

Zapadočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra mechaniky

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Modelování 3D proudění nestlačitelné vazké tekutiny  
pomocí lattice Boltzmannovy metody

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 16. června 2014

.....

## Anotace

Tato práce je náhledem do mřížkové Boltzmannovy metody. Jejím hlavním cílem je ukázat základní teorii metody, její aplikace v řešení třídímenzionálního proudění tekutin a následného využití při výpočtu odporového koeficientu. Navržené algoritmy byly implementovány ve výpočtovém prostředí MATLAB a v jazyce C++. V závěru práce jsou porovnány numerické výsledky získané vlastním vyvinutým softwarem s publikovanými výsledky jiných autorů.

**Klíčová slova:** LBM, lattice Boltzmannova metoda, modelování proudění, proudění, mechanika tekutin, odporový koeficient, 3D, Boltzmannova mřížková metoda

## **Abstract**

This thesis is an overview of Lattice Boltzmann Method. Main goal of this work is to show the basic theory of the method and show its application in three-dimensional fluid dynamics and further usage in evaluation of drag coefficient. Designed LBM algorithm was implemented in computing environment of MATLAB and programming language of C++. The end of this work contains comparison of numerical results obtained by self-developed software to ones published by other authors.

**Keywords:** CFD, LBM, lattice Boltzmann method, fluid, fluid flow, drag coefficient

# Obsah

Úvod	1
<b>1 Boltzmannova mřížková metoda (LBM)</b>	<b>3</b>
1.1 Spojitá Boltzmannova rovnice a její diskretizace . . . . .	3
1.2 Rovinný D2Q9 a prostorový D3Q19 model . . . . .	6
1.3 Okrajové podmínky . . . . .	8
<b>2 Multiple-relaxation time</b>	<b>10</b>
2.1 MRT pro model D3Q19 . . . . .	10
<b>3 Teorie podobnosti</b>	<b>15</b>
3.1 Vazby mezi fyzikálními a mřížkovými jednotkami . . . . .	15
3.2 Mřížkové parametry . . . . .	17
<b>4 Odvození Navierových-Stokesových rovnic</b>	<b>18</b>
<b>5 Výpočet síly</b>	<b>22</b>
5.1 Odporový koeficient . . . . .	22
5.2 Součtová metoda . . . . .	23
5.3 Změna hybnosti . . . . .	24
<b>6 Numerické výsledky</b>	<b>26</b>
6.1 Implementace v jazycích Matlab a C++ . . . . .	26
6.2 Kanál s kolmým ramenem . . . . .	27
6.3 Kanál s rozšířeným kolenem . . . . .	28
6.4 Výpočet odporového koeficientu . . . . .	29
6.5 Proudění v cévách . . . . .	31
<b>Závěr</b>	<b>33</b>

# Úvod

Mřížková Boltzmannova metoda (LBM) je poměrně nová numerická metoda používaná pro numerické řešení proudění tekutin. Vyvinula se z buněčných automatů (Cellular Automata, CA), které řešily pohyb modelových částic a interakce mezi nimi. Podobně i Boltzmannova metoda pracuje se shluky částic, neboli molárními částicemi. Jde o dynamiku mikroskopických částic, které jsou ovšem natolik velké, že lze pomocí LBM řešit i makroskopické proudění. Z tohoto pohledu přesahuje čistě mikroskopické CA či čistě makroskopické metody, které se většinou zakládají na numerickém řešení Navierových-Stokesových rovnic.

LBM pracuje s diskrétními veličinami. Rychlost proudících molárních částic je omezena jen na několik možných směrů a velikostí. Navíc veškeré dynamické procesy molárních částic se v rámci LBM zjednodušují na jejich šíření a vzájemnou kolizi [27]. Ukazuje se však, že i takto zjednodušený model může velice přesně popisovat reálné proudění.

S ohledem na finanční a celkovou náročnost provedení experimentu, je numerické modelování stále více upřednostňováno před experimentálními měřeními. Dochází tedy k vysokému rozvoji tohoto odvětví, a tedy i rozvoji LBM. Velice vhodná je LBM například pro modelování proudění tekutiny porézním materiálem [13], [3], [12], pro modelování proudění s volnou hladinou [10], [16], modelování turbulentního proudění [11] či zahrnutí vnějších objemových sil či teplotních změn do proudového pole [20].

Implementace mřížkové Boltzmannovy metody je relativně jednoduchá. Snadné je i zavedení okrajových podmínek či mikroskopických vlivů a paralelizace výpočtu. Metoda má však i své limity - LBM nelze užít například na proudění vysoké rychlosti blízké rychlosti zvuku (ačkoli například Yu a Zhao [28] a Pan a kol. [24] se již tímto problémem poměrně úspěšně ve své práci zabývali) či na řešení proudění s předpokládanými velkými výkyvy hustoty (metoda je postavená na předpokladu malých změn hustoty v čase).

Koncepce této bakalářské práce je následující: První kapitulu tvoří teoretický úvod do LBM a základní stavební prvky metody jsou představeny na dvourozměrném modelu. V následující kapitole je popsán stabilnější Multiple-relaxation time (MRT) model pro prostoro-rový případ. Kapitola třetí se věnuje problematice převodu jednotek mezi dvěma systémy - systémem mřížky a fyzikálním systémem. Zavedení nových jednotek pro výpočty pomocí LBM je důležité, jelikož přináší mnohá zjednodušení, potažmo urychlení výpočtu. Kapitola čtvrtá přináší nahlédnutí do jednoho z možných využití LBM - výpočtu síly od proudící tekutiny na těleso. V kapitole páté je ukázáno odvození spojitých Navierových-Stokesových

rovnice z diskrétní Boltzmannovy rovnice. Součástí poslední šesté kapitoly jsou výstupy vlastního vyvinutého softwaru porovnané s publikovanými a dostupnými výsledky jiných autorů. Nejprve se jedná o výpočet proudění v rozvětveném potrubí porovnané s prací Beneše a kol. [1], dále potrubí s rozšířeným ohybem porovnané s výsledky vedoucího této práce Ing. Bublíka. Následuje srovnání odporových koeficientů krychle pro různá Reynoldsova čísla s prací Richtera a Nikrityuka [26] a na závěr výsledky simulace proudění tekutiny ve členitém geometrii cévního systému.

# Kapitola 1

## Boltzmannova mřížková metoda (LBM)

Tato kapitola se zabývá diskretizací Boltzmannovy rovnice a aplikací na konkrétní dvou-  
rozměrný a trojrozměrný model.

### 1.1 Spojitá Boltzmannova rovnice a její diskretizace

Boltzmannova rovnice vychází z ideje, že tekutina sestává z navzájem ovlivňujících se částic, jejichž pohyb může být popsán klasickou mechanikou. Kvůli vysokému počtu takových částic přechází k statistickému přístupu. Boltzmannova mřížková metoda aplikuje dynamické procesy na molární částice (tedy shluky velkého počtu reálných částic se stejnou hybností) a jsou zjednodušeny na dva kroky – šíření částic, propagaci, (kdy se neuvažují vzájemné interakce mezi částicemi) a kolizi (srážku dvou a více částic).

Mějme fázový prostor v něm velké množství částic. Pokud budeme nyní uvažovat jednorozměrný případ, lze fázový prostor znázornit pomocí osy  $\mathbf{r}$  vyjadřující polohu částic v jednorozměrném prostoru a osu  $\mathbf{u}$  značící rychlost daných částic. Reálné částice s podobnou polohou  $\mathbf{r}$  a podobnou rychlostí  $\mathbf{u}$  v určitém čase lze seskupit do větších molárních částic. Počet reálných částic v molární částici je pak definován hmotnostní funkcí  $f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$ . Tato funkce tedy udává celkovou hmotnost částic podobných vlastností v určitém čase. Její znázornění je na obr. 1.1 vlevo.

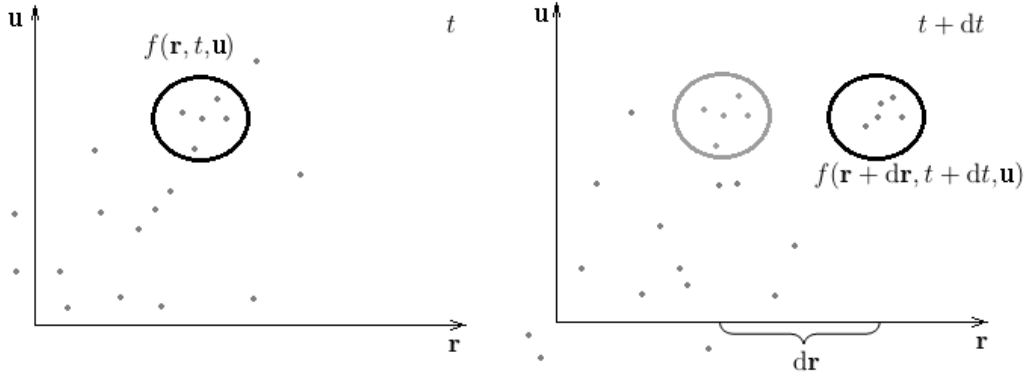
Při prostém šíření (propagaci) částic, bez uvažování jejich vzájemného působení a srážek a při zanedbání působení vnějších sil, se všechny částice za určitý čas posunou do jiného místa, nicméně jejich rychlost (potažmo hybnost - jelikož hmotnost daná hmotnostní funkcí  $f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$ ) je neměnná. Tento proces je znázorněn na obr. 1.1 a lze ho popsat též rovnicí

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt, \mathbf{u}) = f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}), \quad (1.1)$$

kde  $\mathbf{r}$  je poloha molární částice,  $t$  je čas a  $\mathbf{u}$  je její rychlost.

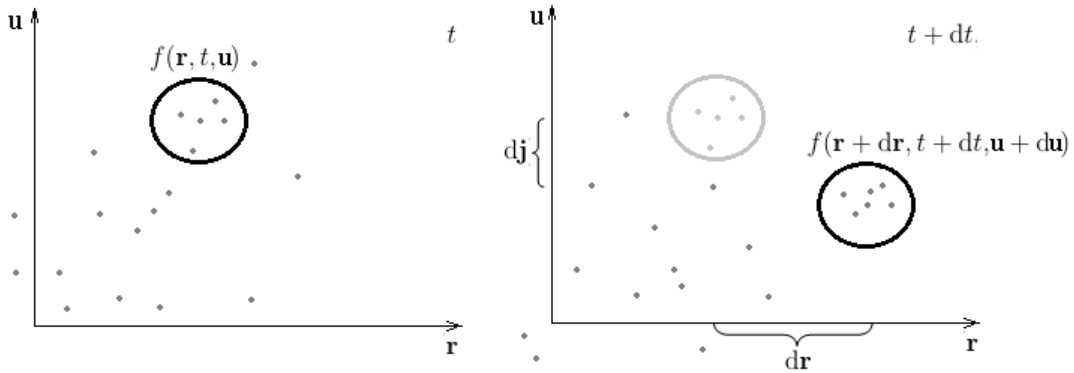
Jelikož částic je v tekutině mnoho a vzdálenost mezi nimi není velká a navíc se pohybují různými směry a rychlostmi, dochází mezi nimi ke srážkám. Ty způsobují, že ne všechny





Obr. 1.1: Hmotnostní funkce  $f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  a její šíření.

částice vycházející z bodu  $\mathbf{r}$  dorazí do bodu  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  a naproti tomu i některé částice, které nevyšly z bodu  $\mathbf{r}$ , dorazí do bodu  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ . Molární částice se tedy nejen přesouvají, ale zároveň se mění jejich hmotnost a hybnost. Změna hmotnosti se projeví změnou hmotnostní funkce  $f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  a změna rychlosti přesunem molární částice ve fázovém prostoru, jak je znázorněno na obr. 1.2.



Obr. 1.2: Kolizní proces, kdy dochází ke změně hmotnosti a hybnosti molárních částic.

Pokud počet částic, které se kvůli mezimolekulárním srážkám nedostaly do svého původního místa určení, vyjádříme jako  $\Gamma^{(-)}$  a počet částic, které kvůli kolizi neplánovaně skončily v tomtéž koncovém bodě,  $\Gamma^{(+)}$ , pak kompletní rovnice zahrnující šíření i kolizi vypadá následovně [27]

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt, \mathbf{u} + d\mathbf{u}) - f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) = \Gamma^{(-)} + \Gamma^{(+)} \quad (1.2)$$

Kolizní (pravá) část rovnice (1.2) může mít různé podoby. Hojně používaný je tvar Bhatnagara Grosse a Krooka (BGK) [2], [27]

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt, \mathbf{u} + d\mathbf{u}) - f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) = -\frac{1}{\tau} (f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) - f^{eq}(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})), \quad (1.3)$$

kde  $f^{eq}(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  je rovnovážná funkce a  $\tau$  je relaxační čas. Rovnovážná funkce  $f^{eq}(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  vyjadřuje rovnovážný stav systému a relaxační čas  $\tau$  udává dobu, za jakou se tento systém ustálí. Jelikož BGK model užívá pouze jeden uniformní relaxační čas pro všechny veličiny, nese tento model též označení single-relaxation time (SRT).

Na dalších řádcích je provedena diskretizace hmotnostní funkce  $f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  po jednotlivých proměnných.

Prostor (prostorová proměnná  $\mathbf{r}$ ) je rozdělen mřížkou, v jejíchž rozích jsou uzly. Každý uzel má svůj polohový vektor  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , kde  $N$  je celkový počet uzlů. Prostorová proměnná je tedy omezená na konečný počet uzlů mřížky. Veškerou hmotu (částice hmoty) okolí jednotlivých uzlů uvažujeme koncentrovanou do tohoto uzlu. Okolí uzlu lze brát jako čtvercovou oblast se středem v uzlu a stranou délky  $d\mathbf{r}$ . Funkce hmotnosti  $f(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  tedy přejde na tvar  $f(\mathbf{r}_i, t, \mathbf{u})$ .

Diskretizace časové proměnné již není tak snadná. Časové úseky  $dt$  by neměly být příliš velké, jelikož pak by se ztrácela přesnost simulace. Na druhé straně příliš krátké úseky nejsou vhodné z hlediska ceny výpočtu. Je proto nutné najít kompromis – nejlepší vyvážení přesnosti a výpočetní náročnosti simulace. Více o volbě časového kroku  $dt$  je vyloženo v sekci 3.2.

Diskretizace rychlosti odpovídá tvaru mřížky. Uzel mřížky má  $q - 1$  sousedů, kde  $q$  je číslo charakteristické pro jednotlivé modely. Částice se mohou po mřížce pohybovat  $q - 1$  různými směry, či se nepohybovat a zůstat v původním uzlu. Tato skutečnost dává soubor  $q - 1$  rychlostí  $\mathbf{e}_\alpha$ , kde  $\alpha = 0, 1, \dots, q - 1$ . Jelikož Boltzmannova metoda předpokládá, že částice se mohou dostat během jednoho časového kroku jen do nejbližších sousedních uzlů, musí platit, že  $\mathbf{e}_\alpha = d\mathbf{r}_\alpha/dt$ .

Jelikož jednotlivé hmotnostní funkce  $f(\mathbf{r}_i, t, \mathbf{u}_\alpha)$  odpovídají vždy konkrétnímu vektoru  $\mathbf{e}_\alpha$ , dochází k formálnímu přechodu na distribuční funkce rychlosti  $f_\alpha(\mathbf{r}_i, t)$ . Ty udávají, jaké množství reálných částic v určitém uzlu směřuje určitým směrem.

Z předchozího plyne vyjádření makroskopické hustoty v jednotlivých uzlech

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^{q-1} f_\alpha. \quad (1.4)$$

Makroskopická hybnost je obdobně součtem všech mikroskopických hybností ve sledovaném uzlu

$$\rho \mathbf{u} = \mathbf{j} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} f_\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (1.5)$$

Jde o součet vektorů, a tedy ho lze rozložit do jednotlivých složek

$$\rho u_x = j_x = \sum_{\alpha=0}^{q-1} f_\alpha e_{\alpha x} \quad \text{a} \quad \rho u_y = j_y = \sum_{\alpha=1}^{q-1} f_\alpha e_{\alpha y} \quad \text{popř.} \quad \rho u_z = j_z = \sum_{\alpha=1}^{q-1} f_\alpha e_{\alpha z}.$$

## 1.2 Rovinný D2Q9 a prostorový D3Q19 model

V této sekci je popsána samotná LBM pro dvě konkrétní mřížky. Je uvažován jednoduchý případ proudění bez uvažování vnějších sil a model s jednotným relaxačním časem, konkrétně model lattice Bhagnagar-Gross-Krook (zkráceně LBGK) [27].

Zkratka D2Q9 značí, o jaký model se jedná - D2 pro dvourozměrný prostor, Q9 pro počet diskretních vektorů rychlosti. Obdobně D3Q19 pro trojrozměrný model s 19 vektory rychlosti. Existuje mnoho dalších modelů (D1Q3, D1Q5, D2Q5, D3Q15), nelze však použít zcela libovolné rozvržení, jelikož model musí splňovat určité symetrie, viz kapitola 4.

Jednotlivé vektory rychlosti, které charakterizují D2Q9 a D3Q19 modely, jsou uvedeny po řadě na obr. 1.3 a 1.4. Jejich podoba je též zřejmá z následujících vztahů

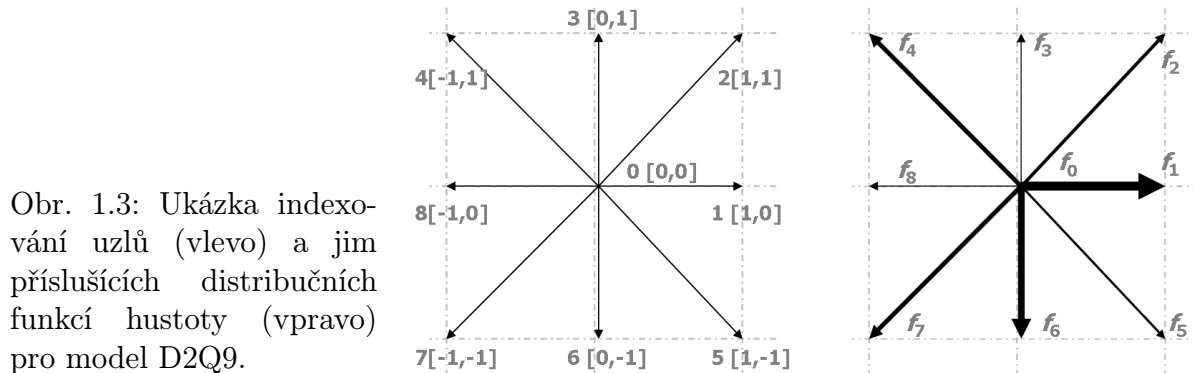
$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{cases} [0, 0] & , \alpha = 0 \\ [1, 0], [0, 1], [0, -1], [-1, 0] & , \alpha = 1, 3, 6, 8 \\ [1, 1], [-1, 1], [1, -1], [-1, -1] & , \alpha = 2, 4, 5, 7 \end{cases}$$

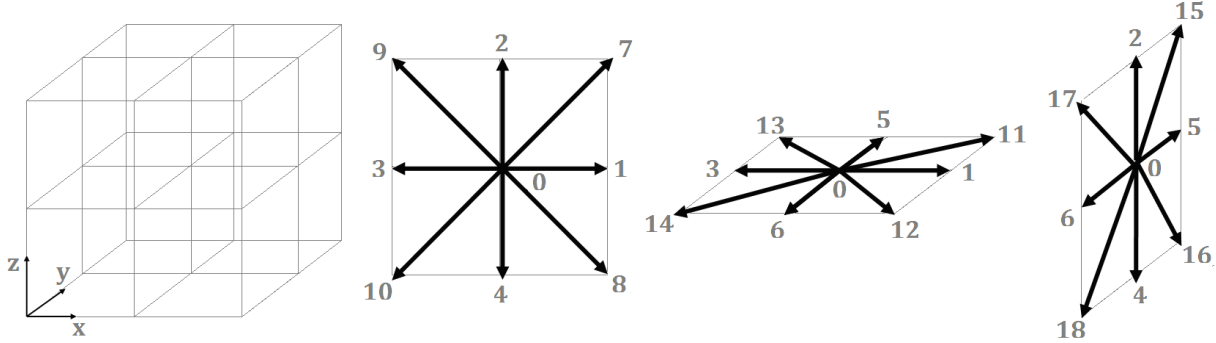
pro dvourozměrný a

$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{cases} [0, 0, 0] & , \alpha = 0 \\ [\pm 1, 0, 0], [0, \pm 1, 0], [0, 0, \pm 1] & , \alpha = 1, 3, 2, 4, 5, 6 \\ [\pm 1, \pm 1, 0], [0, \pm 1, \pm 1], [\pm 1, 0, \pm 1] & , \alpha = 11, 12, 13, 14, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 18 \end{cases}$$

pro trojrozměrný model.

Číslování jednotlivých směrů samozřejmě nemá na výpočet vliv. Výše zmíněné pořadí bylo zvoleno pro snazší implementaci.





Obr. 1.4: Indexování vektorů rychlosti  $\mathbf{e}_\alpha$  pro model D3Q19.

Jak bylo výše řečeno, LBM vychází z diskrétní Boltzmannovy rovnice, která má pro jednotlivé složky distribuční funkce rychlosti  $f_\alpha(\mathbf{r}_i, t)$  podobu:

$$f_\alpha(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt) - f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{r}_i, t)] \quad , \quad \alpha = 0, 1, \dots, q - 1. \quad (1.6)$$

Rovnovážná funkce  $f_\alpha^{eq}$  figurující v předchozím vztahu má tvar

$$f_\alpha^{eq} = \rho_i w_\alpha \left( 1 + 3(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u}_i) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u}_i)^2 - \frac{3}{2}u_i^2 \right), \quad (1.7)$$

kde  $\rho_i$  je makroskopická hustota v  $i$ -tém uzlu,  $\mathbf{u}_i$  je vektor makroskopické rychlosti částic v  $i$ -tém uzlu a  $w_\alpha$  jsou (statistické) váhy přiřazované jednotlivým směrům. Pro model D2Q9 jsou váhy

$$w_\alpha = \begin{cases} 4/9 & , \alpha = 0 \\ 1/9 & , \alpha = 1, 3, 6, 8 \\ 1/36 & , \alpha = 2, 4, 5, 7 \end{cases}$$

pro trojrozměrný D3Q19 model pak

$$w_\alpha = \begin{cases} 1/3 & , \alpha = 0 \\ 1/18 & , \alpha = 1, \dots, 6 \\ 1/36 & , \alpha = 7, \dots, 18 \end{cases}$$

Relaxační čas (čas potřebný k dosažení lokálního rovnovážného stavu) použitý v rovnici (1.6) je dán vztahem

$$\tau = 3\nu_{LB} + 0,5, \quad (1.8)$$

kde  $\nu_{LB}$  je kinematická viskozita (index  $LB$  značí, že je v jednotkách mřížky, to však zatím není podstatné).

Je patrné, že pro  $\tau < 1/2$  ztrácí výraz fyzikální smysl, jelikož kinematická viskozita musí nabývat kladných hodnot. Pokud se navíc  $\tau$  příliš blíží  $1/2$ , je SRT model nestabilní [27].

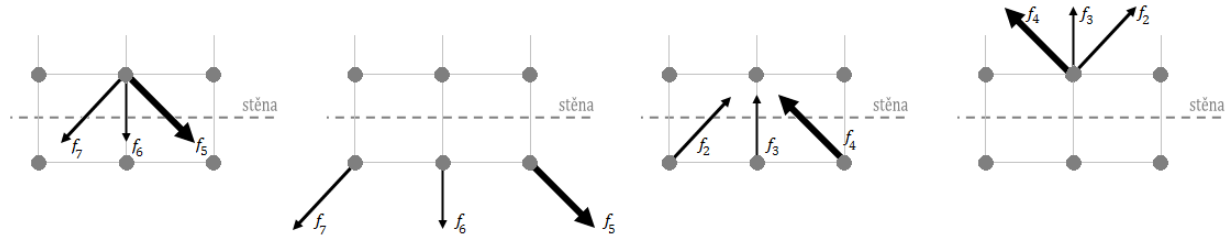
Proč mají rovnovážné funkce  $\mathbf{f}^q(\mathbf{r}_i, t)$  a relaxační čas  $\tau$  právě tuto podobu, je více rozvedeno v kapitole 4.

### 1.3 Okrajové podmínky

Nyní je tedy jasné, jaké procesy (propagace a kolize) se dějí uvnitř tekutiny. Pokud však dochází k interakcím mezi tekutinou a okolím, je třeba tuto skutečnost ošetřit zavedením okrajových podmínek. Nejčastěji jde o místa styku mezi stěnou a tekutinou, ale též o vstupy a výstupy do/ze sledované oblasti - tedy v zásadě tam, kde nejsou fyzické překážky proudu, ale uzly již nemají všechny uzly sousední.

Implementace prvního typu okrajových podmínek je velmi jednoduchá - vychází z předpokladu, že vektor rychlosti po nárazu do stěny změní svou orientaci o  $180^\circ$  a částice se tedy odrazí zpět do tekutiny.

Jak je vidět na obr. 1.5, stěna je umístěna mezi dvě řady uzlů a tedy vzdálenost, kterou odražené částice urazí není delší než dráha částic uvnitř tekutiny. Všechny kroky znázorněné na obr. 1.5 jsou tedy součástí jediného časového kroku  $dt$ . Při odrazu od stěny dochází v prostoru mezi uzlem a stěnou ke střetu částic a nejde tedy o prosté šíření, ale probíhá též kolize. V praxi se postupuje tak, že nejprve zjistíme post-kolizní stav rovnovážných funkcí v každém uzlu a poté přejdeme k propagaci. Jediným rozdílem pro uzly v těsné blízkosti stěny je tedy proces šíření - šířené částice se po střetu se stěnou odrazí do výchozího uzlu, ale mají opačný směr rychlosti.



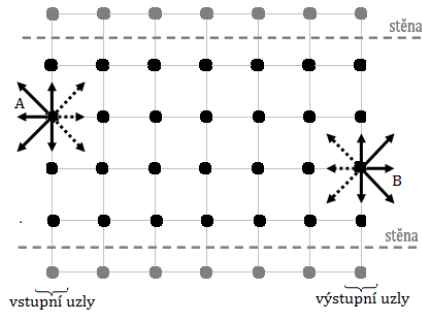
Obr. 1.5: Odraz částic od stěny, která je umístěna mezi dvěma uzly mřížky modelu D2Q9.

Stěna je tvořena jednou řadou uzlů, které nesou pouze informaci o své neprůchodnosti a do výpočtů se nezahrnují. Uzly v tekutině bezprostředně blízké stěně tedy prakticky mají všechny sousední uzly a v každý časový okamžik známe všechny distribuční rychlosti v daném uzlu (v případě stěny ve směru vektoru  $e_6$  přichází distribuční funkce  $f_1, f_5, f_6, f_7, f_8$  a  $f_0$  od sousedních uzlů a distribuční funkce  $f_2, f_3, f_4$  poskytne uzel sám sobě) a veškeré hodnoty nutné k dalším výpočtům (jako je makroskopická hustota a rychlost) jsou tedy známy.

Co se týče uzlů na vstupu a výstupu, situace již není tak prostá. Během každého časového kroku je třeba získat neznámé distribuční funkce z okrajových podmínek.

V obou případech, u vstupních i výstupních uzlů, jsem použila extrapolace některých hodnot ze sousedních uzlů v kapalině.

Při výpočtech je vždy nutné znát makroskopickou hustotu  $\rho$  a vektor makroskopické rychlosti  $\mathbf{u}$  v daném uzlu. U vstupních uzlů (na obr. 1.6 jde o uzel A) byla extrapolována



Obr. 1.6: Problematika vstupních (A) a výstupních (B) uzlů.

makroskopickou hustotu  $\rho$  (na obr. 1.6 z uzlů po pravé straně - ve směru vektoru  $\mathbf{e}_1$ ). Rychlost  $\mathbf{u}$  je pak dána okrajovou podmínkou, která se často shoduje s počáteční - tedy do sledované oblasti neustále vtéká nová tekutina danou rychlostí. Všechny distribuční funkce rychlosti ve vstupních uzlech jsem pak položila rovny rovnovážné funkci pro danou hustotu a rychlost ( $f_\alpha = f_\alpha^{eq}$ ,  $\alpha = 0, \dots, 8$ ).

U výstupních uzlů (na obr. 1.6 jde o uzel B) bylo pro získání chybějících dat použito makroskopické rychlosti sousedních uzlů v tekutině (na obr. 1.6 z uzlů po levé straně - ve směru vektoru  $\mathbf{e}_8$ ). Hodnotu makroskopické hustoty ve výstupních uzlech jsem uvažovala konstantní a rovnu její počáteční hodnotě, tedy  $\rho = \rho_0 = 1$ . Na rozdíl od vstupních uzlů jsou tedy do uzlů na výstupu extrapolovány dvě (tři pro trojrozměrný případ) hodnoty, všechny složky vektoru rychlosti  $\mathbf{u}$ .

Veškeré distribuční funkce rychlosti, které se šířením dostanou do vstupních uzlů, či ze vstupních uzlů mimo sledovanou oblast, ztratí svůj význam.

# Kapitola 2

## Multiple-relaxation time

Zatím jsme uvažovali pouze model s jednotným relaxačním časem (Single-relaxation time, SRT), konkrétně BGK model. Tento model byl zcela postačující, pokud bylo možné takové nastavení parametrů, aby relaxační čas  $\tau$  nebyl příliš blízký hodnotě 0,5. Při hodnotách  $\tau \simeq 0,5$  totiž dochází u SRT modelu k značné numerické nestabilitě (kvůli nízkým hodnotám kinematické viskozity  $-(\tau - 0,5)/3 \rightarrow 0$ ), což vede na velké nepřesnosti a zpravidla též ke kolapsu celého výpočtu. Příčinou těchto problémů je fakt, že ne všechny veličiny, se kterými v modelu počítáme, mají stejný relaxační čas (nekonzervativní veličiny mají mnohem kratší relaxační čas než hydrodynamické veličiny).

Jednotlivé veličiny se tedy ustalují ve svých rovnovážných polohách v pro ně charakteristických časových rovinách. Pokud toto vezmeme v potaz a s každou veličinu budeme pracovat odděleně a přidělíme jí odpovídající relaxační čas, pak model bude přesnějším popisem reality a zbavíme se nestability.

### 2.1 MRT pro model D3Q19

V dalším textu bude uvažován 3D model s označením D3Q19 (tedy s devatenácti diskrétními vektory rychlosti), jehož specifikace již byly uvedeny v předchozí kapitole. Každý uzel je vázán ke svým nejbližším sousedům vektory rychlosti  $\mathbf{e}_\alpha = [e_{\alpha x}, e_{\alpha y}, e_{\alpha z}]$ ,  $\alpha = 0, 1, \dots, 18$  a v každém uzlu je definováno devatenáct distribučních funkcí hustoty  $f_\alpha(\mathbf{r}_i, t)$ ,  $\alpha = 0, 1, \dots, 18$ , které vypovídají o rozložení hybnosti v daném uzlu  $i$ .

Dále nově definujme čtvercovou kolizní matici  $\mathbf{S} = \omega \mathbf{I}$ , kde  $\omega$  je vektor převrácených hodnot jednotlivých relaxačních časů a  $\mathbf{I}$  je jednotková matice, pak platí

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t) = -\mathbf{S}[\mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{f}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)], \text{ kde} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t) = [f_0(\mathbf{r}_i, t), f_1(\mathbf{r}_i, t), \dots, f_{18}(\mathbf{r}_i, t)]^T,$$

$$\mathbf{f}^{eq}(\mathbf{r}_i, t) = [f_0^{eq}(\mathbf{r}_i, t), f_1^{eq}(\mathbf{r}_i, t), \dots, f_{18}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)]^T \mathbf{a}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt) = [f_0(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt), f_1(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt), \dots, f_{18}(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt)]^T.$$

Jelikož jednotlivé relaxační časy jsou vždy omezeny zdola hodnotou 0,5, což je dáno vztahem  $\tau = 3\nu + 0,5$  z kapitoly 1, jsou v návaznosti omezeny hodnoty  $\tau$  na interval (0,2).

Je zřejmé, že při volbě  $\omega = 1/\tau$  získáme klasický SRT model.

Diskrétní Boltzmannova rovnice popisuje dva základní kroky, propagaci a kolizi. Propagace je reprezentována levou stranou rovnice (2.1) a kolize kolizní maticí  $\mathbf{S}$  na pravé straně rovnice.

Dále musíme poznamenat, že v diskretním modelu je nutné dodržovat určité symetrie, aby mohl dostát spojitým rovnicím hydrodynamiky – konzervativní veličiny i jejich toky se musí transformovat takovým způsobem, aby aproximovaly spojité veličiny s požadovanou přesností. Při zanedbání vlivu teploty navíc musí lokálně platit zákony zachování hmotnosti a hybnosti. Tyto podmínky mohou být splněny, pokud se proces kolize bude odehrávat v prostoru momentů distribučních funkcí  $\mathbb{M}$ .

Přechod mezi momenty distribučních funkcí  $m_\beta$  v momentovém prostoru  $\mathbb{M}$  a distribučními funkcemi rychlosti  $f_\alpha$  v prostoru diskretních vektorů rychlosti  $\mathbb{V}$  (s bází skládající se z vektorů rychlostí  $\mathbf{e}_\alpha$ ) je lineární transformací, kterou lze zapsat jako

$$\mathbf{m}_\beta = \Phi_\beta \mathbf{f}. \quad (2.2)$$

Devatenáct vektorů  $\Phi_\beta$  tvoří duální ortogonální bázi prostoru  $\mathbb{M}$ . Bázové prvky  $\Phi_\beta$  jsou tvořeny polynomy vektorů  $\mathbf{e}_\alpha$  a upraveny Grand-Schmidtovým ortogonalizačním procesem v pečlivě voleném tvaru a pořadí, jak navrhuje Harris [14]

$$\begin{aligned} \Phi_{0\alpha} &= \|\mathbf{e}_\alpha\|^0 = 1, \\ \Phi_{1\alpha} &= 19\|\mathbf{e}_\alpha\|^2 - 30, \\ \Phi_{2\alpha} &= (21\|\mathbf{e}_\alpha\|^4 - 53\|\mathbf{e}_\alpha\|^2 + 24)/2, \\ \Phi_{3\alpha} &= e_{\alpha x}, \quad \Phi_{5\alpha} = e_{\alpha y}, \quad \Phi_{7\alpha} = e_{\alpha z}, \\ \Phi_{4\alpha} &= (5\|e_\alpha\|^2 - 9)e_{\alpha x}, \quad \Phi_{6\alpha} = (5\|e_\alpha\|^2 - 9)e_{\alpha y}, \quad \Phi_{8\alpha} = (5\|e_\alpha\|^2 - 9)e_{\alpha z}, \\ \Phi_{9\alpha} &= 3e_{\alpha x}^2 - \|e_\alpha\|^2, \\ \Phi_{11\alpha} &= e_{\alpha y}^2 - e_{\alpha z}^2, \\ \Phi_{13\alpha} &= e_{\alpha x}e_{\alpha y}, \quad \Phi_{14\alpha} = e_{\alpha y}e_{\alpha z}, \quad \Phi_{15\alpha} = e_{\alpha x}e_{\alpha z} \\ \Phi_{10\alpha} &= (3\|e_\alpha\|^2 - 5)(3e_{\alpha x}^2 - \|e_\alpha\|^2), \quad \Phi_{12\alpha} = (3\|e_\alpha\|^2 - 5)(e_{\alpha y}^2 - e_{\alpha z}^2), \\ \Phi_{16\alpha} &= (e_{\alpha y}^2 - e_{\alpha z}^2)e_{\alpha x}, \quad \Phi_{17\alpha} = (e_{\alpha z}^2 - e_{\alpha x}^2)e_{\alpha y}, \quad \Phi_{18\alpha} = (e_{\alpha x}^2 - e_{\alpha y}^2)e_{\alpha z}. \end{aligned}$$

Maticově zapsáno

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{f} \quad (\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}), \quad (2.3)$$

kde  $\mathbf{M}$  je transformační matice sestavená z řádkových vektorů  $\Phi_\beta$ . Pokud vektory  $\Phi_\beta$  budou normované, pak matice  $\mathbf{M}$  je ortogonální transformační maticí.

Pro model D3Q19 a dříve zavedené směrové vektory  $\mathbf{e}_\alpha$  je konkrétní tvar transformační matice  $\mathbf{M}$



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & -30 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokud dosadíme na pravé straně rovnice (2.1) za distribuční funkce hustoty, dostaneme vztah

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t) = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} [\mathbf{m}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)],$$

kde  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1}$  je diagonální matice  $\hat{\mathbf{S}} = \text{diag}(s_0, s_1, \dots, s_{18})$ . Tuto rovnici lze převést na tvar, který obsahuje distribuční funkci samotnou a nikoli její moment, což je pro výpočet příhodnější, tedy

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_i + \mathbf{e} dt, t + dt) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t) = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} [\mathbf{M} \mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)]. \quad (2.4)$$

Momenty odpovídající jednotlivým vektorům  $\Phi_\beta$  reprezentují po řadě veličiny

$$\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, j_z, q_z, 3p_{xx}, 3\pi_{xx}, p_{ww}, \pi_{ww}, p_{xy}, p_{yz}, p_{xz}, m_x, m_y, m_z,$$

tedy  $m_0$  značí hustotu,  $m_1$  je závislé na energii a  $m_2$  na její druhé mocnině,  $m_{3,5,7}$  jsou složky hybnosti  $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ ,  $m_{4,6,8}$  odpovídají složkám toku tepla  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ ,  $m_9$ ,  $m_{11}$  a  $m_{13} - m_{15}$  značí složky tenzoru deformace (strain-rate tensor)  $\mathbf{p}$ ,  $m_{10}$  a  $m_{12}$  jsou momenty čtvrtého řádu závislé na tenzoru  $\mathbf{p}$  a  $m_{16} - m_{18}$  jsou momenty třetího řádu závislé na momentu hybnosti  $\mathbf{j}$  a tenzoru  $\mathbf{p}$ .

Pro každý moment distribuční funkce rychlosti  $m_\beta$  je dána i jeho rovnovážná hodnota. Při rychlosti zvuku  $c_S^2 = 1/3$  a  $s_9 = s_{13}$  závisí rozvážné funkce na hustotě  $\rho$  či hybnosti  $\mathbf{j}$  takto [6]:

$$\begin{aligned}
\rho^{eq} &= \rho, \quad j_x^{eq} = j_x, \quad j_y^{eq} = j_y, \quad j_z^{eq} = j_z, \\
e^{eq} &= -11\rho + \frac{19}{\rho_0} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}, \\
\epsilon^{eq} &= w_e \rho + \frac{w_{ej}}{\rho_0} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}, \\
q_x^{eq} &= -\frac{2}{3} j_x, \quad q_y^{eq} = -\frac{2}{3} j_y, \quad q_z^{eq} = -\frac{2}{3} j_z, \\
p_{xx}^{eq} &= \frac{1}{3\rho_0} [2j_x^2 - (j_y^2 + j_z^2)], \quad p_{yy}^{eq} = \frac{1}{\rho_0} (j_y^2 - j_z^2), \\
p_{xy}^{eq} &= \frac{1}{\rho_0} j_x j_y, \quad p_{yz}^{eq} = \frac{1}{\rho_0} j_y j_z, \quad p_{xz}^{eq} = \frac{1}{\rho_0} j_x j_z, \\
p_{xx}^{iq} &= w_{xx} p_{xx}^{eq}, \quad p_{ww}^{iq} = w_{xx} p_{ww}^{eq}, \\
m_x^{eq} &= m_y^{eq} = m_z^{eq} = 0,
\end{aligned}$$

kde  $w_e$ ,  $w_{ej}$  a  $w_{xx}$  jsou opět volné parametry.  $\rho_0$  je počáteční makroskopická hustota, jejíž hodnota se nastavuje rovna jedné - jedná se o volný parametr, který nemá vliv na výsledky výpočtu [5]. Lallemand a Luo [19] navrhují  $w_e = 0$ ,  $w_{ej} = -476/63$  a  $w_{xx} =$  pro dosažení maximální stability výpočtu.

Jak bylo dříve řečeno, momenty lze rozdělit do dvou skupin – hydrodynamické (nekonzervativní) a konzervativní. Konzervativní momenty jsou takové, které lokálně zachovávají stálou hodnotu, tedy jsou rovny své rovnovážné hodnotě -  $m_\beta = m_\beta^{eq}$ . Z toho plyne, že výraz  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)$  je vždy roven nule, a tedy prvky matice  $\hat{\mathbf{S}}$  odpovídající momentům konzervativních veličin lze zvolit libovolně (pro případ D3Q19 modelu jde zřejmě o momenty  $m_0 = \rho$ ,  $m_3 = j_x$ ,  $m_5 = j_y$  a  $m_7 = j_z$ , a tedy prvky kolizní matice  $s_0, s_3, s_5, s_7$ ). Obvykle se v modelech bez uvažování vnější síly pokládají tyto relaxační časy rovny nule – abychom se při numerickém výpočtu vyhnuli kumulaci (zaokrouhlovací) chyby. D’Humières a kol. [6] navrhují následující tvar kolizní matice  $\hat{\mathbf{S}}$  pro dosažení maximální numerické stability modelu

$$\hat{\mathbf{S}} = \text{diag} (0, s_1, s_2, 0, s_4, 0, s_4, 0, s_4, s_9, s_{10}, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{13}, s_{13}, s_{16}, s_{16}, s_{16}, ),$$

kde  $s_1 = 1, 19$ ,  $s_2 = s_{10} = 1, 4$ ,  $s_4 = 1, 2$ ,  $s_{16} = 1, 98$  a prvky  $s_9 = s_{13}$  jsou vázány k viskozitě vztahem

$$\nu = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s_9} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s_{13}} - \frac{1}{2} \right).$$

Tedy pro relaxační časy prvků tenzoru deformace  $\mathbf{p}$  platí obdobný vztah jako pro relaxační čas SRT modelů,  $s_9 = s_{13} = 1/\tau$ .

Implementace MRT sestává z několika jednoduchých kroků. V zásadě jde o pouhé rozšíření kolizní části Boltzmannovy rovnice. Jednotlivé kroky kolize jsou:

- Zjištění makroskopických veličin v uzlu  $\mathbf{r}_i$ .
- Výpočet momentu  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_i, t)$  z distribuční funkce rychlosti:  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_i, t) = \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t)$ .
- Výpočet rovnovážných momentů  $\mathbf{m}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)$  v uzlu.
- Zjištění nových distribučních funkcí rychlosti  $\mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t + dt)$

Pro určité nastavení parametrů  $w_e$ ,  $w_{ej}$  a  $w_{xx}$  se lze podle Duboise a kol. [7] a Gellera a kol. [9] vyhnout výpočtu  $\mathbf{m}^{eq}$  ze vztahů (2.1) a vyjít z rovnovážné distribuční funkce rychlosti  $\mathbf{f}^{eq}$  definované vztahem (1.7). Potom platí, že

$$\mathbf{m}^{eq} = \mathbf{M}\mathbf{f}^{eq},$$

což vede na příhodnější vyjádření kolizního kroku

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t) = -\mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{M} [\mathbf{f}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{f}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)].$$

# Kapitola 3

## Teorie podobnosti

LBM je metoda určená k řešení reálných problémů. Jelikož však pracuje s vlastními veličinami, je nutné znát převody mezi nimi a veličinami fyzikálními. Výsledky simulace lze propojit s reálnými fyzikálními veličinami mnoha způsoby a řešit široké spektrum problémů [22]. Je ovšem třeba dbát mnohých pravidel, aby nebyla porušena stabilita nebo přesnost metody [21].

Při vytváření mřížky narážíme na problém, jak správně zvolit její rozměry a jaký časový krok, aby simulace odpovídala reálnému proudění. Hledáme tedy takové nastavení, které bude v jistém smyslu korespondovat s reálným problémem a zároveň bude přinášet výsledky požadované přesnosti.

### 3.1 Vazby mezi fyzikálními a mřížkovými jednotkami

Výchozími rovnicemi pro řešení proudění nestlačitelné kapaliny jsou Navierovy-Stokesovy rovnice. Ty vychází ze zákona zachování hmotnosti

$$\nabla_F \mathbf{u}_F = 0, \quad (3.1)$$

kde index  $F$  značí fyzikální jednotky, a zákona zachování hybnosti

$$\frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial t_F} + (\mathbf{u}_F \nabla_F) \mathbf{u}_F = -\frac{1}{\rho} \nabla_F p_F + \nu_F \nabla_F^2 \mathbf{u}_F, \quad (3.2)$$

kde  $p_F$  je tlak,  $\nu_F$  kinematická viskozita a  $\rho$  je hustota.

Rovnice (3.1) a (3.2) jsou vyjádřeny ve fyzikálních jednotkách, jednotlivé veličiny jsou dány jednak číselnou hodnotou a dále jednotkou. Stejně tak lze vyjádřit jednotlivé veličiny v jednotkách mřížkových, které budou dále značeny indexem  $LB$ .

Každá soustava jednotek je definována základními jednotkami - jednotky odvozené jsou jejich kombinací. Je tedy zřejmé, že při převodu mezi systémy jednotek je potřeba vyšetřit pouze převody mezi jednotkami základními. Pro případ veličin užitých v LBM je nutné definovat převod pro jednotky času a délky, ostatní veličiny jsou na nich závislé. Výjimkou

je snad ještě hmotnost (hustota), která je pro model bez uvažování působení vnějších sil nepodstatná a běžně se pokládá rovna fyzikální hustotě; obě tyto hodnoty jsou pro svou irelevantnost nastaveny na hodnotu 1 (s cílem zvýšit jednoduchost výpočtu).

Převody mezi základními jednotkami fyzikálního a mřížkového systému jsou konstantní a lze je zapsat jako

$$\frac{t_F}{t_{LB}} = c_t \quad \text{a} \quad \frac{l_F}{l_{LB}} = c_l. \quad (3.3)$$

Odvozené jednotky lze převádět mezi systémy pomocí jejich definice a jednotek základních. Souhrnně jsou převodové koeficienty uvedeny v tabulce 3.1.

veličina	jednotky	převod
rychlost $u$	$[\text{ms}^{-1}]$	$c_u = c_l c_t^{-1}$
časová derivace $\partial t$	$[\text{s}^{-1}]$	$c_{\partial t} = c_t^{-1}$
gradient $\nabla$	$[\text{m}^{-1}]$	$c_{\nabla} = c_l^{-1}$
tlak $p$	$[\text{kgms}^{-2}]$	$c_p = c_\rho c_l^2 c_t^{-2} = c_l^2 c_t^{-2}$
kinematická viskozita $\nu$	$[\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}]$	$c_\nu = c_l^2 c_t^{-1}$

Tabulka 3.1: Převody odvozených jednotek

Zavedením převodových funkcí do rovnice (3.1) a podělením rovnice konstantními převody dostaneme rovnici kontinuity vyjádřenou v mřížkových jednotkách

$$\begin{aligned} \nabla_{LB} \mathbf{u}_{LB} c_{\nabla} c_u &= 0 \quad \Bigg/ \quad \frac{1}{c_{\nabla} c_u} \\ \nabla_{LB} \mathbf{u}_{LB} &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice (3.2) zůstane též po převodu beze změny (až na index, samozřejmě):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{LB}}{\partial t_{LB}} \frac{c_l}{c_t^2} + (\mathbf{u}_{LB} \nabla_{LB}) \mathbf{u}_{LB} \frac{c_l}{c_t^2} &= -\frac{1}{\rho} \nabla_{LB} p_{LB} \frac{c_l}{c_t^2} + \nu_{LB} \nabla_{LB}^2 \mathbf{u}_{LB} \frac{c_l}{c_t^2} \Bigg/ \frac{c_t^2}{c_l} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{LB}}{\partial t_{LB}} + (\mathbf{u}_{LB} \nabla_{LB}) \mathbf{u}_{LB} &= -\frac{1}{\rho} \nabla_{LB} p_{LB} + \nu_{LB} \nabla_{LB}^2 \mathbf{u}_{LB}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tedy jak fyzikální, tak mřížková rovnice jsou číselně shodné.

Pokud zároveň zachováme geometrickou podobnost a Reynoldsovo podobnostní číslo v obou systémech bude totožné, pak řešení úloh v nich bude ekvivalentní, rovnice popisují stejnou problematiku [22]. Reynoldsovo číslo je bezrozměrné podobnostní číslo s tzv. hlubším významem, vypovídá určitým způsobem o proudění. Udává poměr setrvačných a třecích účinků v proudění.

Je též poměrem charakteristické délky (zpravidla šířky kanálu)  $D$ , rychlosti  $u$  a kinematické viskozity  $\nu$

$$Re = \frac{uD}{\nu}. \quad (3.5)$$

Je tedy zřejmé, že je možné získat totožné Reynoldsovo číslo pro nesčetné kombinace zmíněných veličin. V rámci jediného výpočtu lze tedy postihnout mnoho podobných problémů se stejným Reynoldsovým číslem - což je také prioritou teorie podobnosti.

## 3.2 Mřížkové parametry

Tyto jednoduché převody lze kdykoli užít k přechodu mezi dvěma systémy. Nastavení modelu je pak pouze otázkou volby parametrů v závislosti na vstupních datech a s ohledem na podmínku stability metody. Ta je dána hlavně maximální povolenou rychlostí v modelu, která musí být mnohokrát menší než rychlost zvuku (LBM nelze užít pro nadzvukové rychlosti) v modelované tekutině ( $Ma \ll 1$ ) [21]. Rychlost zvuku v tekutině je dána hodnotou  $1/\sqrt{3}$  charakteristické rychlosti na mřížce, což vychází z Navierovy-Stokesovy rovnice (více v kapitole 4).

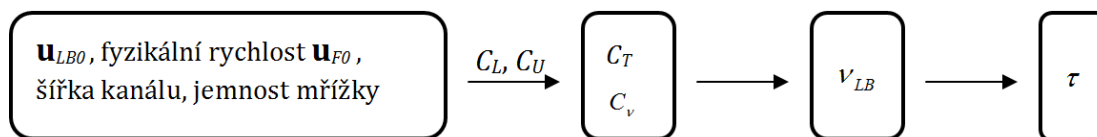
Dále, rychlost částic na mřížce je vázána na délkou strany mřížky  $\mathbf{u}_{LB} = d\mathbf{r}/dt$ . Z předchozího okamžitě plyne vazba pro časový krok  $dt \ll \sqrt{3}dr$ .

Parametry modelu jsou tedy závislé na reálném problému a jsou k němu vázány dvěma konkrétními hodnotami - Reynoldsovým číslem (zajišťujícím shodnost obou řešení) s maximální rychlostí v modelu (zajišťující stabilitu výpočtu).

V samotném výpočtu figuruje však pouze relaxační čas  $\tau$ . Ten je vázán ke kinematické viskozitě dle vztahu (1.8) a při znalosti Reynoldsova čísla a počáteční rychlosti lze během několika málo kroků jeho hodnotu zjistit:

Ze znalosti jemnosti mřížky a skutečné charakteristické šířky kanálu  $D$  lze zjistit převod  $C_L$ , délka strany mřížky je pak  $dr = 1/C_L D$ . Dále lze určit převod rychlosti ze zvolené vstupní rychlosti  $u_{LB0}$  v mřížkových jednotkách a skutečné počáteční rychlosti  $u_{F0}$  ve fyzikálních jednotkách  $C_u = u_{F0}/u_{LB0}$ , převod pro kinematickou viskozitu  $C_\nu = C_l C_u$  a následně samotnou kinematickou viskozitu modelové tekutiny  $\nu_{LB}$ . Pouhým dosazením do vztahu (1.8) získáme kýžený relaxační čas, a tedy vše potřebné k zahájení simulace. Zjišťovat časový krok často není nezbytně nutné.

Celý postup je shrnut následujícím diagramem:



Obr. 3.1: Diagram postupu při zjišťování převodových funkcí a relačního času.

## Kapitola 4

# Odvození Navierových-Stokesových rovnic

Na následujících řádcích je přiblíženo odvození Navierových-Stokesových rovnic z Boltzmannovy diskrétní rovnice.

Výchozím tvarem je tedy již dříve popsaná diskrétní Boltzmannova rovnice

$$f_\alpha(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt) = f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) - \frac{1}{\tau_f} [f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{r}_i, t)]. \quad (4.1)$$

Jelikož  $dt$  je malá změna času a následně  $\mathbf{e}_\alpha dt$  je malá změna polohy, náleží distribuční funkce  $f_\alpha(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt)$  okolí výchozí funkce  $f_\alpha(\mathbf{r}_i, t)$ . Lze ji tedy vyjádřit Taylorovým rozvojem. Pro odvození Navierových-Stokesových rovnic postačí Taylorův rozvoj do druhého řádu včetně

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha dt, t + dt) &= f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) + \epsilon \left[ \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} + \mathbf{e}_\alpha \nabla f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) \right] + \\ &+ \epsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_\alpha(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t^2} + \mathbf{e}_\alpha \nabla \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_\alpha \nabla \mathbf{e}_\alpha \nabla f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dosazením do původní rovnice (4.1) a zjednodušením zápisu distribuční funkce ( $f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) =: f_\alpha$ ) získáme

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{e}_\alpha \nabla f_\alpha + \epsilon \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} + \mathbf{e}_\alpha \nabla \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_\alpha \nabla \mathbf{e}_\alpha \nabla f_\alpha \right) = -\frac{1}{\epsilon \tau_f} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}). \quad (4.3)$$

Před dalšími úpravami je nutné vzít v úvahu následující: Jelikož čas potřebný pro difuzi ( $t_2$ ) je mnohem delší než čas šíření tepla při proudění ( $t_1$ ), je nutné jednotlivé časy separovat. Chapmanův-Enskogův rozvoj navrhuje rozložit časovou derivaci následovně [5], [8]

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}. \quad (4.4)$$

Obdobně lze rozvést derivaci podle prostorové proměnné (pro kterou postačuje jediný člen Chapmanova-Eskogova rozvoje) a distribuční funkci kolem své rovnovážné polohy

$$\frac{\partial}{\partial i} = \epsilon \frac{\partial}{\partial i}, \quad i = x, y, z \quad (4.5)$$

$$f_\alpha = f_\alpha^{eq} + \epsilon f_\alpha^{neq}, \quad (4.6)$$

kde

$$f_\alpha^{neq} = \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)}. \quad (4.7)$$

Dále, rovnovážná funkce  $f^{eq}$  závisí vždy na místních makroskopických veličinách – hustotě a hustotě hybnosti a naplňuje vazby

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^q f_\alpha^{eq} \quad \text{a} \quad \rho \mathbf{u} = \mathbf{j} = \sum_{\alpha=1}^q f_\alpha^{eq} \mathbf{e}_\alpha, \quad (4.8)$$

kde  $q$  je celkový počet směrů.

Tu doplňuje nerovnovážná funkce  $f^{neq}$ , která je vázána podmínkami

$$0 = \sum_{\alpha=1}^q f_\alpha^{(k)} \quad \text{a} \quad 0 = \sum_{\alpha=1}^q n f_\alpha^{(k)} \mathbf{e}_\alpha, \quad \text{kde } k = 1, 2. \quad (4.9)$$

To proto, že nerovnovážná funkce popisuje výkyvy makroskopických veličin, hustoty a hustoty hybnosti, ze svých rovnovážných poloh, a tedy tyto výkyvy se musí vzájemně vyrušit, aby dostaly zákonům zachování hmotnosti a hybnosti. Dosadíme-li předpoklady (4.4) - (4.5) do rovnice (4.3), dostaneme rozsáhlý výraz. Pro příklad je uvedena úprava prvního členu výrazu (4.3) dosazením Chapmanových-Eskogových rozvoji

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial f_\alpha^{eq}}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial f_\alpha^{eq}}{\partial t_2} + \epsilon \left( \epsilon \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t_2} + \epsilon^2 \frac{\partial f_\alpha^{(2)}}{\partial t_1} + \epsilon^3 \frac{\partial f_\alpha^{(2)}}{\partial t_2} \right).$$

Po této úpravě rovnice (4.3) lze porovnat členy s jednotlivými řády  $\epsilon$  a získat tak

$$\frac{\partial f_\alpha^{eq}}{\partial t_1} + \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 f_\alpha^{eq} = -\frac{f_\alpha^{(1)}}{\tau} \quad (4.10)$$

pro řád  $\epsilon^0$  a

$$\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t_1} + \frac{\partial f_\alpha^{(eq)}}{\partial t_2} + \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 f_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 f_\alpha^{eq} + \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 \frac{\partial f_\alpha^{eq}}{\partial t_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_\alpha^{eq}}{\partial t_1^2} = -\frac{f_\alpha^{(2)}}{\tau} \quad (4.11)$$

pro řád  $\epsilon^1$ , kde  $\tau = \epsilon \tau_f$ .



Jednoduchými algebraickými úpravami lze rovnici (4.11) převést na tvar (4.14)

$$\frac{\mathbf{e}_\alpha \nabla_1}{2} \cdot (4.10) : \frac{\mathbf{e}_\alpha \nabla_1 \partial f_\alpha^{eq}}{2\partial t_1} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 f_\alpha^{eq} = -\frac{\mathbf{e}_\alpha \nabla_1 f_\alpha^{(1)}}{2\tau} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{2\partial t_1} \cdot (4.10) : \frac{\partial^2 f_\alpha^{eq}}{2\partial t_1^2} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 \frac{\partial f_\alpha^{eq}}{\partial t_1} = -\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{2\tau \partial t_1} \quad (4.13)$$

$$(4.11) - (4.12) - (4.13) : \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t_1} + \mathbf{e}_\alpha \nabla_1 f_\alpha^{(1)}\right) + \frac{\partial f_\alpha^{eq}}{\partial t_2} = -\frac{\partial f_\alpha^{(2)}}{\tau}. \quad (4.14)$$

Rovnice (4.10) a (4.14) vedou po sečtení přes  $\alpha$  na následující makroskopické rovnice zákonů zachování hmotnosti a hybnosti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{u} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \Pi = 0, \quad (4.16)$$

kde  $\Pi$  je tenzor toku hybnosti a pro plošnou úlohu má tvar

$$\Pi_{xy} = \sum_{\alpha=1}^q e_{\alpha x} e_{\alpha y} \left[ f_\alpha^{eq} + \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) f_\alpha^{(1)} \right], \quad (4.17)$$

kde  $e_{\alpha x}$  a  $e_{\alpha y}$  jsou po řadě x-tá a y-tá složka  $\alpha$ -tého vektoru rychlosti.

Obdobný vztah platí i pro prostorovou úlohu (tenzor je řádu 3 a zohledňuje všechny tři složky rychlosti).

Konkrétní podobu tenzoru  $\Pi$  získáme pro konkrétní systém rychlostí a rovnovážnou funkci  $f^{eq}$ , pro konkrétní model. V dalším odvození budeme uvažovat dříve představený model D2Q9 s devíti diskretními rychlostmi (viz kapitola 1). Odvození tímto neztrácí na obecnosti, následující platí pro mnohé modely, které splňují potřebné symetrie pro dosažení Navierových-Stokesových rovnic (např. prostorové modely D3Q15, D3Q19) [5], [8]. Při evaluaci tenzoru  $\Pi$  musíme nejprve definovat rovnovážnou funkci, která zatím nemá konkrétní podobu. Chen a kol. [4] navrhuje pro nízké Machovo číslo  $u/C_s$  (kde  $C_s$  je rychlost zvuku) následující tvar  $f^{eq}$  závislý až na  $O(\mathbf{u}^2)$

$$f_\alpha^{eq} = \rho \left( a + b(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u}) + c(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u})^2 + d u^2 \right), \quad (4.18)$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$  jsou koeficienty mřížky, které lze získat analyticky užitím vztahů (4.8). Konečný tvar rovnovážné funkce tedy je [5]

$$f_\alpha^{eq} = \rho w_\alpha \left( 1 + 3(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}u^2 \right), \quad (4.19)$$

kde  $w_0 = 4/9$ ,  $w_{1,2,3,4} = 1/9$  a  $w_{5,6,7,8} = 1/36$  pro model D2Q9.

Po dosazení do rovnice (4.17) dostaneme pro nultý a první řád  $\epsilon$

$$\begin{aligned}\Pi_{xy}^{(0)} &= \sum_{\alpha=1}^q e_{\alpha x} e_{\alpha y} f_{\alpha}^{eq} = p \delta_{xy} + \rho u_x u_y \\ \Pi_{xy}^{(1)} &= \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \sum_{\alpha=1}^q e_{\alpha x} e_{\alpha y} f_{\alpha}^{(1)} = \nu (\nabla_x(\rho u_y)) + \nabla_y(\rho u_x),\end{aligned}$$

kde tlak  $p = \rho/3$  a kinematická viskozita  $\nu = (2\tau - 1)/6$  [5]. Pro dříve zmíněnou rychlost zvuku navíc platí  $C_s = 1/\sqrt{3}$ .

Konečně, dostáváme rovnici

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + \nabla_y u_x u_y \right) = -\nabla_x p + \nu \nabla_y (\nabla_x(\rho u_y)) + \nabla_y(\rho u_x), \quad (4.20)$$

která pro malé změny hustoty odpovídá Navierovým-Stokesovým rovnicím [5], [25].

# Kapitola 5

## Výpočet síly

Jednou z úloh v rámci numerického simulování proudění je zjišťování síly působící na obtékané těleso a následně odporových a vztlakových koeficientů pro různé profily. Na následujících řádcích je uvedeno, jak lze využít Boltzmannovy metody k získání odporového koeficientu pomocí dvou různých metod: součtu elementárních tlaků na plochu tělesa a změny hybnosti.

### 5.1 Odporový koeficient

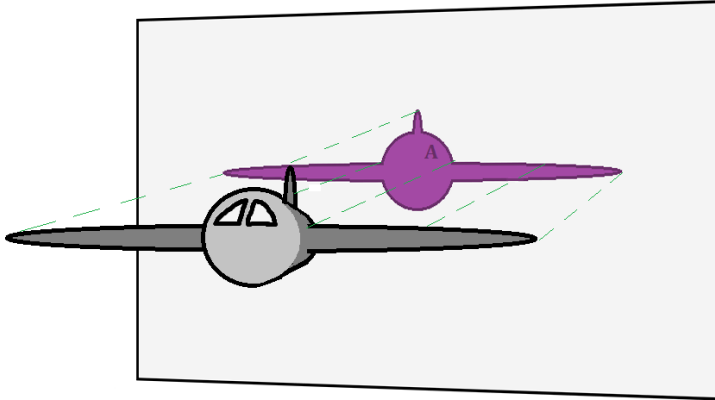
Odporový koeficient  $c_D$  je v jistém smyslu odrazem tvaru tělesa a jeho interakce s kolem proudící tekutinou. Čím vyšší je koeficient odporu  $c_D$ , tím větší odpor klade těleso proudu. Tělesa aerodynamického tvaru mají odporový koeficient  $c_D$  poměrně blízký nule.

Vztah pro získání odporového koeficientu je

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho_0 u_0^2 A}, \quad (5.1)$$

kde  $F_D$  je skutečná odporová síla působící na těleso,  $\rho_0$  je hustota tekutiny na vstupu,  $u_0$  je vstupní rychlost tekutiny a  $A$  je průmět tělesa do roviny kolmé k proudu.

Čítec představuje sílu, která ve skutečnosti působí na těleso ve směru rovnoběžném s proudící tekutinou. Jmenovatel je pak vyjádřením hrubého odhadu této síly -  $1/2\rho_0 u_0^2$  je hydrodynamickým tlakem vyvolaným tekutinou o hustotě  $\rho_0$  a rychlosti  $u_0$ , který působí na plochu  $A$ . Odhadovaná síla tedy zahrnuje jen vstupní parametry tekutiny a zanedbává tvarové vlastnosti tělesa.



Obr. 5.1: Znázornění významu odporového koeficientu: v popředí reálné těleso a v pozadí jeho průmět.

## 5.2 Součtová metoda

Součtová metoda je velice prostá. Vychází z pouhého sečtení všech elementárních sil působících na povrch obtékaného tělesa ve směru rovnoběžném k proudu. Každou takovou sílu můžeme potom vyjádřit jako elementární tlak  $p_i$  působící po orientované plošce  $\mathbf{A}_i$ , tedy

$$\mathbf{F}_{Di} = \sum_{i=1}^S p_i \mathbf{A}_i, \quad (5.2)$$

kde  $S$  je celkový počet elementárních ploch, které tvoří povrch obtékaného tělesa.

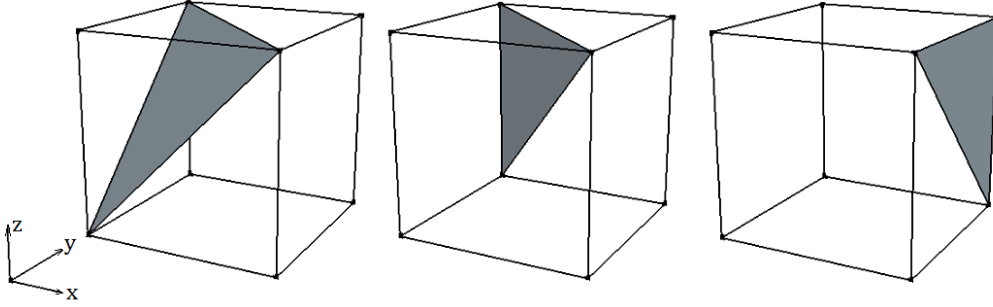
Jelikož LBM se aplikuje na kubickou mřížku, veškeré obtékané objekty jsou též upraveny na soubor malých krychliček. Pro zpřesnění výpočtu je vhodné přejít k trojúhelníkovým prvkům, které lépe kopírují zvláště oblé povrchy těles.

Pro výpočet koeficientu odporu jsem použila triangulaci, která převede tvar z kubické mřížky na soustavu trojúhelníků tak, že vrcholy trojúhelníků vždy leží na uzlech původní mřížky. Na obr. 5.2 je ukázka variant vložení trojúhelníkového prvku do původní kubické mřížky.

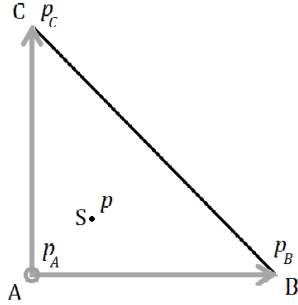
Tlak, který působí na elementární plochu je uvažován konstantní a jeho velikost je dána tlakem v nejbližších uzlech. Elementární tlaky  $p_{iS}$  jsem pro každou plošku získala lineární interpolací z okrajových uzlů (A,B,C) ve tvaru aritmetického průměru

$$p_{iS} = \frac{p_{iA} + p_{iB} + p_{iC}}{3}, \quad (5.3)$$

kde  $p_{iA}$ ,  $p_{iB}$  a  $p_{iC}$  jsou tlaky v uzlech ve vrcholu trojúhelníku, jak je znázorněno na obr. 5.3.



Obr. 5.2: Tři základní příklady triangulace použité pro výpočet odporového koeficientu  $c_D$ . Další možné varianty pak vzniknou natáčením uvedených podle souřadných os.



Obr. 5.3: Trojúhelníkový prvek na povrchu obtékaného tělesa.

### 5.3 Změna hybnosti

Tato teorie vychází z práce A. J. C. Ladda [17], [18], který navrhuje výpočet síly působící na obtékané těleso ze změny hybnosti částic tekutiny srážejících se s obtékaným tělesem.

Při nárazu částice na povrch obtékaného tělesa se tato částice odrazí zpět a ztrácí část své hybnosti. Tedy velikost rychlosti takové částice je po nárazu o něco menší a její směr je opačný.

Jak bylo nastíněno v kapitole 1.3, odrazení částic od stěny může být vyjádřeno jako

$$f_{\alpha'}(\mathbf{r}_i, t + dt) = f_{\alpha}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{S}[f_{\alpha}(\mathbf{r}_i, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)] , \quad (5.4)$$

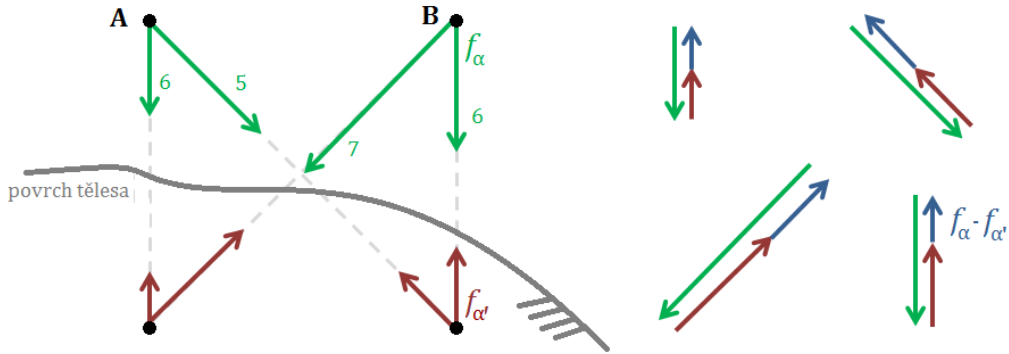
kde  $f_{\alpha'}$  je distribuční funkce rychlosti odpovídající směrovému vektoru  $\mathbf{e}_{\alpha'}$ , který je opačný k původnímu vektoru  $\mathbf{e}_{\alpha}$  ( $\mathbf{e}_{\alpha'} = -\mathbf{e}_{\alpha}$ ). Rovnice (5.4) představuje změnu hybnosti odražených částic a zahrnuje též kolizi.

Částice proudící ve směru  $\mathbf{e}_{\alpha}$  mají před nárazem na povrch obtékaného tělesa hybnost

$$\mathbf{j}_{\alpha} = \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} . \quad (5.5)$$

Hybnost stejných částic po nárazu je pak

$$\mathbf{j}_{\alpha'} = \mathbf{e}_{\alpha'} f_{\alpha'} . \quad (5.6)$$



Obr. 5.4: Částice odrážející se od obtékaného tělesa se vrací do původního uzlu s hybností opačné orientace a jiné velikosti závislé na kolizním procesu.

Z rovnic (5.4), (5.5) a (5.6) vyplývá, že změna hybnosti ve směru  $\alpha$  je dána součtem opačných distribučních funkcí  $f_{\alpha}(\mathbf{r}_i, t)$  a  $f'_{\alpha}(\mathbf{r}_i, t + dt)$  [23], jak je též ilustrováno na obr. 5.4. Je samozřejmé, že  $\alpha$  volíme pouze takové, jaké odpovídají směru, kde se vyskytuje překážka proudu (např. pro uzel A z obr. 5.4 volíme  $\alpha = 5, 6$ ).

V každém uzlu bezprostředně blízkém povrchu tělesa tedy známe změnu hybnosti částic  $\Delta \mathbf{j}_i$  při nárazu. Jelikož se pohybujeme v jednotkách mřížky, kde časový krok je roven jedné ( $dt = 1, d\mathbf{r} = 1$ ) a předpokládáme malou změnu hybnosti ( $\Delta \mathbf{j}_i \Rightarrow d\mathbf{j}_i$ ), pak celková změna hybnosti v uzlu odpovídá elementární síle působící na obtékané těleso v daném bodě

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{j}_i}{dt} = \Delta \mathbf{j}_i. \quad (5.7)$$

Při výpočtu odporového koeficientu potřebujeme znát pouze tu složku, která je rovnoběžná s proudem. Často se směr proudění volí rovnoběžný s osou x (viz obr. 1.4), a proto potřebnou složku síly lze vyjádřit:

$$F_{Di} = e_{\alpha x} (f_{\alpha}(\mathbf{r}_i, t) - f_{\alpha}(\mathbf{r}_i, t + dt)), \quad (5.8)$$

kde  $e_{\alpha x} f_{\alpha}(\mathbf{r}_i, t + dt) = -e_{\alpha' x} f_{\alpha'}(\mathbf{r}_i, t + dt)$

pro  $i$  jdoucí přes všechny uzly v těsné blízkosti obtékaného tělesa. Celkovou sílu pak lze jednoduše získat sečtením elementárních odporových sil  $F_{Di}$

$$F_D = \sum_i F_{Di}. \quad (5.9)$$

Ladd též uvádí, že tento přístup k výpočtu odporové síly je limitován nízkými Reynoldsovými čísly, tedy nižšími než 100 [17].

# Kapitola 6

## Numerické výsledky

V této kapitole je stručně nastíněna struktura programu a dále tři testovací příklady, na nichž jsem ověřila jeho správné fungování. Jde o porovnání vlastních výpočtů s pracemi Beneše a kol. [1], vedoucího této práce Ing. Bublíka a Richtera [26].

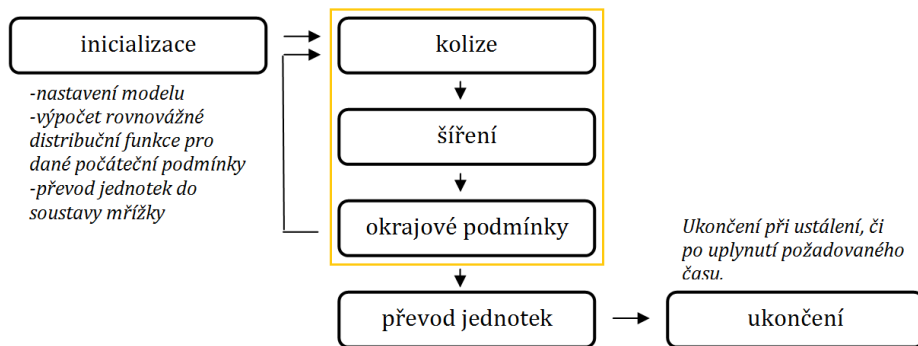
### 6.1 Implementace v jazycích Matlab a C++

Pro implementaci LBM jsem užila programovacího jazyka MATLAB a jazyka C++. Při modelování proudění ve 3D je největším úskalím objem dat. U trojrozměrných případů je matice distribučních funkcí rychlosti čtyřrozměrná, jelikož v každém bodě prostoru je navíc definováno celkem 19 funkcí. Takové rozvržení je však z hlediska paměti nevhodné.

Často se pomocí trojrozměrného modelování řeší případy, kdy jen malá část objemu oblasti je důležitá pro výpočet a zbylé distribuční funkce rychlosti (mimo tekutinu) jsou konstantně rovny nule. Proto se uzly řadí do jediného řetězce a spolu s 19 distribučními funkcemi tedy tvoří matici  $i \times 19$ , kde  $i$  jde přes všechny uzly v tekutině. Takové rozvržení zbytečně neuchovává informace o uzlech mimo tekutinu. Samozřejmě je pak třeba uložit další informace o původní struktuře (informace o pozici uzlu a jeho uzlech sousedních), ale v porovnáním s původním rozvržením jde bezesporu o úspornější variantu.

MATLAB je velice příjemný k používání, jelikož mnoho procesů, které by se programovaly jen velice zdlouhavě, nabízí jako hotové metody připravené k použití. Toho jsem využila jednak při vytváření mřížky, kdy je třeba definovat, jaké uzly se nachází v tekutině a které nikoli, a dále například při triangulaci povrchu tělesa při určování odporového koeficientu.

Pro vlastní aplikaci LBM jsem však použila programovacího jazyka C++ v podobě vložené metody. Efektivita jazyka C++ je totiž mnohonásobně vyšší než u MATLABu a v rámci LBM není potřeba komplikovaných programových operací. Metodu v jazyce C++ jsem do původního programu vložila pomocí rozhraní MEX (MATLAB executable).

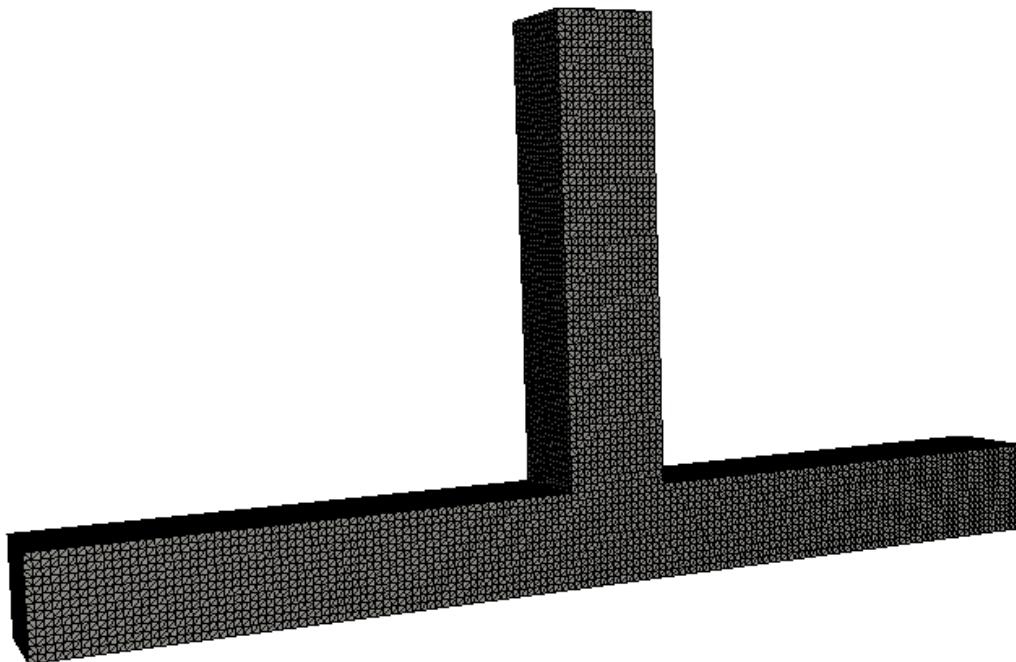


Obr. 6.1: Diagram LBM. Žlutý rámeček označuje část programu psanou v jazyce C++.

## 6.2 Kanál s kolmým ramenem

V této části je porovnán výstup mého programu MRT LBM s výsledky Beneše a kol. [1], kteří pracovali s metodou konečných objemů.

Byl uvažován kanál čtvercového průřezu o straně  $D$ , délka úseku kanálu před i za ramenem byla nastavena na  $10D$  a samotné rameno mělo délku též  $10D$ . Všechny parametry byly vázány pouze Reynoldsovým číslem, které bylo nastaveno na hodnotu 400. Konkrétně pro svůj výpočet jsem uvažovala délku strany kanálu  $D = 0.04[\text{m}]$ , vstupní rychlost  $u_0 = 1[\text{ms}^{-1}]$  a kinematickou viskozitu  $\nu = 10^{-4}[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$ .

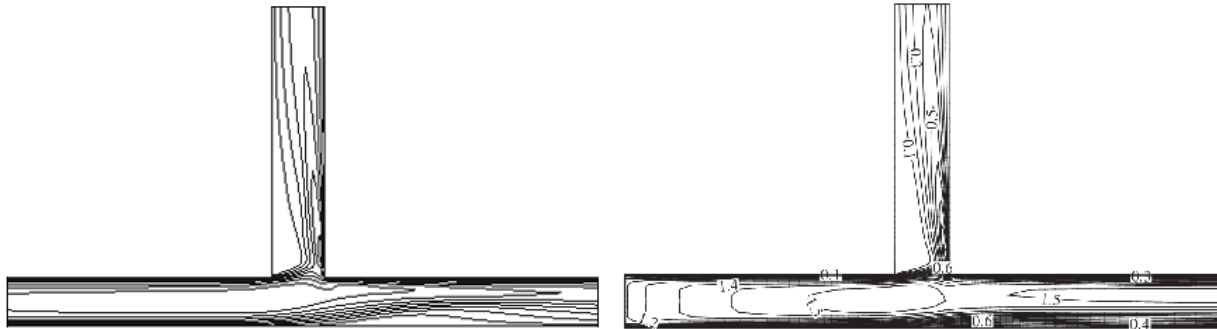


Obr. 6.2: Ilustrace tvaru kanálu a jemnosti mřížky.

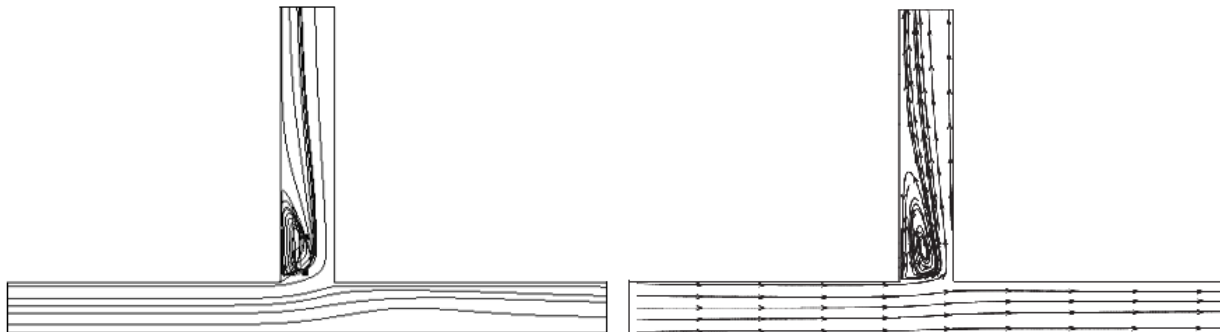


Problém byl metodou konečných objemů počítán na přibližně 50 000 elementárních objemech [1], v MRT LBM jsem použila přibližně 100 000 uzlů.

Na obrázcích 6.3 a 6.4 jsou uvedeny výsledky získané v podélném řezu kanálem.



Obr. 6.3: Porovnání izochar pole rychlosti v kanále získaných pomocí vlastního softwaru MRT LBM (vlevo) a metody konečných objemů (vpravo) publikovaných v [1].



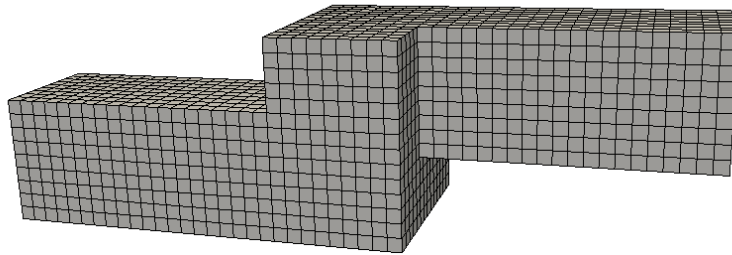
Obr. 6.4: Porovnání proudnic v kanále získaných pomocí vlastního softwaru MRT LBM (vlevo) a metody konečných objemů (vpravo) publikovaných v [1].

### 6.3 Kanál s rozšířeným kolenem

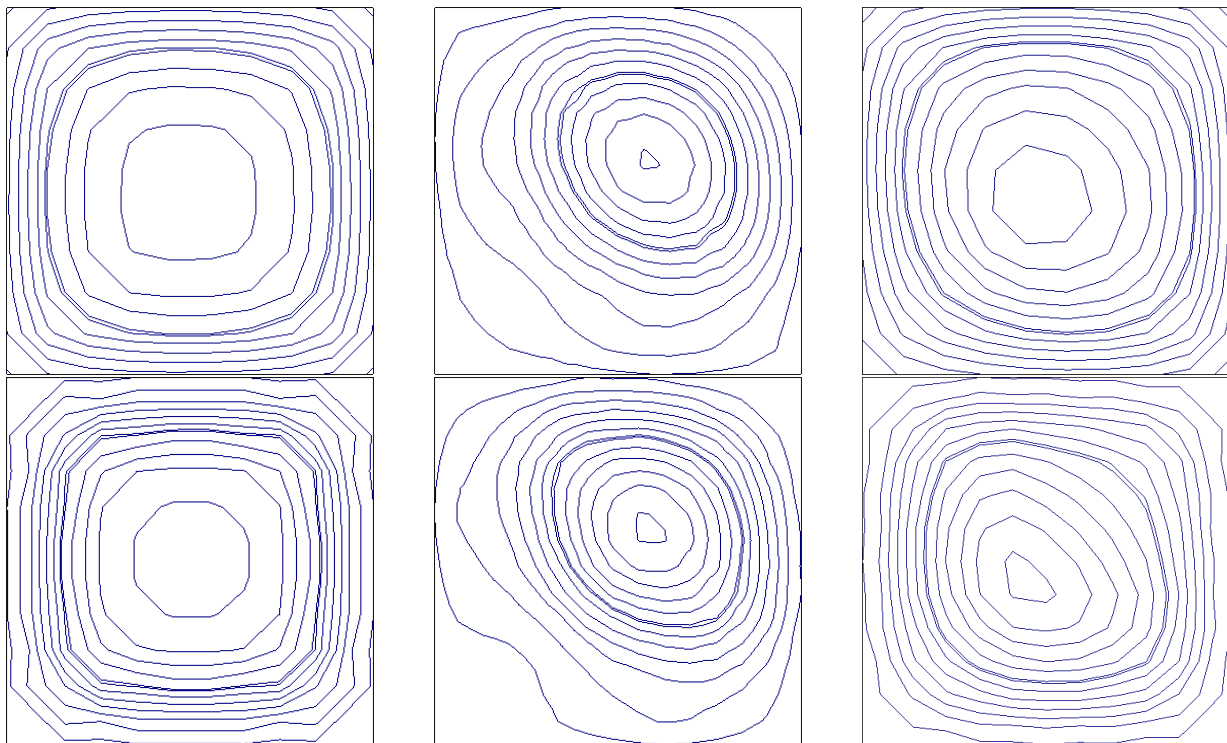
Druhým srovnávacím příkladem je kanál s rozšířeným kolenem.

Kanál je čtvercového průřezu. Před a za ohybem, v užší části, je šířka 10 uzlů a rozšířená část má rovněž čtvercový průřez se stranou o 15 uzlech. Dále bylo stanoveno Reynoldsovo číslo na hodnotu 100. Na obrázku 6.5 je přibližena podoba kanálu.

Výsledky znázorněné na obrázcích 6.6 jsou vesměs počítány pomocí MRT modelu.



Obr. 6.5: Tvar kanálu pro druhý srovnávací příklad.

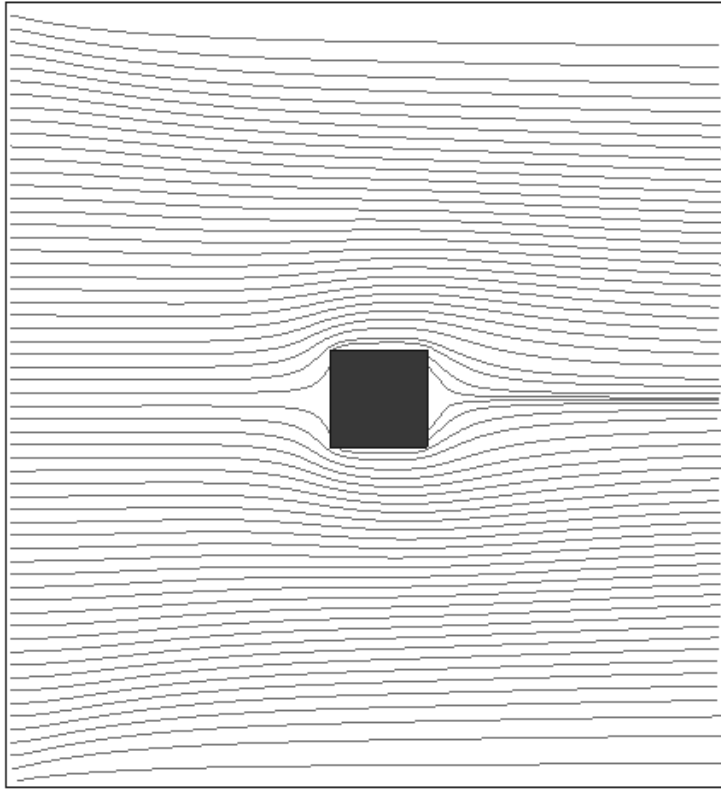


Obr. 6.6: Mé výsledky (nahore) porovnané s výsledky pana Bublíka (dole). Izočáry rychlosti v průřezu na začátku (vlevo), v koleni (uprostřed) a na konci kanálu (vpravo)

## 6.4 Výpočet odporového koeficientu

Posledním srovnávacím příkladem je výpočet odporového koeficientu krychle. Volba krychle je vhodná z hlediska přesnosti, jelikož povrch krychle lze přesně vystihnout kubickou mřížkou. Výpočet odporového koeficientu oblých těles je o poznání složitější.

Výpočet jsem provedla pro kanál o čtvercovém průřezu o straně 100 dr a délce 90 dr, do jehož středu jsem umístila krychli o straně 10 dr. Odporový koeficient jsem zjistila pro mnoho různých Reynoldsových čísel v rozmezí 10 a 250. V tabulce 6.1 jsou uvedeny

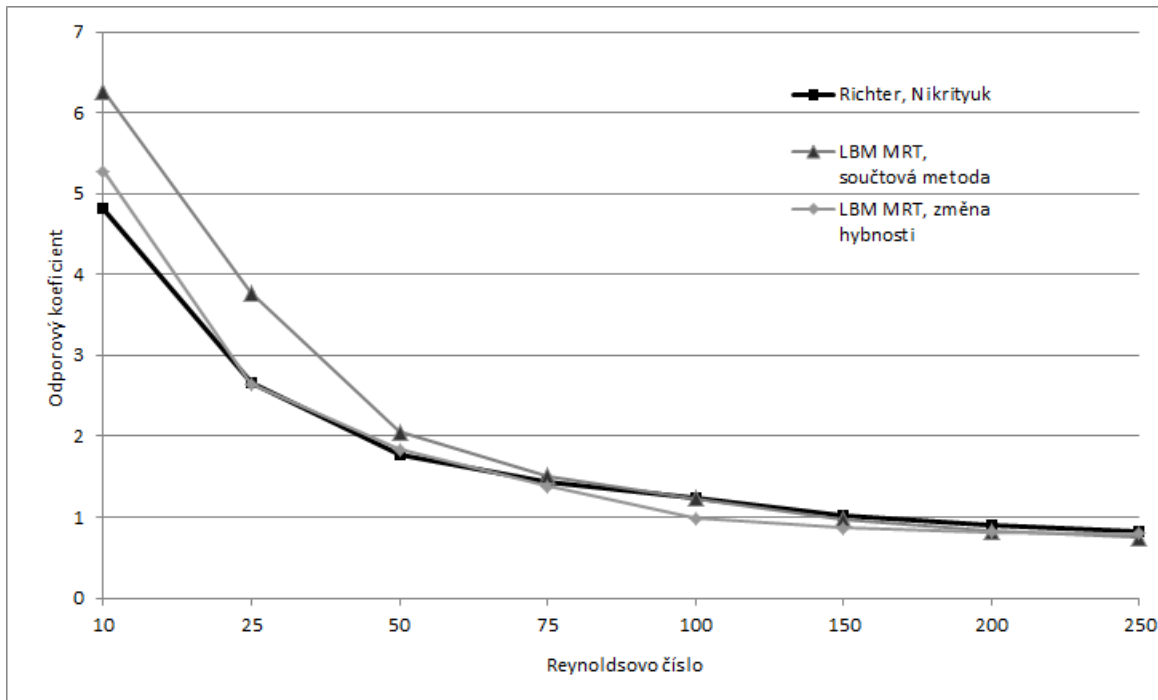


Obr. 6.7: Řez kanálem pro výpočet odporového koeficientu a umístění obtékané krychle.

výsledky [26] porovnané s výstupy mého MRT LBM pro součtovou metodu a metodu změny hybnosti, stejně tak v grafu 6.8.

Re	10	25	50	75	100	150	200	250
Richter a Nikrityuk	4,815	2,653	1,775	1,428	1,233	1,014	0,89	0,819
součtová metoda	7,18	3,76	2,04	1,5037	1,2314	0,97	0,8271	0,7467
změna hybnosti	5,2787	2,6478	1,83	1,38	0,9822	0,8651	0,8191	0,7927

Tabulka 6.1: Tabulka odporových koeficientů pro různá Reynoldsova čísla. Výsledky po řadě Richtera a Nikrityuka, MRT LBM součtové metody a MRT LBM metody změny hybnosti.



Obr. 6.8: Porovnání výsledků Richtera a Nikrityuka s MRT LBM.

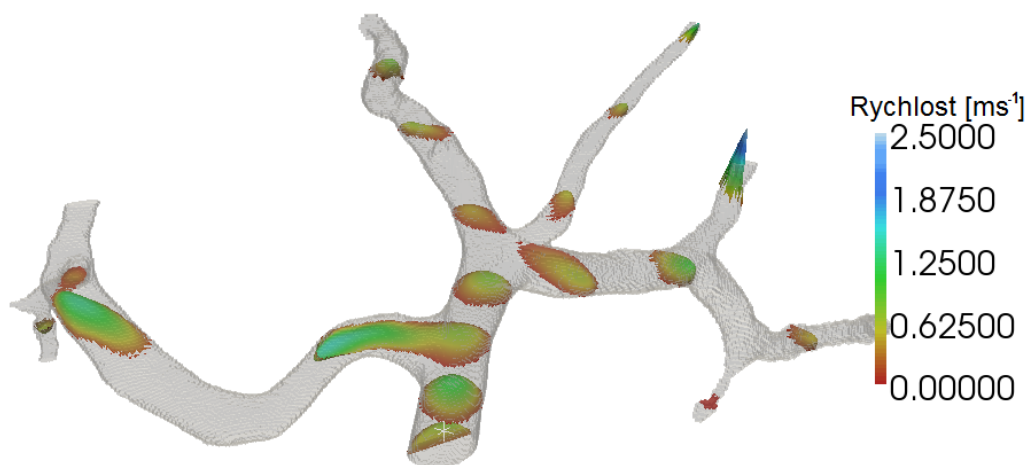
Výpočet pomocí metody změny hybnosti je relativně přesný, hodnoty pro proudění s  $Re < 100$  jsou velice blízké referenčním. Dokonce ani hodnoty pro  $Re > 100$  nejsou příliš odchylené od referenčních, přestože metoda změny hybnosti není pro vyšší hodnoty Reynoldsova čísla doporučována [17].

Výsledky součtové metody jsou uspokojivé. S klesajícím Reynoldsovým číslem však odchylky od referenčních hodnot rostly. Přesnost metody by se patrně dala zvýšit vyšším rozlišením mřížky a širším kanálem - ani jedno však nebylo možné kvůli paměťové kapacitě výpočetní techniky.

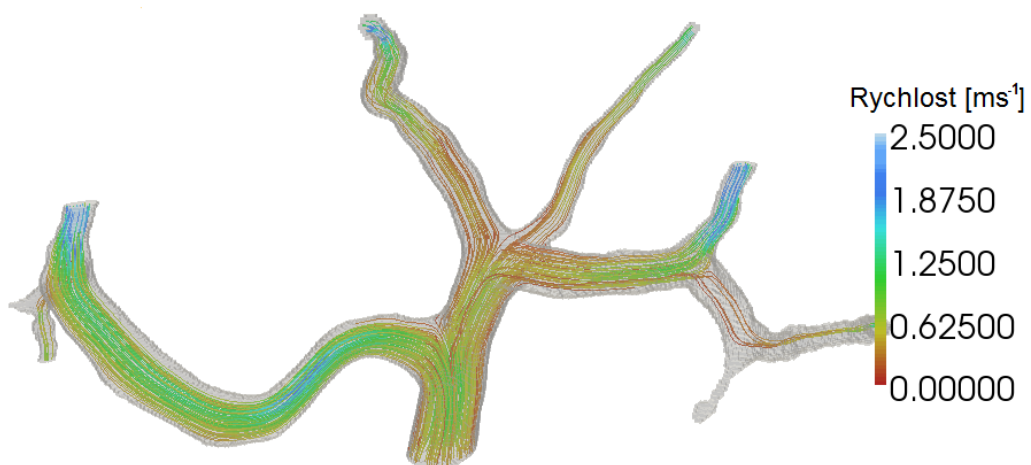
## 6.5 Proudění v cévách

Posledním příkladem je využití Boltzmannovy mřížkové metody (MRT LBM) pro výpočet proudění tekutiny ve složitější geometrii. Jelikož zkoumání proudění krve krevním řečištěm není jako takové předmětem této práce, je zde cévní systém brán pouze jako další z možných geometrií, na které je ukázáno použití LBM pro výpočet proudění v kanálu s vícero větvemi a proměnnou průtočnou plochou. Použitá geometrie byla získána z CT snímků úseku cévního systému a dále upravena pro použití ve výpočetním softwaru. Rychlost na vstupu byla  $u_0 = 1[\text{ms}^{-1}]$ , kinematická viskozita  $\nu = 3 \cdot 10^{-3}[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$  a charakteristický rozměr  $D = 1[\text{mm}]$ . Mřížka byla navržena tak, že nejširší místo má po průřezu zhruba 40 uzlů. Modelová tekutina zadaných vlastností do systému vstupuje nejširším otvorem,

ostatní konce jsou výstupní. Následující obrázky ilustrují výsledek simulace.



Obr. 6.9: Rychlostí profily v několika řezech cévami.



Obr. 6.10: Proudnic zobrazující proudění krve v cévním systému. Jejich barva odpovídá rychlosti proudění.

# Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se se základní teorií LBM. Dále pak její rozšíření na stabilnější MRT model a uplatnění v modelování trojrozměrného proudění.

K ověření správného fungování vlastního vyvinutého softwaru jsem nemohla použít srovnání s experimentem, proto jsem přistoupila k možnosti porovnání alespoň s numerickými výsledky publikovanými jinými autory [1], [26]. Srovnání bylo provedeno jednak s numerickými výsledky získanými za pomoci softwaru využívajícího též LBM, softwaru vedoucího této práce Ing. Bublíka, a též s numerickými výsledky dosaženými Benešem a kol. [1], kteří publikovaných výsledků dosáhli použitím metody konečných objemů. Numerické výsledky vlastního softwaru MRT LBM v obou případech kvalitativně odpovídaly referenčním.

Dále byl již ověřený software rozšířen o metodu pro výpočet odporového koeficientu. Výsledky vyhodnocení odporového koeficientu krychle pro různá Reynoldsova čísla byly opět srovnány s referenčními výsledky uvedenými v práci Richtera a Nikrityuka [26]. Výsledky se daly považovat za přesné pro  $Re > 75$ , a to pro obě užití metody, součtovou metodu i metodu změny hybnosti (přestože metody změny hybnosti je doporučována pro  $Re < 100$  [17]). Pro jiné tvary by bylo nutné přejít k složitějším výpočtům síly, jelikož například oblý povrch tělesa nelze dostatečně přesně popsat čtvercovou mřížkou. Tomuto problému se věnují ve své práci například Mei a kol. [23] a mohlo by být i možnou nadstavbou a pokračováním této práce.

Dále by do budoucna bylo možné pracovat na stabilitě výpočtů vyvinutého softwaru. Nabízí se především implementace reálnějších okrajových podmínky na vstupu a výstupu. Ty jsou předmětem mnoha prací, například Succi [27] či Ho a kol. [15]. Též by bylo možností upravit stávající model modelem pro turbulentní proudění, což by vedlo na mnohem širší využitelnost vyvinutého softwaru.

LBM je metoda, která se stále vyvíjí. Má však obrovský potenciál a pro svou jednoduchou implementaci a vysokou variabilitu i jistou budoucnost mezi numerickými metodami mechaniky tekutin.

# Literatura

- [1] L. Beneš, P. Louda, K. Kozel, R. Keslerová, and J. Štigler. Numerical simulations of flow through channels with T-junction. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 2011.
- [2] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. *Physical Review*, 1954.
- [3] E. S. Boek and M. Verturoli. Lattice-Boltzmann studies of fluid flow in porous media with realistic rock geometries. *Computers and Mathematics with Applications* 59, 2002.
- [4] H. Chen, S. Chen, and W. H. Matthaeus. Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann model. *Physical Review A*, 1992.
- [5] S. Chen and G. D. Doolen. Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998.
- [6] D. d’Humières, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three-dimensions. *Philosophical Transactions of Royal Society of London A*, 2002.
- [7] F. Dubois, T. Fevrier, and B. Graille. Lattice Boltzmann schemes with relative velocities. *arXiv:1312.3297*, 2013.
- [8] U. Frisch, D. d’Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, and J.-P. Rivet. Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex System*, 1987.
- [9] S. Geller, S. Uphoff, and M. Krafczyk. Turbulent jet computations based on MRT and Cascaded Lattice Boltzmann models. *arXiv:1206.0389*, 2012.
- [10] I. Ginzburg and K. Steiner. Lattice Boltzmann model for free-surface flow and its application to filling process in casting. *Journal of Computational Physics*, 185, 2003.
- [11] S. S. Girimaji, H. Yu, D. Yu, and L.-S. Luo. *Large Eddy Simulation of the Lattice Boltzmann Equation for Turbulent Combustion*. Texas A& M University, 2004.

- [12] A. Grucelski and J. Pozorski. Lattice Boltzmann Simulation of Fluid Flow in Porous Media of Temperature-Affected Geometry. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 50, 2012.
- [13] Z. Guo and T. S. Zhao. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media. *Physical Review E* 66, 2002.
- [14] S. Harris. *An Introduction to the Theory of the Boltzmann Equation*. Holt and Rinehart and Winston, 1971.
- [15] C.-F. Ho, C. Chang, K.-H. Linland, and C.-A. Lin. Consistent Boundary Conditions for 2D and 3D Lattice Boltzmann Simulations. *Tech Science Press*, 44, 2009.
- [16] C. Körner, M. Ties, T. Hofmann, and N. Thürey. Lattice Boltzmann Model for Free Surface Flow for Modeling Foaming. *Journal of Statistical Physics*, 121, 2004.
- [17] A. J. C. Ladd. Numerical Simulations of Particulate Suspensions via a Discretized Boltzmann Equation Part I. Theoretical Foundation. *J. Fluid Mech.*, 271, 1994.
- [18] A. J. C. Ladd. Numerical Simulations of Particulate Suspensions via a Discretized Boltzmann Equation Part II. Numerical Results. *J. Fluid Mech.*, 1994.
- [19] P. Lallemand and L.-S. Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. *Physical Review E*, 2000.
- [20] P. Lallemand and L.-S. Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: Acoustic and thermal properties in two and three dimensions. *Physical Review E* 68, 2003.
- [21] J. Latt. Choice of units in lattice Boltzmann simulations, 2008.
- [22] J. Linhart. *Mechanika tekutin I*. Západočeská univerzita v Plzni, 2. edition, 2009.
- [23] R. Mei, D. Yu, and W. Shyy. Force Evaluation in the Lattice Boltzmann Method Involving Curved Geometry. Technical Report 22, ICASE, Hampton, Virginia, 2002.
- [24] X. F. Pan, A. Xu, G. Zhang, and S. Jiang. Lattice Boltzmann Approach to High-Speed Compressible Flows. *International Journal of Modern Physics*, 2007.
- [25] Y. H. Qian and S. A. Orszag. Lattice BGK Models for the Navier-Stokes Equation: Nonlinear Deviation in Compressible Regimes. *Europhys. Lett*, 1993.
- [26] A. Richter and P. A. Nikrityuk. Drag forces and heat transfer coefficients for spherical, cuboidal and ellipsoidal particles in cross flow at sub-critical Reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55:1343—1354, 2012.
- [27] S. Succi. *The Lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond*. Oxford University Press, 2009.



- [28] H. Yu and K. Zhao. Lattice Boltzmann method for compressible flows with high mach numbers. *Physical Review E* 61, 2000.