

ODHAD TRŽNÍHO RIZIKA NA BÁZI LÉVÝHO MODELŮ A ČASOVÝ HORIZONT

Aleš Kresta, Tomáš Tichý

Úvod

Nedílnou součástí aktivit na finančních trzích je modelování, kvantifikace a řízení rizik, kterým daný subjekt je nebo může být vystaven v důsledku neočekávané změny tržních cen akcií, měnových kurzů, úrokových sazeb či komodit. Aplikace adekvátních modelů je důležitá jak z pohledu akcionářů, tedy držitelů vlastnických podílů, tak – v případě finančních institucí – orgánů dohledu.

V prvním případě se jedná o provázání množství přebíraného rizika na cílový rating. Z toho by pak měla být odvozena optimální úroveň kapitálu. Ve druhém případě jde o zprostředkovaný zájem veřejnosti na stabilitě finančního sektoru a potažmo i ekonomiky jako celku prosazovaný prostřednictvím souboru doporučení a závazných pravidel pro bankovní sektor (Basel II/III) i pojišťná odvětví (Solvency II), vedoucích k povinnosti kapitálového požadavku.

Ačkoliv je uvádění nových pravidel často doprovázeno vyjádřeními o snaze zamezení (regulatorní) arbitráže mezi zeměmi, odvětvími, subjekty i nástroji, v praxi se to ne vždy podaří splnit. Například v rámci Solvency II je předpokládána doba držení 250 dnů (jeden rok), neboť se u finančních pozic a priori předpokládá dlouhodobá investice. Na druhou stranu v rámci Basel II je uvažována doba držení v délce deseti dnů (2 týdny), i když pouze za předpokladu dostatečně likvidní pozice.

Obecným standardem je přitom sestavení modelu na bázi denních dat a následný přepočít pro delší časový úsek (10/250 dnů). Denní datová báze je volena jednak z důvodu, že je na její bázi vyžadováno zpětné testování, jednak ke své rozsáhlosti – práce s delšími intervaly (měsíc, rok) by vyžadovala mnohem rozsáhlejší časovou základnu, což by naopak znemožnilo postihnout některé strukturální změny.

Souvisejícím problémem pak je skutečnost, že denní data vykazují poněkud odlišné vlastnosti oproti datům ročním, ba i týdenním, ať už se jedná o vyšší momenty (šikmost a špičatost) nebo parametry závislosti. Takto sestavený model se doporučuje podrobit stresovému testování [13].

Komplexní struktura portfolií finančních institucí spolu s charakterem výnosů finančních aktiv představuje náročný požadavek na modelování – pro sestavení mezního pravděpodobnostního rozdělení jednotlivých faktorů (výnosů aktiv) je často třeba pracovat s modely, které umožňují brát v potaz jak samotnou existenci těžkých konců, tak jejich nesymetričnost. Vhodným prostředkem proto jsou modely Lévyho typu na bázi subordinátoru, jako NIG (normal inverse Gaussian) nebo VG (variance gamma) model, viz [7]. Pro získání struktury závislostí jednotlivých rizikových faktorů pak je vhodné použít kopula funkce [10]. Tento model výnosů portfolia finančních aktiv lze nalézt např. v [8].

Cílem tohoto článku je obdobně k [8] a [16] aplikovat a následně porovnat Brownův pohyb a VG model, spojené jak pomocí Gaussovy, tak Studentovy kopula funkce, při odhadu rizikových parametrů pravděpodobnostního rozdělení portfolia (střední hodnota a směrodatná odchylka, šikmost a špičatost, pravé i levé kvantily – VaR a CVaR). Odhad bude proveden pro časový horizont jednoho dne a deseti dnů, přičemž ve druhém případě budou parametry modelů odhadnuty na bázi jednoho dne (a následně dojde k prodloužení časové řady) i deseti dnů.

Postup je následující – v první kapitole dojde k definici Lévyho modelů na bázi subordinátoru jako prostředku pro efektivní modelování mezního rozdělení pravděpodobnosti a rovněž kopula funkcí pro vystižení závislostí. Následně budou definována data – mezinárodně diverzifikované portfolio pěti různých akciových indexů

a stejného počtu měn. Nakonec dojde k odhadu parametrů pravděpodobnostního rozdělení portfolia a k zhodnocení jednotlivých modelů mezi sebou i vzhledem k empiricky získaným hodnotám.

1. Vícerozměrné Lévyho modely na bázi subordinátoru

První zmínka o Lévyho modelech se sice objevila již ve třicátých letech dvacátého století, nicméně k jejich zahrnutí do základní výbavy finančního modelování dochází až v posledních letech. To se týká zejména podřízených Lévyho modelů – tak trochu nestandardní definice Lévyho modelů ve formě Brownova pohybu s náhodným časem – jejichž základ byl formulován v [6] nebo případně [4]. Z aktuálních knižních publikací obsahujících teoretické východiska a/nebo aplikaci Lévyho modelů lze zmínit [1], [2], [3], [7], [9].

Motivací pro použití náhodného času jako řídicí složky v rámci Brownova pohybu a zároveň ekonomickou interpretací odhadnutých parametrů tohoto procesu je náhodná míra, ve které na trh přicházejí informace, způsobilé ovlivnit cenu a výnos daného aktiva. Někdy se objeví mnoho nových informací v krátkém čase, někdy je trh „spící“, a tak na něj nepřicházejí žádné nové informace, které by byly relevantní pro určení ceny. Rozptyl řídicího procesu umožňuje rozlišit mezi trhy s relativně konstantním průběhem a velmi variabilními trhy.

V této kapitole budou nejprve definována vhodná mezní rozdělení pravděpodobnosti, následně bude ukázáno jak z nich získat vícerozměrné rozdělení použitím kopula funkcí. Alternativní přístup k tvorbě vícerozměrných Lévyho modelů je popsán a aplikován např. v [15].

1.1 Mezní rozdělení

Lévyho proces $X(t)$ je obecný stochastický proces s počátkem v nule, nezávislými a v čase stacionárními přírůstků, jehož trajektorie je zprava spojitá s limitou zleva. Další obecnou vlastností je tzv. stochastická spojitost, tj. pravděpodobnost, že právě v daný okamžik dojde k výskytu skoku, je nula, $\lim_{\tau \rightarrow 0} P\{X(t) - X(s) > a\} = 0$. Zároveň platí, že příslušné rozdělení pravděpodobnosti je nekonečně dělitelné.

Důležitým prvkem pro formální definici Lévyho modelů je Lévyho-Chinčinův vzorec:

$$\Phi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iuxI_{|x|<1}) \nu(dx), \quad (1)$$

který představuje exponent charakteristické funkce všech Lévyho modelů. Takto lze definovat trojici Lévyho charakteristik:

$$\{\gamma, \sigma^2, \nu(dx)\}.$$

První dvě charakteristiky definují drift procesu (deterministická část) a jeho rozptyl. Poslední je Lévyho míra. Pokud může být formulována jako $\nu(dx) = u(x) dx$, pak se nazývá Lévyho hustota. Ta je podobná hustotě pravděpodobnosti, avšak s tím rozdílem, že nemusí být integrovatelná a nulová v počátku. Výraz (1) tedy slouží k jednoznačné definici jakéhokoliv Lévyho modelu s tím, že některá z částí nemusí být přítomna dle konkrétního případu, např. Poissonův proces neobsahuje difúzi (σ), zatímco u Brownova pohybu nejsou skoky (ν).

Předpokládáme, že X sleduje (geometrický) Brownův pohyb. Pokud nahradíme standardní čas t v Brownově pohybu,

$$X(t, \theta, \vartheta) = \vartheta dt + \theta Z(t), \quad (2)$$

vhodnou funkcí $l(t)$, získáváme podřízený Lévyho model,

$$X(l(t), \theta, \vartheta) = \theta l(t) + \vartheta Z(l(t)) = \theta l(t) + \vartheta \varepsilon \sqrt{l(t)}. \quad (3)$$

Z důvodu udržení jednoduchosti jsou nejvhodnějšími kandidáty na funkci $l(t)$ gama proces a inverzní Gaussův proces. U variance gama (VG) modelu je tedy celkový proces řízen gama procesem z gama rozdělení majícím parametry a a b , které závisí pouze na rozptylu κ , tedy $G[a, b]$. Pro normální inverzní Gaussův (NIG) model je řídicím procesem inverzní Gaussův proces, který je založen na inverzním Gaussově rozdělení, tedy $IG[a, b]$, s parametry opět odvozenými od úrovně κ .

Konečný krok k získání modelu mezního rozdělení závisí na problému, který chceme řešit. Například, pokud je úkolem modelovat cenu finančního aktiva, která nabývá pouze kladných hodnot, můžeme použít Lévyho model (3) v exponenciálním tvaru:

$$S(t) = S_0 e^{uX(t) - \vartheta t}, \quad (4)$$

kde μ značí dlouhodobý drift ceny (tedy průměrný výnos) a ω je korekční faktor, který zajišťuje, že

$E[S(t)] = S_0 e^{\mu t}$. Naproti tomu, pokud modelujeme časovou řadu, která může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot (např. výnosy), můžeme postupovat následovně:

$$x(t) = \mu t + X(t) - \theta t, \quad (5)$$

díky čemuž je dlouhodobý drift opět sladěn, neboť

$$E[X(t)] = \theta t.$$

1.2 Kopula funkce

Užitečným nástrojem při modelování závislostí jsou kopula funkce (V tomto článku jsme se zaměřili pouze na eliptické kopula funkce. Základní přehled teorie kopula funkcí lze nalézt v [10], jejich aplikace pak v [5], [11].), které zachycují závislost jednotlivých distribučních funkcí v $[0,1]$,

$$C: [0,1]^n \rightarrow [0,1] \text{ v } R^n, n \in \{2,3,\dots\}. \quad (6)$$

Na kteroukoliv kopula funkci může být pohlíženo jako na vícerozměrnou distribuční funkci s mezními distribučními funkcemi ve formě standardizovaného rovnoměrného rozdělení.

Pro jednoduchost předpokládejme dvě potenciale závislé náhodné proměnné X a Y s mezními distribučními funkcemi F_X a F_Y a sdruženou distribuční funkcí $F_{X,Y}$. Potom dle Sklarova teorému [12]:

$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \quad (7)$$

Pokud jsou mezní distribuční funkce F_X a F_Y spojitě, kopula funkce C je jedinečná. Sklarův teorém naznačuje také inverzní vztah:

$$C(u,v) = F_{X,Y}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)). \quad (8)$$

Z formulace (7) je patrné, že sdružená pravděpodobnost obsahuje dvě rozdílné informace: (i) mezní distribuční funkce náhodných proměnných, (ii) funkci závislosti těchto distribučních funkcí. Zatímco mezní distribuční funkce jsou dány F a F_Y , kopula funkce popisuje pouze závislost těchto distribučních funkcí, nic víc, nic míň. Pouze když poskládáme tyto dvě informace dohromady, získáme dostatečnou znalost o páru náhodných proměnných X a Y .

Za předpokladu znalosti mezních distribučních funkcí náhodných proměnných je pro potřeby modelování nezbytné zvolit vhodnou kopula funkci. S trochou zjednodušení lze rozlišit eliptické a Archimédovy kopula funkce. Hlavní rozdíl mezi těmito dvěma typy spočívá ve způsobu jejich konstrukce a odhadu. Zatímco pro Archimédovy kopula funkce je potřeba definovat generující funkci, pro eliptické kopula funkce je postačující znalost související sdružené distribuční funkce (např. Gaussova, Studentova, atd.).

Je zřejmé, že n -rozměrný podřízený Lévyho model může být definován s využitím eliptické kopula funkce následovně:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)), \quad (9)$$

kde $F_i(x_i)$ značí mezní distribuční funkci, tedy vhodný podřízený Lévyho model, který může být rozdílný pro jednotlivá i , C značí vhodnou eliptickou kopula funkci.

1.3 Odhad parametrů vícerozměrného podřízeného Lévyho modelu

Existují tři hlavní přístupy k odhadu parametrů při modelování pomocí kopula funkcí: EMLM (exact maximum likelihood method), IFM (inference function for margins) a CML (canonical maximum likelihood). Zatímco při použití EMLM jsou odhadovány všechny parametry najednou, což může být výpočetně velmi náročné (obzvláště při odhadu vícedimensionálních dat, nebo při použití složitějších mezních funkcí), při IFM a CML jsou odhadnuty zvlášť parametry mezních rozdělení a kopula funkce. Při IFM jsou odhadnuty nejprve parametry mezních distribučních funkcí a na jejich základě pak parametry kopula funkce. U CML jsou parametry kopula funkce odhadnuty na základě empirických distribučních funkcí. Detaily těchto metod lze nalézt např. v [5]. V tomto příspěvku bude využito CML přístupu.

Nejprve tedy budou odhadnuty parametry mezních distribučních funkcí pomocí metody maximální věrohodnosti a až poté (empirické) parametry závislosti tvořené korelační maticí (pro Gaussovu kopuli) či korelační maticí spolu se stupni volnosti df (pro Studentovu kopuli).

Vzhledem k tomu, že na VG model může být nahlíženo jako na Brownův pohyb (normální rozdělení) s náhodným (gama) časem, funkce hustoty pravděpodobnosti tohoto modelu

může být formulována následovně, tedy Gaussova hustota v gama čase:

$$f_{VG}(x, g(t; \kappa, \theta, \vartheta)) = \int_{\vartheta} \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \exp\left[-\frac{(x-\theta g)^2}{2\vartheta^2 g}\right] \frac{g^{\frac{\kappa}{\vartheta}} \exp\left(-\frac{g t}{\kappa}\right)}{\left(\frac{\kappa}{t}\right)^{\frac{\kappa}{\vartheta}} \Gamma\left(\frac{\kappa}{\vartheta}\right)} dg \quad (10)$$

což je pro potřeby odhadu parametrů metodou maximální věrohodnosti potřeba upravit do diskrétní verze:

$$f_{VG}(x) = \frac{2 \exp\left[\frac{\theta(x-\bar{\mu})}{\vartheta^2}\right]}{\vartheta \sqrt{2\pi} \kappa^{\frac{M}{\kappa}} \Gamma\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \left(\frac{|x-\bar{\mu}|}{\sqrt{\frac{2\vartheta^2}{\kappa} + \theta^2}}\right)^{\frac{M}{\kappa} - 1} K_{\frac{M}{\kappa} - 1} \left(\frac{|x-\bar{\mu}| \sqrt{\frac{2\vartheta^2}{\kappa} + \theta^2}}{\vartheta^2}\right) \quad (11)$$

kde $K_n(\cdot)$ je modifikovaná Besselova funkce třetího druhu:

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^{n-1} \exp\left[-\frac{x}{2}(y^{-1} + y)\right] dy. \quad (12)$$

Zavedení $\bar{\mu} = \mu - \omega$ zároveň umožní současný odhad reálného driftu μ a korekčního faktoru ω .

Při odhadu parametrů VG modelu $\bar{\mu}$, θ , ϑ , a κ , metodou maximální věrohodnosti se vychází z rovnice (11), kdy jednotlivá pozorování x_i mají pravděpodobnost nastání $f_{VG}(x_i | \bar{\mu}, \theta, \vartheta, \kappa)$. Jedná se o podmíněnou pravděpodobnost za podmínky, že známe hledané parametry. Pro nezávislá pozorování ze stejného pravděpodobnostního rozdělení je sdružená pravděpodobnost nastání všech pozorování součinem jednotlivých funkcí hustoty pravděpodobnosti (jedná se o funkci věrohodnosti L):

$$f_{VG}(x_1, x_2, \dots, x_n | \bar{\mu}, \theta, \vartheta, \kappa) = \prod_{i=1}^n f_{VG}(x_i | \bar{\mu}, \theta, \vartheta, \kappa) = L(\bar{\mu}, \theta, \vartheta, \kappa | \bar{x}) \quad (13)$$

Hledané parametry pravděpodobnostního rozdělení nalezneme tak, že maximalizujeme funkci věrohodnosti L . Z numerických důvodů je ovšem snazší pracovat s logaritmem funkce věrohodnosti $\ln L$, tj. se součtem jednotlivých pravděpodobností, a nikoliv jejich součinem.

2. Data

Analýza jednotlivých modelů bude provedena na bázi denních dat pěti akciových indexů denominovaných v různých světových měnách za období 2. 1. 2004 až 31. 12. 2009, viz Tab. 1.

Vývoj těchto indexů i příslušných měnových kurzů je zachycen na Obr. 1. Pro zjednodušení byly všechny časové řady normalizovány – v čase nula tak vždy začínají na stejné hodnotě (1 CZK). Tato normalizace umožňuje snadnější srovnání výsledků.

Tab. 1: Akciové indexy a příslušné měny

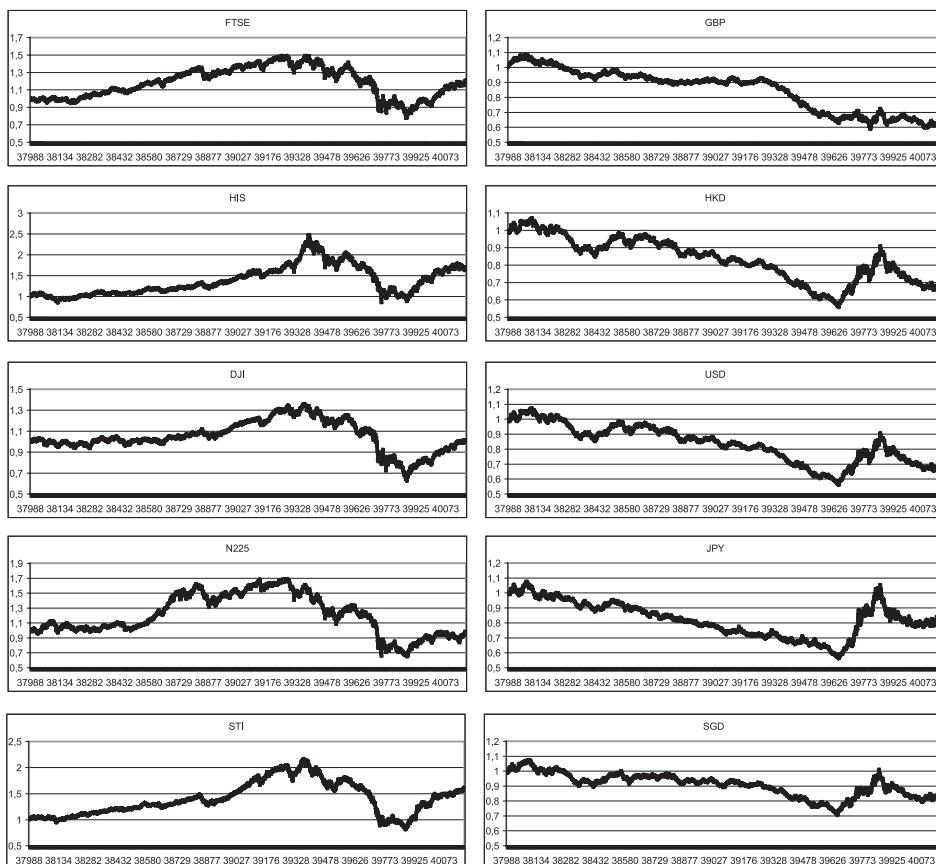
Index	Měna
FTSE	GBP
HSI	HKD
DJI	USD
N225	JPY
STI	SGD

Zdroj: vlastní výpočty

Z cenového vývoje dle Obr. 1 je zřejmá relativně vysoká korelace jednotlivých indexů na straně jedné a měnových kurzů na straně druhé. V případě všech indexů lze pozorovat výrazný růst hodnoty (v dané měně) až po rok 2007 s několika poklesy v průběhu roku 2006. Koncem roku 2007 dochází k propadu, který je následován téměř soustavným poklesem po celý rok 2008, a to až pod výchozí hodnotu 1,0. Co se týče měnových kurzů, z jejich vývoje je patrná soustavná apreciacie české koruny, až po konec léta 2008, kdy byla vystřídaná znatelnou depreciací. Avšak ani ta nekompenzovala pokles hodnoty akciových investic.

Krizový rok 2008 tak pro všechny časové řady přinesl nárůst abnormálních změn (těžké konce a špičatost), často vychýlených na jednu či druhou stranu (šikmost). Základní popisné statistiky spojitých výnosů jednotlivých časových řad jsou zřejmé z Tab. 2 (minimální a maximální výnos, střední hodnota a medián, směrodatná odchylka, šikmost a špičatost), a to jak pro denní, tak 10 denní časový interval. Co se týče denních dat, je zřetelné, že za dané období akciové indexy v průměru více či méně posílily (mimo N225), zatímco měny oslabily. Směrodatná odchylka výnosů přitom byla u indexů dvojnásobná ve srovnání s měnami. Odlišný medián od střední hodnoty indikuje zešikmení výnosů, ať už pozitivní či negativní, přitom však nelze vysledovat zásadní odlišnosti mezi měnami a indexy. Oproti tomu špičatost je znatelně vyšší u akciových indexů, než u měn a právě v jejím důsledku dochází k velmi vysokým denním

Obr. 1: Vývoj indexů a měnových kurzů



Zdroj: vlastní výpočty

výchylkám, viz minimální a maximální výnosy. Právě vysoké hodnoty špičatosti představují zajímavou výzvu pro aplikaci Lévyho modelů.

Podíváme-li se blíže na výsledky za období dvou týdnů, odpovídají střední hodnoty přibližně desetinasobku, směrodatné odchylky však

násobku odmocniny z desíti pouze v průměru. Obdobně minimální a maximální výnosy jsou „jen“ trojnásobné. S tím souvisí zřejmě nižší špičatost, ale poněkud překvapivě výrazně vyšší zešikmení.

Tab. 2: Základní popisné statistiky spojitých výnosů

denní	FTSE	GBP	HSI	HKD	DJI	USD	N225	JPY	STI	SGD
Min	-9,26 %	-4,87 %	-13,58 %	-5,76 %	-8,20 %	-5,74 %	-12,11 %	-10,24 %	-8,70 %	-4,80 %
Max	9,64 %	3,99 %	14,24 %	4,28 %	10,51 %	4,33 %	13,67 %	5,45 %	7,53 %	3,53 %
St. hodnota	0,01 %	-0,03 %	0,04 %	-0,02 %	0,00 %	-0,02 %	0,00 %	-0,01 %	0,03 %	-0,01 %
Medián	0,06 %	-0,04 %	0,07 %	-0,06 %	0,04 %	-0,05 %	0,05 %	-0,07 %	0,08 %	-0,03 %
Směr. odch.	1,31 %	0,67 %	1,79 %	0,83 %	1,28 %	0,83 %	1,62 %	0,97 %	1,33 %	0,66 %
Špičatost	13,87	9,71	12,74	7,73	14,38	7,64	13,73	13,83	8,62	8,04
Šikmost	-0,02	0,11	0,13	0,05	0,00	0,05	-0,40	-0,31	-0,15	0,01
2-týdenní	FTSE	GBP	HSI	HKD	DJI	USD	N225	JPY	STI	SGD
Min	-25,78 %	-10,63 %	-39,26 %	-11,96 %	-27,65 %	-12,05 %	-36,26 %	-11,46 %	-26,04 %	-10,05 %
Max	12,58 %	9,30 %	24,26 %	12,63 %	17,20 %	12,64 %	20,69 %	16,70 %	19,56 %	10,83 %
St. hodnota	0,12 %	-0,31 %	0,32 %	-0,22 %	0,00 %	-0,22 %	-0,03 %	-0,12 %	0,29 %	-0,10 %
Medián	0,57 %	-0,31 %	0,59 %	-0,45 %	0,34 %	-0,47 %	0,51 %	-0,42 %	0,75 %	-0,19 %
Směr. odch.	3,54 %	2,10 %	5,16 %	2,73 %	3,41 %	2,75 %	4,66 %	3,05 %	4,27 %	2,12 %
Špičatost	9,62	6,37	7,72	4,99	12,54	4,94	9,63	7,19	7,96	4,86
Šikmost	-1,42	-0,16	-0,63	0,48	-1,51	0,47	-1,18	1,03	-0,66	0,32

Zdroj: vlastní výpočty

Pro účely modelování budeme předpokládat portfolio složené ze všech dostupných indexů tak, že jeho riziko vyjádřené směrodatnou odchylkou denních spojitých výnosů bude minimalizováno. Pak je více než 1/3 prostředků investována do amerických akcií (a USD), ale pouze nepatrné množství v Hong Kongu. Z jiného pohledu můžeme říci, že polovina prostředků byla investována na Anglosaských trzích (UK a US), zatímco druhá polovina na východě Asie (Japonsko, Singapur a Hong Kong), viz Tab. 3.

Tab. 3: Složení portfolia

FTSE, GBP	17,24 %
HSI, HKD	5,00 %
DJI, USD	36,15 %
N225, JPY	25,89 %
STI, SGD	15,72 %

Zdroj: vlastní výpočty

3. Analýza vybraných modelů

V této části dojde k porovnání Brownova pohybu a VG procesu při modelování pravděpodobnostního rozdělení portfolia při aplikaci Gaussovy a Studentovy kopula funkce, jak pro denní,

tak desetidenní období. Hodnoty pro desetidenní období přitom budou získány jak na bázi denních (modelování deseti po sobě jdoucích dnů), tak desetidenních dat.

Postup je takový, že nejprve jsou odhadnuty parametry mezních distribučních funkcí pro oba modely (BM, VG). Následně dochází ke generování náhodného vývoje pro každé aktivum (index, měnu) zvlášť na základě jednoduché simulace Monte Carlo (tj. bez aplikace technik snižujících chybu odhadu, [14]) pro 500 000 scénářů. Nasimulovaná data nám umožňují aproximovat funkci hustoty – abychom zdůraznili rozdílnost mezi BM a VG modely a to, nakolik se blíží empiricky pozorovaným hodnotám, reprodukuje se v příloze její hodnoty po logaritmicaci (denní data). Takto je jasně patrné, že VG model i empirická data mají lineární rozklad, kdežto BM model spíše kvadratický. Samozřejmě, vzhledem k nízkému počtu empirických dat nejsou příslušné funkce hladké, lineární trend však je patrný (s výjimkou japonských aktiv).

V rámci dalšího kroku je nutné nezávislé výnosy jednotlivých aktiv spojit do závislé struktury (vytvořit portfolio). K tomu nám poslouží kopula funkce s parametry korelační matice (Gaussova i Studentova) a počtem stupňů

volnosti (Studentova kopule, 4,1 pro denní data a 5,6 pro desetidenní data), které odhadneme pomocí metody CML. Nakonec určíme parametry pravděpodobnostního rozdělení portfolia.

Vzhledem k tomu, že zvažovaný horizont je jeden a deset dnů, postupujeme třemi různými směry: (a) $\Delta t = 1$ den, (b) $\Delta t = 1$ den, což je opakovaně desetkrát pro získání 10 navazujících dnů, (c) $\Delta t = 10$ dnů.

Podívejme se nejprve na základní popisné statistiky: minimální a maximální změna, střední hodnota, medián, směrodatná odchylka, šikmost a špičatost. Z empiricky získaných parametrů uvažovaného portfolia zaslouží zmínku zejména špičatost ve výši 11 (pro denní data) a 5,2 (dvoutýdenní data) a dále nepatrná šikmost

pro denní data (0,04), avšak znatelně negativní (-0,87) pro dvoutýdenní data.

Výsledky pro Brownův pohyb spojený pomocí Gaussovy kopula funkce jsou obsaženy v Tab. 4. Neboť takto pojatá kombinace modelů nemožňuje vystihnout těžké konce, ani zešikmení, slouží výsledky pouze jako podklad pro hodnocení dalších alternativ. Je tedy zřejmé, že špičatost neodpovídá (nulová dodatečná pro všechny možnosti), podobně jako šikmost. Směrodatná odchylka i střední hodnota však jsou velmi dobré. Zakomponování Studentovy kopula funkce (Tab. 5) přináší pouze mírné zlepšení celkových charakteristik špičatosti, přitom práce s desetidenními daty se zdá být vhodnější. U ostatních charakteristik nelze vysledovat žádnou významnou změnu.

Tab. 4: Brownův pohyb spojený Gaussovou kopulí

Parametr	Empirické (1d)	Empirické (10d)	BM – Gauss (1d)	BM – Gauss (10x1d)	BM – Gauss (10d)
Maximální ztráta	-7,63 %	-19,18 %	-4,89 %	-14,51 %	-16,27 %
Maximální výnos	7,92 %	11,75 %	5,11 %	14,93 %	17,07 %
Střední hodnota	-0,01 %	-0,12 %	-0,01 %	-0,10 %	-0,11 %
Medián	0,00 %	0,36 %	-0,01 %	-0,10 %	-0,11 %
Směr. odchylka	0,011	0,035	0,011	0,034	0,036
Špičatost	11,003	5,191	2,993	3,001	2,994
Šikmost	0,040	-0,872	0,001	0,007	0,004

Zdroj: vlastní výpočty

Tab. 5: Brownův pohyb spojený Studentovou kopulí

Parametr	Empirické (1d)	Empirické (10d)	BM – Student (1d)	BM – Student (10x1d)	BM – Student (10d)
Maximální ztráta	-7,63 %	-19,18 %	-7,06 %	-18,26 %	-21,34 %
Maximální výnos	7,92 %	11,75 %	7,11 %	14,86 %	22,59 %
Střední hodnota	-0,01 %	-0,12 %	-0,01 %	-0,10 %	-0,11 %
Medián	0,00 %	0,36 %	-0,01 %	-0,09 %	-0,11 %
Směr. odchylka	0,011	0,035	0,011	0,034	0,036
Špičatost	11,003	5,191	4,129	3,106	3,756
Šikmost	0,040	-0,872	0,013	-0,001	0,008

Zdroj: vlastní výpočty

Zaměříme-li se nyní na VG model, Tab. 6 a 7, je na první pohled patrná chyba v odhadu směrodatné odchylky pro desetidenní horizont na bázi denních dat. V případě využití Gaussovy kopula funkce je vylepšení v hodnotách šikmosti a špičatosti oproti Brownovu pohybu jen kosmetické, pracujeme-li na bázi denních dat. Je-li však modelování prováděno přímo pro deset dnů, jsou

výsledky vcelku kvalitní (šikmost i špičatost). Co se týče výsledků při aplikaci Studentovy kopula funkce, je zlepšení šikmosti i špičatosti jasnější – namodelovaná špičatost není dokonalá, neboť při odhadu parametrů pomocí maximalizace věrohodnosti je brán ohled na celkové rozdělení, a ne jen jeden parametr. Dochází tedy k její kompenzaci, například na úkor šikmosti.

Tab. 6: VG model spojený Gaussovou kopulí

Parametr	Empirické (1d)	Empirické (10d)	BM – Student (1d)	BM – Student (10x1d)	BM – Student (10d)
Maximální ztráta	-7,63 %	-19,18 %	-7,67 %	-14,78 %	-26,51 %
Maximální výnos	7,92 %	11,75 %	7,11 %	14,91 %	21,03 %
Střední hodnota	-0,01 %	-0,12 %	0,00 %	0,00 %	-0,11 %
Medián	0,00 %	0,36 %	0,00 %	-0,01 %	0,04 %
Směr. odchylka	0,011	0,035	0,010	0,032	0,035
Špičatost	11,003	5,191	3,941	3,098	4,167
Šikmost	0,040	-0,872	-0,006	0,005	-0,338

Zdroj: vlastní výpočty

Tab. 7: VG model spojený Studentovou kopulí

Parametr	Empirické (1d)	Empirické (10d)	BM – Student (1d)	BM – Student (10x1d)	BM – Student (10d)
Maximální ztráta	-7,63 %	-19,18 %	-12,19 %	-19,77 %	-33,43 %
Maximální výnos	7,92 %	11,75 %	13,67 %	17,12 %	32,52 %
Střední hodnota	-0,01 %	-0,12 %	0,00 %	0,00 %	-0,11 %
Medián	0,00 %	0,36 %	0,00 %	0,00 %	0,04 %
Směr. odchylka	0,011	0,035	0,010	0,032	0,035
Špičatost	11,003	5,191	7,136	3,408	5,704
Šikmost	0,040	-0,872	0,037	0,003	-0,358

Zdroj: vlastní výpočty

Hlavním cílem modelování však nebývá odhad šikmosti či špičatosti, nýbrž kvantifikace rizika. K tomu slouží zpravidla Value at Risk (VaR), což je maximální ztráta (minimální zisk), kterou může finanční instituce utrpět s danou spolehlivostí α :

$$VaR_x(\alpha) = -F_x^{-1}(1 - \alpha), \quad (13)$$

případně Conditional Value at Risk (cVaR), což je střední hodnota ztráty pro případ, že dojde k překročení VaR:

$$cVaR_x(\alpha) = E[-x \mid x < F_x^{-1}(1 - \alpha)], \quad (14)$$

přičemž x označuje výnos.

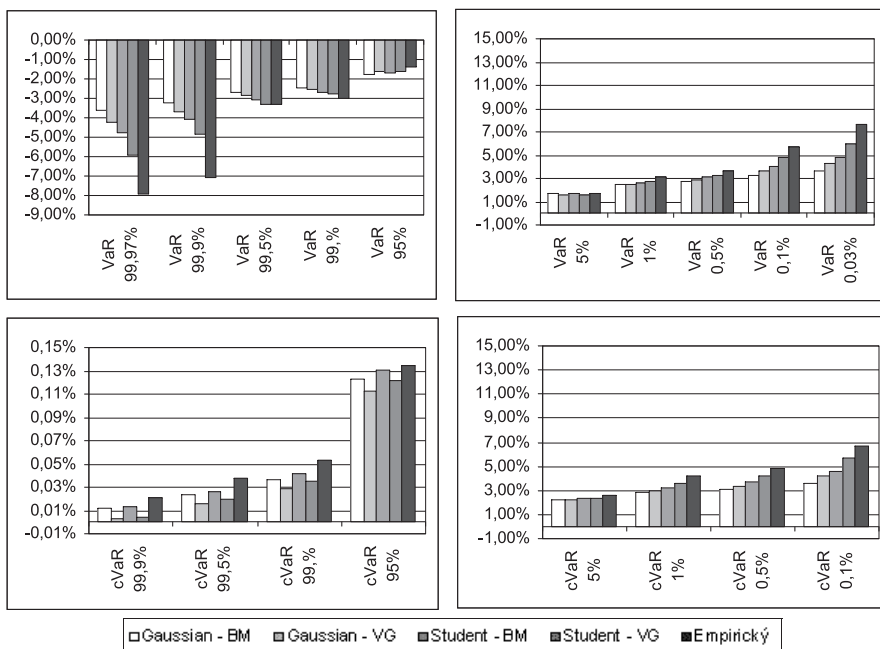
Vzhledem k tomu, že finanční instituce mnohdy drží i krátké pozice, jsou VaR a cVaR graficky zpracovány (Obr. 2) pro tyto významnosti $p = 1 - \alpha$: 5 %, 1 % (kapitálový požadavek v rámci Basel II), 0,5 % (solventnostní kapitálový požadavek v rámci Solvency II), 0,1 % a 0,03 % (rating AA v rámci koncepce ekonomického kapitálu) pro pravý konec (z pohledu ztráty) a taktéž levý konec.

Podívejme se nejprve na výsledky VaR pro horizont jednoho dne. V případě pravděpodobnosti 5 % (95 %) BM model riziko znatelně nadhodnocuje, zatímco VG model poskytuje kvalitní odhad. Jak se však dostáváme dále od středu (pravý či levý konec), empirické hodnoty se vzdalují nejen odhadu dle BM modelu, ale i VG modelu. Ten však přesto působí mnohem lépe (Studentova kopule). Jeho úspěšnost by šlo zvýšit snížením stupňů volnosti, nicméně to by mělo za následek ztrátu věrohodnosti v okolí středu pravděpodobnostního rozdělení. Zajímavým zjištěním také je, že VG model na bázi Gaussovy kopula funkce obecně poskytuje horší výsledky než BM model na bázi Studentovy kopula funkce. Uvedené výsledky jsou v zásadě potvrzeny i při výpočtu CVaR (pravý konec z pohledu ztráty). Pro názornost rovněž

uvádíme CVaR ve smyslu střední hodnoty s výjimkou pravého konce – nyní je vidět, že VG model poněkud zaostává za BM modelem. Lze usuzovat, že to je dáno šikmostí mezních rozdělení pravděpodobnosti, která není kompenzována kopula funkcí.

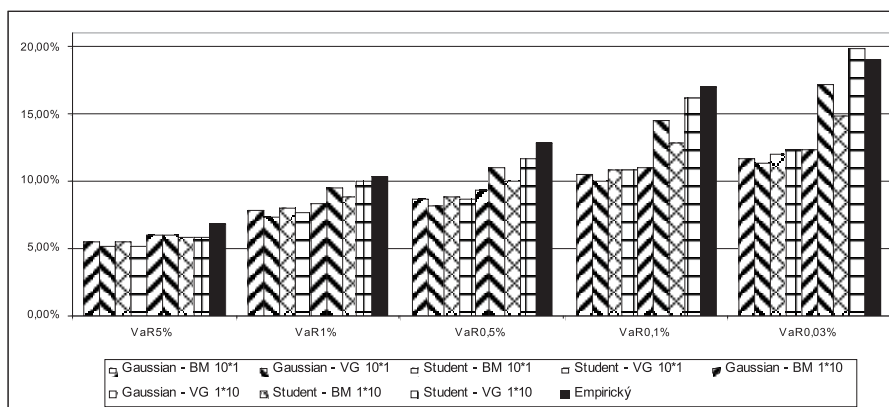
Z pohledu řízení rizik je také důležité posoudit, jak úspěšný je převod z denních dat na desetidenní. Výsledky VaR pro pravý konec pravděpodobnostního rozdělení (z pohledu ztráty) jsou znázorněny na Obr. 3. Nyní je zřejmé, že denní data jsou zcela nedostačující, přičemž VG model se ukazuje dokonce jako horší než BM. Situace však není o mnoho lepší ani při desetidenních datech a modelu BM. Pouze VG model na bázi desetidenních dat poskytuje kvalitní odhad rizika, přičemž je vhodné zvolit Studentovu kopula funkci.

Obr. 2: VaR a cVaR pro 1 den



Zdroj: vlastní výpočty

Obr. 3: VaR pro 10 dní



Zdroj: vlastní výpočty

Závěr

Odhad parametrů rizika představuje nedílnou součást řízení rizik finančních institucí. Vývoj na finančních trzích klade vysoké požadavky na modelovou stránku vzhledem k výskytu nesymetricky rozdělených extrémních událostí a také s ohledem na nelinearitu závislostí.

V tomto článku došlo k aplikaci VG modelu při odhadu rizika mezinárodně diverzifikovaného portfolia a jeho porovnání se zjednodušujícím Brownovým pohybem. K vytvoření závislostí mezi jednotlivými rizikovými faktory byly využity Gaussova a Studentova kopula funkce.

V případě denního horizontu bylo zjištěno, že i zjednodušující Brownův pohyb umožňuje dosáhnout obdobných nebo dokonce lepších výsledků než pokročilý VG model, a to tehdy pokud je spojený Studentovou kopula funkcí, kdežto VG model kopulí Gaussovou. Dále bylo zjištěno, že symetrické kopula funkce (Gaussova, Studentova) mohou snížit přínos pokročilých modelů, které umožňují vystihnout šikmost mezních rozdělení pravděpodobnosti – symetrické kopula funkce však nejsou schopny tuto charakteristiku kompenzovat při sestavení portfolia.

Dalším důležitým poznatkem je, že standardní přepočítání VaR na desetidenní nelze považovat za vhodný. Rovněž bylo poukázáno, že kvalifikace modelu na bázi denních dat (požadavek zpětného testování dle Basel II)

nemusí zcela přesně vystihnout kvalifikaci modelu pro odhad rizika v delším časovém horizontu.

Významná část tohoto příspěvku vznikla v rámci projektu Grantové agentury České republiky, GAČR: 402/08/1237 a projektu SGS VŠB-TUO SP2011/7.

(The work was supported by the European Regional Development Fund within the IT4Innovations Centre of Excellence project (CZ.1.05/1.1.00/02.0070; the second author) and the Opportunity for young researchers project (CZ.1.07/2.3.00/30.0016; the first author). The paper was also supported via SGS 2012/2, an internal research project of VSB-TU Ostrava.)

Literatura

- [1] APPLEBAUM, D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0-521-8363-2.
- [2] BARNDORFF-NIELSEN, O.E., MIKOSCH, T., RESNICK, S.I. *Lévy processes. Theory and Applications*. Boston: Birkhäuser, 2001. ISBN 0-8176-4167-X.
- [3] BERTOIN, J. *Lévy Processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN 0-521-56243-0.
- [4] BOCHNER, S. Diffusion equation and stochastic processes. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of*

America. 1949, Vol. 35, No. 7, s. 369-370. ISSN 0027-8424.

[5] CHERUBINI, G., LUCIANO, E., VECCHIATO, W. *Copula Methods in Finance*. Chichester: Wiley, 2004. ISBN 0-470-86344-7.

[6] CLARK, P. K. A subordinated stochastic process model with fixed variance for speculative prices. *Econometrica*. 1973, Vol. 41, No. 1, s. 135-155. ISSN 0012-9682.

[7] CONT, R., TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC press, 2004. ISBN 1-58488-413-4.

[8] KRESTA, A., PETROVÁ, I., TICHÝ, T. Innovations at financial markets: how to model higher moments of portfolio distribution. *Actual problems of economics*. 2010, roč. 2, č. 12, s. 59-71. ISSN 1993-6788.

[9] KYPRIANOU, A., SCHOUTENS, W., WILMOTT, P. *Exotic Options Pricing and Advanced Lévy Models*. Chichester: Wiley, 2005. ISBN 978-0-470-01684-8.

[10] NELSEN, R.B. *An Introduction to Copulas*. 2. vyd. Springer, 2006. ISBN 978-0387-28659-4.

[11] RANK, J. *Copulas. From theory to application in finance*. Risk books, 2006. ISBN 978-1-904339-45-8.

[12] SKLAR, A. Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*. 1959, roč. 8, s. 229-231.

[13] STRNAD, P. Stresové testování jako doplněk VaRu. *E+M Ekonomie a Management*. 2006, roč. 9, č. 3. ISSN 1212-3609.

[14] TICHÝ, T. Posouzení vybraných možností zefektivnění simulace Monte Carlo při opčním

oceňování. *Politická ekonomie*. 2008, roč. 56, č. 6, s. 772-794. ISSN 0032-3233.

[15] TICHÝ, T. Dependency models for a small FX rate sensitive portfolio. In STAVÁREK, D. and POLOUČEK, S. *Consequences of the European Monetary Intergration on Financial Markets*. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2008. ISBN 978-1-4438-0068-6.

[16] TICHÝ, T. Posouzení odhadu měnového rizika portfolia pomocí Lévyho modelů. *Politická ekonomie*. 2010, roč. 58, č. 4, s. 504-521. ISSN 0032-3233.

Ing. Aleš Kresta

Vysoká škola báňská
Technická univerzita Ostrava
Ekonomická fakulta
Katedra financí
ales.kresta@vsb.cz

Ing. Tomáš Tichý, Ph.D.

Vysoká škola báňská
Technická univerzita Ostrava
Ekonomická fakulta
Katedra financí
tomas.tichy@vsb.cz

Doručeno redakci: 16. 4. 2010

Recenzováno: 28. 6. 2010, 27. 10. 2010

Schváleno k publikování: 26. 9. 2012

MARKET RISK ESTIMATION VIA LÉVY MODELS AND TIME HORIZON

Aleš Kresta, Tomáš Tichý

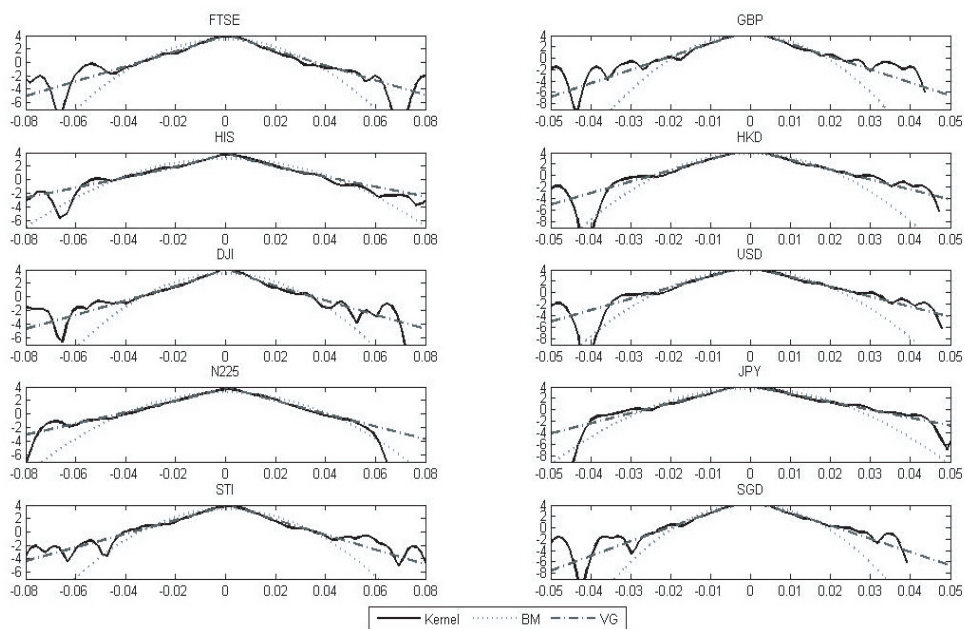
Modeling, measuring, and managing the risk is an inherent part of risk management in financial institutions. For those institutions, that are active at financial markets, the market risk plays a significant role. The market risk arises from unexpected changes of market prices of equities, interest rates, foreign currencies, and commodities. In this paper we apply a popular example of subordinated Lévy models – the variance gamma model – in order to estimate the risk of internationally diversified portfolio. The variance gamma model is applied in order to estimate the marginal distribution of particular risk factors (stock indices and currencies). Then, two examples of ordinary elliptical copula functions are used in order to create the portfolio, ie. dependent returns for particular assets. We assume Gaussian copula function and Student copula functions. While both copula functions are strictly symmetric, the latter one allows us to stress the tails of the portfolio distribution. For comparison purposes, also standard Brownian motion is assumed. In order to assess the quality of both models, basic descriptive statistics of portfolio returns distribution are evaluated and next, the risk measures Value at Risk and Conditional Value at Risk for several distinct significance levels are provided. The calculation is done for one day and two-weeks horizons. We show, that symmetrical copula functions can decrease the advantage of variance gamma model (it provides skewed distribution for the marginals, which cannot be, however, compensated by symmetric copula functions). Moreover, we show that the scaling of one day VaR into 10-days VaR, might be misleading.

Key Words: risk measure, Lévy models, copula functions, portfolio.

JEL Classification: G15, G21, G22.

Přílohy

Aproximace logaritmické funkce hustoty pro jednotlivá mezní rozdělení



Zdroj: vlastní výpočty