

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Podmíněnost řešení inverzních úloh
při transformaci parametrů
gravitačního pole Země**

Plzeň, 2015

Jan Vaník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 18. května 2015

Jan Vaník

Poděkování

Chtěl bych upřímně poděkovat vedoucímu diplomové práce, panu Doc. Ing. Markovi Brandnerovi, Ph.D. za jeho pomoc a rady při sepsání textu této diplomové práce. Děkuji také panu Ing. Michalovi Šprlákovi, Ph.D. za konzultace, během kterých mě zasvětil do tajů geodézie a za jeho pomoc při zpracování numerických experimentů. Dále chci poděkovat své matce a přítelkyni za podporu během studia.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá podmíněností inverzních úloh při transformaci parametrů gravitačního, resp. tíhového, pole Země. Nejprve jsou uvedeny základní pojmy související s tíhovým polem Země a jeho geodetickým popisem. Dále je uveden matematický aparát použitý při vyšetřování podmíněnosti inverzních úloh. Jsou představeny družicové mise GRACE a GOCE a několik typů úloh na transformaci gravimetrických a gradiometrických dat. Po sestavení matic daných přímých úloh je vyšetřována podmíněnost příslušných inverzních úloh. Na závěr je navrženo řešení inverzních úloh pomocí metody sdružených gradientů a způsob zlepšení podmíněnosti a tím i zrychlení konvergence metody sdružených gradientů.

Klíčová slova

Číslo podmíněnosti, GRACE, GOCE, poruchový potenciál, singulární číslo, soustava lineárních rovnic, tíhový potenciál, vlastní číslo

Abstract

This Diploma Thesis deals with conditionality of inverse problems for Earth's gravity, or more precisely, gravitational field parameter transformation. First, basic concepts related to Earth's gravitational field and its geodetic description are mentioned. Furthermore, the mathematical apparatus used in the investigation of conditionality of inverse problems is mentioned. Satellite missions GRACE and GOCE and several types of problems for gravimetric and gradiometric data transformation are introduced. After creation of matrices of given direct problems conditionality of corresponding inverse problems is investigated. Finally, solution of inverse problems by conjugate gradient method is suggested as well as a way of improvement of conditionality and thus acceleration of convergence of conjugate gradient method.

Keywords

Condition number, GRACE, GOCE, disturbing potential, singular value, system of linear equations, gravitational potential, eigenvalue

Obsah

Úvod	1
1 Základní pojmy	2
1.1 Přitažlivost a potenciál	2
1.2 Gravitační potenciál tělesa	3
1.3 Skutečné tíhové pole	4
1.4 Normální tíhové pole	6
1.5 Poruchové tíhové pole	6
1.5.1 Poruchový potenciál	6
1.5.2 Tíhová porucha	7
1.5.3 Tížnicová odchylka	7
2 Výpočet poruchového potenciálu	8
2.1 Přímalá úloha	8
2.2 Inverzní úloha a její podmíněnost	13
2.3 Veličiny ovlivňující číslo podmíněnosti	18
2.3.1 Krok sítě	18
2.3.2 Omezení sférické vzdálenosti	19
3 Družicová gravimetrie	21
3.1 Družicová mise GRACE	22
3.2 Družicová mise GOCE	23
4 Úloha GRACE typu 1	25
4.1 Podmíněnost inverzní úlohy	27
5 Úloha GRACE typu 2	29
5.1 Podmíněnost inverzní úlohy	33
6 Úloha GOCE	36
6.1 Podmíněnost inverzní úlohy	38

7	Gradientní metody a předpokládání	42
7.1	Gradientní metody	43
7.1.1	Metoda sdružených gradientů	43
7.1.2	Konvergence metody sdružených gradientů	45
7.2	Předpokládání	45
	Shrnutí	47
	Reference	49
	Literatura	49
	Elektronické zdroje	50
A	Izotropnost integračních jader	51
A.1	Úloha GRACE typu 1	51
A.2	Úloha GRACE typu 2	53
A.3	Úloha GOCE	56
B	Struktura příloženého CD	61

Úvod

Popis tíhového pole Země je významným úkolem současné geodézie. Jeho znalost přináší cenné informace o hustotních nehomogenitách zemské kůry. Znalost těchto informací nám umožní např. vyhledávání oblastí perspektivních pro výskyt ložisek ropy, zemního plynu a dalších strategických nerostných surovin. Popis tíhového pole je obvykle charakterizován tíhovým potenciálem. Tíhový potenciál se nedá přímo měřit, lze však měřit jeho rozdíl ve dvou bodech nebo jeho gradienty. Hodnotu tíhového potenciálu ve zvoleném bodě lze pak zjistit vyřešením příslušné úlohy. Cílem této práce je určit čísla podmíněnosti inverzních úloh ke konkrétním přímým úlohám.

V první kapitole se seznámíme se základními pojmy, které souvisí s tíhovým polem Země a jeho geodetickým popisem. Představíme skutečné, normální a poruchové tíhové pole Země a veličiny, které poruchové tíhové pole definují.

Ve druhé kapitole se zabýváme řešením Dirichletovy okrajové úlohy pro poruchový tíhový potenciál. Je zde představen matematický aparát využitý při vyšetřování podmíněnosti inverzních úloh. Na závěr kapitoly jsou uvedeny veličiny, které ovlivňují podmíněnost.

Třetí kapitola je věnována družicové gravimetrii a stručnému popisu cílů družicových misí GRACE a GOCE.

Čtvrtá až šestá kapitola mají podobnou strukturu. V každé kapitole se zabýváme konkrétní úlohou. Dané úlohy v tomto textu nazveme úloha GRACE typu 1, úloha GRACE typu 2 a úloha GOCE. Uvedeme integrální vyjádření, která aproximujeme pomocí obdélníkového pravidla a soustavy rovnic zapíšeme v maticových tvarech. Poté zkoumáme podmíněnost odpovídajících inverzních úloh a aplikujeme poznatky ze druhé kapitoly.

V poslední kapitole je nastíněn způsob řešení inverzních úloh. Zabýváme se metodou sdružených gradientů a rychlostí konvergence této iterační metody, která souvisí s podmíněností.

Kapitola 1

Základní pojmy

V první kapitole se seznámíme se základními pojmy, které souvisí s tíhovým polem Země a jeho geodetickým popisem. Představíme skutečné, normální a poruchové tíhové pole Země a veličiny, které poruchové tíhové pole definují. Důraz je kladen na vysvětlení pojmů. Odvození a další poznatky můžeme nalézt v [12].

1.1 Přitažlivost a potenciál

V roce 1687 Isaac Newton matematicky formuloval gravitační zákon. Tento zákon říká, že každé dva hmotné body (dále částice) se navzájem přitahují stejně velkými silami opačného směru. Každé dvě částice na sebe vzájemně působí gravitační silou \vec{F}_g přímo úměrnou součinu jejich hmotností m_1 a m_2 a nepřímo úměrnou druhé mocnině jejich vzdálenosti r . Velikost gravitační síly je tudíž dána předpisem

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1.1)$$

Konstantu úměrnosti G nazýváme Newtonova gravitační konstanta. Částice se vždy přitahují směrem k sobě a nikdy se neodpuzují od sebe, to jest částice o hmotnosti m_1 (dále částice m_1 apod.) přitahuje částici m_2 gravitační silou \vec{F}_g , která směřuje k částici m_2 . Přitažlivé síly \vec{F}_g a $-\vec{F}_g$ jsou stejné co do velikosti a mají opačné směry, viz [4].

Přestože se částice přitahují vzájemně, označíme jednu částici jako přitahující a druhou jako přitahovanou. Předpis

$$F_g = G \frac{m}{r^2} \quad (1.2)$$

vyjadřuje velikost síly, kterou přitahuje částice m částici o hmotnosti 1 ve vzdálenosti r .

Uvažujme kartézský souřadnicový systém xyz , v jehož počátku leží přitahující částice m a přitahovaná částice 1 se nachází v poloze $[x, y, z]$. Složky vektoru gravitační síly

\vec{F} působící na přitahovanou částici 1 jsou dány vztahy

$$X = -F \frac{x}{r} = -Gm \frac{x}{r^3}, \quad (1.3)$$

$$Y = -F \frac{y}{r} = -Gm \frac{y}{r^3}, \quad (1.4)$$

$$Z = -F \frac{z}{r} = -Gm \frac{z}{r^3}, \quad (1.5)$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Gravitačním potenciálem nazveme skalární funkci

$$V_g = \frac{Gm}{r}. \quad (1.6)$$

Složky gravitační síly (1.3) pak zapíšeme ve tvaru

$$X = \frac{\partial V_g}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V_g}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V_g}{\partial z}, \quad (1.7)$$

to jest

$$\vec{F}_g = [X, Y, Z] = \text{grad } V_g. \quad (1.8)$$

Je jednodušší pracovat s potenciálem, který je vyjádřen jediným číslem, než se silou, jejíž vektor má tři složky.

1.2 Gravitační potenciál tělesa

Uvažujme soustavu částic m_1, m_2, \dots, m_n . Gravitační potenciál této soustavy získáme jako součet gravitačních potenciálů jednotlivých částic

$$V_g = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}, \quad (1.9)$$

kde r_i jsou vzdálenosti částic m_i od přitahované částice.

Hmotná reálná tělesa jsou spojitě soustavy nekonečně mnoha částic. Diskrétní formule přechází ve spojitou

$$n \rightarrow \infty, \quad \sum_i \rightarrow \iiint_{\Omega}, \quad m_i \rightarrow dm. \quad (1.10)$$

Těleso Ω se skládá z hmotných elementů

$$dm(x, y, z) = \rho(x, y, z) dx dy dz = \rho(\vec{r}) dv, \quad (1.11)$$

kde ρ je hustota elementu a dv je příslušný objemový element. Integrací přes všechny částice, ze kterých se skládá těleso Ω , dostaneme

$$V_g = G \iiint_{\Omega} \frac{dm}{r} = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{r} dv. \quad (1.12)$$

Gravitační potenciál V_g splňuje Poissonovu rovnici

$$\Delta V_g = \frac{\partial^2 V_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_g}{\partial z^2} = -4\pi G\rho, \quad (1.13)$$

viz [12]. Symbolem Δ značíme Laplaceův operátor

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.14)$$

Vně přitahujícího tělesa je hustota ρ nulová, rovnice (1.13) potom přechází na tvar

$$\Delta V_g = 0, \quad (1.15)$$

který se nazývá Laplaceova rovnice. Řešení Laplaceovy rovnice se nazývají harmonické funkce. Gravitační potenciál je tudíž harmonická funkce vně přitahujícího tělesa, ale ne uvnitř.

1.3 Skutečné tíhové pole

Uvažujme kartézský souřadnicový systém xyz , v jehož počátku je umístěno těžiště Země a rotační osa splývá s osou z . Takový souřadnicový systém budeme nazývat kartézský geocentrický souřadnicový systém. Země je hmotné těleso, vytváří tudíž gravitační pole. Na tělesa tak působí gravitační síla směrem do těžiště Země. V důsledku rotace Země kolem své osy je však navíc vyvolána setrvačná odstředivá síla \vec{F}_c , která působí na tělesa v kolmém směru od osy rotace Země. Velikost této síly vypočteme předpisem

$$F_c = p\omega^2 m, \quad (1.16)$$

kde $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ je délka kolmice spuštěné z těžiště daného tělesa na osu rotace Země, ω je úhlová rychlost otáčení Země a m je hmotnost tělesa. Snadno nahlédneme, že velikost odstředivé síly se mění s polohou. Její směr je shodný se směrem vektoru $\vec{p} = (x, y, 0)$. Pro jednoduchost dále uvažujeme místo tělesa částici o hmotnosti $m = 1$, potom platí

$$\vec{F}_c = p\omega^2 = (x\omega^2, y\omega^2, 0). \quad (1.17)$$

Definujme potenciál odstředivé síly

$$V_c = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \omega^2, \quad (1.18)$$

takový, že

$$\vec{F}_c = \text{grad } V_c = \left(\frac{\partial V_c}{\partial x}, \frac{\partial V_c}{\partial y}, \frac{\partial V_c}{\partial z} \right). \quad (1.19)$$

Vektorovým součtem gravitační a odstředivé síly je tíhová síla \vec{F}

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_c. \quad (1.20)$$

Tíhový potenciál dostaneme součtem gravitačního potenciálu V_g a potenciálu odstředivé síly V_c

$$W = W(\vec{r}) = W(x, y, z) = V_g + V_c = G \iiint_v \frac{\rho}{r} dv + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \omega^2. \quad (1.21)$$

V definici tíhového potenciálu vystupuje neznámá hodnota hustoty zemských hmot ρ . Tíhový potenciál Země nelze podle tohoto vztahu vypočítat, protože hustotu zemských hmot ρ nelze určit přesně.

Z druhého Newtonova pohybového zákona víme, že sílu působící na těleso lze vyjádřit jako součin hmotnosti tělesa m a zrychlení, které tělesu síla udílí

$$\vec{F} = m\vec{g}. \quad (1.22)$$

Zrychlení \vec{g} nazýváme tíhové zrychlení. Je to výsledná síla (součet gravitační a odstředivé síly) působící na částici s hmotností $m = 1$. Pro vektor tíhového zrychlení pak platí

$$\vec{g} = \text{grad } W. \quad (1.23)$$

Velikost tíhového zrychlení g můžeme měřit. Na základě této znalosti dokážeme určit tíhový potenciál W .

Z definice potenciálu odstředivé síly (1.18) odvodíme vztah

$$\Delta V_c = \frac{\partial^2 V_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_c}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad (1.24)$$

Tato rovnost spolu s Poissonovou rovnicí (1.13) dá dohromady zobecněnou Poissonovu rovnici pro tíhový potenciál W

$$\Delta W(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}) + 2\omega^2. \quad (1.25)$$

Pokud uvažujeme tíhový potenciál vně Země, zanedbáme hustotu hmot ve vnějším okolí a rovnice (1.25) se zjednoduší na tvar

$$\Delta W = 2\omega^2. \quad (1.26)$$

Pro body, které nerotují se Zemí, dostaneme Laplaceovu rovnici

$$\Delta W = 0. \quad (1.27)$$

1.4 Normální tíhové pole

V prosinci 1979 byl definován referenční elipsoid (Geodetický referenční systém 1980), jehož tíhové pole se nazývá normální tíhové pole, viz [12]. Tento elipsoid je určen čtyřmi parametry uvedenými v tabulce 1.1. Referenční elipsoid má stejnou hmotnost jako Země a rotuje kolem své vedlejší osy stejnou úhlovou rychlostí jako Země.

Parametr	Název
GM	geocentrická gravitační konstanta
a	hlavní poloosa elipsoidu
$J_{2,0}$	dynamický faktor určující zploštění Země
ω	úhlová rychlost rotace Země

Tabulka 1.1: Parametry určující GRS 1980

Normální tíhové pole je v každém bodě popsáno vektorem normálního tíhového zrychlení $\vec{\gamma}$. Podobně jako skutečné tíhové pole můžeme normální tíhové pole popsat pomocí gradientu skalárního pole

$$\vec{\gamma} = \text{grad } U, \quad (1.28)$$

kde U je normální tíhový potenciál. Obdobně jako tíhový potenciál W se normální tíhový potenciál rozděluje na část gravitační U_g a odstředivou U_c . Rovněž splňuje Poissonovu rovnici (1.25)

$$\Delta U(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}) + 2\omega^2. \quad (1.29)$$

Za předpokladu, že určujeme normální tíhový potenciál vně elipsoidu v bodě, který nerotuje s elipsoidem, dostaneme Laplaceovu rovnici

$$\Delta U = 0. \quad (1.30)$$

1.5 Poruchové tíhové pole

Pomocí normálního tíhového pole aproximujeme skutečné tíhové pole Země. Poruchové tíhové pole je rozdíl který vzniká při této aproximaci. V následující sekci představíme veličiny, které definují poruchové tíhové pole.

1.5.1 Poruchový potenciál

Rozdíl v bodě \vec{r} mezi potenciály skutečného tíhového pole W a normálního tíhového pole U nazýváme poruchový potenciál T . Platí rovnost

$$T(\vec{r}) = W(\vec{r}) - U(\vec{r}). \quad (1.31)$$

Rozdíl rovnic (1.25) a (1.29) dostaneme

$$\Delta W(\vec{r}) - \Delta U(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}) + 2\omega^2 - \left(-4\pi G\rho(\vec{r}) + 2\omega^2\right) = 0. \quad (1.32)$$

Poruchový potenciál T tudíž splňuje Laplaceovu rovnici

$$\Delta T = 0 \quad (1.33)$$

nejen v bodech vně Země, které nerotují, ale i v bodech spojených se zemským povrchem a v bodech, které rotují vně Země, resp. referenčního elipsoidu, s úhlovou rychlostí ω .

1.5.2 Tíhová porucha

Skutečné tíhové pole je popsáno vektorem tíhového zrychlení \vec{g} , normální tíhové pole vektorem normálního tíhového zrychlení $\vec{\gamma}$. Pro poruchové tíhové pole ekvivalentně existuje vektorová veličina $\delta\vec{g}$, kterou nazýváme tíhová porucha. Vektor tíhové poruchy je definován předpisem

$$\delta\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}) - \vec{\gamma}(\vec{r}). \quad (1.34)$$

1.5.3 Tížnicová odchylka

Tížnicovou odchylku Θ definujeme jako úhlový rozdíl mezi směry tíhového zrychlení \vec{g} a normálního tíhového zrychlení $\vec{\gamma}$

$$\Theta = \angle(\vec{g}(\vec{r}), \vec{\gamma}(\vec{r})). \quad (1.35)$$

Skládá se ze dvou složek, ve směru poledníků ζ a ve směru rovnoběžek η

$$\zeta = \Phi - B, \quad (1.36)$$

$$\eta = (\Lambda - L) \cos B, \quad (1.37)$$

kde Φ a Λ jsou astronomické souřadnice, B a L jsou elipsoidické souřadnice, viz [12].

Kapitola 2

Výpočet poruchového potenciálu

V následující kapitole řešíme Dirichletovu okrajovou úlohu pro poruchový potenciál a zabýváme se číslem podmíněnosti pro odpovídající inverzní úlohu.

2.1 Přímá úloha

Uvažujme homogenní Dirichletovu okrajovou úlohu

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T(r, \Omega) = 0, \quad r > R, \\ T(R, \Omega) = f(R, \Omega), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, \Omega) = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$(r, \Omega) = (r, \varphi, \lambda)$ jsou sférické geocentrické souřadnice, přičemž r označuje délku průvodiče, $\varphi \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$ sférickou šířku a $\lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$ sférickou délku. R označuje poloměr sféry, která obepíná Zemi a dotýká se jí v jejím nejvyšším bodě. Pro transformaci sférických geocentrických souřadnic z kartézských geocentrických souřadnic platí vztahy

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi &= \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arcsin \frac{z}{r}, \\ \lambda &= \arctg2(y, x) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & (x > 0) \wedge (y > 0), \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & (x < 0), \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & (x > 0) \wedge (y < 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pokud chceme provést inverzní transformaci, to jest sférické geocentrické souřadnice transformovat na kartézské geocentrické souřadnice, použijeme vztahy

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\z &= r \sin \varphi.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Řešení úlohy (2.1) je ve tvaru tzv. Abelova-Poissonova integrálu ve sférické aproximaci

$$T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') K(t, u) d\Omega'.\tag{2.4}$$

Bod daný sférickými geocentrickými souřadnicemi (r, Ω) nazýváme výpočetním bodem. Sférickými geocentrickými souřadnicemi (R, Ω') jsou určeny integrační elementy. Odvození vztahu (2.4) nalezneme níže.

Poruchový potenciál T splňuje Laplaceovu rovnici (1.33), je to tudíž harmonická funkce. Poruchový potenciál T v bodě určeném sférickými souřadnicemi (r, Ω) , který splňuje okrajovou úlohu (2.1), se obvykle v literatuře uvádí ve tvaru rozvoje sférických harmonických funkcí, viz [12],

$$T(r, \Omega) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{T}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\Omega).\tag{2.5}$$

GM označuje geocentrickou gravitační konstantu, \bar{T}_{nm} jsou geopotenciální koeficienty a \bar{Y}_{nm} jsou sférické harmonické funkce stupně n a řádu m .

Abychom uměli poruchový potenciál T určit přesně, museli bychom znát nekonečný počet geopotenciálních koeficientů. Geopotenciální koeficienty určujeme na základě znalosti okrajové podmínky $T(R, \Omega) = f(R, \Omega)$, kterou získáme měřením¹. V praxi probíhá měření v diskrétních bodech. Počet geopotenciálních koeficientů musí být tudíž konečný. Soubory koeficientů lze najít na webových stránkách [13].

Sférické harmonické funkce jsou dány předpisem

$$\bar{Y}_{nm}(\Omega) = \begin{cases} \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \cos(m\lambda), & m \geq 0, \\ \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \sin(|m|\lambda), & m < 0, \end{cases}\tag{2.6}$$

¹Poruchový potenciál dostaneme odečtením normálního tíhového potenciálu, který je určen parametry uvedenými v tabulce 1.1, od skutečného tíhového potenciálu. V předchozím textu však bylo uvedeno, že tíhový potenciál nelze přímo měřit. Uvažujme však, že okrajovou podmínku známe. Úloha (2.1) slouží jako demonstrační úloha, na které ukážeme postup vyšetřování podmíněnosti. V dalších kapitolách okrajové podmínky již získat můžeme, protože se bude jednat o rozdíl poruchových potenciálů ve dvou bodech nebo jeho gradienty, přičemž rozdíl tíhových potenciálů ve dvou bodech a jeho gradienty pomocí družicových měření získat lze.

kde \bar{P}_{nm} jsou normované přidružené Legendreovy funkce 1. druhu, viz [12]. \bar{Y}_{nm} tvoří ortonormální bázi na sféře, platí tak

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \bar{Y}_{nm}(\Omega') \bar{Y}_{kl}(\Omega') d\Omega' = \delta_{nk} \delta_{ml}, \quad (2.7)$$

kde symbol δ je Kroneckerovo delta.

Za předpokladu $R = r$, resp. $\Omega = \Omega'$, upravíme vztah (2.5)

$$T(R, \Omega') = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{T}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\Omega'). \quad (2.8)$$

Provedením další úpravy získáme

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \bar{Y}_{kl}(\Omega') d\Omega' = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{T}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\Omega') \bar{Y}_{kl}(\Omega') d\Omega'. \quad (2.9)$$

Za předpokladu stejnoměrné konvergence řady zaměníme pořadí sumace a integrování

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \bar{Y}_{kl}(\Omega') d\Omega' = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{T}_{nm} \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \bar{Y}_{nm}(\Omega') \bar{Y}_{kl}(\Omega') d\Omega'}_{\delta_{nk} \delta_{ml}}. \quad (2.10)$$

Ze vztahu (2.7) plyne, že výraz na pravé straně je nenulový právě tehdy, když $n = k$ a $m = l$. Nově získaný vztah

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \bar{Y}_{kl}(\Omega') d\Omega' = \frac{GM}{R} \bar{T}_{kl}, \quad (2.11)$$

se nazývá reprodukční vlastnost. Na základě reprodukční vlastnosti vyjádříme vztah pro výpočet geopotenciálních koeficientů

$$\bar{T}_{nm} = \frac{R}{4\pi GM} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \bar{Y}_{nm}(\Omega') d\Omega'. \quad (2.12)$$

Tento předpis dosadíme do rozvoje (2.5)

$$T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \bar{Y}_{nm}(\Omega') \bar{Y}_{nm}(\Omega) d\Omega', \quad (2.13)$$

a za předpokladu stejnoměrné konvergence řady zaměníme pořadí sumace a integrování

$$T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{Y}_{nm}(\Omega') \bar{Y}_{nm}(\Omega) d\Omega'. \quad (2.14)$$

Před dalším odvozením vyslovíme několik definic a vět.

Definice 2.1 (Sférický trojúhelník). Uvažujme tři body A , B a C na sféře. Spojením každé dvojice těchto bodů nejkratšími spojnicemi na sféře dostaneme sférický trojúhelník ABC . Jeho strany jsou tudíž oblouky hlavních kružnic $a = BC$, $b = AC$ a $c = AB$. Vnitřní úhly při vrcholech sférického trojúhelníka A , B a C budeme značit standardně α , β a γ .

Věta 2.1 (Kosinová věta ve sférické trigonometrii). Platí

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma, \quad (2.15)$$

kde a , b a c jsou strany sférického trojúhelníka, γ je vnitřní úhel trojúhelníka, který svírají strany a a b . Analogicky vyjádříme vztahy pro $\cos a$ a $\cos b$.

Důkaz. Důkaz plyne z kosinové věty v rovinné trigonometrii. \square

Věta 2.2 (Adiční teorém). Platí

$$P_{n,0}(\cos \psi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\Omega) \bar{Y}_{nm}(\Omega'), \quad (2.16)$$

kde $P_{n,0}$ je Legendreův polynom stupně n a ψ je sférická vzdálenost výpočetního bodu a integračního elementu.

Důkaz. Důkaz můžeme nalézt v [12]. \square

Věta 2.3. Platí

$$u = u(\Omega, \Omega') = \cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda'). \quad (2.17)$$

Důkaz. Důkaz plyne z kosinové věty ve sférické trigonometrii. Dosadíme-li za bod C severní pól, bodu A přiřadíme sférické geocentrické souřadnice (φ, λ) , bodu B (φ', λ') a stranu c označíme symbolem ψ , potom

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi') + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \varphi') \cos(\lambda - \lambda') = \\ &= \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda'). \end{aligned}$$

\square

Vztah (2.14) upravíme použitím adičního teorému (2.16)

$$T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (2n+1) P_{n,0}(\cos \psi) d\Omega'. \quad (2.18)$$

Suma v této rovnosti se nazývá jádro ve spektrálním tvaru. Při použití substituce

$$t = t(r, R) = \frac{R}{r} \quad (2.19)$$

kdy t nazveme útlumový faktor, píšeme

$$K(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} (2n+1) P_{n,0}(u). \quad (2.20)$$

Při dosazení (2.20) do rovnosti (2.18) získáme vztah (2.4), neboli vyjádření poruchového potenciálu T Abelovým-Poissonovým integrálem ve sférické aproximaci.

Je vhodnější provádět výpočty s uzavřeným tvarem jádra

$$K(t, u) = \frac{t(1-t^2)}{g^3}, \quad (2.21)$$

kde g je normovaná euklidovská vzdálenost mezi výpočetním bodem a integračním elementem vypočtená na základě kosinové věty

$$g = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - 2Rr \cos \psi + R^2} = \sqrt{1 - 2tu + t^2}. \quad (2.22)$$

Příslušné odvození uzavřeného tvaru jádra můžeme najít v [12].

Pro účely numerického výpočtu převedeme rovnici (2.4) na diskretní tvar. Použitím obdélníkového pravidla, viz [5], dostaneme

$$T(r, \Omega) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{\pi \Delta \varphi'}{180} \frac{\pi \Delta \lambda'}{180} \sum_{j=1}^m T(R, \Omega'_j) K(t, u_j) \cos \varphi'_j. \quad (2.23)$$

Rovnítkem \approx vyjadřujeme, že se aproximací dopouštíme jisté chyby. Dále ho však budeme zaměňovat rovnítkem $=$. Uvažujeme-li n výpočetních bodů, potom dostaneme soustavu n rovnic

$$T(r_i, \Omega_i) = \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2} \sum_{j=1}^m T(R, \Omega'_j) K(t_i, u_{i,j}) \cos \varphi'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.24)$$

Soustavu rovnic (2.24) zapíšeme v maticovém tvaru

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (2.25)$$

kde

$$\mathbf{b} = [T(r_1, \Omega_1), T(r_2, \Omega_2), \dots, T(r_n, \Omega_n)]^T,$$

$$\mathbf{A} = \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2} \begin{bmatrix} K(t_1, u_{1,1}) \cos \varphi'_1 & K(t_1, u_{1,2}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K(t_1, u_{1,m}) \cos \varphi'_m \\ K(t_2, u_{2,1}) \cos \varphi'_1 & K(t_2, u_{2,2}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K(t_2, u_{2,m}) \cos \varphi'_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, u_{n,1}) \cos \varphi'_1 & K(t_n, u_{n,2}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K(t_n, u_{n,m}) \cos \varphi'_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [T(R, \Omega'_1), T(R, \Omega'_2), \dots, T(R, \Omega'_m)]^T. \quad (2.26)$$

Vektor \mathbf{b} reprezentuje poruchový potenciál ve výpočetních bodech, vektor \mathbf{x} poruchový potenciál v diskrétních bodech daný okrajovou podmínkou $T(R, \Omega) = f(R, \Omega)$. Prvky vektoru \mathbf{x} , $x_j = T(R, \Omega'_j) = T(R, \varphi'_j, \lambda'_j)$, jsou seřazeny podle lexikografického uspořádání

$$[\varphi'_j, \lambda'_j] \leq_{\text{Le}} [\varphi'_{j+1}, \lambda'_{j+1}] \Leftrightarrow (\varphi'_j < \varphi'_{j+1}) \vee (\varphi'_j = \varphi'_{j+1} \wedge \lambda'_j < \lambda'_{j+1}). \quad (2.27)$$

Maticový tvar (2.25) bude východiskem řešení úloh v dalších kapitolách.

2.2 Inverzní úloha a její podmíněnost

V této sekci popíšeme výpočet čísla podmíněnosti inverzní úlohy, která odpovídá přímé úloze (2.25). Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ není obecně čtvercová. Počet řádků n odpovídá počtu bodů, ve kterých známe okrajovou podmínku $T(R, \Omega) = f(R, \Omega)$ na základě družicových měření, zatímco počet sloupců m odpovídá počtu výpočetních bodů. Výpočetní body tvoří pravidelnou síť, kdežto body, ve kterých probíhá měření, jsou nepravidelné a odvíjí se od pohybu družice a časových okamžiků, ve kterých měření probíhá. Aby mělo smysl zabývat se inverzní úlohou, budeme dále předpokládat, že matice \mathbf{A} je regulární.

Vynásobením přímé úlohy (2.25) maticí \mathbf{A}^T zleva

$$\underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{b}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}_{\mathbf{B}} \mathbf{x}, \quad (2.28)$$

dostaneme na pravé straně čtvercovou matici $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Vynásobíme-li (2.28) zleva inverzní maticí \mathbf{B}^{-1} , dostaneme inverzní úlohu

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{c}, \quad (2.29)$$

kterou při původním značení zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (2.30)$$

V následujícím textu zavedeme číslo podmíněnosti.

Definice 2.2 (Číslo podmíněnosti). Budeme říkat, že úloha je dobře podmíněná, pokud malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení. Podíl relativní chyby výstupu ku relativní změně vstupu nazveme číslem podmíněnosti úlohy a budeme ho značit κ . Uvažujme úlohu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Nechť vstupní chyby prvků regulární čtvercové matice \mathbf{A} tvoří matici, kterou označíme $\Delta\mathbf{A}$ a vstupní chyby složek vektoru \mathbf{b} tvoří vektor, který označíme $\Delta\mathbf{b}$. Je-li \mathbf{x}_p přesné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, potom přesné řešení soustavy $(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ označíme $\mathbf{x}_p + \Delta\mathbf{x}$, to jest platí

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}_p + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}. \quad (2.31)$$

Uvažujme situaci, kdy matice \mathbf{A} je dána přesně, to jest $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Z rovnosti (2.31) pak plyne

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}, \quad (2.32)$$

to jest

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}. \quad (2.33)$$

Odtud dostaneme odhad chyby řešení

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|, \quad (2.34)$$

kde odpovídající si normy vektorů a matice jsou libovolné. Protože $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}_p$, potom $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}_p\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}_p\|$, to jest

$$\|\mathbf{x}_p\| \geq \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|}. \quad (2.35)$$

Pro relativní chyby proto dostáváme

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_p\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (2.36)$$

Číslo

$$\kappa = \kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|, \quad (2.37)$$

vyjadřuje míru citlivosti relativní chyby řešení na relativní chybě vstupních dat a nazývá se číslo podmíněnosti matice \mathbf{A} , resp. uvažované úlohy.

V ostatních situacích dojdeme rovněž ke stejnému vyjádření čísla podmíněnosti danému vztahem (2.37), viz [7].

Poznámka 2.1. Z definice čísla podmíněnosti (2.37) plyne

$$\kappa(\mathbf{A}) = \kappa(\mathbf{A}^{-1}). \quad (2.38)$$

Nyní se vraťme k vyšetřování podmíněnosti úlohy (2.30). Číslo podmíněnosti této úlohy hledáme jako číslo podmíněnosti $\kappa(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$. V následujícím textu nejprve zavedeme pojmy vlastních čísel a vlastních vektorů matice.

Uvažujme regulární matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n > m$. Označme λ_i vlastní čísla a \mathbf{v}_i příslušné ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad \|\mathbf{v}_i\| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.39)$$

Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní, to jest $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Důkaz je zřejmý

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 \geq 0. \quad (2.40)$$

Pozitivně semidefinitní matice je pozitivně definitní právě tehdy, když je regulární, viz [2]. Vlastní čísla λ_i jsou tudíž kladná. Bez újmy na obecnosti předpokládejme uspořádání

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0. \quad (2.41)$$

Označíme-li $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]$ matici, jejíž sloupce jsou ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, potom platí

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m). \quad (2.42)$$

Dále zavedeme pojem singulárního rozkladu matice a pomocí něho vyšetříme podmíněnost úlohy (2.30).

Definice 2.3 (Singulární rozklad). Regulární matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n > m$, lze vyjádřit ve tvaru tzv. singulárního rozkladu

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad (2.43)$$

kde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ jsou unitární matice, to jest

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}. \quad (2.44)$$

\mathbf{I} je jednotková matice. Pro matici \mathbf{V} platí analogické vztahy. Dále píšeme

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \mathbf{\Sigma}_m = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (2.45)$$

Čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0$ nazýváme singulárními čísly matice \mathbf{A} . Sloupce \mathbf{u}_i matice \mathbf{U} nazveme levými singulárními vektory, sloupce \mathbf{v}_i matice \mathbf{V} pravými singulárními vektory

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} = \sigma_i \mathbf{v}_i^T, \quad \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.46)$$

Matice \mathbf{U} a \mathbf{V} nejsou určeny jednoznačně, zatímco singulární čísla jsou určena jednoznačně.

Z definice singulárního rozkladu (2.43) plyne

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{V}^T. \quad (2.47)$$

Odtud dostaneme

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}^2 = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2). \quad (2.48)$$

Porovnáním vztahů (2.42) a (2.48) vyjádříme singulární čísla matice \mathbf{A} jako druhé odmocniny příslušných vlastních čísel matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.49)$$

Nyní se vrátíme k vyjádření vlastních čísel a vlastních vektorů (2.39). Množina vlastních čísel matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ se nazývá spektrum matice a označuje se $\text{sp}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$. Spektrální poloměr matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je nezáporné reálné číslo

$$\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \max \{ |\lambda|, \lambda \in \text{sp}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \}. \quad (2.50)$$

Z uspořádání vlastních čísel matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (2.41) a vyjádření singulárních čísel (2.49) plyne

$$\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \lambda_1 = \sigma_1^2. \quad (2.51)$$

Dále hledáme spektrální poloměr matice $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$. Vynásobíme-li vztah (2.39) maticí $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ zleva

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad (2.52)$$

dostaneme úlohu na vlastní čísla matice $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$

$$\lambda_i^{-1} \mathbf{v}_i = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.53)$$

Inverzní matice $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ má stejné vlastní vektory jako matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, její vlastní čísla jsou převrácené hodnoty vlastních čísel matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Z definice (2.50), uspořádání vlastních čísel (2.41) a vyjádření singulárních čísel (2.49) plyne

$$\rho\left((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}\right) = \lambda_m^{-1} = \sigma_m^{-2}. \quad (2.54)$$

Dále definujeme spektrální normu čtvercové regulární matice² $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, viz [11],

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|. \quad (2.55)$$

Z definice spektrální normy (2.55), vztahů (2.51) a (2.54) plyne

$$\|\mathbf{A}\| = \sigma_1, \quad \|\mathbf{A}^{-1}\| = \sigma_m^{-1}. \quad (2.56)$$

Nyní se vraťme k vyšetřování podmíněnosti úlohy (2.30). Z definice čísla podmíněnosti (2.37) vyplývá, že číslo podmíněnosti úlohy (2.30) hledáme ve tvaru

$$\kappa = \kappa(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \left\| \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right\| \left\| (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \right\|, \quad (2.57)$$

²Pro čtenáře může být matoucí použití stejného označení matice jako v úloze (2.30). Hovoříme však o obecném případě.

K vyšetření podmíněnosti úlohy (2.30) zbývá vyjádřit spektrální normy matic $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ a $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$. Z definice spektrální normy (2.55) dostaneme

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}\|. \quad (2.58)$$

Pro libovolný ortonormální vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}\|^2 &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^T \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{V} \Sigma \mathbf{U}^T)^T (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{V} \Sigma \mathbf{U}^T)^T \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{U} \Sigma^2 \mathbf{U}^T)^T (\mathbf{U} \Sigma^2 \mathbf{U}^T)^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \Sigma^2 \mathbf{U} \mathbf{U}^T \Sigma^2 \mathbf{U} \mathbf{x} = \\ &= \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{U}^T}_{\mathbf{y}^T} \Sigma^4 \underbrace{\mathbf{U} \mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^T \Sigma^4 \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \sigma_i^4 y_i^2. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Odtud

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}\|^2 \leq \sigma_1^4 \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \sigma_1^4 \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{x} = \sigma_1^4 \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sigma_1^4 \|\mathbf{x}\|^2 = \sigma_1^4. \quad (2.60)$$

Dále ukážeme, že ve vztahu (2.60) můžeme psát místo nerovnosti rovnost. Vyjdeme z úlohy na vlastní čísla (2.39)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \sigma_1^2 \mathbf{v}_1. \quad (2.61)$$

Odtud získáme

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_1\| = \|\sigma_1^2 \mathbf{v}_1\| = |\sigma_1^2| \|\mathbf{v}_1\| = \sigma_1^2. \quad (2.62)$$

Dosadíme-li tento výsledek do vztahu (2.58), obdržíme

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\| = \sigma_1^2. \quad (2.63)$$

Vyjádření spektrální normy inverzní matice $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ můžeme odvodit analogickým postupem. Jednodušší je však využít faktu, že porovnáním rovností (2.63) a prvního výrazu z (2.56) dostaneme

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|^2 = \sigma_1^2. \quad (2.64)$$

Z (2.53) plyne, že i matice $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ je pozitivně definitní. Při využití (2.64) a druhého výrazu z (2.56) můžeme tedy psát

$$\left\| (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \right\| = \left\| \mathbf{A}^{-1} \right\|^2 = \sigma_m^{-2}. \quad (2.65)$$

Dosazením (2.63) a (2.65) do (2.57) získáme vyjádření čísla podmíněnosti matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, resp. úlohy (2.30)

$$\kappa = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_m^2}. \quad (2.66)$$

2.3 Veličiny ovlivňující číslo podmíněnosti

V následující sekci prozkoumáme, jakým způsobem můžeme zlepšit podmíněnost úlohy (2.30), to jest snížit číslo podmíněnosti matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

2.3.1 Krok sítě

V předchozím textu jsme došli k závěru, že číslo podmíněnosti úlohy (2.30) závisí na singulárních číslech matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, viz (2.66). Ze vztahu (2.49) plyne, že číslo podmíněnosti úlohy (2.30) závisí rovněž na vlastních číslech matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

$$\kappa = \frac{\lambda_1}{\lambda_m}. \quad (2.67)$$

Prvky matice \mathbf{A} jsou ve tvaru

$$a_{i,j} = \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2} K(t_i, u_{i,j}) \cos \varphi'_j, \quad (2.68)$$

Z předpisu (2.17) dostaneme

$$u_{i,j} = \cos \psi_{i,j} = \sin \varphi_i \sin \varphi'_j + \cos \varphi_i \cos \varphi'_j \cos (\lambda_i - \lambda'_j). \quad (2.69)$$

Prvky matice \mathbf{A} jsou tudíž v jednotlivých řádcích seřazeny podle lexikografického uspořádání (2.27).

Obdélníková oblast $\Omega' = (\varphi', \lambda')$ je rozdělena na síť, kterou tvoří $n \times m$ elementů $\Delta \varphi' \times \Delta \lambda'$. Budeme předpokládat $\Delta \varphi' = \Delta \lambda' = h$, přičemž veličinu h nazveme krokem sítě. Dále prozkoumáme závislost čísla podmíněnosti úlohy (2.30) na kroku sítě h .

Označme $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times (m-1)}$ matici, která vznikne odebráním libovolného sloupce matice \mathbf{A} . Prvky matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ jsou ve tvaru

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{k,i} a_{k,j}, \quad (2.70)$$

a prvky matice $\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{A}}$

$$\tilde{\alpha}_{i,j} = \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{a}_{k,i} \tilde{a}_{k,j}. \quad (2.71)$$

Matici $\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{A}}$ můžeme tudíž vytvořit i odebráním v pořadí stejného sloupce a odpovídajícího řádku matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ jako v prvním případě. Mezi vlastními čísly těchto matic platí vztah nazývaný Cauchyova vlastnost prokládání, který bez důkazu uvedeme další větou.

Věta 2.4 (Cauchyova vlastnost prokládání). Nechť čtvercová matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je symetrická a má vlastní čísla $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$. $\tilde{\mathbf{A}}$ je submatice řádu $(m-1)$, která vznikne z matice \mathbf{A} vynecháním určitého sloupce a příslušného řádku, s vlastními čísly $\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{m-1}$. Pak platí

$$\lambda_i \geq \tilde{\lambda}_i \geq \lambda_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (2.72)$$

to jest vlastní čísla se prokládají.

Pokud vytváříme hrubší síť, to jest síť s větším krokem h , vzniká matice $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{m}}$, která má menší rozměry než matice \mathbf{A} , $\tilde{n} < n$ a $\tilde{m} < m$. Matici $\tilde{\mathbf{A}}$ můžeme získat odebráním sloupců matice \mathbf{A} . Z Cauchyovy vlastnosti prokládání (2.72) dostaneme

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1, \quad \tilde{\lambda}_{\tilde{m}} \geq \lambda_m. \quad (2.73)$$

Číslo podmíněnosti matice $\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{A}}$ je tudíž menší než číslo podmíněnosti matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

$$\kappa(\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{A}}) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_{\tilde{m}}} \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_m} = \kappa(\mathbf{A}^T \mathbf{A}). \quad (2.74)$$

Číslo podmíněnosti úlohy (2.30) tak s rostoucím krokem sítě h klesá.

2.3.2 Omezení sférické vzdálenosti

Řešit přímou úlohu (2.25) znamená numericky integrovat přes oblast Ω' . Tuto oblast můžeme rozdělit do dvou podoblastí, tzv. blízké a vzdálené zóny. Hranici zón vymezíme volbou omezení sférické vzdálenosti ψ_0 . Pro blízkou zónu požadujeme $\psi \leq \psi_0$, pro vzdálenou zónu $\psi > \psi_0$. Prvky matice \mathbf{A} jsou ve tvaru (2.68), závisí tudíž na hodnotě $u_{i,j}$, která je dána předpisem (2.69). Prvkům matice \mathbf{A} , které náleží vzdálené zóně, to jest $u_{i,j} < \cos \psi_0$, přiřazujeme nulovou hodnotu $a_{i,j} = 0$.

Při volbě omezení sférické vzdálenosti $\psi_0 = 180^\circ$ je celá oblast Ω' blízkou zónou a vzdálená zóna je prázdná množina. Se zmenšováním ψ_0 roste velikost vzdálené zóny, zatímco blízká zóna se zmenšuje. Pro matici \mathbf{A} se volba omezení sférické vzdálenosti ψ_0 promítá do počtu nulových prvků matice. Čím menší ψ_0 zvolíme, tím více nulových prvků matice \mathbf{A} obsahuje.

Hypotéza 2.1. Na základě provedených numerických experimentů v MATLABU (viz kapitola 4, 5 a 6) se ukazuje, že číslo podmíněnosti $\kappa(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, resp. číslo podmíněnosti úlohy (2.30), s rostoucím omezením sférické vzdálenosti ψ_0 exponenciálně roste.

Kapitola 3

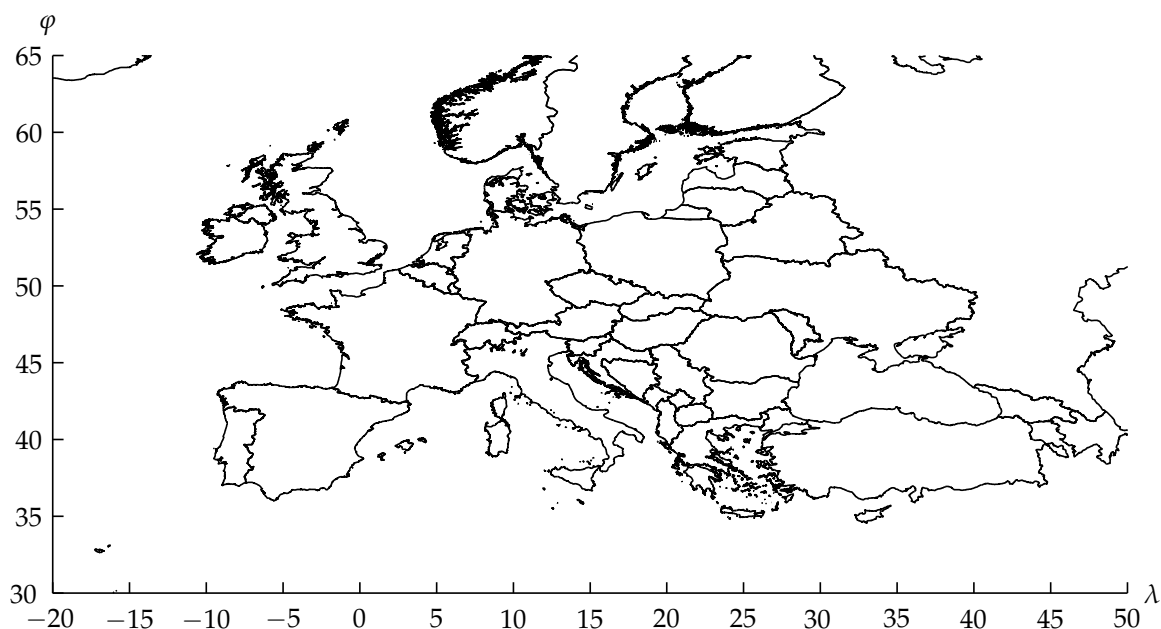
Družicová gravimetrie

V této kapitole popíšeme, jak měříme data potřebná pro výpočet tíhového potenciálu. Tíhový potenciál W nelze přímo měřit. Umíme však měřit jeho rozdíl ve dvou bodech a gradient, to jest vektor tíhového zrychlení, viz (1.23). Úlohy na výpočet tíhového potenciálu požadují spojitost a globálnost naměřených dat. Měřit však můžeme pouze diskrétní data a jediná metoda, která poskytuje globální charakter dat je tzv. družicová gravimetrie.

V minulosti bylo zemské tíhové pole známé s velkou přesností pouze na několika místech planety. Pro velké části světa nebyla dostupná žádná data, protože závisela na pozemním a leteckém měření, viz [12]. Pozemní gravimetrie sice poskytuje velmi přesné výsledky, měření však může probíhat jen v přístupném terénu a data mají pouze lokální charakter. Problém částečně odstraňuje letecká gravimetrie, pomocí níž můžeme získat data i z nepřístupných oblastí. Data však stále nemají globální charakter a navíc jsou zatížena šumem způsobeným nerovnoměrným pohybem letadla.

Téměř globální pokrytí zemského povrchu s výjimkou polárních oblastí dostaneme pomocí družicové gravimetrie. Družice se nachází ve výšce 200 až 500 km nad zemským povrchem. Nevýhodou této metody je omezené frekvenční rozlišení, to jest vypočítáme jen malý počet geopotenciálních koeficientů, viz [13]. Dosud byli realizovány tři projekty, mise CHAMP, GRACE a GOCE.

V úlohách, kterými se budeme zabývat v následujících kapitolách, se z důvodu časové i paměťové náročnosti omezíme na oblast vymezenou rovnoběžkami 30° a 65° sférické šířky a poledníky -20° a 50° sférické délky. Tato oblast zaujímající většinu povrchu Evropy je zobrazena na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Zvolená výpočetní oblast.

3.1 Družicová mise GRACE

- začátek mise 17. března 2002, předpokládané ukončení mise 2016
- výška nad zemským povrchem přibližně 450 km
- doba oběhu Země 90 minut
- zaznamenávání údajů každých 5 sekund

GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) je společný projekt GFZ (GeoForschungsZentrum), NASA (National Aeronautics and Space Administration) a CSR (Center for Space Research). Cílem projektu je mapování časových změn tíhového pole, měření změn hladiny oceánů, časových variací zavodnění ve velkých vodních tocích, tání ledovců v polárních oblastech, pochopení klimatických změn a geohazardů (živelné pohromy spojené s procesy probíhajícími v horninovém prostředí zemského tělesa).

GRACE je dvojice družic, které opisují stejnou oběžnou dráhu a jsou od sebe vzdáleny přibližně 220 km. Družice nazýváme GRACE1 a GRACE2. Dochází k měření kartézských geocentrických poloh jednotlivých družic, vektorů okamžité rychlosti a zrychlení pomocí GPS. Tento způsob měření je v anglicky psané literatuře nazýván high-low satellite to satellite tracking, protože pohyb družice nacházející se na nižší oběžné dráze

je zaznamenáván soustavou družic na vyšší oběžné dráze. Družice GRACE se nacházejí přibližně 450 km nad zemským povrchem, zatímco GPS družice se nacházejí ve výšce 20350 km nad povrchem Země. Toto měření budeme dále označovat high-low SST. Družice GRACE1 a GRACE2 zároveň zaznamenávají pomocí mikrovlnného spojení vzdálenost mezi sebou. Tento způsob měření se v anglicky psané literatuře označuje low-low satellite to satellite tracking, dále low-low SST.

Gravitační pole Země působí na družice GRACE1 a GRACE2 rozdílně. Zmenšování a zvětšování vzdálenosti družic znamenají změny zemského gravitačního pole. Uvedme příklad, viz [14]. Pokud první družice dosáhne oblasti s větší gravitací, je tažena do této oblasti a rychlost jejího pohybu se zvětší. To způsobí zvětšování vzdálenosti mezi družicemi. Jakmile se nachází v oblasti větší gravitace i druhá družice, první zpomaluje, zatímco druhá zrychluje a vzdálenost mezi nimi se zmenšuje. V okamžiku, kdy druhá družice opustí oblast vyšší gravitace, dojde k jejímu zpomalení, zatímco první družici to neovlivňuje.

Maximální prostorové rozlišení Δ , které lze pomocí GRACE měřit je $\Delta = 1^\circ$. Maximální frekvenční rozlišení N vyjádříme vztahem

$$N = \frac{180^\circ}{\Delta}. \quad (3.1)$$

Pomocí měření GRACE lze tedy určit prvních 180 geopotenciálních koeficientů.

3.2 Družicová mise GOCE

- začátek mise 17. března 2009, ukončení mise 11. listopadu 2013
- výška nad zemským povrchem přibližně 250 km
- doba oběhu Země 90 minut
- zaznamenávání údajů každou 1 sekundu

GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) byla jednou z klíčových misí ESA (European Space Agency). Cílem projektu bylo stanovení anomálií tíhového pole s přesností 1 mGal ($10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) při prostorovém rozlišení 100 km, určení globálního geoidu s přesností 1 cm při prostorovém rozlišení 100 km, sjednocení výškových systémů, zpřesnění modelů cirkulace oceánů, složení zemského tělesa a odhadů hmotnosti a tloušťek ledovců.

Družice GOCE byla určena k měření gradiometrických dat. Kromě high-low SST dat měřila další veličinu, kterou je gradiometrický (Marussiho) tenzor, resp. jeho složky

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla V_g(\vec{r}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_g(\vec{r}) & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V_g(\vec{r}) & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} V_g(\vec{r}) \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} V_g(\vec{r}) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} V_g(\vec{r}) & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} V_g(\vec{r}) \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} V_g(\vec{r}) & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} V_g(\vec{r}) & \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_g(\vec{r}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} V_{g,xx}(\vec{r}) & V_{g,xy}(\vec{r}) & V_{g,xz}(\vec{r}) \\ V_{g,yx}(\vec{r}) & V_{g,yy}(\vec{r}) & V_{g,yz}(\vec{r}) \\ V_{g,zx}(\vec{r}) & V_{g,zy}(\vec{r}) & V_{g,zz}(\vec{r}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Marussiho tenzor (3.2) je symetrický, obsahuje tudíž šest různých složek. Pro body, které jsou vně Země a nejsou spojeny s jejím povrchem, splňují prvky na diagonále Laplaceovu rovnici (1.27). Odtud

$$V_{g,zz}(\vec{r}) = -V_{g,xx}(\vec{r}) - V_{g,yy}(\vec{r}), \quad (3.3)$$

a tenzor (3.2) má tedy pouze pět nezávislých složek.

Maximální prostorové rozlišení Δ , které lze pomocí GOCE měřit je $\Delta = 0,72^\circ$. Dosažením do (3.1) dostaneme, že pomocí měření GOCE lze určit prvních 250 geopotenciálních koeficientů.

Více o misi GOCE se můžeme dozvědět na webových stránkách ESA [15].

Kapitola 4

Úloha GRACE typu 1

V následujícím textu se budeme zabývat podmíněností úlohy, kterou nazveme úloha GRACE typu 1. Odvození některých vzorců přesahuje rámec této práce, někdy tak pouze uvedeme platnost vztahu s odkazem na literaturu bez odvozování či důkazu.

GRACE je dvojice družic, v textu budeme proto přiřazovat veličinám indexy [1] a [2] odpovídající družicím GRACE1 a GRACE2. Prostřednictvím high-low SST dostaneme vektory polohy, okamžité rychlosti a zrychlení družic v kartézských geocentrických souřadnicích

$$\begin{aligned}\vec{r}^{[1]} &= [x^{[1]}, y^{[1]}, z^{[1]}], & \dot{\vec{r}}^{[1]} &= [\dot{x}^{[1]}, \dot{y}^{[1]}, \dot{z}^{[1]}], & \ddot{\vec{r}}^{[1]} &= [\ddot{x}^{[1]}, \ddot{y}^{[1]}, \ddot{z}^{[1]}], \\ \vec{r}^{[2]} &= [x^{[2]}, y^{[2]}, z^{[2]}], & \dot{\vec{r}}^{[2]} &= [\dot{x}^{[2]}, \dot{y}^{[2]}, \dot{z}^{[2]}], & \ddot{\vec{r}}^{[2]} &= [\ddot{x}^{[2]}, \ddot{y}^{[2]}, \ddot{z}^{[2]}].\end{aligned}\tag{4.1}$$

Pomocí transformačních vztahů (2.2) převedeme tato data do sférických geocentrických souřadnic

$$\begin{aligned}[r^{[1]}, \varphi^{[1]}, \lambda^{[1]}], & [\dot{r}^{[1]}, \dot{\varphi}^{[1]}, \dot{\lambda}^{[1]}], & [\ddot{r}^{[1]}, \ddot{\varphi}^{[1]}, \ddot{\lambda}^{[1]}], \\ [r^{[2]}, \varphi^{[2]}, \lambda^{[2]}], & [\dot{r}^{[2]}, \dot{\varphi}^{[2]}, \dot{\lambda}^{[2]}], & [\ddot{r}^{[2]}, \ddot{\varphi}^{[2]}, \ddot{\lambda}^{[2]}].\end{aligned}\tag{4.2}$$

Rozdíly vektorů v (4.1) označíme jako

$$\delta\vec{r} = \vec{r}^{[2]} - \vec{r}^{[1]}, \quad \delta\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}^{[2]} - \dot{\vec{r}}^{[1]}, \quad \delta\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}^{[2]} - \ddot{\vec{r}}^{[1]}.\tag{4.3}$$

Uvažujme, že máme k dispozici pouze high-low SST data. Vzdálenost mezi družicemi vyjádříme vztahem

$$\rho = |\delta\vec{r}|\tag{4.4}$$

První a druhou derivaci vzdálenosti ρ podle času vyjádříme vztahy, viz [8],

$$\dot{\rho} = \delta\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}, \quad \ddot{\rho} = \delta\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{e} + \frac{|\delta\dot{\vec{r}}|^2 - \dot{\rho}^2}{\rho},\tag{4.5}$$

kde \vec{e} je jednotkový vektor ve směru spojnice družic

$$\vec{e} = [e_x, e_y, e_z]^T = \frac{\delta \vec{r}}{\rho}. \quad (4.6)$$

V textu [6] nalezneme, že rozdíl tíhových potenciálů družic lze přibližně vyjádřit předpisem

$$\delta W(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) = W(\vec{r}^{[2]}) - W(\vec{r}^{[1]}) \approx |\dot{\vec{r}}^{[1]}| \rho, \quad (4.7)$$

Odečteme-li od skutečného tíhového potenciálu W normální tíhový potenciál U , dostaneme poruchový potenciál T , viz (1.31). Upravíme (4.7)

$$\delta T(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) = T(\vec{r}^{[2]}) - T(\vec{r}^{[1]}) \approx |\dot{\vec{r}}^{[1]}| \rho - U(\vec{r}^{[2]}) + U(\vec{r}^{[1]}). \quad (4.8)$$

Normální tíhový potenciál U je aproximací skutečného tíhového potenciálu W . Je určen pomocí parametrů uvedených v tabulce 1.1. Poruchový potenciál zapíšeme ve tvaru Abelova-Poissonova integrálu ve sférické aproximaci (2.4)

$$T(r^{[1]}, \Omega^{[1]}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') K(t^{[1]}, u^{[1]}) d\Omega', \quad (4.9)$$

$$T(r^{[2]}, \Omega^{[2]}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') K(t^{[2]}, u^{[2]}) d\Omega', \quad (4.10)$$

kde $K(t, u)$ je izotropní integrační jádro¹ dané vztahem (2.21). Levou stranu rovnice (4.8) vyjádříme ve tvaru, viz [3],

$$\begin{aligned} \delta T(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) &= T(r^{[2]}, \Omega^{[2]}) - T(r^{[1]}, \Omega^{[1]}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \left[K(t^{[2]}, u^{[2]}) - K(t^{[1]}, u^{[1]}) \right] d\Omega'. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pro účely numerického výpočtu převedeme rovnici (4.11) na diskrétní tvar

$$\delta T(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) = \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2} \sum_{j=1}^m T(R, \Omega'_j) \left[K(t^{[2]}, u_j^{[2]}) - K(t^{[1]}, u_j^{[1]}) \right] \cos \varphi'_j. \quad (4.12)$$

Uvažujeme-li n výpočetních bodů, potom dostaneme soustavu n rovnic

$$\delta T(r_i^{[1]}, r_i^{[2]}) = \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2} \sum_{j=1}^m T(R, \Omega'_j) \left[K(t_i^{[2]}, u_{i,j}^{[2]}) - K(t_i^{[1]}, u_{i,j}^{[1]}) \right] \cos \varphi'_j, \quad (4.13)$$

¹Pojmu izotropnosti integračních jader je věnována příloha A.

kde $i = 1, 2, \dots, n$. Soustavu rovnic (4.13) budeme nazývat úlohou GRACE typu 1. V maticovém tvaru ji zapíšeme v podobě

$$\mathbf{b} = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{x}, \quad (4.14)$$

kde

$$\mathbf{b} = \left[\delta T \left(r_1^{[1]}, r_1^{[2]} \right), \delta T \left(r_2^{[1]}, r_2^{[2]} \right), \dots, \delta T \left(r_n^{[1]}, r_n^{[2]} \right) \right]^T,$$

$$\mathbf{A}_k = \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2} \begin{bmatrix} K(t_1^{[k]}, u_{1,1}^{[k]}) \cos \varphi'_1 & K(t_1^{[k]}, u_{1,2}^{[k]}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K(t_1^{[k]}, u_{1,m}^{[k]}) \cos \varphi'_m \\ K(t_2^{[k]}, u_{2,1}^{[k]}) \cos \varphi'_1 & K(t_2^{[k]}, u_{2,2}^{[k]}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K(t_2^{[k]}, u_{2,m}^{[k]}) \cos \varphi'_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n^{[k]}, u_{n,1}^{[k]}) \cos \varphi'_1 & K(t_n^{[k]}, u_{n,2}^{[k]}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K(t_n^{[k]}, u_{n,m}^{[k]}) \cos \varphi'_m \end{bmatrix},$$

$$k \in \{1, 2\},$$

$$\mathbf{x} = [T(R, \Omega'_1), T(R, \Omega'_2), \dots, T(R, \Omega'_m)]^T. \quad (4.15)$$

Označíme-li rozdíl matic $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$, maticový zápis (4.14) nabude tvaru

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (4.16)$$

na který můžeme aplikovat vzorce a postupy uvedené v sekcích 2.2 a 2.3.

4.1 Podmíněnost inverzní úlohy

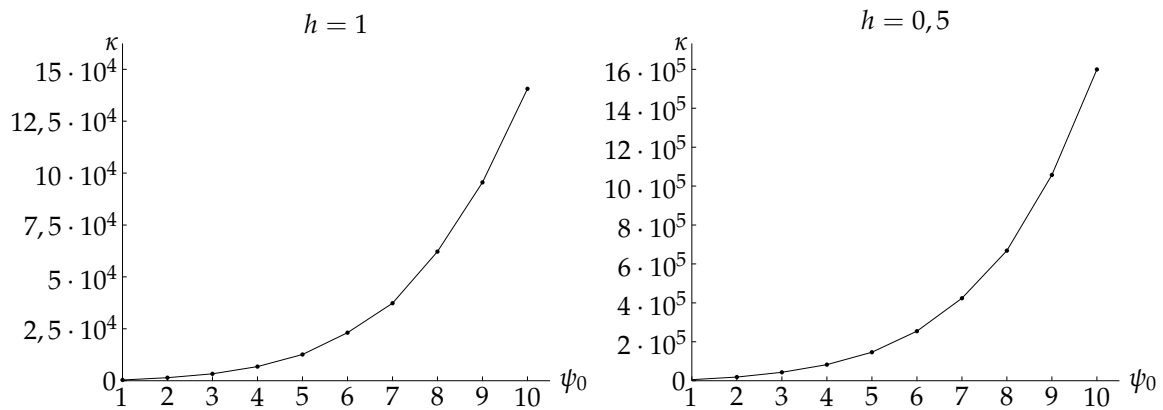
V následující sekci analyzujeme výsledky inverzní úlohy GRACE typu 1 pro konkrétní zvolené parametry. Integrační oblast vymežíme intervaly

$$\varphi' \in \langle 30, 65 \rangle, \quad \lambda' \in \langle -20, 50 \rangle, \quad (4.17)$$

a rozdělíme ji na ekvidistantní síť integračních elementů $\Delta \varphi' \times \Delta \lambda'$, přičemž uvažujeme čtverce s hranou o délce $h = \Delta \varphi' = \Delta \lambda'$. Budeme volit $h = 1^\circ$ a $h = 0,5^\circ$. Krok $h = 1^\circ$ odpovídá maximálnímu prostorovému rozlišení, které lze pomocí GRACE měřit.

Požadujeme souřadnice $(\varphi^{[k]}, \lambda^{[k]})$, $k \in \{1, 2\}$, náležející stejným intervalům jako v případě integrační oblasti (4.17). Data pro náš konkrétní výpočet byla naměřena v období 1. ledna 2010 až 30. června 2010, celkem se jedná o 55820 záznamů.

Číslo podmíněnosti κ vyjádřená vztahem (2.66) jsou pro zvolené kroky h a omezení sférické vzdálenosti ψ_0 uvedena v tabulce 4.1 a zobrazena na obrázku 4.1. Výsledky ukazují, že číslo podmíněnosti κ s rostoucím krokem h klesá, zatímco s rostoucím omezením sférické vzdálenosti ψ_0 exponenciálně roste.



Obrázek 4.1: Závislost čísla podmíněnosti κ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 při daném kroku sítě h .

ψ_0	κ	
1	320,70	5310,56
2	1429,66	18478,69
3	3311,49	43234,64
4	6778,64	82621,27
5	12607,85	146349,86
6	23126,48	254652,42
7	37298,11	423365,12
8	62205,20	668375,27
9	95509,38	1057290,60
10	140637,16	1599276,86
180	$2,12 \cdot 10^{15}$	$3,12 \cdot 10^{16}$
h	1	0,5

Tabulka 4.1: Závislost čísla podmíněnosti κ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 při daném kroku sítě h .

Kapitola 5

Úloha GRACE typu 2

V následujícím textu se budeme zabývat podmíněností úlohy, kterou nazveme úloha GRACE typu 2. Odvození některých vzorců přesahuje rámec této práce, někdy tak pouze uvedeme platnost vztahu s odkazem na literaturu bez odvozování či důkazu.

Předpokládejme znalost vztahů (4.1) až (4.6). K určení parametrů gravitačního pole Země musí být naměřená data vztažena ke gravitačnímu potenciálu V_g . Použijeme vztah uvedený v [9]

$$\frac{|\delta\dot{\vec{r}}|^2 - \dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{\rho} = \vec{e} \cdot \delta\nabla V_g(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}). \quad (5.1)$$

Podle rovnice (5.1) se kombinace low-low SST a high-low SST naměřených dat na levé straně rovnice rovná rozdílu gradientů gravitačního potenciálu promítnutého do směru spojnice družic. Diferenciální operátor $\vec{e} \cdot \delta\nabla$ zapíšeme ve sférických geocentrických souřadnicích

$$\vec{e} \cdot \delta\nabla = \delta \left[e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + e_\lambda \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right], \quad (5.2)$$

kde e_r , e_φ a e_λ jsou složky vektoru \vec{e} ve sférickém lokálním severně orientovaném systému, to jest v referenčním systému s pohyblivým počátkem, který odpovídá těžišti družice, a pravotočivou ortogonální bází (φ severní směr, λ západní směr a r radiální směr),

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\varphi \\ e_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Diferenciální operátor $\vec{e} \cdot \delta\nabla$ můžeme vyjádřit vzhledem k parametrům t a u , které jsou zavedeny vztahy (2.19) a (2.17), vztahem uvedeným v [9]

$$\vec{e} \cdot \delta\nabla = \frac{\delta}{R} \left[e_r \left(-t^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} + e_\varphi \cos \alpha t \sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u} + e_\lambda \sin \alpha t \sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u} \right]. \quad (5.4)$$

Úhel α nazýváme přímý azimut. Azimut je orientovaný úhel, který svírá určitý směr od směru severního, měří se ve směru pohybu hodinových ručiček. Přímý azimut je azimut mezi výpočetním bodem a integračním elementem měřený ve výpočetním bodu od severní části poledníku, který výpočetním bodem prochází, ke spojnici výpočetního bodu a integračního elementu. Pro přímý azimut se dají pomocí vět sférické trigonometrie odvodit vztahy, viz [12],

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda')}{\sin \psi} = \\ &= \frac{\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda')}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi}} = \\ &= \frac{\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda')}{\sqrt{1 - u^2}},\end{aligned}\tag{5.5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)}{\sin \psi} = \frac{\cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)}{\sqrt{1 - u^2}}.\tag{5.6}$$

Odečteme-li od gravitačního potenciálu V_g gravitační složku normálního tíhového potenciálu U_g , dostaneme poruchový potenciál T . Upravíme (5.1)

$$\frac{|\delta\dot{\vec{r}}|^2 - \dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{\rho} - \vec{e} \cdot \delta\nabla U_g(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) = \vec{e} \cdot \delta\nabla T(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}).\tag{5.7}$$

Gravitační složka normálního tíhového potenciálu U_g je aproximací gravitačního potenciálu V_g . Je určena pomocí parametrů uvedených v tabulce 1.1. Aplikací diferenciálního operátoru $\vec{e} \cdot \delta\nabla$ na poruchový potenciál T vyjádřený Abelovým-Poissonovým integrálem (2.4) dostaneme

$$\begin{aligned}\vec{e} \cdot \delta\nabla T(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) &= \frac{1}{4\pi R} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \delta \left[e_r \left(-t^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} K(t, u) \right. \\ &\quad + e_\varphi \cos \alpha t \sqrt{1 - u^2} \frac{\partial}{\partial u} K(t, u) \\ &\quad \left. + e_\lambda \sin \alpha t \sqrt{1 - u^2} \frac{\partial}{\partial u} K(t, u) \right] d\Omega'.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Označme

$$K^t(t, u) = -t^2 \frac{\partial}{\partial t} K(t, u),\tag{5.9}$$

$$K^u(t, u) = t \sqrt{1 - u^2} \frac{\partial}{\partial u} K(t, u).\tag{5.10}$$

Rovnici (5.8) poté zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \delta \nabla T(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) &= \frac{1}{4\pi R} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \delta [e_r K^t(t, u) + e_\varphi \cos \alpha K^u(t, u) \\ &\quad + e_\lambda \sin \alpha K^u(t, u)] d\Omega'. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Uvažujeme-li jádro $K(t, u)$ ve spektrálním tvaru (2.20), dostaneme

$$\begin{aligned} K^t(t, u) &= -t^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} (2n+1) P_{n,0}(u) \right) = \\ &= -t^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^n (2n+1) P_{n,0}(u) = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^{n+2} (2n+1) P_{n,0}(u), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} K^u(t, u) &= t \sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} (2n+1) P_{n,0}(u) \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+2} (2n+1) P_{n,1}(u). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Je vhodnější provádět výpočty s uzavřeným tvarem jádra (2.21). Potom

$$\begin{aligned} K^t(t, u) &= -t^2 \frac{\partial}{\partial t} K(t, u) = -t^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t-t^3}{(1-2tu+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ &= -t^2 \frac{(1-3t^2)(1-2tu+t^2)^{\frac{3}{2}} - (t-t^3) \frac{3}{2} \sqrt{1-2tu+t^2} (-2u+2t)}{(1-2tu+t^2)^3} = \\ &= -t^2 \frac{(1-3t^2)(1-2tu+t^2) + 3(t^3-t)(t-u)}{(1-2tu+t^2)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= - \frac{t^2(1-2tu+t^2-3t^2+6t^3u-3t^4+3t^4-3t^3u-3t^2+3tu)}{(1-2tu+t^2)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= - \frac{t^2(1+tu-5t^2+3t^3u)}{(1-2tu+t^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Při použití substituce (2.22) píšeme

$$K^t(t, u) = -\frac{t^2 (1 + tu - 5t^2 + 3t^3u)}{g^5}. \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} K^u(t, u) &= t\sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u} K(t, u) = t\sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{t-t^3}{(1-2tu+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ &= t\sqrt{1-u^2} \frac{(t-t^3) \frac{3}{2} \sqrt{1-2tu+t^2} (-2t)}{(1-2tu+t^2)^3} = \\ &= \frac{3(t^3-t^5) \sqrt{1-u^2}}{(1-2tu+t^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Při použití substituce (2.22) píšeme

$$K^u(t, u) = \frac{3(t^3-t^5) \sqrt{1-u^2}}{g^5}. \quad (5.17)$$

Obě integrační jádra $K^t(t, u)$ a $K^u(t, u)$ jsou izotropní¹.

Pro účely numerického výpočtu zapíšeme rovnici (5.11) ve tvaru

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \delta \nabla T(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) &= \frac{1}{4\pi R} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') \\ &\left\{ \left[e_r K^t(t^{[2]}, u^{[2]}) + e_\varphi \cos \alpha K^u(t^{[2]}, u^{[2]}) + e_\lambda \sin \alpha K^u(t^{[2]}, u^{[2]}) \right] \right. \\ &\left. - \left[e_r K^t(t^{[1]}, u^{[1]}) + e_\varphi \cos \alpha K^u(t^{[1]}, u^{[1]}) + e_\lambda \sin \alpha K^u(t^{[1]}, u^{[1]}) \right] \right\} d\Omega'. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Diskrétní tvar rovnice (5.18) má podobu

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \delta \nabla T(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) &= \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2 R} \sum_{j=1}^m T(R, \Omega'_j) \\ &\left\{ \left[e_r K^t(t^{[2]}, u_j^{[2]}) + e_\varphi \cos \alpha K^u(t^{[2]}, u_j^{[2]}) + e_\lambda \sin \alpha K^u(t^{[2]}, u_j^{[2]}) \right] \right. \\ &\left. - \left[e_r K^t(t^{[1]}, u_j^{[1]}) + e_\varphi \cos \alpha K^u(t^{[1]}, u_j^{[1]}) + e_\lambda \sin \alpha K^u(t^{[1]}, u_j^{[1]}) \right] \right\} \cos \varphi'_j. \end{aligned} \quad (5.19)$$

¹Pojmu izotropnosti integračních jader je věnována příloha A.

Uvažujeme-li n výpočetních bodů, potom dostaneme soustavu n rovnic

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \delta \nabla T \left(\vec{r}_i^{[1]}, \vec{r}_i^{[2]} \right) &= \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2 R} \sum_{j=1}^m T(R, \Omega'_j) \\ &\left\{ \left[e_r K^t \left(t_i^{[2]}, u_{i,j}^{[2]} \right) + e_\varphi \cos \alpha K^u \left(t_i^{[2]}, u_{i,j}^{[2]} \right) + e_\lambda \sin \alpha K^u \left(t_i^{[2]}, u_{i,j}^{[2]} \right) \right] \right. \\ &\left. - \left[e_r K^t \left(t_i^{[1]}, u_{i,j}^{[1]} \right) + e_\varphi \cos \alpha K^u \left(t_i^{[1]}, u_{i,j}^{[1]} \right) + e_\lambda \sin \alpha K^u \left(t_i^{[1]}, u_{i,j}^{[1]} \right) \right] \right\} \cos \varphi'_j, \end{aligned} \quad (5.20)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$. Soustavu rovnic (5.20) budeme nazývat úlohou GRACE typu 2. V maticovém tvaru ji zapíšeme v podobě

$$\mathbf{b} = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{x}, \quad (5.21)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \left[\delta T \left(r_1^{[1]}, r_1^{[2]} \right), \delta T \left(r_2^{[1]}, r_2^{[2]} \right), \dots, \delta T \left(r_n^{[1]}, r_n^{[2]} \right) \right]^T, \\ \mathbf{x} &= \left[T(R, \Omega'_1), T(R, \Omega'_2), \dots, T(R, \Omega'_m) \right]^T. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Prvky matic \mathbf{A}_k , $k \in \{1, 2\}$, jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} (a_{i,j})_k &= \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2 R} \left[e_r K^t \left(t_i^{[k]}, u_{i,j}^{[k]} \right) + e_\varphi \cos \alpha K^u \left(t_i^{[k]}, u_{i,j}^{[k]} \right) \right. \\ &\left. + e_\lambda \sin \alpha K^u \left(t_i^{[k]}, u_{i,j}^{[k]} \right) \right] \cos \varphi'_j. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Označíme-li rozdíl matic $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$, maticový zápis (5.21) nabude tvaru

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (5.24)$$

na který můžeme aplikovat vzorce a postupy uvedené v sekcích 2.2 a 2.3.

5.1 Podmíněnost inverzní úlohy

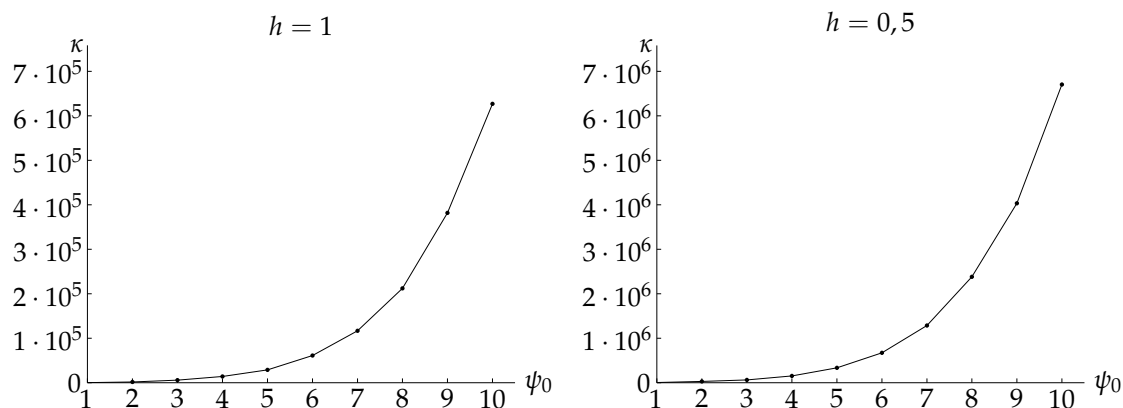
V následující sekci analyzujeme výsledky inverzní úlohy GRACE typu 2 pro konkrétní zvolené parametry. Integrační oblast vymezíme intervaly (4.17) a rozdělíme ji na ekvidistantní síť integračních elementů $\Delta \varphi' \times \Delta \lambda'$, přičemž uvažujeme čtverce s hranou o délce $h = \Delta \varphi' = \Delta \lambda'$. Budeme volit $h = 1^\circ$ a $h = 0,5^\circ$. Krok $h = 1^\circ$ odpovídá maximálnímu prostorovému rozlišení, které lze pomocí GRACE měřit. Požadujeme souřadnice $(\varphi^{[k]}, \lambda^{[k]})$, $k \in \{1, 2\}$, náležející stejným intervalům jako v případě integrační

oblasti (4.17). Data pro náš konkrétní výpočet byla naměřena v období 1. ledna 2010 až 30. června 2010, celkem se jedná o 55820 záznamů.

Čísla podmíněnosti κ vyjádřená vztahem (2.66) jsou pro zvolené kroky h a omezení sférické vzdálenosti ψ_0 uvedena v tabulce 5.1 a zobrazena na obrázku 5.1. Výsledky ukazují, že číslo podmíněnosti κ s rostoucím krokem h klesá, zatímco s rostoucím omezením sférické vzdálenosti ψ_0 exponenciálně roste.

ψ_0	κ	
1	229,33	4425,64
2	1552,58	28039,51
3	5641,17	62723,75
4	14064,67	151870,63
5	28689,37	333874,17
6	61031,36	672274,38
7	116610,23	1286374,72
8	212047,55	2380696,10
9	381761,90	4032673,95
10	626897,28	6703591,99
180	$1,24 \cdot 10^{16}$	$2,70 \cdot 10^{16}$
h	1	0,5

Tabulka 5.1: Závislost čísla podmíněnosti κ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 při daném kroku sítě h .



Obrázek 5.1: Závislost čísla podmíněnosti κ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 při daném kroku sítě h .

Označme κ_2 číslo podmíněnosti inverzní úlohy GRACE typu 2, číslo podmíněnosti inverzní úlohy GRACE typu 1 označíme κ_1 . V tabulce 5.2 je uveden rozdíl $\kappa_2 - \kappa_1$ a jeho závislost na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 při daném kroku sítě h . Skoro všechny hodnoty v tabulce 5.2 jsou kladné. Inverzní úloha GRACE typu 1 je tudíž ve většině provedených experimentů podmíněna lépe než inverzní úloha GRACE typu 2.

ψ_0	$\kappa_2 - \kappa_1$	
1	-91,38	-884,92
2	122,92	9560,82
3	2329,68	19489,11
4	7286,03	69249,36
5	16081,52	187524,31
6	37904,88	417621,96
7	79312,12	863009,60
8	149842,34	1712320,83
9	286252,52	2975383,34
10	486260,12	5104315,13
180	$1,02 \cdot 10^{16}$	$-4,18 \cdot 10^{15}$
h	1	0,5

Tabulka 5.2: Závislost rozdílu čísel podmíněnosti $\kappa_2 - \kappa_1$ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 při daném kroku sítě h .

Kapitola 6

Úloha GOCE

V následujícím textu se budeme zabývat podmíněností úlohy, kterou nazveme úloha GOCE. Odvození některých vzorců přesahuje rámec této práce, někdy tak pouze uvedeme platnost vztahu s odkazem na literaturu bez odvozování či důkazu.

Družice GOCE měří gradiometrická data (3.2). Převedeme-li tato data do sférického lokálního severně orientovaného systému a odečteme-li od gravitačních gradientů $V_{g,kl}$ gravitační složky normálních tíhových gradientů $U_{g,kl}$, dostaneme poruchové tíhové gradienty

$$T_{kl}(\vec{r}) = V_{g,kl}(\vec{r}) - U_{g,kl}(\vec{r}), \quad k, l \in \{\varphi, \lambda, r\}, \quad (6.1)$$

kteří reprezentují šest složek poruchového gradiometrického tenzoru ve sférickém lokálním severně orientovaném systému

$$\nabla \otimes \nabla T(\vec{r}) = \begin{bmatrix} T_{\varphi\varphi}(\vec{r}) & T_{\varphi\lambda}(\vec{r}) & T_{\varphi r}(\vec{r}) \\ T_{\lambda\varphi}(\vec{r}) & T_{\lambda\lambda}(\vec{r}) & T_{\lambda r}(\vec{r}) \\ T_{r\varphi}(\vec{r}) & T_{r\lambda}(\vec{r}) & T_{rr}(\vec{r}) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Poruchový tíhový potenciál $T(R, \Omega')$ a poruchové tíhové gradienty T_{kl} ve sférickém lokálním severně orientovaném systému jsou svázány integrálním vztahem, viz [10],

$$T_{kl}(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Omega'} T(R, \Omega') K^{kl}(t, u, \alpha) d\Omega', \quad k, l \in \{\varphi, \lambda, r\}. \quad (6.3)$$

Šest integračních jader $K^{kl}(t, u, \alpha)$ je dáno předpisem

$$K^{\varphi\varphi}(t, u, \alpha) = K^{0*}(t, u) + \cos 2\alpha K^{2*}(t, u), \quad (6.4)$$

$$K^{\varphi\lambda}(t, u, \alpha) = -\sin 2\alpha K^{2*}(t, u), \quad (6.5)$$

$$K^{\varphi r}(t, u, \alpha) = \cos \alpha K^{1*}(t, u), \quad (6.6)$$

$$K^{\lambda\lambda}(t, u, \alpha) = K^{0*}(t, u) - \cos 2\alpha K^{2*}(t, u), \quad (6.7)$$

$$K^{\lambda r}(t, u, \alpha) = -\sin \alpha K^{1*}(t, u), \quad (6.8)$$

$$K^{rr}(t, u) = -2K^{0*}(t, u), \quad (6.9)$$

kde $K^{\bullet*}(t, u)$ jsou izotropní integrační jádra¹. Spektrální tvary těchto jader jsou ve tvaru

$$K^{0*}(t, u) = -\frac{t^3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} K(t, u) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+3} (2n+1)(n+1)(n+2) P_{n,0}(u), \quad (6.10)$$

$$K^{1*}(t, u) = -t^2 \sqrt{1-u^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} K(t, u) = -\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+3} (2n+1)(n+2) P_{n,1}(u), \quad (6.11)$$

$$K^{2*}(t, u) = \frac{t(1-u^2)}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} K(t, u) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} t^{n+3} (2n+1) P_{n,2}(u). \quad (6.12)$$

Bez odvození uvedeme uzavřené tvary jader $K^{\bullet*}(t, u)$

$$K^{0*}(t, u) = -\frac{t^3}{g^5} \left\{ 1 - 5t^2 + tu(1+3t^2) + \frac{3t(1-t^2)}{2g^2} [tu^2 + 2u(1+t^2) - 5t] \right\}, \quad (6.13)$$

$$K^{1*}(t, u) = -\frac{3t^4 \sqrt{1-u^2}}{g^5} \left\{ 1 - t^2 + \frac{1}{g^2} [2 - t^2(7-t^2) + tu(1+3t^2)] \right\}, \quad (6.14)$$

$$K^{2*}(t, u) = \frac{15t^5}{2g^7} (1-t^2)(1-u^2). \quad (6.15)$$

Pro účely numerického výpočtu převedeme rovnice (6.3) na diskrétní tvar

$$T_{kl}(r, \Omega) = \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2 R^2} \sum_{j=1}^m T(R, \Omega'_j) K^{kl}(t, u_j, \alpha_j) \cos \varphi'_j, \quad k, l \in \{\varphi, \lambda, r\}. \quad (6.16)$$

Uvažujeme-li n výpočetních bodů, potom dostaneme soustavu n rovnic

$$T_{kl}(r_i, \Omega_i) = \frac{\pi \Delta \varphi' \Delta \lambda'}{4 \cdot 180^2 R^2} \sum_{j=1}^m T(R, \Omega'_j) K^{kl}(t_i, u_{i,j}, \alpha_{i,j}) \cos \varphi'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.17)$$

Soustavy rovnic (6.17) zapíšeme v maticovém tvaru

$$\mathbf{b}_{kl} = \mathbf{A}_{kl} \mathbf{x}, \quad k, l \in \{\varphi, \lambda, r\}, \quad (6.18)$$

¹Pojmu izotropnosti integračních jader je věnována příloha A.

kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{kl} &= [T_{kl}(r_1, \Omega_1), T_{kl}(r_2, \Omega_2), \dots, T_{kl}(r_n, \Omega_n)]^T, \\
\mathbf{A}_{kl} &= \begin{bmatrix} K^{kl}(t_1, \mu_{1,1}, \alpha_{1,1}) \cos \varphi'_1 & K^{kl}(t_1, \mu_{1,2}, \alpha_{1,2}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K^{kl}(t_1, \mu_{1,m}, \alpha_{1,m}) \cos \varphi'_m \\ K^{kl}(t_2, \mu_{2,1}, \alpha_{2,1}) \cos \varphi'_1 & K^{kl}(t_2, \mu_{2,2}, \alpha_{2,2}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K^{kl}(t_2, \mu_{2,m}, \alpha_{2,m}) \cos \varphi'_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^{kl}(t_n, \mu_{n,1}, \alpha_{n,1}) \cos \varphi'_1 & K^{kl}(t_n, \mu_{n,2}, \alpha_{n,2}) \cos \varphi'_2 & \cdots & K^{kl}(t_n, \mu_{n,m}, \alpha_{n,m}) \cos \varphi'_m \end{bmatrix}, \\
\mathbf{x} &= [T(R, \Omega'_1), T(R, \Omega'_2), \dots, T(R, \Omega'_m)]^T. \tag{6.19}
\end{aligned}$$

Na maticový zápis (6.18) můžeme aplikovat vzorce a postupy uvedené v sekcích 2.2 a 2.3.

6.1 Podmíněnost inverzní úlohy

V následující sekci analyzujeme výsledky inverzní úlohy GOCE pro konkrétní zvolené parametry. Požadujeme podobnou integrační oblast jako v případě úloh GRACE typu 1 a 2. Integrační oblast těchto úloh je určena intervaly (4.17). Integrační oblast rozdělujeme na ekvidistantní síť integračních elementů $\Delta\varphi' \times \Delta\lambda'$, přičemž uvažujeme čtverce s hranou o délce $h = \Delta\varphi' = \Delta\lambda'$. Budeme volit $h = 0,72^\circ$, což odpovídá maximálnímu prostorovému rozlišení, které lze pomocí GOCE měřit.

Integrační oblast určenou intervaly (4.17) nelze pomocí takové volby h rozdělit. Abychom dostali podobnou integrační oblast jako v případě úloh GRACE typu 1 a 2, vydělíme velikosti intervalů integrační oblasti (4.17) číslem 0,72 a vypočtené zbytky po dělení odečteme od horních hranic intervalů (4.17). Integrační oblast úlohy GOCE je tudíž vymezena intervaly

$$\varphi' \in \langle 30; 64,56 \rangle, \quad \lambda' \in \langle -20; 49,84 \rangle. \tag{6.20}$$

Požadujeme souřadnice (φ, λ) náležející stejným intervalům jako v případě integrační oblasti (6.20). Data pro náš konkrétní výpočet byla naměřena v období 1. listopadu 2009 až 31. prosince 2009. V listopadu 2009 provedla družice GOCE v oblasti vymezené intervaly (6.20) 97729 měření, v prosinci 2009 zaznamenala 101629 poloh.

Čísla podmíněnosti κ vyjádřená vztahem (2.66) jsou pro zvolený krok $h = 0,72^\circ$ a omezení sférické vzdálenosti ψ_0 uvedena v tabulce 6.1 pro listopad 2009, v tabulce 6.2 pro prosinec 2009 a v tabulce 6.3 pro oba tyto měsíce. Porovnání čísel podmíněnosti pro jednotlivé složky poruchového gradiometrického tenzoru jsou zobrazena na

obrázku 6.1. Výsledky ukazují, že číslo podmíněnosti κ s rostoucím omezením sférické vzdálenosti ψ_0 až na výjimky exponenciálně roste. Spojením dat z obou měsíců číslo podmíněnosti mírně klesne, řádově je však stále stejně velké. Zvětšuje se však časová i paměťová náročnost výpočtu.

ψ_0	κ					
	$T_{\varphi\varphi}$	$T_{\varphi\lambda}$	$T_{\varphi r}$	$T_{\lambda\lambda}$	$T_{\lambda r}$	T_{rr}
1	1228,76	118,70	432,22	2165,03	314,52	1592,05
2	11185,40	1558,08	8934,43	11529,05	8137,12	470034,29
3	70278,43	17544,44	238138,23	65539,70	214389,24	94007,53
4	351529,90	105764,68	$9,61 \cdot 10^6$	408150,81	$9,71 \cdot 10^6$	284851,95
5	$1,65 \cdot 10^6$	477605,56	$1,53 \cdot 10^8$	$1,68 \cdot 10^6$	$1,42 \cdot 10^8$	$1,06 \cdot 10^6$
6	$5,98 \cdot 10^6$	$1,64 \cdot 10^6$	$5,02 \cdot 10^7$	$5,97 \cdot 10^6$	$4,63 \cdot 10^7$	$3,38 \cdot 10^6$
7	$1,77 \cdot 10^7$	$4,67 \cdot 10^6$	$5,74 \cdot 10^7$	$1,87 \cdot 10^7$	$5,82 \cdot 10^7$	$9,89 \cdot 10^6$
8	$4,51 \cdot 10^7$	$1,20 \cdot 10^7$	$8,66 \cdot 10^7$	$4,77 \cdot 10^7$	$8,67 \cdot 10^7$	$2,47 \cdot 10^7$
9	$1,06 \cdot 10^8$	$2,46 \cdot 10^7$	$1,29 \cdot 10^8$	$1,19 \cdot 10^8$	$1,14 \cdot 10^8$	$4,79 \cdot 10^7$
10	$2,27 \cdot 10^8$	$5,26 \cdot 10^7$	$1,98 \cdot 10^8$	$3,30 \cdot 10^8$	$2,25 \cdot 10^8$	$9,50 \cdot 10^7$
180	$3,15 \cdot 10^{15}$	$1,31 \cdot 10^{15}$	$2,51 \cdot 10^{15}$	$1,09 \cdot 10^{14}$	$1,01 \cdot 10^{14}$	$9,84 \cdot 10^{13}$

Tabulka 6.1: Závislost čísla podmíněnosti κ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 pro dané složky poruchového gradiometrického tenzoru, vypočteno na základě dat naměřených v listopadu 2009.

Z hodnot uvedených v daných tabulkách je patrné, že nejlépe podmíněna (kromě případu neomezení sférické vzdálenosti $\psi_0 = 180^\circ$) je inverzní úloha

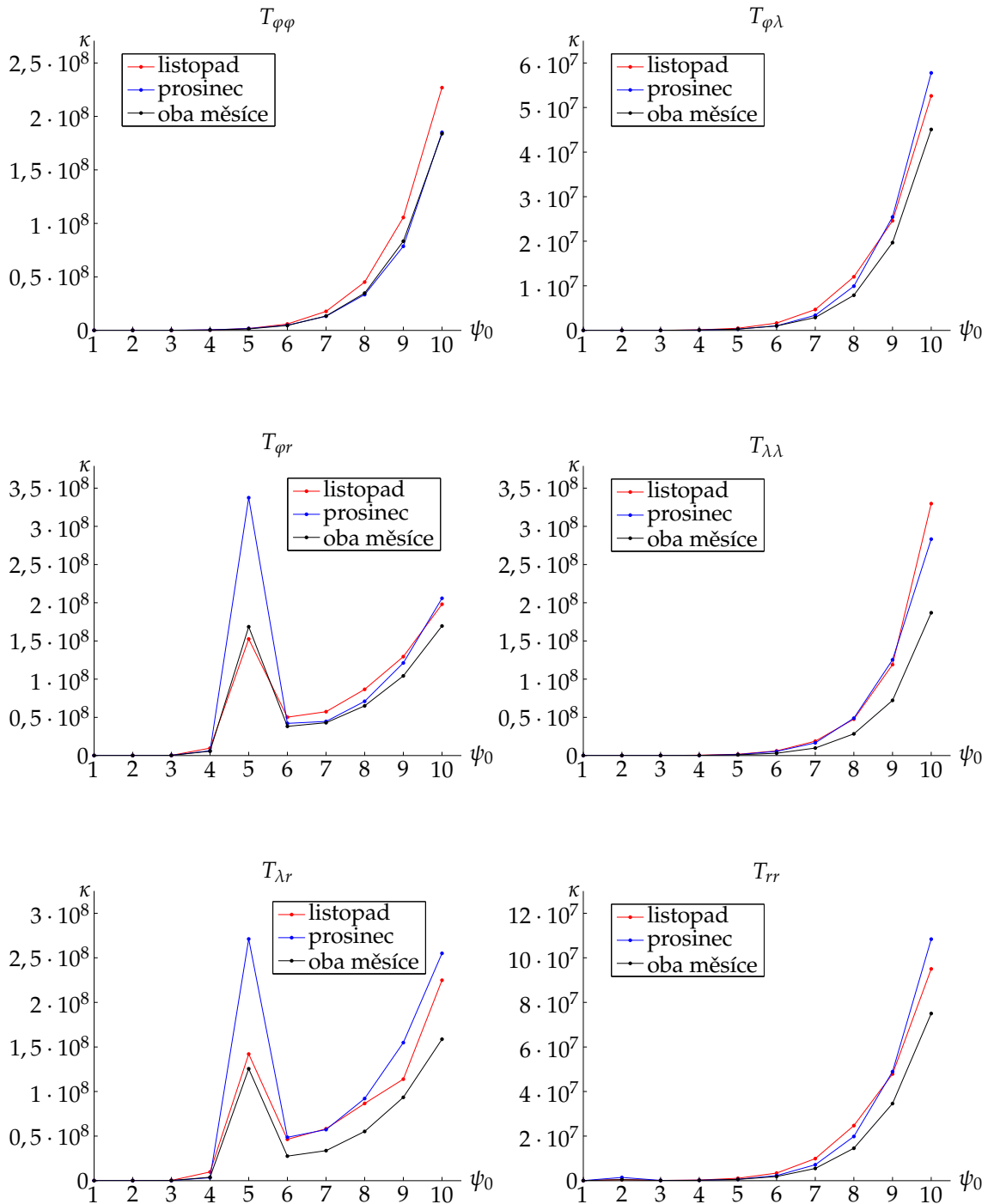
$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}_{\varphi\lambda}^T \mathbf{A}_{\varphi\lambda} \right)^{-1} \mathbf{A}_{\varphi\lambda}^T \mathbf{b}_{\varphi\lambda}. \quad (6.21)$$

ψ_0	κ					
	$T_{\varphi\varphi}$	$T_{\varphi\lambda}$	$T_{\varphi r}$	$T_{\lambda\lambda}$	$T_{\lambda r}$	T_{rr}
1	1589,97	141,52	524,63	2421,75	284,58	2284,45
2	16410,26	2126,12	13642,65	15493,63	8962,93	$1,45 \cdot 10^6$
3	94687,05	18755,06	272535,64	51613,40	143672,29	95876,95
4	435898,27	74616,80	$6,01 \cdot 10^6$	192462,23	$3,27 \cdot 10^6$	185369,70
5	$1,68 \cdot 10^6$	276618,47	$3,37 \cdot 10^8$	$1,27 \cdot 10^6$	$2,71 \cdot 10^8$	604153,17
6	$4,80 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^6$	$4,20 \cdot 10^7$	$5,36 \cdot 10^6$	$4,86 \cdot 10^7$	$2,27 \cdot 10^6$
7	$1,32 \cdot 10^7$	$3,38 \cdot 10^6$	$4,46 \cdot 10^7$	$1,65 \cdot 10^7$	$5,72 \cdot 10^7$	$7,15 \cdot 10^6$
8	$3,34 \cdot 10^7$	$9,90 \cdot 10^6$	$7,09 \cdot 10^7$	$4,88 \cdot 10^7$	$9,21 \cdot 10^7$	$1,98 \cdot 10^7$
9	$7,86 \cdot 10^7$	$2,54 \cdot 10^7$	$1,21 \cdot 10^8$	$1,25 \cdot 10^8$	$1,54 \cdot 10^8$	$4,89 \cdot 10^7$
10	$1,85 \cdot 10^8$	$5,78 \cdot 10^7$	$2,06 \cdot 10^8$	$2,83 \cdot 10^8$	$2,55 \cdot 10^8$	$1,08 \cdot 10^8$
180	$5,69 \cdot 10^{15}$	$2,76 \cdot 10^{15}$	$6,86 \cdot 10^{15}$	$4,20 \cdot 10^{14}$	$3,89 \cdot 10^{14}$	$3,38 \cdot 10^{14}$

Tabulka 6.2: Závislost čísla podmíněnosti κ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 pro dané složky poruchového gradiometrického tenzoru, vypočteno na základě dat naměřených v prosinci 2009.

ψ_0	κ					
	$T_{\varphi\varphi}$	$T_{\varphi\lambda}$	$T_{\varphi r}$	$T_{\lambda\lambda}$	$T_{\lambda r}$	T_{rr}
1	742,61	89,60	238,17	1112,39	168,60	1046,16
2	8514,90	1253,88	7632,18	7528,96	5135,76	417917,82
3	62045,48	11960,88	173308,86	36477,60	105908,87	53482,70
4	311245,35	66715,31	$5,66 \cdot 10^6$	186415,48	$3,76 \cdot 10^6$	156720,24
5	$1,34 \cdot 10^6$	290210,18	$1,68 \cdot 10^8$	854653,38	$1,26 \cdot 10^8$	575071,79
6	$4,51 \cdot 10^6$	990673,80	$3,81 \cdot 10^7$	$3,00 \cdot 10^6$	$2,76 \cdot 10^7$	$1,86 \cdot 10^6$
7	$1,34 \cdot 10^7$	$2,89 \cdot 10^6$	$4,29 \cdot 10^7$	$9,77 \cdot 10^6$	$3,37 \cdot 10^7$	$5,48 \cdot 10^6$
8	$3,48 \cdot 10^7$	$7,88 \cdot 10^6$	$6,49 \cdot 10^7$	$2,83 \cdot 10^7$	$5,52 \cdot 10^7$	$1,45 \cdot 10^7$
9	$8,34 \cdot 10^7$	$1,97 \cdot 10^7$	$1,04 \cdot 10^8$	$7,22 \cdot 10^7$	$9,34 \cdot 10^7$	$3,46 \cdot 10^7$
10	$1,84 \cdot 10^8$	$4,51 \cdot 10^7$	$1,69 \cdot 10^8$	$1,87 \cdot 10^8$	$1,59 \cdot 10^8$	$7,50 \cdot 10^7$
180	$2,69 \cdot 10^{15}$	$1,13 \cdot 10^{15}$	$2,46 \cdot 10^{15}$	$1,24 \cdot 10^{14}$	$1,16 \cdot 10^{14}$	$1,04 \cdot 10^{14}$

Tabulka 6.3: Závislost čísla podmíněnosti κ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 pro dané složky poruchového gradiometrického tenzoru, vypočteno na základě dat naměřených v listopadu a prosinci 2009.



Obrázek 6.1: Závislost čísla podmíněnosti κ na omezení sférické vzdálenosti ψ_0 pro dané složky poruchového gradiometrického tenzoru.

Kapitola 7

Gradientní metody a předpodmínění

V této kapitole představíme gradientní metody numerického řešení soustav lineárních rovnic a souvislost konvergence metod s podmíněností úloh, kterými jsme se zabývali v předchozích kapitolách. Analytické metody řešení soustav lineárních rovnic jako je Gaussova eliminační metoda nebo LU rozklad, viz [11], jsou pro řešení rozsáhlých úloh s velkým počtem neznámých prakticky nepoužitelné kvůli své časové i paměťové náročnosti. Vhodnější je užití iteračních metod, které mají výrazně menší paměťovou náročnost a někdy jsou i výrazně rychlejší, viz [16].

Uvažujme soustavu lineárních rovnic (2.28)

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)\mathbf{x} = \mathbf{c}. \quad (7.1)$$

Předpokládáme, že matice \mathbf{A} je regulární. Potom existuje jediné řešení \mathbf{x}_p takové, že

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_p = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_p = \mathbf{c}. \quad (7.2)$$

Definice 7.1 (Iterační metoda). Iterační metoda je zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k), \quad k \geq 0, \quad (7.3)$$

kde \mathbf{x}_k je k -tá iterace.

Definice 7.2 (Konvergentní iterační metoda). Iterační metoda se nazývá konvergentní, jestliže pro každé $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ je limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_p \quad (7.4)$$

nezávislá na počáteční aproximaci \mathbf{x}_0 .

Definice 7.3 (Chyba iterační metody). Chyba iterační metody v k -té iteraci je rozdíl

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_k. \quad (7.5)$$

7.1 Gradientní metody

Iterační řešení soustav lineárních rovnic můžeme ztotožnit s řešením minimalizační úlohy, jejíž výsledek je totožný s řešením soustavy lineárních rovnic. Za tímto účelem uvažujeme úlohu

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}), \quad (7.6)$$

kde

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{c}, \quad f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}. \quad (7.7)$$

Symetrická matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je díky předpokladu regularity matice \mathbf{A} pozitivně definitní, viz [2]. Řešení soustavy (7.1) je potom ekvivalentní s řešením minimalizační úlohy (7.6). Důkaz tohoto tvrzení můžeme nalézt v [16].

7.1.1 Metoda sdružených gradientů

Metoda sdružených gradientů je efektivní metoda minimalizace využívající tzv. sdružených směrů.

Definice 7.4 (Sdružené vektory). Množinu nenulových vektorů $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l\}$ nazveme množinou sdružených vektorů, pokud

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{B} \mathbf{p}_j = 0, \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, l\}, i \neq j, \quad (7.8)$$

kde \mathbf{B} je symetrická pozitivně definitní matice.

Předpokládejme, že v k -tém kroku máme k dispozici množinu sdružených vektorů $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}$ a následující iteraci získáme předpisem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \quad (7.9)$$

kde koeficient α_k je zvolen tak, aby minimalizoval funkci f v daném směru. Za účelem nalezení optimálního α_k definujeme funkci

$$\varphi(\alpha_k) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k). \quad (7.10)$$

Vhodnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
 \varphi(\alpha) &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k)^T \mathbf{B} (\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k) - (\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k)^T \mathbf{c} = \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{B} \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{p}_k + \frac{1}{2} \alpha (\mathbf{x}_k^T \mathbf{B} \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k^T \mathbf{c} - \alpha \mathbf{p}_k^T \mathbf{c} = \\
 &= f(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{p}_k + \alpha (\mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^T \mathbf{c}) = \tag{7.11} \\
 &= f(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{p}_k + \alpha \mathbf{p}_k^T (\mathbf{B} \mathbf{x}_k - \mathbf{c}) = \\
 &= f(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{p}_k - \alpha \mathbf{p}_k^T \mathbf{r}_k,
 \end{aligned}$$

kde $\mathbf{r}_k = \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{x}_k$ je reziduum. Hledáme α takové, aby $\varphi(\alpha)$ byla minimální. Derivaci $\varphi'(\alpha)$ položíme rovnou nule

$$\varphi'(\alpha) = \alpha \mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_k^T \mathbf{r}_k = 0 \tag{7.12}$$

a dostaneme stacionární bod

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{p}_k}. \tag{7.13}$$

Z pozitivní definitnosti matice \mathbf{B} dostaneme, že funkce $\varphi(\alpha)$ je konvexní na \mathbb{R} , protože

$$\varphi''(\alpha) = \mathbf{p}_k^T \mathbf{B} \mathbf{p}_k > 0. \tag{7.14}$$

α_k je tudíž minimem funkce φ .

Reziduum lze zapsat pomocí chyby (7.5)

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{x}_k = \mathbf{B} \mathbf{x}_p - \mathbf{B} \mathbf{x}_k = \mathbf{B} (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_k) = \mathbf{B} \mathbf{e}_k. \tag{7.15}$$

Pomocí následujících úprav

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{B} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B} \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{B} \mathbf{p}_k \tag{7.16}$$

$$\mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{B} \mathbf{p}_k$$

dostaneme

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{B} \mathbf{p}_k. \tag{7.17}$$

Zbývá určit sdružené vektory. Nejjednodušší počáteční volbou je

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{x}_0. \tag{7.18}$$

Další sdružené vektory generujeme jako kombinaci rezidua a předchozího sdruženého vektoru, provádíme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1}\mathbf{p}_k, \quad (7.19)$$

přičemž

$$\beta_{k+1} = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}. \quad (7.20)$$

Příslušné odvození můžeme najít v [11].

Nyní máme vše potřebné k sestavení algoritmu metody sdružených gradientů. Tato metoda dosáhne přesného řešení $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^m$ soustavy rovnic (7.1) maximálně po m krocích, viz [16]. S konečnou aritmetikou počítačů však přicházejí netriviální problémy. Zaokrouhlovací chyby způsobí, že aproximace \mathbf{x}_m , která by v přesné aritmetice byla řešením, je pouze jeho aproximací, jež může být dále vylepšována pokračováním algoritmu, viz [11]. V praxi však volíme podmínku pro ukončení algoritmu a nepožadujeme přesné řešení, nýbrž jeho vhodnou aproximaci.

7.1.2 Konvergence metody sdružených gradientů

Konvergence metody sdružených gradientů závisí na čísle podmíněnosti matice \mathbf{B} . Platí odhad

$$\mathbf{e}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_k \leq 2 \left(\frac{\kappa(\mathbf{B}) - 1}{\kappa(\mathbf{B}) + 1} \right)^k \mathbf{e}_0^T \mathbf{B} \mathbf{e}_0. \quad (7.21)$$

Pro dobře podmíněné matice metoda sdružených gradientů konverguje velmi rychle. Pro špatně podmíněné matice je číslo

$$\frac{\kappa(\mathbf{B}) - 1}{\kappa(\mathbf{B}) + 1} \quad (7.22)$$

blízke jedné. Odhad (7.21) je však velmi často nadhodnocen. Špatná podmíněnost matice \mathbf{B} ne vždy nutně implikuje pomalou konvergenci metody, viz [11].

7.2 Předpodmínění

Konvergence gradientních metod závisí na čísle podmíněnosti matice soustavy. Čím menší je číslo podmíněnosti, tím rychlejší je rychlost konvergence gradientní metody k předem zadané chybě. Tohoto poznatku se pokusíme využít při modifikaci původní soustavy rovnic tak, aby metoda sdružených gradientů použitá na transformovanou úlohu dosáhla mnohem rychlejší konvergence, než při použití na úlohu původní. Proces nahrazení soustavy $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ekvivalentní soustavou $\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{c}}$, kde číslo podmíněnosti nové matice soustavy $\tilde{\mathbf{B}}$ je menší než číslo podmíněnosti matice \mathbf{B} , nazýváme předpodmínění.

Uvažujme soustavu (7.1), kde \mathbf{B} je symetrická pozitivně definitní matice. Soustavu chceme modifikovat tak, aby nově vzniklá matice $\tilde{\mathbf{B}}$ byla opět symetrická pozitivně definitní. Necht' \mathbf{C} je libovolná regulární matice. Potom lze soustavu (7.1) zapsat ve tvaru

$$\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-T}\right)\left(\mathbf{C}^T\mathbf{x}\right)=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{c}. \quad (7.23)$$

Tímto dostaneme novou předpodmíněnou soustavu

$$\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{c}}, \quad (7.24)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-T}, \quad \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{C}^T\mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{c}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{c}. \quad (7.25)$$

Aplikujeme-li nyní metodu sdružených gradientů na modifikovanou soustavu (7.24), nedostaneme aproximace řešení soustavy (7.1), ale aproximace řešení soustavy (7.24). Protože ale známe vztah mezi řešeními obou soustav $\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{C}^T\mathbf{x}$, využijeme aproximací $\tilde{\mathbf{x}}_k$ k určení aproximací \mathbf{x}_k původního řešení \mathbf{x}_p . Položme

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{C}^{-T}\tilde{\mathbf{x}}_k. \quad (7.26)$$

Pokud $\tilde{\mathbf{x}}_k$ aproximuje $\tilde{\mathbf{x}}_p$, potom \mathbf{x}_k vyjádřené vztahem (7.26) aproximuje \mathbf{x}_p . Navíc platí

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_k^T\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{e}}_k &= (\tilde{\mathbf{x}}_p-\tilde{\mathbf{x}}_k)^T\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}_p-\tilde{\mathbf{x}}_k)= \\ &= \left(\mathbf{C}^T\mathbf{x}_p-\mathbf{C}^T\mathbf{x}_k\right)^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-T}\left(\mathbf{C}^T\mathbf{x}_p-\mathbf{C}^T\mathbf{x}_k\right)= \\ &= \left(\mathbf{x}_p-\mathbf{x}_k\right)^T\mathbf{B}\left(\mathbf{x}_p-\mathbf{x}_k\right)= \\ &= \mathbf{e}_k^T\mathbf{B}\mathbf{e}_k, \end{aligned} \quad (7.27)$$

to jest konverguje-li metoda sdružených gradientů rychle pro předpodmíněnou soustavu (7.24), pak stejně rychle konvergují i aproximace \mathbf{x}_k k přesnému řešení \mathbf{x}_p .

Z požadavku rychlejší konvergence metody sdružených gradientů plyne, že matici \mathbf{C} se snažíme zvolit tak, aby její vlastnosti umožňovaly co nejrychlejší konvergenci, ideálně

$$\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-T}\approx\mathbf{I}, \quad (7.28)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice.

Příklady metod předpodmínění a jejich algoritmů nalezneme v [1].

Shrnutí

Cílem diplomové práce bylo vyšetření podmíněnosti inverzních úloh ke konkrétním přímým úlohám inverzních úloh při transformaci parametrů gravitačního, resp. tíhového, pole Země.

Práce zahrnuje geodetické pojmy, vznikla však v rámci studijního oboru Matematické inženýrství. V kapitole 1 proto byly uvedeny základní pojmy související s tíhovým polem Země a jeho geodetickým popisem. V kapitole 2 byl uveden matematický aparát pro vyšetřování podmíněnosti inverzních úloh. Byly zde také uvedeny veličiny, které ovlivňují podmíněnost inverzní úlohy. Na základě Cauchyovy prokládací vlastnosti bylo dokázáno, že číslo podmíněnosti klesá s rostoucím krokem sítě. Závislost čísla podmíněnosti na omezení sférické vzdálenosti byla vyslovena jen hypoteticky.

Kapitoly 4, 5 a 6 měly podobnou strukturu. V každé kapitole jsme se zabývali konkrétní úlohou, to jest úlohou GRACE typu 1, úlohou GRACE typu 2 a úlohou GOCE. Byla uvedena integrální vyjádření, která jsme aproximovali pomocí obdélníkového pravidla a soustavy rovnic zapsali v maticových tvarech. Poté byla zkoumána podmíněnost odpovídajících inverzních úloh aplikací poznatků z kapitoly 2. Byla ukázána očekávaná závislost čísla podmíněnosti na kroku sítě. Všechny numerické experimenty také podpořily hypotézu o tom, že číslo podmíněnosti s rostoucím omezením sférické vzdálenosti roste.

V kapitole 7 jsme představili metodu sdružených gradientů a rychlost konvergence této iterační metody, která souvisí s podmíněností daných úloh. Tato kapitola představuje teoretický aparát, který se dá využít v budoucí práci navazující na dosažené výsledky.

Cílem diplomové práce bylo posoudit podmíněnost inverzních úloh. Na základě dosažených výsledků lze vyslovit, že číslo podmíněnosti inverzní úlohy roste se zjemňováním sítě a se zvětšováním omezení sférické vzdálenosti. U úlohy GOCE jsme porovnali výsledky obdržené na základě měření ve dvou měsících a jejich sloučení. Spojením dat z obou měsíců číslo podmíněnosti mírně kleslo, řádově však zůstalo stejně velké. Časová i paměťová náročnost výpočtu však díky dvojnásobnému počtu dat úměrně vzrostla. V literatuře je uváděno, že podmíněnost úlohy je dobrá, pokud je číslo podmíněnosti κ blízké jedné. V případě $\kappa > 100$ je podmíněnost úlohy špatná, viz [7]. Všechny úlohy studované v této diplomové práci lze z tohoto hlediska považovat za špatně podmíněné.

Analytické metody řešení soustav lineárních rovnic jsou pro řešení rozsáhlých úloh s velkým počtem neznámých prakticky nepoužitelné kvůli své časové i paměťové náročnosti. Vhodnější je užití gradientních iteračních metod, které mají výrazně menší paměťovou náročnost a někdy jsou i výrazně rychlejší. Rychlost konvergence gradientních metod souvisí s číslem podmíněnosti úlohy, resp. matice soustavy lineárních rovnic. Čím menší je číslo podmíněnosti, tím rychleji metoda konverguje k předem dané chybě. Použitím vhodné iterační metody a provedením předpodmínění lze rychlost konvergence iterační metody výrazně zlepšit. Řešení daných úloh však již není náplní této diplomové práce.

Na závěr dodejme, že všechny vykonané výpočty byly prováděny na vzdáleném počítači `pilleus.kma.zcu.cz` v programu MATLAB R2014a. Kódy programů jsou součástí příloženého CD.

Reference

Literatura

- [1] BARRETT, Richard et al. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Method*. 2nd edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. ISBN: 978-0-898713-28-2.
- [2] GANTMACHER, Felix R. *The Theory of Matrices, Vol. 1*. English translation from Russian original by K. A. HIRSCH. Chelsea Publishing Company, 1960. SBN 8284-0131-4.
- [3] GARCIA, Ramon V. *Local Geoid Determination from GRACE Mission*. The Ohio State University, 2002, report no. 460.
- [4] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Z anglického originálu přeložili Petr DUB aj. Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTIUM, 2000. ISBN 80-214-1869-9.
- [5] JARNÍK, Vojtěch *Integrální počet I*. Vydání 4. Nakladatelství Československé akademie věd, 1963.
- [6] JEKELI, Christopher *The Determination of Gravitational Potential Differences from Satellite-to-Satellite Tracking*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1999, roč. 75, č. 2, s. 85-101. ISSN: 0923-2958.
- [7] MÍKA, Stanislav a Marek BRANDNER *Numerické metody I*. Plzeň : ZČU Plzeň, 2000. ISBN 80-7082-619-3.
- [8] NOVÁK, Pavel *Integral Inversion of SST Data of Type GRACE*. Studia Geophysica et Geodaetica, 2007, roč. 51, č. 3, s. 351-367. ISSN: 0039-3169.
- [9] ŠPRLÁK, Michal a Pavel NOVÁK *Integral Transformations of Gradiometric Data onto a GRACE Type of Observable*. Journal of Geodesy, 2014, roč. 88, č. 4, s. 377-390. ISSN 0949-7714.

- [10] ŠPRLÁK, Michal, Eliška HAMÁČKOVÁ a Pavel NOVÁK *Alternative Validation Method of Satellite Gradiometric Data by Integral Transform of Satellite Altimetry Data*. Journal of Geodesy, 2015. DOI 10.1007/s00190-015-0813-5.
- [11] TEBBENS, Jurjen Duintjer aj. *Analýza metod pro maticové výpočty: základní metody*. MatfyzPress, 2012. ISBN 978-80-7378-201-6.
- [12] WELLENHOF, Bernard Hofmann a Helmut MORITZ *Physical Geodesy*. Springer-Verlag Wien, 2005. ISBN 978-3-211-23584-3.

Elektronické zdroje

- [13] Global Gravity Field Models. *ICGEM International Center for Global Gravity Field Models*. [online]. 2.2.2015 [cit. 2015-02-03]. Dostupné z: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>
- [14] GRACE Gravity Measurement. *GRACE - Gravity Recovery and Climate Experiment*. [online]. 11.2.2004 [cit. 2015-02-24]. Dostupné z: http://www.csr.utexas.edu/grace/science/gravity_measurement.html
- [15] Introducing GOCE *Introducing GOCE / GOCE / Observing the Earth / Our Activities / ESA*. [online]. ©2000-2015 [cit. 2015-03-30]. Dostupné z: http://www.esa.int/Our_Activities/Observing_the_Earth/GOCE/Introducing_GOCE
- [16] VONDRÁK, Vít a Lukáš POSPÍŠIL *Numerické metody I*. [elektronická skripta]. ©2011 [cit. 2015-05-04]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf

Příloha A

Izotropnost integračních jader

V příloze prozkoumáme integrační jádra jednotlivých úloh studovaných v kapitolách 4 až 6. Zobrazíme jejich závislost na sférických geocentrických souřadnicích integračních elementů (φ', λ') v oblasti vymezené rovnoběžkami 30° a 65° sférické šířky a poledníky -20° a 50° sférické délky pro zvolený výpočetní bod daný sférickými geocentrickými souřadnicemi (φ, λ) .

Zvolme výpočetní bod daný sférickými geocentrickými souřadnicemi (φ, λ) . Řekneme, že jádro $\tilde{K}(t, u)$ je izotropní, pokud

$$\tilde{K}(t, u) = \text{konst. pro } u \text{ pevné.} \quad (\text{A.1})$$

Jádro $\tilde{K}(t, u)$ je funkcí sférické vzdálenosti ψ mezi výpočetním bodem a integračním elementem, viz (2.17). Jádro $\tilde{K}(t, u)$ zřejmě nabývá ve výpočetním bodě (φ, λ) lokálního extrému, protože

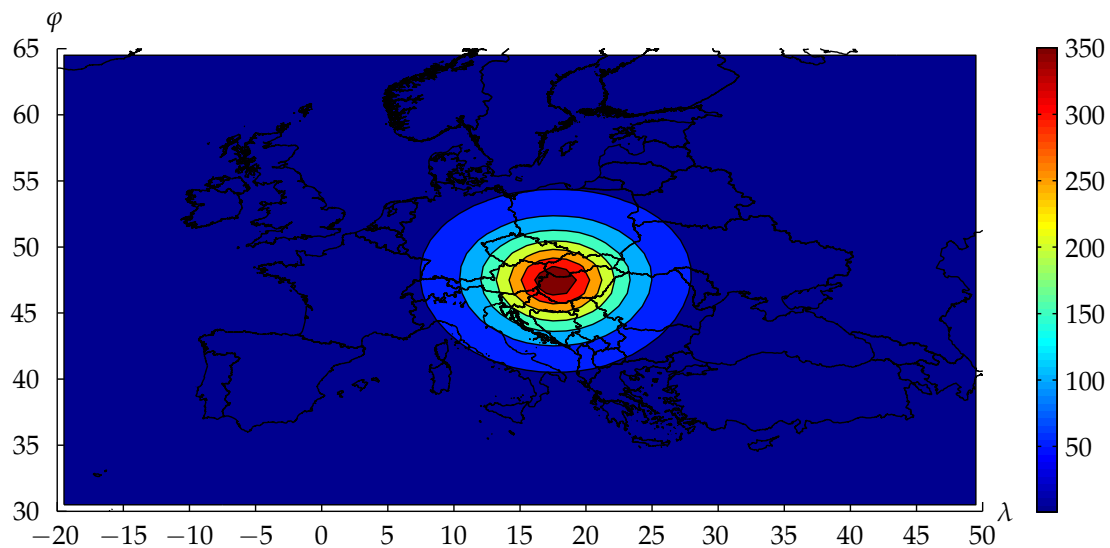
$$\begin{aligned} u &= \cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda') = \\ &= \sin \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \cos \varphi \cos 0 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Jdeme-li od výpočetního bodu kterýmkoli směrem, průběh izotropního jádra je stejný, nezávislý na směru. Jeho hodnota však závisí na sférické vzdálenosti ψ .

A.1 Úloha GRACE typu 1

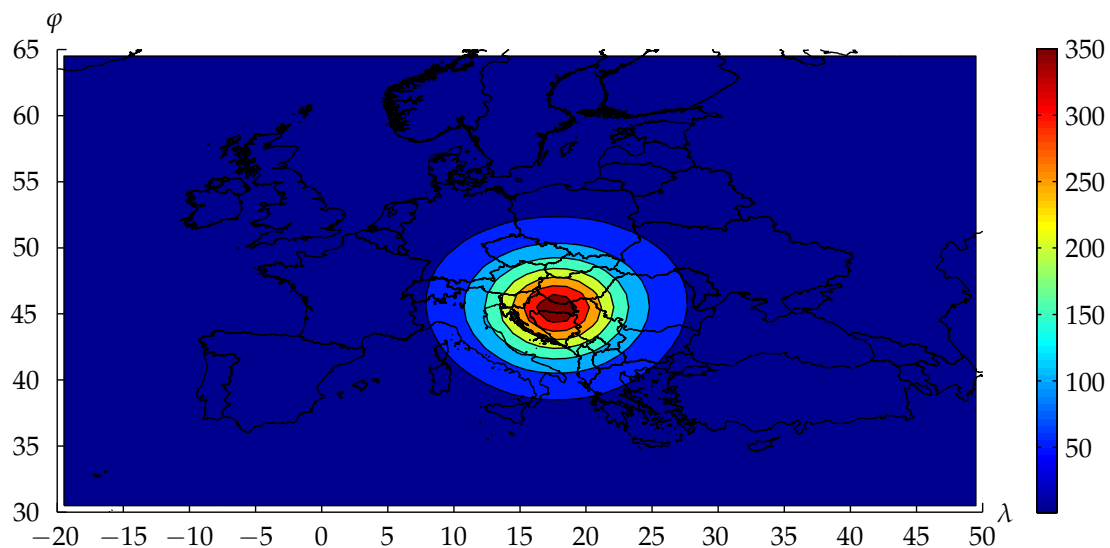
Zvolíme dvojici bodů, jejichž souřadnice byly naměřeny pomocí high-low SST. Vybraná dvojice bodů je určena sférickými geocentrickými souřadnicemi

$$\begin{aligned} [r^{[1]}, \varphi^{[1]}, \lambda^{[1]}] &= [6835812, 26; 47, 43; 17, 69], \\ [r^{[2]}, \varphi^{[2]}, \lambda^{[2]}] &= [6836222, 73; 45, 41; 17, 78]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$



Obrázek A.1: Izotropní integrační jádro $K(t^{[1]}, u^{[1]})$.

Na obrázcích A.1 a A.2 jsou zobrazena integrační jádra $K(t^{[1]}, u^{[1]})$ a $K(t^{[2]}, u^{[2]})$ daná uzavřeným tvarem (2.21). Je patrné, že jádro $K(t, u)$ je izotropní, jeho hodnota klesá s rostoucí sférickou vzdáleností ψ .

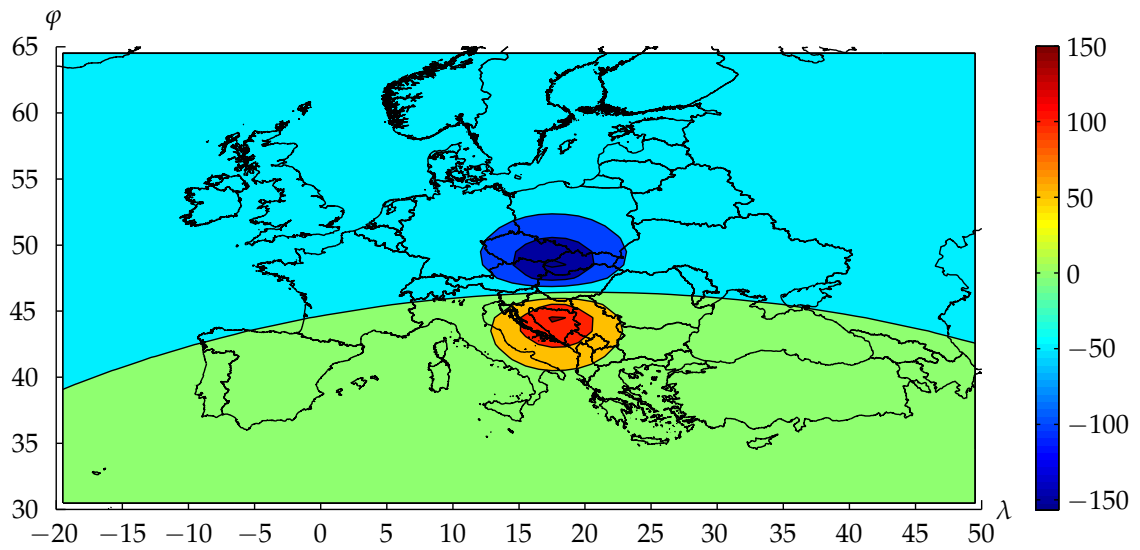


Obrázek A.2: Izotropní integrační jádro $K(t^{[2]}, u^{[2]})$.

Na obrázku A.3 je zobrazen rozdíl integračních jader $\delta K(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]})$

$$\delta K(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]}) = K(t^{[2]}, u^{[2]}) - K(t^{[1]}, u^{[1]}). \quad (\text{A.4})$$

Tento rozdíl izotropní není.



Obrázek A.3: Rozdíl integračních jader $\delta K(\vec{r}^{[1]}, \vec{r}^{[2]})$.

A.2 Úloha GRACE typu 2

Zvolíme dvojici bodů, jejichž souřadnice byly naměřeny pomocí high-low SST. Vybraná dvojice bodů je určena sférickými geocentrickými souřadnicemi (A.3).

Na obrázcích A.4 a A.5 jsou zobrazena integrační jádra $K^t(t^{[1]}, u^{[1]})$ a $K^u(t^{[1]}, u^{[1]})$ dané uzavřenými tvary (5.15) a (5.17). Je patrné, že obě tato jádra jsou izotropní.

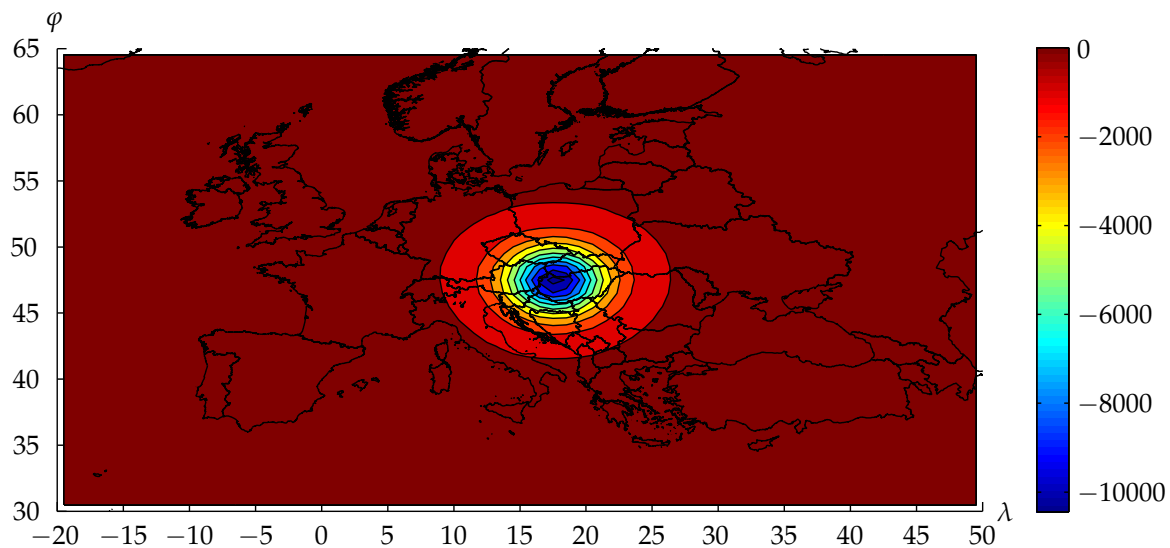
Na obrázku A.6 je zobrazena kombinace jader $K^t(t^{[1]}, u^{[1]})$ a $K^u(t^{[1]}, u^{[1]})$

$$e_r K^t(t^{[1]}, u^{[1]}) + e_\varphi \cos \alpha K^u(t^{[1]}, u^{[1]}) + e_\lambda \sin \alpha K^u(t^{[1]}, u^{[1]}). \quad (\text{A.5})$$

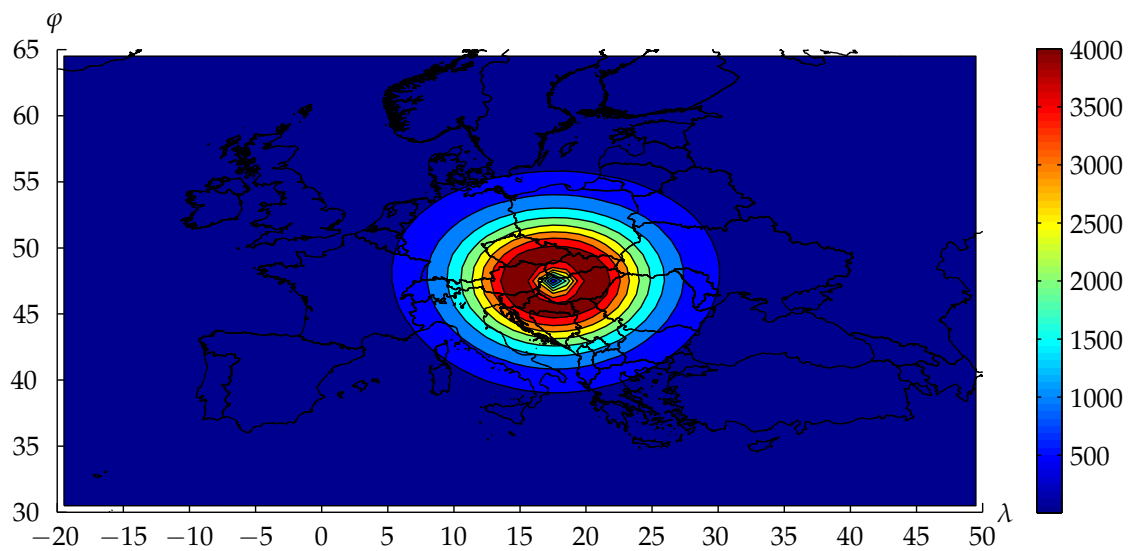
Tato kombinace závisí na přímém azimutu α , není tudíž izotropní.

Na obrázku A.7 je zobrazen rozdíl

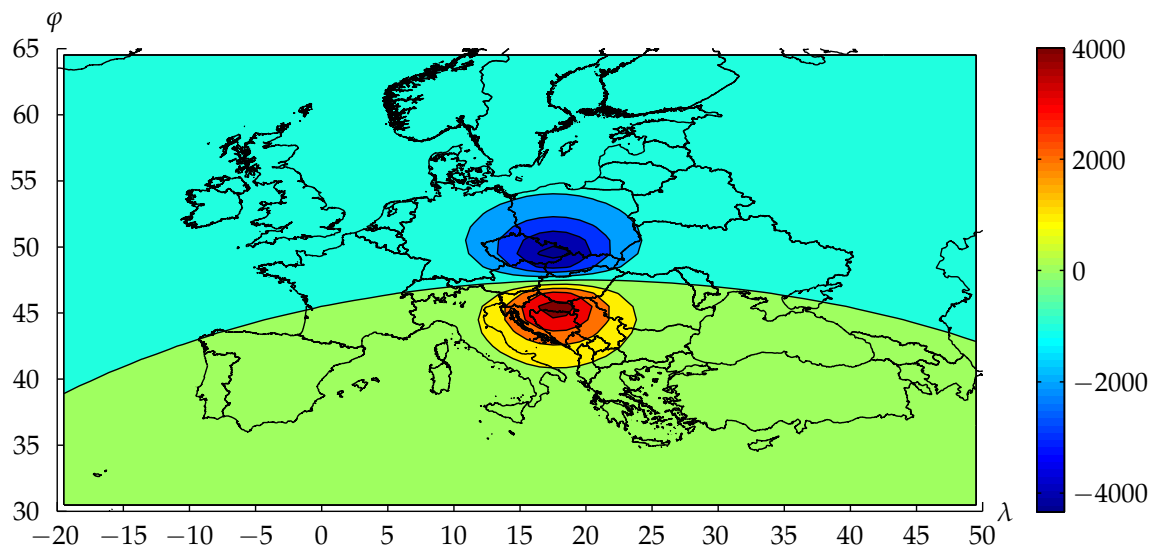
$$\delta [e_r K^t(t, u) + e_\varphi \cos \alpha K^u(t, u) + e_\lambda \sin \alpha K^u(t, u)]. \quad (\text{A.6})$$



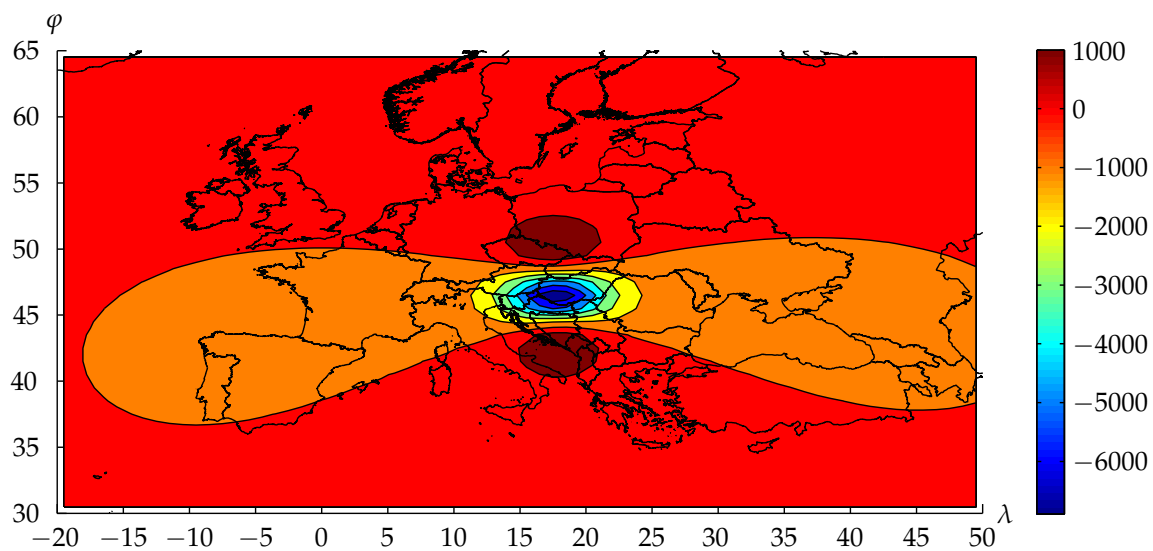
Obrázek A.4: Izotropní integrační jádro $K^t(t^{[1]}, u^{[1]})$.



Obrázek A.5: Izotropní integrační jádro $K^u(t^{[1]}, u^{[1]})$.



Obrázek A.6: Kombinace integračních jader (A.5).



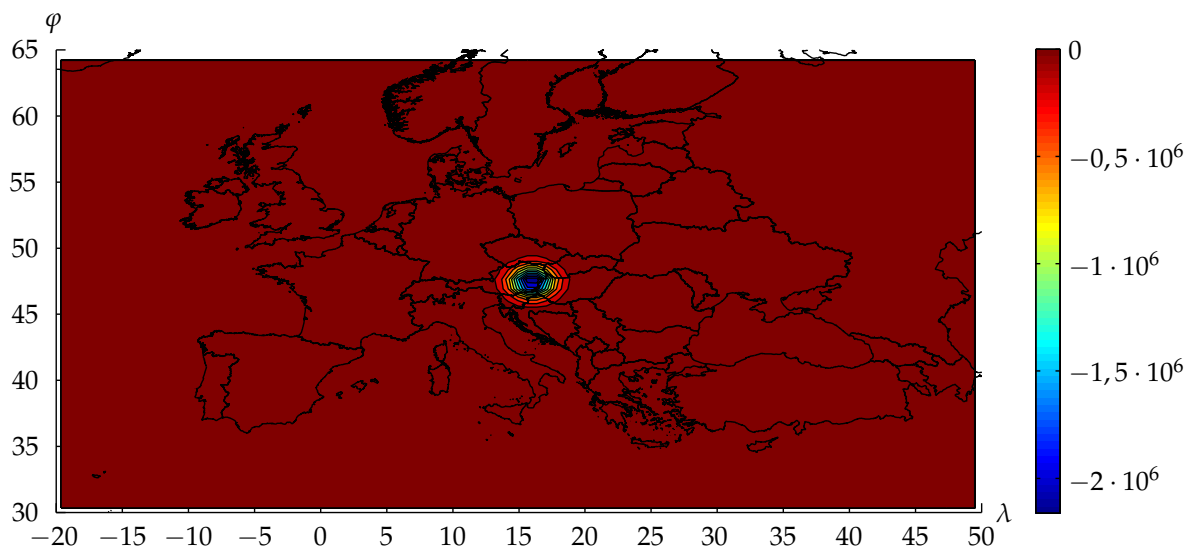
Obrázek A.7: Rozdíl (A.6).

A.3 Úloha GOCE

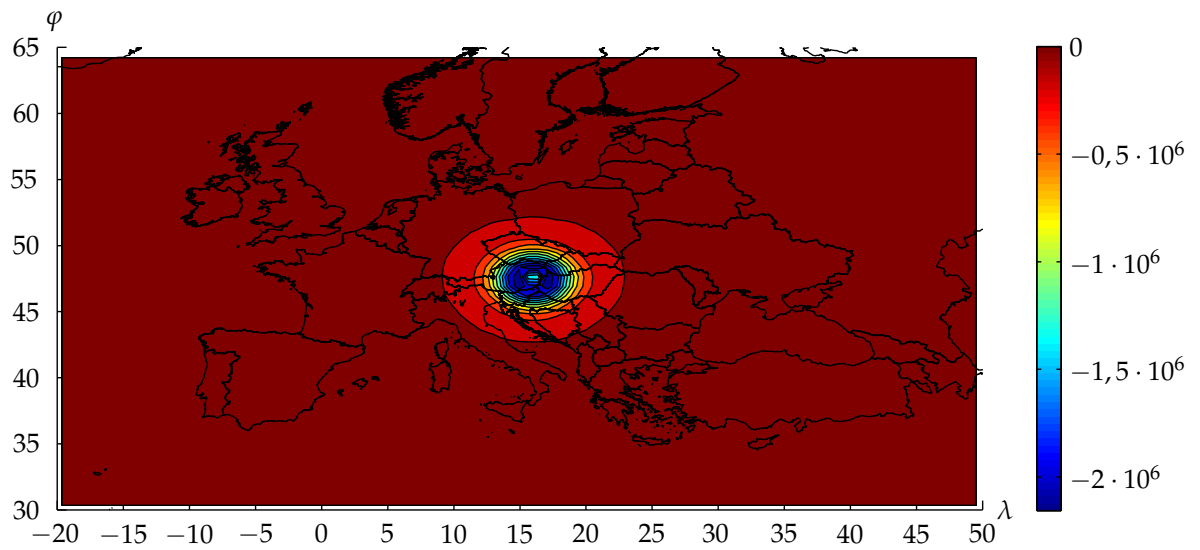
Zvolíme bod, jehož souřadnice byly naměřeny pomocí high-low SST. Vybraný bod je určen sférickými geocentrickými souřadnicemi

$$[r, \varphi, \lambda] = [6625315, 94; 47, 43; 16, 01]. \quad (\text{A.7})$$

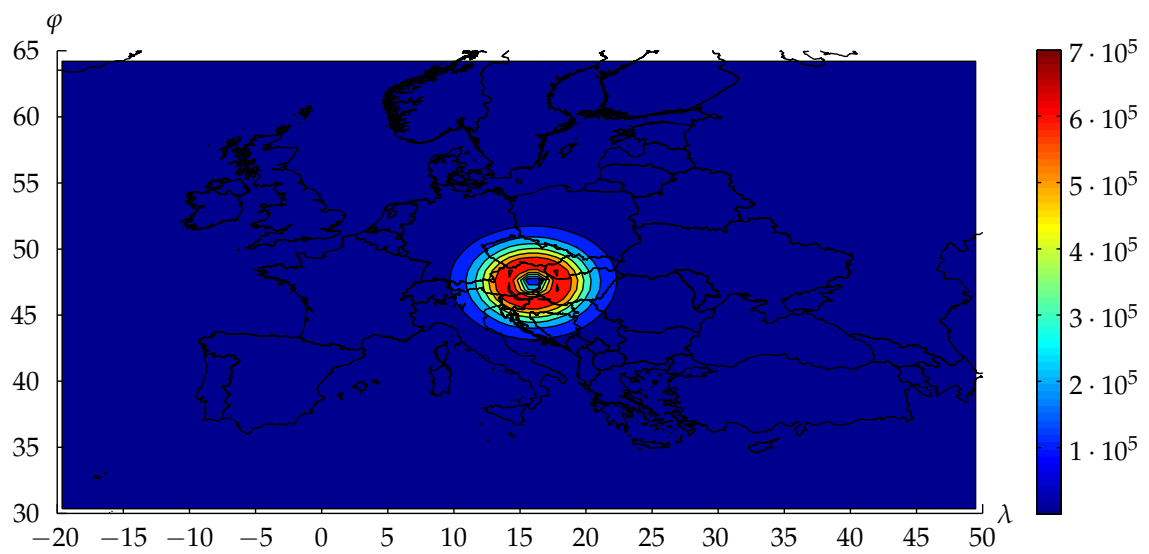
Na obrázcích A.8, A.9 a A.10 jsou zobrazena izotropní integrační jádra $K^{0*}(t, u)$, $K^{1*}(t, u)$ a $K^{2*}(t, u)$. Další obrázky zobrazují integrační jádra $K^{kl}(t, u, \alpha)$, $k, l \in \{\varphi, \lambda, r\}$, z nichž pouze jádro $K^{rr}(t, u)$ dané předpisem (6.9) je nezávislé na přímém azimutu α a je tudíž izotropní.



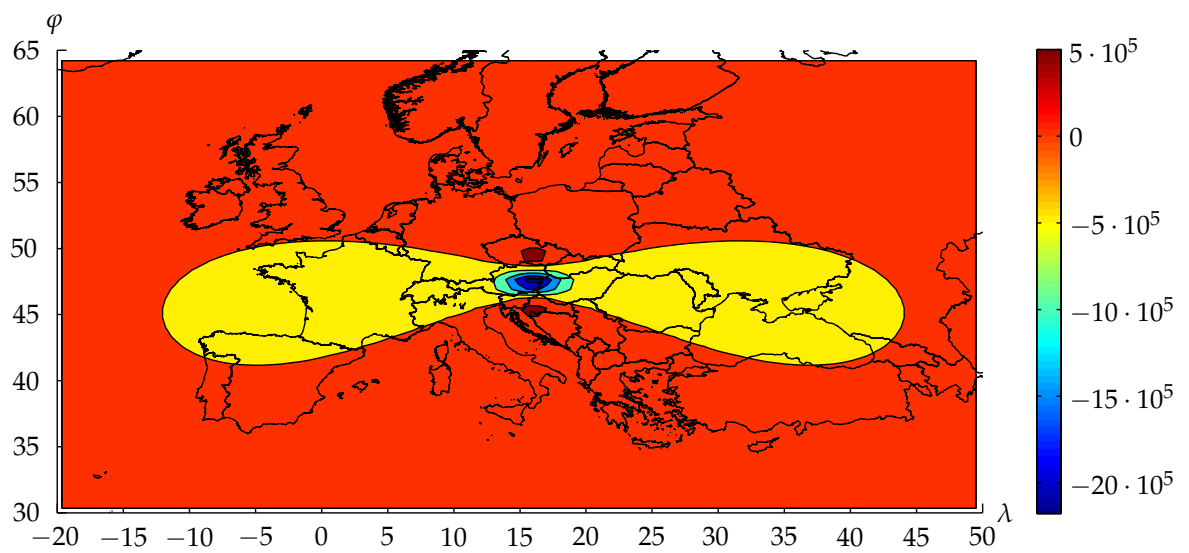
Obrázek A.8: Izotropní integrační jádro $K^{0*}(t, u)$.



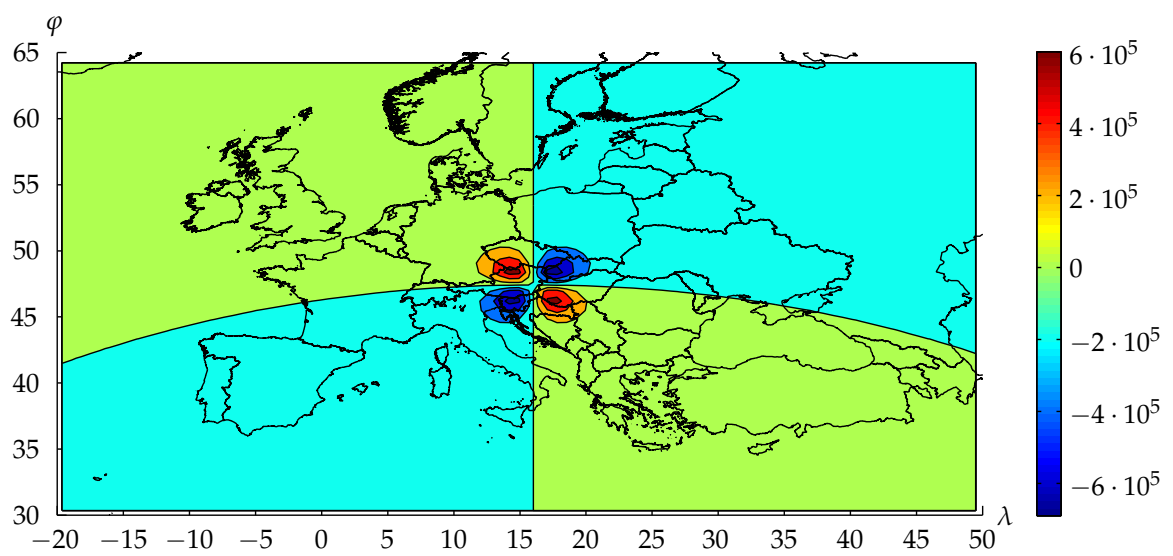
Obrázek A.9: Izotropní integrační jádro $K^{1*}(t, u)$.



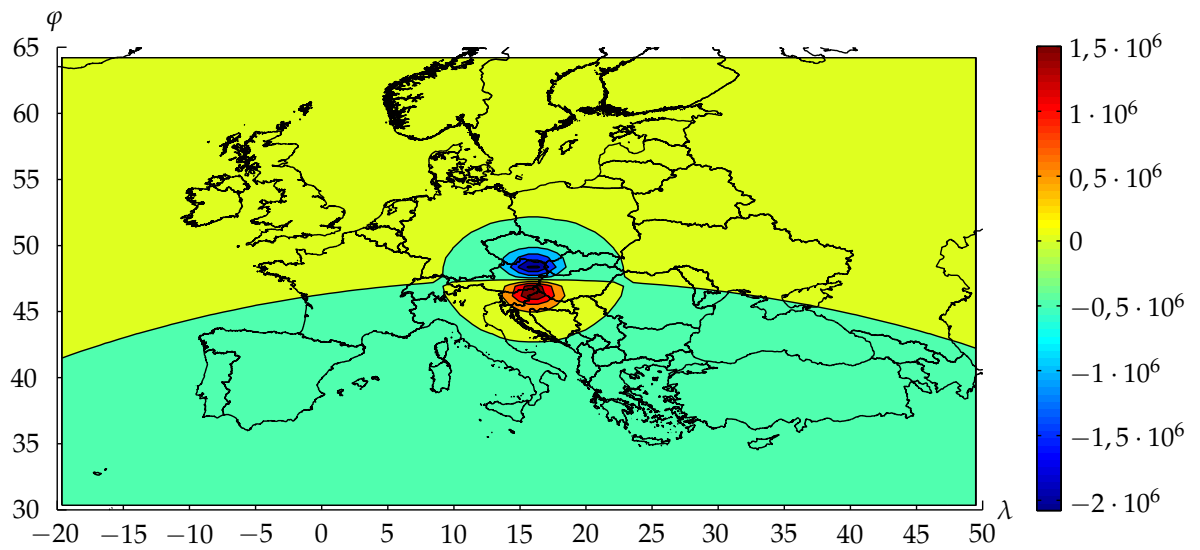
Obrázek A.10: Izotropní integrační jádro $K^{2*}(t, u)$.



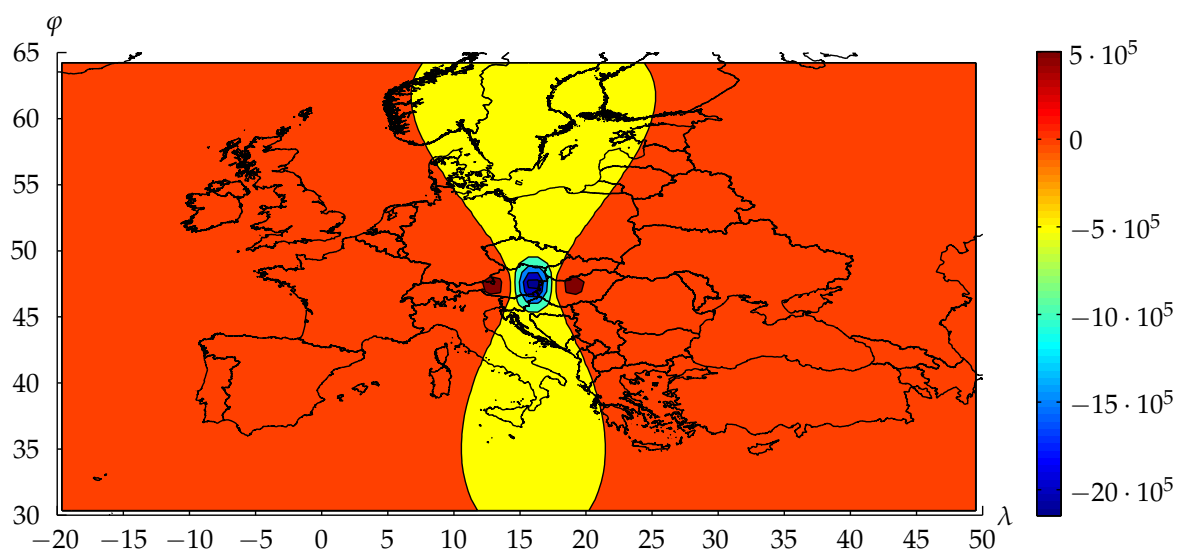
Obrázek A.11: Integrační jádro $K^{\varphi\varphi}(t, u, \alpha)$.



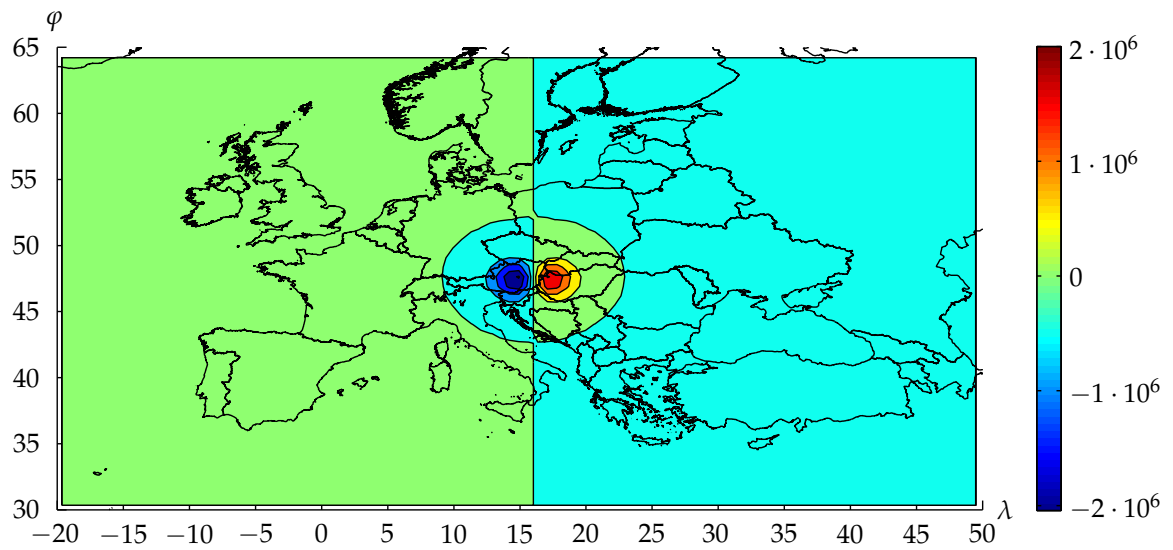
Obrázek A.12: Integrační jádro $K^{\varphi\lambda}(t, u, \alpha)$.



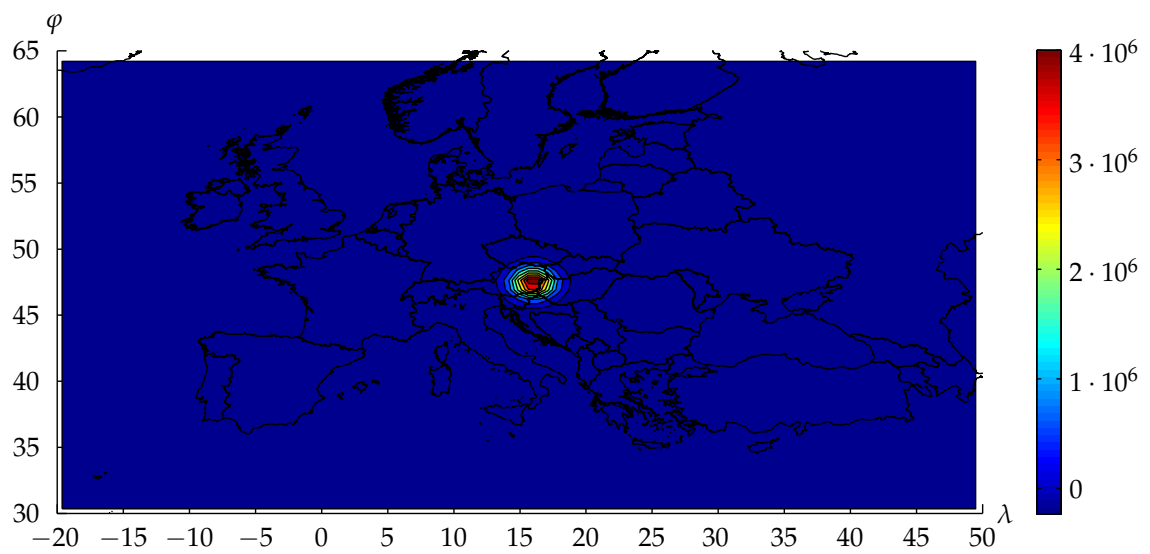
Obrázek A.13: Integrační jádro $K^{\varphi r}(t, u, \alpha)$.



Obrázek A.14: Integrační jádro $K^{\lambda \lambda}(t, u, \alpha)$.



Obrázek A.15: Integrační jádro $K^{\lambda r}(t, u, \alpha)$.



Obrázek A.16: Izotropní integrační jádro $K^{rr}(t, u)$.

Příloha B

Struktura přiloženého CD

K diplomové práci je přiloženo CD, které obsahuje elektronickou formu práce ve formátu pdf a složky

- Uloha GRACE typu 1,
- Uloha GRACE typu 2,
- Uloha GOCE.

V těchto složkách jsou soubory s příponou .m vytvořené v programu MATLAB R2014a. Pomocí těchto souborů byly vypočítány matice příslušící jednotlivým úlohám a čísla podmíněnosti inverzních úloh, viz dokumentace v preambuli kódů. Vypočtené matice nejsou součástí obsahu CD kvůli jejich nadměrným velikostem.