

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra mechaniky

**Bakalářská práce**

# **Modelování proudění kapalin**

Plzeň, 2014

Klára Vitáková

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce a s použitím uvedené literatury.

V Plzni dne .....

.....

Klára Vitáková

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala prof. Ing. Jiřímu Křenovi, CSc., za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

## **Abstrakt**

Bakalářská práce se věnuje modelování proudění kapalin. Proudění kapaliny je popsáno rovnicí kontinuity a Navierovou-Stokesovou rovnicí. Je zde řešeno laminární izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny s konstantní měrnou hmotností a konstantní dynamickou viskozitou. Řešení je provedeno jak pro stacionární proudění bez konvektivního členu, tak pro nestacionární proudění s konvektivním členem pomocí metody konečných prvků. Práce se též zabývá analytickým řešením stacionárního izotermického proudění neneutonských kapalin.

**Klíčová slova:** kapaliny, proudění, Newtonova kapalina, neneutonská kapalina, metoda konečných prvků, Navierova-Stokesova rovnice, rovnice kontinuity

## **Abstract**

Bachelor's thesis is aimed at modelling of liquid flow. Liquid flow is described by the Navier-Stokes equation and the equation of continuity. There is solved an isothermal laminar flow of incompressible Newtonian fluid with a constant density and a constant dynamic viscosity. Stationary flow without convective term and non-stationary flow with the convective term are solved by the finite element method. The text is aimed also at the analytical solution of stationary isothermal flow of non-Newtonian liquid.

**Keywords:** liquid, flow, Newtonian liquid, non-Newtonian liquid, finite element method, Navier-Stokes equation, equation of continuity

## Obsah

<b>1. Úvod do problematiky</b> .....	7
<b>2. Základní rozdělení kapalin</b> .....	8
<b>3. Modelování Newtonovy kapaliny</b> .....	10
3.1. Stacionární proudění .....	11
3.1.1. Numerická realizace .....	13
3.1.2. Numerické výsledky .....	19
3.2. Nestacionární proudění s konvektivním členem .....	25
3.2.1. Numerická realizace .....	26
3.2.2. Numerické výsledky .....	30
<b>4. Modelování nenevtonských kapalin</b> .....	32
4.1. Proudění nenevtonské kapaliny v trubici .....	36
4.1.1. Výpočet rychlosti proudění v trubici .....	40
<b>5. Závěr</b> .....	42
<b>Seznam použité literatury</b> .....	44

## 1. Úvod do problematiky

Hospodářským využitím kapalin, především vody, se lidé zabývali už několik tisíc let před naším letopočtem. Používali ji především k zavlažování. K tomuto účelu stavěli velmi důmyslné stavby. Ale jejich konstrukce nebyla podložena použitím žádných zákonitostí ani pravidel proudění. Byly stavěny výhradně na základě zkušeností získaných z předchozích nezdarů.

Z historických záznamů vyplývá, že již ve starověku se začala experimentálně rozvíjet mechanika tekutin jako věda. Tekutina je společný název pro plyny a kapaliny. Již Féničané při stavbě svých lodí zkoumali, jaký tvar trupu má menší hydraulický odpor. Využívali k tomu sice primitivně vypadající, ale velmi důmyslnou metodu. Do řeky zatloukli kůl a na něj uvázali tyč. Na její konce přivázali porovnávané lodě. Ta, která měla trup s větším odporem, byla unesena proudem. Tím se tyč vychýlila ze své rovnovážné polohy a vynesla tvarově lepší plavidlo proti směru proudu řeky.

Za zakladatele hydrostatiky je považován Archimédes ze Syrakus, který žil ve třetím století před naším letopočtem. Formuloval zákon o vzlaku plovoucích těles, který nese jeho jméno. Kromě toho se ve svých spisech věnoval například zkoumání zákonitostí plavání, formuloval pojem hustota a pracoval s vodou jako s nestlačitelnou kapalinou. Poté nebyly až do 17. století formulovány žádné nové zákonitosti v mechanice tekutin.

Až Blaise Pascal v polovině 17. století formuloval několik nových zákonů. Nejznámějším je zákon o šíření tlaku v kapalinách (Pascalův zákon). Celá hydraulická technika je založena na tom, že tlak v kapalině se šíří všemi směry stejně. Na jeho počest se základní jednotka tlaku nazývá Pascal. K rozvoji mechaniky tekutin dále přispěli například Isaac Newton (zákon vnitřního tření kapalin), Daniel Bernoulli (zákon zachování mechanické energie pro stacionární proudění ideální kapaliny) a Leonard Euler (pohybové rovnice ideální tekutiny). Obecné pohybové rovnice reálných tekutin byly sestaveny v 19. století. Této problematice se ve svých pracích věnovali Louise Navier a Georga Gabriel Stokes. Proto pohybovou rovnicí reálných tekutin nazýváme jako Navierovu-Stokesovu rovnici.

Velký rozmach zaznamenala aplikovaná mechanika tekutin ve 20. století. Vyvíjení a zdokonalování konstrukcí raket, letadel, spalovacích, vodních a parních turbín vyžadovalo řešení složitých technických úloh. Některé z těchto úloh pomohla vyřešit teorie podobnosti, které se věnoval Osborn Reynolds a August Louse Cauchy. Ale až s rozvojem moderní výpočetní techniky bylo možné vyřešit většinu těchto složitých problémů, které byly popsány pomocí Navierových-Stokesových rovnic.

Následující kapitola je zaměřena na základní rozdělení kapalin. Poté se zabýváme modelováním proudění Newtonovy kapaliny. Věnujeme se jak stacionárnímu, tak nestacionárnímu proudění. Předposlední kapitola je věnována modelování nenewtonských kapalin. Práce je zakončena shrnutím a vyhodnocením získaných výsledků.

## 2. Základní rozdělení kapalin

Kapalina neboli kapalná látka je jedno ze skupenství látek. Částice látky jsou relativně blízko sebe, ale nejsou vázány v pevných polohách a mohou se pohybovat v celém objemu. Kapaliny jsou těžko stlačitelné, mají objem, nemají tvar a tvoří kapky [5]. Jedním ze základních rozdělení kapalin je rozdělení podle vazkosti (viskozity). Podle tohoto kritéria je dělíme na nevazké a vazké.

Pro nevazké kapaliny platí, že dynamická viskozita je nulová ( $\mu = 0$ ). Taková kapalina nemá vnitřní tření a pokud je dokonale nestlačitelná, označujeme ji jako ideální kapalinu. Tato kapalina při jakémkoli pohybu vykazuje pouze normálová napětí  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$ . Žádnou reálnou kapalinu nemůžeme označit jako ideální. Je to model kapaliny, jehož matematický popis je velmi jednoduchý a za určitých předpokladů popisuje dostatečně přesně příslušnou kapalinu (např. voda).

Vazké kapaliny jsou takové, jejichž viskozita dosahuje nenulových hodnot. Tyto kapaliny rozdělujeme do dvou základních skupin, a to Newtonova kapalina a kapaliny neneutonské.

Jako newtonské kapaliny označujeme kapaliny, které splňují Newtonův třecí zákon. Tento vztah vyjadřuje lineární závislosti mezi smykovým napětím  $\tau$  a smykovou rychlostí  $\dot{\gamma}$ . Pro 1D proudění platí

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \dot{\gamma}, \quad \mu = \text{konst.}, \quad (2.1)$$

kde  $u$  je rychlost toku kapaliny,  $y$  je souřadnice ve směru kolmém na proudění a  $\mu$  je dynamická viskozita. Pro daný tlak a teplotu je dynamická viskozita konstantní. U newtonských kapalin není  $\mu$  funkcí smykové rychlosti  $\dot{\gamma}$ .

Tento zákon splňují některé reálné kapaliny, například voda, glycerin nebo benzin. Existují ale kapaliny, které nemohou být popsány vztahem (2.1). Takové kapaliny označujeme jako neneutonské.

U těchto kapalin je dynamická viskozita  $\mu$  funkcí smykové rychlosti  $\dot{\gamma}$ . Obecně je dynamická viskozita funkcí tenzoru rychlosti deformace. Do této skupiny patří například krev, odpadní kaly, barvy, laky a suspenze.

Neneutonské kapaliny se dělí do tří základních skupin [7]:

- 1) čistě viskózní časově nezávislé kapaliny,
- 2) čistě viskózní časově závislé kapaliny,
- 3) viskoelastické kapaliny.

Časově nezávislé neneutonské kapaliny se též označují jako viskózní neneutonské kapaliny. Platí pro ně, že rychlost smyku  $\dot{\gamma}$  je pouze funkcí smykového napětí. Vlastnosti této kapaliny nezávisí na čase.

U časově závislých neneutonských kapalin je rychlost smyku  $\dot{\gamma}$  rovněž funkcí smykového napětí, ale na rozdíl od předchozí skupiny závisí na čase.

Viskoelastické materiály se za určitých okolností chovají jako kapaliny a za jiných okolností vykazují vlastnosti poddajných těles. Po odstranění působící deformace se tyto kapaliny obnoví do původního nebo téměř původního stavu. Tato vlastnost je označována

jako „paměťový efekt“. Základní rozdělení materiálů z tohoto úhlu pohledu je dáno Debořiným číslem (poměr mezi materiálovým časem a dobou pozorování příslušného děje).

Kapaliny můžeme dělit také z hlediska typu proudění. Podle ustálenosti dělíme proudění na stacionární, které nezávisí na čase, a nestacionární, které se s časem mění.

V závislosti na geometrickém uspořádání se proudění rozděluje na jednorozměrné, rovinné (dvourozměrné) a prostorové (třírozměrné).

Proudění se člení i na laminární a turbulentní. Hybnost v laminárním proudění je přenášena převážně molekulami. Při turbulentním proudění se přenáší molárními částicemi, ze kterých jsou složeny turbulentní víry. Molární částici si můžeme představit jako shluk miliard molekul, který se pohybuje stejným směrem a stejnou rychlostí. Přenos hybnosti molárními částicemi je mnohem intenzivnější než jednotlivými molekulami.

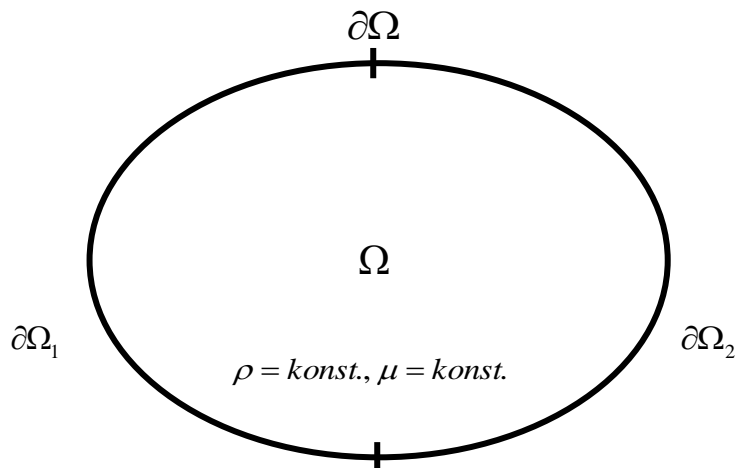
Po přibližném nastínění obsahu práce, teoretickém úvodu a rozdělení kapalin přistoupíme k samotnému modelování. Tématem následující kapitoly je modelování proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny.



### 3. Modelování Newtonovy kapaliny

V této části se budeme zabývat modelováním proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny. Uvedeme zde vztahy a postupy pro řešení této úlohy hydromechaniky. Například voda splňuje podmínky tohoto modelu kapaliny. Předpokládáme izotermické proudění. Samozřejmě musíme počítat s tím, že každý model se liší jistým stupněm aproximace od reálné situace.

Proudění Newtonovy kapaliny je definováno na otevřené a omezené množině  $\Omega$  (obr. 3.1). Dále necht' je zadán časový interval  $t \in (0, T)$ . Uvažujme obecně nestacionární laminární izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny s konstantní měrnou hmotností ( $\rho = konst.$ ) a konstantní dynamickou viskozitou ( $\mu = konst.$ ). Lipschitzovská hranice  $\partial\Omega$  oblasti  $\Omega$  je rozdělena na dvě disjunktní oblasti  $\partial\Omega_1$  a  $\partial\Omega_2$ . Pro hranici množiny  $\Omega$  platí  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ . Uzávěr množiny je potom definován vztahem  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Na části hranice  $\partial\Omega_1$  je zadán vektor rychlosti  $\hat{\mathbf{v}}$  a na části hranice  $\partial\Omega_2$  je zadán vektor napětí  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . Stříška označuje zadané veličiny.



**Obr. 3.1.** Obecná úlohy hydromechaniky

Uvažovaná úloha hydromechaniky je obecně popsána následujícím systémem rovnic, okrajových podmínek a počáteční podmínkou (např. [1], [7]):

Navierova-Stokesova rovnice

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i, \quad t \in (0, T), x \in \Omega. \quad (3.1)$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad t \in (0, T), x \in \Omega. \quad (3.2)$$

Dirichletova okrajová podmínka

$$v_i(x,t) = \hat{v}_i(x,t), \quad t \in (0,T), \quad x \in \partial\Omega_1. \quad (3.3)$$

Neumannova okrajová podmínka

$$\tau_{ij}n_j = \hat{\sigma}_i(x,t), \quad t \in (0,T), \quad x \in \partial\Omega_2. \quad (3.4)$$

Počáteční podmínka

$$v_i(x,0) = \hat{v}_i(x), \quad t = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Ve výše uvedených vztazích  $v_i$  jsou složky vektoru rychlosti v kapalině,  $p$  je tlak,  $\tau_{ij}$  je Cauchyův tenzor napjatosti,  $x_i$  jsou prostorové souřadnice polohy a  $f_i$  jsou složky měrné objemové síly. Uvedené indexy nabývají obecně hodnot  $i, j = 1, 2, 3$ . Konkrétní výpočet byl realizován pro nulové počáteční podmínky.

Neznámé v takto definované úloze jsou složky rychlosti  $v_i(x,t)$  a tlak  $p(x,t)$ . Řešení této úlohy hledáme na časoprostorovém válci  $\bar{D} = \bar{\Omega} \times [0, T]$  a řešíme tzv. smíšenou úlohu. To znamená, že řešíme současně jak rozložení tlaku, tak i rozložení rychlosti na oblasti  $\Omega$ .

### 3.1. Stacionární proudění

Nejdříve budeme pro jednoduchost uvažovat stacionární pomalé (plíživé) proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny. Výše uvedené vztahy (3.1) a (3.2) tedy zjednodušíme. Ve stacionárním stavu se proudění s časem nemění. Proto je derivace rychlosti podle času  $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ . Pro pomalé proudění jsou setrvačné síly v kapalině malé ve srovnání s třecími silami. Zanedbáme nelineární konvektivní člen  $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ . Dále zanedbáváme měrné objemové síly  $f_i$ .

Uvedené předpoklady dosadíme do (3.1) a (3.2) a Navierova-Stokesova rovnice a rovnice kontinuity přejde na tvar:

Navierova-Stokesova rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega. \quad (3.6)$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.7)$$

Neznámé v úloze  $v_i(x)$  a  $p(x)$  jsou závislé jen na proměnné  $x$ ,  $x \in \Omega$ . Okrajové podmínky tedy přejdou na tvar

$$v_i(x) = \hat{v}_i(x), \quad x \in \partial\Omega_1, \quad (3.8)$$

$$\tau_{ij}n_j = \hat{\sigma}_i(x), \quad x \in \partial\Omega_2. \quad (3.9)$$

Pro soustavu parciálních diferenciálních rovnic (3.6) a (3.7) odvodíme pomocí Galerkinovy metody slabé řešení dané úlohy. Jako testovací funkce volíme  $\delta v_i$  a  $\delta p$  definované na uzávěru množiny  $\bar{\Omega}$ . Dle Galerkinovy metody nahradíme původní rovnice jejich integrálním tvarem. Testovací funkce samozřejmě splňují dané okrajové podmínky a platí:

$$\text{pro } \delta v_i \text{ a } \delta p: x \in \bar{\Omega}, \text{ kde } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad (3.10)$$

$$\delta v_i \in v_0, \quad v_0 = \left\{ \delta v_i, \text{ ex. } \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i}, \delta v_i = 0, x \in \partial\Omega_1 \right\}. \quad (3.11)$$

Výchozí integrální vztahy mají s ohledem na (3.6) a (3.7) následující tvar:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] \delta v_i dx = 0, \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.13)$$

Členy v hranaté závorce upravíme pomocí Greenovy věty [8]. Nejprve upravíme první člen v hranaté závorce rovnice (3.12).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \delta v_i dx &= \int_{\partial\Omega} p \delta v_i n_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx = \\ &= \int_{\partial\Omega_1} p \delta v_i n_i dx + \int_{\partial\Omega_2} p \delta v_i n_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx = \\ &= 0 + \int_{\partial\Omega_2} p \delta v_i n_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx = \\ &= \int_{\partial\Omega_2} p \delta v_i n_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

Analogicky upravíme i druhý člen rovnice (3.12).

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta v_i dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i n_j dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\
&= \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i n_j dx + \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i n_j dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\
&= 0 + \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i n_j dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\
&= \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial v_i}{\partial \bar{n}} \delta v_i dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Členy (3.14) a (3.15) dosadíme do vztahu (3.12) a upravíme. Integrované identity přejdou na tvar:

$$\mu \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega_2} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial \bar{n}} - p n_i \right) \delta v_i dx \tag{3.16}$$

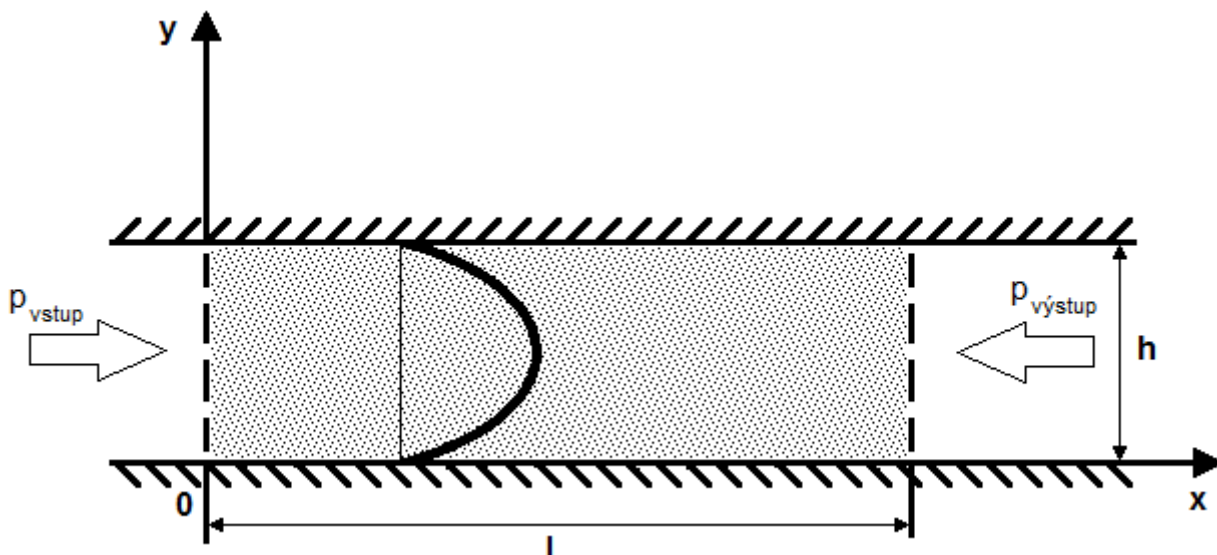
$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0 \tag{3.17}$$

Rovnice (3.16) a (3.17) jsou slabým řešením dané úlohy.

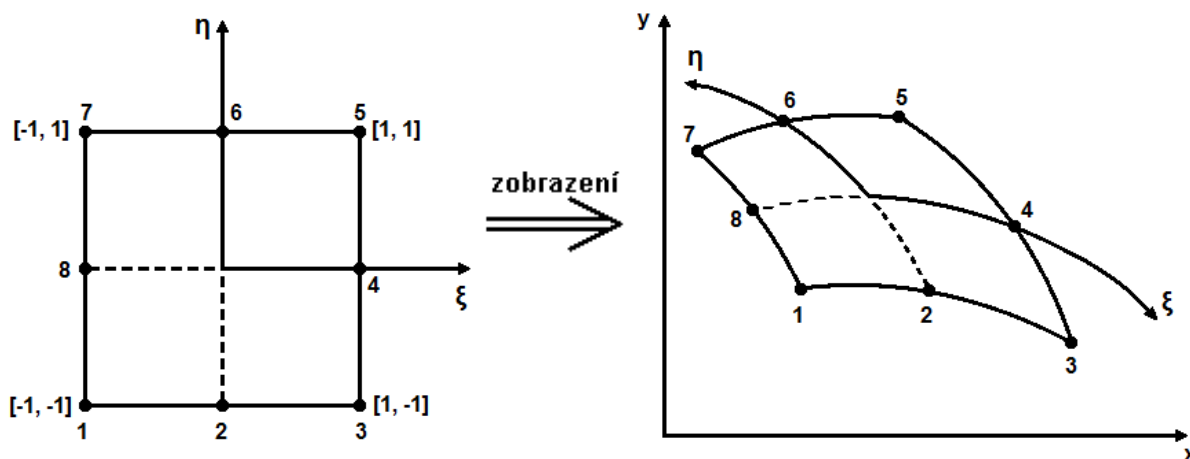
### 3.1.1. Numerická realizace

V předchozím odstavci jsme získali slabé řešení výše zadané úlohy hydromechaniky. Nyní provedeme numerickou realizaci řešení modelové úlohy hydromechaniky. Budeme řešit izotermické laminární stacionární proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny se zanedbaným konvektivním členem v rovinném kanálu (obr. 3.2).

Úlohu budeme prostorově diskretizovat pomocí konečných prvků (metoda konečných prvků). Pro popis geometrie prvku a aproximace hledaných funkcí aplikujeme izoparametrické interpolační funkce (obr. 3.3). Tyto funkce jsou lokálně definovány na každém uvažovaném prvku oblasti  $\Omega$ . Rozložení rychlostí budeme aproximovat polynomem druhého stupně a rozložení tlaku polynomem prvního stupně (Babuškova-Brezziho podmínka). Řešíme rovinnou úlohu proudění kapaliny. Tudíž složky vektoru rychlosti  $v_i$  pro  $i=1,2$  označíme  $u$  a  $v$ , tlak potom označíme  $p$ .



Obr. 3.2. Rovinné proudění kapaliny v kanálu



Obr. 3.3. Zobrazení konečného prvku v souřadnicovém systému  $\sum_{\xi\eta}$  a  $\sum_{xy}$

Pro aproximaci v libovolném konečném prvku platí [7]:

$$u = u(\xi, \eta) = \sum_i H_i(\xi, \eta) u_i = \mathbf{H}^T(\xi, \eta) \mathbf{u}, \quad (3.18)$$

$$v = v(\xi, \eta) = \sum_i H_i(\xi, \eta) v_i = \mathbf{H}^T(\xi, \eta) \mathbf{v}, \quad (3.19)$$

$$p = p(\xi, \eta) = \sum_i N_j(\xi, \eta) p_j = \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{p}, \quad (3.20)$$

kde

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8]^T, \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8]^T, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{p} = [p_1, p_3, p_5, p_7]^T.$$

Matice izoparametrických funkcí mají potom tvar

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Ve vztazích (3.18) až (3.20) je  $u$  a  $v$  rychlost libovolného vnitřního bodu elementu,  $p$  je tlak v uvažovaném vnitřním bodě elementu,  $\xi$  a  $\eta$  jsou lokální souřadnice konečného prvku.  $u_i$ ,  $v_i$  a  $p_j$  jsou hledané globální složky rychlosti a tlaku v jednotlivých uzlech prvku. Index  $i$  nabývá hodnot  $i=1, 2, \dots, 8$ , index  $j$  nabývá hodnot  $j=1, 3, 5, 7$ .  $\mathbf{N}$  a  $\mathbf{H}$  jsou sloupcové matice interpolačních funkcí (3.22). V matici  $\mathbf{N}$  jsou lineární a v matici  $\mathbf{H}$  kvadratické interpolační funkce.  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{p}$  jsou sloupcové matice hledaných globálních hodnot složek rychlosti a tlaku v uzlech elementu. Rychlosti se počítají ve všech osmi uzlech prvku, tlaky pouze ve vrcholech uvažovaného konečného prvku (Babuškova-Brezzioho podmínka). Mezi lokálním souřadnicovým systémem prvku  $\sum_{\xi\eta}$  a globálním souřadnicovým systémem prvku  $\sum_{xy}$  platí transformační vztahy:

$$x = x(\xi, \eta) = \mathbf{H}^T \mathbf{x}, \quad (3.23)$$

$$y = y(\xi, \eta) = \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \quad (3.24)$$

kde  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  jsou sloupcové matice globálních souřadnic uzlů prvku. Pro vyjádření derivací hledaných funkcí podle globálních souřadnic budeme potřebovat Jacobiovu funkcionální matici. Tato matice zobrazení má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\xi^T \mathbf{x} & \mathbf{H}_\xi^T \mathbf{y} \\ \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{x} & \mathbf{H}_\eta^T \mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Matice  $\mathbf{H}_\xi$  a  $\mathbf{H}_\eta$  jsou derivace matice izoparametrických interpolačních funkcí  $\mathbf{H}$  (3.22) podle lokálních proměnných  $\xi$  a  $\eta$ . Konstrukce těchto matic je zřejmá z dosazení vztahů (3.23) a (3.24) do vztahu (3.25).

Dále vyjádříme parciální derivaci matice interpolačních funkcí  $\mathbf{H}$  (3.22) podle globálních souřadnic  $x$  a  $y$ . Zohledněním předchozích vztahů dostaneme

$$\mathbf{H}_x = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = J_{11}^{-1} \mathbf{H}_\xi + J_{12}^{-1} \mathbf{H}_\eta, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{H}_y = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = J_{21}^{-1} \mathbf{H}_\xi + J_{22}^{-1} \mathbf{H}_\eta, \quad (3.27)$$

kde  $J_{ij}^{-1}$  je příslušný prvek inverzní Jacobiovy matice.

Nyní můžeme díky platnosti vztahů pro parciální derivaci matice  $\mathbf{H}$  podle globálních souřadnic (3.26), (3.27) a aproximačních vztahů (3.18) až (3.20) vyjádřit parciální derivace složek vektorů rychlostí podle globálních souřadnic, které se vyskytují v rovnicích (3.16) a (3.17). Pro tyto parciální derivace platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{H}_x^T \mathbf{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{H}_y^T \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}_x, \quad \frac{\partial \delta u}{\partial y} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}_y, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \mathbf{H}_x^T \mathbf{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{H}_y^T \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \delta v}{\partial x} = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}_x, \quad \frac{\partial \delta v}{\partial y} = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}_y,$$

$$\delta u = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}, \quad \delta v = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{H}, \quad \delta p = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N},$$

kde virtuální přírůstky  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{v}$ ,  $\delta \mathbf{p}$  jsou nezávislé.

Rozepsáním integrální identity (3.16) do směrů  $x$  a  $y$  dostaneme dvě skalární rovnice. Při označení  $i = 1 \Rightarrow v_1 = u$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  platí

$$\mu \int_{s_e} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dS - \int_{s_e} p \frac{\partial \delta u}{\partial x} dS = \int_{\partial \Omega_2 = \bar{s}} \delta u_s \hat{\sigma}_u ds. \quad (3.29)$$

Analogicky pro  $i = 2 \Rightarrow v_2 = v$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  platí:

$$\mu \int_{s_e} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right) dS - \int_{s_e} p \frac{\partial \delta v}{\partial y} dS = \int_{\partial \Omega_2 = \bar{s}} \delta v_s \hat{\sigma}_v ds. \quad (3.30)$$

Integrální identita (3.17) potom dává jednu rovnici ve tvaru

$$\int_{s_e} \frac{\partial u}{\partial x} \delta p dS + \int_{s_e} \frac{\partial v}{\partial y} \delta p dS = 0. \quad (3.31)$$

Tyto vztahy jsou definovány pro jeden konečný kapalinový prvek znázorněný na obr. 3.3. Zde  $S_e$  je plocha uvažovaného elementu a  $\hat{s}$  je obecně délka zatížené strany prvku. Za použití vztahů (3.28) upravíme rovnice (3.29) až (3.31) na tvar

$$\left[ \mu \int_{S_e} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} - \left[ \int_{S_e} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \mathbf{f}_u, \quad (3.32)$$

$$\left[ \mu \int_{S_e} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} - \left[ \int_{S_e} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \mathbf{f}_v, \quad (3.33)$$

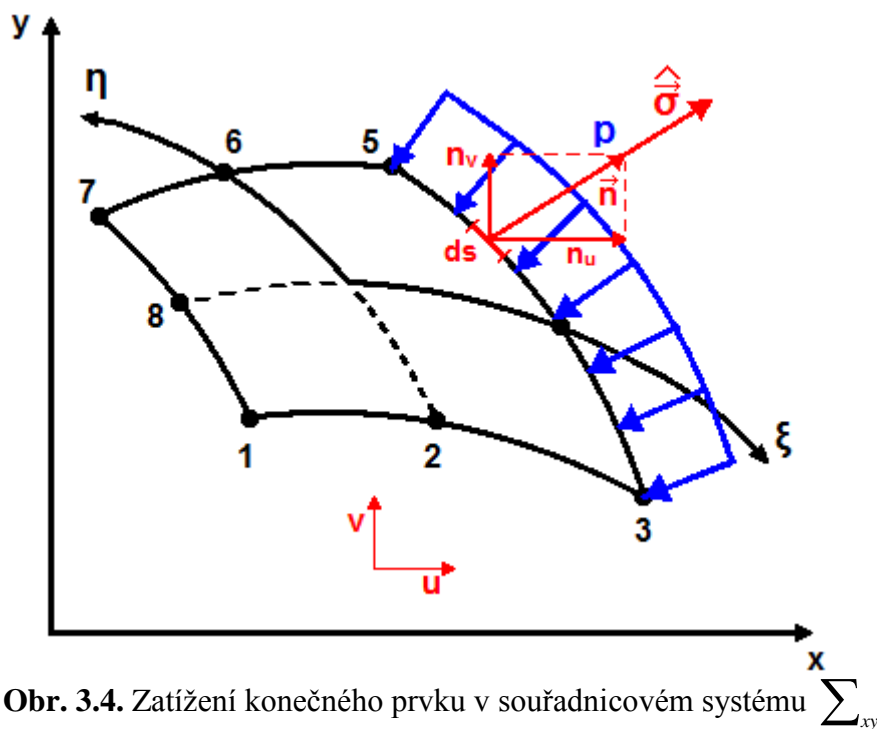
$$\left[ \int_{S_e} \mathbf{N} \mathbf{H}_x^T dS \right] \mathbf{u} + \left[ \int_{S_e} \mathbf{N} \mathbf{H}_y^T dS \right] \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.34)$$

Vztahy (3.32), (3.33) a (3.34) můžeme vyjádřit v komprimovaném maticovém tvaru  $\mathbf{Q}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e$ . V blokovém vyjádření má tato maticová rovnice tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_{vp} \\ \mathbf{A}_{pu} & \mathbf{A}_{pv} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Definice použitých matic v rovnici (3.35) vyplývá z předchozích vztahů.

Pro určení vektoru pravé strany  $\mathbf{f}_e$  elementu uvažujeme například, že strana s uzly 3,4,5 je zatížena konstantním tlakem  $p$  (obr. 3.4).



Obr. 3.4. Zatížení konečného prvku v souřadnicovém systému  $\sum_{xy}$



Z rovnice (3.29) víme, že pro složku  $\mathbf{f}_u$  vektoru  $\mathbf{f}_e$  platí

$$\mathbf{f}_u = \int_{\partial\Omega_2=\bar{s}_{345}} \delta u_s \hat{\sigma}_u ds = \int_{\partial\Omega_2=\bar{s}_{345}} \mathbf{H}_s \hat{\sigma}_u ds, \quad (3.36)$$

kde  $\mathbf{H}_s$  je matice  $\mathbf{H}$  (3.22) pro  $\xi = 1$  a  $\hat{\sigma}_u$  je napětí ve směru  $u$ . Složku vektoru napětí  $\hat{\sigma}_u$  můžeme dále vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\sigma}_u = \hat{p} n_u = \hat{p} \mathbf{H}_s^T \mathbf{n}_u, \quad (3.37)$$

kde pro matici  $\mathbf{H}_s$  platí

$$\mathbf{H}_s(\eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\eta(\eta-1) \\ (1-\eta^2) \\ \frac{1}{2}\eta(\eta+1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Pro element hranice prvku  $ds$  a jeho polohu platí

$$x_s = \mathbf{H}_s^T(\eta) \mathbf{x}, \quad y_s = \mathbf{H}_s^T(\eta) \mathbf{y}, \quad (3.39)$$

$$ds = \sqrt{dx_s^2 + dy_s^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_s}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_s}{\partial \eta}\right)^2} d\eta = \sqrt{(\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{x})^2 + (\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{y})^2} d\eta.$$

Zde zavedená matice  $\mathbf{H}_{s\eta}$  je derivace matice  $\mathbf{H}_s$  (3.38) podle lokální souřadnice  $\eta$ . Po dosazení vztahů (3.37) až (3.39) do výrazu (3.36) dostáváme pro pravou stranu prvku

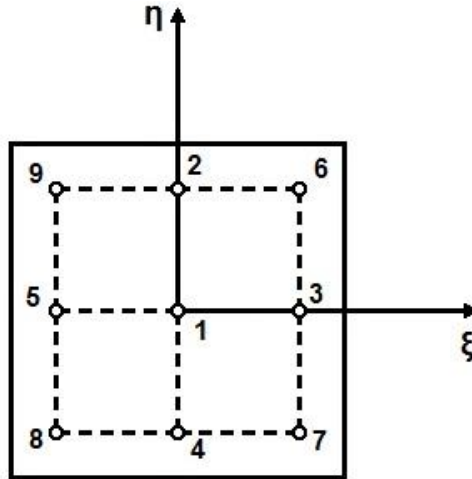
$$\mathbf{f}_u = \hat{p} \int_{\partial\Omega_2=\bar{s}_{345}} \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^T \mathbf{n}_u \sqrt{(\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{x})^2 + (\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{y})^2} d\eta. \quad (3.40)$$

Analogicky vyjádříme složku  $\mathbf{f}_v$  vektoru  $\mathbf{f}_e$ . Platí

$$\mathbf{f}_v = \hat{p} \int_{\partial\Omega_2=\bar{s}_{345}} \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^T \mathbf{n}_v \sqrt{(\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{x})^2 + (\mathbf{H}_{s\eta}^T \mathbf{y})^2} d\eta. \quad (3.41)$$

### 3.1.2. Numerické výsledky

V předešlém odstavci jsme odvodili soustavu rovnic (3.35), která popisuje izotermické stacionární proudění Newtonovy kapaliny se zanedbaným konvektivním členem v Navierových-Stokesových rovnicích. V soustavě těchto rovnic jsou jednotlivé prvky příslušných matic definovány jako určité integrály. Tyto integrály vypočítáme pomocí Gaussových kvadraturních formulí [9].



**Obr. 3.5.** Prvek v lokálním souřadnicovém systému  $\sum_{\xi\eta}$  s integračními body

Pro numerickou integraci dvojných integrálů platí

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^9 w_i f(\xi_i, \eta_i) |\det \mathbf{J}|_{\xi_i, \eta_i}, \quad (3.42)$$

kde  $w_i$  je váhový koeficient pro  $i$ -tý integrační bod.  $f(\xi_i, \eta_i)$  je hodnota funkce  $f(\xi, \eta)$  v  $i$ -tém integračním bodě a  $|\det \mathbf{J}|_{\xi_i, \eta_i}$  je hodnota determinantu Jacobiovy matice v  $i$ -tém integračním bodě. Integrační body jsou znázorněny na obr. 3.5. Hodnoty váhových koeficientů  $w_i$  a souřadnic  $(\xi_i, \eta_i)$  jsou uvedeny v tab. 3.1.

**Tabulka 3.1.** Tabulka váhových koeficientů  $w_i$  a souřadnic  $(\xi_i, \eta_i)$  integračních bodů [9]

$i$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$
1	0	0	$\frac{64}{81}$
2	0	$\alpha$	$\frac{40}{81}$
3	$\alpha$	0	
4	0	$-\alpha$	$\frac{40}{81}$
5	$-\alpha$	0	
6	$\alpha$	$\alpha$	$\frac{25}{81}$
7	$\alpha$	$-\alpha$	
8	$-\alpha$	$-\alpha$	
9	$-\alpha$	$\alpha$	

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Pro jednoduché integrály má Gaussova formule tvar

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i f(\eta_i), \quad (3.43)$$

kde  $w_i$  je váhový koeficient pro  $i$ -tý integrační bod a  $f(\eta_i)$  je hodnota funkce  $f(\eta)$  v  $i$ -tém integračním bodu. Hodnoty váhových koeficientů  $w_i$  a souřadnic  $(\eta_i)$  jsou uvedeny v tab. 3.2.

**Tabulka 3.2.** Hodnoty váhových koeficientů  $w_i$  a souřadnic  $(\eta_i)$  integračních bodů [9]

$i$	$\eta_i$	$w_i$
1	$\alpha$	$\frac{5}{9}$
2	0	$\frac{8}{9}$
3	$-\alpha$	$\frac{5}{9}$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

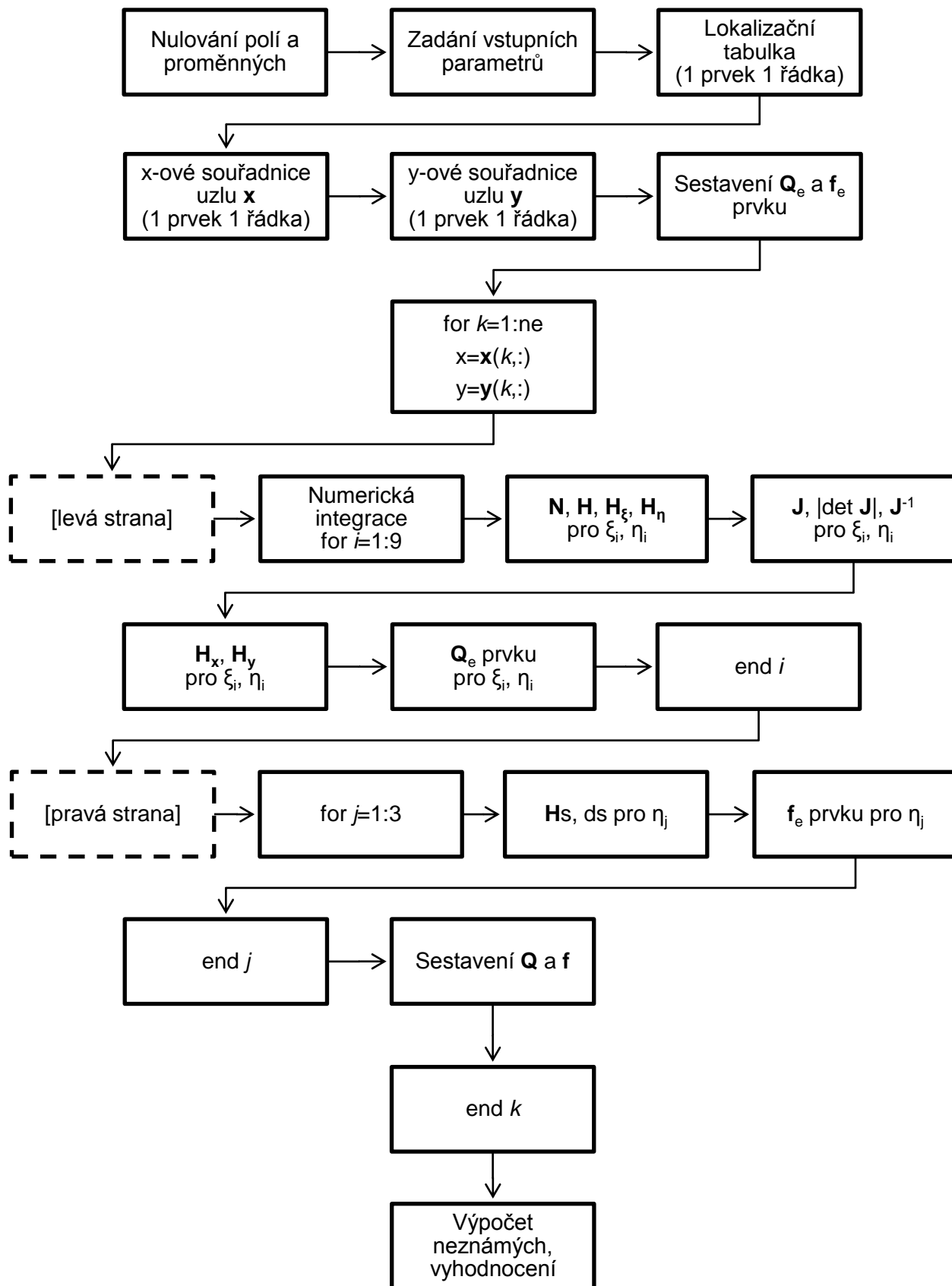
Vlastní výpočtový program v prostředí MATLAB sestavíme podle hrubého vývojového diagramu (obr. 3.6) a výpočet provedeme v bezrozměrných veličinách. Vstupní data zadaná do programu jsou rozměry kanálu a tlaky působící na kapalinu. Délka kanálu je  $l=10$  a jeho výška  $h=2$ . Na vstupu působí tlak  $p_{vstup}=1000$  a na výstupu  $p_{výstup}=0$ . Výpočet byl proveden pro malé Reynoldsovo číslo  $Re=0,02$ . Výsledkem je rozložení rychlostí a tlaku v uvažovaném kanále. Tyto numerické výsledky jsou zapsány v tab. 3.3 (společně s analytickým řešením).

Analytické řešení uvedené úlohy hydromechaniky získáme řešením základních rovnic (3.1) a (3.2) v uzavřeném tvaru, ve kterých opět uplatníme výše uvedené předpoklady. Do předpokladů dále vložíme, že se jedná o úlohu rovinného proudění, tudíž u složek vektoru rychlosti předpokládáme  $v_y=0$ ,  $v_z=0$  (obr. 3.2). Nenulová je tedy pouze složka vektoru rychlosti ve směru osy  $x$ . Zohledněním těchto předpokladů přejde rovnice kontinuity (3.2) na tvar

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (3.44)$$

Navierova-Stokesova rovnice (3.1) potom přejde obecně do tvaru (obecně  $i, j=1,2,3$ )

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.45)$$



Obr. 3.6. Vývojový diagram

Rovnici (3.45) rozepíšeme do jednotlivých směrů  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Dostaneme

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3.48)$$

Z výrazů (3.47) a (3.48) je zřejmé, že tlak  $p$  závisí jen na proměnné  $x$ , tj.  $p = p(x)$ . Vzhledem k tomu, že řešíme rovinné proudění kapaliny, tak tlakové a kinematické poměry ve všech rovinách rovnoběžných s rovinou  $xy$  jsou stejné. Můžeme tedy napsat, že  $v_x = v_x(y)$ , protože rychlost  $v_x$  nezávisí na proměnné  $z$   $\left( \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \right)$ .

Rovnici (3.46) tedy přejde na tvar

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \quad (3.49)$$

Dvojnásobnou integrací dostaneme obecné řešení pro rozložení rychlosti v kapalině. Platí

$$v_x = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2. \quad (3.50)$$

Okrajové podmínky proudění jsou:

$$\text{pro } y = 0, v = 0, \quad \text{resp. pro } y = h, v = 0. \quad (3.51)$$

Z těchto podmínek snadno určíme integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$ .

Výsledná rovnice pro analytické řešení je tedy (záporný tlakový gradient)

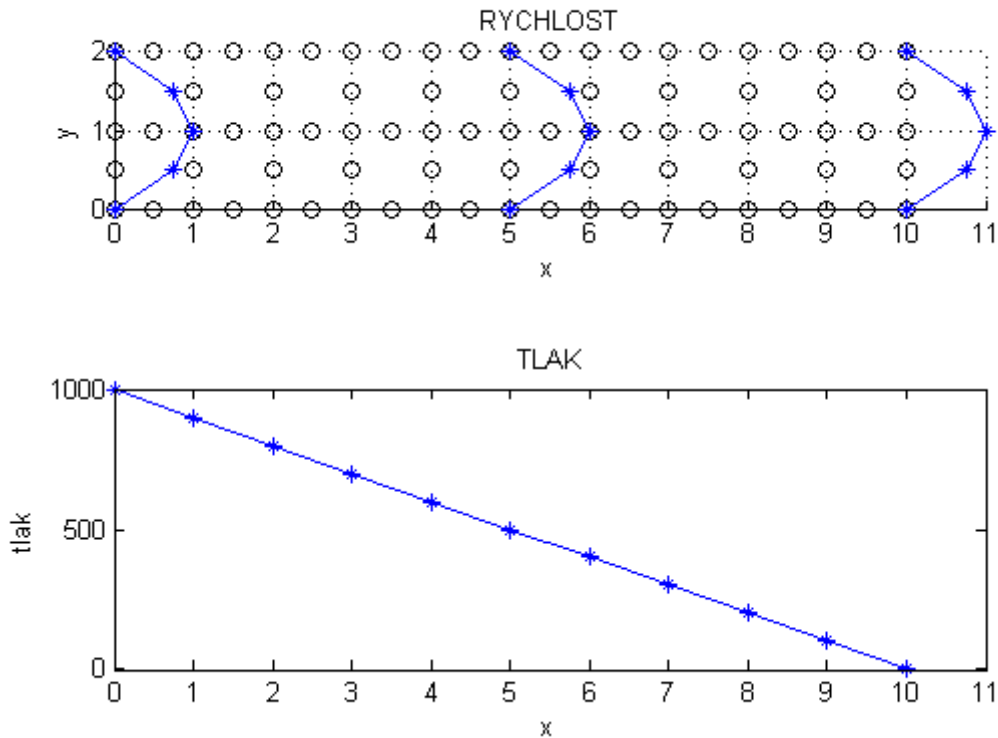
$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h). \quad (3.52)$$

Pro funkci tlaku  $p$  potom platí

$$p = \frac{P_{\text{výstup}} - P_{\text{vstup}}}{l} x + P_{\text{vstup}}, \quad (3.53)$$

kde  $P_{\text{vstup}}$  je tlak na vstupu,  $P_{\text{výstup}}$  je tlak na výstupu a  $l$  je délka kanálu. Poznamenejme, že v bezrozměrných veličinách má vztah (3.52) tvar

$$\bar{v}_x = \frac{\text{Re}}{2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \bar{y}(\bar{y} - \bar{h}). \quad (3.52a)$$



**Obr. 3.7.** Grafické znázornění výsledků numerického řešení

Z rovnice (3.52) vidíme, že rychlostní profil v kanálu má parabolický tvar (schematicky znázorněno na obr. 3.2). Srovnání číselných výsledků numerického a analytického řešení je uvedeno v tab. 3.3. Ze srovnání výsledků numerického a analytického řešení je zřejmé, že předpoklad  $v_y = 0$  pro analytické řešení je opodstatněný. Z tab. 3.3 je rovněž zřejmé, že tlak v kanále klesá lineárně (je lineární funkcí souřadnice  $x$ ) a dále, že rychlostní profil v kapalině má parabolický tvar (obr. 3.7).

Závěrem tohoto odstavce ještě uvedme, že z uvedených číselných výsledků numerického a analytického řešení uvažované modelové úlohy hydromechaniky vyplývá, že použitá numerická metoda (metoda konečných prvků) je dostatečně přesná pro řešení reálných úloh proudění kapalin. Poznamenejme, že metoda konečných prvků je obecně přibližnou numerickou metodou pro řešení parciálních diferenciálních rovnic, která je při vhodné volbě konečných prvků pro technické výpočty dostatečně přesná.

**Tabulka 3.3.** Srovnání výsledků numerického a analytického řešení izotermického stacionárního proudění Newtonovy kapaliny se zanedbaným konvektivním členem

metoda výpočtu		MKP	analyticky	MKP	analyticky	MKP	analyticky
souřadnice		rychlost ve směru x		rychlost ve směru y		tlak	
x=0	y=0	0	0	0	0	1000	1000
	y=0,5	0,75	0,75	-2,73E-13	0		
	y=1	1	1	-1,53E-13	0	1000	1000
	y=1,5	0,75	0,75	4,44E-14	0		
	y=2	0	0	0	0	1000	1000
x=5	y=0	0	0	0	0	500	500
	y=0,5	0,75	0,75	-7,48E-14	0		
	y=1	1	1	-4,93E-14	0	500	500
	y=1,5	0,75	0,75	0	0		
	y=2	0	0	0	0	500	500
x=10	y=0	0	0	0	0	2,49E-13	0
	y=0,5	0,75	0,75	1,15E-16	0		
	y=1	1	1	-4,51E-15	0	-1,31E-12	0
	y=1,5	0,75	0,75	-8,26E-15	0		
	y=2	0	0	0	0	6,54E-12	0

### 3.2. Nestacionární proudění s konvektivním členem

V předchozím odstavci jsme odvodili základní rovnice pro řešení stacionárního proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny se zanedbaným konvektivním členem. Z těchto rovnic jsme vytvořili numerický model, který jsme porovnali s analytickým řešením. Nyní uvažujme nestacionární laminární izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny. Při řešení nadále předpokládáme konstantní měrnou hmotností ( $\rho = konst.$ ) a konstantní dynamickou viskozitou ( $\mu = konst.$ ). Na rozdíl od řešení stacionárního proudění (bez konvektivního členu) nyní budeme řešit Navierovu-Stokesovu rovnici s uvažováním konvektivního členu. Uvažovaná úloha hydromechaniky je popsána následujícím systémem rovnic, okrajových podmínek a počáteční podmínkou (viz odst. 3.1). Platí:

Navierova-Stokesova rovnice

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i, \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega. \quad (3.1)$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega. \quad (3.2)$$

Dirichletova okrajová podmínka

$$v_i(x, t) = \hat{v}_i(x, t), \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega_1. \quad (3.3)$$

Neumannova okrajová podmínka

$$\tau_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i(x, t), \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega_2. \quad (3.4)$$

Počáteční podmínka

$$v_i(x, 0) = \hat{v}_i(x), \quad t = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Neznámé v této úloze jsou složky rychlosti  $v_i(x, t)$  a tlak  $p(x, t)$ . Testovací funkce  $\delta v_i$  a  $\delta p$  jsou definovány na uzávěru množiny (časoprostorovém válci)  $\bar{D} = \bar{\Omega} \times [0, T]$ . Samozřejmě splňují dané okrajové podmínky a platí:

$$\text{pro } \delta v_i \text{ a } \delta p: \quad x \in \bar{D}, \quad \text{kde } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad (3.54)$$

$$\delta v_i \in v_0, \quad v_0 = \{\delta v_i, \delta v_i = 0, x \in \partial\Omega_1, t \in [0, T]\}. \quad (3.55)$$

Pomocí Galerkinovy metody opět odvodíme slabé řešení úlohy zadané soustavou parciálních diferenciálních rovnic (3.1) a (3.2). Výchozí integrální vztahy jsou



$$\int_{\Omega} \left[ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \rho f_i \right] \delta v_i dx = 0, \quad (3.56)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.57)$$

Na třetí a čtvrtý člen hranaté závorky rovnice (3.56) aplikujeme Greenovu větu [8]. Analogicky ke stacionárnímu proudění bez konvektivního členu získáme slabé řešení rovnic (3.56) a (3.57). Integrované identity pro řešení této úlohy hydromechaniky budou mít nyní tvar:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta v_i dx + \int_{\Omega} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\ = \int_{\Omega} \rho f_i \delta v_i dx + \int_{\partial \Omega_2} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial \vec{n}} - p n_i \right) \delta v_i dx, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \quad (3.59)$$

Uvedené rovnice (3.58) a (3.59) jsou tedy slabým řešením uvažované úlohy hydromechaniky. Toto slabé řešení použijeme dále pro numerický výpočet složek rychlosti a tlaku v kapalině.

### 3.2.1. Numerická realizace

V předchozím odstavci jsme získali slabé řešení izotermického laminárního nestacionárního proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny s uvažováním konvektivního členu. Nadále budeme uvažovat proudění Newtonovy kapaliny v rovinném kanále s pevnými stěnami. Nyní provedeme numerickou realizaci této úlohy hydromechaniky. Při řešení postupujeme analogicky k numerické realizaci uvedené v odst. 3.1.1.

Úlohu budeme prostorově diskretizovat pomocí konečných prvků, pro časovou diskretizaci potom aplikujeme diferenční metodu. Pro popis geometrie prvku a aproximace hledaných funkcí aplikujeme stejné izoparametrické interpolační funkce (obr. 3.3). Tyto funkce jsou nadále lokálně definovány na každém uvažovaném prvku oblasti  $\Omega$ . Složky rychlostí  $v_i(x, t)$  aproximujeme polynomem druhého stupně a rozložení tlaku  $p(x, t)$  polynomem prvního stupně. Složky vektoru rychlostí  $v_i$  pro  $i=1, 2$  označíme  $u$  a  $v$ , tlak označíme  $p$ . Objemové síly  $f_i$  opět ve výpočtu je zanedbáme.

Vztahy (3.18), (3.19) a (3.20) rozšíříme o časovou proměnnou  $t$ . Platí

$$u = u(\xi, \eta, t) = \sum_i H_i(\xi, \eta) u_i(t) = \mathbf{H}^T(\xi, \eta) \mathbf{u}(t), \quad (3.60)$$

$$v = v(\xi, \eta, t) = \sum_i H_i(\xi, \eta) v_i(t) = \mathbf{H}^T(\xi, \eta) \mathbf{v}(t), \quad (3.61)$$

$$p = p(\xi, \eta, t) = \sum_j N_j(\xi, \eta) p_j(t) = \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{p}(t), \quad (3.62)$$

kde

$$\mathbf{u}(t) = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8]^T, \quad \mathbf{v}(t) = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8]^T, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{p}(t) = [p_1, p_3, p_5, p_7]^T$$

jsou sloupcové matice rychlostí a tlaku na úrovni prvku (uzlové hodnoty).

Pro numerické vyjádření vztahů (3.58) a (3.59) použijeme stejné matice a stejné transformační vztahy jako v odst. 3.1.1.

Po rozepsání rovnice (3.58) do jednotlivých směrů a úpravě rovnic (3.58) a (3.59), podle vztahů (3.28), dostáváme tyto rovnice v maticovém zápisu:

$$\begin{aligned} & \left[ \rho \int_{S_e} \mathbf{H} \mathbf{H}^T dS \right] \dot{\mathbf{u}} + \left[ \rho \int_{S_e} (\mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{u} \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{v} \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} + \\ & + \left[ \mu \int_{S_e} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{u} - \left[ \int_{S_e} \mathbf{H}_x \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{H}_s \hat{\sigma}_u ds, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \rho \int_{S_e} \mathbf{H} \mathbf{H}^T dS \right] \dot{\mathbf{v}} + \left[ \rho \int_{S_e} (\mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{u} \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{v} \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} + \\ & + \left[ \mu \int_{S_e} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) dS \right] \mathbf{v} - \left[ \int_{S_e} \mathbf{H}_y \mathbf{N}^T dS \right] \mathbf{p} = \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{H}_s \hat{\sigma}_v ds, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\left[ \int_{S_e} \mathbf{N} \mathbf{H}_x^T dS \right] \mathbf{u} + \left[ \int_{S_e} \mathbf{N} \mathbf{H}_y^T dS \right] \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.66)$$

kde  $\dot{\mathbf{u}}$  a  $\dot{\mathbf{v}}$  jsou časové derivace složek vektoru rychlosti kapaliny.

Vztah (3.64) zapíšeme v komprimované maticové formě

$$\mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{u} + \mathbf{D}_1 \mathbf{u} + \mathbf{C}_1 \mathbf{p} = \mathbf{E}_1 \quad (3.67)$$

a časovou změnu rychlosti (derivaci  $\dot{\mathbf{u}}$ ) vyjádříme pomocí dopředného diferenčního schématu ve tvaru

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}. \quad (3.68)$$

Další úprava rovnice (3.67) závisí na tom, na jaké časové hladině zvolíme  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{p}$  u ostatních členů rovnice. Po dosazení vztahu (3.68) do rovnice (3.67) můžeme obecně napsat

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left\{ \mathbf{A}_1 + \Delta t(1-\beta) \left[ \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{n+1} + \mathbf{D}_1 \right] \right\}}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}^{n+1} + \underbrace{\Delta t(1-\beta) \mathbf{C}_1}_{\mathbf{B}} \mathbf{p}^{n+1} = \\ & = \Delta t \mathbf{E}_1^{n+1} + \underbrace{\left\{ \mathbf{A}_1 - \Delta t\beta \left[ \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^n + \mathbf{D}_1 \right] \right\}}_{\mathbf{F}_1} \mathbf{u}^n - \Delta t\beta \mathbf{C}_1 \mathbf{p}^n, \end{aligned} \quad (3.69)$$

kde součinitel  $\beta$  nabývá hodnot

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \text{ pro } \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1}, \\ \beta &= 0,5 \text{ pro } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2}, \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{p}^n}{2}, \\ \beta &= 1 \text{ pro } \mathbf{u} = \mathbf{u}^n, \mathbf{p} = \mathbf{p}^n. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Pro konkrétní výpočet byla použita hodnota  $\beta = 0,5$ . Analogicky přepíšeme rovnici (3.65) do komprimovaného maticového tvaru

$$\mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}_1 \mathbf{v} + \mathbf{C}_2 \mathbf{p} = \mathbf{E}_2, \quad (3.71)$$

a vyjádříme časovou změnu rychlosti  $\dot{\mathbf{v}}$  ve tvaru

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t}. \quad (3.72)$$

Dosazením derivace (3.72) do rovnice (3.71) dostaneme

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left\{ \mathbf{A}_1 + \Delta t(1-\beta) \left[ \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{n+1} + \mathbf{D}_1 \right] \right\}}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}^{n+1} + \underbrace{\Delta t(1-\beta) \mathbf{C}_2}_{\mathbf{C}} \mathbf{p}^{n+1} = \\ & = \Delta t \mathbf{E}_2^{n+1} + \underbrace{\left\{ \mathbf{A}_1 - \Delta t\beta \left[ \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^n + \mathbf{D}_1 \right] \right\}}_{\mathbf{F}_2} \mathbf{v}^n - \Delta t\beta \mathbf{C}_2 \mathbf{p}^n, \end{aligned} \quad (3.73)$$

kde součinitel  $\beta$  nabývá hodnot podle (3.70). Pro konkrétní výpočet byla opět použita hodnota  $\beta = 0,5$ .

Rovnice kontinuity (3.66) musí být samozřejmě splněna na každé časové hladině. Zkráceně ji zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{K}_2 \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{0}. \quad (3.74)$$

Rovnice (3.69), (3.73) a (3.74) přepíšeme do kompaktního maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}^{n+1} = \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{n+1} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^n. \quad (3.75)$$

Z předchozích vztahů je zřejmé, že nově zavedené matice mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 + \Delta t(1 - \beta) [\mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{n+1} + \mathbf{D}_1], \\ \mathbf{B} &= \Delta t(1 - \beta) \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{C} &= \Delta t(1 - \beta) \mathbf{C}_2, \\ \mathbf{F}_1 &= \left\{ \mathbf{A}_1 - \Delta t \beta [\mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^n + \mathbf{D}_1] \right\} \mathbf{u}^n - \Delta t \beta \mathbf{C}_1 \mathbf{p}^n, \\ \mathbf{F}_2 &= \left\{ \mathbf{A}_1 - \Delta t \beta [\mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^n + \mathbf{D}_1] \right\} \mathbf{v}^n - \Delta t \beta \mathbf{C}_2 \mathbf{p}^n. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Komprimovaný vztah (3.75) představuje soustavu nelineárních algebraických rovnic. Soustavu rovnic řešíme aplikací Newtonova-Raphsonova iteračního postupu na každé časové hladině [1], [7]. Necht'  $n$  je  $n$ -tá časová hladina a  $r$  je  $r$ -tý iterační krok na této časové hladině. Rovnici (3.75) zapíšeme ve zkráceném tvaru

$$\mathbf{K}^{(n+1)} \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)}. \quad (3.77)$$

Iterační postup je potom řízen algoritmem

$$\mathbf{x}^{(n+1),(r+1)} = \mathbf{x}^{(n+1),(r)} - \mathbf{J}_{(n+1),(r)}^{-1} \mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(0)}, \quad (3.78)$$

kde reziduální vektor má tvar

$$\mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(0)} = \mathbf{K}^{(n+1),(r)} \mathbf{x}^{(n+1),(r)} - \mathbf{f}^{(n),(0)}. \quad (3.79)$$

Rychlosti a tlaky ve vektoru  $\mathbf{f}^{(n),(0)}$  jsou konstanty, které byly napočtené na předchozí časové hladině. V iteračním procesu se na aktuální časové hladině nemění. Jacobiova matice  $\mathbf{J}$  ve vztahu (3.78) má tvar

$$\mathbf{J}_{(n+1),(r)} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_u & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{A}}_v & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

kde

$$\bar{\mathbf{A}}_u = \mathbf{A}_1 + \Delta t(1 - \beta) \left[ \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{(n+1),(r)} + \mathbf{D}_1 + \left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^T} \right) \mathbf{u}^{(n+1),(r)} \right], \quad (3.81)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_v = \mathbf{A}_1 + \Delta t(1 - \beta) \left[ \mathbf{B}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{(n+1),(r)} + \mathbf{D}_1 + \left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^T} \right) \mathbf{v}^{(n+1),(r)} \right].$$

Poslední člen z výrazů (3.81) můžeme rozepsat do tvaru (např. pro  $\mathbf{u}$ )

$$\left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^T} \right) \mathbf{u}^{(n+1),(r)} = \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial v_1} \right) \mathbf{u}^{(n+1),(r)}; \dots; \left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial u_8} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial v_8} \right) \mathbf{u}^{(n+1),(r)} \right]. \quad (3.82)$$

Z rovnice (3.64) je zřejmé, že  $\mathbf{B}_1$  je

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v}\mathbf{H}_y^T = \\ &= \mathbf{H}(H_1 u_1 + H_2 u_2 + \dots) \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}(H_1 v_1 + H_2 v_2 + \dots) \mathbf{H}_y^T. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Z výše uvedených vztahů je tedy zřejmé, že pro  $i$ -tý člen výrazu (3.82) platí

$$\left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial u_i} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial v_i} \right) \mathbf{u}^{(n+1),(r)} = H_i (\mathbf{H}\mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}\mathbf{H}_y^T) \mathbf{u}^{(n+1),(r)}, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (3.84)$$

Člen  $\left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^T} \right) \mathbf{u}^{(n+1),(r)}$  je tedy matice o rozměrech  $8 \times 8$  a stejné vztahy platí analogicky pro člen  $\left( \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^T} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^T} \right) \mathbf{v}^{(n+1),(r)}$ .

### 3.2.2. Numerické výsledky

Na základě odvozené soustavy rovnic (3.75), která popisuje izotermické laminární a nestacionární proudění Newtonovy kapaliny s konvektivním členem v Navierových-Stokesových rovnicích, můžeme opět řešit proudění kapaliny v rovinném kanále (obr. 3.2). Naznačené integrály ve vztazích (3.64), (3.65) a (3.66) vypočítáme numericky stejným způsobem jako v odst. 3.1.2.

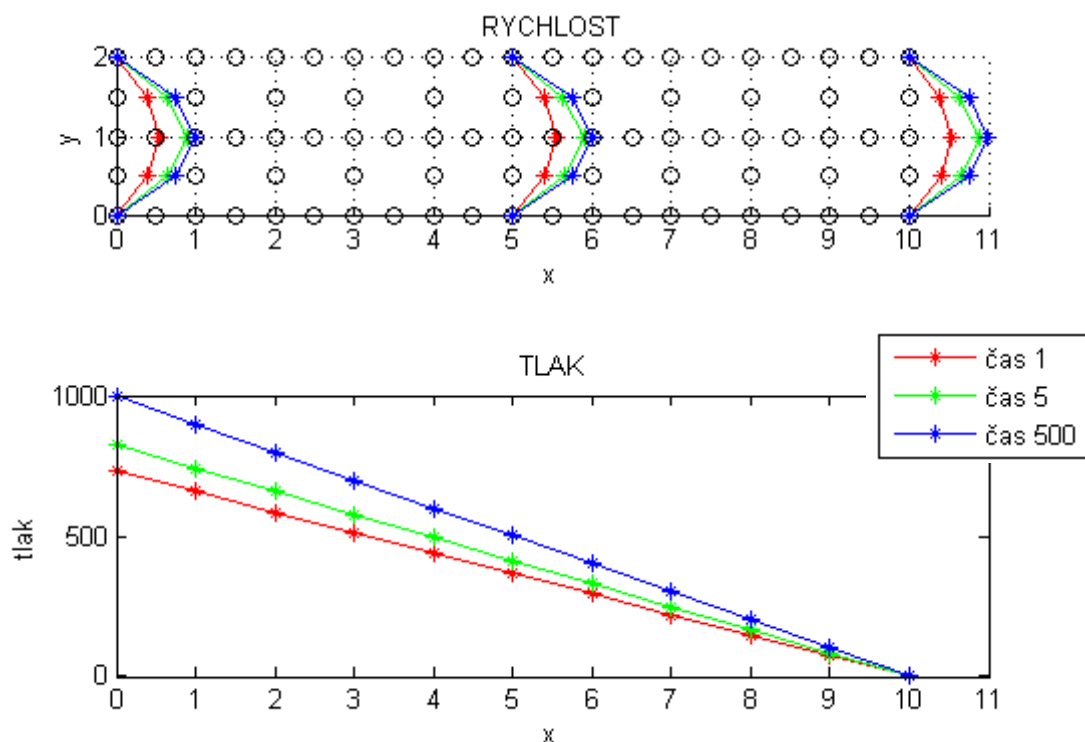
Vlastní výpočtový program, dle uvedeného algoritmu, byl opět sestaven v prostředí MATLAB a výpočet byl proveden v bezrozměrných veličinách. Vstupní data jsou stejná jako u stacionární úlohy bez konvektivního členu. Platí tedy délka kanálu  $l = 10$  a výška  $h = 2$ . Na vstupu působí tlak  $p_{vstup} = 1000$ , na výstupu  $p_{výstup} = 0$  a Reynoldsovo číslo má hodnotu  $Re = 0,02$ . Velikost časového kroku je  $\Delta t = 0,1 [s]$  a součinitel beta nabývá hodnoty  $\beta = 0,5$ . Výsledkem je rozložení rychlostí a tlaku v uvažovaném kanále. Tyto numerické výsledky jsou souhrnně uvedeny v tab. 3.4.

Z vyhodnocení těchto výsledků je zřejmé, že tlak v kapalině opět klesá lineárně se souřadnicí  $x$  a že rychlostní profil má nadále parabolický tvar (obr. 3.8). Také je evidentní, že

s časem blížícím se k nekonečnu se numerické řešení zpřesňuje a blíží se numerickým výsledkům stacionárního proudění Newtonovy kapaliny.

**Tabulka 3.4.** Výsledky numerického řešení uvažované úlohy hydromechaniky

číslo časového kroku		1	5	500	1	5	500	1	5	500
souřadnice		rychlost ve směru x			rychlost ve směru y			tlak		
x=0	y=0	0	0	0	0	0	0	732,27	824,34	1000,00
	y=0,5	0,39	0,65	0,75	-1,11E-14	-3,27E-15	4,35E-15			
	y=1	0,54	0,90	1,00	-2,09E-15	-4,97E-15	-4,34E-15	732,27	824,34	1000,00
	y=1,5	0,39	0,64	0,75	7,19E-15	1,47E-15	-1,83E-15			
	y=2	0	0	0	0	0	0	732,27	824,34	1000,00
x=5	y=0	0	0	0	0	0	0	366,14	412,17	500,00
	y=0,5	0,39	0,65	0,75	3,95E-15	2,25E-16	9,90E-16			
	y=1	0,54	0,90	1,00	2,79E-15	-1,34E-16	2,41E-15	366,14	412,17	500,00
	y=1,5	0,39	0,64	0,75	-4,85E-16	1,26E-15	2,26E-16			
	y=2	0	0	0	0	0	0	366,14	412,17	500,00
x=10	y=0	0	0	0	0	0	0	-4,84E-14	-1,10E-13	-1,09E-13
	y=0,5	0,39	0,65	0,75	-7,76E-16	-5,12E-16	1,12E-16			
	y=1	0,54	0,90	1,00	-5,05E-16	-3,02E-16	-3,35E-18	-4,39E-14	-3,52E-14	-5,30E-14
	y=1,5	0,39	0,64	0,75	2,77E-16	-5,36E-16	2,57E-16			
	y=2	0	0	0	0	0	0	1,31E-13	1,31E-13	9,82E-14



**Obr. 3.8.** Grafické znázornění výsledků numerického řešení

Závěrem této kapitoly ještě poznamenejme, že umíme-li modelovat proudění Newtonovy kapaliny, můžeme přejít na modelování proudění neneutonských kapalin, neboť základní řídicí rovnice jsou pro oba typy těchto kapalin stejné. Nejprve opět odvodíme potřebné vztahy, které potom následně budeme demonstrovat na konkrétním příkladu proudění neneutonské kapaliny.

#### 4. Modelování neneutonských kapalin

V druhé kapitole jsme provedli rozdělení neneutonských kapalin do tří základních skupin. Dále se budeme zabývat pouze časově nezávislými neneutonskými kapalinami. Jako příklady těchto kapalin můžeme uvést například zubní pastu, kečup, bláto, krev atd. Již víme, že Newtonova kapalina splňuje Newtonův třecí zákon, tj. platí konstitutivní vztah

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \dot{\gamma}, \quad (4.1)$$

kde dynamická viskozita  $\mu = konst.$  při daném tlaku a teplotě. Analogicky se nabízí definovat obecně konstitutivní vztah pro neneutonské kapaliny ve tvaru (pro 1D proudění, tzv. Newtonova zobecněná kapalina)

$$\tau = \mu_{app} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.2)$$

V tomto vztahu však zdánlivá viskozita  $\mu_{app}$  není konstantní, ale závisí na rychlosti přetvoření. Jako jeden z nejjednodušších přístupů k vyjádření konstitutivního vztahu pro neneutonské kapaliny se používá Ostwald-de Waeleův vztah známější pod označením mocninový zákon. Uvádí se obvykle ve tvaru

$$\tau = K \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n = K \dot{\gamma}^n. \quad (4.3)$$

Konzistentní parametr  $K$  a index toku  $n$  jsou u tohoto modelu konstanty, které odpovídají tokovým křivkám na obr. 4.1. Pokud je exponent  $n < 1$  jedná se o pseudoplastické kapaliny (toková křivka A1), pro  $n > 1$  to jsou dilatantní kapaliny (toková křivka A2) a pro  $n = 1$  vztah (4.3) popisuje model Newtonovy kapaliny. Rozšířený mocninový zákon (Herschelova-Bulkleyova rovnice) se uvádí ve tvaru

$$\tau = \tau_0 + K \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n. \quad (4.4)$$

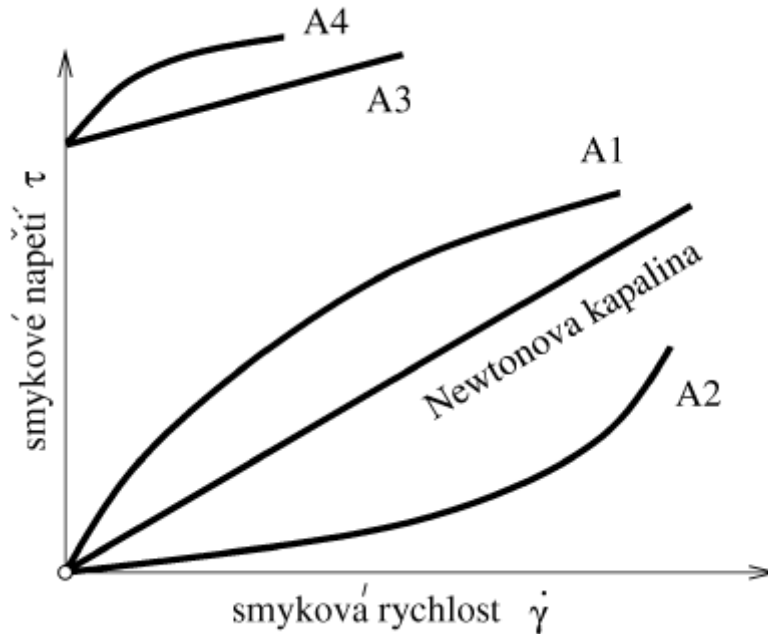
Tímto vztahem jsou popsány tokové křivky A3 a A4 na obr. 4.1. V případě, že u tohoto modelu je  $n = 1$ , tak jedná se o Binghamovu plastickou kapalinu. Pokud je  $n < 1$ , tak mluvíme o Cassonově plastické kapalině.

Srovnáním vztahů (4.2) a (4.3) můžeme zdánlivou viskozitu  $\mu_{app}$  vyjádřit ve tvaru

$$\mu_{app} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}, \quad (4.5)$$

kde zavedená absolutní hodnota vyjadřuje skutečnost, že smyková rychlost je svou velikostí stejná i pro opačný směr derivace rychlosti. Dosazením výrazu (4.5) do vztahu (4.2) obdržíme konstitutivní vztah ve tvaru

$$\tau = \left[ K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \right] \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.6)$$



**Obr. 4.1.** Tokové křivky kapalin (A1 – pseudoplastická kapalina, A2 – dilatantní kapalina, A3 – Binghamova kapalina, A4 – Cassonova kapalina) [7]

Vztah (4.6) je preferován před (4.3), protože hranatá závorka symbolizující zdánlivou viskozitu  $\mu_{app}$  je vždy kladná, zatímco znaménko smykového napětí  $\tau$  je dáno znaménkem derivace  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

Výše uvedené konstitutivní vztahy jsou platné pouze pro jednorozměrné proudění kapaliny. Tyto vztahy nyní rozšíříme na problém rovinného proudění kapalin. Nejprve tyto vztahy upravíme pro Newtonovu kapalinu a potom provedeme rozšíření na neneutonské kapaliny. Konstitutivní vztah mezi tenzorem smykového napětí a tenzorem rychlosti deformace pro nestačitelnou Newtonovu kapalinu je

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.7)$$

Při použití tenzoru rychlosti přetvoření  $V_{ij}$  napíšeme vztah (4.7) ve tvaru

$$\tau_{ij} = 2\mu V_{ij}, \quad V_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.8)$$



Podobně můžeme napsat, že pro neneutonskou kapalinu platí

$$\tau_{ij} = 2\mu_{app}V_{ij}. \quad (4.9)$$

Zdánlivá viskozita  $\mu_{app}$  v tomto vztahu není konstantou, ale je obecně funkcí tenzoru rychlosti přetvoření  $V_{ij}$ . Ve vztahu (4.9) je  $\tau_{ij}$  tenzor druhého řádu a  $V_{ij}$  na pravé straně je rovněž tenzor druhého řádu. S ohledem na zachování tenzorového stupně tohoto vztahu musí být zdánlivá viskozita  $\mu_{app}$  tenzorem nultého řádu, tedy skalárem. Znamená to, že zdánlivá viskozita musí být funkcí pouze skalárních invariantů tenzoru  $V_{ij}$ , které nezávisí na souřadném systému. Obecně tedy platí

$$\mu_{app} = f(I_1, I_2, I_3). \quad (4.10)$$

Tyto tři skalární invarianty tenzoru rychlosti přetvoření mají tvar [1]

$$\begin{aligned} I_1 &= V_{ii} = V_{11} + V_{22} + V_{33}, \\ I_2 &= V_{ij}V_{ij} = V_{11}^2 + V_{22}^2 + V_{33}^2 + 2V_{12}^2 + 2V_{23}^2 + 2V_{13}^2, \\ I_3 &= \det|V_{ij}|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pro proudění nestačitelné kapaliny je invariant  $I_1 = 0$  a dále pro rovinné proudění platí  $I_3 = 0$ . Z toho plyne, že  $\mu_{app}$  je pouze funkcí invariantu  $I_2$ , tedy  $\mu_{app} = f(I_2)$ . Musí to být ale taková funkce, která jednoduše vyhovuje také 1D problému. Zdánlivá viskozita pro mocninový model pro 2D proudění, která vyhovuje uvedené podmínce, může být například vyjádřena ve tvaru

$$\mu_{app} = K \sqrt{|2V_{ij}V_{ij}|}^{n-1}, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.12)$$

Pro indexy  $i, j = 1, 2$  plyne ze vztahů (4.11), že

$$2V_{ij}V_{ij} = 2V_{11}^2 + 2V_{22}^2 + 4V_{12}^2 \quad (4.13)$$

a také víme, že pro rovinné proudění platí

$$V_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \quad V_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad V_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}. \quad (4.14)$$

Výrazy (4.14) dosadíme do (4.13) a vyjádříme zdánlivou viskozitu  $\mu_{app}$ . Dostaneme

$$\mu_{app} = K \sqrt{\left| 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \right|}^{n-1}. \quad (4.15)$$

Takže vztah (4.9) pro neneutonské kapaliny ve 2D má tvar

$$\tau_{12} = \left[ K \left| \sqrt{2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2} \right|^{n-1} \right] \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right). \quad (4.16)$$

Pro jednorozměrné proudění kapaliny platí, že  $u = v_1(x_2) = u(y)$ . Vztah (4.16) se tedy redukuje na tvar

$$\tau_{12} = \left[ K \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right|^{n-1} \right] \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \left[ K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \right] \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.17)$$

což koresponduje se vztahem (4.6).

Pro proudění v polárních souřadnicích se konstitutivní rovnice pro mocninový zákon odvozuje podobně. Analogicky ke vztahu (4.16) můžeme psát [3]

$$\tau_{r\varphi} = \left[ K \left| \sqrt{2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right)^2} \right|^{n-1} \right] \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right). \quad (4.18)$$

Obdobně můžeme vyjádřit vztah (4.16) ve válcových souřadnicích pro osově symetrické proudění. Osově symetrické proudění nezávisí na proměnné  $\varphi$ , ale pouze na  $r$  a  $z$ . Tedy

$$\tau_{rz} = \left[ K \left| \sqrt{2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2} \right|^{n-1} \right] \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \quad (4.19)$$

Rychlost v podélném směru, jejíž směr je rovnoběžný s osou  $z$ , závisí pouze na proměnné  $r$ . Pro jednorozměrné proudění v rotační trubici platí, že  $v_z = v_z(r)$ . Konstitutivní vztah (4.19) se zjednoduší na tvar

$$\tau_{rz} = \left[ K \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \right] \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad (4.20)$$

který je podobný výrazu (4.6) v úvodu této kapitoly.

Připomeňme, že při numerickém řešení proudění neneutonských kapalin se vychází ze stejných řídicích rovnic jako u proudění Newtonovy kapaliny (viz vztahy (3.1) až (3.5)). Rozdíl je pouze v tom, že při konečném vyjádření Navierovy-Stokesovy rovnice (3.1) respektujeme konkrétní tvar konstitutivního vztahu neneutonské kapaliny. Při numerické realizaci této úlohy hydromechaniky bychom opět aplikovali metodu konečných prvků.

#### 4.1. Proudění neneutonské kapaliny v trubici

Nyní se budeme zabývat úlohou proudění neneutonské kapaliny v rotační trubici. Pro zjednodušení této úlohy uvažujeme, že se jedná o stacionární laminární izotermické proudění nestlačitelné neneutonské kapaliny. Stejně jako v případě Newtonovy kapaliny hledáme řešení této úlohy dostatečně daleko od konců trubice. Jelikož řešíme proudění v rotační trubici, použijeme válcovou soustavu souřadnic  $r, \varphi, z$ . Dále předpokládáme osově symetrické jednorozměrné proudění, které nezávisí na proměnné  $\varphi$ . Osou symetrie trubice je osa  $z$  a složka rychlosti v tomto směru je tedy závislá pouze na proměnné  $r$ , tj. platí  $v_z = v_z(r)$ .

Při řešení této modelové úlohy hydromechaniky vyjdeme z Navierových-Stokesových rovnic ve válcových souřadnicích. Platí [10]

$$\begin{aligned}
 & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\
 & = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right); \\
 & \rho \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) = \\
 & = \rho g_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right); \\
 & \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\
 & = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Protože řešíme osově symetrické jednorozměrné proudění, kde  $v_z = v_z(r)$ , tak složky rychlosti v ostatních směrech jsou nulové ( $v_r = v_\varphi = 0$ ). Při výpočtu zavedeme modifikovaný tlak  $P = p + h\rho g$ . Okrajové podmínky této úlohy proudění jsou potom

$$\begin{aligned}
 v_z(R) &= 0, \\
 \frac{\partial v_z(0)}{\partial r} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

kde  $R$  je vnitřní poloměr trubice.

Zohledněním uvedených předpokladů získáme z Navierových-Stokesových rovnic (4.21) následující vztahy:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial P}{\partial r}, \\
0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \\
0 &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Poslední člen (třetí rovnice těchto vztahů) vyjádříme ve tvaru

$$\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}). \tag{4.24}$$

Ze soustavy rovnic (4.23) vyplývá, že  $P$  není funkcí  $r$  a  $\varphi$ , ale je funkcí pouze  $z$ . Napíšeme tedy

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\Delta P}{\Delta z}. \tag{4.25}$$

Dále do vztahu (4.24) dosadíme za  $\tau_{rz}$  konstitutivní vztah (4.20) a upravíme třetí rovnici ze soustavy rovnic (4.23). Dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ Kr \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] = \frac{\Delta P}{\Delta z} r. \tag{4.26}$$

Tento vztah dále upravíme zavedením koeficientu  $\varepsilon$  předpisem

$$\varepsilon = \frac{\frac{\partial v_z}{\partial r}}{\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|}, \tag{4.27}$$

kde zřejmě  $\varepsilon$  nabývá hodnot  $\pm 1$  v závislosti na znaménku derivace  $\frac{\partial v_z}{\partial r}$ . Rovnice (4.26) přejde do tvaru

$$\varepsilon K \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^n \right] = \frac{\Delta P}{\Delta z} r \tag{4.28}$$

a tento vztah následně integrujeme. Dostaneme

$$\varepsilon K \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^n = \frac{\Delta P}{\Delta z} \frac{r}{2} + C_1, \quad (4.29)$$

kde  $C_1$  je integrační konstanta. Tu vypočteme z druhé okrajové podmínky (4.22) a platí  $C_1 = 0$ .

Rovnice (4.29) má potom tvar

$$\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^n = \frac{r}{2\varepsilon K} \frac{\Delta P}{\Delta z}. \quad (4.30)$$

Absolutní hodnotu na levé straně rovnice (4.30) můžeme odstranit, protože derivace  $\frac{\partial v_z}{\partial r}$  je v trubici záporná. Ze vztahu (4.27) vyplývá, že koeficient  $\varepsilon = -1$ . Rovnice (4.30) přejde tedy do tvaru

$$-\frac{\partial v_z}{\partial r} = \left[ \frac{1}{2K} \left( -\frac{\Delta P}{\Delta z} \right) \right]^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}. \quad (4.31)$$

Integrací tohoto vztahu dostaneme

$$v_z = -\frac{n}{n+1} \left[ \frac{1}{2K} \left( -\frac{\Delta P}{\Delta z} \right) \right]^{\frac{1}{n}} r^{\frac{n+1}{n}} + C_2, \quad (4.32)$$

kde integrační konstantu  $C_2$  určíme z první okrajové podmínky (4.22). Integrační konstanta má hodnotu

$$C_2 = \frac{n}{n+1} \left[ \frac{1}{2K} \left( -\frac{\Delta P}{\Delta z} \right) \right]^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}. \quad (4.33)$$

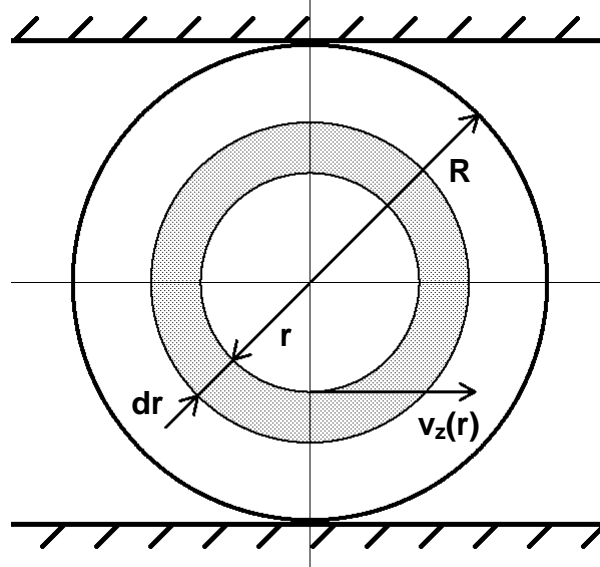
Dosazením výrazu (4.33) do vztahu (4.32) a úpravou dostaneme výsledný vztah pro složku rychlosti ve směru  $z$ . Platí

$$v_z(r) = \frac{n}{n+1} \left[ \frac{1}{2K} \left( -\frac{\Delta P}{\Delta z} \right) \right]^{\frac{1}{n}} \left( R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right). \quad (4.34)$$

Když známe rozložení rychlosti v trubici, můžeme průtočné množství kapaliny  $Q$  vypočítat ze vztahu

$$Q = \int_0^R 2\pi r v_z(r) dr. \quad (4.35)$$

Odůvodnění této integrace je schematicky znázorněné na obr. 4.2.



**Obr. 4.2.** Naznačení výpočtu průtočného množství kapaliny průřezem trubice

Po dosazení vztahu (4.34) za  $v_z(r)$  a následné integraci dostaneme výsledný vztah pro průtočné množství kapaliny v trubici

$$Q = \frac{\pi n}{3n+1} \left[ \frac{R^{3n+1}}{2K} \left( -\frac{\Delta P}{\Delta z} \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (4.36)$$

Konzistentní parametr  $K$  a index toku  $n$  jsou konstanty, které zjišťujeme z experimentálně naměřených dat. Experiment se realizuje tak, že určíme dvě místa v trubici (např. místo 1 a 2), jejichž vzájemná vzdálenost je  $L$ . V těchto místech změříme objemové průtoky  $Q_1$ ,  $Q_2$  a určíme tlakové gradienty. Naměřené hodnoty dosadíme do vztahu (4.36). Dostaneme

$$Q_1 = \frac{\pi n}{3n+1} \left[ \frac{R^{3n+1}}{2K} \left( -\frac{\Delta P_1}{L} \right) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (4.37)$$

$$Q_2 = \frac{\pi n}{3n+1} \left[ \frac{R^{3n+1}}{2K} \left( -\frac{\Delta P_2}{L} \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (4.38)$$

Vyhodnocením těchto závislostí dostaneme pro index toku  $n$  vztah

$$n = \frac{\log\left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}\right)}{\log\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)}. \quad (4.39)$$

Dále např. z rovnice (4.37) vyjádříme konzistentní parametr  $K$  ve tvaru

$$K = \frac{R^{3n+1}}{2 \left( \frac{Q_1(3n+1)}{\pi n} \right)^n} \left( -\frac{\Delta P_1}{L} \right), \quad (4.40)$$

kam za  $n$  dosadíme vypočtenou hodnotu výrazu (4.39).

#### 4.1.1. Výpočet rychlosti proudění v trubici

Výpočet konzistentního parametru  $K$  a indexu toku  $n$  demonstrováme na konkrétním příkladu. Jsou zadány hodnoty objemového průtoku  $Q_1 = 0,001 [m^3 s^{-1}]$ ,  $Q_2 = 0,002 [m^3 s^{-1}]$  a tlakové gradienty nabývají hodnot  $\frac{\Delta P_1}{L} = 10^4 [Pa \cdot m^{-1}]$ ,  $\frac{\Delta P_2}{L} = 1,5 \cdot 10^4 [Pa \cdot m^{-1}]$ . Při výpočtu použijeme záporné hodnoty tlakových gradientů. Poloměr trubice je  $R = 0,025 [m]$ . Data dosadíme do vztahu (4.39) a získáme hodnotu indexu toku

$$n = 0,585. \quad (4.41)$$

Na základě znalosti indexu toku můžeme vypočítat konzistentní parametr. Hodnotu (4.41) dosadíme do vztahu (4.40) a dostaneme velikost konzistentního parametru. Platí

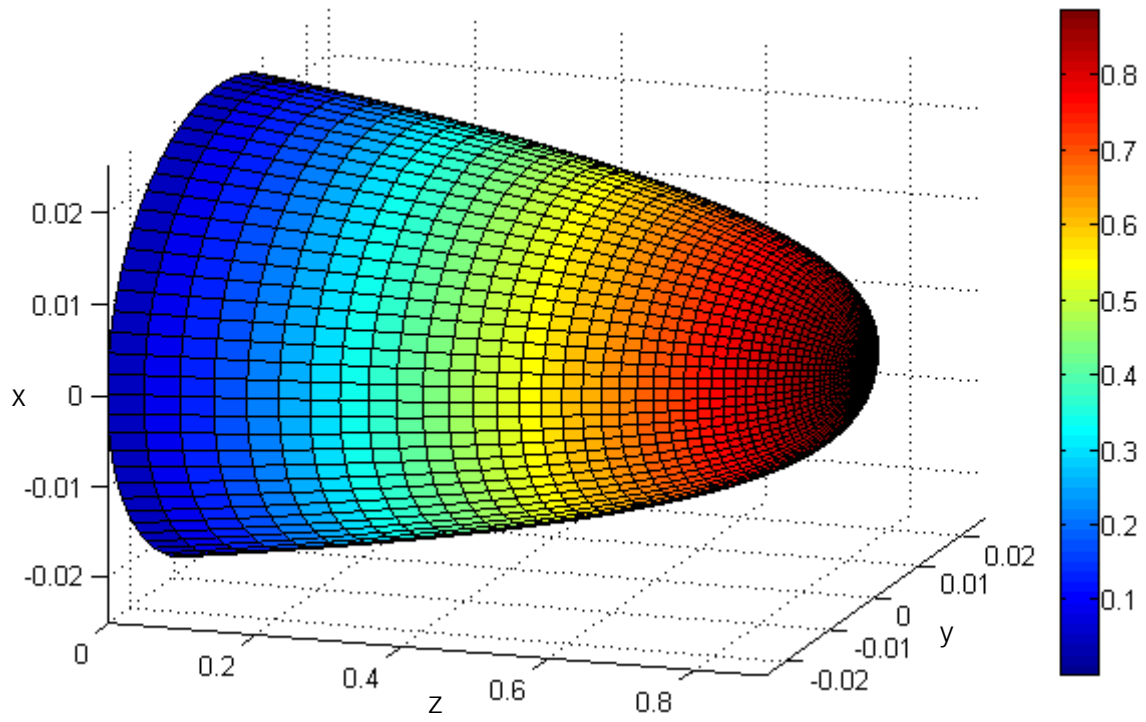
$$K = 8,66 [Pa s]. \quad (4.42)$$

Dosazením konstant  $K$  a  $n$  do vztahu (4.34) zjistíme rychlost výše definované neneutonské kapaliny v libovolném místě trubice. Výpočet rychlostí ukážeme v místě prvního průřezu trubice, kde tlakový gradient nabývá hodnot  $\frac{\Delta P_1}{L} = 10^4 [Pa \cdot m^{-1}]$ . Vzorec pro výpočet rychlosti bude tedy ve tvaru

$$v_z(r) = \frac{n}{n+1} \left[ \frac{1}{2K} \left( -\frac{\Delta P_1}{L} \right) \right]^{\frac{1}{n}} \left( R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right). \quad (4.43)$$

Samotný výpočet byl proveden v prostředí MATLAB. Výsledkem je rozložení rychlostí v uvažované trubici, které je znázorněno na obr. 4.3.

Ze znázornění na obr. 4.3 je zřejmé, že rozložení rychlosti po průřezu trubky představuje „zploštělý“ paraboloid. Tento závěr je plně v souladu s výsledky publikovanými v literatuře (např. [11]).



**Obr. 4.3.** Rychlostní pole v rotační trubici



## 5. Závěr

Bakalářská práce je věnována modelování proudění kapalin. V úvodu jsem připomněla historii mechaniky tekutin. Zmínila jsem zde některé významné vědce, kteří se této problematice věnovali, a jejich důležité objevy. Poté jsem rozdělila kapaliny z několika různých hledisek. V dalších kapitolách jsem se zabývala samotným modelováním proudění kapalin. U Newtonovy kapaliny jsem se věnovala jak stacionárnímu laminárnímu izotermickému proudění bez konvektivního členu, tak nestacionárnímu laminárnímu izotermickému proudění s konvektivním členem v Navierově-Stokesově rovnici. V předposlední kapitole je dále naznačeno základní modelování neneutonských kapalin. Zaměřila jsem se pouze na analytické řešení stacionárního laminárního proudění s využitím mocninového zákona pro popis viskozity (zobecněná Newtonova kapalina).

Jedním ze základních rozdělení kapalin je rozdělení podle viskozity. Podle funkce viskozity se kapaliny dělí do dvou základních skupin, nevazké a vazké. Vazké kapaliny se dále dělí podle toho, zda je viskozita funkcí smykové rychlosti nebo není. Kapaliny, jejichž viskozita je konstantní pro daný tlak a teplotu, se nazývají newtonské. Tyto kapaliny tedy nezávisí na smykové rychlosti a napětí v nich se řídí Newtonovým třecím zákonem. Pokud je viskozita kapalin funkcí smykové rychlosti, označují se jako neneutonské. Z hlediska typu ustálenosti proudění se kapaliny dělí na stacionární a nestacionární. Podle geometrického uspořádání potom rozlišujeme jednorozměrné, rovinné a prostorové proudění. Další významné rozdělení proudění je rozdělení na laminární a turbulentní proudění.

Ve třetí kapitole jsem se zabývala modelováním proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny. Úloha je obecně popsána pomocí Navierovy-Stokesovy rovnice, rovnice kontinuity, okrajových podmínek a počáteční podmínky. Nejprve jsem uvažovala stacionární laminární izotermické proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny s konstantní měrnou hmotností a konstantní dynamickou viskozitou se zanedbaným konvektivním členem. Pomocí Galerkinovy metody bylo odvozeno slabé řešení dané úlohy hydromechaniky. Jako modelovou úlohu jsem zvolila proudění této kapaliny v rovinném kanálu s pevnými stěnami. Diskretizace úlohy byla provedena konečnými prvky. Pro popis geometrie prvku a aproximace hledaných funkcí (složky rychlosti a tlak v kapalině) jsem aplikovala izoparametrické prvky včetně příslušných interpolačních funkcí. Aproximace tlaku byla provedena lineární funkcí, aproximace složek vektoru rychlosti potom kvadratickou funkcí. Numerická realizace (metoda konečných prvků) této úlohy hydromechaniky vede na soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé složky rychlostí a tlaku v jednotlivých uzlech konečných prvků. Při numerické realizaci jsem zanedbala objemové síly působící na kapalinu. Vytvořila jsem vlastní výpočtový program v prostředí MATLAB a provedla jsem výpočet v bezrozměrných veličinách pro malé Reynoldsovo číslo. Výsledkem numerického řešení je rozložení rychlostí a tlaku v uvažovaném kanálu. Dále jsem provedla analytické řešení stejné úlohy hydromechaniky, abych mohla porovnat dosažené výsledky analytického a numerického řešení. Ze získaných výsledků výpočtů je zřejmé, že tlak má lineární pokles a rychlostní profil má parabolický tvar. Z porovnání je zřejmé, že analytické i numerické řešení dává prakticky stejné výsledky. V druhé části třetí kapitoly jsem se věnovala nestacionárnímu laminárnímu izotermickému proudění nestlačitelné Newtonovy kapaliny s uvažováním konvektivního členu v Navierově-Stokesově rovnici. Při řešení této úlohy hydromechaniky jsem postupovala analogicky jako v případě stacionárního proudění. Numerická realizace tentokrát vede na soustavu nelineárních algebraických rovnic (pro neznámé uzlové hodnoty – složky vektoru rychlosti a tlak). Tuto soustavu rovnic jsem řešila aplikací Newtonovy-Raphsonovy iterační metody na každé časové hladině. Vlastní výpočtový

program jsem opět zkonstruovala ve výpočtovém prostředí MATLAB a výpočet jsem realizovala též v bezrozměrných veličinách pro malé Reynoldsovo číslo. Výsledkem bylo rozložení rychlostí a tlaků v uvažovaném kanálu. Z dosažených numerických výsledků je zřejmé, že tlak opět klesá lineárně v závislosti na podélné souřadnici kanálu a rychlostní profil má rovněž parabolický tvar. Rozložení tlaku ve směru kolmém na osu kanálu je prakticky stejné a konstantní. Také je evidentní, že s časem blížícím se k nekonečnu se numerické řešení nestacionárního proudění zpřesňuje a blíží se k numerickým výsledkům stacionárního proudění kapaliny.

Čtvrtá kapitola je věnována úvodu do modelování proudění neneutonských kapalin. Konkrétně jsem se zabývala modelováním proudění viskózních časově nezávislých neneutonských kapalin. Tuto úlohu jsem řešila pouze analyticky s využitím mocninového zákona pro funkci viskozity. Zabývala jsem se nejprve konstitutivním vztahem pro smykové napětí pro jednorozměrné proudění. Následně jsem tento vztah rozšířila pro rovinné proudění. Potom jsem příslušný model převedla do polárních souřadnic a provedla jsem výpočet rozložení rychlostí v rotační trubici pro jednorozměrné proudění kapaliny. Ze znalosti rychlostního pole jsem odvodila vztah pro průtočné množství. Odvozené analytické vztahy jsem demonstrovala na konkrétním příkladu. Z těchto vztahů pro proudění lze ze známých hodnot objemových průtoků a tlakových gradientů odvodit příslušné konstanty mocninového zákona pro viskozitu ( $K$  - konzistentní parametr,  $n$  - index toku). Napočtené konstanty byly použity pro výpočet konkrétního rozložení kapaliny v rotační trubici. Z dosažených výsledků je zřejmé, že u neneutonských kapalin má rozložení rychlostí tvar „zploštělého“ paraboloidu. Připomeňme, že u kapalin Newtonova typu má rychlostní profil tvar „plného“ paraboloidu.

Závěrem uvedme, že další rozšíření uvedené tematiky bude v budoucnu zaměřeno na numerické řešení vybraných modelových úloh proudění neneutonských vazkých kapalin.

## Seznam použité literatury

- [1] KŘEN, Jiří a ROSENBERG, Josef. *Mechanika kontinua*. 2., upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. 324 s. ISBN 80-7082-908-7.
- [2] CHUNG, T. J. *Finite Elemente in der Strömungsmechanik*. 1. vyd. München; Wien: Hanser, 1983. 364 s. ISBN 3-446-13596-0.
- [3] PNUELI, D., GUTFINGER, Ch. *Fluid mechanics*. 1. vyd. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 482 s. ISBN 0-521-41704-X.
- [4] HUANG, H. Ch., LI, Z. H., USMANI, A.S. *Finite element analysis of non-Newtonian flow*. 1. vyd. London: Springer, 1999. 218 s. ISBN 1-85233-024-4.
- [5] LINHART, Jiří. *Mechanika tekutin I*. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2009. 123 s. ISBN 978-80-7043-766-7.
- [6] VYBÍRAL, Bohumil. *Mechanika ideálních kapalin*. [online]. 2012. Dostupné z: <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kapaliny.pdf> >
- [7] KŘEN, Jiří a HORÁK, Miroslav. *Multimediální a experimentální podpora biomechaniky - FRVŠ 2300/2003*. [online]. 2003. Dostupné z: <<http://www.kme.zcu.cz/granty/biofrvs/index.html> >
- [8] Tomiczek, Petr. *Skripta z matematické analýzy 3*. [online]. 2011. Dostupné z: <<http://home.zcu.cz/~tomiczek/vyuka.htm>>
- [9] KIM, Nam-Ho a SANKAR, Bhavani V. *Introduction to finite element analysis and design*. 1. vyd. New York: John Wiley & Sons, ©2009. 419 s. ISBN 978-0-470-12539-7.
- [10] GRAMOLL, K. C., NGO, C. C. *Multimedia Engineering Fluid Mechanics*. [online]. Dostupné z: <<http://ecourses.ou.edu/cgi-bin/ebook.cgi?doc=&topic=fl> >
- [11] BÖHME, G. *Strömungsmechanik nichtnewtonscher Fluide*. 2. vyd. Stuttgart: Teubner Studienbücher, ©2000. 352 s. ISBN 3-519-12354-1.