1},\ ...,\ a_{I,J}$. Pokud soustava má pouze triviální řešení, vracíme se do bodu 1) a aspoň jedno z čísel $I,\ J$ zvýšíme. Poté se pokusíme body 2) – 5) zopakovat. Podaří-li se nalézt netriviální řešení, dosadíme tyto koeficienty do vztahu $(4.2.1)$. Poté vypustíme volnou proměnnou k a najdeme rekurentní vyjádření pro $f(n)$.

Ještě než algoritmus vyzkoušíme na příkladech, vypočteme si (pro praktické účely) sumu uvedenou ve vztahu $(4.2.1)$ pro hodnoty $I=J=1$. Poznamenejme, že v předchozích kapitolách jsme se doposud setkali pouze se zápisem ve tvaru $\sum_{k=p}^{n} a_k$. Co tedy znamená např. symbol $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}$? Platí následující konvence:

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j} = (a_{0,1}+a_{0,2}+a_{0,3})+(a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})+(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3})$$

Podle této konvence bude platit:

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a_{i,j}(n)\frac{F(n+j,\ k+i)}{F(n,\ k)} = a_{0,0}(n)+a_{0,1}(n)\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}+a_{1,0}(n)\frac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)}+a_{1,1}(n)\frac{F(n+1,\ k+1)}{F(n,\ k)}$$

Z estetických důvodů se v literatuře často používají písmena latinské abecedy místo symbolů $a_{i,j}$. Držme se této zvyklosti a označme:

$$a_{0,0}(n) := a(n)\,,\quad a_{0,1}(n) := b(n)\,,\quad a_{1,0}(n) := c(n)\,,\quad a_{1,1}(n) := d(n)\,.$$

Spojením kroků 2) a 3) získáváme rovnost

$$a(n)+b(n)\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}+c(n)\frac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)}+d(n)\frac{F(n+1,\ k+1)}{F(n,\ k)} = 0 \qquad (4.2.2)\,,$$

kde $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ jsou (prozatím) neznámé polynomy proměnné n.

V tomto okamžiku by již nebylo vhodné hovořit obecně o krocích 4) a 5) a proto raději vyřešme nějaký příklad, v němž uplatníme postupně všechny kroky.

(Příklad 4.2.1)

Stanovme součet $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}$.

Volíme zkušební hodnoty $I = J = 1$. Tím tedy předpokládáme, že rekurentní vyjádření je ve tvaru

$$a(n)+b(n)\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}+c(n)\frac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)}+d(n)\frac{F(n+1,\ k+1)}{F(n,\ k)} = 0\ ,$$

kde $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ jsou neznámé funkce proměnné n.

Označme $F(n,k) := \binom{n+k}{k}2^{-k}$, $f(n) := \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$.

V našem případě bude platit:

$$F(n+1,\ k)=\binom{n+k+1}{k}2^{-k},\ F(n,\ k+1)=\binom{n+k+1}{k+1}2^{-k-1},\ F(n+1,\ k+1)=\binom{n+k+2}{k+1}2^{-k-1}.$$

Ověříme, zda $F(n,k)$ je dvojnásobně hypergeometrická:

$$\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}=\frac{(n+k+1)!}{(n+1)k!}\cdot 2^{-k}\cdot\frac{n!k!}{(n+k)!2^{-k}}=\frac{n+k+1}{n+1}$$

$$\frac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)}=\frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!}\cdot 2^{-k-1}\cdot\frac{n!k!}{(n+k)!2^{-k}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+k+1}{k+1}$$

$F(n,k)$ je dvojnásobně hypergeometrická, protože oba podíly jsou racionální funkce v $n,\ k$.

Abychom mohli dosadit do vztahu získaného volbou $I=J=1$, tj. do vztahu $(4.2.2)$, ještě vypočteme podíl

$$\frac{F(n+1,\ k+1)}{F(n,\ k)}=\frac{(n+k+2)!}{(n+1)!(k+1)!}\cdot 2^{-k-1}\cdot\frac{n!k!}{(n+k)!2^{-k}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+k+2)(n+k+1)}{(n+1)(k+1)}.$$

Po dosazení obdržíme:

$$a(n)+b(n)\frac{n+k+1}{n+1}+c(n)\frac{1}{2}\cdot\frac{n+k+1}{k+1}+d(n)\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+k+2)(n+k+1)}{(n+1)(k+1)}=0$$

Sčítance na levé straně rovnosti převedeme na společného jmenovatele:

$$\frac{2a(n)\cdot(n+1)(n+k)+2b(n)\cdot(n+k+1)(k+1)+c(n)\cdot(n+k+1)(n+1)+d(n)\cdot(n+k+2)(n+k+1)}{(n+1)(k+1)}=0$$

Aby zápis byl přehlednější, polynomy $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ nadále zapisujme pouze symbolicky $a,\ b,\ c,\ d$.

Budeme tedy řešit rovnost

$$a(n+1)(n+k)+2b(n+k+1)(k+1)+c(n+k+1)(n+1)+d(n+k+2)(n+k+1)=0\ .$$

Po roznásobení závorek obdržíme:

$$\begin{aligned}&2ank+2ak+2an+2a+2bnk+2bk^2+4bk+2bn+2b+cn^2+\\&+cnk+2cn+ck+c+dn^2+2dnk+3dn+dk^2+3dk+2d\ =\ 0\end{aligned}$$

Nyní je zapotřebí upravit levou stranu tak, aby $a,\ b,\ c,\ d$ závisely pouze na proměnné n, nikoli na k:

$$\begin{aligned}&k^0\left[a(2n+2)+b(2n+2)+c(n+1)^2+d(n^2+3n+2)\right]+\\&+k^1\left[a(2n+2)+b(2n+4)+c(n+1)+d(2n+3)\right]+\\&+k^2(2b+d)=0\end{aligned}$$

Neznámé $a,\ b,\ c,\ d$ nalezneme řešením následující homogenní soustavy:

$$
\begin{aligned}
(2n+2)a+(2n+2)b+(n+1)^2c+(n^2+3n+2)d &= 0\\
(2n+2)a+(2n+4)b+(n+1)c\ +(2n+3)d &= 0\\
2b \qquad + \qquad d &= 0
\end{aligned}
$$

Poznamenejme, že tato soustava má netriviální řešení, neboť počet neznámých převyšuje počet rovnic. Pro její zjednodušení využijme Gaussovu eliminační metodu maticového počtu:

$$
\begin{pmatrix} 2n+2 & 2n+2 & (n+1)^2 & n^2+3n+2\\ 2n+2 & 2n+4 & n+1 & 2n+3\\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2n+2 & 2n+2 & (n+1)^2 & n^2+3n+2\\ 0 & 2 & -n^2-n & -n^2-n+1\\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 2n+2 & 2n+2 & (n+1)^2 & n^2+3n+2\\ 0 & 0 & -n^2-n & -n^2-n\\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2n+2 & 2n+2 & (n+1)^2 & n^2+3n+2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Zjednodušená soustava bude mít tedy tvar:

$$
\begin{aligned}
(2n+2)a+(2n+2)b+(n+1)^2c+(n^2+3n+2)d &= 0\\
c \qquad\qquad +d &= 0\\
2b \qquad\qquad\qquad +d &= 0
\end{aligned}
$$

Řešením soustavy je $a=0,\ 2b=c,\ c=-d$.

Podle vztahu, který jsme získali volbou $I=J=1$, bude platit

$$\frac{c}{2}F(n+1,\ k)+cF(n,\ k+1)-cF(n+1,\ k+1)=0\,,$$

neboli

$$F(n+1,\ k)+2F(n,\ k+1)-2F(n+1,\ k+1)=0\,.$$

Protože k je tzv. volná proměnná, lze psát:

$$f(n+1)+2f(n)-2f(n+1)=0\,,$$

po úpravě máme

$$2f(n)=f(n+1)\,.$$

Stanovíme počáteční podmínku, volme $n=1$:

$$f(1)=\sum_{k=0}^{1}\binom{1+k}{k}2^{-k}=\binom{1}{0}2^0+\binom{2}{1}2^{-1}=1+1=2\,.$$

Zbývá rekurentní rovnici $2f(n)=f(n+1)$ vyřešit. Platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(n-1) \\ f(n-1) &= 2f(n-2) \\ f(n-2) &= 2f(n-3) \\ &\vdots \\ f(3) &= 2f(2) \\ f(2) &= 2f(1) \end{aligned}$$

Počet rovností je roven $(n-1)$. Vynásobením těchto rovností dostaneme

$$f(n)\, f(n-1)\, f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(3)\, f(2) = 2^{n-1} f(n-1)\, f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(2)\, f(1)\,,$$

a tudíž platí

$$f(n) = 2^{n-1} f(1) = 2^{n-1}\cdot 2 = 2^n\,.$$

(Příklad 4.2.2)

Stanovme součet $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k}$. Tento jsme hledali v příkladě **1.2.4** první kapitoly.

Opět volíme nejnižší zkušební hodnoty $I = J = 1$. Připomeňme, že tím tedy předpokládáme, že rekurentní vyjádření bude ve tvaru

$$a(n) + b(n)\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)} + c(n)\frac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)} + d(n)\frac{F(n+1,\ k+1)}{F(n,\ k)} = 0\ ,$$

kde $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ jsou neznámé polynomy proměnné n.

Označme $F(n,k) := \frac{1}{k+2}\binom{n}{k}$, $f(n) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$. V tom případě bude platit:

$$F(n+1,\ k) = \frac{(n+1)!}{(k+2)(n-k+1)!k!}\,,\ F(n,\ k+1) = \frac{n!}{(k+3)(n-k-1)!(k+1)!}\,,$$

$$F(n+1,\ k+1) = \frac{(n+1)!}{(k+3)(n-k)!(k+1)!}\,.$$

Dále vypočteme podíly

$$\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)} = \frac{n+1}{n-k+1}\,,\qquad \frac{F(n,\ k+1)}{F(n,k)} = \frac{(k+2)(n-k)}{(k+3)(k+1)}\ ,\qquad \frac{F(n+1,\ k+1)}{F(n,\ k)} = \frac{(k+2)(n+1)}{(k+3)(k+1)}\,.$$

Odtud plyne, že $F(n,\,k)$ je dvojnásobně hypergeometrická a proto algoritmus může pokračovat. Nyní dosadíme do vztahu získaného volbou $I = J = 1$, tj. do vztahu $(4.2.2)$, a přitom již použijme zjednodušenou symboliku pro neznámé polynomy $a,\ b,\ c,\ d$:

$$a + b\frac{n+1}{n-k+1} + c\frac{(k+2)(n-k)}{(k+3)(k+1)} + d\frac{(k+2)(n+1)}{(k+3)(k+1)} = 0$$

Po několika úpravách této rovnosti dostaneme:

$$-3a-3b-2d-ak-4bk+2ck+dk+3ak^2-bk^2-ck^2+dk^2+ak^3-ck^3-3an-3bn-2cn-$$
$$-4dn-4akn-4bkn+3ckn-ak^2n-bk^2n+2ck^2n+dk^2n-2cn^2-2dn^2-ckn^2-dkn^2 \qquad =0$$

Levou stranu výše uvedené rovnosti upravíme tak, aby $a,\ b,\ c,\ d$ závisely pouze na proměnné n, nikoli na k:

$$\begin{aligned}
&k^0\left[a(-3-3n)+b(-3-3n)+c(-2n-2n^2)+d(-2-4n-2n^2)\right]+\\
&+k^1\left[a(-1-4n)+b(-4-4n)+c(2+3n-n^2)+d(1-n^2)\right]+\\
&+k^2\left[a(3-n)+b(-1-n)+c(-1+2n)+d(1+n)\right]+\\
&+k^3\left[a-c\right]=0
\end{aligned}$$

Odtud již získáváme homogenní soustavu:

$$\begin{aligned}
&a(-3-3n)+b(-3-3n)+c(-2n-2n^2)+d(-2-4n-2n^2)=0\\
&a(-1-4n)+b(-4-4n)+c(2+3n-n^2)+d(1-n^2)=0\\
&a(3-n)+b(-1-n)+c(-1+2n)+d(1+n)=0\\
&a-c=0
\end{aligned}$$

Nyní je zapotřebí ověřit, zda tato soustava má kromě triviálního řešení navíc i řešení netriviální. Jelikož její vyřešení by mohlo být příliš pracné, o řešení požádejme počítačový program *Wolfram Mathematica* 9 ®:

```
In[1]:= Solve[{a (-3 - 3 n) + b (-3 - 3 n) + c (-2 n - 2 n^2) + d (-2 - 4 n - 2 n^2) = 0,
          a (-1 - 4 n) + b (-4 - 4 n) + c (2 + 3 n - n^2) + d (1 - n^2) = 0,
          a (3 - n) + b (-1 - n) + c (-1 + 2 n) + d (1 + n) = 0, a - c = 0}, {a, b, c, d}]

Out[1]= {{a → 0, b → 0, c → 0, d → 0}}
```

Vidíme, že soustava o neznámých $a,\ b,\ c,\ d$ má pouze triviální řešení. Proto bude potřeba aspoň jedno z čísel $I,\ J$ zvýšit a celý postup opakovat. Volme $I^*=1,\ J^*=2$. Tím tedy předpokládáme, že rekurentní vyjádření sumandu $F(n,\ k)$ budeme hledat ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{2}a_{ij}(n)\cdot\frac{F(n+j,\ k+i)}{F(n,\ k)}=0,$$

neboli:

$$a_{0,0}(n)+a_{0,1}(n)\cdot\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}+a_{0,2}(n)\cdot\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}+a_{1,0}(n)\cdot\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)}+$$
$$+a_{1,1}(n)\cdot\frac{F(n+2,k)}{F(n,k)}+a_{1,2}(n)\cdot\frac{F(n+2,k+1)}{F(n,k)}=0$$

Vidíme, že počet neznámých vzrostl – následující početní operace bychom bez užití počítače prováděli příliš dlouho, proto příklad dále řešme v prostředí *Wolfram Mathematica* 9 ®.

Využijme příkazů použitých v [16]. Nejprve přeznačme neznámé (abychom se lépe orientovali v symbolech, které budou následovat):

$$a_{0,0}(n) := a,\ a_{0,1}(n) := b,\ a_{0,2}(n) := c,\ a_{1,0}(n) := d,\ a_{1,1}(n) := e,\ a_{1,2}(n) := g$$

Definujme funkci $F(n,\ k)$:

In[1]:= $\texttt{F[n\_, k\_] :=} \dfrac{1}{k+2} \texttt{*Binomial[n, k]}$

Vypočtěme příslušné podíly (volba $I^* = 1,\ J^* = 2$) a výsledek rovnou upravme:

In[2]:= $\texttt{FunctionExpand}\left[a + b * \dfrac{\texttt{F[n, k+1]}}{\texttt{F[n, k]}} + c * \dfrac{\texttt{F[n+1, k]}}{\texttt{F[n, k]}} + d * \dfrac{\texttt{F[n+1, k+1]}}{\texttt{F[n, k]}} + e * \dfrac{\texttt{F[n+2, k]}}{\texttt{F[n, k]}} + g * \dfrac{\texttt{F[n+2, k+1]}}{\texttt{F[n, k]}}\right]$

Out[2]= $$a + \frac{d\,(2+k)\,(1+n)}{(1+k)\,(3+k)} + \frac{e\,(1+n)\,(2+n)}{(-2+k-n)\,(-1+k-n)} + \frac{b\,(2+k)\,(-k+n)}{(1+k)\,(3+k)} + \frac{c\,(1+n)}{1-k+n} + \frac{g\,(2+k)\,(1+n)\,(2+n)}{(1+k)\,(3+k)\,(1-k+n)}$$

Výraz převeďme na společného jmenovatele a zobrazme čitatel vzniklého zlomku:

In[3]:= `Numerator[Together[%]]`

Out[3]= $$6a + 6c + 4d + 6e + 8g - ak - 4bk + 5ck - 4dk + 8ek - 7ak^2 + 4bk^2 - 2ck^2 - dk^2 + 2ek^2 - 2gk^2 + ak^3 + bk^3 - ck^3 + dk^3 + ak^4 - bk^4 + 9an + 4bn + 9cn + 10dn + 9en + 16gn + 6akn - 10bkn + 9ckn - 5dkn + 12ekn + 2gkn - 5ak^2n - ck^2n - 3dk^2n + 3ek^2n - 3gk^2n - 2ak^3n + 3bk^3n - ck^3n + dk^3n + 3an^2 + 6bn^2 + 3cn^2 + 8dn^2 + 3en^2 + 10gn^2 + 4akn^2 - 3bkn^2 + 4ckn^2 + 4ekn^2 + 3gkn^2 + ak^2n^2 - 3bk^2n^2 + ck^2n^2 - 2dk^2n^2 + ek^2n^2 - gk^2n^2 + 2bn^3 + 2dn^3 + 2gn^3 + bkn^3 + dkn^3 + gkn^3$$

Utvoříme si seznam, jehož po sobě jdoucí prvky budou představovat po sobě jdoucí násobky $k^0,\ k^1,\ k^2,\ k^3$:

In[4]:= `CoefficientList[%, k]`

Out[4]= $$\{6a + 6c + 4d + 6e + 8g + 9an + 4bn + 9cn + 10dn + 9en + 16gn + 3an^2 + 6bn^2 + 3cn^2 + 8dn^2 + 3en^2 + 10gn^2 + 2bn^3 + 2dn^3 + 2gn^3,\ -a - 4b + 5c - 4d + 8e + 6an - 10bn + 9cn - 5dn + 12en + 2gn + 4an^2 - 3bn^2 + 4cn^2 + 4en^2 + 3gn^2 + bn^3 + dn^3 + gn^3,\ -7a + 4b - 2c - d + 2e - 2g - 5an - cn - 3dn + 3en - 3gn + an^2 - 3bn^2 + cn^2 - 2dn^2 + en^2 - gn^2,\ a + b - c + d - 2an + 3bn - cn + dn,\ a - b\}$$

Všechny tyto prvky položme rovny nule (tím definujeme příslušnou soustavu rovnic):

```
In[5]:= Map[Equal[#, 0] &, %]

Out[5]= {6 a + 6 c + 4 d + 6 e + 8 g + 9 a n + 4 b n + 9 c n + 10 d n + 9 e n + 16 g n + 3 a n^2 +
          6 b n^2 + 3 c n^2 + 8 d n^2 + 3 e n^2 + 10 g n^2 + 2 b n^3 + 2 d n^3 + 2 g n^3 == 0,
        -a - 4 b + 5 c - 4 d + 8 e + 6 a n - 10 b n + 9 c n - 5 d n + 12 e n + 2 g n +
          4 a n^2 - 3 b n^2 + 4 c n^2 + 4 e n^2 + 3 g n^2 + b n^3 + d n^3 + g n^3 == 0,
        -7 a + 4 b - 2 c - d + 2 e - 2 g - 5 a n - c n - 3 d n + 3 e n -
          3 g n + a n^2 - 3 b n^2 + c n^2 - 2 d n^2 + e n^2 - g n^2 == 0,
        a + b - c + d - 2 a n + 3 b n - c n + d n == 0, a - b == 0}
```

Soustavu rovnic vyřešíme:

```
In[6]:= Solve[%, {a, b, c, d, e, g}]
```

$$\text{Out[6]= } \left\{\left\{b \to a,\ c \to -\frac{a\,(3+n)}{1+n},\ d \to -\frac{a\,(5+2\,n)}{1+n},\ e \to 0,\ g \to -\frac{a\,(-4-n)}{1+n}\right\}\right\}$$

Vidíme, že platí:

$$a = b,\ b = b,\ c = -\frac{a(3+n)}{1+n},\ d = -\frac{a(5+2n)}{1+n},\ e = 0,\ g = -\frac{a(-4-n)}{1+n}$$

Podle vztahu, který jsme získali volbou $I^* = 1,\ J^* = 2$, bude platit

$$a + \frac{aF(n,\ k+1)}{F(n,\ k)} - \frac{a(n+3)F(n+1,\ k)}{(n+1)F(n,\ k)} - \frac{a(2n+5)F(n+1,\ k+1)}{(n+1)F(n,\ k)} + \frac{a(n+4)F(n+2,\ k+1)}{(n+1)F(n,\ k)} = 0,$$

po úpravě

$$(n+1)F(n,\ k) + (n+1)F(n,\ k+1) - (n+3)F(n+1,\ k) - (2n+5)F(n+1,\ k+1) + \\ +(n+4)F(n+2,\ k+1) = 0.$$

Vypuštěním volné proměnné k dostáváme

$$(n+1)f(n) + (n+1)f(n) - (n+3)f(n+1) - (2n+5)f(n+1) + (n+4)f(n+2) = 0.$$

Určíme počáteční podmínky:

$$f(0) = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k+2}\binom{0}{k} = \frac{1}{2}\binom{0}{0} = \frac{1}{2}, \qquad f(1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k+2}\binom{1}{k} = \frac{1}{2}\binom{1}{0} + \frac{1}{3}\binom{1}{1} = \frac{5}{6}.$$

Rekurentní rovnice je druhého řádu, homogenní, ale bohužel s polynomiálními koeficienty.

Požádejme o řešení opět program *Wolfram Mathematica* 9 ®.

```
In[7]:= RSolve[
          {(n + 1) f[n] + (n + 1) f[n] - (n + 3) f[n + 1] - (2 n + 5) f[n + 1] +
             (n + 4) f[n + 2] == 0, f[0] == 1/2, f[1] == 5/6}, f[n], n]
```

$$\text{Out[7]= } \left\{\left\{f[n] \to \frac{1 + 2^{1+n}\,n}{2 + 3\,n + n^2}\right\}\right\}$$

Platí tedy $f(n) = \dfrac{1+2^{n+1}n}{n^2+3n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k}$.

Tento příklad by nás mohl vést k položení otázky: Jak najít taková I, J, pro která má příslušná soustava rovnic netriviální řešení, což zaručí existenci netriviálního rekurentního vyjádření pro $F(n,\ k)$? Odpověď se pokusme nalézt v [5] na str. 64 a v [17].

4.3 Teoretický základ algoritmu

(Definice 4.3.1) (převzata z [17])

Říkáme, že $F(n,\ k)$ je *řádně hypergeometrická*, jestliže může být zapsána ve tvaru

$$F(n,\ k) = P(n,\ k) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M_2} (a_i n + b_i k + c_i)!}{\prod_{i=1}^{M_1} (u_i n + v_i k + w_i)!} \cdot x^k \qquad (4.3.1),$$

kde

1) x je neurčité,
2) P je polynom,
3) $a_i,\ b_i,\ u_i,\ v_i$ jsou specifická celá čísla, tj. taková čísla, která nezávisí na n nebo k nebo na jiných parametrech,
4) M_1 a M_2 jsou specifická nezáporná celá čísla.

□

(Věta 4.3.1) (Sister Celine Fasenmyer, 1945) (převzata z [17])

Jestliže $F(n,\ k)$ je *řádně hypergeometrická*, potom existují kladná celá čísla I, J a polynomy $a_{i,j}(n)$ pro $i = 0,\ \dots ,I$; $j = 0,\ \dots ,J$, (kde I nebo J je nenulové a aspoň jeden z polynomů $a_{i,j}(n)$ je nenulový) tak, že

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n) F(n-j,\ k-i) = 0 \qquad (4.3.2),$$

kde

$$J = \sum_s |b_s| + \sum_s |v_s| \quad ; \quad I = 1 + st(P) + J \left\{ \left[\sum_s |a_s| + \sum_s |u_s| \right] - 1 \right\} \qquad (4.3.3).$$

□

Nejprve poznamenejme, že v příkladech **4.2.1**, **4.2.2** jsme používali vztah

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n)\frac{F(n+j,\ k+i)}{F(n,\ k)}=0\ ,$$

přičemž věta **4.3.1** nám říká, abychom použili vztah (4.3.2). Nedopustili jsme se žádné chyby, protože (4.3.2) je popis rekurentního vyjádření. Kdybychom používali vztah (4.3.2), v závěrech příkladů bychom dospěli ke stejným výsledkům. Nyní se však zabývejme vztahem (4.3.3). Ten nám garantuje, že pro jistá $I,\ J$ existuje soustava, která má netriviální řešení. Užití tohoto vztahu však nemusí být vždy praktické, protože nalezená čísla $I,\ J$ mohou být dost vysoká, viz následující příklad.

(Příklad 4.3.1)

Pro $F(n,\ k)=\binom{n}{k}^2$ podle vztahů (4.3.3) nalezněme $I,\ J$ taková, aby příslušná soustava měla netriviální řešení. Pišme $F(n,\ k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}$. A dále podle (4.3.1) zjišťujeme, že

$$F(n,\ k)=\frac{(a_1n+b_1k+c_1)!}{(u_1n+v_1k+w_1)!(u_2n+v_2k+w_2)!}\cdot\frac{(a_2n+b_2k+c_2)!}{(u_3n+v_3k+w_3)!(u_4n+v_4k+w_4)!},$$

kde

$$a_1=1,\ b_1=0,\ c_1=0\ ;\ a_2=1,\ b_2=0,\ c_2=0\ ,$$

$$u_1=1,\ v_1=-1,\ w_1=0\ ;u_2=0,\ v_2=1,\ w_2=0\ ,$$

$$u_3=1,\ v_3=-1,\ w_3=0\ ;\ u_4=0,\ v_4=1,\ w_4=0\ .$$

Dále je $P(n,\ k)=1,\ x=1$. A využitím vztahu (4.3.3) dostáváme:

$$J=\sum_{s=1}^{2}|b_s|+\sum_{s=1}^{4}|v_s|=0+4=4\ ,$$

$$I=1+st(1)+4\left\{\left[\sum_{s=1}^{2}|a_s|+\sum_{s=1}^{4}|u_s|\right]-1\right\}=1+0+4(2+2-1)=13\ .$$

Nalezená čísla $I=13,\ J=4$ jsou příliš vysoká. Kdybychom hledali rekurentní vyjádření sumy $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ pro hodnoty $I=13,\ J=4$ programem *Wolfram Mathematica*® a postupem užitým v příkladech **4.2.1** a **4.2.2**, možná, že bychom čekali na výsledek několik sekund či minut (samozřejmě záleží na hardwarovém vybavení stroje). Museli bychom totiž pracovat se sedmdesáti neznámými a téměř (popř. právě) se sedmdesáti rovnicemi. Zůstává otázkou, zda existuje rekurentní vyjádření pro $F(n, k)$ při nějakých nižších I, J . Lze samozřejmě postupovat podle kroků 1) až 5) uvedených na začátku této kapitoly, tj. začít zkušebními hodnotami $I = J = 1$. Pro tyto hodnoty bychom zjistili, že algoritmus je neúspěšný. Zvýšíme tedy aspoň jedno z čísel I, J , to znamená, že získáváme dvě možnosti, tj. otestovat algoritmus pro $I = 1,\ J = 2$ a pro $I = 2,\ J = 1$. V obou takových případech by algoritmus byl opět neúspěšný. Až teprve při hodnotách $I = J = 2$ bychom dosáhli úspěchu. V takovém případě jistá soustava má netriviální řešení. Stejná situace by nastala při hledání součtu $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}$. Teprve při hodnotách $I = J = 2$ bude algoritmus úspěšný.

5 Zeilbergerův algoritmus

5.1 Kdo je Doron Zeilberger?

obr. 3

Doron Zeilberger (viz obr. 3), nar. 1950 v Haifě, je izraelský matematik. Je známý díky svým zásluhám v kombinatorice. V současnosti je ve funkci *Board of Governors Professor* na *Rutgerské Univerzitě* v New Jersey. V roce 1976 získal doktorát na *Weizmann Institute of Science* pod vedením Harryho Dyma. D. Zeilberger učinil mnoho důležitých přínosů do oblasti kombinatoriky, zejména *hypergeometrickou sumací* a *q-řadami*. V roce 1998 společně s Herbertem Wilfem obdržel ocenění *Leroy P. Steele Prize* od společnosti *American Mathematical Society* za vypracování *WZ-Theory*, která se stala revolucí na poli *hypergeometrických řad*. V roce 2004 obdržel Eulerovu medaili – od té doby je označován jako *„mistr v používání počítačů a algoritmů k tomu, aby matematika byla rychlá a efektivní"*. V roce 2011 společně s Manuelem Kauersem a Christophem Koutschanem dokázal větu, která je v kombinatorice označována jako *q-TSPP conjecture*. Ta byla uvedena již v roce 1983 Georgem Andrewsem a Davidem P. Robbinsem. Dále je nutné poznamenat, že v roce 1997 společně s Herbertem Wilfem a Marko Petkovšekem napsal knihu *A=B*. Autoři se v ní zabývají hypergeometrickou sumací, v knize je představeno pět základních algoritmů (*Metoda Sestry Celine*, *Gosperův algoritmus*, *Zeilbergerův algoritmus*, *WZ – teorie*, *Petkovšekův algoritmus*). *Zeilbergerovým algoritmem*, který autor nazval *The Method Of Creative Telescoping*, se budeme zabývat v této kapitole. Tato metoda byla autorem představena v roce 1991. D. Zeilberger je také známý pro své názory (*opinions*), lépe řečeno články, ve kterých píše o svých postřezích. Těch je v současnosti sto třicet tři. Mezi nejznámější patří například:

„Lidé, kteří věří, že aplikovaná matematika je špatná, jsou špatní matematikové."

„Hádejte, co! Programování je ještě zábavnější než dokazování, a co je ještě důležitější, že dává mnoho přehledu a porozumění."

„Pořád, jako za starých časů, tabule mluví."

Tento text byl čerpán z [20] a [21], obrázek převzat z [22].

5.2 Zeilbergerův algoritmus (Creative Telescoping) - úvod

Následující text je čerpán z [5], [19] a [7].

(Věta 5.2.1) Zeilbergerův teorém (převzat z [5])

Nechť $F(n, k)$ je *řádně hypergeometrická*. Potom F zaručuje existenci netriviálního rekurentního vyjádření, které je ve tvaru

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n)F(n+j,\ k) = G(n,\ k+1) - G(n,\ k) \qquad (5.2.1),$$

kde $\dfrac{G(n,\ k)}{F(n,\ k)}$ je racionální funkce v $n,\ k$. □

Důkaz je uveden v [5] na str. 105. Nyní je vhodné uvést následující poznámku. Dejme tomu, že algoritmus při hledání hodnoty sumy $\sum_k F(n,\ k)$ je úspěšný, a tedy nalézáme rekurentní vyjádření pro $F(n,\ k)$ ve tvaru $(5.2.1)$. Jestliže obě strany rovnosti (5.2.1) sečteme přes všechna celá k, pro levou stranu bude platit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J} a_j(n)F(n+j,\ k) = \sum_{j=0}^{J} a_j(n)\,f(n+j) \qquad (5.2.2),$$

pro pravou stranu potom

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[G(n,\ k+1) - G(n,\ k)\right] = \\ &= ... + G(n,-1) - G(n,-2) + G(n,0) - G(n,-1) + \\ &\quad + G(n,1) - G(n,0) + G(n,2) - G(n,1) + ... = 0 \end{aligned} \qquad (5.2.3),$$

a proto

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n)\,f(n+j) = 0 \qquad (5.2.4).$$

Z tohoto důvodu je *Zeilbergerův algoritmus* také označován metodou *Creative Telescoping*. Dále ještě rozeberme případy pro jistá J.

1) Jestliže jsme nalezli rekurentní vyjádření pro $F(n,\ k)$ již při $J=1$, získáváme rekurentní vyjádření pro $f(n)$, které je ve tvaru

$$a_0(n)\,f(n) + a_1(n)\,f(n+1) = 0 \qquad (5.2.5),$$

kde $a_0(n)$, $a_1(n)$ jsou polynomy. Potom bychom mohli hledaný součet nalézt vyřešením rovnice $(5.2.5)$, což většinou nebývá příliš složité, anebo využít vztahu

$$f(n) = f(0)\prod_{j=0}^{n-1} \frac{-a_0(j)}{a_1(j)}, \text{ pro } f(0) \neq 0 \qquad (5.2.6).$$

2) Jestliže jsme nalezli rekurentní vyjádření pro $F(n, k)$ při $J > 1$ a zároveň $a_0, a_1, ..., a_J$ jsou konstanty, potom rekurentní rovnici pro $f(n)$ vyřešíme užitím příslušné charakteristické rovnice.
3) Jestliže jsme nalezli rekurentní vyjádření pro $F(n, k)$ při $J > 1$ a zároveň $a_0(n), a_1(n), ..., a_J(n)$ jsou polynomy, lze v této situaci použít *Petkovšekův algoritmus* k nalezení těchto polynomů.

5.3 Jak pracuje algoritmus

Kdybychom měli průběh algoritmu popsat pouze několika slovy, řekli bychom, že se jedná o aplikaci metody *Sister Celine Fasenmyer* na *Gosperův algoritmus*. Nyní však podejme podrobnější popis.

Označme
$$t_k := \sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j, k) \tag{5.3.1}$$,

definujme podíl
$$\frac{t_{k+1}}{t_k} := \frac{\sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j, k+1)}{\sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j, k)} \tag{5.3.2}$$.

Vztah (5.3.2) zapišme následujícím způsobem:
$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{\dfrac{\sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j, k+1)}{F(n, k+1)}}{\dfrac{\sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j, k)}{F(n, k)}} \cdot \frac{F(n, k+1)}{F(n, k)} \tag{5.3.3}$$.

Poznamenejme, že funkce $\dfrac{F(n, k+1)}{F(n, k)}$ je racionální v n, k - to znamená, že ji můžeme přepsat do tvaru
$$\frac{F(n, k+1)}{F(n, k)} = \frac{r_1(n, k)}{r_2(n, k)} \tag{5.3.4}$$,

kde $r_1(n, k)$, $r_2(n, k)$ jsou polynomy.

Dále také poznamenejme, že funkce $\dfrac{F(n, k)}{F(n-1, k)}$ je také racionální v n, k - to znamená, že ji můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{F(n,\ k)}{F(n-1,\ k)}=\frac{s_1(n,\ k)}{s_2(n,\ k)} \qquad (5.3.5),$$

kde $s_1(n,\ k)$, $s_2(n,\ k)$ jsou polynomy.

Nyní bychom podíl $\frac{F(n+j,\ k)}{F(n,\ k)}$ mohli zapsat následovně:

$$\frac{F(n+j,\ k)}{F(n,\ k)}= \qquad (5.3.6)$$

$$=\frac{F(n+j,\ k)}{F(n+j-1,\ k)}\cdot\frac{F(n+j-1,\ k)}{F(n+j-2,\ k)}\cdot\ldots\cdot\frac{F(n+2,\ k)}{F(n+1,\ k)}\cdot\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}=\prod_{i=0}^{j-1}\frac{F(n+j-i,\ k)}{F(n+j-1,\ k)}$$

Dále podíl $\frac{F(n+j,\ k)}{F(n,\ k)}$ přepišme pomocí polynomů $s_1(n,\ k)$, $s_2(n,\ k)$:

$$\frac{F(n+j,\ k)}{F(n,\ k)}= \qquad (5.3.7)$$

$$=\frac{s_1(n+j,\ k)}{s_2(n+j,\ k)}\cdot\frac{s_1(n+j-1,\ k)}{s_2(n+j-1,\ k)}\cdot\ldots\cdot\frac{s_1(n+2,\ k)}{s_2(n+2,\ k)}\cdot\frac{s_1(n+1,\ k)}{s_2(n+1,\ k)}=\prod_{i=0}^{j-1}\frac{s_1(n+j-i,\ k)}{s_2(n+j-i,\ k)}$$

Nyní můžeme podíl $\frac{t_{k+1}}{t_k}$ v podobě $(5.3.3)$ také zapsat pomocí polynomů $s_1(n,\ k)$, $s_2(n,\ k)$:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{\sum_{j=0}^{J}a_j(n)\prod_{i=0}^{j-1}\frac{s_1(n+j-i,\ k+1)}{s_2(n+j-i,\ k+1)}}{\sum_{j=0}^{J}a_j(n)\prod_{i=0}^{j-1}\frac{s_1(n+j-i,\ k)}{s_2(n+j-i,\ k)}}\cdot\frac{r_1(n,\ k)}{r_2(n,\ k)} \qquad (5.3.8).$$

Vztah $(5.3.8)$ lze ještě zapsat následovně:

$$\frac{\sum_{j=0}^{J}a_j(n)\prod_{i=0}^{j-1}s_1(n+j-i,\ k+1)\prod_{i=j}^{J}s_2(n+j-i,\ k+1)}{\sum_{j=0}^{J}a_j(n)\prod_{i=0}^{j-1}s_1(n+j-i,\ k)\prod_{i=0}^{J}s_2(n+j-i,\ k)}\cdot\frac{r_1(n,\ k)\prod_{i=0}^{J}s_2(n+j-i,\ k)}{r_2(n,\ k)\prod_{i=0}^{J}s_2(n+j-i,\ k+1)} \qquad (5.3.9).$$

Označme

$$\frac{P_0(k+1)}{P_0(k)}:=\frac{\sum_{j=0}^{J}a_j(n)\prod_{i=0}^{j-1}s_1(n+j-i,\ k+1)\prod_{i=j}^{J}s_2(n+j-i,\ k+1)}{\sum_{j=0}^{J}a_j(n)\prod_{i=0}^{j-1}s_1(n+j-i,\ k)\prod_{i=0}^{J}s_2(n+j-i,\ k)},$$

$$\frac{r(k)}{s(k)} = \frac{r_1(n,\ k)\prod_{i=0}^{J} s_2(n+j-i,\ k)}{r_2(n,\ k)\prod_{i=0}^{J} s_2(n+j-i,\ k+1)}.$$

A nyní již máme zjednodušený výraz pro podíl $\frac{t_{k+1}}{t_k}$:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{r(k)}{s(k)} \cdot \frac{P_0(k+1)}{P_0(k)} \qquad (5.3.10).$$

Důležité je poznamenat, že koeficienty $a_0,\ ...,\ a_1,\ ...,\ a_J$ se **objeví pouze** v polynomech $P_0(k)$ a $P_0(k+1)$. Podle věty **5.3.1** (**Theorem 5.3.1**) uvedené v [5] na str. 82, neboli podle věty **2.2.2** uvedené v druhé kapitole této práce, lze podíl $\frac{r(k)}{s(k)}$ zapsat ve tvaru

$$\frac{r(k)}{s(k)} = \frac{P_2(k)}{P_3(k)} \cdot \frac{P_1(k+1)}{P_1(k)} \qquad (5.3.11),$$

kde $D\big(P_2(k),\ P_3(k+h)\big) = 1,\ \forall h \in \mathbb{N}_0$.

Dále vztah $(5.3.10)$ můžeme zapsat pomocí vztahu $(5.3.11)$ ve tvaru

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{P_2(k)}{P_3(k)} \cdot \frac{P_0(k+1)P_1(k+1)}{P_0(k)P_1(k)} \qquad (5.3.12),$$

kde $D\big(P_2(k),\ P_3(k+h)\big) = 1,\ \forall h \in \mathbb{N}_0$.

Jestliže označíme

$P(k) := P_0(k)P_1(k)$, $P(k+1) := P_0(k+1)P_1(k+1)$, následně obdržíme

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{P_2(k)}{P_3(k)} \cdot \frac{P(k+1)}{P(k)} \qquad (5.3.13),$$

kde opět platí, že $D\big(P_2(k),\ P_3(k+h)\big) = 1,\ \forall h \in \mathbb{N}_0$.

Pomocí příslušného rezultantu následně můžeme zjistit, zda existuje $h \in \mathbb{N}_0$, které narušuje podmínku $D\big(P_2(k),\ P_3(k+h)\big) = 1$. Pokud takové h existuje, provedeme následující. Podíl $\frac{t_{k+1}}{t_k}$ přepíšeme do tvaru $Z\frac{f(k)}{g(k)}$, kde $f(k)$ a $g(k)$ jsou nesoudělné a monické polynomy a Z je konstanta. Dále nalezneme nulové body polynomu $f(k)$. Dejme tomu, že nalézáme nulové body k_1, k_2, …, $k_r \in \mathbb{R}$, kde $r \in \mathbb{N}$. Definujeme polynom $R(h)$ jako součin polynomů $g(k_1+h)\cdot g(k_2+h)\cdot ...\cdot g(k_r+h)$. Nyní hledáme nezáporné celé nulové body polynomu $R(h)$. Nechť $h_{\min}$ je nejmenší z takových nalezených nulových bodů. Dále ještě definujeme polynom $u(k) := D\big(f(k),\ g(k+h_{\min})\big)$ a nyní definujeme polynomy $P_2(k)$, $P_3(k)$ a $P(k)$:

$$P_2(k) := Z\frac{f(k)}{u(k)},\ P_3(k) := \frac{g(k)}{u(k-h_{\min})},\ P(k) := u(k-h_{\min})\cdot u(k-h_{\min}-1)\cdot\ldots\cdot u(k-1).$$

Poté bychom opět pomocí příslušného rezultantu ověřili, zda takto předefinované polynomy budeme moci použít k dalším výpočtům. Pokud by stále nebyla splněna podmínka $D\big(P_2(k),\ P_3(k+h)\big) = 1,\ \forall h \in \mathbb{N}_0$, proces předefinování (výše) bychom zopakovali. Dále určíme stupeň neznámého polynomu $b(k)$.

Případ (1) :

Je-li $st\big(P_2(k)\big) \neq st\big(P_3(k)\big)$ nebo $lc\big(P_2(k)\big) \neq lc\big(P_3(k)\big)$, potom

$$st\big(b(k)\big) = st\big(P(k)\big) - \max\Big[st\big(P_2(k)\big),\ st\big(P_3(k)\big)\Big],$$

kde $lc\big(P_2(k)\big)$ je vedoucí koeficient polynomu $P_2(k)$.

Případ (2) :

Je-li $st\big(P_2(k)\big) = st\big(P_3(k)\big)$ a zároveň $lc\big(P_2(k)\big) = lc\big(P_3(k)\big)$, potom

dostáváme další dva případy:

$$\text{(2A)}\qquad st\big(b(k)\big) = st\big(P(k)\big) - st\big(P_2(k)\big) + 1$$

nebo

$$\text{(2B)}\qquad st\big(b(k)\big) = slc\big(P_3(k-1)\big) - \frac{slc\big(P_2(k)\big)}{s},$$

kde $slc\big(P_3(k-1)\big)$ je druhý vedoucí koeficient polynomu $slc\big(P_3(k-1)\big)$ a kde $s = lc\big(P_2(k)\big)$.

Dále se pokusíme řešit Gosperovo polynomiální rekurentní vyjádření

$$P_2(k)\cdot b(k+1) - P_3(k-1)\cdot b(k) = P(k) \qquad (5.3.14),$$

kde $b(k)$ je neznámý polynom. Pokud příslušná soustava rovnic nemá řešení, celý algoritmus opakujeme se zvýšeným číslem J.

Při procesu hledání polynomu $b(k)$ současně nalézáme polynomy $a_0(n),\ a_1(n),\ \ldots,\ a_J(n)$. Závěrem je ještě možné nalézt funkci $G(n,\ k)$, pro kterou platí

$$G(n,\ k) = \frac{P_3(k-1)}{P(k)}b(k)t_k \qquad (5.3.15).$$

5. 4 Příklady

(Příklad 5.4.1)

Stanovme součet $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}$.

Označme $f(n):=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}$, $F(n,\ k):=\binom{2n+1}{2k+1}$ a zvolme $J=1$.

Nejprve vypočteme podíl $\frac{t_{k+1}}{t_k}$.

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{\sum_{j=0}^{1}a_jF(n+j,\ k+1)}{\sum_{j=0}^{1}a_jF(n+j,\ k)}=\frac{a_0\binom{2n+1}{2k+3}+a_1\binom{2n+3}{2k+3}}{a_0\binom{2n+1}{2k+1}+a_1\binom{2n+3}{2k+1}}=\frac{a_0\frac{\binom{2n+1}{2k+3}}{\binom{2n+1}{2k+1}}+a_1\frac{\binom{2n+3}{2k+3}}{\binom{2n+1}{2k+1}}}{a_0+a_1\frac{\binom{2n+3}{2k+1}}{\binom{2n+1}{2k+1}}}=$$

$$=\frac{a_0\frac{(2n-2k-1)(n-k)}{(k+1)(2k+3)}+a_1\frac{(n+1)(2n+3)}{(k+1)(2k+3)}}{a_0+a_1\frac{(n+1)(2n+3)}{(2n-2k+1)(n-k+1)}}=$$

$$=\frac{a_0(2n-2k-1)(n-k)+a_1(n+1)(2n+3)}{a_0(2n-2k+1)(n-k+1)+a_1(n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(2n-2k+1)(n-k+1)}{(k+1)(2k+3)},$$

kde

$$\begin{aligned}
s(k)&=\quad (k+1)(2k+3)\\
r(k)&=\quad (2n-2k+1)(n-k+1)\\
P_0(k)&=a_0(2n-2k+1)(n-k+1)+a_1(n+1)(2n+3)\\
P_0(k+1)&=a_0(2n-2k-1)(n-k)+a_1(n+1)(2n+3)
\end{aligned}$$

Podíl $\frac{r(k)}{s(k)}$ lze podle vztahu (5.3.11) zapsat následovně:

$\frac{r(k)}{s(k)}=\frac{P_2(k)}{P_3(k)}\cdot\frac{P_1(k+1)}{P_1(k)}$. V našem případě označme $P_1(k):=1$ a tudíž $P_1(k+1)=1$, a tedy

$$\frac{r(k)}{s(k)}=\frac{(2n-2k+1)(n-k+1)}{(k+1)(2k+3)}\cdot\frac{1}{1}.$$

Dále podle $(5.3.12)$ označme $P_1(k) := 1$ a podle $(5.3.13)$ označme $P(k) := P_0(k)P_1(k)$ a ihned dostáváme:

$$\begin{aligned} P(k) \quad &= \left[a_0(2n-2k+1)(n-k+1) + a_1(n+1)(2n+3)\right]\cdot 1 \\ P(k+1) &= \left[a_0(2n-2k-1)(n-k) + a_1(n+1)(2n+3)\right]\cdot 1 \end{aligned}$$

Měli bychom ověřit, zda $D\left(P_2(k), P_3(k+h)\right) = 1,\ \forall h \in \mathbb{N}_0$, kde $P_2(k) = r(k)$, $P_3(k+h) = s(k+h)$. Bohužel vyčíslením rezultantu

$$res_k\left(2k^2 + (-4n-3)k + 2n^2 + 3n + 1,\ 2k^2 + (4h+5)k + 2h^2 + 5h + 3\right)$$

bychom zjistili, že tento rezultant představuje polynom čtvrtého stupně v proměnné h. Užití Sylvesterova kritéria by nás vedlo k tomu, abychom řešili polynomiální rovnici čtvrtého stupně – proto raději tuto operaci přenechme počítači:

```
In[1]:= Solve[
          Resultant[2 k^2 + (-4 n - 3) k + 2 n^2 + 3 n + 1,
            2 k^2 + (4 h + 5) k + 2 h^2 + 5 h + 3, k] = 0, h]
```

$$\text{Out[1]=}\ \left\{\left\{h \to \frac{1}{2}(-5-2n)\right\}, \left\{h \to \frac{1}{2}(-3-2n)\right\}, \{h \to -2-n\}, \{h \to -2-n\}\right\}$$

Neexistuje tedy takové $h \in \mathbb{N}_0$, které by narušovalo podmínku $D\left(P_2(k), P_3(k+h)\right) = 1$. Nyní bychom chtěli vyšetřit rovnost $(5.3.14)$, tj. $P_2(k)b(k+1) - P_3(k-1)b(k) = P(k)$, kde $b(k)$ je neznámý polynom. Rovnost $(5.3.14)$ bude mít v našem případě podobu

$$(2n-2k+1)(n-k+1)b(k+1) - k(2k+1)b(k) = a_0(2n-2k+1)(n-k+1) + a_1(n+1)(2n+3)$$

Upravme polynomy $P_2(k),\ P_3(k),\ P(k)$ tak, abychom mohli určit stupeň polynomu $b(k)$:

$P_2(k) = 2k^2 + (-4n-3)k + 2n^2 + 3n + 1$,

$P_3(k) = 2k^2 + 5k + 3$,

$P(k) = 2a_0k^2 + (-3a_0 - 4a_0n)k + 2n^2a_0 + 2n^2a_1 + 3na_0 + 5na_1 + 3a_1 + a_0$.

Zjišťujeme, že $st\left(P_2(k)\right) = st\left(P_3(k)\right) = st\left(P(k)\right) = 2$, to znamená, že nastal případ (2A) a tedy platí $st\left(b(k)\right) = st\left(P(k)\right) - st\left(P_2(k)\right) + 1 = 1$. Tudíž polynom $b(k)$ je prvního stupně, tedy $b(k) = c_0 + c_1k$. Nyní všechny příslušné polynomy dosadíme do vztahu (5.3.14) a po roznásobení závorek a převedení všech sčítanců na levou stranu dostaneme:

$$\begin{aligned} &-a_0 + 3ka_0 - 2k^2a_0 - 3na_0 + 4kna_0 - 2n^2a_0 - 3a_1 - 5na_1 - 2n^2a_1 + c_0 - 4kc_0 + \\ &3nc_0 - 4knc_0 + 2n^2c_0 + c_1 - 2kc_1 - 2k^2c_1 + 3nc_1 - knc_1 - 4k^2nc_1 + 2n^2c_1 + 2kn^2c_1 = 0 \end{aligned}$$

Dále porovnáme koeficienty u nezáporných mocnin neznámé k:

$$\begin{aligned}
&k^2: \quad -2a_0 - 2c_1 - 4nc_1 && = 0\\
&k^1: \quad 3a_0 + 4na_0 - 4c_0 - 4nc_0 - 2c_1 - nc_1 + 2n^2c_1 && = 0\\
&k^0: \quad -a_0 - 3na_0 - 2n^2a_0 - 3a_1 - 5na_1 - 2n^2a_1 + c_0 + 3nc_0 + 2n^2c_0 + c_1 + 3nc_1 + 2n^2c_1 && = 0\ .
\end{aligned}$$

Odtud získáváme homogenní soustavu lineárních rovnic o neznámých $a_0,\ a_1,\ c_0,\ c_1$:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad a_0(-2) && && + c_1(-2-4n) && = 0\\
&(2) \qquad a_0(3+4n) && && + c_0(-4-4n) \quad + c_1(-2-n+2n^2) && = 0\\
&(3) \qquad a_0(-1-3n-2n^2) + a_1(-3-5n-2n^2) && && + c_0(1+3n+2n^2) + c_1(1+3n+2n^2) && = 0\ .
\end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že $a_0 = -c_1(2n+1)$. Takové a_0 dosaďme do druhé rovnice a po úpravách dostaneme $\dfrac{c_1}{c_0} = \dfrac{4n+4}{-6n^2-11n-5}$. Označíme-li $c_1 := 4n+4$, $c_0 := -6n^2-11n-5$, dosazením takových $a_0,\ c_0,\ c_1$ do třetí rovnice po úpravách obdržíme, že $a_1 = 2n^2+3n+1$. Nakonec dosazením $c_1 = 4n+4$ do první rovnice zjišťujeme, že $a_0 = -(4n+4)(2n+1)$. Zde poznamenejme, že vůbec nezáleží na tom, jak si neznámé zavedeme, podstatné je, že vyhovují rovnosti $(5.3.14)$. Nalezené polynomy $a_0(n)$, $a_1(n)$ dosadíme do vztahu $(5.2.4)$, dostáváme, že

$$-(4n+4)(2n+1)F(n,k) + (2n^2+3n+1)F(n+1,k) = 0\,,$$

a jelikož k je volná proměnná, lze psát

$$-(4n+4)(2n+1)f(n) + (2n^2+3n+1)f(n+1) = 0\,,$$

což po úpravě dává $f(n+1) = 4f(n)$. Odtud je již vidět, že platí následující rovnosti.

$$\begin{aligned}
f(n) &= 4f(n-1)\\
f(n-1) &= 4f(n-2)\\
f(n-2) &= 4f(n-3)\\
f(n-3) &= 4f(n-4)\\
\vdots \quad & \qquad \vdots\\
f(2) &= 4f(1)\\
f(1) &= 4f(0)
\end{aligned}$$

Počet těchto rovností činí n. Všechny tyto rovnosti mezi sebou vynásobíme, dostaneme vztah

$$f(n)f(n-1)f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(2)f(1) = 4^n f(n-1)f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(1)f(0)\,,$$

který lze ještě upravit na tvar $f(n) = 4^n \cdot f(0)$. Zbývá ještě dosadit počáteční podmínku $f(0)$. Tu zjistíme velmi snadno:

$$f(0) = \sum_{k=0}^{0}\binom{2\cdot 0+1}{2k+1} = \binom{1}{1} = 1\text{. A tedy platí } f(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1} = 4^n\cdot f(0) = 4^n\cdot 1 = 4^n\,.$$

Závěrem dodejme, že k nalezení hodnoty sumy $f(n)$ jsme mohli rovněž využít vztahu (5.2.6). Připomeňme, že v tomto příkladě jsme zjistili, že $D\left(P_2(k),\, P_3(k+h)\right)=1$ pro všechna nezáporná celá čísla h. Co kdyby taková situace nenastala? Bylo by vhodné polynomy $P(k),\, P_2(k),\, P_3(k)$ předefinovat nebo raději zkusit nalézt netriviální rekurentní vyjádření pro $F(n,\, k)$ při nějakém $J>1$? Samozřejmě bude výhodnější takové polynomy předefinovat, protože zvýšení čísla J vede k nutnosti řešit soustavu, jejíž vyřešení by bylo náročnější.

(Příklad 5.4.2)

Nalezněme Zeilbergerovo rekurentní vyjádření pro $f(n)$, kde $f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^4$. Úlohu řešme v prostředí *Wolfram Mathematica* 9®, protože příslušné operace budou náročnější. Volme $J=1$, tím tedy předpokládáme rekurentní vyjádření pro $F(n,\, k)$ ve tvaru $t_k := \sum_{j=0}^{1} a_j F(n+j,\, k) = a_0 F(n,\, k) + a_1 F(n+1,\, k)$. Označme $F(n,\, k) := \binom{n}{k}^4$. Vypočteme podíl $\frac{t_{k+1}}{t_k}$ a výsledek rovnou upravíme:

```
In[1]:= t[k_] := Sum[a_j * F[n + j, k], {j, 0, 1}];
        F[n_, k_] := Binomial[n, k]^4

In[2]:= Simplify[Together[FunctionExpand[t[k + 1] / t[k]]]]
```

$$\text{Out[2]=}\ \frac{(1-k+n)^4\left((k-n)^4 a_0+(1+n)^4 a_1\right)}{(1+k)^4\left((1-k+n)^4 a_0+(1+n)^4 a_1\right)}$$

Označme $P_3(k) := (1+k)^4,\ P_2(k) := (1-k+n)^4,\ P(k) := (1-k+n)^4 a_0 + (1+n)^4 a_1$:

```
In[3]:= P_3[k_] := (1 + k)^4

In[4]:= P_2[k_] := (1 - k + n)^4

In[5]:= P[k_] := (1 - k + n)^4 a_0 + (1 + n)^4 a_1
```

Ověříme, že tyto polynomy splňují podmínku $D\left(P_2(k), P_3(k+h)\right)=1,\ \forall h\in\mathbb{N}_0$:

In[6]:= `Solve[Resultant[P2[k], P3[k + h], k] = 0, h]`

Out[6]= $\{\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},$
$\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},$
$\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},$
$\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\},\{h\to -2-n\}\}$

Dále určíme stupeň neznámého polynomu $b(k)$:

In[7]:= `st[P2[k]] := Exponent[Expand[P2[k]], k]`

In[8]:= `st[P3[k]] := Exponent[Expand[P3[k]], k]`

In[9]:= `lc[P2[k]] := Coefficient[Expand[P2[k]], k, st[P2[k]]]`

In[10]:= `lc[P3[k]] := Coefficient[Expand[P3[k]], k, st[P3[k]]]`

In[11]:= `{st[P2[k]], st[P3[k]], lc[P2[k]], lc[P3[k]]}`

Out[11]= `{4, 4, 1, 1}`

Zjišťujeme, že $st(P_2(k)) = 4 = st(P_3(k))$, $lc(P_2(k)) = 1 = lc(P_3(k))$, to znamená, že nastal případ (2A) proto ještě definujeme stupeň polynomu $P(k)$:

In[12]:= `st[P[k]] := Exponent[Expand[P[k]], k]`

Nyní již můžeme určit stupeň polynomu $b(k)$ dle příslušného vzorce:

In[13]:= `st[P[k]] - st[P2[k]] + 1`

Out[13]= `1`

Polynom $b(k)$ je tedy prvního stupně. Polynom takového stupně nadefinujeme v obecném vyjádření:

In[14]:= $\texttt{b[k\_] := Sum}\left[c_i * k^i,\ \{i, 0, 1\}\right];\ \texttt{b[k]}$

Out[14]= $c_0 + k\,c_1$

Tento polynom dosadíme do podmínky $P_2(k)b(k+1) - P_3(k-1)(k) - P(k)$:

In[15]:= `P2[k] * b[k + 1] - P3[k - 1] * b[k] - P[k]`

Out[15]= $-(1-k+n)^4 a_0 - (1+n)^4 a_1 - k^4 (c_0 + k c_1) + (1-k+n)^4 (c_0 + (1+k) c_1)$

Dále porovnáme koeficienty u nezáporných celých mocnin neznámé k:

In[16]:= `CoefficientList[%, k]`

Out[16]= $\{-a_0 - 4 n a_0 - 6 n^2 a_0 - 4 n^3 a_0 - n^4 a_0 - (1+n)^4 a_1 + c_0 + 4 n c_0 + 6 n^2 c_0 + 4 n^3 c_0 +$
$n^4 c_0 + c_1 + 4 n c_1 + 6 n^2 c_1 + 4 n^3 c_1 + n^4 c_1,\ 4 a_0 + 12 n a_0 + 12 n^2 a_0 +$
$4 n^3 a_0 - 4 c_0 - 12 n c_0 - 12 n^2 c_0 - 4 n^3 c_0 - 3 c_1 - 8 n c_1 - 6 n^2 c_1 + n^4 c_1,$
$-6 a_0 - 12 n a_0 - 6 n^2 a_0 + 6 c_0 + 12 n c_0 + 6 n^2 c_0 + 2 c_1 - 6 n^2 c_1 - 4 n^3 c_1,$
$4 a_0 + 4 n a_0 - 4 c_0 - 4 n c_0 + 2 c_1 + 8 n c_1 + 6 n^2 c_1,\ -a_0 - 3 c_1 - 4 n c_1\}$

```
In[17]:= Map[Equal[#, 0] &, %]

Out[17]= {-a0 - 4 n a0 - 6 n^2 a0 - 4 n^3 a0 - n^4 a0 - (1 + n)^4 a1 + c0 + 4 n c0 +
    6 n^2 c0 + 4 n^3 c0 + n^4 c0 + c1 + 4 n c1 + 6 n^2 c1 + 4 n^3 c1 + n^4 c1 == 0,
  4 a0 + 12 n a0 + 12 n^2 a0 + 4 n^3 a0 - 4 c0 - 12 n c0 - 12 n^2 c0 -
    4 n^3 c0 - 3 c1 - 8 n c1 - 6 n^2 c1 + n^4 c1 == 0,
  -6 a0 - 12 n a0 - 6 n^2 a0 + 6 c0 + 12 n c0 + 6 n^2 c0 + 2 c1 - 6 n^2 c1 - 4 n^3 c1 == 0,
  4 a0 + 4 n a0 - 4 c0 - 4 n c0 + 2 c1 + 8 n c1 + 6 n^2 c1 == 0, -a0 - 3 c1 - 4 n c1 == 0}
```

Hledáme koeficienty c_0, c_1, a_0, a_1 vyřešením příslušné soustavy:

```
In[18]:= Solve[%, {c0, c1, a0, a1}]

Out[18]= {{c0 → 0, c1 → 0, a0 → 0, a1 → 0}}
```

Tato soustava má pouze triviální řešení, tudíž netriviální Zeilbergerovo rekurentní vyjádření pro $f(n)$ neexistuje, to znamená, že číslo J je potřeba zvýšit a celý postup zopakovat – ten bude zcela analogický. Volme $J = 2$ a jednotlivé následující kroky již nekomentujme.

```
In[19]:= t[k_] := Sum[aj * F[n + j, k], {j, 0, 2}];
         F[n_, k_] := Binomial[n, k]^4

In[20]:= Simplify[Together[FunctionExpand[t[k + 1] / t[k]]]]

Out[20]= ((2 - k + n)^4
     ((-k + k^2 + n - 2 k n + n^2)^4 a0 + (1 + n)^4 ((1 - k + n)^4 a1 + (2 + n)^4 a2))) /
   ((1 + k)^4 ((2 + k^2 + 3 n + n^2 - k (3 + 2 n))^4 a0 +
       (1 + n)^4 ((2 - k + n)^4 a1 + (2 + n)^4 a2)))

In[21]:= P3[k_] := (1 + k)^4

In[22]:= P2[k_] := (2 - k + n)^4

In[23]:= P[k_] := (2 + k^2 + 3 n + n^2 - k (3 + 2 n))^4 a0 + (1 + n)^4 ((2 - k + n)^4 a1 + (2 + n)^4 a2)

In[24]:= Solve[Resultant[P2[k], P3[k + h], k] == 0, h]

Out[24]= {{h → -3 - n}, {h → -3 - n}, {h → -3 - n}, {h → -3 - n},
  {h → -3 - n}, {h → -3 - n}, {h → -3 - n}, {h → -3 - n},
  {h → -3 - n}, {h → -3 - n}, {h → -3 - n}, {h → -3 - n},
  {h → -3 - n}, {h → -3 - n}, {h → -3 - n}, {h → -3 - n}}

In[25]:= st[P2[k]] := Exponent[Expand[P2[k]], k]

In[26]:= st[P3[k]] := Exponent[Expand[P3[k]], k]

In[27]:= lc[P2[k]] := Coefficient[Expand[P2[k]], k, st[P2[k]]]

In[28]:= lc[P3[k]] := Coefficient[Expand[P3[k]], k, st[P3[k]]]

In[29]:= {st[P2[k]], st[P3[k]], lc[P2[k]], lc[P3[k]]}

Out[29]= {4, 4, 1, 1}
```

```
In[30]:= st[P[k]] := Exponent[Expand[P[k]], k]

In[31]:= st[P[k]] - st[P2[k]] + 1
```

Out[31]= 5

```
In[32]:= b[k_] := Sum[c_i * k^i, {i, 0, 5}]; b[k]
```

Out[32]= $c_0 + k\, c_1 + k^2\, c_2 + k^3\, c_3 + k^4\, c_4 + k^5\, c_5$

```
In[33]:= P2[k] * b[k + 1] - P3[k - 1] * b[k] - P[k];

In[34]:= CoefficientList[%, k];

In[35]:= Map[Equal[#, 0] &, %];

In[36]:= Reseni = Together[Solve[%, {c0, c1, c2, c3, c4, c5, a0, a1, a2}]]
```

Out[36]=
$$\Big\{\Big\{c_0 \to -\frac{5\,(1+n)\,(216+644\,n+762\,n^2+447\,n^3+130\,n^4+15\,n^5)\,c_5}{4\,(5+4\,n)},$$
$$c_1 \to \frac{(564+1880\,n+2473\,n^2+1605\,n^3+514\,n^4+65\,n^5)\,c_5}{5+4\,n},$$
$$c_2 \to -\frac{(990+2661\,n+2649\,n^2+1157\,n^3+187\,n^4)\,c_5}{2\,(5+4\,n)},$$
$$c_3 \to \frac{(225+461\,n+311\,n^2+69\,n^3)\,c_5}{5+4\,n},$$
$$c_4 \to -\frac{1}{2}\,(21+13\,n)\,c_5,\ a_0 \to -(3+4\,n)\,c_5,$$
$$a_1 \to -\frac{(3+2\,n)\,(7+9\,n+3\,n^2)\,c_5}{2\,(1+n)\,(5+4\,n)},\ a_2 \to \frac{(8+12\,n+6\,n^2+n^3)\,c_5}{4\,(1+n)\,(5+4\,n)}\Big\}\Big\}$$

Příslušná soustava má tedy i netriviální řešení. Nalezené neznámé dosaďme do předpokládaného rekurentního vyjádření pro $f(n)$, které je ve tvaru $a_0 f(n) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n+2) = 0$:

```
In[37]:= a0 f[n] + a1 f[n + 1] + a2 f[n + 2] /. Reseni
```

Out[37]=
$$\Big\{-(3+4\,n)\,f[n]\,c_5 - \frac{(3+2\,n)\,(7+9\,n+3\,n^2)\,f[1+n]\,c_5}{2\,(1+n)\,(5+4\,n)} + \frac{(8+12\,n+6\,n^2+n^3)\,f[2+n]\,c_5}{4\,(1+n)\,(5+4\,n)}\Big\}$$

Úpravou obdržíme:

```
In[38]:= Simplify[% * 4 (1 + n) (5 + 4 n) / c5] // TraditionalForm
```

Out[38]//TraditionalForm=
$$\{-4\,(16\,n^3+48\,n^2+47\,n+15)\,f(n) - 2\,(6\,n^3+27\,n^2+41\,n+21)\,f(n+1) + (n+2)^3\,f(n+2)\}$$

Závěrem je možno konstatovat, že hledané Zeilbergerovo netriviální rekurentní vyjádření pro $f(n)$ existuje při $J = 2$ a je ve tvaru

$$-4(16n^3+48n^2+47n+15)\,f(n)-2(6n^3+27n^2+41n+21)\,f(n+1)+(n+2)^3 f(n+2)=0$$

Tím je úloha vyřešena. Také stojí za zmínku, že v programu *Maple* 14® lze velmi rychle najít Zeilbergerovo rekurentní vyjádření pro $f(n)$. V programu je standardně nastaveno, aby toto vyjádření bylo nalezeno při volbě $J \leq 6$. Toto nastavení lze však měnit pomocí příkazů *MINORDER* a *MAXORDER*. Závěrem se přesvědčme, že v našem případě, tj. pro $f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^4$, nacházíme triviální rekurentní vyjádření při $J=1$ a netriviální při $J=2$.

```
> with(SumTools[Hypergeometric]) :
> T := binomial(n, k)^4
                        T := binomial(n, k)^4
> _MINORDER := 0 :  _MAXORDER := 1 :
> Zpair := Zeilberger(T, n, k, En) :
Error, (in SumTools:-Hypergeometric:-Zeilberger) No recurrence
of order 1 was found
>
> _MINORDER := 0 :  _MAXORDER := 2 :
> Zpair := Zeilberger(T, n, k, En) :
> L := Zpair[1]
```

$$L := \left(n^3+6n^2+12n+8\right)En^2+\left(-12n^3-54n^2-82n-42\right)En-64n^3-192n^2-188n-60$$

```
> Verify(T, 'Zpair', n, k, En)
                                true
> ZeilbergerRecurrence(T, n, k, f, 0 ..n)
```

$$\left(-64n^3-192n^2-188n-60\right)f(n)+\left(-12n^3-54n^2-82n-42\right)f(n+1)+\left(n^3+6n^2+12n+8\right)f(n+2)=0$$

Vraťme se ještě k výše uvedenému rekurentnímu vyjádření pro $f(n)$. Jedná se o homogenní lineární rekurentní rovnici druhého řádu. Koeficienty u neznámých jsou bohužel polynomy proměnné n. Víme, že se můžeme pokusit tuto rovnici vyřešit *Petkovšekovým* algoritmem (ten nestudujme). Autorem tohoto algoritmu je slovinský matematik Marko Petkovšek, z internetové stránky <http://www.fmf.uni-lj.si/~petkovsek/distrib.m> lze tento algoritmus stáhnout v podobě balíčku *Package* určeného pro prostředí *Wolfram Mathematica* ®. Výše uvedené rekurentní vyjádření pro $f(n)$ bohužel nelze tímto algoritmem vyšetřit, lépe řečeno, algoritmus je v našem případě neúspěšný. Můžeme se o tom přesvědčit, spustíme-li balíček a zadáme příkaz ve formátu $Hyper[\textit{rekurentní vyjádření} == 0,\ f[n],\ Solutions -> All]$.

(Příklad 5.4.3)

$$\text{Stanovme součet } \sum_{k=0}^{n} \binom{4n-3}{4k+2}.$$

V prostředí *Maple* 14® pišme:

```
> with(SumTools[Hypergeometric]) :
> T := binomial(4 n − 3, 4 k + 2)
                         T := binomial(4 n − 3, 4 k + 2)
> _MINORDER := 0 :  _MAXORDER := 1 :
> Zpair := Zeilberger(T, n, k, En) :
Error, (in SumTools:-Hypergeometric:-Zeilberger) No recurrence of order 1 was found
```

Nyní zdůvodníme, proč je algoritmus při $J=1$ neúspěšný. Obdržíme polynomy

$$P_2(k) = 32k^4 - 16k^3(8n-5) + 2k^2(96n^2 - 120n + 35) + \\ + k(-128n^3 + 240n^2 - 140n + 25) + 32n^4 - 80n^3 + 70n^2 - 25n + 3,$$

$$P_3(k) = 32k^4 + 144k^3 + 238k^2 + 171k + 45,$$

$$P(k) = a_0(32k^4 - 16k^3(8n-5) + 2k^2(96n^2 - 120n + 35) + k(-128n^3 + 240n^2 - 140n + 25) + \\ + 32n^4 - 80n^3 + 70n^2 - 25n + 3) + a_1 n(32n^3 - 16n^2 - 2n + 1).$$

S těmito polynomy lze nadále pracovat, protože $D\left(P_2(k),\ P_3(k+h)\right) = 1,\ \forall h \in \mathbb{N}_0$. Nyní budeme hledat stupeň neznámého polynomu $b(k)$.

Obdržíme vektor $\left(st\left(P_2(k)\right),\ st\left(P_3(k)\right),\ lc\left(P_2(k)\right),\ lc\left(P_3(k)\right)\right) = (4,\ 4,\ 32,\ 32)$. To znamená, že nastal případ (2A) a dle příslušného vzorce zjišťujeme, že $st\left(b(k)\right) = 1$. Dosazením polynomu $b(k) = c_0 + c_1 k$ do podmínky $P_2(k)\cdot b(k+1) - P_3(k-1)\cdot b(k) = P(k)$ hledáme koeficienty a_0, a_1. Příslušná soustava rovnic má pouze triviální řešení. Volme $J=2$.

V prostředí *Maple* 14® pišme:

```
> _MINORDER := 0 :  _MAXORDER := 2 :
> Zpair := Zeilberger(T, n, k, En) :
> L := Zpair[1]
                         L := -64 − 12 En + En^2
> Verify(T, 'Zpair', n, k, En)
                                  true
> ZeilbergerRecurrence(T, n, k, f, 0 ..n)
                 -64 f(n) − 12 f(n + 1) + f(n + 2) = 0
```

Při $J=2$ algoritmus dosáhl úspěchu. Pro $J=2$ bychom mohli v prostředí *Wolfram Mathematica* 9 ® postupovat následovně:

```
t[k_] := Sum[a_j * F[n + j, k], {j, 0, 2}];
F[n_, k_] := Binomial[4 n - 3, 4 k + 2]

Simplify[Together[FunctionExpand[t[k + 1] / t[k]]]]

P3[k_] := 32 k^4 + 144 k^3 + 238 k^2 + 171 k + 45

P2[k_] := 32 k^4 - 16 k^3 (8 n + 3) + 2 k^2 (96 n^2 + 72 n + 11) -
   k (128 n^3 + 144 n^2 + 44 n + 3) + n (32 n^3 + 48 n^2 + 22 n + 3)

P[k_] :=
 n (32 n^3 - 16 n^2 - 2 n + 1)
    (a1 (32 k^4 - 16 k^3 (8 n + 3) + 2 k^2 (96 n^2 + 72 n + 11) -
           k (128 n^3 + 144 n^2 + 44 n + 3) + n (32 n^3 + 48 n^2 + 22 n + 3)) +
       a2 (32 n^4 + 112 n^3 + 142 n^2 + 77 n + 15)) +
   a0 (1024 k^8 - 1024 k^7 (8 n - 1) + 896 k^6 (32 n^2 - 8 n - 1) -
       896 k^5 (64 n^3 - 24 n^2 - 6 n + 1) +
       28 k^4 (2560 n^4 - 1280 n^3 - 480 n^2 + 160 n + 7) -
       28 k^3 (2048 n^5 - 1280 n^4 - 640 n^3 + 320 n^2 + 28 n - 7) +
       k^2 (28672 n^6 - 21504 n^5 - 13440 n^4 + 8960 n^3 + 1176 n^2 - 588 n - 9) +
       k (-8192 n^7 + 7168 n^6 + 5376 n^5 - 4480 n^4 - 784 n^3 + 588 n^2 + 18 n - 9) +
       n (1024 n^7 - 1024 n^6 - 896 n^5 + 896 n^4 + 196 n^3 - 196 n^2 - 9 n + 9))

Solve[Resultant[P2[k], P3[k + h], k] == 0, h]

st[P2[k]] := Exponent[Expand[P2[k]], k]

st[P3[k]] := Exponent[Expand[P3[k]], k]

lc[P2[k]] := Coefficient[Expand[P2[k]], k, st[P2[k]]]

lc[P3[k]] := Coefficient[Expand[P3[k]], k, st[P3[k]]]

{st[P2[k]], st[P3[k]], lc[P2[k]], lc[P3[k]]}

st[P[k]] := Exponent[Expand[P[k]], k]

st[P[k]] - st[P2[k]] + 1

b[k_] := Sum[c_i * k^i, {i, 0, 5}]

P2[k] * b[k + 1] - P3[k - 1] * b[k] - P[k]

CoefficientList[%, k]

Map[Equal[#, 0] &, %]

Reseni = Together[Solve[%, {c0, c1, c2, c3, c4, c5, a0, a1, a2}]]

f[n_] := Sum[Binomial[4 n - 3, 4 k + 2], {k, 0, n}]

{f[2], f[3]}

Clear[f]
```

```
a0 * f[n] + a1 * f[n + 1] + a2 * f[n + 2] /. Reseni
```

Zájemce si může zadáním této posloupnosti příkazů ověřit, že Zeilbergerovo rekurentní vyjádření pro $f(n)$ je ve tvaru $f(n+2)-12f(n+1)-64f(n)=0$, jak jsme již zjistili v prostředí *Maple* 14®. Zbývá vyřešit rekurentní rovnici $f(n+2)-12f(n+1)-64f(n)=0$ s počátečními podmínkami $f(2)=10$, $f(3)=120$. Této rovnici přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2-12\lambda-64=0$, jejíž levou stranu rozložíme v součin lineárních faktorů: $(\lambda+4)(\lambda-16)=0$. Charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=16$, a proto obecné řešení rekurentní rovnice očekáváme ve tvaru $f(n)=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$ neboli $f(n)=C_1(-4)^n+C_2 16^n$, kde C_1, C_2 jsou reálné konstanty. Tyto konstanty nyní určíme pomocí počátečních podmínek – to nás vede řešit následující soustavu rovnic:

$$10=C_1\cdot(-4)^2+C_2\cdot 16^2 \qquad (\text{pro } n=2)$$

$$120=C_1\cdot(-4)^3+C_2\cdot 16^3 \qquad (\text{pro } n=3)$$

Kořeny této soustavy jsou $C_1=\dfrac{1}{8}$, $C_2=\dfrac{1}{32}$. A proto obecné řešení rovnice $f(n+2)-12f(n+1)-64f(n)=0$ je ve tvaru $f(n)=\dfrac{1}{8}\cdot(-4)^n+\dfrac{1}{32}\cdot 16^n$, po drobné úpravě máme $f(n)=2^{-5+2n}\left[4\cdot(-1)^n+2^{2n}\right]$. Je tedy $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{4n-3}{4k+2}=2^{-5+2n}\left[4\cdot(-1)^n+2^{2n}\right]$.

(Příklad 5.4.4)

$$\text{Stanovme součet } \sum_{k=0}^{n}\binom{5n}{5k}.$$

Postup bude zcela analogický postupům v předchozích příkladech, a proto uvádějme pouze významné kroky. Správnost výsledků jednotlivých kroků si může zájemce ověřit využitím postupů užitých v předchozích příkladech. Nejprve nalezneme řád Zeilbergerovo rekurentní rovnice, tj. číslo J, v prostředí *Maple* 14®. To provedeme obdobným způsobem jako v předchozím příkladě. Zjišťujeme, že existuje netriviální rekurentní vyjádření pro $f(n)$ až teprve při $J=3$. Další kroky provádějme v prostředí *Wolfram Mathematica* 9 ®. Nalézáme jisté polynomy $P_2(k)$, $P_3(k)$ a $P(k)$, které zde neuvádějme (zabrali bychom mnoho místa v textu). Pro tyto polynomy je $D\left(P_2(k),\ P_3(k+h)\right)=1,\ \forall h\in\mathbb{N}_0$, tudíž s těmito polynomy budeme nadále pracovat. Nyní hledáme stupeň neznámého polynomu $b(k)$, nalézáme vektor $\left(st\left(P_2(k)\right),\ st\left(P_3(k)\right),\ lc\left(P_2(k)\right),\ lc\left(P_3(k)\right)\right)=(5,\ 5,\ -625,\ 625)$, to znamená, že nastává případ (1) . Podle příslušného vzorce zjišťujeme, že polynom $b(k)$ je desátého stupně. Dosazením polynomu $b(k)$ do podmínky $P_2(k)\cdot b(k+1)-P_3(k-1)\cdot b(k)=P(k)$ hledáme koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3. Příslušná soustava rovnic má samozřejmě netriviální řešení. Odtud získáváme Zeilbergerovo rekurentní vyjádření pro $f(n)$, které je ve tvaru $f(n)-\frac{353}{32}f(1+n)-\frac{21}{32}f(2+n)+\frac{1}{32}f(3+n)=0$. Této rekurentní rovnici odpovídá charakteristická rovnice $\lambda^3-21\lambda^2-353\lambda+32=0$, jejíž kořeny jsou $\lambda_1=32$, $\lambda_2=\frac{1}{2}\left(-11-5\sqrt{5}\right)$ a $\lambda_3=\frac{1}{2}\left(-11+5\sqrt{5}\right)$. S využitím počátečních podmínek $f(1)$, $f(2)$ a $f(3)$ obdržíme obecné řešení výše uvedené rekurentní rovnice ve tvaru

$$f(n)=\frac{1}{5}\left[32^n+2\left(-\frac{11}{2}-\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^n+2\left(-\frac{11}{2}+\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{5n}{5k}.$$

Nakonec je možné ještě provést zkoušku v *Maple* 14® obdobným způsobem jako v závěru příkladu **5.4.2**. Závěrem této kapitoly srovnejme naše výpočty proveditelné v prostředí *Mathematica* 9 ® . Následující tabulka (tab. 1) byla sestavena na základě užití postupů uvedených v této kapitole a užití postupů uvedených v předchozí kapitole. Čísla I, J jsou ta nejmenší, při kterých teprve daná metoda dokázala stanovit hodnotu příslušné sumy. Číslo n představuje počet rovnic dané soustavy, kterou bylo potřeba vyřešit.

	Zeilbergerův algoritmus		**Metoda M. Fasenmyerové**		
Sumand	J	n	I	J	n
$\binom{2n+1}{2k+1}$	1	3	2	2	9
$\binom{n}{k}^4$	2	9	5	5	41
$\binom{4n-3}{4k+2}$	2	9	4	4	33
$\binom{n+k}{k}2^{-k}$	1	2	1	1	3
$\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}$	1	3	1	2	5

tab. 1

Z hodnot této tabulky samozřejmě nelze vyvozovat obecné závěry a srovnávat efektivitu i rychlost těchto dvou metod. Hledáme-li hodnotu daného součtu užitím dané metody, počítač ve skutečnosti nepracuje tak, jak jsme postupovali v prostředí *Wolfram Mathematica* 9®. My jsme tento program použili jakožto „lepší kalkulačku“, to znamená, že jsme prováděli určité kroky, ke kterým nás vedl teoretický popis dané metody. Jednotlivé kroky byly prováděny pouze pro názornost. V situaci, v níž samotný algoritmus je spuštěn v daném algebraickém systému, se postupuje jinak, a práce algoritmu trvá mnohem kratší dobu. Daná soustava rovnic je vyřešena způsobem, v němž jsou použity tzv. arbitrary constants, a díky tomu je řešení této soustavy nalezeno za dobu velmi krátkou.

Také stojí za zmínku, že metodu Sestry Mary Celine Fasenmyerové nenalezneme v balíčku sumtools programu *Maple* 14®, zatímco Zeilbergerův algoritmus ano. Patrně její metoda přestala být postupem času používána, v sedmé verzi tohoto programu její metodu ještě je možné spustit.

Zakončeme tento text následujícím komentářem. Budeme-li pohlížet na Zeilbergerův algoritmus jako na „rozšíření“ metody Sestry Mary Celine Fasenmyerové, potom použitý Gosperův algoritmus na toto rozšíření je velmi „silným nástrojem“.

Závěr

Vypracováním své diplomové práce jsem se snažil podat popis pokročilých sumačních algoritmů, zejména Zeilbergerova algoritmu. Nezbytným prostředkem popisu byl program *Wolfram Mathematica* 9®, bez jehož pomoci by tato diplomová práce nemohla vzniknout. V mnoha situacích bylo totiž potřeba sestavit vlastní příklad a to takový, který by **názorně** popsal daný sumační algoritmus a ukázal, jak složitou cestou se následná činnost algoritmu bude ubírat. Pomocným programem se stal pro účely této práce *Maple* 14®, který přispěl poskytnutím informace, zda existuje rekurentní vyjádření pro daný součet a jaká je hodnota řádu rekurentní rovnice popisující tento součet. Studium těchto pokročilých sumačních algoritmů mě utvrzuje v názoru, že jejich vytvoření je výsledkem poctivé a usilovné práce jejich autorů. Poznal jsem, že vytváření těchto algoritmů je nezbytné k rozvoji výše uvedených matematických programů a díky těmto algoritmům se lze vyhnout použití numerických metod. V důsledku toho je možno během několika zlomků sekundy obdržet hodnotu hledaného součtu zadáním jediného příkazu.

Dále mě toto studium přináší jisté poznatky, které student české veřejné vysoké školy nemá možnost získat, neboť studium těchto algoritmů není obsahem učiva našich škol. Většinu informací nezbytných k vytvoření této práce bylo nutno získat z anglicky psaných zdrojů, což častokrát přinášelo jistá úskalí, např. v situaci, v níž zdroje nerozlišovaly rozdíl mezi pojmy posloupnost a funkce, oba pojmy splývaly v jeden. Domnívám se, že obsah této práce může posloužit zájemci o studium hypergeometrických řad, může být také základem ke vstupu do studia proslavené $W-Z$ *Theory* sloužící k efektivnímu dokazování kombinatorických identit, či dokonce vstupem do studia Petkovšekova algoritmu, který je základním nástrojem hledání řešení lineárních rekurentních rovnic s polynomiálními koeficienty a tím tedy i pomocným nástrojem pokročilých sumačních algoritmů.

Díky studiu sumačních algoritmů a studiu práce s matematickým softwarem jsem navíc získal znalosti, které jsem uplatnil při tvorbě jednoduchých pomůcek, které je možno využít při výuce matematiky na základních nebo středních školách, lze na tomto místě jmenovat např. vytvoření generátoru příkladů soustav lineárních rovnic nebo i jiných pomůcek, jejichž funkce a činnost může laikovi připadat velmi jednoduchá, avšak vytvoření takové pomůcky nemusí být vždy snadným úkolem.

Seznam použitých zdrojů

[1] ODVÁRKO, Oldřich et al. Metody řešení matematických úloh. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 261 s. Učebnice pro vysoké školy. ISBN 80-04-20434-1.

[2] HERMAN, Jiří, KUČERA, Radan a ŠIMŠA, Jaromír. Metody řešení matematických úloh: Určeno pro posl. fak. přírodověd. a pedagog. Část 1. 1. vyd. Praha: SPN, 1990. 344 s. ISBN 80-210-0120-8.

[3] LARSON, Loren C. Metódy riešenia matematických problémov. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1990. 411^s. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry. ISBN 80-05-00627-6.

[4] Calda Emil, Dupač Václav: Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika**.** 2. vyd. Praha: Prometheus, 1996.

[5] Petkovsek, M., Wilf, H. S., Zeilberger, D.: A=B. A K Peters. Ltd., 1996. [online]. [cit. 2.7. 2013]. Dostupné z WWW: <http://www.math.upenn.edu/~wilf/Downld.html>

[6] Cebecioglu, B.: Computerized Proof Of The Hypergeometric Identites With Gosper And Zeilberger Algorithms. [online]. [cit. 5. 7. 2013]. Dostupné z WWW: <http://sdsu-dspace.calstate.edu/handle/10211.10/453>

[7] Milenkovic, O., Compton, K.: Average Case Analysis of Gosper’s Algorithm. [online]. [cit. 5.7. 2013]. Dostupné z WWW: <faculty.ece.illinois.edu/milenkov/gosper2.ps>

[8] Hora, J.: O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole-III.díl. Plzeň: Pedagogické centrum, 2001. 1.vydání,74 stran, ISBN 80-7020-092-8.

[9] Tyr, D.: Základní sumační techniky. Plzeň, 2012. Bakalářská práce (Bc.). Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta pedagogická.

[10] Winkler, F.: Polynomial Algorithms in Computer Algebra. Springer, 1996.

[11] Gosper, W. R.: Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 75, No. 1, pp. 40-42, January 1978. [online]. [cit. 2.7. 2013]. Dostupné z WWW: <http://www.pnas.org/content/75/1/40.full.pdf>

[12] VCF 10.0 - Speaker Biography [online]. [cit. 1.7. 2013]. Dostupné z WWW: <http://www.vintage.org/2007/main/bio.php?id=1379>

[13] Velebil, J.: Diskrétní matematika, text k přednášce. [online]. [cit. 10.7. 2013]. Dostupné z WWW: <ftp://math.feld.cvut.cz/pub/velebil/y01dma/dma-notes.pdf>

[14] Adamchik, V.: Recurcions. [online]. [cit. 12. 7. 2013]. Dostupné z WWW: <www.cs.cmu.edu/~adamchik/21-127/lectures/recursion_3_print.pdf>

[15] ELAYDI, S.: An Introduction to Difference Equations. Springer, 3rd ed., 2005, XXII, 546 p. 119 illus. ISBN 0-387-23059-9.

[16] Adamchik, V.: Symbolic Summation, Sister Celine´s algorithm. [online]. [cit. 15. 7. 2013]. Dostupné z WWW: <http://www.andrew.cmu.edu/course/15-355/lectures/lecture02.pdf>

[17] Rassart, E.: Computer Proofs of Hypergeometric Identities. [online]. [cit. 17. 7. 2013]. Dostupné z WWW: <www.math.cornell.edu/~rassart/pub/ciamac.pdf>

[18] The MacTutor History of Mathematics archive, Mary Celine Fasenmyer. [online]. [cit. 10.7. 2013]. Dostupné z WWW: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Fasenmyer.html>

[19] Heeg, D., Jordan, Ch., Pieper, D., Serum, D.: Creative telescoping. [online]. [cit. 18.8. 2013]. Dostupné z WWW: <www.uwstout.edu/mscs/upload/Creative-Telescoping.ppt>

[20] Wolfram Research. [online]. [cit. 12. 9. 2013]. Dostupné z WWW: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Zeilberger.html>

[21] DBpedia. [online]. [cit. 11.9. 2013]. Dostupné z WWW: <http://dbpedia.org/page/Doron_Zeilberger>

[22] In Computers We Trust? [online]. [cit. 12. 9. 2013]. Dostupné z WWW: <https://www.simonsfoundation.org/quanta/20130222-in-computers-we-trust/>

Seznam obrázků

obr. 1 (Ralph William Gosper, Jr.) 20
obr. 2 (Sister Mary Celine Fasenmyer) 40
obr. 3 (Doron Zeilberger) 52

Seznam tabulek

tab. 1 (porovnání metody M. Fasenmyerové se Zeilbergerovým algoritmem)........................ 69

Resumé

This dissertation deals how to determinate values of the definite sum, in which summand figure binomial coefficients. It includes the use of binomial theorem, appropriate adjustments of the summand and the use differential and integral calculus. Then the thesis deals with modes of the simplest recurrence relations and after that deals with the description of the computer summation algorithm. These are Gosper´s Summation Algorithm that works with the hypergeometric sequences, The Method of Sister Mary Celine Fasenmyer working with the sum, which summand is proper hypergemetric term, Zeilberger´s algorithm also known as *The Mehod Of Creative Telescoping* that uses the processes of Gosper´s algorithm and ideas of sister Fasenmayer´s method. This thesis contains many solved examples, more complicated calculations are done in program *Wolfram Mathematica* 9® . The auxiliary program for the purpose of this dissertation *Maple* 14® contributed information if the recurrence relation for the given sum exists and what value of the recurrence relation order describing this sum is.