

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ELEKTROENERGETIKY A EKOLOGIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Indukční ohřev tenkých plechů v příčném
časově proměnném magnetickém poli**

Autor práce: Jan Hrbek
Vedoucí práce: Prof. Ing. Ivo Doležel, CSc.

Plzeň 2014

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta elektrotechnická

Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Jan HRBEK**
Osobní číslo: **E12N0172P**
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Jaderná elektroenergetika**
Název tématu: **Indukční ohřev tenkých plechů v příčném časově proměnném magnetickém poli**
Zadávací katedra: **Katedra elektroenergetiky a ekologie**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Navrhněte uspořádání pro indukční ohřev tenkých plechů pomocí střídavě magnetovaného magnetického obvodu ve tvaru C-jádra.
2. Sestavte matematický model ohřevu a vyřešte jej numericky.
3. Vypočtěte základní pracovní charakteristiky navrženého zařízení.
4. Zkonstruujte funkční vzorek zařízení a vypočtené charakteristiky ověřte experimentálně.



Rozsah grafických prací: podle doporučení vedoucího
Rozsah pracovní zprávy: 30 - 40 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická
Seznam odborné literatury:

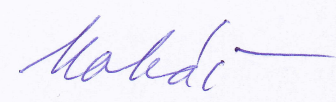
1. I., Doležel: Physical fields and their numerical modeling: studijní texty

Vedoucí diplomové práce: **Prof. Ing. Ivo Doležel, CSc.**
Katedra teoretické elektrotechniky

Datum zadání diplomové práce: **14. října 2013**
Termín odevzdání diplomové práce: **12. května 2014**


Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.
děkan




Doc. Ing. Karel Noháč, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 14. října 2013

Abstrakt

Předložená diplomová práce se zabývá problematikou indukčního ohřevu v příčném časově proměnném magnetickém poli. Cílem práce je na základě sestaveného matematického modelu vyšetřit rozložení magnetického pole ve vzduchové mezeře C jádra, rozložení Jouleových ztrát v ohřívané desce, časový průběh samotného ohřevu a vybrané výsledky ověřit experimentálně na fyzikálním modelu.

V první části práce je popsána historie a teorie indukčního ohřevu. Dále jsou odvozeny matematické modely popisující rozložení magnetického pole a teplotního pole na základě parciálních diferenciálních rovnic. Problém magnetického pole je modelován pomocí elektrického vektorového potenciálu \mathbf{T} , teplotní pole je řešeno pomocí rovnice přestupu tepla s upravenými okrajovými podmínkami.

Dále jsou porovnány možnosti jednotlivých druhů sdruženosti magnetického a teplotního pole a je realizován návrh experimentálního zařízení. Následuje popis použitých numerických metod.

Výsledky výpočtů pomocí obou numerických metod a měření na experimentálním zařízení jsou porovnány na závěr práce.

Klíčová slova

Indukční ohřev, tenký plech, hp -FEM, metoda konečných prvků, metoda konečných diferencí, sdružený problém, příčné časově proměnné magnetické pole, teplotní pole

Abstract

Hrbek, Jan. Induction heating of thin sheets in transverse time-variable magnetic field. Pilsen, 2014.

Master thesis. University of West Bohemia. Faculty of Electrical Engineering.

Department of Electric power engineering and Ecology.

Supervisor: Prof. Ing. Ivo Doležel, CSc.

This master thesis deals with mapping of induction heating of a thin sheet in transverse time-variable magnetic field. The main objective of the thesis is to find the distribution of magnetic field in the system according to the mathematical model, its influence on heating of the thin sheet in the air gap and experimental verification of selected results.

The history and theory of induction heating are described at the beginning of the text. The mathematical models describe the distributions of magnetic and temperature fields on the basis of partial differential equations. The magnetic problem is solved using the electric vector \mathbf{T} -potential, the thermal problem is solved using the heat transfer equation with modified boundary conditions.

In the next part, two approaches of coupling the problem are discussed and the experimental equipment is designed. This is followed by a description of the applied numerical methods. The results of both numerical computations are compared with measurements on a physical model.

Keywords

Induction heating, thin sheet, *hp*-FEM, finite element method, finite difference method, coupled problem, transverse time-variable magnetic field, temperature field

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce. Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

V Plzni dne 9.května 2014

Jan Hrbek

.....
Podpis

Poděkování

V této části práce bych velmi rád poděkoval vedoucímu této práce, Prof. Ing. Ivo Doležalovi, CSc., za skvělé vedení a odborné konzultace.

Dále mé díky patří Ing. Lukáši Koudelovi, za podněty během stavby experimentálního zařízení, Prof. Ing. Jiřímu Koženému, CSc. a Ing. Davidu Rotovi, Ph.D. za zapůjčení napájecího zdroje pro experimentální zařízení a v neposlední řadě Ing. Stanislavu Jiřincovi za pomoc s obsluhou zapůjčeného napájecího zdroje během experimentu.

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Úvod do problematiky indukčního ohřevu | 12 |
| 1.1 | Historické objevy vedoucí k technické realizaci indukčního ohřevu . . . | 12 |
| 1.2 | Fyzikální principy indukčního ohřevu | 13 |
| 2 | Matematický model magnetického pole | 15 |
| 2.1 | Model na základě magnetického vektorového potenciálu | 15 |
| 2.2 | Model na základě elektrického vektorového potenciálu | 18 |
| 3 | Matematický model teplotního pole | 20 |
| 4 | Formulace problému | 21 |
| 4.1 | Slabě sdružené úlohy | 21 |
| 4.2 | Kvazi-sdružené úlohy | 22 |
| 4.3 | Silně sdružené úlohy | 22 |
| 4.4 | Výhody a nevýhody volby | 22 |
| 5 | Návrh experimentálního zařízení | 24 |
| 5.1 | Odhad velikosti proudu zdroje | 24 |
| 5.2 | Zpětná vazba - regulace proudu | 28 |
| 5.2.1 | Veličiny použitelné pro regulaci | 28 |
| 6 | Metody numerického řešení | 30 |
| 6.1 | Metoda konečných diferencí | 31 |
| 6.2 | Metoda konečných prvků | 32 |
| 6.2.1 | Diskretizace oblasti | 33 |
| 6.2.2 | Aproximační funkce | 33 |
| 6.2.3 | Vyšší řády aproximace | 34 |
| 6.2.4 | Dokončení výpočtu | 34 |
| 6.3 | Adaptivita | 35 |
| 7 | Příprava experimentu a experiment | 36 |
| 7.1 | Měření teploty | 37 |
| 7.2 | Převedení průběhu dodávaného zdrojem na průběh harmonický | 38 |
| 7.3 | Oteplování cívky a nutnost jejího chlazení | 38 |
| 7.4 | Kompensace | 39 |
| 7.5 | Možné problémy s EMC | 40 |

| | |
|---|-----------|
| <i>OBSAH</i> | 10 |
| 7.6 Experiment | 40 |
| 8 Numerické řešení | 43 |
| 8.1 Agros2D | 43 |
| 8.2 Výpočet pomocí FDM | 47 |
| 9 Zhodnocení a porovnání výsledků | 48 |
| 9.1 Hliníkový plech, tloušťka 1 mm | 48 |
| 9.2 Hliníkový plech, tloušťka 3 mm | 51 |
| A Fotografie experimentálního zařízení | 58 |

Seznam použitých symbolů

Materiálové konstanty

| | | |
|---------------|---|---------------------------|
| μ | $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ | permeabilita |
| γ | $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ | měrná elektrická vodivost |
| ε | $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ | permitivita |
| ρ | $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ | měrná hmotnost |
| c | $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | měrná tepelná kapacita |
| λ | $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | tepelná vodivost |

Elektromagnetické pole

| | | |
|--------|---------------------------------|--------------------------------|
| H | $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ | intenzita magnetického pole |
| E | $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ | intenzita elektrického pole |
| D | $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ | elektrická indukce |
| B | T | magnetická indukce |
| A | $\text{Wb} \cdot \text{m}^{-1}$ | vektorový magnetický potenciál |
| T | $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ | vektorový elektrický potenciál |
| J | $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ | proudová hustota |
| ϕ | Wb | magnetický indukční tok |
| P_J | W | Jouleovy ztráty |
| p_J | $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ | měrné Jouleovy ztráty |

Teplotní pole

| | | |
|-----|--------------------------------|-------------|
| T | K | teplota |
| q | $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ | tepelný tok |

1

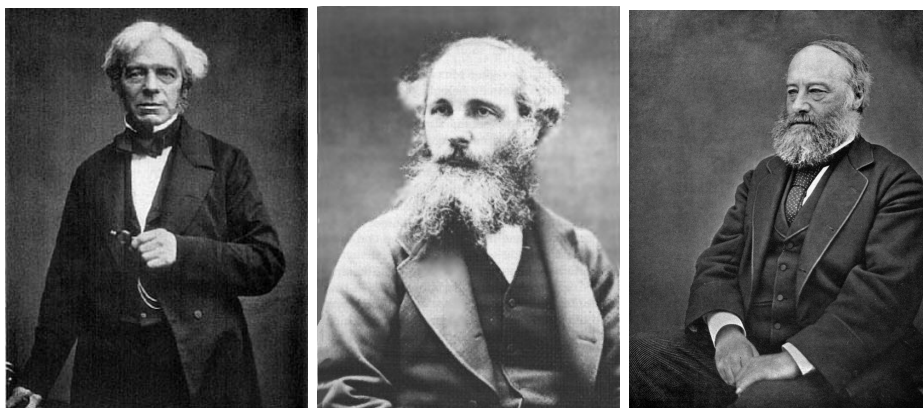
Úvod do problematiky indukčního ohřevu

Indukční ohřev patří v současné době mezi nejrozšířenější technologie tepelného zpracování kovových materiálů. Proto je na místě se touto technologií zabývat, zkoumat její další aspekty a optimalizovat ji. Po fyzikální stránce představuje indukční ohřev nepřímou metodu ohřevu, což znamená, že teplo je do ohřívaného objektu předáváno formou energie elektromagnetického pole z externího zdroje (například induktoru).

1.1 Historické objevy vedoucí k technické realizaci indukčního ohřevu

Fyzikální základy indukčního ohřevu objevili Michael Faraday a James Prescott Joule v první polovině devatenáctého století. Prvním krokem byl objev elektromagnetické indukce Michaelem Faradayem v roce 1832. Faraday si tehdy povšiml, že při změnách magnetického pole vzniká v okolním prostředí (je-li vodivé) elektrické napětí, které se projevuje vznikem indukovaných proudů [1].

Faraday však nebyl příliš zdatným teoretikem. Výsledky jeho experimentů teprve asi o 20 let později matematicky popsal skotský matematik a fyzik James Clerk Maxwell. Posledním milníkem pro popis indukčního ohřevu byl objev anglického fyzika Jamese Prescottta Joule, který se zabýval tepelnými účinky elektrického proudu a v roce 1840 je kvantifikoval zákonem dodnes nesoucí jeho jméno. Tento zákon popisuje vzájemnou vazbu mezi elektrickým proudem protékajícím elektrickým odporem a výkonem na tomto odporu vznikajícím, který se mění na teplo [2].

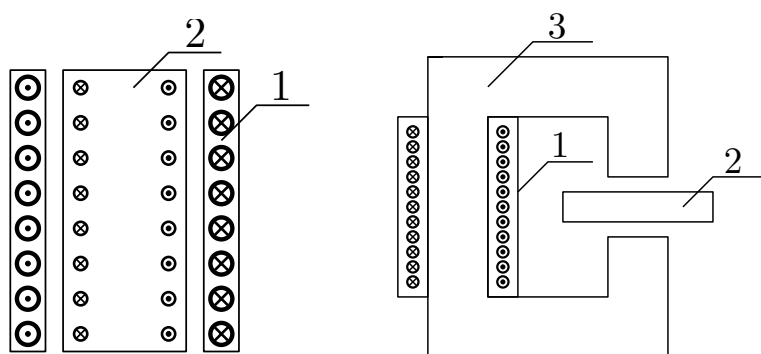


Obr. 1.1: Michael Faraday, James Clerk Maxwell a James Prescott Joule

1.2 Fyzikální principy indukčního ohřevu

Hlavní podmínkou pro realizaci indukčního ohřevu je vytvoření časově proměnného magnetického pole uvnitř ohřivaného objektu, což lze zpravidla splnit několika způsoby [3]. Prvním způsobem je umístění ohřivaného objektu do magnetického pole induktoru, protékaného časově proměnným elektrickým proudem. Za zmínku stojí i druhá možnost – získání časově proměnného magnetického pole pohybem ohřivaného materiálu ve stacionárním magnetickém poli vytvořeném buď induktorem protékaným stejnosměrným proudem nebo permanentními magnety. Stejně tak může být materiál nehybný a pohybovat se může induktor, popřípadě permanentní magnety.

V této práci je řešen případ, kdy je magnetické pole generováno nestacionárním elektrickým proudem, ovšem i v tomto případě se nabízí více variant indukčního ohřevu. Jako hlavní rozdělení bych uvedl indukční ohřev v podélném a příčném časově proměnném magnetickém poli.



Obr. 1.2: Uspořádání zařízení pro indukční ohřev v podélném magnetickém poli (vlevo) a v příčném magnetickém poli (vpravo)

Na obr. 1.2 vlevo je znázorněno geometrické rozložení zařízení pro indukční ohřev využívající podélné magnetické pole. Induktorem 1 protéká nestacionární elektrický proud. Ten vyvolává vznik nestacionárního magnetického pole v okolí induktoru. Induktor má zpravidla tvar dutého válce. Uvnitř je vložený ohříváný objekt, neboli vsázka 2. Ve vsázce se indukují proudy působící proti změně magnetického pole, které je vyvolalo. Průchodem těchto proudů vsázkou zde vznikají Jouleovy ztráty, ty se mění v teplo a vyvolávají ohřev daného materiálu [4]. V zařízeních používaných v průmyslu bývá součástí zařízení ještě stínění, které má za úkol ochránit předměty v blízkosti indukční pece před nežádoucími účinky silných magnetických polí.

Obr. 1.2 vpravo naznačuje geometrické uspořádání zařízení pro indukční ohřev v příčném magnetickém poli. Induktor 1 vytváří nestacionární magnetické pole, které se uzavírá zejména magnetickým jádrem 3. Magnetický tok prochází i vzduchovou mezerou, v níž je vloženo ohříváné těleso 2. Časově proměnné magnetické pole v něm opět indukuje vířivé proudy. Ty, jak již bylo popsáno výše, způsobují Jouleovy ztráty, jimiž je docílen ohřev tělesa.

2

Matematický model magnetického pole

2.1 Model na základě magnetického vektorového potenciálu

Při odvození matematického modelu magnetického pole pomocí magnetického vektorového potenciálu jsem vyšel z první Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

kde \mathbf{H} označuje vektor intenzity magnetického pole, \mathbf{J} je vektor proudové hustoty a zlomek $\partial \mathbf{D} / \partial t$ vyjadřuje hustotu posuvného proudu [5].

Pro případ uvažovaného indukčního ohřevu lze však rovnici (2.1) zjednodušit. Poněvadž se jedná o ohřev vodivého materiálu magnetickým polem o nízkém či středním kmitočtu (maximálně v řádu kHz), lze ukázat, že hustota posuvných proudů je v ohřívaném materiálu oproti hustotě proudů indukovaných prakticky zanedbatelná [6]. Vskutku, uvažujeme-li harmonický průběh všech veličin, lze rovnici (2.1) modifikovat do tvaru

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}}, \quad (2.2)$$

kde podtržené veličiny označují fázory. Po úpravě s využitím vztahů $\underline{\mathbf{J}} = \gamma \underline{\mathbf{E}}$ a $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$, kde γ je elektrická vodivost, ε permitivita a ω úhlová rychlost, obdržíme

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = (\gamma + j\omega\varepsilon) \underline{\mathbf{E}}. \quad (2.3)$$

A poněvadž v kovech platí, že $|\gamma| \gg |j\omega\varepsilon|$, lze druhý z členů bez jakékoli významné chyby zanedbat [7]. Předchozí úvaha samozřejmě platí nejen pro děj harmonický, ale i periodický (uspořádání obsahuje feromagnetický obvod), takže v dalším textu budeme pracovat se zjednodušenou rovnicí (2.1) ve tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (2.4)$$

Vektor \mathbf{H} intenzity magnetického pole nyní nahradíme vektorem \mathbf{B} magnetické indukce (s využitím konstitutivního vztahu $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$), takže

$$\operatorname{rot} (\mu^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{J}. \quad (2.5)$$

V dalším textu budeme uvažovat, že permeabilita prostředí je skalární veličina (zanedbáme tedy anizotropii magnetického obvodu). Tím se můžeme sice dopustit významnější chyby v oblasti magnetického obvodu, v ohřívání desce však nikoli.

Rovnice (2.5) je však pro samotné modelování pole nevhodná. Jedná se o to, že vektor \mathbf{B} není v celé oblasti spojitý, což by mohlo působit potíže během numerického výpočtu. Proto do ní dosadíme magnetický vektorový potenciál \mathbf{A} z definičního vztahu $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ (pro nějž dále platí kalibrační podmínka $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$) a obdržíme

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}. \quad (2.6)$$

Pro další odvození využijeme druhé Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru, zvané Faradayův indukční zákon. Tento zákon je dán vztahem

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

kde \mathbf{E} je intenzita elektrického pole. Po dosazení za $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ získáme vztah

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial (\operatorname{rot} \mathbf{A})}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Pořadí časového a prostorového operátoru lze v případě pole bez pohybu bez újmy na obecnosti zaměnit, takže

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Integrací této rovnice obdržíme obecné řešení ve tvaru

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi - \mathbf{f}(t), \quad (2.10)$$

kde φ je obecná skalární funkce (lze ji interpretovat jako skalární potenciál) a $\mathbf{f}(t)$ je obecná vektorová funkce času. Vynásobíme-li tuto rovnici měrnou elektrickou vodivostí γ a přeskupíme-li její členy, obdržíme

$$\mathbf{J} = -\gamma \operatorname{grad} \varphi - \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \mathbf{f}(t). \quad (2.11)$$

Jednotlivým členům této rovnice lze již přisoudit následující fyzikální význam:

- \mathbf{J} označuje celkovou proudovou hustotu v daném bodě, jež sestává z těchto tří částí:

- $-\gamma \text{grad } \varphi = \mathbf{J}_{\text{ext}}$ je proudová hustota externích proudů dodávaných ze zdroje,
- $-\gamma \partial \mathbf{A} / \partial t = \mathbf{J}_{\text{ind}}$ je hustota proudů indukovaných v bodě v důsledku časových změn magnetického pole,
- $-\gamma \mathbf{f}(t) = \mathbf{J}_o$ je hustota termoelektrického, piezoelektrického či podobného původu (ta je ovšem v našem případě rovna nule).

Nyní lze spojit rovnice (2.6) a (2.11) do tvaru

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad } \varphi. \quad (2.12)$$

jež po úpravě přejde do finálního tvaru

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{ext}}. \quad (2.13)$$

V této rovnici se předpokládá, že proudová hustota \mathbf{J}_{ext} externích proudů (dodávaných ze zdroje) je známá veličina.

Numerické řešení této časoprostorové rovnice je však extrémně náročné. Ve většině takových úloh se proto ještě zavádí předpoklad, že v každém elementu diskretizační sítě je magnetická permeabilita μ konstantní (element od elementu se však samozřejmě může měnit podle lokálního sycení). Pak lze rovnici (2.13) převést do tvaru

$$\text{rot} (\text{rot } \underline{\mathbf{A}}) + j\gamma\omega\mu\underline{\mathbf{A}} = \mu\underline{\mathbf{J}}_{\text{ext}}, \quad (2.14)$$

což po úpravě dá

$$\Delta \underline{\mathbf{A}} - j\gamma\omega\mu\underline{\mathbf{A}} = -\mu\underline{\mathbf{J}}_{\text{ext}}. \quad (2.15)$$

Tato rovnice se nazývá Helmholtzova. Během jejího numerického řešení je však nutno navrhnout iterační proceduru, která lokálním hodnotám magnetického sycení v oblastech s feromagnetikem přiřadí z magnetizační křivky odpovídající permeabilitu.

Výsledkem řešení rovnice (2.15) je znalost časoprostorového rozložení fázoru $\underline{\mathbf{A}}$ magnetického vektorového potenciálu v celé definiční oblasti úlohy. Pro ohřev desky je důležité jeho rozložení v jejím objemu; z jeho rozložení lze již snadno určit lokální hustoty indukovaných proudů $\underline{\mathbf{J}}_{\text{ind}} = -j\gamma\omega\underline{\mathbf{A}}$ a odtud již určíme příslušné lokální Jouleovy objemové ztráty p_J pomocí vztahu

$$p_J = \frac{1}{2} \frac{|\underline{\mathbf{J}}_{\text{ind}}|^2}{\gamma} \quad (2.16)$$

(předpokládáme, že veličina $\underline{\mathbf{J}}_{\text{ind}}$ představuje amplitudu).

Abychom mohli rovnici (2.15) vyřešit, musíme k ní stanovit korektní okrajové podmínky. Za tím účelem se v tomto případě zavádí umělá hranice definiční oblasti, která je dostatečně vzdálená od vyšetřované desky. Podél hranice této oblasti nahrazující nekonečno se poté zavede Dirichletova okrajová podmínka ve tvaru $\underline{\mathbf{A}} = 0$.

2.2 Model na základě elektrického vektorového potenciálu

V případě matematického modelu magnetického pole pracujícího s elektrickým vektorovým potenciálem [8] lze vyjít z druhé Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{add}})}{\partial t}, \quad (2.17)$$

kde \mathbf{B}_{ext} označuje magnetickou indukci z vnějšího zdroje a \mathbf{B}_{add} je dodatečná indukce generovaná indukovanými proudy.

Nyní zůžeme své úvahy na ohřívanou desku. V této desce nejsou přítomny zdrojové proudy a objevují se zde pouze proudy indukované časovými změnami magnetického pole. Označíme-li jejich hustotu symbolem \mathbf{J}_{ind} , platí samozřejmě $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{ind}}$.

Zavedme nyní v oblasti uvnitř desky elektrický vektorový potenciál \mathbf{T} vztahem

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} = -\operatorname{rot} \mathbf{T}. \quad (2.18)$$

Po dosazení (2.18) do (2.17) a úpravě obdržíme

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\gamma} \operatorname{rot} \mathbf{T} \right) = \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{add}}}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Aplikujme nyní na neferomagnetickou desku první Maxwellovu rovnici, přičemž v souladu s předchozí kapitolou zanedbáme vliv posuvných proudů.

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}_{\text{add}}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J}_{\text{ind}}. \quad (2.20)$$

Po dosazení z (2.18) okamžitě dostaneme

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}_{\text{add}}}{\mu_0} \right) = -\operatorname{rot} \mathbf{T}. \quad (2.21)$$

Ve výsledném vztahu (2.21) nyní odstraníme operátor rot . Tuto operaci lze provést následujícím způsobem:

$$\mathbf{T} = -\frac{\mathbf{B}_{\text{add}}}{\mu_0} - \operatorname{grad} \psi, \quad (2.22)$$

kde ψ je libovolná skalární funkce. Protože ale elektrický vektorový potenciál \mathbf{T} je vytvořen přídatným magnetickým polem \mathbf{B}_{add} , platí, že $\psi = 0$, což v důsledku znamená, že

$$\mathbf{B}_{\text{add}} = -\mu_0 \mathbf{T}. \quad (2.23)$$

Po dosazení z této rovnice do (2.19) konečně dostáváme.

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\gamma} \operatorname{rot} \mathbf{T} \right) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial t}. \quad (2.24)$$

kde pravá strana se předpokládá známá.

Úloha je pomocí elektrického vektorového potenciálu ovšem definovaná pouze v desce. Proto je nyní ještě třeba na její hranici stanovit příslušné počáteční a okrajové podmínky.

Tyto podmínky ale plynou z fyzikálních aspektů problému. Počáteční podmínka plyne ze skutečnosti, že před tím, než je deska vystavena vnějšímu magnetickému poli \mathbf{B}_{ext} , musí platit $\mathbf{B}_{\text{ext}}(\Omega, t) = 0$, takže i $\mathbf{B}_{\text{ind}}(\Omega, t) = 0$ a $\mathbf{J}_{\text{ind}}(\Omega, t) = 0$. Z rovnice (2.22) pak plyne, že

$$\mathbf{T} = -\text{grad } \Psi, \quad (2.25)$$

přičemž bez újmy na obecnosti lze položit $\psi = 0$, takže $\mathbf{T}(\Omega, t) = 0$.

Podobně okrajové podmínky plynou ze skutečnosti, že proudová hustota ve směru libovolné vnější normály n z desky je nulová (proud z desky nemůže téci do okolního vzduchu). To lze zapsat vztahem $J_{n,\text{ind}} = 0$. Tento vztah je ale ekvivalentní vztahu

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau}(\Gamma, t) = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

takže

$$\mathbf{T}(\Gamma, t) = \mathbf{K}. \quad (2.27)$$

V těchto vztazích označuje symbol τ směr tečny k hranici desky v daném bodě a \mathbf{K} je nějaký konstantní vektor. Aby okrajová podmínka během ohřevu desky byla konzistentní s podmínkou v časech $t < 0$, okamžitě dostáváme, že $\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

Pokud bychom vypustili z řešení přechodný stav (jenž zpravidla trvá jen několik málo period), podobně jako v předchozí kapitole lze rovnici (2.24) přepsat do fázorového tvaru

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\gamma} \text{rot } \underline{\mathbf{T}} \right) + j\mu_0\omega \underline{\mathbf{T}} = j\omega \underline{\mathbf{B}}_{\text{ext}}. \quad (2.28)$$

což je opět Helmholtzova rovnice. Na hranici desky pak platí $\underline{\mathbf{T}}(\Gamma, t) = \mathbf{0}$.

3

Matematický model teplotního pole

V případě indukčního ohřevu je majoritním způsobem šíření tepla kondukce, neboli vedení. Tento druh šíření tepla popisuje Fourier-Kirchhoffova rovnice ve tvaru [9].

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c \frac{dT}{dt} - p_J, \quad (3.1)$$

kde T je teplota, λ tepelná vodivost prostředí, ρ jeho měrná hmotnost, c měrná tepelná kapacita a p_J představuje měrné Jouleovy ztráty. Tyto ztráty jsou ztráty způsobené tepelnými účinky protékajících proudů a jejich velikost v bodě se určí ze vztahu [10].

$$p_J = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma}, \quad (3.2)$$

kde \mathbf{J} je celková proudová hustota v bodě. Ta je v indukčně ohřívaném tělese dána hustotou proudů indukovaných \mathbf{J}_{ind} .

V prostředí bez pohybu, kde lze nahradit plnou časovou derivaci v rovnici (3.1) derivací parciální, získá po dosazení tato rovnice tvar

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{|\mathbf{J}_{\text{ind}}|^2}{\gamma}. \quad (3.3)$$

4

Formulace problému

Prvním úkolem při volbě způsobu řešení problému je určit, jaký stupeň sdruženosti je třeba zvolit, aby bylo možné obdržet dostatečně přesné a fyzikální realitě odpovídající výsledky. Za tím účelem je proto nejprve nutné posoudit všechny okolnosti doprovázející indukční ohřev hliníkové desky.

Ohřev hliníkové desky na teplotu cca 300°C potřebnou k jejímu změknutí se odráží na materiálových parametrech. Z křivek jejich teplotních závislostí lze usoudit, že průběh měrné hmotnosti hliníku a jeho tepelné vodivosti lze v uvažovaném rozsahu teplot pokládat s malou chybou ještě za konstantní. Tento předpoklad ovšem neplatí pro měrnou tepelnou kapacitu a měrnou elektrickou vodivost. To znamená, že je nutno zvolit takový stupeň sdruženosti, který dovoluje respektovat i změny magnetického pole během indukčního ohřevu.

Ze tří běžných možností (slabé sdružení, kvazi-sdružení a silné sdružení) proto nyní posoudím eventuální použití jednotlivých přístupů.

4.1 Slabě sdružené úlohy

V případě takto sdruženého přístupu se nejprve vypočte rozložení elektromagnetického pole a následně se z jeho znalosti vyřeší pole teplotní a poté případně ještě pole termoelastických posuvů. U takovéto úlohy nedochází ke zpětnému ovlivňování polí, dá se tedy říci, že závislost mezi těmito poli probíhá pouze v jednom směru. Nelze tak proto řešit problém, ve kterém se vyskytují materiálové parametry teplotně závislé.

Řešení má přibližně takovýto průběh. Nejprve se zjistí rozložení elektromagnetického pole a z něj se určí střední hodnota Jouleových ztrát. Tato znalost se využije při řešení nestacionárního teplotního pole. Na základě vyřešeného pole teplotního se toto využije pro výpočet termoelastických posuvů.

Slabě sdružených úloh se využívá v problémech, kde jsou relativně velké časové konstanty charakterizující změny jednotlivých polí a v problémech, kde se nevyskytují materiálové parametry teplotně závislé.

4.2 Kvazi-sdružené úlohy

Tento druh sdruženosti se využívá u úloh, kdy lze předpokládat, že během delších časových intervalů procesu lze rozložení magnetického pole pokládat za ustálené (což v případě elektrotepelných úloh znamená, že rozložení magnetického pole není výrazně závislé na teplotě). Během řešení se tedy při řešení nestacionární rovnice vedení tepla využívá znalosti Jouleových ztrát určených z předem vypočteného magnetického pole pro určitý teplotní interval, a to v každém časovém kroku, během něhož teplota v dané oblasti nepřekročí jeho horní hranici. Po jejím překročení se však nutno zkorigovat materiálové parametry a jejich prostřednictvím i rozložení magnetického pole. Dochází tedy ke vzájemnému ovlivňování jednotlivých polí, ne však spojitěmu, ale po určitých (někdy i značných) časových úsecích.

Tento stupeň sdruženosti se volí v případech, kdy časové konstanty změn jednotlivých polí jsou srovnatelné a změny materiálových charakteristik jsou pozvolné a rovnoměrné.

4.3 Silně sdružené úlohy

Výpočet takto sdruženého problému probíhá v několika opakujících se krocích. Nejprve se vypočte magnetické pole odpovídající budícímu proudu v daném okamžiku. Následuje výpočet rozložení vířivých proudů a Jouleových ztrát, pomocí nichž lze v dalším kroku vypočítat rozložení teplotního pole. Z jeho znalosti lze poté bezprostředně korigovat fyzikální parametry jednotlivých použitých materiálů. Výpočet se opakuje v každém dalším časovém kroku tak dlouho, dokud nedosáhneme požadované teploty, případně nenastane jiná ukončovací podmínka.

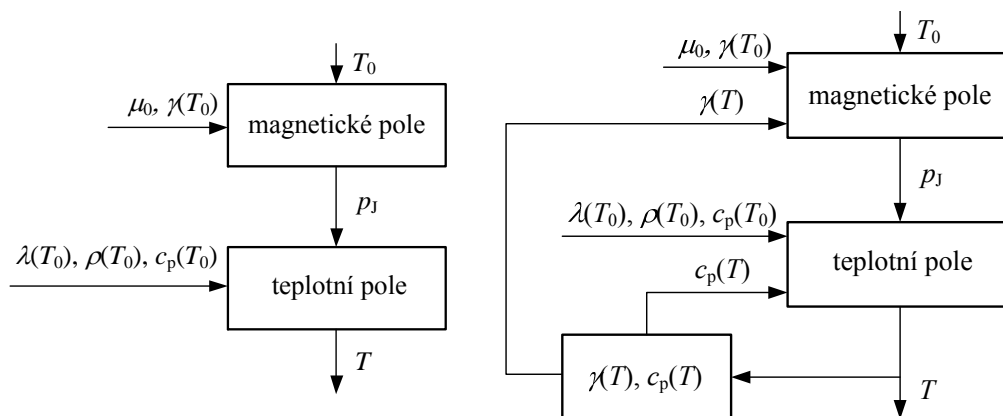
Algoritmus, který řeší úlohu jako silně sdruženou, je nutné aplikovat všude tam, kde časové konstanty změn přítomných polí jsou nízké, přičemž teplotní změny materiálových parametrů jsou naopak značné.

4.4 Výhody a nevýhody volby

Slabé sdružení je z výše uvedených důvodů nepřijatelné (výsledky by mohly být zatíženy značnými chybami), přesto bude použito při výpočtu pomocí aplikace Agros2D. To z důvodu, že v době výpočtu byl toto jediný přístup, který tato aplikace nabízela. Navíc nebude využita implicitní funkce pro sdružení, z důvodu použití jiného matematického modelu, který není implementován v této aplikaci, bude proveden výpočet magnetického pole, skriptem vypočteny měrné Jouleovy ztráty v dané oblasti a ty dosazeny do teplotního výpočtu, což odpovídá slabě sdruženému přístupu.

Silně sdružený přístup sice poskytuje nejpřesnější výsledky, ale vzhledem k přepočítávání materiálových parametrů a rozložení obou fyzikálních polí v každém časovém kroku jsou výpočty velmi zdouhavé. Častěji se proto využívá kvazi-sdruženého přístupu s kratšími intervaly, v nichž je přepočítáváno magnetické pole. V takových případech bývají výpočty o řád i více rychlejší, přičemž přesnost výsledků nijak výrazně neutrpí. Na tomto místě je třeba konstatovat, že nejistoty materiálových parametrů a jejich teplotních závislostí mohou způsobit chyby podstatně vyšší.

Zmíněný silně sdružený přístup bude použit pro výpočet metodou konečných diferencí i v této práci. Důvodem je to, že program, který je pro toto řešení napsán, využívá silně sdružený přístup. Kvazi-sdružený výpočet by byl v tomto případě výhodnější. Zde ovšem nutno přihlídnout k faktu, že i přes delší dobu řešení bude výpočet mnohonásobně méně náročný na výpočetní čas než v případě řešení tohoto problému ve 3D. Algoritmy použitých způsobů řešení jsou naznačeny v obr. 4.1.



Obr. 4.1: Diagram slabě sdruženého (vlevo) a silně sdruženého (vpravo) řešení problému

5

Návrh experimentálního zařízení

5.1 Odhad velikosti proudu zdroje

Pro odhad velikosti proudu zdroje byla zvolena tenká kruhová deska o poloměru 50 mm a tloušťce 1 mm vyrobená z hliníku. Předpokládá se, že tato deska se bude ohřívat na teplotu 200 °C. Jako výchozí teplota byla zvolena teplota pokojová, tedy 20 °C.

Objem plechu činí

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot z = \pi \cdot 0,05^2 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 7,85 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3. \quad (5.1)$$

Měrná hmotnost hliníku při 20 °C se pohybuje okolo hodnoty $\rho_{\text{Al}} = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, takže hmotnost desky při této teplotě je přibližně

$$m = \rho \cdot V = 2700 \cdot 8,64 \cdot 10^{-5} = 0,0212 \text{ kg} \quad (5.2)$$

a během ohřevu se nemění (zatímco měrná hmotnost a objem se mění).

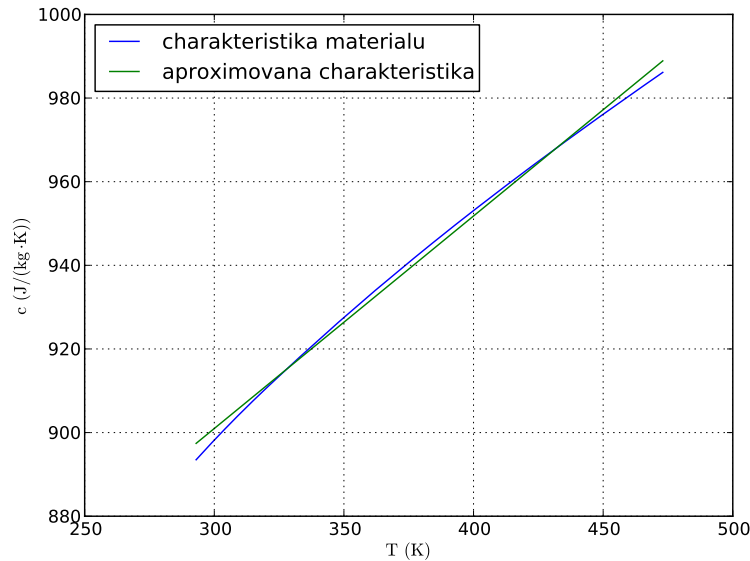
Měrná tepelná kapacita hliníku silně závisí na teplotě, proto je důležité tuto závislost zohlednit při výpočtech. Tato závislost je pro požadovaný teplotní interval znázorněna na obr. 5.1. Vzhledem k tomu, že je jen lehce nelineární, interpoloval jsem ji pro následné výpočty přímkou o parametrech spočtených metodou nejmenších čtverců.

Po výpočtu vychází rovnice přímky ve tvaru

$$c = 0,5082 \cdot T + 748,5157 \quad (5.3)$$

Celkové teplo nutné pro ohřev desky z pokojové teploty 20 °C na předpokládanou střední teplotu 200 °C se určí ze vztahu

$$Q = m \cdot \int_{T_1}^{T_2} c \, dT = 0,0212 \cdot \int_{293,15}^{473,15} (0,5082 \cdot T + 748,5157) \, dT =$$



Obr. 5.1: Závislost měrné tepelné kapacity hliníku na teplotě v Kelvinech

$$= 3600,3517 \text{ J} \approx 3600 \text{ J}.$$

Budeme-li předpokládat, že cca 50 % tepelné energie dodané desce se zmaří konvekcí do okolního vzduchu a radiací, je třeba jí dodat celkové teplo o velikosti 7200 J.

Pro stanovení tepelného výkonu dodávanému do desky budeme uvažovat, že doba ohřevu se může pohybovat od 30 s do 600 s.

$$Q = P \cdot t \rightarrow 7200 \rightarrow P = \frac{7200}{t}. \quad (5.4)$$

Tato závislost je znázorněna na obr. 5.4.

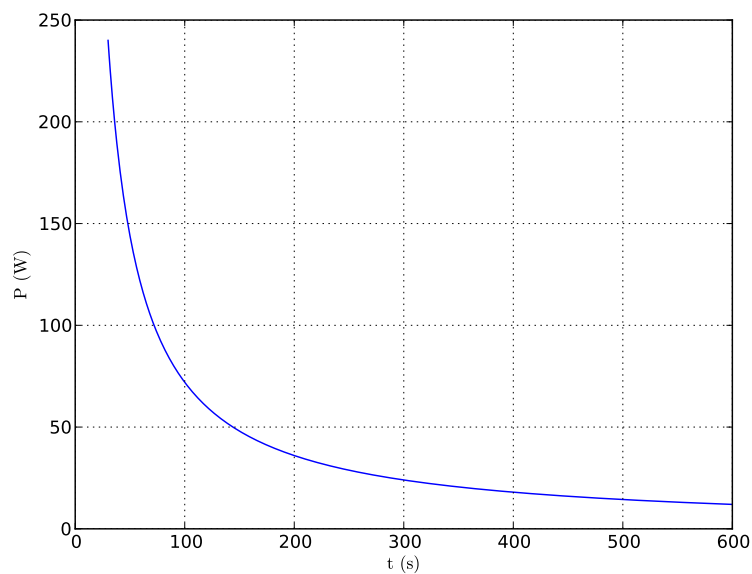
Hloubka vniku a elektromagnetického pole do materiálu plechu je při parametrech $\gamma_{Al} = 23,7 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 1$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ a kmitočtu $f = 1000 \text{ Hz}$

$$a = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \gamma_{Al} \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} =$$

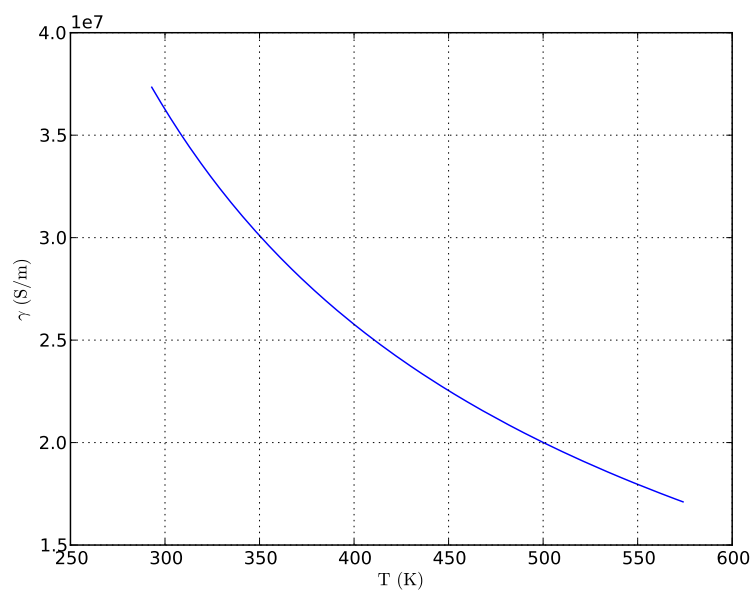
$$= \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 23,7 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}} = 3,26923 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Měrná elektrická vodivost γ_{Al} je však rovněž závislá na teplotě. To ovšem bylo při stanovení hloubky vniku zanedbáno, pro výpočet byla uvažována vodivost při střední teplotě ohřevu 433,15 K. Průběh závislosti měrné elektrické vodivosti na teplotě je znázorněn na obr. 5.3.

Z výkonu potřebného pro ohřev a z aktivního objemu desky (její části mezi póly magnetického obvodu) nyní stanovíme potřebnou intenzitu magnetického pole H v tomto obvodu. Jestliže průřez C-jádra předpokládáme ve tvaru čtverce o ploše



Obr. 5.2: Závislost užitečného výkonu dodávaného ohřívanému plechu v závislosti na době ohřevu



Obr. 5.3: Závislost elektrické vodivosti hliníku na teplotě v Kelvinech

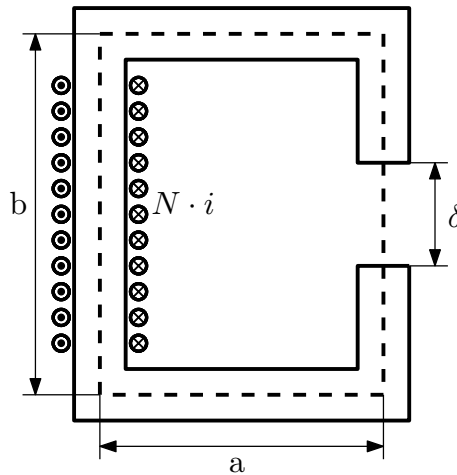
$S = 0,03 \cdot 0,03 = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, pak se výkon dodaný desce vypočte ze vztahu

$$P = \frac{1}{2 \cdot a \cdot \gamma} \cdot H^2 \cdot S \implies H = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot \gamma_{\text{Al}} \cdot Q}{St}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 3,26923 \cdot 10^{-3} \cdot 23,7 \cdot 10^6 \cdot 7200}{0,9 \cdot 10^{-3} t}} = \frac{1,11 \cdot 10^6}{\sqrt{t}}. \quad (5.5)$$

Dále musíme stanovit intenzitu H_{Fe} magnetického pole vygenerovanou budicí cívku v magnetickém obvodu tak, aby v desce byla právě výše vypočtená intenzita H . K tomu ale musíme mít k dispozici představu o tvaru a rozměrech magnetického obvodu.

Jestliže předpokládáme magnetický obvod ve tvaru C-jádra podle obr. 5.4, kde rozměry a , b a δ jsou známy,



Obr. 5.4: Geometrické uspořádání experimentálního zařízení

lze v první Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru (se zanedbáním posuvných proudů) ve tvaru

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0, \quad (5.6)$$

přibližně vypočítat

$$Ni \doteq 2 \cdot H_{\text{Fe}} \cdot a + H_{\text{Fe}} \cdot b + H_{\text{Fe}} \cdot (b - \delta) + H \cdot \delta, \quad (5.7)$$

kde H_{Fe} je velikost magnetické intenzity v železe magnetického obvodu. Z rovnosti normálových složek magnetické indukce na rozhraní vzduchu a železa magnetického obvodu vyplývá, že

$$H_{\text{Fe}} = \frac{B_{\text{Fe}}}{\mu_{r,\text{Fe}}}, \quad (5.8)$$

kde $\mu_{r,Fe}$ je relativní permeabilita železa. Potřebné ampérvávitý inductoru pak získáme ze vztahu

$$Ni = H \left(\frac{2a + 2b - \delta}{\mu_{r,Fe}} + \delta \right). \quad (5.9)$$

Zvolíme-li $a = 12,5$ cm, $b = 20,5$ cm, $\delta = 0,7$ cm a budeme-li předpokládat středně sycený magnetický obvod o permeabilitě $\mu_{r,Fe} = 1500$, obdržíme

$$Ni = 0.0075 \cdot H \quad (5.10)$$

a po dosazení za H ze vztahu (5.5)

$$Ni = \frac{8323}{\sqrt{t}} \quad (5.11)$$

Pokud bychom chtěli ohřev desky realizovat v čase $t = 30$ s, byla by nutná přiložená magnetomotorická síla $Ni = 1520$ ampérvávitů, pro $t = 1200$ s by pak postačovala síla $Ni = 240$ ampérvávitů. Z těchto údajů nyní navrhne rozměry příslušné cívky z měděného vodiče. Připustíme-li proudovou hustotu v jejích závitech $J = 5$ A mm⁻², znamenalo by to, že čistý průřez cívky pro krátký ohřev (30 s) by byl cca 304 mm². Pokud bychom zvolili vodič kruhového průřezu, musíme tento čistý průřez ještě vydělit součinitelem plnění cívky k_p , jehož velikost jsem zvolil $k_p = 0.65$ (vodič kruhového průřezu, izolace apod.). Vychází tedy, že skutečný průřez cívky $S_c = 467,7$ mm², jež lze zaokrouhlit na 500 mm².

Vzhledem ke zvoleným rozměrům C-jádra $a = 12,5$ cm, $b = 20,5$ cm a $S = 3 \times 3$ cm² lze volit délku cívky $l = 10$ cm a tloušťku $d = 0,5$ cm. Takto tedy bude zajištěn i rychlý ohřev, v případě pomalejšího ohřevu lze příslušně snížit proud protékající cívkou.

Z konstrukčních důvodů je vyrobena kostřička, na kterou je cívka navinuta. Ta se skládá ze 110 závitů ve dvou vrstvách. Pro cívku je použit lakovaný měděný vodič o průměru 2 mm.

5.2 Zpětná vazba - regulace proudu

Z různých důvodů mohou být během ohřevu vyžadovány zvláštní režimy. Například jeho závěrečná fáze musí probíhat pomaleji z důvodu dosažení homogenního rozložení teploty a podobně. Z těchto důvodů by měl být proces v potřebném měřítku regulovatelný [11]. A regulovanou veličinou v tomto případě bude amplituda budicího proudu, neboť řízení kmitočtu je daleko komplikovanější a nákladnější.

Tato úloha však není z důvodu použití feromagnetického C-jádra lineární. Při narůstajícím proudu inductoru poroste velikost vybuzeného magnetického toku v magnetickém obvodu do určitého maxima, poté ale s přesycením začne klesat. Proto je výhodné regulovat jeho amplitudu vhodnou zpětnou vazbou.

5.2.1 Veličiny použitelné pro regulaci

V daném zařízení lze proud regulovat dvěma způsoby. V prvním případě je řídicí veličinou teplota ohřívaného tělesa, ve druhém přímo magnetická indukce B v magnetickém obvodu.

Teplota jako řídicí veličina

Rozložení teploty daného objektu je možné snímat soustavou termočlánků. Jejich běžná citlivost se pohybuje v řádu desítek $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$. Pro případ experimentálního zařízení by nejvíce vyhovovaly termočlánky typu J, jež mají teplotní rozsah 0°C až 750°C , pracují s železem a konstantanem a jejich citlivost je $52,3 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$. Je zde však nutno podotknout, že tyto články mají vysoké časové konstanty. Pokud vezmeme v potaz, že bychom termočlánky typu J využívali pouze do 300°C , což je méně, než polovina jejich rozsahu, dojdeme k závěru, že na celém rozsahu námi měřených teplot by byl rozdíl napětí přibližně $15,69 \text{ mV}$. Uvážíme-li dále zmíněné velké časové konstanty pro teplotu, jeví se jejich použití do zpětné vazby pro regulaci zdroje jako nevhodné.

Magnetická indukce jako řídicí veličina

V tomto případě lze nejlépe použít Hallovu sondu. Vloží-li se polovodičová destička do magnetického pole, prochází skrz ni magnetický indukční tok, a vzniká zde tzv. Hallovo napětí

$$U_H = k \cdot I \cdot B, \quad (5.12)$$

kde k je konstanta respektující materiál, tloušťku polovodičové destičky atd., I je stejnosměrný proud a B magnetická indukce vyvolaná magnetickým polem.

Citlivost Hallovy sondy bývá většinou na úrovni jednotek či desetin mT a maximální měřitelná magnetická indukce je vysoká, v některých případech dokonce výrobci uvádějí, že je neomezená.

I zde ovšem vystávají dva problémy. Prvním z nich je skutečnost, že pracovní teplota Hallovy sondy je ve většině případů kolem 100°C , odolnější Hallovy sondy mají maximální pracovní teplotu kolem 200°C . Druhý problém souvisí s prvním, protože pro korektní měření magnetické indukce by bylo ideální umístit sondu do vzduchové mezery C-jádra, kde je ovšem bude ohříváný plech a protože předpokládám ohřev do teplot kolem 300°C , lze očekávat, že při přenosu tepla konvekcí a sáláním bude snímač vystaven teplotám vyšším než je nejvyšší povolená teplota.

Zmíněné problémy lze však vyřešit buď tepelnou izolací sond a odvodem tepla z okolí snímače, nebo navržením jeho vhodnějšího umístění. Po zvážení všech pro a proti proto jako řídicí veličinu volím magnetickou indukci.

6

Metody numerického řešení

V této části bych rád přiblížil numerické metody využívané při výpočtu.

Analytické metody řešení fyzikálních problémů se od šedesátých let minulého století, kdy došlo k prudkému rozvoji výpočetní techniky, staly spíše metodami školními. Jejich používání pro reálné výpočty vyžadovalo velká a často nepřijatelná zjednodušení, ale i tak bylo možno řešit jen některé jednoduché problémy.

To bylo důvodem pro relativně rychlý rozvoj aplikace a implementace různých numerických metod v prostředí počítačů. V dnešní době již existuje numerických metod velké množství a stále se rozšiřují, vylepšují jejich algoritmy, zlepšuje se stabilita a celkově se zvyšují jejich možnosti. Pro řešení elektromagnetického a teplotního pole se v minulosti do značné míry využívala metoda konečných diferencí, která má ale jistá omezení. Proto se se zvyšováním výkonu počítačů začalo přecházet na metodu konečných prvků (FEM).

Zadaný problém indukčního ohřevu je řešen aplikací Agros2D, jenž je založen na metodě konečných prvků vyššího řádu přesnosti a umožňující využití h -adaptivity, p -adaptivity nebo hp -adaptivity. V dalším textu bude krátce vysvětlen princip této metody. Aplikace Agros2D nenabízí možnost řešení matematického modelu využívajícího elektrického vektorového \mathbf{T} -potenciál, proto při řešení v této aplikaci bude docházet k různým zjednodušováním, která budou popsána v kapitole 8.1, zabývající se samotným řešením konkrétního případu.

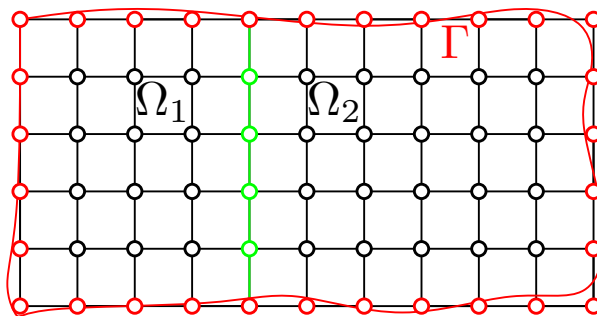
Z výše popsaného důvodu jsem se rozhodl řešit problém kromě aplikace Agros2D ještě pomocí metody konečných diferencí. Stejně jako v případě metody konečných prvků, i tato metoda bude dále popsána.

Po vyřešení bude tedy možné porovnat výsledky z aplikace Agros2D (se zjednodušeními), dále získané pomocí metody konečných diferencí a experimentálně.

6.1 Metoda konečných diferencí

Metoda konečných diferencí (dále jen FDM), označována také jako metoda sítí, vychází z velmi jednoduché myšlenky a to, že se derivace v diferenciální rovnici nahradí diferencemi [12] [13]. Z toho důvodu přechází matematický model do tvaru algebraických rovnic. Princip této metody lze popsat ve třech krocích. Nechť existuje definiční oblast Ω , která je ohraničena křivkou Γ , platí také, že tato oblast může být rozdělena do oblastí (Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , ...), kde každá podoblast odpovídá jinému materiálovému složení.

Nejprve je třeba definiční oblast Ω diskretizovat, konečným počtem bodů, ve kterých se následně bude hledat řešení. Ve většině případů se využívá čtvercové nebo obdélníkové sítě, v případě, že problém je řešen v pravoúhlých souřadnicích. V průsečících čar sítě vznikají takzvané uzly. Za zmínku stojí to, že sítí je nahrazována i hraniční křivka Γ , která může mít obecně jakýkoli tvar. Pokud je tedy tento tvar nahrazen stranami čtverců/obdélníků, dochází k chybě. Tato chyba může být značná, jde ovšem kompenzovat zkrácením hrany jednotlivých čtverců/obdélníků a tím docílit vyšší přesnosti. Toto zjemňování lze provádět teoreticky do nekonečna, tedy až k případu, kdy by se skutečná hranice shodovala s hranicí sítě, ovšem s velmi vysokým nárůstem rovnic při každém zjemnění, a tedy i ke značnému zvýšení výpočetního času. Proto již v této fázi je nutné volit kompromis mezi přesností a dobou výpočtu. Na obr.6.1 je naznačena diskretizovaná oblast Ω , ohraničená křivkou červené barvy Γ , zde je pro názornost zobrazeno, jak se může lišit pravá hranice od hranice diskretizační sítě. Pro uzly na hranici, mající červenou barvu, platí okrajové podmínky. Dále je oblast Ω rozdělena na oblasti Ω_1 a Ω_2 , které odděluje rozhraní, znázorněné zelenou barvou. Uzly, pro které platí podmínky na rozhraní jsou označeny stejnou barvou jako rozhraní, tedy zelenou. A černou barvou mají uzly, které se nacházejí uvnitř oblasti.



Obr. 6.1: Diskretizovaná oblast pomocí čtvercové sítě

V dalším kroku je třeba vytvořit diferenční aproximaci parciální diferenciální rovnice. Diferenční aproximace většinou vychází z Taylorova rozvoje toho daného matematického modelu a je jí nutné provést pro všechny uzly ležící v oblasti Ω , kde je nahrazena parciální diferenciální rovnice pro potenciál rovnicí algebraickou. Stejně tak je nutné provést aproximaci v uzlech, které leží na hranici Γ a nebo na rozhraní více podoblastí, a tedy mají přiřazenou okrajovou podmínku, případně podmínku na roz-

hraní. Tyto jsou taktéž nahrazeny algebraickou rovnicí. V této fázi se již nacházíme v diskrétním modelu problému.

Během posledního kroku je soustava algebraických rovnic, kterou jsme získali v předchozích krocích, vyřešena. Je velmi výhodné zvolit optimální numerickou metodu pro řešení, jelikož takto vzniklá řešená matice je specifická v tom, že se jedná o pásovou matici, nebo též řídkou, tedy nachází se v ní značné množství nulových prvků.

6.2 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (dále jen FEM) se využívá v mnohých oblastech fyziky, od řešení problémů z oblasti mechaniky, přes elektromagnetické pole a teplotní pole, proudění a mnoha dalších problémů, které lze popsat parciálními diferenciálními rovnicemi s určenými okrajovými podmínkami [13].

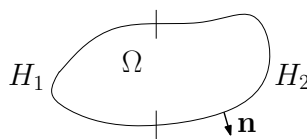
Pro použití této metody je nutné definovat matematický model problému, tedy rovnice, které tento problém popisují. Obecně lze každou z rovnic formálně zapsat následujícím způsobem.

$$\mathcal{L}\phi = f, \quad (6.1)$$

kde \mathcal{L} je diferenciální operátor, f je budící funkce a ϕ je hledaná veličina. Jak budící, tak hledané funkce mohou samozřejmě být jak skalární, tak i vektorové či tenzorové veličiny. Pro jednoduchost budou další aspekty metody vysvětleny pro rovnice skalární, není však problém rozšířit je na složitější typy rovnic.

Metoda konečných prvků nejčastěji vychází z Galerkinovy metody nebo Ritzovy metody. FEM se od zmíněných metod liší formulací aproximačních funkcí.

Princip této metody spočívá v nahrazení spojité oblasti konečným počtem podoblastí ve tvaru elementů, na kterých je neznámá funkce zastoupena jednoduchou interpolační funkcí s neznámými koeficienty.



Obr. 6.2: Řešená oblast a okrajové podmínky

Na Obr. 6.2 je znázorněna ve 2D řešená oblast Ω s vyznačenou vnější hranicí. Zde je pro ilustraci tato hranice rozdělena na dvě části lišící se hraniční podmínkou. Část H_1 je charakterizována Dirichletovu podmínkou, která hledané veličině na této části hranice přiřazuje konkrétní velikost a lze ji zapsat ve tvaru

$$\phi = h,$$

kde h je známá funkce, zatímco část H_2 je popsána Neumannovu podmínkou, která určuje, že je známá změna hledané funkce ve směru vnější normály. Tuto podmínku lze

vyjádřit vztahem

$$\left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{y}_0 \right) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

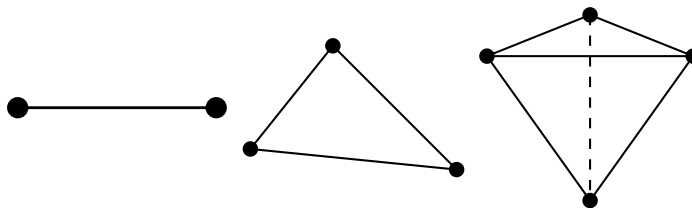
kde \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 jsou jednotkové vektory náležící jednotlivým osám souřadnicového systému a \mathbf{n} je jednotkový vektor ve směru vnější normály.

Takto definovaný okrajový problém převádí metoda konečných prvků na řešení konečného systému algebraických rovnic tím, že definiční oblast Ω pokryje diskretizační sítí, v jednotlivých elementech této sítě nahradí hledanou funkci její vhodnou aproximací a k této aproximaci se poté určují příslušné koeficienty [14].

6.2.1 Diskretizace oblasti

Rozdělení definiční oblasti Ω na elementy, neboli diskretizace oblasti, je velmi důležitým krokem v metodě konečných prvků. Je na ní závislá rychlost výpočtu, množství dat v paměti počítače při řešení a v neposlední řadě přesnost numerického výpočtu.

Při diskretizaci oblasti se (podle dimensionalit úlohy) nejčastěji využívá jedno-, dvoj- nebo trojrozměrných elementů v různých tvarech. Na obr. 6.3 jsou zobrazeny nejčastější tvary elementů. Dalším prvkem diskretizovaného prostoru jsou takzvané uzly, které jsou na obr. 6.3 vyznačeny body [13].



Obr. 6.3: Elementy ve tvaru úsečky, trojúhelníku a tetrahedronu

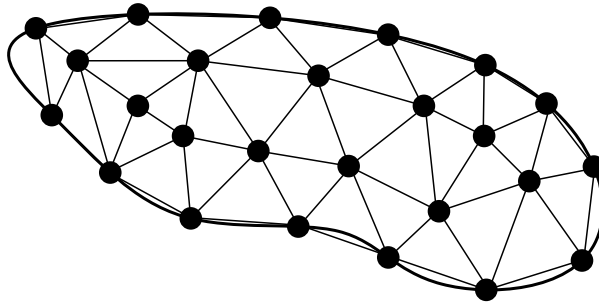
Pro názornou ukázkou diskretizované oblasti je na obr. 6.4 zobrazena diskretizační síť realizovaná trojúhelníkovými elementy. Diskretizace má několik pravidel. Prvním je, že elementy se nikdy nesmí překrývat a druhým, že mezi nimi nesmí být mezery. Vrcholy jednotlivých prvků jsou soumístné s uzly elementů sousedních [15].

Obecně platí, že čím menší elementy jsou, tím je výpočet přesnější, ale narůstá doba výpočtu.

6.2.2 Aproximační funkce

Pokračujme dále v ilustraci 2D problému. Po diskretizaci oblasti je třeba zvolit funkce, kterými bude aproximováno hledané řešení $\phi(x, y)$ uvnitř jednotlivých elementů. K tomuto účelu mohou posloužit lineární aproximační funkce, které jsou často využívány pro svou jednoduchost.

Lineární funkce je vyjádřena pro každý z uzlů elementu, což při trojúhelníkovém elementu dává soustavu tří rovnic. Soustavu je nutné vyřešit pro neznámé koeficienty aproximační funkce, které se vzájemně využijí pro její další popis.



Obr. 6.4: Diskretizovaná oblast pomocí trojúhelníkové sítě

6.2.3 Vyšší řády aproximace

Pokud lze očekávat, že se fyzikální pole v prostoru nemění příliš prudce, stačí k aproximaci hledané funkce v elementu polynomy nízkého (zpravidla prvního nebo druhého) řádu [16]. Práce s takovými polynomy je celkem jednoduchá, odvození příslušných algebraických rovnic není obtížné a výsledky bývají ve velmi dobrém souladu s fyzikální realitou. Procedury pro zpracování takových náhrad nízkých řádů jsou rovněž implementovány v každém dobrém profesionálním SW.

Složitější situace může ale nastat v oblastech, v nichž je pole vysoce nelineární (příkladem může být elektromagnetické pole ve feromagnetických tělesech tam, kde dochází k jejich přesycení). Chceme-li je popsat v tomto případě pomocí elementů nižších řádů tak, aby výsledky byly dostatečně přesné, musí být tyto elementy velmi malé, což zvyšuje jejich počet a tedy počet stupňů volnosti diskretizované úlohy. Ukazuje se, že v tomto případě je často výhodnější pracovat s většími elementy, v nichž je však pole aproximováno polynomy vyšších řádů. Hledání koeficientů těchto polynomů ovšem zvyšuje výpočetní náročnost, ale příslušné elementy mohou být (při stejné nebo lepší přesnosti výsledků) podstatně větší, a tato výhoda zde převládá. A právě na tomto principu jsou vybudovány procedury v systémech Agros2D a Hermes, které jsou schopny pracovat s polynomy až desátého řádu.

6.2.4 Dokončení výpočtu

Ze znalosti aproximačního polynomu pro jednotlivé elementy vychází odvození rovnic pro element, které se odvozuje z principu minimální energie (také Thomsonův nebo Lagrangeův princip). Ten říká, že každá fyzikální soustava se za daných podmínek nastaví tak, aby se její potenciální energie snížila na minimum. Energie je veličina aditivní, takže energie všech elementů je rovna součtu funkcionalů všech elementů. V každém elementu je proto nejprve nutno vyjádřit příslušnou energii pomocí aproximované hledané funkce a celkovou energii je poté nutno minimalizovat.

Pokud jsou rovnice pro elementy odvozené, systém rovnic lze psát ve tvaru

$$[K] [\phi] = [b] , \quad (6.2)$$

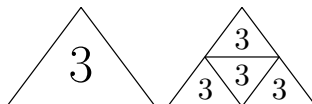
kde $[K]$ je matice soustavy. Tato matice může být samozřejmě nelineární, to zna-

mená, že její koeficienty mohou záviset na řešení — pak je nutno pro řešení použít vhodný iterační proces. Po vyřešení se získají hodnoty hledané funkce ϕ ve všech uzlových bodech diskretizační sítě, v dalších bodech se pak získají vhodnou interpolační technikou.

6.3 Adaptivita

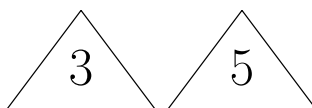
Aplikace Agros2D využívá při řešení fyzikálních problémů tří typů adaptivity, jak již bylo zmíněno výše, v této části bych rád v krátkosti popsal, co to adaptivita je a proč je její použití výhodné [17].

Prvním popisovaným druhem adaptivity je h -adaptivita, která spočívá ve zjemňování sítě v oblastech, kde velikost chyby přeroste maximální přípustnou mez. V tomto místě se původní elementy rozdělí na menší elementy, přičemž řád polynomu zůstává ve všech nových elementech zachován z elementu původního, jak je patrné z obr. 6.5.



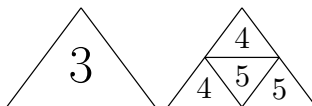
Obr. 6.5: h -adaptivita

Další využitelnou adaptivitou je p -adaptivita, která nemění počet a velikost elementů v dané oblasti, nýbrž zvyšuje řád aproximačního polynomu při zachování původní velikosti a množství prvků. Na obr. 6.6 je zobrazen princip p -adaptivity.



Obr. 6.6: p -adaptivita

Poslední typ adaptivity, hp -adaptivita, kombinuje vlastnosti obou výše zmíněných druhů. Tento typ adaptivity patří mezi nejflexibilnější a nejvýkonnější techniky, vyznačující se především exponenciální konvergencí výsledků. hp -adaptivita zvyšuje v oblastech s vysokou chybou řád polynomu a zároveň zvyšuje počet elementů a zmenšuje jejich rozměry. To lze vidět na obr. 6.7. Na druhé straně je ale zapotřebí říci, že tento typ adaptivity je časově i paměťově nejnáročnější.



Obr. 6.7: hp -adaptivita

7

Příprava experimentu a experiment

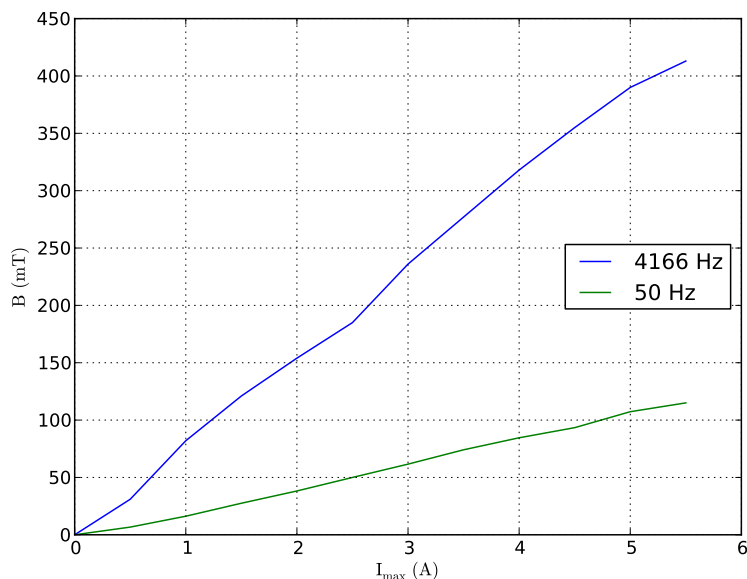
Experimentální zařízení bylo navrženo v předchozí kapitole a podle tohoto návrhu poté zkonstruováno. Nejprve bylo provedeno ověření funkčnosti s autotransfornátorem, který pracoval na síťové frekvenci 50 Hz a regulovatelným proudem $0 \div 4$ A, přičemž krátkodobě bylo možné dosáhnout proudu až 8 A. Při snaze o dlouhodobějším využití vyššího zatížení byl proud po odpovídající době vypnut tepelnou pojistkou.

U zařízení byla ověřena funkčnost, ale z důvodu nízké frekvence a proudu bylo dosaženo ohřevu minimálního, proto nebyl zaznamenáván průběh teploty v závislosti na čase. Bylo provedeno měření závislosti magnetické indukce na elektrickém proudu, která je znázorněna na obr. 7.1. Tím bylo zjištěno, do jaké velikosti proudu, který je schopen zdroj dodat, je magnetizační charakteristika lineární, tedy kdy lze μ magnetického obvodu považovat za konstantní.

Po provedení prvotního měření s autotransfornátorem byl k zařízení připojen zdroj, který je navržen pro napájení zařízení pro indukční ohřev. Toto zařízení pracuje s regulovatelným proudem $5 \div 25$ A, frekvencí $5 \div 40$ kHz a generovaný průběh má charakter pilového signálu. Během prvotního měření s tímto zdrojem se objevilo několik problémů, a tedy i otázek, jak tyto problémy vyřešit. Otázky, které bylo nutné před samotným experimentem vyřešit, zněly

- jakým způsobem měřit teplotu ohřívajícího objektu,
- jakým způsobem převést pilovitý průběh dodávaný zdrojem na harmonický průběh při stejné frekvenci, který bude možno využít při numerickém výpočtu,
- oteplování cívky na základě vyšší frekvence, způsobující vyšší vliv povrchového jevu, než na kterou bylo zařízení navrženo,
- nutnost použití kompenzace,

- problém s EMC během experimentu.



Obr. 7.1: Závislost magnetické indukce na elektrickém proudu pro frekvence 50 Hz a 4166 Hz

7.1 Měření teploty

Pro měření teploty bylo možné využít termočlánky, pyrometr nebo termokameru. Nejprve bylo provedeno měření teploty ohřívajícího objektu termočlánky, avšak od této možnosti měření bylo ihned odstoupeno z důvodu velkého zkreslení. To bylo způsobeno vysokou frekvencí a vyšším proudem, což způsobovalo relativně vysokou indukci ve vzduchové mezeře a tím i indukované napětí na termočlátku. Toto napětí způsobovalo zobrazování nereálných hodnot teplot.

Další možností bylo využití pyrometru. Tato možnost nebyla též využita. Tentokrát to nebylo způsobeno problémy fyzikálního rázu, ale tím, že nebylo možné měřit teplotu v konkrétním bodě, ale v oblasti. Dalším omezením bylo, že pyrometry neměly stativ, proto by bylo velmi obtížné měřit jen jednu oblast bez odchylek, způsobených třasem ruky apod. Navíc u pyrometru je nutnost nastavení emisivity ε , která se musí nastavit i u termokamery, čímž pro tento experiment pyrometr nemá oproti termokameře žádnou výhodu.

Poslední, a zároveň použitou možností je termokamera. Ta byla vybrána pro možnost měření teploty v konkrétních bodech, nezávislost na magnetickém poli ve vzduchové mezeře magnetického obvodu a také díky prostorové stabilitě.

Po výběru systému měření teploty bylo nutné nastavit emisivitu ε , což je úkon velmi náročný. V tomto případě bylo využito toho, že ohřívající objekt byl natřen

černou matnou barvou, tedy odrazení, které ve většině případů zkresluje měření termokamerou, se minimalizovalo. Dále byl použit cejchovaný termočlánek, kterým nebylo možné měřit v magnetickém poli, ale při pokojové teplotě a s vypnutým zdrojem, se nastavila emisivita ε na hodnotu odpovídající hodnotě zobrazované na zobrazovacím zařízení termočlánek. Následně se objekt ohřál na $100\text{ }^\circ\text{C}$, zdroj byl vypnut a teplota byla ověřena termočlánekem. Stejně ověření se provedlo i pro teplotu $150\text{ }^\circ\text{C}$. Tímto způsobem byla stanovena hodnota emisivity $\varepsilon = 0,98$, při níž teplota změřená termokamerou odpovídala teplotě zobrazované na displeji přístroje, k němuž byla připojena teplotní sonda.

7.2 Převedení průběhu dodávaného zdrojem na průběh harmonický

V tomto případě bylo využito znalosti vztahu pro výpočet efektivní hodnoty periodické funkce, což průběh dodávaný zdrojem splňuje. Pak platí

$$\begin{aligned} I_{\text{ef}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_{\text{max}}^2 \sin^2 \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_{\text{max}}^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \, dt} = \\ &= \sqrt{\frac{I_{\text{max}}^2}{2T} \left[[t]_0^T - \left[\frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T \right]} = \sqrt{\frac{I_{\text{max}}^2}{2T} T} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Lze tedy říci, že při zachování frekvence neharmonického průběhu pro amplitudu harmonického průběhu bude platit

$$I_{\text{max}} = I_{\text{ef}} \cdot \sqrt{2}.$$

Pro numerický výpočet je tedy možné použít průběh harmonický s amplitudou I_{max} a frekvencí shodnou s frekvencí dodávanou do zařízení ze zdroje, zde $f = 4166\text{ Hz}$.

7.3 Oteplování cívky a nutnost jejího chlazení

Při experimentu byl použit zdroj s minimální frekvencí uváděnou výrobcem 5 kHz , povedlo se ovšem dodávat proud s frekvencí nižší a to 4166 Hz . Při takto vysoké frekvenci je nutné do návrhu zahrnout i vliv povrchového jevu, při němž je proudová hustota vytlačována do tenké vrstvy pod povrchem vodiče. Tím zde dochází k průtoku stejně velkého proudu, ale menším průřezem, což vede k většímu oteplení vodičů. Navíc z důvodu bezpečnosti byl induktor vložen do plastové krabičky, z níž vycházel pouze izolovaný napájecí vodič. Toto bezpečnostní opatření ovšem minimalizovalo možnost přestupu tepla konvekcí a tedy ochlazování cívky.

Proto mezi první a druhou vrstvou induktoru byla zavedena teplotní sonda a bylo provedeno měření teploty induktoru. I zde platí to, že nelze měřit teplotu za provozu, a proto byla teplota induktoru měřena vždy až po dosažení určité teploty ohřívajícího

objektu, kdy byla zastavena dodávka elektrické energie do induktoru. Pro představu, při teplotě ohřívání desky $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ byla teplota induktoru $72\text{ }^{\circ}\text{C}$. To bylo vyhodnoceno jako nebezpečné z důvodu možného průrazu laku vodiče, ze kterého byl induktor navinut. Pro další měření byla teplota, při níž průraz izolačního laku je reálný, stanovena na hodnotu $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, tedy pouhých $28\text{ }^{\circ}\text{C}$ nad teplotou dosaženou při ohřevu vsázky na teplotu $90\text{ }^{\circ}\text{C}$. Z těchto údajů bylo usouzeno, že pro dosažení vyšších teplot v ohříváném tělese musí být induktor chlazen.

Chlazení bylo provedeno tak, že dvě stěny krabičky induktoru byly odebrány a místo nich byly do blízkosti induktoru instalovány dva ventilátory s průtokem vzduchu $69,66\text{ m}^3/\text{h}$ při 3200 RPM . Jeden z nich přitom vháněl vzduch na krabičky a druhý sloužil k odvodu ohřátého vzduchu z oblasti induktoru z krabičky pryč.

Po navržení a zkonstruování chlazení induktoru bylo opět provedeno měření teploty induktoru, kam již z doby předchozí byla natrvalo zavedena teplotní sonda právě pro účel měření oteplení induktoru během experimentu. Prvotní měření účinnosti chlazení cívky bylo provedeno nejprve po intervalu 300 s , po který bylo experimentální zařízení připojeno ke zdroji s hodnotami proudu a frekvence, s nimiž měl být proveden samotný experiment. Po tomto časovém úseku se teplota cívky změnila o $2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Následoval interval 600 s , po kterém došlo k nárůstu teploty o $5\text{ }^{\circ}\text{C}$. A poslední test chlazení byl proveden na cyklicky se opakujících třech intervalech trvajících 600 s s pauzou 30 s mezi intervaly. Zde došlo k oteplení cívky o $13\text{ }^{\circ}\text{C}$ na teplotu $35\text{ }^{\circ}\text{C}$. Z tohoto důvodu bylo chlazení induktoru prohlášeno za dostačující a dále již nijak neomezovalo průběh experimentu.

Po každé části experimentu, kdy byl vypnut zdroj napájení induktoru, byla informativně zkontrolována teplota induktoru. Ta nikdy nepřekročila $35\text{ }^{\circ}\text{C}$.

7.4 Kompenzace

Při testovacím měření se nepovedlo do induktoru dodávat vyšší proud než $I_{ef} = 3,5\text{ A}$, což je proud nižší než minimální proud udávaný výrobcem. Proto nebylo možné využít regulovatelnost zdroje. Důvodem této skutečnosti byla vysoká indukčnost, která byla měřena pro cívku včetně magnetického jádra a měla hodnotu $L = 8\text{ mH}$. Dále byl změřen elektrický odpor induktoru, který měl hodnotu $R = 0,34\ \Omega$. Tedy impedance induktoru při frekvenci 4166 Hz odpovídala $\bar{Z} = 0,34 + j209,6\ \Omega$, tedy $\varphi = 89,907^{\circ}$ a $\cos \varphi = 1,622 \cdot 10^{-3}$.

V laboratoři se v době experimentu nacházel model indukční pece pro ohřev větších vsázek. Toto zařízení využívalo magnetické pole podélné a neobsahovalo magnetický obvod. Proto bylo provedeno otestování možnosti regulace proudu u tohoto zařízení a zde byl proud regulovatelný v celém rozsahu zdroje. Proto byla změřena indukčnost a odpor tohoto zařízení, které měly velikost $L = 120\ \mu\text{H}$ a $R = 0,4\ \Omega$. Impedance tohoto zařízení se při 4166 Hz rovná $\bar{Z} = 0,4 + j3,93\ \Omega$. V tomto případě $\varphi = 84,19^{\circ}$ a $\cos \varphi = 0,101$.

Kompenzační kondenzátor byl tedy navržen na hodnoty odpovídající modelu indukční pece, a to z důvodu, že v tomto případě nebylo žádoucí, aby $\cos \varphi$ bylo co nejblíže hodnotě 1, protože pak by impedancí zařízení tvořil pouze odpor a zdroj

by při takto nízkém elektrickém odporu byl prakticky zkratován. Proti takovému stavu je ovšem napájecí zdroj chráněn a nebylo by tedy ani možné takový experiment provést.

Pro experimentální zařízení lze použít sériové kompenzace, při čemž výpočet kompenzačního kondenzátoru se provede podle vztahu

$$X_c = X_L - X_{\text{komp}} = 209,6 - 3,93 = 205,67 \Omega,$$

kde X_c je reaktance kompenzačního kondenzátoru, X_L je vypočtená reaktance induktoru ze znalosti indukčnosti a X_{komp} je hodnota velikosti reaktance, na kterou chceme systém kompenzovat. Dále

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X_c} = 185,75 \text{ nF}.$$

Při sériové kompenzaci by ovšem proud dodávaný do cívky tekli i přes kompenzační kondenzátor. Z tohoto důvodu by byl zapotřebí kondenzátor, přes který bez problémů projde proud o velikosti minimálně 10 A, s frekvencí 4166 Hz a jeho kapacita by měla být 185,75 nF. Takovýto kondenzátor nebylo možné pořídit z důvodu vysoké ceny. Zařízení tedy bylo provozováno pouze s proudem o amplitudě 5 A.

7.5 Možné problémy s EMC

Proud byl měřen proudovou sondou, která byla připojena k osciloskopu. Zde bylo při provádění experimentu potřeba dávat pozor na rušení kabelu, na němž byla tato sonda připojena, jelikož tento kabel byl nestíněný a mohlo by tedy dojít k rušení od silového kabelu, na který byla sonda nasazena. Tento vliv byl krátce zkoumán, aby byly známy podmínky, kdy lze bez ovlivnění měřit proud a kdy jsou výsledky měření proudu ovlivněny a tedy znehodnoceny. Ideálně vyšla konfigurace, kdy kabely k sobě byly položeny kolmo, v žádné části neprocházely kolem sebe rovnoběžně a nikde se nekřížily. V takovémto případě nebyl žádný vliv silového kabelu na kabel přenášející informace z proudové sondy pozorován. Naopak pokud kabely procházely kolem sebe rovnoběžně do vzdálenosti 0,5 m, byly hodnoty naprosto zkeslené a to jak co do velikostí frekvence, tak i co velikostí proudu.

Tento problém tedy byl taktéž odstraněn před započítím samotného experimentu.

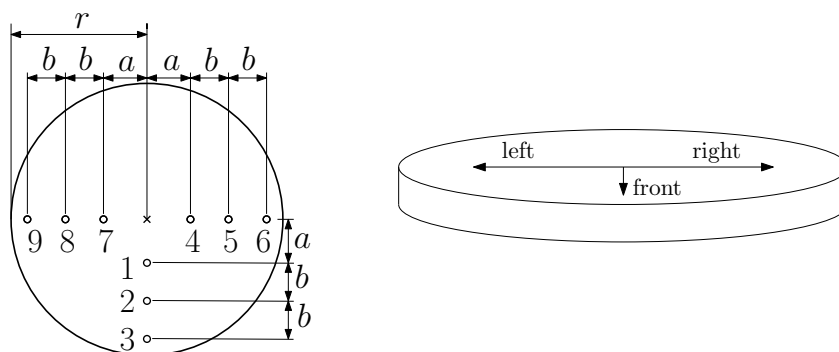
7.6 Experiment

Jak již bylo zmíněno, v prvotním návrhu experimentu bylo počítáno s tím, že bude změřena závislost magnetické indukce na velikosti dodávaného proudu a pro samotný experiment bude vybrán proud, který se bude ještě nacházet na lineární části magnetizační charakteristiky, ale v jejím nejvyšším možném bodě. Důvodem je co nejvyšší efektivnost zařízení (pokud by byl použit proud nižší, bylo by zařízení provozováno pod svými možnostmi, ovšem pokud by byl použit proud větší, tak by při velké změně proudu byl nárůst magnetické indukce minimální, což by bylo neefektivní).

Tuto myšlenku narušil problém s tím, že zařízení bez kompenzace bylo možné provozovat pouze na jedné velikosti proudu, kterou nebylo možno regulovat. Pro alespoň částečné dodržení původního konceptu práce byla závislost magnetické indukce na velikosti proudu změřena, a to způsobem takovým, že pro měření s proudy nižšími byl použit rezistor zapojený jako proudový dělič a tím bylo možné část proudu ze zdroje odebrat z větve, na které bylo připojeno experimentální zařízení. Takto byla změřena indukce pro proud o amplitudě od 0 A do 5 A. Aby byla jistota, že i bod 5 A je stále ještě na lineární části charakteristiky, byl připojen sériově k induktoru kondenzátor, který byl schopen krátkodobě propustit proud až 8 A a při frekvenci 4,1 kHz měl kapacitu přibližně $30 \mu\text{F}$. Tím došlo k určité malé kompenzaci a amplituda proudu mohla dosáhnout až 5,5 A. Při této hodnotě byla změřena velikost magnetické indukce ve vzduchové mezeře a bylo zjištěno, že proud o amplitudě 5 A ještě opravdu spadá do lineární části magnetizační charakteristiky.

Průběhy závislostí magnetické indukce na velikosti amplitudy proudu, přepočtené na harmonický průběh o frekvenci 4166 Hz jsou znázorněny na obr. 7.1.

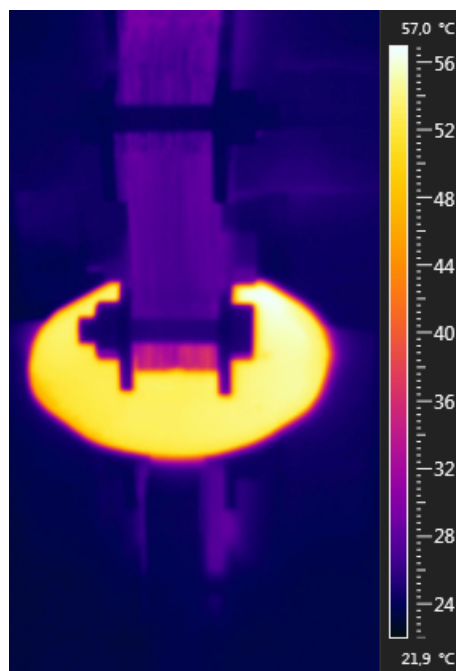
Experiment probíhal za dodržení všech výše popsanych podmínek, pro proud o amplitudě 5 A a frekvenci 4166 Hz. Experiment proběhl pro desky o tloušťkách 1 mm a 3 mm. Celý experiment byl zaznamenáván na termokameru a zároveň byly touto termokamerou měřeny čas a teplota. Teplota byla měřena ve třech směrech a na třech poloměrech.



Obr. 7.2: Body, ve kterých byla měřena teplota (vlevo) a pohled na měřenou desku s popsány mi směry (vpravo)

Poloměry naznačené na obr. 7.2 mají velikosti $a = 16 \text{ mm}$, $b = 15 \text{ mm}$ a poloměr desky $r = 50 \text{ mm}$. Popisky v pravé části obr. 7.2 se shodují se značením v charakteristikách, které se nacházejí v kapitole 9. Jako obr. 7.3 jsem pro názornost zařadil fotografii pořízenou termokamerou během experimentu, který probíhal s plechem o tloušťce 1 mm.

Průběhy získané měřením během experimentu jsou porovnány s vypočtenými hodnotami na konci této práce, konkrétně v kapitole 9.



Obr. 7.3: Fotografie pořízená termokamerou v průběhu experimentu s plechem o tloušťce 1 mm

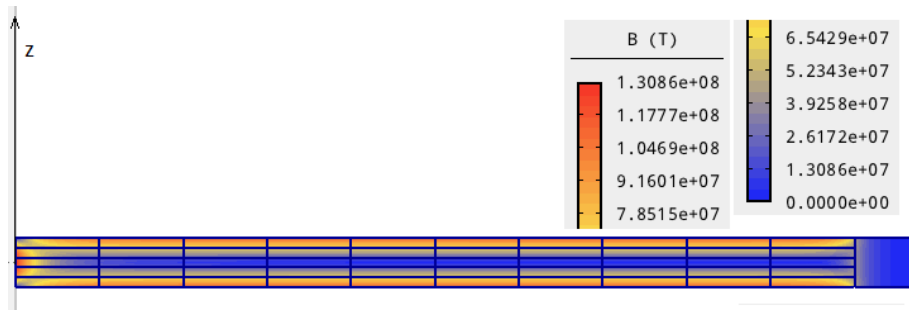
8

Numerické řešení

8.1 Agros2D

Prvním úkolem bylo navrhnout jakým způsobem provést řešení sdružení magnetického a teplotního pole. Poslední verze aplikace Agros2D¹ sice umí provádět sdružení pomocí měrných Jouleových ztrát, ale s ohledem na to, že byl řešen jiný matematický model, než který řeší Agros2D, a bylo pouze využito jeho formální podobnosti s matematickým modelem, který tato aplikace využívá, nebylo možné tento způsob použít. Řešená oblast magnetického pole, která se nachází přímo ve vzduchové mezeře magnetického obvodu, byla tedy rozdělena na 50 částí, kde v každé části byl odebrán vzorek velikosti hustoty vířivých proudů \mathbf{J}_{ind} , na obr. 8.1 je vidět toto rozložení, jen s tím rozdílem, že na obrázku značné \mathbf{B} , podle matematického modelu využívajícího magnetický vektorový potenciál, je v případě matematického modelu využívajícího elektrický vektorový potenciál \mathbf{J}_{ind} . Je ovšem nutné si uvědomit, že zadávané materiálové parametry mají jiný význam, než jaký je zadáván do aplikace. To platí pro konduktivitu γ a permeabilitu μ . Tyto navzorkované velikosti \mathbf{J}_{ind} z jednotlivých oblastí poté stačí umocnit a vydělit konduktivitou γ . A tím jsou známy měrné Jouleovy ztráty p_J . V této chvíli je nutné si uvědomit, jak velké zjednodušení bylo tímto krokem provedeno. Pro korektní výpočet je nutné tento výpočet provést v každém bodě řešené oblasti, aby bylo možné získat i skutečné rozložení měrných Jouleových ztrát, mnou zvolený přístup je velmi zjednodušený. Ze získaných průměrných vzorků velikosti indukovaných proudů \mathbf{J}_{ind} je možné provést ještě jedno zjednodušení, které není tak výrazné vzhledem ke zjednodušení předchozímu. Toto zjednodušení spočívá v tom, že lze sjednotit části oblasti do skupin, které mají měrné Jouleovy ztráty podobně velké. Bylo zjištěno, že bez větší ztráty na přesnosti je možné části rozdělit do čtyř skupin.

¹V době řešení to byla verze 3.2.0.0.20140302



Obr. 8.1: Rozložení vířivých proudů v desce o tloušťce 1 mm

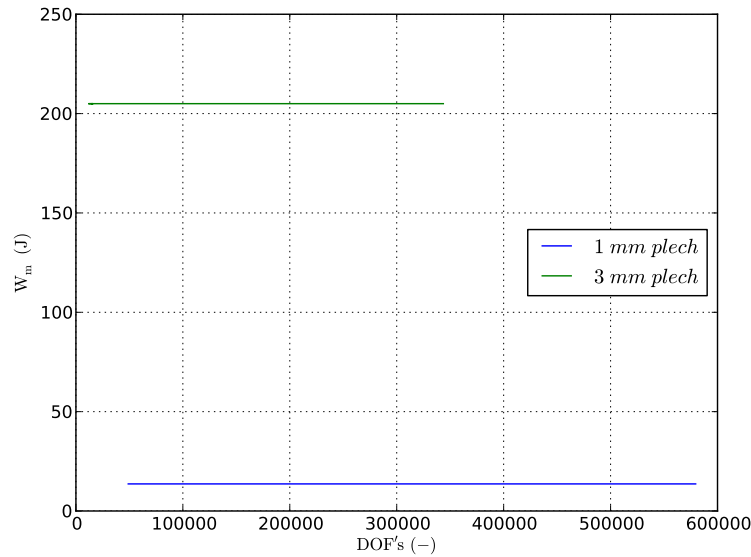
Nyní, když je navrženo, jak řešit provázání magnetického a teplotního pole, je nutné navrhnout správný postup numerického výpočtu, konkrétně konvergence jednotlivých použitelných adaptivit a konvergence řešení, pro zvolení vhodných výpočetních parametrů.

Konvergence řešení byla provedena tak, že byla nastavována velikost plochy elementu v řešené oblasti, ta byla zapsána spolu s počtem stupňů volnosti a počtem elementů. Obvykle se zapisují i měrné Jouleovy ztráty, které jsou dosazovány jako vstupní parametr do výpočtu teplotního pole, ale jelikož jsem neprováděl výpočet obvyklým matematickým modelem, ale matematickým modelem využívajícím elektrický vektorový potenciál \mathbf{T} a do aplikace Agros2D jsem zadával velikost proudové hustoty \mathbf{J} , což ovšem v mém matematickém modelu byla velikost $\omega\mathbf{B}$ a měrné Jouleovy ztráty se vypočtou jako kvadrát celkové proudové hustoty v bodě, která se vydělí velikostí měrné vodivosti γ , neměl by tento přístup vypovídající hodnotu, jelikož \mathbf{J} je zadané a γ též. Bylo proto nutné nalézt takovou veličinu, která se mění s nějakou veličinou, která je vypočtena numerickým výpočtem. Touto veličinou jsem zvolil energii magnetického pole W_m . Ta závisí na \mathbf{B} a \mathbf{H} a obě tyto veličiny jsou vypočtené, nikoli zadané. Energie magnetického pole se spočte

$$W_m = \int_V w_m dV; \quad w_m = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B}, \quad (8.1)$$

je tedy patrné, že tato veličina je závislá na vypočtených hodnotách. Nicméně bych rád upozornil, že v mém případě nemá veličina, kterou označuji jako energii magnetického pole, fyzikální podstatu energie magnetického pole. Maximální obsah elementu (minimální počet stupňů volnosti) pro výpočet byl zvolen tak, že nad určitou velikostí se již neměnil ani počet elementů, ani počet stupňů volnosti, tak tato velikost elementu byla určena jako největší možná pro konvergenční průběhy.

Jak je vidět z průběhů na obr. 8.2, energie magnetického pole se nemění v závislosti na počtu stupňů volnosti. Lze tedy výpočet provést s nejmenší uvažovaný počet stupňů volnosti, což pro plech o tloušťce 1 mm je 48931 a to odpovídá velikosti plochy elementu 5 mm². Pro plech tloušťky 3 mm je minimální počet stupňů volnosti roven 15061, což odpovídá velikosti plochy elementu 10 mm². Tyto velikosti elementů budou tedy dále při výpočtu využity.



Obr. 8.2: Závislost energie magnetického pole na počtu stupňů volnosti pro plech tloušťky 1 mm a 3 mm

Dále je potřeba určit vhodný druh adaptivity, čímž se budu zabývat v další části textu. Obvykle se dělají konvergenční grafy a z nich se usoudí rychlost konvergence jednotlivých adaptivit, v tomto případě se ovšem jedná o velmi jednoduchý problém, proto všechny adaptivity dosáhly chyby nižší, než zvolené $\varepsilon = 1\%$, během prvního kroku. Nelze tedy udělat závislost na počtu kroků a posuzovat výpočet podle počtu potřebných kroků pro konvergenci pod určenou hodnotu. Proto je nutné zvolit jiné optimalizační kritérium. V tab.8.1 jsou všechny údaje k jednotlivým možnostem

Tab. 8.1: Porovnání jednotlivých adaptivních metod pro plech 1 mm

| Adaptivita | Řád polynomu | t (s) | DOF's | Elementů | $\varepsilon(\%)$ - adapt. chyba |
|------------------|--------------|---------|--------|----------|----------------------------------|
| h -adaptivita | $p=1$ | 6,807 | 11572 | 12144 | 0,1965 |
| h -adaptivita | $p=2$ | 15,025 | 47328 | 12144 | $3,1985 \cdot 10^{-5}$ |
| h -adaptivita | $p=3$ | 30,018 | 107372 | 12144 | $5,2223 \cdot 10^{-7}$ |
| p -adaptivita | $p=2$ | 6,89 | 47328 | 12144 | $3,3944 \cdot 10^{-5}$ |
| hp -adaptivita | $p=2$ | 28,77 | 47328 | 12144 | $3,4108 \cdot 10^{-5}$ |

výpočtu, které jsou potřebné pro jejich porovnání. Samozřejmě řádem polynomu u p -adaptivity a hp -adaptivity je myšlen řád polynomu počáteční. Tím jsem zvolil rychlost výpočtu a velikost chyby. h -adaptivita s $p=1$ má spolu s p -adaptivitou nejkratší čas výpočtu, ale chyba prvního jmenovaného způsobu je o čtyři řády vyšší. h -adaptivita s $p=2$, hp -adaptivita a p -adaptivita mají stejnou velikost chyby, ale doba potřebná k výpočtu je nejkratší u p -adaptivity. Z porovnání všech uvedených metod bylo rozhodnuto, že k výpočtu bude použita p -adaptivita. Opět připomínám, že ma-

ximální chyba sice byla zvolena na $\varepsilon = 1\%$ a při výpočtu bude chyba $\varepsilon = 3,3944 \cdot 10^{-5}\%$, ale při zjišťování měrných Jouleových ztrát bude způsobena chyba mnohonásobně vyšší, z důvodu zjednodušení.

Nyní se stejné zhodnocení provede i pro výpočet plechu o tloušťce 3 mm. Veškeré údaje, na jejichž základě analýza proběhla lze vidět v tab.8.2 V tomto případě byl zvolen

Tab. 8.2: Porovnání jednotlivých adaptivních metod pro plech 3 mm

| Adaptivita | Řád polynomu | t (s) | DOF's | Elementů | $\varepsilon(\%)$ - adapt. chyba |
|------------------|--------------|---------|-------|----------|----------------------------------|
| h -adaptivita | $p=1$ | 1,898 | 3208 | 3424 | 0,2774 |
| h -adaptivita | $p=2$ | 4,603 | 13248 | 3424 | $4,9267 \cdot 10^{-4}$ |
| h -adaptivita | $p=3$ | 8,853 | 30136 | 3424 | $9,1736 \cdot 10^{-6}$ |
| p -adaptivita | $p=2$ | 1,927 | 13248 | 3424 | $5,26 \cdot 10^{-4}$ |
| hp -adaptivita | $p=2$ | 8,388 | 13248 | 3424 | $5,3025 \cdot 10^{-4}$ |

len jako nejvhodnější výpočet využívající p -adaptivitu s počátečním řádem polynomu $p=2$.

V tuto chvíli jsou známy všechny parametry numerického výpočtu. Proto je na řadě spuštění samotného výpočtu magnetického pole a výpočet měrných Jouleových ztrát pro jednotlivé oblasti a následné provedení teplotního výpočtu. Okrajová podmínka byla zvolena na ose antisymetrie, ale i na všech ostatních třech krajích hliníkové desky, ve tvaru $T=0$. Na obr. 8.3 je vidět rozdělení oblastí do skupin. V části, která je na-



Obr. 8.3: Rozdělení do oblastí s přibližně stejnou hustotou vířivých proudů

značena zelenou barvou a přímo sousedí s osou antisymetrie byla vypočtena průměrná velikost měrných Jouleových ztrát $p_J = 60 \cdot 10^6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$. Pro oblast označenou barvou červenou $p_J = 90 \cdot 10^6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$, žlutou $p_J = 25 \cdot 10^6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$ a modrou $p_J = 1 \cdot 10^5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$.

Tyto hodnoty byly použity pro teplotní výpočet. Tento výpočet byl proveden jako tranzientní. Proto bylo zapotřebí nastavit počáteční podmínku a okrajové podmínky. Počáteční podmínka byla zvolena tak, že bylo nastaveno, že v čase t_0 byla teplota desky rovna $T = 30^\circ\text{C}$, resp. $T = 303,15 \text{ K}$. Tato hodnota byla zvolena na základě shodnosti s experimentem, kde počáteční teplota desky byla $T = 30^\circ\text{C}$.

Okrajové podmínky byly dvě rozdílné a to pro osu antisymetrie a druhá pro všechny ostatní kraje desky. V obou případech se jednalo o tutéž rovnici, pouze s jinými koeficienty. Tato okrajová podmínka má tvar

$$f = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n_0} = f_0 + \alpha (T_{\text{ext}} - T) + \varepsilon \sigma (T_{\text{amb}}^4 - T^4), \quad (8.2)$$

kde f_0 je hustota tepelného toku ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$), α koeficient přestupu tepla konvekcí ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$), T_{ext} teplota okolí (K), ε je emisivita povrchu v rozsahu $< 0; 1 >$ (-), σ nazývaná Stefan-Boltzmannova konstanta a mající velikost $5,6704\cdot 10^8$ ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\text{K}^{-4}$), T teplota ohřívané desky (K) a T_{amb} teplota okolních těles, která na sebe vzájemně působí s ohříváním objektem (K).

Pro případ okrajové podmínky přiřazené ose antisymetrie byly zvoleny následující velikosti koeficientů $f_0 = 0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, $\alpha = 0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ a též emisivita $\varepsilon = 0$, tím jsou vyřazeny členy v závorkách. Okolní teploty tedy nemají vliv na řešení.

Pro všechny ostatní kraje byly zvoleny velikosti koeficientů takovéto $f_0 = 0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, $\alpha = 20 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, tato hodnota byla odhadnuta na základě podmínek v laboratoři během průběhu experimentu. Okolní teploty byly zadány $T_{\text{ext}} = 295,15 \text{ K}$, stejně tak $T_{\text{amb}} = 295,15 \text{ K}$ a emisivita $\varepsilon = 0,98$.

Další nastavení je nutné provést pro tranzientní úlohu. Těmito parametry jsou délka časového kroku, případně počet časových kroků, a celková doba řešení. Pro plech o tloušťce 1 mm byla zvolena celková doba $t = 300 \text{ s}$, s časovým krokem $\Delta t = 1 \text{ s}$. Ohřev plechu o tloušťce 3 mm byl počítán na dobu $t = 100 \text{ s}$, opět s časovým krokem $\Delta t = 1 \text{ s}$.

Výsledky výpočtů jsou uvedeny v kapitole 9, kde je provedeno porovnání obou metod výpočtů i experimentu.

8.2 Výpočet pomocí FDM

V tomto případě byla situace velmi podobná jako při výpočtu v aplikaci Agros2D, jen s tím rozdílem, že byl výpočet proveden jako silně sdružený, včetně výpočtu termoelastických posuvů. Proto zde bylo nutné zadat i závislosti jednotlivých materiálových parametrů na teplotě, tedy byla řešena i teplotní závislost těchto parametrů. Řešení problému zde bylo jednodušší o to, že program byl přímo určen pro výpočet pomocí matematického modelu založeného na elektrickém vektorovém potenciálu \mathbf{T} .

Přímo do kódu, před jeho kompilací, byla zadána amplituda magnetické indukce \mathbf{B} , která byla změřena během experimentu. Do textového souboru, ze kterého načítal program vstupní data, byly nahrány pomocí tabulek materiálové parametry ohřívané desky v závislosti na teplotě, dále geometrické uspořádání a parametry sítě.

Okrajové podmínky byly nastaveny stejně jako u výpočtu pomocí aplikace Agros2D, včetně parametrů. Jediný rozdíl mezi těmito dvěma výpočty byl v časovém kroku výpočtu při použití FDM, ten byl nastaven na $1 \mu\text{s}$ z důvodu výpočtové stability, pokud byl nastaven větší, výpočet nebyl stabilní. Výsledky byly ukládány do výstupního textového souboru, kde jsem zvolil časový krok zápisu do tohoto souboru 1 s, protože pokud by byl stejný časový krok výpočtu, i zápisu do souboru, velmi by se prodloužila doba výpočtu. Zápis do souboru byla totiž jedna z časově nejnáročnějších částí výpočtu.

I výsledky získané tímto způsobem jsou zveřejněny v kapitole 9.

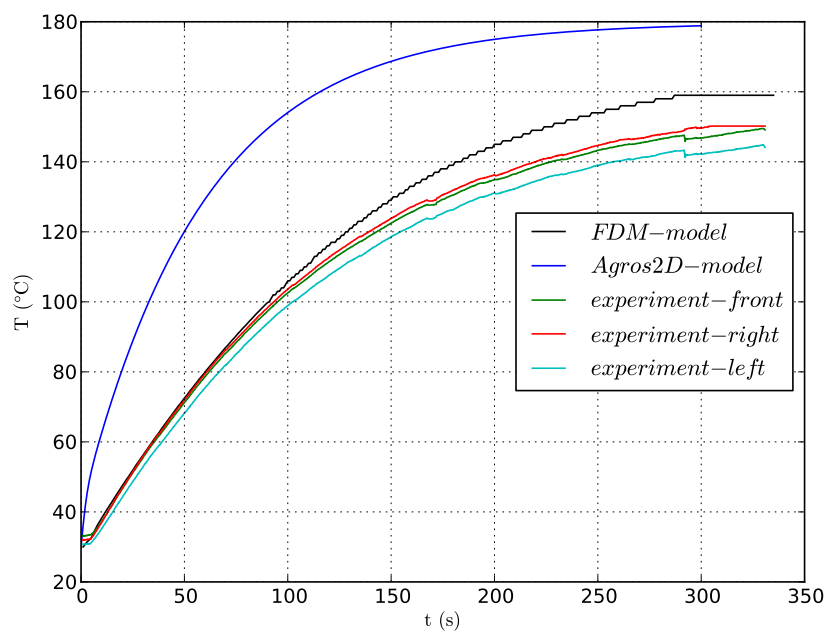
9

Zhodnocení a porovnání výsledků

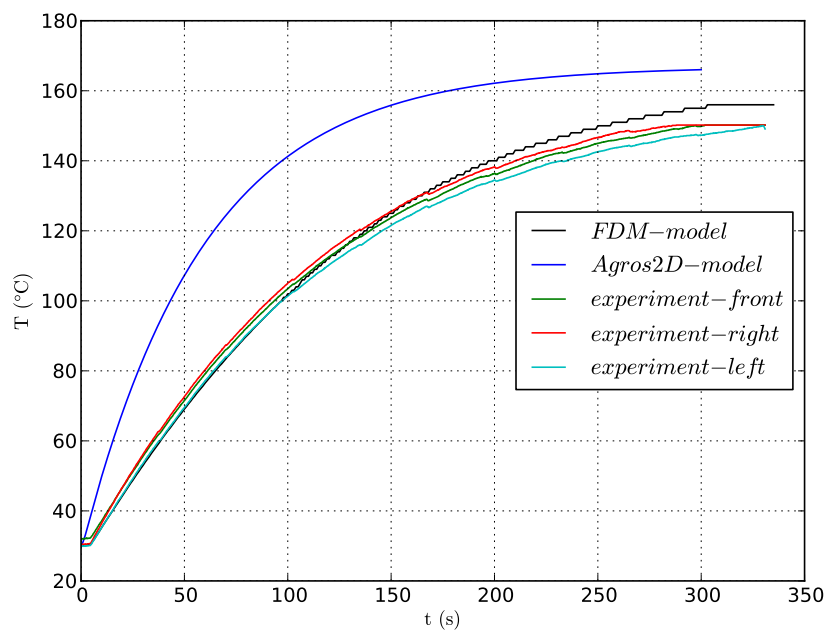
Na závěr této práce bych rád porovnal výsledky získané pomocí jednotlivých metod a experimentu a následně zhodnotil vhodnost použití matematického modelu využívajícího elektrický vektorový potenciál \mathbf{T} v inženýrské praxi, a možná úskalí. Nejprve bude porovnána varianta, kdy byl ohříván plech o tloušťce 1 mm.

9.1 Hliníkový plech, tloušťka 1 mm

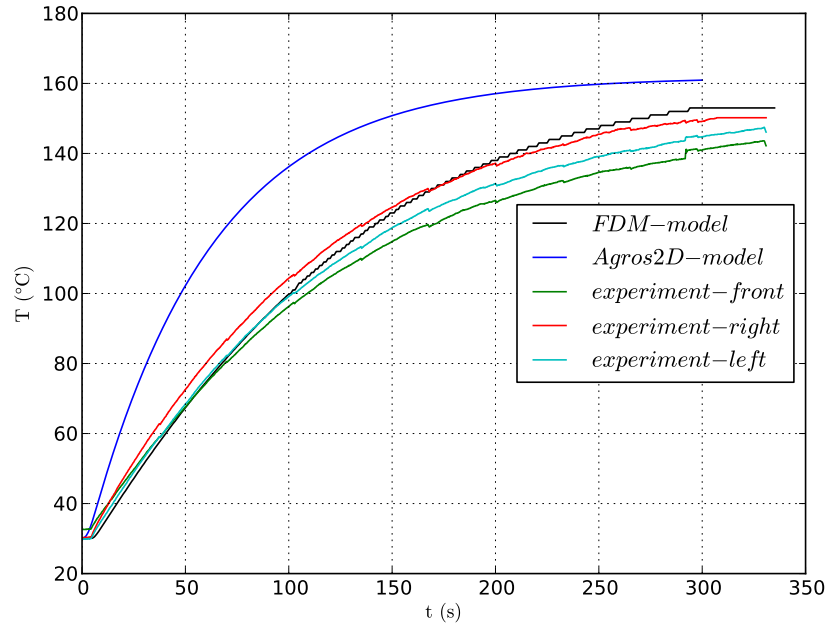
Na začátek tohoto srovnání je vhodné uvést, že hloubka vniku magnetického pole, při kmitočtu $f = 4166 \text{ Hz}$ je pro hliník $\delta \approx 1,27 \text{ mm}$. Lze říci, že magnetické pole působí z obou stran ohřívajícího plechu, proto je skutečná hloubka vniku $\delta \approx 2,54 \text{ mm}$. Plech tloušťky 1 mm bude tedy pro toto magnetické pole transparentní, a budeme moci předpokládat přibližně stejnou magnetickou indukci po celém průřezu desky. Na obr. 9.1 jsou zobrazeny průběhy teploty v závislosti na čase, měřené a počítané pro poloměr 16 mm. Je zde vidět velmi dobrá shoda mezi měřením a výpočtem pomocí metody konečných diferencí, kde je rozdíl teploty v jednotlivých časech minimální. Výpočet aplikací Agros2D má poněkud strmější nárůst teploty, ale po téměř shodném čase s FDM výpočtem a experimentem se ustálí. A to na hodnotě pouze o přibližně 20°C vyšší než výpočet pomocí FDM a 30°C vyšší oproti experimentu. Což je velmi dobrý výsledek, při přihlédnutí k tomu, jak velká zjednodušení byla provedena. Na obr. 9.2 jsou shodně jako v předchozím případě teplotní průběhy, tentokrát však pro poloměr 31 mm. V tomto případě jsou rozdíly ještě menší než v případě poloměru 16 mm. Mezi FDM výpočtem a experimentem v ustálené hodnotě přibližně 5°C a u výpočtu provedeného aplikací Agros2D je teplota pouze o necelých 10°C vyšší vůči teplotě získané z FDM. Průběhy z posledního měřeného poloměru, tedy 46 mm, jsou vidět na obr. 9.3. Rozdíl ustálené teploty mezi experimentem a výpočtem FDM je kolem 10°C . Rozdíl mezi výpočtem metodou konečných diferencí a provedeným



Obr. 9.1: Průběhy odpovídající poloměru 16 mm pro 1 mm plech



Obr. 9.2: Průběhy odpovídající poloměru 31 mm pro 1 mm plech



Obr. 9.3: Průběhy odpovídající poloměru 46 mm pro 1 mm plech

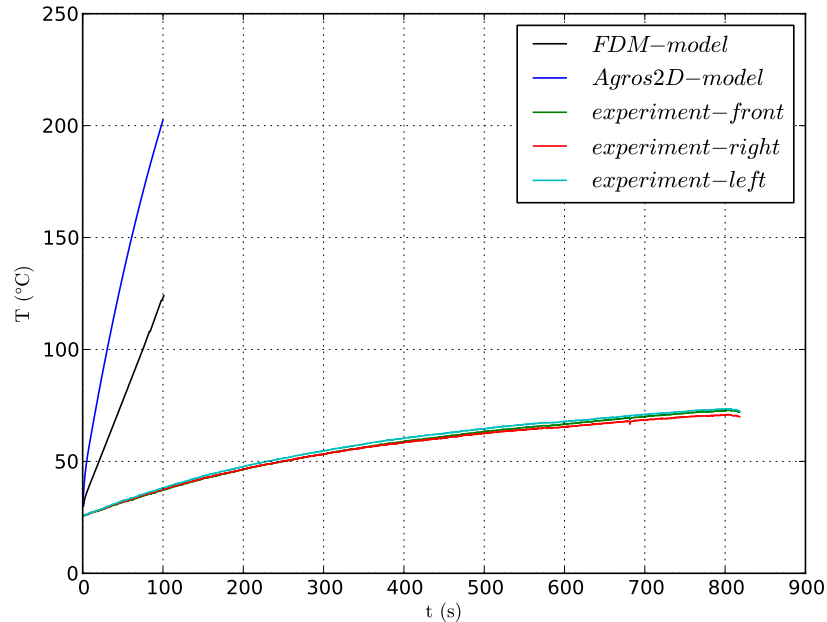
aplikací Agros2D je přibližně taktéž 10°C .

Lze tedy říci, že tato metoda je pro takovouto konfiguraci použitelná bez výraznější ztráty na přesnosti a s výraznou úsporou výpočetního času. Výpočet pomocí FDM trval 416 s, aplikace Agros2D to samé vyřešila za dobu 18 s. Zde je třeba vzít v úvahu to, že výpočet FDM byl prováděn jako silně sdružený a měl výrazně kratší časový krok, přičemž výpočet aplikací Agros2D probíhal jako slabě sdružený a časový krok měl nastaven delší. Přesto je zřejmé, že výpočty nebyly nikterak náročné na výpočetní čas. Pro představu byl tento problém řešen i jako trojrozměrný. Výpočet 3D nebyl výrazněji přesnější než výpočty prováděné v této práci, oproti tomu doba řešení byla výrazně delší, tím je myšleno, že byla v řádu dnů.

Na průbězích jsou vidět různé chyby. Chyby u průběhů získaných z výpočtů FDM jsou způsobeny tím, že při těchto výpočtech bylo prováděno zaokrouhlování na dvě desetinná čísla, ale s tím, že čísla byla zapisována v exponenciálním tvaru, při překročení hranice 100°C tedy nastala situace, kdy exponenciální tvar byl $\cdot 10^2$, tím pádem zaokrouhlení na dvě desetinná čísla dalo s tímto zápisem celočíselnou hodnotu. Podobně tomu je i u experimentu, kdy napájecí zdroj pracoval v cyklech, přičemž nejdelší možný cyklus trval přibližně 35 s. Cykly šlo ovšem opakovat, ale byl mezi nimi vždy krátký časový prostoje, který se na průbězích projevil malými poklesy teploty.

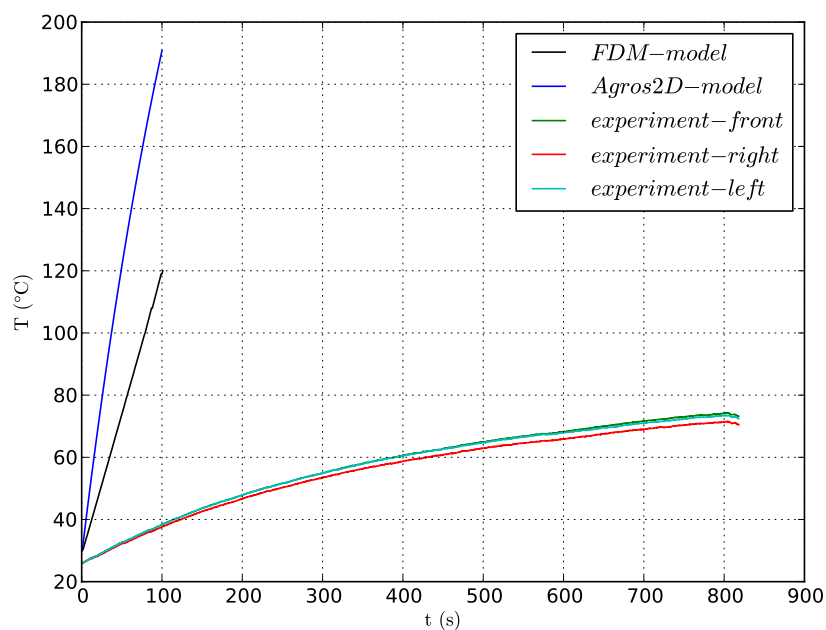
9.2 Hliníkový plech, tloušťka 3 mm

I v tomto případě je hloubka vniku shodná s vypočtenou v kapitole 9.1. Nyní tedy neplatí, že $\delta > d$, kde d je tloušťka plechu.

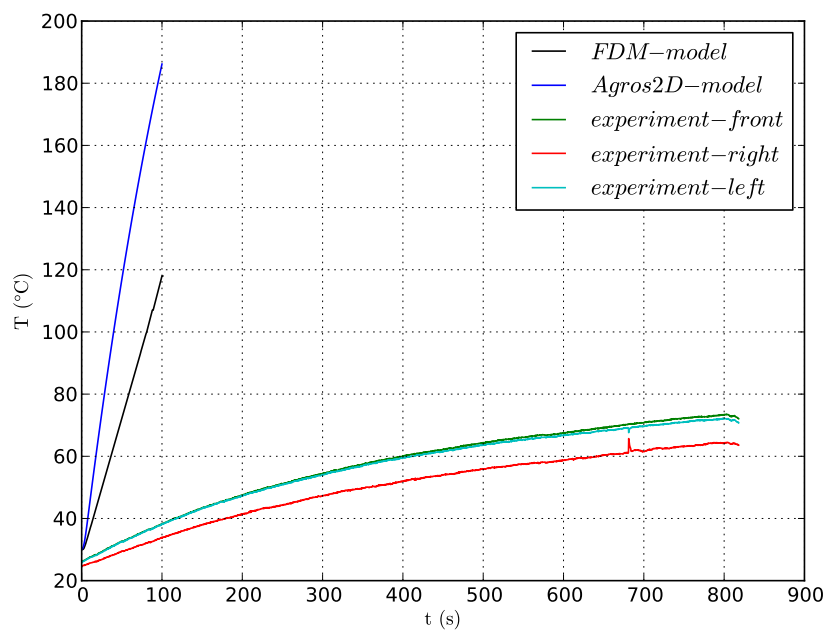


Obr. 9.4: Průběhy odpovídající poloměru 16 mm pro 3 mm plech

Na obr. 9.4, 9.5 a 9.6 je vidět, že vypočtené hodnoty se od experimentálně naměřených velice výrazně liší. To je způsobeno právě tím, že $\delta < d$, proto reálně není v celém průřezu téměř stejná indukce. Samozřejmě při výpočtu s $\delta > d$ tomu také tak není, ale rozdíly lze zanedbat, kdežto v tomto případě je zanedbat nelze. Proto pro systémy, kde platí, že $\delta < d$ nelze tento matematický model použít. Dále je vidět, že se výrazněji liší i výpočty pomocí FDM a aplikace Agros2D. Je vhodné připomenout, že nejde o ustálené hodnoty a v případě uvedeném v kapitole 9.1 se strmost obou průběhů taktéž lišila a podobná velikost teploty nastala až v oblasti ustálených teplot. Proto je možné, že i v tomto případě by došlo k tomu, že ustálené hodnoty teploty by byly podobné, nicméně bylo bezpředmětné nechat výpočet probíhat až do konce, když od počátku měl pouze demonstrovat to, že i tento matematický model má jistá omezení. Rozdíl ve strmosti obou výpočtových řešení může být způsoben značným zjednodušením při řešení problému v aplikaci Agros2D.



Obr. 9.5: Průběhy odpovídající poloměru 31 mm pro 3 mm plech



Obr. 9.6: Průběhy odpovídající poloměru 46 mm pro 3 mm plech

Literatura

- [1] Daniel Mayer. *Pohledy do minulosti elektrotechniky : objevy, myšlenky, vynálezy, osobnosti*. Kopp, 2004.
- [2] Alfred Mühlbauer. *History of Induction Heating and Melting*. Vulkan-Verlag GmbH, 2008.
- [3] Josef Rada. *Elektrotepelná technika*. SNTL, 1985.
- [4] Valery Rudnev. *Handbook of induction heating*. Marcel Dekker, 2003.
- [5] Daniel Mayer. *Teorie elektromagnetického pole 1.díl*. Západočeská univerzita v Plzni, 2004.
- [6] Karel Novotný. *Teorie elektromagnetického pole I*. Vydavatelství ČVUT, 2005.
- [7] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Fragment, 2002.
- [8] Ivo Doležel, Petr Kropík, and Bohuš Ulrych. Induction heating of thin metal plates in time-varying external magnetic field solved as nonlinear hard-coupled problem. *Applied Mathematics and Computation*, 219(13):7159–7169, March 2010.
- [9] Warren M. Rohsenow and James P. Hartnett. *Handbook of heat transfer*. McGraw-Hill, 1973.
- [10] Jack P. Holman. *Heat Transfer*. McGraw-Hill, 2009.
- [11] Rapoport. *Optimal Control of Induction Heating Processes*. CRC Press, 2006.
- [12] Daniel Mayer. *Aplikovaný elektromagnetismus úvod do makroskopické teorie elektromagnetického pole pro elektrotechnické inženýry*. Kopp, 2012.
- [13] Jan Macháč, Karel Novotný, Zbyněk Škvor, and Jaroslav Vokurka. *Numerické metody v elektromagnetickém poli*. Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2007.
- [14] Michal Křížek and Karel Segeth. *Numerické modelování problémů elektrotechniky*. Karolinum, 2001.
- [15] Michal Křížek and Pekka Neittaanmaki. *Mathematical and Numerical Modelling in Electrical Engineering Theory and Applications*. Kluwer Academic, 1996.

- [16] Pavel Šolín, Ivo Doležel, and Karel Segeth. *Higher-order finite element methods*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [17] Pavel Karban, František Mach, and Ivo Doležel. Advanced adaptive algorithms in 2d finite element method of higher order of accuracy. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 32(3):834–849, 2013.

Seznam obrázků

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Michael Faraday, James Clerk Maxwell a James Prescott Joule | 13 |
| 1.2 | Uspořádání zařízení pro indukční ohřev v podélném magnetickém poli (vlevo) a v příčném magnetickém poli (vpravo) | 13 |
| 4.1 | Diagram slabě sdruženého (vlevo) a silně sdruženého (vpravo) řešení problému | 23 |
| 5.1 | Závislost měrné tepelné kapacity hliníku na teplotě v Kelvinech | 25 |
| 5.2 | Závislost užitečného výkonu dodávaného ohřívanému plechu v závislosti na době ohřevu | 26 |
| 5.3 | Závislost elektrické vodivosti hliníku na teplotě v Kelvinech | 26 |
| 5.4 | Geometrické uspořádání experimentálního zařízení | 27 |
| 6.1 | Diskretizovaná oblast pomocí čtvercové sítě | 31 |
| 6.2 | Řešená oblast a okrajové podmínky | 32 |
| 6.3 | Elementy ve tvaru úsečky, trojúhelníku a tetrahedronu | 33 |
| 6.4 | Diskretizovaná oblast pomocí trojúhelníkové sítě | 34 |
| 6.5 | h -adaptivita | 35 |
| 6.6 | p -adaptivita | 35 |
| 6.7 | hp -adaptivita | 35 |
| 7.1 | Závislost magnetické indukce na elektrickém proudu pro frekvence 50 Hz a 4166 Hz | 37 |
| 7.2 | Body, ve kterých byla měřena teplota (vlevo) a pohled na měřenou desku s popsány směry (vpravo) | 41 |
| 7.3 | Fotografie pořízená termokamerou v průběhu experimentu s plechem o tloušťce 1 mm | 42 |
| 8.1 | Rozložení vířivých proudů v desce o tloušťce 1 mm | 44 |
| 8.2 | Závislost energie magnetického pole na počtu stupňů volnosti pro plech tloušťky 1 mm a 3 mm | 45 |
| 8.3 | Rozdělení do oblastí s přibližně stejnou hustotou vířivých proudů | 46 |
| 9.1 | Průběhy odpovídající poloměru 16 mm pro 1 mm plech | 49 |
| 9.2 | Průběhy odpovídající poloměru 31 mm pro 1 mm plech | 49 |
| 9.3 | Průběhy odpovídající poloměru 46 mm pro 1 mm plech | 50 |

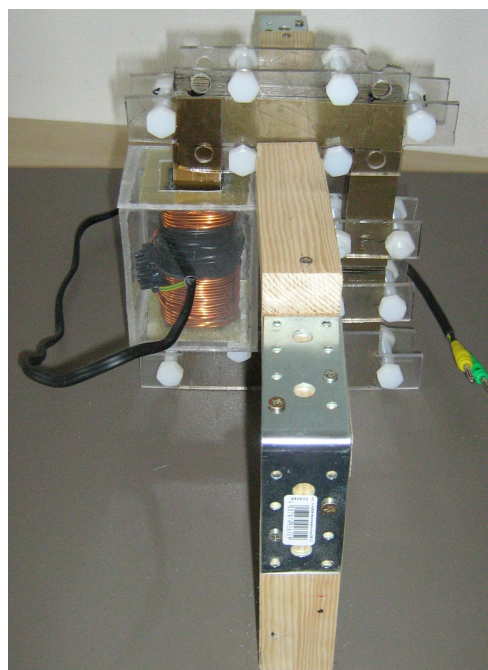
| | | |
|------|---|----|
| 9.4 | Průběhy odpovídající poloměru 16 mm pro 3 mm plech | 51 |
| 9.5 | Průběhy odpovídající poloměru 31 mm pro 3 mm plech | 52 |
| 9.6 | Průběhy odpovídající poloměru 46 mm pro 3 mm plech | 52 |
| A.1 | Poskládané C jádro (vlevo), boční pohled na hotové experimentální zařízení (vpravo) | 58 |
| A.2 | Pohled na hotové experimentální zařízení ze strany vzduchové mezery | 59 |
| A.3 | Pohled na hotové experimentální zařízení ze strany cívky | 59 |
| A.4 | Pohled na hotové experimentální zařízení ze strany cívky | 59 |
| A.5 | Pohled na hotové experimentální zařízení včetně úprav provedených v průběhu experimentu - ze strany vzduchové mezery | 60 |
| A.6 | Pohled na hotové experimentální zařízení včetně úprav provedených v průběhu experimentu - ze strany cívky | 60 |
| A.7 | Pohled na hotové experimentální zařízení včetně úprav provedených v průběhu experimentu - ze strany vzduchové mezery | 61 |
| A.8 | Boční pohled na hotové experimentální zařízení včetně úprav prove- dených v průběhu experimentu | 61 |
| A.9 | Zapojení experimentálního zařízení během experimentu | 62 |
| A.10 | Pohled na zapojené experimentální zařízení během experimentu | 62 |

Seznam tabulek

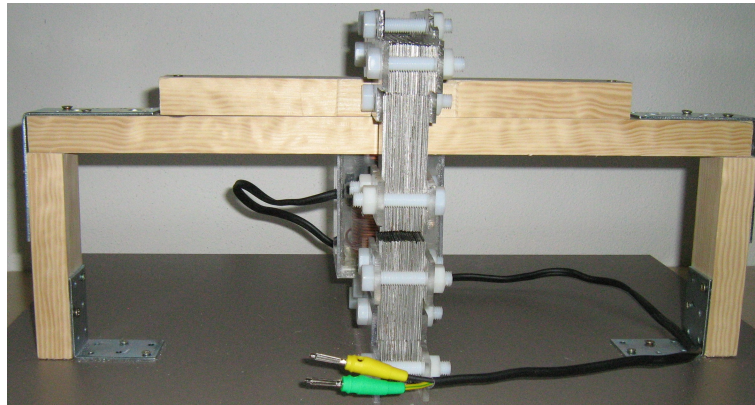
| | | |
|-----|---|----|
| 8.1 | Porovnání jednotlivých adaptivních metod pro plech 1 mm | 45 |
| 8.2 | Porovnání jednotlivých adaptivních metod pro plech 3 mm | 46 |

A

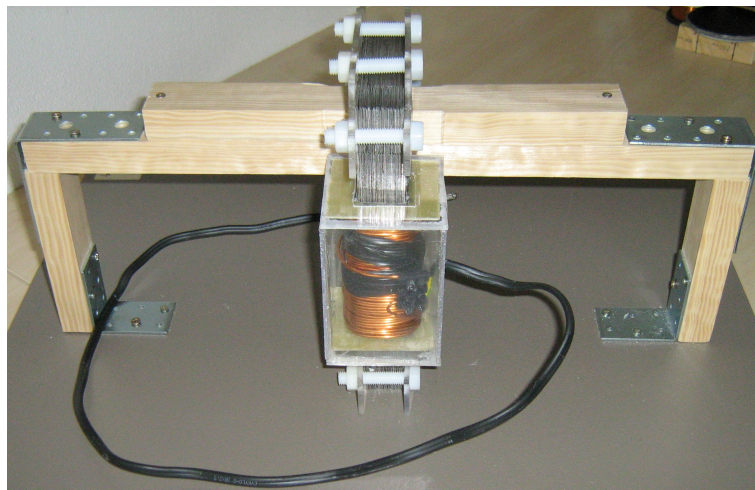
Fotografie experimentálního zařízení



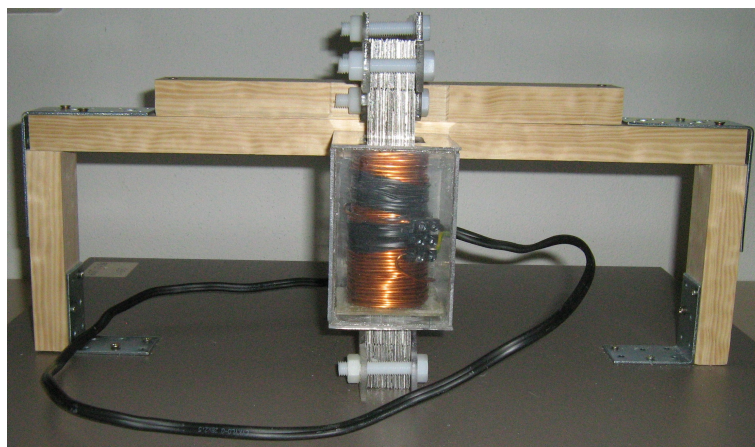
Obr. A.1: Poskládané C jádro (vlevo), boční pohled na hotové experimentální zařízení (vpravo)



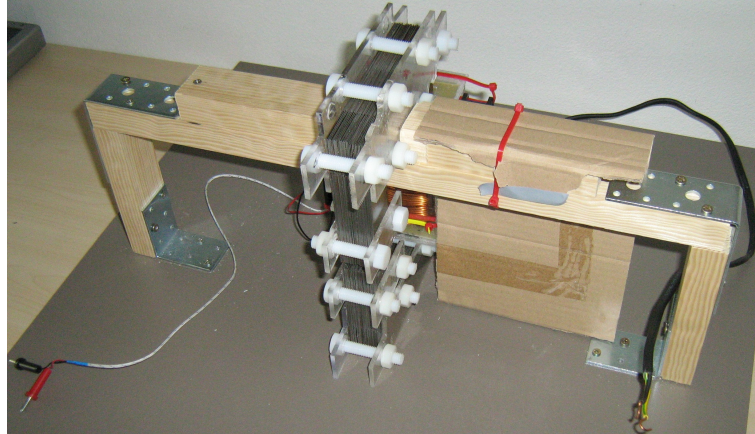
Obr. A.2: Pohled na hotové experimentální zařízení ze strany vzduchové mezery



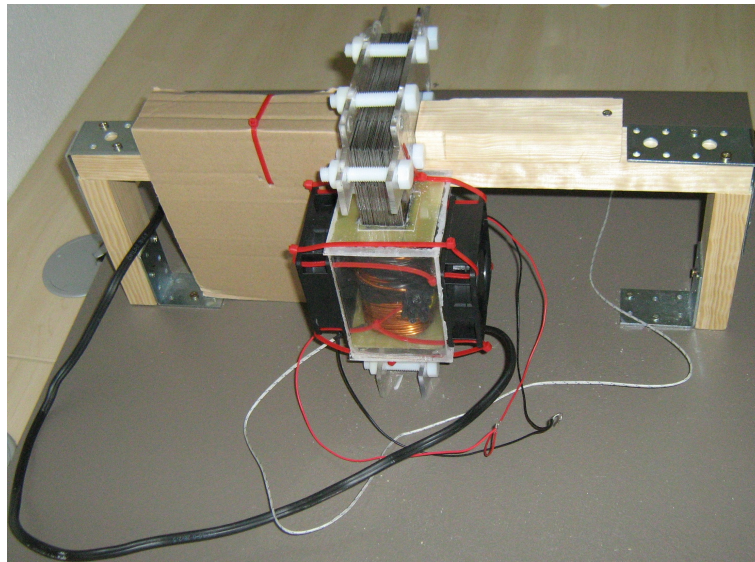
Obr. A.3: Pohled na hotové experimentální zařízení ze strany cívky



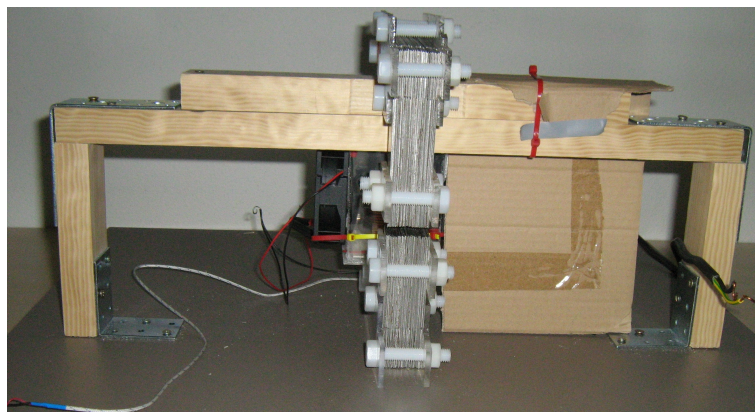
Obr. A.4: Pohled na hotové experimentální zařízení ze strany cívky



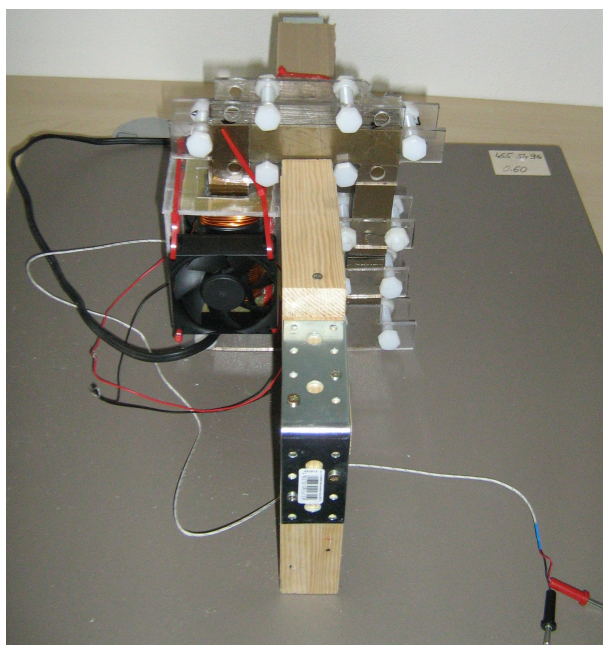
Obr. A.5: Pohled na hotové experimentální zařízení včetně úprav provedených v průběhu experimentu - ze strany vzduchové mezery



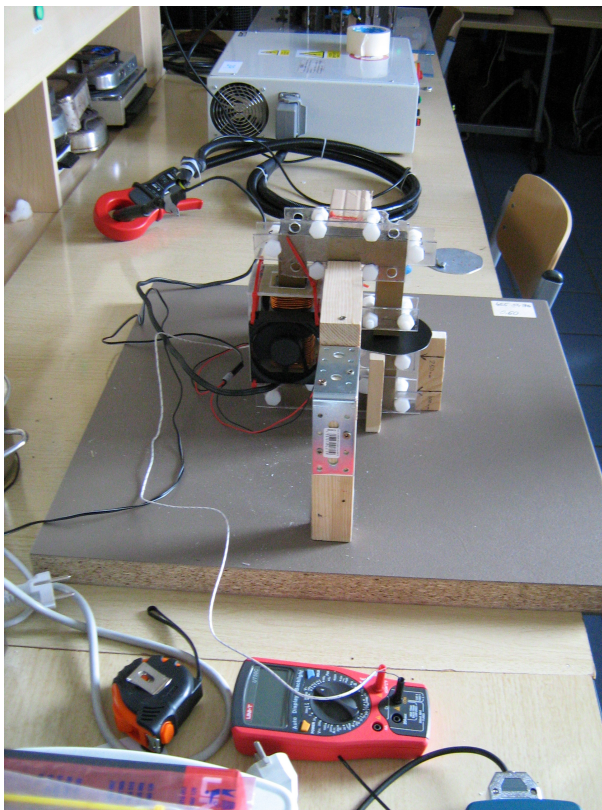
Obr. A.6: Pohled na hotové experimentální zařízení včetně úprav provedených v průběhu experimentu - ze strany cívky



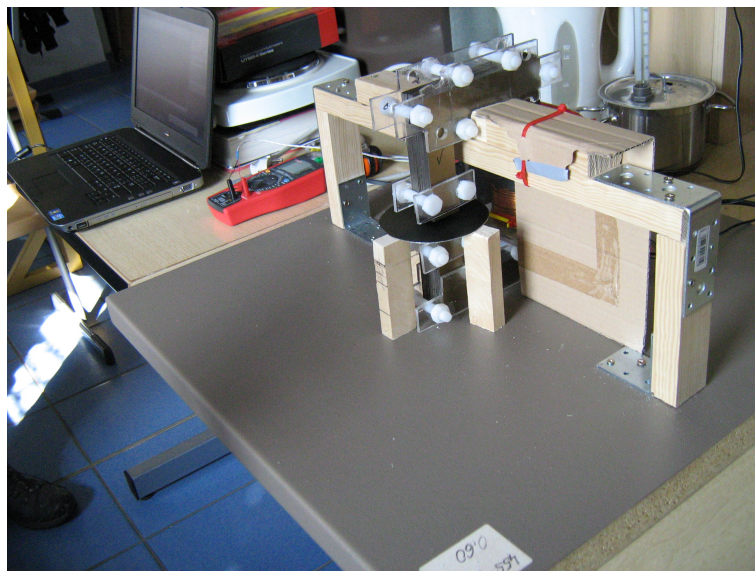
Obr. A.7: Pohled na hotové experimentální zařízení včetně úprav provedených v průběhu experimentu - ze strany vzduchové mezery



Obr. A.8: Boční pohled na hotové experimentální zařízení včetně úprav provedených v průběhu experimentu



Obr. A.9: Zapojení experimentálního zařízení během experimentu



Obr. A.10: Pohled na zapojené experimentální zařízení během experimentu