Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Moderní didaktické prostředky při výuce pravděpodobnosti a statistiky na střední škole

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vedoucí práce
RNDr. Blanka Šedivá, Ph.D.

Vypracovala
Bc. Pavla Křišťanová

květen 2015

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci na téma Moderní didaktické prostředky při výuce pravděpodobnosti a statistiky na střední škole vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

V Plzni ....

Ráda bych poděkovala vedoucí své diplomové práce RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za vstřícný přístup, cenné rady a věcné připomínky během konzultací a zpracování této práce.

Dále bych chtěla poděkovat mé rodině a příteli za jejich podporu a trpělivost po dobu mého studia.

Abstrakt:

Hlavním tématem této diplomové práce jsou pravděpodobnost a statistika jako jeden z tematických celků, probíraných v předmětu matematika na střední škole. Stěžejní část práce je psaná formou studijního materiálu, který je zaměřen na motivační úlohy z pravděpodobnosti a který by měl sloužit právě při výuce pravděpodobnosti na střední škole. Součástí textu je přehled současného stavu výuky pravděpodobnosti a statistiky na různých typech středních škol. Práce se také věnuje obecným didaktickým zásadám, které by měly být dodržovány při vytváření příprav na vyučovací hodinu.

Abstract:

The main topic of this thesis is the probability and statistics as one of the thematic units covered in the subject mathematics in high school. This work is written in the form of teaching material which is focused on the motivational exercises of the probabilities, that should serve for teaching the probability at secondary school. The thesis contains section about current state of knowledge of teaching probability and statistics at different types of secondary schools. There is described the general didactic principles that should be followed when the lessons are prepared and created.

Úvod

Matematika patří pro řadu studentů k méně oblíbeným předmětům, které v nich vyvolávají velké obavy. Strach z jednoduchých počtů mají už děti na základní škole a to může být jeden z důvodů, že si pro svoji budoucí kariéru vybírají raději humanitní než technické a přírodovědné obory.

Za posledních dvacet let v ČR přibyly desítky humanitně zaměřených fakult, ale nevznikly téměř žádné nové vysokoškolské instituce orientované na techniku, či přírodní vědy. Přesto bychom v současnosti těžko hledali nějaký obor lidské činnosti, ve kterém dosud matematika nenalezla uplatnění. Proto je matematika tak důležitou a neodmyslitelnou součástí lidského života.

Zajímavými a užitečnými odvětvími matematiky jsou statistika a práce s daty, které úzce souvisí s finanční gramotností každého z nás. Práce s počítačem a především práce s daty jsou vyžadovány ve většině zaměstnání.

Žijeme v době, kdy se velmi rychle mění svět kolem nás a stále více se setkáváme s novými technickými přístroji. Dnešní studenti používají tyto prostředky každý den a samozřejmě je umí všechny využít také při studiu. Cílem hodin, ve kterých jsou použity moderní výukové metody, je snaha zkvalitnit a zefektivnit základní i středoškolské vzdělávání, prohloubit komunikaci mezi studenty a pedagogy a zvýšit motivaci studentů k práci s technikou.

Obsah

Kapitola 1

Psychodidaktické aspekty výuky

Didaktika psychologie připravuje učitele, zprostředkovatele studentova poznání, na rozvoj jeho kognitivních, učebních i osobnostních charakteristik.

1.1 Didaktika

Základním námětem této práce je pojem didaktika, který pochází z řeckého slova didaskein. To znamená učit, vyučovat, poučovat, jasně vykládat a také dokazovat. V pedagogickém smyslu se začal pojem didaktika používat až v 17. století, kdy se poprvé objevily snahy o encyklopedické vzdělávání. Přibližně v tuto dobu lidé vzhledem k rozsahu tehdejšího vědění začali vymýšlet tvořivé způsoby jeho předávání.

Jako pedagogický termín jej poprvé použil Wolfgang Ratke, který slovo didaktika překládal jako umění vyučovat. Jan Amos Komenský ve svém známém díle Didaktika velká chápe didaktiku jako: „Všeobecné umění, jak naučit všechny všemu“. Do tohoto pojmu zahrnuje obecné otázky, cíle, úkoly výchovy, otázky obsahu vzdělávání, mravní, náboženské a tělesné výchovy, ale také vyučovací zásady, metody a organizaci školské soustavy. Zahrnuje tedy všechny nauky, které dnes tvoří předmět pedagogika.

Ani v současné době neexistuje přesná definice pojmu didaktika, protože se neustále vyvíjí, modernizuje a upravuje vzhledem k rychle rostoucímu vědeckému a technickému poznání.

S vývojem didaktického myšlení se spolu s obecnou didaktikou postupně rozvíjela didaktika podle zaměření na jednotlivé předměty i druhy škol. I přesto, že je didaktika v dnešní době chápána jako samostatná vědní disciplína, nelze ji jednoduše oddělit od ostatních částí pedagogiky, jakými jsou například: dějiny pedagogiky, filozofie výuky, teorie výchovy, pedagogická psychologie či speciální pedagogika.

Didaktika matematiky je chápána jako vědní disciplína, která pomáhá řešit speciální otázky a problémy výuky matematiky na jednotlivých typech škol. Vymezuje nám obsah učiva matematiky, doporučuje vhodné metody a postupy vyučování, ale také respektuje psychologické zákonitosti učení.

[1]

1.2 Vyučovací proces

Vyučování je ustálená forma cílevědomého a systematického vzdělání i výchovy dětí, mládeže a dospělých. Realizuje se ve školách, v rodině, kurzech nebo různých vzdělávacích zařízeních. Vyučování se rozvíjí a mění v průběhu doby díky sociálně-ekonomickým a kulturním podmínkám.

Vyučování představuje specifický druh lidské činnosti, spočívající ve vzájemné spolupráci učitele a studenta, která směřuje k určitým cílům. Nejdůležitějšími komponentami jsou:
- cíle vyučování;
- obsah (učivo);
- organizační formy a didaktické prostředky, které se používají;
- podmínky, za nichž proces vyučování probíhá;
- vztah učitele a studenta.

Působením vzájemných vztahů mezi těmito komponentami dochází k odlišnostem v dynamice vyučovacího procesu jednotlivých studentů.

Vyučovacím procesem rozumíme proces, ve kterém vystupují učitel, student a obsah vzdělávání, neboli učivo, za účelem splnění výchovně vzdělávacích cílů. Probíhá za konkrétních podmínek, kdy subjekty vstupují do vzájemných vztahů. Učitel musí vycházet z obsahu vzdělání, ale přizpůsobit se také zpracování učiva tak, aby bylo srozumitelné pro posluchače. Ti přijímají učivo a zpracují si ho v mozku do podoby, které rozumí, v souvislosti s jejich osobní zkušeností.

[2]

1.3 Výchovně vzdělávací cíle

Cíle jsou ideální představa toho, čeho chceme procesem vyučování dosáhnout. Je to něco obecného, jako například jaké znalosti a dovednosti by měl žák mít po absolvování povinné školní docházky. Chápeme tím tedy zamýšlený a očekávaný výsledek, k němuž učitel v součinnosti se žáky směřuje.

- **Kognitivní cíle** by měl učitel stanovit tak, aby věděl, co a jak se má student naučit.

Student by měl přesně pochopit, jaký výkon se od něho očekává, které učební úlohy má umět vyřešit a měl by umět popsat a zdůvodnit postup svého řešení. Jedná se tedy o vědomostní poznatky a rozumové dovednosti.

- **Afektivní cíle** výuky je vhodné využít při zaujímání postojů k určitým situacím. Při určování těchto cílů učitel promýšlí obsah tematického celku z toho hlediska, jak a ve kterých rovinách příslušné téma může ovlivnit postoje studentů a jejich hodnotovou orientaci. Slouží tedy k oceňování hodnot a zaujímání postojů.

- **Psychomotorické cíle** učitel stanoví na základě toho, jaké psychomotorické dovednosti mají studenti získat- koordinace, dovednosti.

Základní dělení cílů je dělení na:
- dlouhodobé;
- krátkodobé,
kde dlouhodobé jsou obecnější než krátkodobé.

V cíli mají být obsaženy základní informace týkající se:
- činnosti studenta;
- stanovení podmínek k dosažení cíle (pomůcky, prostředí, způsob řešení);
- normy zvládnutí cíle (počet úloh, tolerance nepřesnosti);
- časového limitu.

Bloomova taxonomie je jednou z nejznámnějších teorií vzdělávacích cílů, nazvaná podle amerického psychologa Benjamina Blooma. Jedná se o pedagogickou teorii ovlivňující plánování výuky a tvorby kurikula. Bloom stanovil roku 1956 v oblasti kognitivních cílů šest hiearchicky uspořádaných kategorií, které jsou dále členěny.

- znalost: zapamatování představ, učiva nebo jevů;

- pochopení/porozumění: pochopení doslovného sdělení v rámci komunikace;

- aplikace: bez pochopení není student schopen metodu, teorii nebo princip používat;

- analýza: rozbor učiva na jeho základní složky a odhalení vztahů mezi jeho částmi;

- syntéza: skládání složek a částí tak, aby tvořily celek;

- hodnocení: uvažování ve vztahu k nějakému záměru hodnotit- práce, řešení, metody.

V pozdějších letech byla tato taxonomie doplněna o sedmou kategorii- tvořivost: soubor schopností, které umožňují uměleckou, vědeckou nebo jinou tvůrčí činnost.

[2, 3]

1.4 Hodnocení

Úroveň výstupu vzdělávacího působení se zjišťuje a hodnotí na několika úrovních: výsledky jednotlivců, tříd a škol. Každá z těchto kategorií představuje rozsáhlou oblast pro hodnocení.

V procesu hodnocení studentů se především zaměřujeme na:
- vědomosti vztahující se k učivu jednotlivých témat;
- dovednosti vztahující se ke konkrétnímu učivu;
- postoje, vlastnosti a vztahy.

V obecném smyslu lze považovat za školní hodnocení nebo- li evaluaci zaujímání a vyjadřování kladného nebo záporného stanoviska učitelů k výsledkům studentova učení, činnosti, vlastnostem a projevům. Hodnocení je tedy důležitým aspektem vzdělávání pro učitele, studenta i jeho rodiče.

Během vyučování je zpětná vazba podána bezprostředně po studentově výkonu a předpokládá se, že student na jejím základě reguluje svůj další učební postup. Zpětná vazba slouží ke zlepšení výkonu při budoucích činnostech.

[1, 4]

1.5 Výukové metody

Výukové metody lze chápat jako uspořádanou činnost učitele, která vede k naplnění daných výchovně vzdělávacích cílů. Na konci každého tématu by si měl učitel ověřit, zda student s pomocí daných výukových metod tohoto cíle dosáhl. K tomuto účelu slouží písemné práce, ústní zkoušení či vypracování referátu. Vidíme tedy, jak všechny tyto pojmy spolu úzce souvisí a jak jsou pro činnost učitele důležité.

V literatuře se setkáváme s řadou možných klasifikací výukových metod podle různých kritérií. V následující kapitole budou uvedeny čtyři hlavní metody a jejich další třídění.

[5]

1.5.1 Metody z hlediska pramene poznání

(didaktický aspekt)

slovní metody
Slovo je pro učitele nástroj nejefektivnějšího a nejrychlejšího přenosu požadovaných infor-

mací. Jedná se tedy o nejčastěji využívané metody.

- monologické: vysvětlování, přednáška, vyprávění, instruktáž;
- dialogické: založeny na rozdělení komunikační aktivity mezi učitelem a studenty;
- písemné: písemná cvičení, kompozice;
- práce s učebnicí: při práci studenta s textem, se zvyšuje jeho učební aktivita.

názorně demonstrační metody
Opírají se o přímý názor a často také o pasivní pozorování jevů. Jsou důležité především pro počáteční fázi poznání, která začíná často prožitkem a vjemem.

- pozorování jevů: cílevědomé pozorování předmětů, objektů, jevů, procesů;
- předvádění: předmětů, činností, pokusů, modelů;
- projekce statická i dynamická: ukázky obrazů, grafů, nákresů, promítání slajdů, animací.

praktické metody
Jsou velmi podstatnou a neodmyslitelnou součástí výuky z hlediska motivace studentů. Názorné ukázky a pokusy, které si studenti sami zkusí, se pamatují lépe než učebnicová teorie.

- pohybové dovednosti: posun od jednoduchých manuálních činností ke složitějším;
- laboratorní práce: pokusy, praktické ukázky;
- pracovní činnosti: práce v dílnách a na pozemcích, školní praxe, praxe v podnicích;
- výtvarné činnosti: sestrojování grafů, rýsování schémat, tvořivé činnosti.

[3, 5, 6]

1.5.2 Metody z hlediska aktivity a samostatnosti studentů

(psychologický aspekt)

sdělovací metody
Učitel prezentuje výklad s využitím různých prostředků a řízení hodiny je pouze na něm. Student je během prezentace aktivním posluchačem.

samostatné práce studentů
Důležitou součástí je formulace problému a jeho postupné řešení. Student pracuje samostatně, bez zásahu učitele.

výzkumné a problémové metody
Během využívání této metody je nutná spolupráce ve skupinách a objevování nových poznatků. Učitel usměrňuje studentovy aktivity a pomáhá jen v kritických okamžicích.

[3, 5, 6]

1.5.3 Charakteristika metod z hlediska myšlenkových operací

(logický aspekt)

srovnávací metody
Student porovnává jednotlivé znaky a vlastnosti předmětů, porovnává je v čase, srovnává objekty, výsledky a postupy řešení.

induktivní metody
Jde o poznání, které vychází z empiricky zjištěných faktů a dospívá k obecným závěrům.

deduktivní metody
Dedukcí chápeme vyvozování nových tvrzení při dodržování pravidel logiky. Je to metoda opačného typu než je metoda induktivní.

analyticko-syntetické metody
Jedná se o odvozování od dílčího k obecnému a naopak.

[3, 5, 6]

1.5.4 Aktivizující metody

(interaktivní metody)

diskuzní metody
Ve větší skupině probíhá řízená výměna názorů na určité téma. Důležitá je schopnost argumentace.

situační metody
Podstatou je řešení problémové učební úlohy. Očekává se, že si student vybere jedno z nabízených řešení a obhájí si svůj názor: studenti se tak učí rozhodovat o vhodném řešení.

inscenační metody
Spočívají v simulaci stanovených situací, kdy se řešení realizuje formou hraní rolí vzdělávaných studentů.

didaktické hry
Hra je pro studenty silným motivačním stimulem, což způsobí aktivizaci jejich potenciálu, a to zejména při hrách o odměny.

Musíme poznamenat, že v konkrétním vyučovacím procesu se uplatňují různé vyučovací metody souběžně a ve vzájemném propojení. Nejsou tedy od sebe jednotlivě odděleny.

[3, 5, 6]

1.6 Motivace

Mezi nejvýznamnější faktory, ovlivňující lidské chování a jednání patří motivace, která se vyskytuje v mnoha podobách. Motivace nám umožňuje uspokojování potřeb, překonávání životních obtíží, splnění vytyčených cílů a plánů. V každém věku má motivace jinou podobu, jinak se projevuje u dětí ve školním věku a odlišná je zase u dospělých. Motivace je velmi úzce spojena s výchovně vzdělávacím procesem a je jednou z podmínek úspěšnosti studenta ve škole.

Motivace je v psychologii definována mnoha autory, obecně ji však lze označit jako psychický proces, který vede k energetizaci organismu. Samotný název motivace je odvozen z latinského slova movere, což znamená hýbat, pohybovat. Motivací tedy rozumíme proces, na jehož počátku musí stát nějaký motiv, jenž působí jako spouštěč celého procesu. Bez motivu by proces motivace nemohl vzniknout.

Samotná motivace v chování člověka vychází z vnitřních (potřeba) a vnějších (incentiva) pohnutek. Potřeby se projevují pocitem vnitřního nedostatku nebo přebytku, který vzniká při narušení rovnovážného stavu organismu, přičemž mohou být vrozené, nebo naučené. Incentivy jsou naopak vnější podněty, jevy a události.

Motiv vznikne, pokud je vzbuzena potřeba. Je to v podstatě důvod, pro který člověk začíná jednat určitým způsobem. Motivy se vytvářejí ve vzájemné interakci potřeb a incentiv. Za motiv tak považujeme všechno, co člověka aktivizuje a je příčinou jeho jednání.

[4, 7]

1.6.1 Motivace studentů

Většina učitelů a pedagogických odborníků zastává názor, že pozitivní motivace v činnosti studenta je možná nejdůležitější podmínkou jeho úspěchu ve školní lavici. Motivace během vyučování ovlivňuje studentovy cíle, jeho chování, důvody proč se učí, nebo neučí a zvyšuje nebo snižuje jeho zájem o dané téma. Motivace by také měla být přizpůsobena cíli a obsahu vyučování a měla by být úměrná věku jedince.

Motivace tedy ve vyučovacím procesu představuje důležitý faktor a je jedním z prvořadých cílů výchovy a vzdělávání. Je proto nutné rozvíjet především vnitřní motivaci studentů k učení formou seberealizace. Motivaci pedagog neuplatňuje pouze v první fázi vyučovacího procesu, ale během celé učební činnosti. Učitel tedy musí zjistit, které potřeby jsou v individuální hierarchii daného studenta dominantní.

[7]

1.6.2 Vnější motivace

Vnější motivace je takový druh motivace, kdy jedinec nejedná z vlastní vůle, ale je pod vlivem nějakého vnějšího činitele. Tyto vnější činitele nazýváme incentivy- vnější podněty, jevy a události, které mají schopnost vzbudit a většinou i uspokojit potřeby člověka.

O vnější motivaci hovoříme, pokud jsou prostřednictvím učení naplněny jiné potřeby, na učení původně zcela nezávislé. Takovéto chování lze nazvat instrumentálním. To znamená, že je nástrojem k dosažení vnějších motivačních činitelů, např. získání odměny, vyhnutí se trestu apod.

Pokud u studenta převládá motivace vnější, často může vykazovat vyšší úzkostnost, menší sebevědomí, horší přizpůsobivost školnímu prostředí a nižší schopnost vyrovnat se s neúspěchem než student motivovaný vnitřně. Studenti s vnější motivací upřednostňují jednoduché úkoly s předpověditelným řešením.

Mezi základní vnější motivační činitele patří dobré známky, vztahy s učiteli, rodiči i spolužáky a v neposlední řadě také odměny a tresty.

[7]

1.6.3 Vnitřní motivace

Vnitřní motivace studenta vychází z jeho vnitřních pohnutek, z vnitřních potřeb. Potřeby můžeme označit za dispoziční motivační činitele, což platí jak pro potřeby vrozené, tak pro potřeby, které jedinec získává v průběhu života.

Pokud je člověk vnitřně motivován, lze předpokládat, že danou činnost vykonává na základě svého svobodného rozhodnutí.

Z výzkumů vyplývá, že studenti, u kterých převládá vnitřní motivace, vykazují celkově lepší studijní výsledky, pečlivěji se připravují na vyučování a do školy chodí raději než studenti motivovaní vnějšími činiteli. Pokud je student vnitřně motivován k určité činnosti, dělá tuto činnost pro ni samotnou a ne pro nějaký vnější podnět (ocenění, pochvala, trest).

Platí, že počínání motivované vnitřně bývá spontánnější, pružnější, tvořivější a od počínání ovlivněného vnější motivací se liší tím, že není vykonáváno pod tlakem.

S vnitřní motivací studentů souvisí tři základní typy potřeb:

- Potřeby poznávací, které jsou důležité z toho důvodu, že učení představuje jednu z významných forem poznávání.

- Potřeby sociální jsou dalším typem díky tomu, že učení probíhá v sociálním kontextu.

- Potřeby výkonové hrají roli, když jsou na studenta při vykonávání úkolů kladeny určité požadavky.

Jednou z nejúčinnějších metod zvyšování vnitřní motivace studentů je probuzení potřeb. Jednotlivým výše zmíněným typům potřeb a jejich probuzení budou věnovány následující odstavce. Pro lidi je vlastní potřeba poznání a tato přirozená motivační tendence výrazným faktorem, ovlivňujícím kognitivní, sociální i fyzický vývoj. Je ovšem důležité zmínit, že každý člověk je vnitřně motivován pro určitý druh aktivit a pro jiný naopak ne.

Pokud je student motivován vnitřně, učí se proto, že pro něj proces učení představuje zdroj poznání a umožňuje mu tak uspokojit svoji poznávací potřebu, a to nejen v průběhu činnosti samotné, ale i díky jejím výsledkům, kterými jsou získané poznatky. Pokud jsou tyto potřeby dostatečně podporovány, mohou se stát jedním z trvalých zdrojů rozvoje osobnosti a také motivačním zdrojem studentova učení.

1. Poznávací potřeby

Mezi poznávací potřeby řadíme především potřebu smysluplného receptivního poznávání, která se projevuje snahou o získání nových informací, jejich uspořádání a zachování. Dále se sem také řadí potřeba vyhledávání a řešení problémů, která může být aktualizována v každé problémové situaci.

Protože vnitřní motivace učební činnosti vychází především z poznávacích potřeb, je důležité, aby byly studentům nabízeny takové činnosti, které ji probouzí. Pokud se to podaří, stane se pro ně učení vnitřně motivovaným poznáváním, které vede k uspokojení poznávací potřeby.

2. Sociální potřeby

Vnitřní motivaci ovlivňují kromě potřeb poznávacích také potřeby sociální. Pro rozvoj motivace k učení jsou důležité proto, že se student rozvíjí v interakci s ostatními lidmi. Vývoj dítěte od raného dětství probíhá ve společnosti druhých lidí. přičemž role dítěte není v tomto případě pasivní, ale dochází ke kontaktu s ostatními. Z tohoto důvodu nelze sociální potřeby opomenout.

Také samotné poznávání je ve své podstatě sociální, protože komunikace a předávání získaných poznatků je významnou složkou poznávací činnosti. Z pedagogicko-psychologického hlediska jsou s ohledem na studenta nejvýznamnějšími sociálními potřebami potřeba pozitivních vztahů a potřeba sociálního vlivu.

a. Potřeba pozitivních vztahů

Tato potřeba je uspokojována v kontaktu s jiným člověkem, ve kterém si obě strany vzájemně důvěřují a shledávají se sympatickými. Je možné rozlišit tři typy jedinců podle toho, která potřeba u nich převažuje.

Prvním je typ s vysokou úrovní potřeby pozitivních vztahů a nízkou úrovní obavy z odmítnutí, ke které dochází tehdy, pokud má jedinec dlouhodobou zkušenost s úspěšnými mezilidskými vztahy.

Druhým je typ s nízkou potřebou pozitivních vztahů a nízkou obavou z odmítnutí. Takový jedinec nevyhledává vztahy s jinými lidmi a není nešťastný, pokud zůstane sociální vztah neopětovaný.

Posledním je typ s vysokou potřebou pozitivních vztahů a vysokou mírou obavy z odmítnutí. Projevuje se patrným napětím a strachem jedinců z neznámého prostředí, do kterého se chtějí na jednu stranu začlenit, na stranu druhou však trpí obavami z odmítnutí.

b. Potřeba vlivu

Potřeba vlivu je druhou významnou složkou sociálních potřeb. Tato potřeba se může projevovat dvojím způsobem, a to buď jako dominantní chování, jehož cíl je totožný s cílem kolektivním, anebo jako dominantní chování s cílem ovládat druhé pro potěšení z tohoto ovládání.

Pro rozvíjení sociální motivace studentů je důležité, aby učitel podporoval pozitivní vztahy sebe samého se svými žáky, zároveň však i pozitivní vztahy v rámci třídy. S pomocí výchovných a vzdělávacích postupů je potřeba ve třídě vytvořit příznivé sociálně-motivační podmínky, např. prostřednictvím skupinových a týmových prací, diskuzí či her.

3. Potřeby výkonové

S výkonovou motivací se pojí především potřeba úspěšného výkonu a potřeba vyhnutí se neúspěchu. První z nich souvisí především s potřebou potvrzení vlastního já, druhá pak s potřebou obrany vlastního já.

Obě tyto potřeby vznikají již ve velmi raném věku dítěte, kdy jsou na něj v rodinném prostředí kladeny adekvátní nároky a je povzbuzována jako samostatnost. Dítě s převažující potřebou úspěšného výkonu má pak tendenci vidět úspěch ve světle svých pozitivních vlastností, zatímco neúspěch připisuje nedostatečnému vynaložení sil.

Abychom zvyšovali výkonovou motivaci k učení, je nutné na studenty klást vysoké, avšak jejich schopnostem přiměřené nároky. Kromě toho ale musíme mít na mysli, že s motivováním studentů souvisí i nezbytnost kladného hodnocení jejich výkonu, které podporuje jejich pozitivní chování.

[7, 8]

1.6.4 Demotivující činitelé

Kromě autokratického stylu vyučování a výchovy, kdy učitel pouze nařizuje a rozkazuje, patří mezi demotivující činitele učení také rigidita vyučovacích metod, nedostatek tvořivosti a pocit, kdy student neví, k čemu mu získané poznatky budou v dalším životě.

Kromě zmíněných faktorů působí negativně na motivaci studentů také další činitelé. Není dobré, když učitel nadmíru zdůrazňuje, jak velmi důležitá je daná hodina v souvislosti s dalším studiem, místo toho, aby pomohl studentům vytěžit co nejvíc z daného momentu.

Učitel by se měl vyhnout zadávání nesmyslně náročných úkolů, kdy k jejich splnění studenti nemají potřebné znalosti či schopnosti.

Značně demotivačně také působí, když se učitel věnuje zdůrazňování chyb a slabostí místo toho, aby pracoval se silnými stránkami studentů.

A v neposlední řadě by učitel také neměl přehlížet individuální potřeby a nadání jednotlivých studentů.

[1, 4]

1.7 Didaktické prostředky ve výuce

Didaktickými prostředky jsou chápány předměty a jevy sloužící k dosažení vytyčených cílů ve výuce. Prostředky v širokém smyslu zahrnují vše, co vede ke splnění výchovně vzdělávacích cílů, zajišťují, podmiňují a zefektivňují průběh vyučovacího procesu. Tyto prostředky se rozdělují do dvou skupin- materiální a nemateriální prostředky.

Mezi materiální prostředky patří:
- výukové prostory= vnitřní či venkovní prostory sloužící k uskutečňování výuky;
- didaktická technika= dovoluje prezentaci učebních pomůcek;
- vyučovací pomůcky= objekty a předměty napodobující realitu;
- žákovské pomůcky= učebnice, modely, promítaná zobrazení, výukové PC programy.

Příkladem nemateriálních prostředků jsou:
- vyučovací metody= způsob činnosti učitele a studenta k dosažení cíle vyučování; součást

metodického systému k vytvoření požadovaných vědomostí, dovedností a návyků;
- organizační formy= uspořádání výuky, tj. organizace činnosti učitele i studentů při vyučování; každá z organizačních forem vytváří vztahy mezi studentem, vyučujícím a obsahem;
- didaktické zásady= obecné doporučení pro učitele, při jejichž respektování může učitel při výuce dosáhnout maximální efektivity a účinnosti.

[4]

1.7.1 Didaktická technika

Protože žijeme v době, kdy se velmi rychle mění svět kolem nás a stále častěji se setkáváme s novými technickými vymoženostmi, musí se také výuka posunout vpřed. Naprosto přirozeně se dnes očekává využití všech technických prostředků k výuce, a tedy myšlenka elektronické podpory výuky není nic objevného. Důležitá je otázka správného výběru formy, kterou pro takovou aktivitu zvolíme.

Didaktická technika se rozděluje do skupin dle různých hledisek. Jedním z nejjednodušších je dělení dle smyslů, na které technikou působíme:
- vizuální;
- auditivní;
- audiovizuální- prostředky výpočetní techniky, hypermédia;
- zpětnovazební systémy- řídící a hodnotící;
- pomocné technické prostředky- projekční plochy, speciální nábytek, stojany, apod.

Hlavní funkcí didaktické techniky je její informačně expoziční účel:
- videorekordéry, DVD přehrávače;
- magnetofony, digitální přehrávání;
- počítače;
- interaktivní tabule;
- instrumentální technika.

[9]

1.7.2 Učební pomůcky

Učební pomůcka je libovolný předmět, který studentům slouží k lepšímu pochopení probírané látky a učitelům ke snadnějšímu výkladu. Umožňuje při správném metodickém zakomponování lépe dosahovat vzdělávacích cílů. Mnohdy vhodně aktivizují studenty i tím, že jim umožňují experimentování a bezprostřední cílevědomé zkoumání. Vzdělávání se poté stává v mnoha ohledech zajímavějším, což přispívá k rozvoji pozitivních postojů ke vzdělávání. Samozřejmostí je využití didaktických technik k prezentaci učebních pomůcek.

Zásada názornosti je z dnešního pohledu jedním ze základních pedagogických principů moderního vzdělávání a uplatňuje se v nejrozmanitějších formách na všech úrovních vzdělávání.

Zde jsou uvedeny pomůcky, které se používají ve škole nejčastěji:
- přírodniny, preparáty, výrobky, chemikálie;
- modely statické a dynamické;
- různé přístroje;
- nákresy na tabuli, nástěnné obrazy, obrazové soubory, fotografie;
- schémata, grafy, diagramy, plány, mapy;
- nosiče statických obrazů;
- folie pro zpětný projektor, diapozitivy;
- filmy;
- hudební nástroje, CD, magnetofonové pásky;
- CD, DVD, flash-disky;
- literární pomůcky, učebnice, sbírky úloh, čítanky, slovníky, encyklopedie, aj.

Časté a správné používání materiálních didaktických prostředků ve vyučovacím procesu nutí učitele se na hodinu pečlivě připravovat, naplánovat každý krok, připravit včas materiály a práci s technikou vyzkoušet předem. Materiální prostředky mají výuku zjednodušovat, zefektivňovat, avšak použití techniky nesmí zastínit její obsah.

[9]

Kapitola 2

RVP a ŠVP

Po seznámení se se základními pojmy, jakými jsou didaktika, vyučovací proces či výuková metoda, se budeme dále zabývat důležitými dokumenty, kterými jsou Rámcový vzdělávací program (tzv. RVP) a Školní vzdělávací program (tzv. ŠVP).

Než se začneme plně věnovat RVP a ŠVP, zmíníme si zde ještě jeden pojem, vztahující se právě k těmto vzdělávacím programům.

Pojem kurikulum chápeme jako návrh cesty, která vede k záměrnému získávání zkušeností studenta. Zahrnuje v sobě procesy, prostředky i podmínky k dosažení výchovně vzdělávacího cíle. Může být chápáno jako:

- vzdělávací program, plán nebo projekt výchovně-vzdělávacího působení (vytyčení směru, délky a cíle trasy);

- obsahová náplň výchovně-vzdělávacího působení znamená všechno, co bývá zahrnuto v osnovách a metodických příručkách (kudy trasa povede, kde se dá zrychlit, čeho si zvláště všimnout a co lze pominout);

- dosažený výsledek, zkušenost, kterou si student v průběhu výchovně-vzdělávacího působení osvojí. Znamená to prakticky všechno, co student ve škole získal (tedy nejen vlastní výkon, ale i osobitý způsob provedení).

RVP definuje ve školství České republiky nejvyšší úroveň vzdělávání společně s projektem Národní program pro rozvoj vzdělávání (tzv. Bílá Kniha). V roce 2004 Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT) schválilo nové principy pro vzdělávání žáků od 3 do 19 let. Toto rozhodnutí změnilo systém učebních dokumentů, které jsou nyní vytvářeny na dvou úrovních a to státní a školské.

Národní program vzdělávání vymezuje vzdělávání jako celek a rámcové programy vymezují „rámce“ pro jednotlivé etapy vzdělávání, jimiž jsou předškolní, základní a střední vzdělávání.

RVP je tedy kurikulární dokument státní úrovně, který normativně stanovuje obecný rámec pro jednotlivé etapy vzdělávání.

- jsou pedagogickými dokumenty, které schvaluje a vydává Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT);

- stanovují obecně závazné požadavky na vzdělávání pro jednotlivé stupně a obory vzdělání platné pro všechny školy, které je musejí respektovat při zpracování svých školních vzdělávacích programů;

- pro každý obor vzdělání je vydán samostatný RVP;

- stanovují, jaké vzdělávací cíle má škola plnit, čemu se studenti mají v konkrétním oboru učit (tj. obsah vzdělávání – učivo) a jakých výsledků výuky mají dosáhnout – co by měli absolventi umět, být schopni dělat, jak se mají projevovat, jaké mají mít vědomosti, dovednosti, pracovní a jiné návyky a postoje (tzn. jaké mají mít kompetence – způsobilosti);

- vymezují formy vzdělávání (denní, večerní, dálkové aj. studium) a také základní materiální, personální a jiné podmínky, za kterých se vzdělávání v daném oboru může uskutečňovat;

- byly zpracovány centrálně – pro odborné vzdělávání v Národním ústavu pro vzdělávání (NÚV), pro gymnázia v dřívějším Výzkumném ústavu pedagogickém (nyní sloučeném s NÚV);

- do jejich tvorby byli zapojeni zástupci škol a sociálních partnerů z řad zaměstnavatelů. Před schválením se k nim vyjadřovali v rámci připomínkového řízení další školy, resortní ministerstva, zástupci zaměstnavatelských sdružení a jiné instituce.

V rámci **ŠVP** si upravuje osnovy každá škola samostatně podle způsobu vyučování různých předmětů a s ohledem na potřeby studentů na dané škole. Schválením zákona o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání a samozřejmě také díky RVP dostali učitelé možnost si dne 24.8.2004 vytvořit vlastní vzdělávací program. Díky společné práci všech pedagogů na škole bylo možné bez dalšího schvalování vytvořit ucelený Školní vzdělávací program.

Hlavním rozdílem od tradičních osnov je, že učitel v plánech nepopisuje, co má studenty naučit, ale popisuje, jaké dovednosti mají jeho studenti mít. Navíc se již nemusí striktně držet plánů a může tedy velmi snadno některé méně podstatné pasáže látky vynechat, či zredukovat a naopak přínosný výklad látky časově prodloužit.

Během definování pojmu RVP byl zmíněn pojem kompetence studenta. Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého studenta. Jejich výběr a pojetí vychází z hodnot obecně přijímaných ve společnosti a z obecně sdílených představ o tom, které kompetence jedince přispívají k jeho vzdělávání, spokojenému a úspěšnému životu a k posilování funkcí občanské společnosti.

Smyslem a cílem vzdělávání je vybavit všechny studenty souborem klíčových kompetencí na úrovni, která je pro ně dosažitelná, a připravit je tak na další vzdělávání a uplatnění ve společnosti. V etapě základního vzdělávání jsou za klíčové považovány kompetence k učení, k řešení problémů, komunikativní, sociální a personální, občanské či pracovní.

[2, 3, 10]

2.1 RVP pro vybrané typy škol

Pomocí oficiálních stránek MŠMT lze získat podrobné informace o tom, co bude základem výuky konkrétních témat a co by měl student zvládnout po dokončení jednotlivých okruhů. Tato práce nebude obsahovat všechna témata, ale pouze ta, zaměřená na výuku pravděpodobnosti a statistiky.

2.1.1 Gymnázium

Gymnázium je v České republice nejvíce preferovaným typem škol, a proto se jím zde budeme zabývat jako prvním. Podle dostupných informací [11] je celkem 1295 středních škol, z toho je 368 právě gymnázií (28,42 %). Studenti, kteří ukončí tento typ školy, by měli zvládnout učivo o kombinatorice, pravděpodobnosti a práci s daty.

Učivo:
- *kombinatorika* – elementární kombinatorické úlohy, variace, permutace a kombinace, binomická věta, Pascalův trojúhelník;
- *pravděpodobnost* – náhodný jev a jeho pravděpodobnost, pravděpodobnost sjednocení a průniku jevů, nezávislost jevů;
- *práce s daty* – analýza a zpracování dat v různých reprezentacích, statistický soubor a jeho charakteristiky (vážený aritmetický průměr, medián, modus, percentil, kvartil, směrodatná odchylka, mezikvartilová odchylka).

Očekávané výstupy- žák:
- řeší reálné problémy s kombinatorickým podtextem (charakterizuje možné případy, vytváří model pomocí kombinatorických skupin a určuje jejich počet);
- využívá kombinatorické postupy při výpočtu pravděpodobnosti, upravuje výrazy s faktoriály a kombinačními čísly;
- diskutuje a kriticky zhodnotí statistické informace a daná statistická sdělení;
- volí a užívá vhodné statistické metody k analýze a zpracování dat (využívá výpočetní techniku);
- prezentuje graficky soubory dat, čte a interpretuje tabulky, diagramy a grafy, rozlišuje rozdíly v zobrazení obdobných souborů vzhledem k jejich odlišným charakteristikám.

[11, 12, 13]

2.1.2 Techické lyceum

Technické lyceum je další často volenou školou pro studium na střední škole, a proto je mu věnována následují část. Student má možnost výběru ze 155 lyceí rozmístěných po celé ČR (11,97 % z celkového počtu škol).

Učivo:
- *kombinatorika* – variace, permutace a kombinace bez opakování;
- *pravděpodobnost* – náhodný jev a jeho pravděpodobnost;
- *statistika* – základy statistiky, praktické úlohy.

Očekávané výstupy- žák:
- užívá vztahy pro počet variací, permutací a kombinací bez opakování;
- počítá s faktoriály a kombinačními čísly;
- užívá pojmy: statistický soubor, absolutní a relativní četnost, variační rozpětí;
- určí pravděpodobnost náhodného jevu, pravděpodobnost sjednocení či průniku dvou jevů;
- čte, vyhodnotí a sestaví tabulky, diagramy a grafy se statistickými údaji.

[11, 12, 13]

2.1.3 Obchodní akademie

Další střední školou je samozřejmě také obchodní akademie, která má v naší republice široké zastoupení. Z celkového počtu středních škol jsou číslem 194 reprezentovány právě obchodní akademie (14,98 %).

Učivo:
- *kombinatorika* – variace, permutace a kombinace bez opakování;
- *pravděpodobnost* – náhodný jev a jeho pravděpodobnost, nezávislost jevů;

- *statistika* – základy statistiky.

Očekávané výstupy- žák:
- užívá vztahy pro počet variací, permutací a kombinací bez opakování;
- počítá s faktoriály a kombinačními čísly;
- užívá pojmy: statistický soubor, absolutní a relativní četnost, variační rozpětí;
- určí pravděpodobnost náhodného jevu kombinatorickým postupem;
- čte, vyhodnotí a sestaví tabulky, diagramy a grafy se statistickými údaji.

[11, 12, 13]

2.1.4 Střední odborné vzdělávání

Střední odborné vzdělávání se rozděluje do mnoha odvětví podle toho, čím se studenti na jednotlivých oborech zabývají. Prvotním rozdělením je, zda obory končí složením maturitní zkoušky, nebo získáním výučního listu. Do této práce byl vybrán jeden obor zakončený maturitou (Strojírenství) a druhý obor bezmaturitní (Strojní mechanik). Názvem jsou si relativně blízké, ale po prozkoumání RVP se najdou velké rozdíly v úrovni výuky matematiky. Procentuální zastoupení tohoto typu škol je 18,53 % (240 škol).

STROJÍRENSTVÍ
Pro tento obor je RVP téměř stejný jako pro obchodní akademii. Matematika není ochuzena o základy kombinatoriky, pravděpodobnosti ani statistiky.

Učivo:
- *kombinatorika* – variace, permutace a kombinace bez opakování;
- *pravděpodobnost* – náhodný jev a jeho pravděpodobnost, nezávislost jevů;
- *statistika* – základy statistiky.

Očekávané výstupy- žák:
- užívá vztahy pro počet variací, permutací a kombinací bez opakování;
- počítá s faktoriály;
- užívá pojmy: statistický soubor, četnost, variační rozpětí;
- určí pravděpodobnost náhodného jevu;
- čte, vyhodnotí a sestaví tabulky, diagramy a grafy se statistickými údaji.

STROJNÍ MECHANIK
Studenti tohoto oboru se nesetkají ani se základy pravděpodobnosti ani statistiky. Při výuce se seznámí pouze okrajově s prací s daty.

Učivo:
- *práce s daty*

Očekávané výstupy- žák:
- porovnává soubory dat;
- interpretuje údaje vyjádřené v diagramech, grafech a tabulkách;
- určí četnost znaku a aritmetický průměr.

[11, 12, 13]

2.2 ŠVP konkrétních škol

Následující část je věnovaná školnímu vzdělávacímu programu a konkrétním oblastem v matematice na vybraných školách. Pro tvorbu ŠVP byl připraven dokument od MŠMT nazvaný jako Manuál pro tvorbu ŠVP. Ten obsahuje kompletní rozbor toho, jak by měl daný program vypadat, jaké části by měl obsahovat a jak ho nejlépe vytvořit.

2.2.1 Gymnázium

Školní vzdělávací program Gymnázia Strakonice byl vytvořen podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnaziální vzdělávání. Platnost dokumentu pro čtyřleté studium a pro vyšší stupeň osmiletého gymnázia je od 1. září 2009.

Matematika se vyučuje na této škole ve všech ročnících a hodinová dotace je 4 – 4 – 4 – 4 hodiny (tzn. v každém ročníku 4 hodiny týdně). Tyto základní informace jsou uvedeny na oficiálních stránkách školy.

Tématické celky: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*
– základní kombinatorická pravidla;
– variace, permutace a kombinace;
– faktoriál;
– kombinační čísla a jejich vlastnosti;
– binomická věta;
– Pascalův trojúhelník;
– náhodné pokusy;
– množina všech možných výsledků;
– náhodný jev a jeho pravděpodobnost;
– pravděpodobnost sjednocení a průniku jevů;
– nezávislost jevů;
– soubor a jeho charakteristiky (aritmetický průměr, medián, modus, směrodatná odchylka);
– tabulka četností;
– grafické znázornění rozdělení četností.

Výsledky vzdělávání a kompetence
Žák
– rozpozná kombinatorické skupiny (variace, permutace a kombinace s opakováním i bez);
– určí jejich počty a užívá je v reálných situacích;
– počítá s faktoriály a kombinačními čísly;
– užívá binomickou větu při řešení úloh;
– používá pojmy náhodný jev, jistý jev, nemožný jev, opačný jev, nezávislost jevů, sjednocení a průnik jevů;
– určí pravděpodobnost náhodného jevu;
– vypočítá pravděpodobnost sjednocení nebo průniku dvou jevů;
– vysvětlí a používá pojmy statistický soubor, statistická jednotka, statistický znak, četnost a relativní četnost;
– vypočítá četnost a relativní četnost hodnoty znaku;
– sestaví tabulku četností;
– graficky znázorní rozdělení četností;
– určí charakteristiky polohy a variability (průměry, modus, medián, rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient).

2.2.2 Technické lyceum

Školní vzdělávací program Technického lycea v Českých Budějovicích byl projednán školskou radou a jeho platnost je od 1.9.2009.

Matematika se vyučuje na této škole sice ve všech ročnících, ale hodinová dotace se mění: 3 – 4 – 3 – 2 hodiny. Informace o ŠVP lze získat na oficiálních stránkách školy.

Tématické celky: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*
– základní kombinatorická pravidla: pravidlo součtu a součinu;
– variace, permutace, kombinace bez opakování, s opakováním;
– kombinační čísla a Pascalův trojúhelník;
– binomická věta;
– náhodné pokusy;
– náhodný jev a jeho pravděpodobnost;
– pravděpodobnost sjednocení a průniku náhodných jevů;
– nezávislé jevy;
– statistický soubor, jednotka a znak;
– četnosti a jejich grafické znázornění;
– aritmetický průměr, geometrický průměr, modus a medián;
– rozptyl, variační koeficient, směrodatná odchylka, mezikvartilová odchylka;
– aplikace pravděpodobnosti a statistiky.

Výsledky vzdělávání a kompetence
Žák

– řeší jednoduché kombinatorické úlohy užitím kombinatorických pravidel;
– ovládá pojmy faktoriál, kombinační číslo, Pascalův trojúhelník včetne příslušné symboliky;
– počítá a upravuje výrazy s faktoriály a kombinačními čísly, využívá vlastnosti kombinačních čísel;
– aktivně ovládá binomickou větu, vysvětlí její použití při práci s výrazy;
– vysvětlí pojmy náhodný pokus a náhodný jev;
– určí četnosti náhodného jevu;
– určí pravděpodobnost náhodného jevu, pravděpodobnost sjednocení a průniku dvou jevů, pravděpodobnost nezávislých jevů;
– statistický soubor, jednotka a znak, absolutní a relativní četnost, variační rozpětí;
– čte, vyhodnotí a sestaví tabulky, diagramy a grafy se statistickými údaji;
– určí základní charakteristiky polohy statistického souboru;
– určí základní charakteristiky variability statistického souboru.

2.2.3 Obchodní akademie

Uvedený školní vzdělávací program zpracoval kolektiv pedagogických pracovníků Obchodní akademie v Písku a schválil jej ředitel školy dne 25.08.2009. V platnost vstoupila 1. září 2009.

Hodinová dotace pro výuku matematiky na této škole je v souladu s učebním plánem: 3 – 3 – 3 – 3 hodiny. Použité informace jsou volně k dispozici na stránkách školy.

Tématické celky: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*
– variace a permutace bez opakování a s opakováním, faktoriál;
– kombinace bez opakování, vlastnosti kombinačních čísel, Pascalův trojúhelník;
– binomická věta;
– náhodný pokus a náhodný jev;
– četnost a pravděpodobnost náhodného jevu;
– pravděpodobnost sjednocení jevů, opačného jevu, průniku jevů;
– statistický soubor, jednotka, znak;
– absolutní a relativní četnost;
– charakteristiky polohy a variability.

Výsledky vzdělávání a kompetence
Žák
– užívá vztahy pro počet variací a permutací bez opakování a s opakováním, kombinací bez opakování;
– počítá s faktoriály a kombinačními čísly, využívá vlastností kombinačních čísel;
– sestaví Pascalův trojúhelník;
– řeší umocňování dvojčlenu s využitím binomické věty;
– charakterizuje náhodný pokus a náhodný jev, popíše jejich vlastnosti;

– rozliší: jev jistý, nemožný, elementární, jev příznivý jinému jevu, jevy rovnocenné, disjunktní, opačný jev k danému jevu, jevy slučitelné a neslučitelné, jevy závislé a nezávislé;
– vysvětlí vztah mezi relativní četností a pravděpodobností náhodného jevu;
– vybere vhodný vztah pro řešení úloh z praxe, vyčíslí pravděpodobnost;
– charakterizuje základní statistické pojmy;
– vysvětlí a užívá aritmetický a vážený průměr, modus, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku při řešení úloh z praxe.

Kapitola 3

Ukázka vzorových hodin

Po nastínění hlavního tématu diplomové práce a po vysvětlení několika základních pojmů se dostáváme k další důležité části této práce psáné formou studijního materiálu, který by měl být využíván při výuce pravděpodobnosti na střední škole.

Příklady jsou určeny k výkladu pro studenty 3. - 4. ročníku gymnázia. Vzhledem k tomu, že si každá škola sama volí, kdy se jaké tematické celky budou vyučovat, není možné přesněji zasadit výuku pravděpodobnosti.

Ke každé vzorové hodině je připraven časový rozvrh hodiny, který zahrnuje jednotlivé činnosti studentů, učitele, výukové metody, formy a hodnocení.

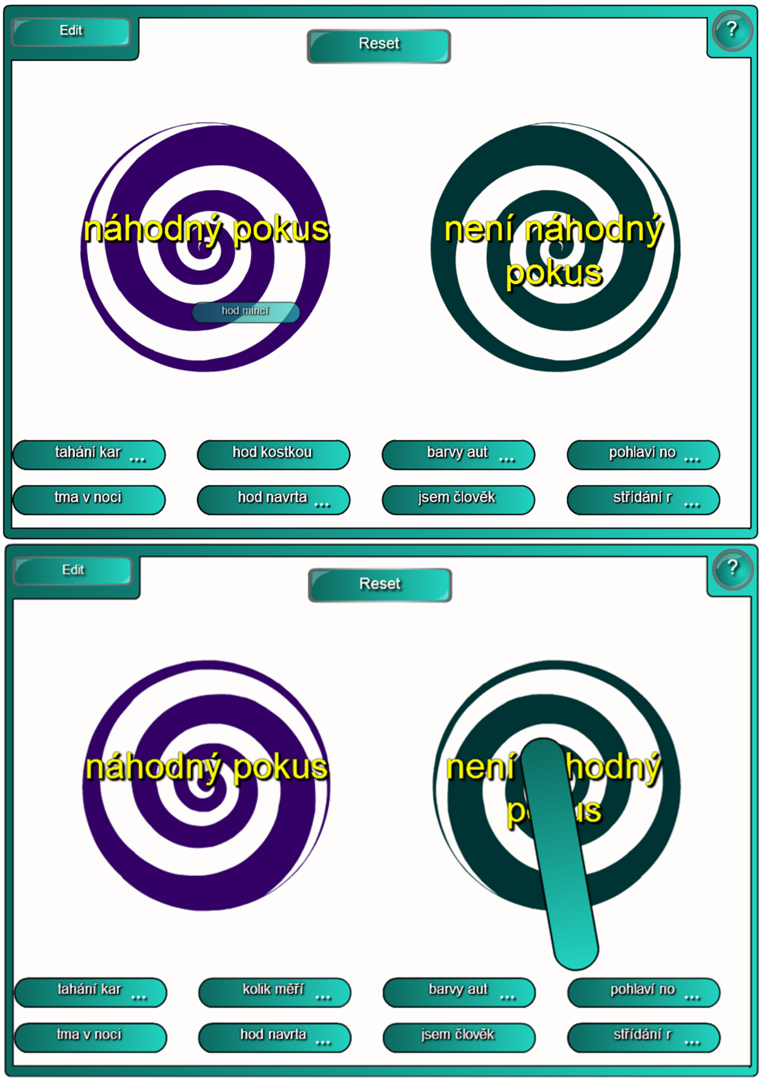
V současné době se začínají na všech školách objevovat třídy vybavené interaktivními tabulemi. Jedná se o obrazovku s dotykovými senzory, propojenou s počítačem a projektorem. Povrchu tabule se můžeme dotýkat prstem, speciálními fixy nebo dalšími nástroji a ovládat tak počítač nebo pracovat přímo s interaktivní tabulí. Tato tabule má tedy charakter dotykového displeje.

SMART Notebook je nejznámějším a nejrozšířenějším výukovým softwarem pro interaktivní výuku. Obsahuje především nástroje pro tvorbu a vypracování interaktivních cvičení. K dispozici jsou zde tisíce obrázků a animací, které je možné použít při cvičeních v hodinách.

S využitím tohoto programu se vytvářejí tzv. **dumy** (digitální učební materiály), které slouží, jak už název napovídá, jako učební pomůcka. V rámci tvorby vzorových hodin bylo vytvořeno několik dumů pro názornost probíraných pojmů a k procvičení pojmů probraných. Výhodou je možnost použití zmíněných obrázků a animací. Další výhodu je zaujmutí pozornosti studentů. Protože je interaktivní tabule něco nového a nezažitého, studenti si rádi vyzkouší práci s ní.

Učitelé mohou sdílet vytvořené materiály mezi sebou na portálu http://www.dumy.cz a tím se učit jeden od druhého novým technikám.

Dum náhodný pokus slouží k tomu, aby studenti pochopili, co je náhodným pokusem a co jím není. Tento dum je udělaný formou hry, kdy studenti zařazují různé pojmy do dvou políček: náhodný pokus, není náhodný pokus. Jednotlivé pojmy se dají přesouvat, a pokud je pojem zařazen správně, zmizí v poli. Pokud je však pojem studentem zařazen špatně, je vyhozen z políčka ven, zpět na původní pozici. Svůj pokus tedy může opravit.



Obrázek 3.1: dum náhodný pokus

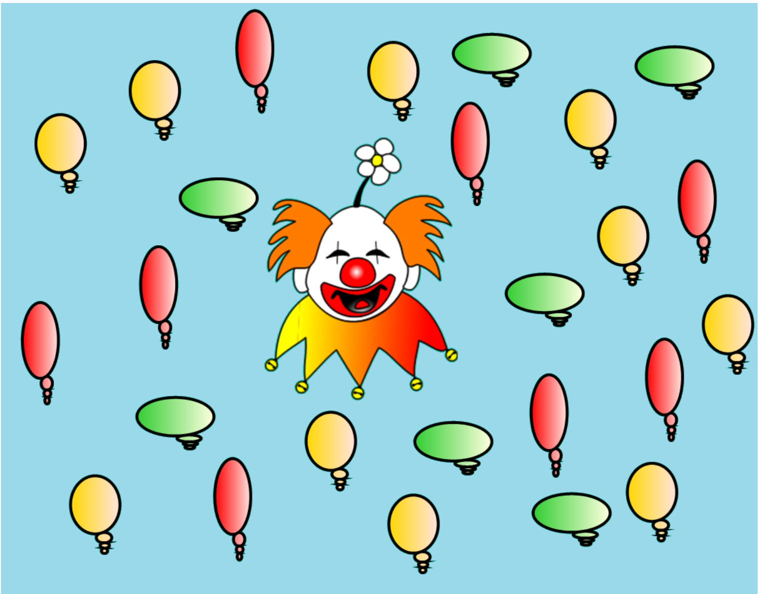
Dum mince byl vytvořen k tomu, aby byl užitečnou pomůckou při zavedení pojmu pravděpodobnost. Pokud student klikne na tlačítko start, mince se začne otáčet. Po stisknutí stop, se mince zastaví rubem či lícem natočená vpřed. Studenti si mohou zapisovat, kolikrát padl rub, kolikrát líc a počítat pravděpodobnost jevu. Na tomto příkladu bývá v učebnicích matematiky nejčastěji zavedena definice pravděpodobnosti.

Obrázek 3.2: dum mince

V dalších učebnicích můžeme nalézt zavedení pojmu pravděpodobnost na příkladech s házením kostkou, a proto byl vytvořen **dum kostka**. Po kliknutí na kostku, začne rotovat a sama se po chvilce zastaví. Můžeme si nechat na obrazovku vypisovat, jaká čísla na ní padla.

Obrázek 3.3: dum kostka

Dum klaun je vizuální pomůcka pro znázornění situace při rozdávání balonků dětem. Studenti lépe chápou a počítají příklady, pokud mohou vývoj situace sledovat. U tohoto dumu si můžeme vybrat balonek libovolné barvy a po kliknutí nám zmizí. To představuje, že klaun daruje balonek dítěti. Také tento dum se dá využít pro výpočet pravděpodobnosti jevu.



Obrázek 3.4: dum klaun

Ještě než se začneme věnovat strukturám vzorových hodin a pracovním listům, vrátíme se k výukovým metodám a výchovně vzdělávacím cílům.

Při výuce matematiky se nejvíce využívají kognitivní cíle. Tyto cíle slouží k tomu, aby student pochopil, jaký výkon se od něho očekává a které úlohy má umět vyřešit. Takové úlohy by měl umět dostatečně vysvětlit a obhájit postup svého řešení.

K naplnění výchovně vzdělávacích cílů krom výukových metod a forem také napomáhá motivace. Motivace ovlivňuje studentovy cíle, chování, jednání a zvyšuje zájem o dané téma. Je proto nedílnou součástí vyučovacího procesu. Motivovat může učitel studenty mnoha způsoby, avšak získání odměny a vyhnutí se trestu je nejpoužívanějšími motivačními činiteli. Takovou motivaci pak nazýváme vnější motivací. Silnější je motivace vnitřní, ale abychom probudili ve studentovi jeho vnitřní potřeby, musíme jej dobře znát, vědět co ho zajímá a čeho by chtěl dosáhnout.

Nakonec se dostáváme k výukovým metodám, pro jejichž použití byly vytvářeny pracovní listy ukázkových hodin. Před každou vzorovou hodinou je uvedena tabulka, ve které jsou zaznamenány výukové metody, které se v daný okamžik použijí. V hodinách jsou aplikovány metody slovní, názorně demonstrační, sdělovací a induktivní. Dále byly použity diskuzní metody a didaktické hry.

Příklady nejsou řešeny jen učitelem, ale je zde zahrnuta také samostatná práce studentů a práce v malých skupinách.

Vybrané příklady, použité při tvorbě studijních materiálů, byly čerpány ze středoškolských učebnic matematiky [14, 15, 16, 17].

3.1 Definice pravděpodobnosti

čas	učivo	činnost učitele	činnost žáků	výuk. metody/formy	hodnocenní	pozn.
10	uvedení do hodiny, zápis do třídní knihy, motivace	zavedení definic pomocí jednoduchého příkladu	pochopení definic pomocí pokusů a výpočtů	diskuze, frontálně-individuální, interaktivní tabule, pracovní listy	zpětná vazba	dum -mince -kostka -pokus
10	prohlubování učiva	zadání a řešení dalších příkladů	řešení úloh zadaných vyučujícím	diskuze, frontálně-individuální, pracovní listy	slovní hodnocení, zpětná vazba	dum - klaun
15	procvičování učiva	rozdělení žáků do dvojic, kontrola práce žáků v lavicích	řešení úloh, spolupráce v páru, aplikace vzorečků	individuální, párová, pracovní listy	slovní hodnocení	
5	kontrola výsledků	promítnutí správných výsledků, krátké vysvětlení	oprava výsledků, zápis poznámek k nevyřešeným příkladům	diskuze, frontálně-individuální, interaktivní tabule, pracovní listy	hodnocení známkou za dobře odvedenou práci	
5	shrnutí učiva, domácí úkol	opakování základních pojmů, zadání domácího úkolu	reflexe vlastní činnosti	frontálně- individuální, individuální	reflexe, zhodnocení hodiny, krátké slovní hodnocení	

3.1.1 Pracovní list: UČITEL

Při hodu mincí má stejnou šanci rub i líc. Jejich pravděpodobnost by tedy měla být 50%. Při malém počtu hodů to však tato hodnota nebude. Pokud ale budeme házet mincí např. 100×, bude počet rubů a líců přibližně stejný.

Můžeme to studentům jednoduše ukázat pomocí počítače [**dum- mince**] či obyčejné mince.

DEFINICE

Házení mincí je **náhodný pokus**, jehož výsledky nelze předpovídat. Kdybychom s jistotou věděli, že padne rub, byla by tato pravděpodobnost rovna 100 %. Takový jev bychom nazývali **jevem jistým**.

Při hodu mincí nám mohou nastat pouze dvě možnosti (padne rub, padne líc). Tyto možnosti nazýváme **náhodným jevem** a označujeme je velkými písmeny (A, B).

Pravděpodobnost, že nám na minci padne rub vypočítáme podle vzorce:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}, \text{ kde}$$

$P(A) \ldots$ označuje pravděpodobnost náhodného jevu A (padne rub), $0 \leq P(A) \leq 1$

$n \ldots$ počet všech možných výsledků (může padnout rub nebo líc), proto $n = 2$

$n(A) \ldots$ počet příznivých/očekávaných výsledků jevu A (padne rub), proto $n(A) = 1$

[**dum- náhodný pokus**] slouží k tomu, aby studenti pochopili, co je náhodným pokusem a co jím není. Tento dum je udělaný formou hry, kdy si studenti zařazují různé pojmy do dvou políček: náhodný pokus, není náhodný pokus. Pokud se spletou, je pojem vyhozen z políčka zpět na původní pozici.

Příklad 1. *Vezměte si každý 2 mince a házejte s nimi. Zapisujte do tabulky výsledky (zda padne rub R nebo líc L). Po 50 pokusech tedy budete mít 100 údajů. Nejprve spočítejte pravděpodobnost, že padne rub P(R) po 10 pokusech, pak po 30 pokusech a nakonec po 50 pokusech. Výsledky zformulujte.*

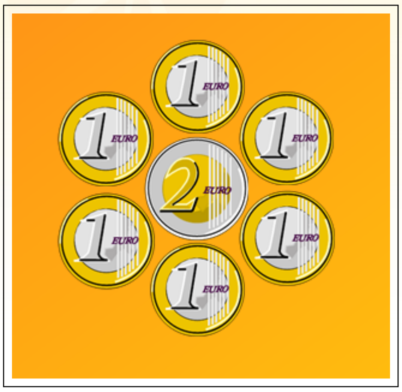
pokus	**R**	**L**	**pokus**	**R**	**L**	**pokus**	**R**	**L**	**pokus**	**R**	**L**	**pokus**	**R**	**L**
1.			11.			21.			31.			41.		
2.			12.			22.			32.			42.		
3.			13.			23.			33.			43.		
4.			14.			24.			34.			44.		
5.			15.			25.			35.			45.		
6.			16.			26.			36.			46.		
7.			17.			27.			37.			47.		
8.			18.			28.			38.			48.		
9.			19.			29.			39.			49.		
10.			20.			30.			40.			50.		

Řešení:

po 10 pokusech: $\mathrm{P(R)} = \frac{n(R)}{n} = \frac{}{20} =$

po 30 pokusech: $\mathrm{P(R)} = \frac{n(R)}{n} = \frac{}{60} =$

po 50 pokusech: $\mathrm{P(R)} = \frac{n(R)}{n} = \frac{}{100} =$



$n(R)\ldots$ kolikrát padl rub v daném počtu hodů n

Příklad 2. *Klaun stojí před každým vystoupením u vchodu do cirkusového stanu a rozdává dětem 25 heliových balonků. K dispozici má 10 žlutých, 8 červených a 7 zelených.*
Za předpokladu, že balónek daný prvnímu kolemjdoucímu je žlutý, urči, jaká je pravděpodobnost, že druhý balónek daný jinému dítěti bude také žlutý?

[**dum- klaun**] je vizuální pomůckou pro znázornění situace při rozdávání balonků. Příklad se může modifikovat tím, že se odeberou další balonky- i jiných barev.

Řešení:

Po prvním daném balónku zbývá 24 balónků.

Víme, že z tohoto počtu je právě 9 žlutých.

$n(A)\ldots$ označuje příznivé výsledky, tzn. 9

n ... označuje všechny možné výsledky, tzn. 24

$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{9}{24} = 0,375 = 37,5\ \%$

Pravděpodobnost, že druhý balonek daný klaunem bude také žlutý, činí 37,5%.

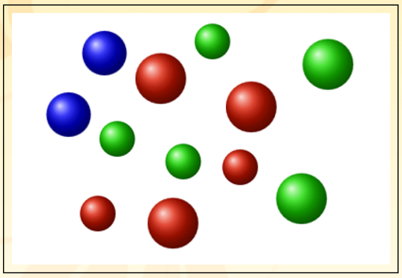
Příklad 3. *Na dětském hřišti je 12 barevných míčků. Některé jsou zelené, jiné modré či červené. Každou středu si sem chodí hrát Petřík s maminkou a vždy si vezmou 2 modré míčky. Ostatním dětem pak zbývají na hraní pouze zelené a červené. Kdyby si jakékoliv dítě, které přijde po Petříkovi s maminkou, vzalo libovolný míček, bude s pravděpodobností* $\frac{1}{2}$ *červený.*

a) Pomocí barev, znázorni míčkovou situaci před tím, než přijde Petřík s maminkou.

b) Spočítej pravděpodobnost, jakou má v pondělí Pavlínka, že si náhodně vybere červený míček.

Řešení:

Situaci, kdy si Pavlínka vytáhne červený míček, označujeme jev A



$n(A)\ldots$ označuje počet červených míčků, tzn. 5

n ... označuje počet všech míčků, tzn. 12

$P(A)\ldots$ označuje pravděpodobnost jevu A (že si vytáhne červený míček).

$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{5}{12} = 41,7\%$

Pokud přijde Pavlínka v jiný den, než kdy chodí Petřík s maminkou, bude pravděpodobnost náhodně vytaženého červeného míčku 41,7 %.

Nejrychlejší tři dvojice, které budou mít správně vypočítané příklady 4, 5 a 6, dostanou 1.

Příklad 4. *Víme, že mezi 50 součástkami jsou 4 vadné. Při postupné kontrole celé série bylo prvních 8 součástek bez vady. Jaká je pravděpodobnost, že devátá kontrolovaná součástka bude vadná?*

Řešení:

Opět použijeme vzorec pro výpočet pravděpodobnosti náhodného jevu A. Tentokrát je náhodným jevem myšleno, že devátá kontrolovaná součástka bude vadná.

Víme, že jsou 4 vadné součástky $\dots n(A) = 4$ z celkového počtu 50 součástek $\dots n = 50$.

My jsme již ale 8 součástek zkontrolovali, proto počítáme pouze se 42 nezkontrolovanými součástkami (50 - 8 = 42).

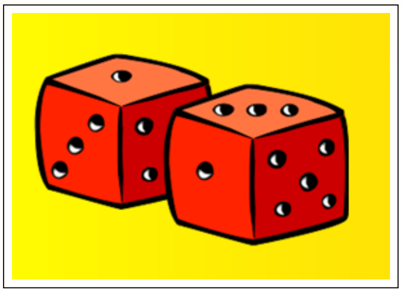
$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{4}{50-8} = \frac{4}{42} = 9,5\%$

S pravděpodobností 9,5 % bude devátá kontrolovaná součástka vadná.

Příklad 5. *Hodíme současně dvěma kostkami. S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka?*

Řešení:

Tvrzení, že na kostkách padne alespoň jedna šestka zahrnuje tři možnosti: na jedné kostce padne 6 a na druhé padne cokoliv jiného (krom 6); na jedné kostce padne cokoliv krom 6 a na druhé padne právě číslo 6; na obou kostkách padnou 6.



(a) na 1. kostce padne 6, na 2. kostce padne 1, 2, 3, 4 nebo 5 (celkem 5 možností)

(b) na 1. kostce padne 1, 2, 3, 4 nebo 5, na 2. kostce padne 6 (celkem 5 možností)

(c) na 1. kostce padne 6, na 2. kostce padne také 6 (1 možnost)

po sečtení získáváme $5 + 5 + 1 = 11$ možností $\ldots n(A)$

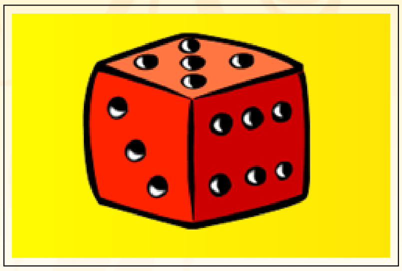
na kostkách může padnout celkem $6 \cdot 6 = 36$ možností $\ldots n$

$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{11}{36} = 30,6\%$

Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne alespoň jedna šestka je 30,6 %.

Příklad 6. *Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne a) sudé číslo? b) číslo dělitelné 3?*

Řešení:



Situaci, kdy na kostce padne sudé číslo/ číslo dělitelné 3, nazýváme jevem A/B.

Protože házení kostkou je náhodný pokus a všechny možnosti (n) mají pravděpodobnost stejnou, použijeme základní vzorec pro výpočet pravděpodobnosti náhodného jevu A/B.

sudá čísla: 2, 4, 6 (3 možnosti) $\ldots n(A)$

čísla dělitelná 3: 3, 6 (2 možnosti) $\ldots n(B)$

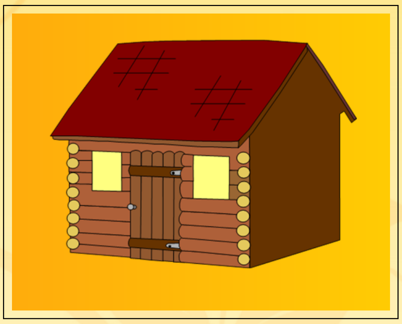
celkem je 6 čísel na kostce $\ldots n$

a) $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Pravděpodobnost, že na kostce padne sudé číslo, je 1/2 a pravděpodobnost, že hodíme kostkou číslo dělitelné třemi je 1/3.

Následující příklady jsou vhodné k domácímu procvičení.



Příklad 7. *Z následujících pojmů vyber ty, které jsou náhodným pokusem:*

Řešení:

náhodný pokus: hod kostkou, pohlaví novorozence, tah sportky, kolik měřím cm, střelba do terče, barvy aut na ulici, hod mincí, tahání karet z balíčku

není náhodný pokus: střídání ročních období, tma v noci, hod navrtanou kostkou, kyslík je plyn, den má 24 hodin, Slunce je žluté, jsem člověk

Příklad 8. *Doplň chybějící slova:*

Házení mincí je náhodný pokus, jehož výsledky nelze s jistotou předpovídat. Mohou nám sice nastat pouze dvě možnosti, avšak nemůžeme předem odhadnout, kdy jaká strana padne.
Tyto možnosti nazýváme náhodnými jevy a označujeme je velkými písmeny.

Pravděpodobnost, že nám na minci padne rub vypočítáme podle vzorce:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}, \text{ kde}$$

P(A)... označuje pravděpodobnost náhodného jevu A

n ... počet všech možných výsledků

$n(A)$ ... počet očekávaných/příznivých výsledků jevu A

Příklad 9. *Odpověz na položené otázky:*

Může být pravděpodobnost jakéhokoliv jevu rovna 3? ANO $\times$ NE

Existuje možnost, že bude pravděpodobnost záporné číslo? ANO $\times$ NE

... kdy tato možnost nastane: nikdy

V případě, že jev A je jev jistý, pak je P(A) = 1.

3.1.2 Pracovní list: STUDENT

Při hodu mincí má stejnou šanci rub i líc. Jejich pravděpodobnost by tedy měla být 50%. Při malém počtu hodů to však tato hodnota nebude. Pokud ale budeme házet mincí např. 100×, bude počet rubů a líců stejný.

DEFINICE

Házení mincí je **náhodný pokus**, jehož výsledky nelze předpovídat. Kdybychom s jistotou věděli, že padne rub, byla by tato pravděpodobnost rovna 100 %. Takový jev bychom nazývali **jevem jistým**.

Při hodu mincí nám mohou nastat pouze dvě možnosti (padne rub, padne líc). Tyto možnosti nazýváme **náhodným jevem** a označujeme je velkými písmeny (A, B).

Pravděpodobnost, že nám na minci padne rub vypočítáme podle vzorce:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}, \text{ kde}$$

$P(A)\ldots$ označuje pravděpodobnost náhodného jevu A (padne rub), $0 \leq P(A) \leq 1$

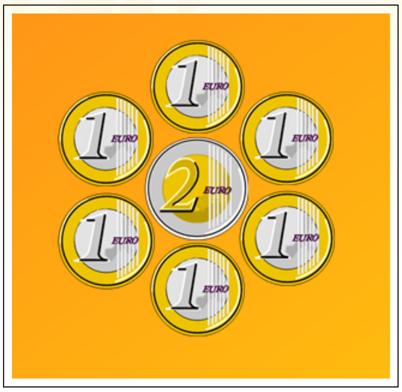
$n\ldots$ počet všech možných výsledků (může padnout rub nebo líc), proto $n = 2$

$n(A)\ldots$ počet příznivých/očekávaných výsledků jevu A (padne rub), proto $n(A) = 1$

Příklad 10. *Vezměte si každý 2 mince a házejte s nimi. Zapisujte do tabulky výsledky (zda padne rub R nebo líc L). Po 50 pokusech tedy budete mít 100 údajů. Nejprve spočítejte pravděpodobnost P(R) po 10 pokusech, pak po 30 pokusech a nakonec po 50 pokusech. Výsledky zformulujte.*

pokus	**R**	**L**	**pokus**	**R**	**L**	**pokus**	**R**	**L**	**pokus**	**R**	**L**	**pokus**	**R**	**L**
1.			11.			21.			31.			41.		
2.			12.			22.			32.			42.		
3.			13.			23.			33.			43.		
4.			14.			24.			34.			44.		
5.			15.			25.			35.			45.		
6.			16.			26.			36.			46.		
7.			17.			27.			37.			47.		
8.			18.			28.			38.			48.		
9.			19.			29.			39.			49.		
10.			20.			30.			40.			50.		

Řešení:



Příklad 11. *Klaun stojí před každým vystoupením u vchodu do cirkusového stanu a rozdává dětem 25 heliových balonků. K dispozici má 10 žlutých, 8 červených a 7 zelených balonků.*
Za předpokladu, že balónek daný prvnímu kolemjdoucímu je žlutý, urči, jaká je pravděpodobnost, že druhý balónek daný jinému dítěti bude také žlutý?

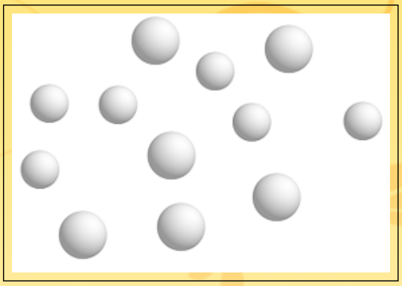
Řešení:

Příklad 12. *Na dětském hřišti je 12 barevných míčků. Některé jsou zelené, jiné modré či červené. Každou středu si sem chodí hrát Petřík s maminkou a vždy si vezmou 2 modré míčky. Ostatním dětem pak zbývají na hraní pouze zelené a červené. Kdyby si jakékoliv dítě, které přijde po Petříkovi s maminkou, vzalo libovolný míček, bude s pravděpodobností* $\frac{1}{2}$ *červený.*

a) Pomocí barev, znázorni míčkovou situaci před tím, než přijde Petřík s maminkou.

b) Spočítej pravděpodobnost, jakou má v pondělí Pavlínka, že si náhodně vybere červený míček.

Řešení:

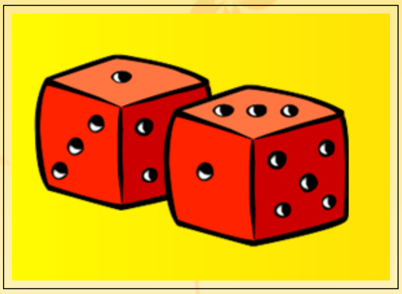


Příklad 13. *Víme, že mezi 50 součástkami jsou 4 vadné. Při postupné kontrole celé série bylo prvních 8 součástek bez vady. Jaká je pravděpodobnost, že devátá kontrolovaná součástka bude vadná?*

Řešení:

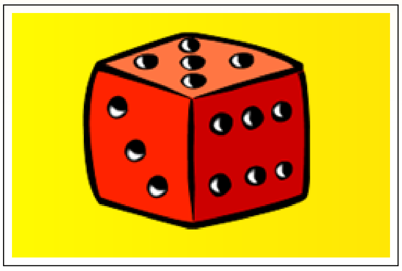
Příklad 14. *Hodíme současně dvěma kostkami. S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka?*

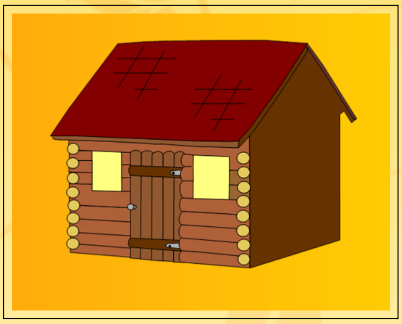
Řešení:



Příklad 15. *Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne a) sudé číslo? b) číslo dělitelné 3?*

Řešení:





Příklad 16. *Z následujících pojmů vyber ty, které jsou náhodným pokusem:*

hod kostkou, střídání ročních období, tma v noci, pohlaví novorozence, tah sportky, kolik měřím cm, hod navrtanou kostkou, kyslík je plyn, den má 24 hodin, střelba do terče, Slunce je žluté, jsem člověk, barvy aut na ulici, hod mincí, tahání karet z balíčku.

Řešení:

náhodný pokus:

není náhodný pokus:

Příklad 17. *Doplň chybějící slova:*

Házení mincí je . . . . , jehož . . . . nelze s jistotou předpovídat. Mohou nám sice nastat pouze dvě . . . ., avšak nemůžeme předem odhad-

nout, ... padne.
Tyto možnosti nazýváme náhodnými jevy a označujeme je . . . . písmeny.

. . . ., že nám na minci padne rub vypočítáme podle vzorce:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}, \text{ kde}$$

. . . . označuje pravděpodobnost náhodného jevu A

n . . . počet . . . .

$n(A)$ . . . počet . . . .

Příklad 18. *Odpověz na položené otázky:*

Může být pravděpodobnost jakéhokoliv jevu rovna 3? ANO × NE

Existuje možnost, že bude pravděpodobnost záporné číslo? ANO × NE

. . . kdy tato možnost nastane:

V případě, že jev A je jev jistý, pak je P(A) =

3.2 Podmíněná pravděpodobnost

čas	**učivo**	**činnost učitele**	**činnost žáků**	**výuk. metody/formy**	**hodnocenní**	**pozn.**
5	uvedení do hodiny, zápis do třídní knihy, kontrola úkolu	vybere 2 žáky ke kontrole úkolu	oprava domácího úkolu	diskuze	hodnocení známkou	čas na dotazy
15	motivace	zavedení definic pomocí 2 jednoduchých příkladů	pochopení definic pomocí výpočtů	frontálně-individuální, pracovní listy, interaktivní tabule	zpětná vazba	dum -kostka
15	prohlubování učiva	řešení dalších příkladů	řešení úloh zadaných vyučujícím	diskuze, frontálně-individuální, pracovní listy	slovní hodnocení	
5	procvičování učiva, opakování	rozdělení žáků do dvojic, kontrola práce žáků v lavicích	spolupráce, řešení úloh, aplikace znalostí	párová, individuální, pracovní listy	slovní hodnocení	
5	kontrola výsledků, shrnutí učiva, domácí úkol	promítnutí správných výsledků, krátké vysvětlení, zdůraznění základních pojmů, zadání úkolu	oprava výsledků, zápis poznámek k nevyřešeným příkladům	diskuze, individuální	zhodnocení celé hodiny, slovní hodnocení	

3.2.1 Pracovní list: UČITEL

DEFINICE

Při řešení některých konkrétních situací nás nezajímá přímo otázka pravděpodobnosti určitého jevu A, ale řešíme situaci výskytu náhodného jevu A za podmínky, že nastal určitý náhodný jev B (jev B není nemožný, P(B) $\neq$ 0). Pro řešení takovýchto situací se používá **podmíněná pravděpodobnost**.

K určení podmíněné pravděpodobnosti jevu A, musíme znát veškeré podmínky, za kterých nastane nejen jev A, ale také, za kterých nastane jev B. Pak podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, definujeme jako podíl pravděpodobnosti současného výskytu jevů A a B a pravděpodobnosti jevu B. Píšeme:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A|B)\ldots$ podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B

$P(A \cap B)\ldots$ pravděpodobnost současného výskytu jevů A a B

$P(B)\ldots$ pravděpodobnost jevu B

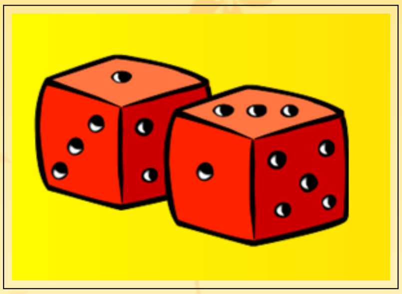
Snadno z tohoto výrazu odvodíme vzorec pro pravděpodobnost průniku dvou náhodných jevů A a B

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Příklad 19. *Házíme obyčejnou hrací kostkou a sledujeme jaká čísla na ní padnou [**dum- kostka**].*
Urči, jaká je pravděpodobnost, že na kostce padnou čísla 1 nebo 2. Označme si tento jev A.
Dále urči, jaká je pravděpodobnost, že na kostce padnou sudá čísla. To pro nás bude jev B.
Pak urči pravděpodobnost současného výskytu jevů A a B: $A \cap B$.
A jako poslední urči pravděpodobnost, že na kostce padla 1 nebo 2, za podmínky, že na kostce padlo sudé číslo (podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev $B : P(A|B)$).

Studenti již z předchozí hodiny vědí, jak vypočítat pravděpodobnost podle klasické definice pravděpodobnosti. Část tohoto příkladu tedy zvládnou spočítat sami.

Řešení:



Na kostce mohou padnout čísla 1, 2,. . ., 6. Celkem tedy existuje 6 možností. Použijeme klasický vzorec pro určení pravděpodobnosti jevu.

$n(A)$. . . označuje příznivé výsledky jevu A (1 nebo 2), proto $n(A) = 2$

n . . . označuje všechny možné výsledky, proto $n = 6$

$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$n(B)$. . . označuje příznivé výsledky jevu B (2, 4, 6), proto $n(B) = 3$

$P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Abychom splnili podmínku, že musí platit jev A i jev B současně, tak zákonitě na kostce musí padnout číslo 2 (a žádné jiné, existuje tedy pouze 1 možnost), proto $n(A \cap B)$= 1

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n} = \frac{1}{6}$

Nyní spočítáme poslední část tohoto příkladu: podmíněnou pravděpodobnost P(A|B) jevu A, za podmínky, že nastal jev B. Použijeme výše zmíněný vzorec a námi vyřešené mezi výpočty:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = 33,3\%$

Podmíněná pravděpodobnost toho, že na kostce padne číslo 1 nebo 2, za podmínky, že jsme hodili číslo sudé, je 33,3 %.

Příklad 20. *Zásilkový prodejce rozlišuje objednávky od zákazníků podle způsobu přijetí do 3 skupin: telefonické, e-mailové a objednávky na tištěném formuláři pro stálé zákazníky.*
Podle velikosti objednávky rozděluje objednávky do 4 skupin: malé, střední, velké a prioritní. Z databáze všech objednávek za poslední časové období lze vyčíst informace uvedené v tabulce (viz. níže). ***[soubor- tabulka1]***

a) Dnes volal zákazník, který si chtěl objednat zboží. S jakou pravděpodobností bude jeho objednávka prioritní?

b) Referentka řekla, že právě vyřídila prioritní objednávku. S jakou pravděpodobností ji vyřizovala se zákazníkem telefonicky?

	malá	**střední**	**velká**	**prioritní**	**celkem**
telefon	1021	216	109	14	1360
e-mail	86	371	308	49	814
formulář	1497	230	86	13	1826
celkem	2604	817	503	76	4000

Řešení:

a) Víme, že objednávka bude přijata telefonicky. Z tabulky vidíme, že z celkového počtu 1360 telefonických objednávek bylo 14 prioritních. Spočteme tedy pravděpodobnost podle klasického vzorce.

Studenti zvládnou vypočíst sami, bez pomoci učitele.

$n(R)\ldots$ označuje příznivé výsledky jevu R, tzn. 14 (14 prioritních objednávek)

n ... označuje všechny možné výsledky, tzn. 1360 (celkový počet telefonních objednávek)

$P(R) = \frac{n(R)}{n} = \frac{14}{1360} = 1,03\ \%$

S pravděpodobností 1,03 % byla telefonní objednávka prioritní.

Číslo, které jsme určili, je podmíněná pravděpodobnost jevu R (objednávka bude mít prioritní velikost) za podmínky, že nastal jev T (objednávka byla přijata telefonicky). Tuto pravděpodobnost tedy můžeme označit jako $P(R|T) = 1{,}03$ %.

b) Máme určit podmíněnou pravděpodobnost jevu T, víme- li, že nastal jev R.

Z tabulky snadno vyčteme hodnoty.

$n(T)\ldots$ označuje příznivé výsledky jevu T, tzn. 14 prioritních objednávek vyřízených telefonicky

n ... označuje všechny možné výsledky, tzn. 76 prioritních objednávek

$P(T|R) = \frac{n(T)}{n} = \frac{14}{76} = 18{,}42\%$

S pravděpodobností 18,42 % byla prioritní objednávka vyřízena telefonicky.

Zde musíme studenty upozornit, že $\mathbf{P(R|T) \neq P(T|R)}$!

Můžeme samozřejmě postupovat také jiným způsobem.

Podmíněnou pravděpodobnost jevu R za podmínky, že nastal jev T, jsme našli jako podíl počtu případů, kdy nastaly oba jevy R a T současně k počtu případů, kdy nastal jev T. Úplně stejný výsledek ale dostaneme, když vydělíme pravděpodobnost současného výskytu jevů R a T pravděpodobností jevu T.

$n(T)\ldots$ označuje příznivé výsledky jevu T, tzn. 1360 (počet telefonických objednávek)

n ... označuje všechny možné výsledky, tzn. 4000 (počet všech objednávek)

$P(T) = \frac{n(T)}{n} = \frac{1360}{4000}\ldots$ pravděpodobnost, že vybraná zakázka bude telefonní

Pouhými úvahami můžeme získat hodnotu $P(R \cap T)$:

$P(R \cap T) = \frac{14}{4000} \ldots$ bude prioritní a zároveň telefonická

Dostáváme vztah pro podmíněnou pravděpodobnost:

$\frac{P(R \cap T)}{P(T)} = \frac{14/4000}{1360/4000} = \frac{14}{1360} = 1,03\ \% = P(R|T)$

Tím jsme získali stejný výsledek jako minulým výpočtem.

Příklad 21. *V neprůhledném sáčku je 10 černých a 5 bílých kuliček.*

Budeme provádět náhodný pokus: vytáhneme jednu kuličku, přičemž ji do sáčku nevracíme, a pak vytáhneme další. Určete pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku.

Řešení:

B1= při první realizaci náhodného pokusu byla vytažena bílá kulička

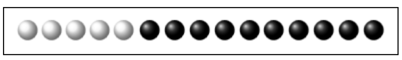
C1= při první realizaci náhodného pokusu byla vytažena černá kulička

B2= při druhé realizaci náhodného pokusu byla vytažena bílá kulička

C2= při druhé realizaci náhodného pokusu byla vytažena černá kulička

Je dobré znázorňovat stavy kuliček na tabuli, protože studenti si lépe uvědomí spojitosti s následujícím číselným vyjádřením.

Stav v sáčku před prvním tahem: 10 ks černých, 5 ks bílých kuliček:



Pravděpodobnost, že při prvním tahu vytáhnu bílou, resp. černou kuličku:

$n(B1) \ldots$ označuje příznivé výsledky, tzn. 5

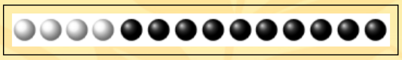
$n(C1) \dots$ označuje příznivé výsledky, tzn. 10

$n \dots$ označuje všechny možné výsledky, tzn. 15

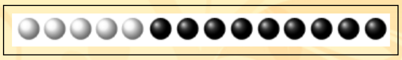
$P(B1) = \frac{n(B1)}{n} = \frac{5}{15}$

$P(C1) = \frac{n(C1)}{n} = \frac{10}{15}$

Stav sáčku před druhým tahem, byla-li při prvním tahu vytažena bílá kulička: 10 ks černých, 4 ks bílých:



Stav sáčku před druhým tahem, byla-li při prvním tahu vytažena čená kulička: 9 ks černých, 5 ks bílých:



Z obrázků vidíme a z logického úsudku vyplývá, že výsledek druhého tažení závisí na výsledku první realizace pokusu. Jinak řečeno: **výsledek druhého tahu je podmíněn výsledkem první realizace pokusu**.

Určíme pravděpodobnosti následujících jevů na základě obrázků odpovídajících stavu pytlíku před druhou realizací pokusu:

B2|B1= při druhé realizaci náhodného pokusu byla vytažena bílá kulička, jestliže při první realizaci náhodného pokusu byla vytažena bílá kulička

C2|B1= při druhé realizaci náhodného pokusu byla vytažena černá kulička, jestliže při první realizaci náhodného pokusu byla vytažena bílá kulička

B2|C1= při druhé realizaci náhodného pokusu byla vytažena bílá kulička, jestliže při první realizaci náhodného pokusu byla vytažena černá kulička

C2|C1= při druhé realizaci náhodného pokusu byla vytažena černá kulička, jestliže při první realizaci náhodného pokusu byla vytažena černá kulička

Použijeme stejný vzorec jako u výpočtu pravděpodobnosti tažení v 1. realizaci.

$P(B2|B1) = \frac{4}{14}$

$P(C2|B1) = \frac{10}{14}$

$P(B2|C1) = \frac{5}{14}$

$P(C2|B1) = \frac{9}{14}$

Chceme-li určit pravděpodobnost toho, že **při druhém tahu vytáhneme kuličku bílou P(B2)**, musíme vzít v úvahu dva případy:

(B2 ∩ B1) a (B2 ∩ C1), proto platí:

P(B2) = P ((B2 ∩ B1) ∪ (B2 ∩ C1))

Protože jevy (B2 ∩ B1) a (B2 ∩ C1) nemohou nastat zároveň, označujeme je jako **jevy neslučitelné**. Díky tomu můžeme napsat vztah:

$P(B2) = P(B2 \cap B1) + P(B2 \cap C1)$

Odtud pak dostáváme pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku:

$P(B2) = P(B2|B1) \cdot P(B1) + P(B2|C1) \cdot P(C1) = \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{14} \cdot \frac{10}{15} = \frac{1}{3} = 33,3\ \%$

Příklad 22. *Hráč pokeru dostane postupně 2 karty z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet. Je- li první karta král, s jakou pravděpodobností mu jako druhá karta přijde také král?*

Nejprve tento příklad spočtou studenti způsobem, který již dobře znají: klasická definice pravděpodobnosti.

Řešení:

Máme 1 krále a v balíčku zbývá 51 karet.

Mezi nimi jsou již jen 3 králové.

$n(A)\dots$ označuje příznivé výsledky jevu, tzn. 3 králové v balíčku

$n\ \dots$ označuje všechny možné výsledky, tzn. 51 karet celkem

$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17} = 5,88\ \%\dots$ pravděpodobnost, že hráč dostane i druhého krále

Ve skutečnosti jsme opět počítali podmíněnou pravděpodobnost. Označíme- li:

K1= první karta, kterou dostane, je král,

K2= druhá karta, kterou dostane, je král,

pak tím vlastně určujeme $P(K2|K1)$.

Můžeme tedy samozřejmě postupovat způsobem stejným jako v předchozím příkladě.

$P(K1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}\dots$ na první tah dostane krále

Úvahami a s použitím kombinačních čísel můžeme vypočítat:

$P(K1 \cap K2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$

S využitím vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost, dostaneme výsledek příkladu:

$P(K2|K1) = \frac{P(K1 \cap K2)}{P(K1)} = \frac{1/121}{1/13} = \frac{1}{17} = 5,88\ \%$

Tím jsme získali stejný výsledek jako s pomocí vzorce pro klasickou pravděpodobnost. S pravděpodobností 5,88 % dostane hráč i druhého krále.

Dvě dvojice, které budou mít nejrychleji vypočítaný následující příklad správně, dostanou 1.

Příklad 23. *Vrat'me se ještě jednou k situaci hráče, který postupně dostane dvě karty z promíchaného balíčku 52 karet.*
Vypočítej pravděpodobnost, že hráč dostane eso a krále.

Použij vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost.

Řešení:

Hráč má mít v ruce eso a krále, nezáleží na tom, v jakém pořadí tyto karty dostane. Toto pořadí však musíme v následujícím výpočtu zohlednit. Zavedeme značení:

A1= první karta, kterou dostane, je eso

A2= druhá karta, kterou dostane, je eso

K1= první karta, kterou dostane, je král

K2= druhá karta, kterou dostane, je král

Jev, jehož pravděpodobnost máme určit, nastane, když hráč nejdříve dostane krále a potom eso (nebo naopak). Můžeme ho tedy vyjádřit ve tvaru: $(K1 \cap A2) \cup (A1 \cap K2)$. Jde o sjednocení dvou neslučitelných jevů, proto jeho pravděpodobnost je součtem jednotlivých pravděpodobností.

$P(K1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \ldots$ první karta bude král

$P(A2|K1) = \frac{4}{51} \ldots$ druhá karta bude eso, taháme ze 4 es, z 51 karet, máme 1 krále

$P(K1 \cap A2) = P(A2|K1) \cdot P(K1) = \frac{4}{51} \cdot \frac{1}{13} = \frac{4}{663}$

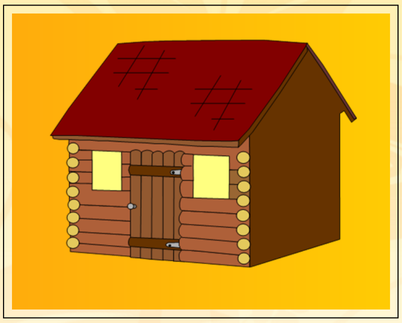
$P(A1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \ldots$ první karta bude eso, ze 4 možných, z celkem 52 karet

$P(K2|A1) = \frac{4}{51} \ldots$ druhá karta bude král, taháme ze 4 králů, z 51 karet, máme 1 eso

$P(A1 \cap K2) = P(K2|A1) \cdot P(A1) = \frac{4}{51} \cdot \frac{1}{13} = \frac{4}{663}$.

Hledaná pravděpodobnost je $P(A) = (K1 \cap A2) \cup (A1 \cap K2) = \frac{4}{663} + \frac{4}{663} = \frac{8}{663} = 1,2\%$.

Následující příklady jsou vhodné k domácímu procvičení.



Příklad 24. *Doplň chybějící slova tak, aby věty dávaly smysl.*

Při řešení některých konkrétních situací nás nezajímá přímo otázka pravděpodobnosti určitého jevu A, ale řešíme situaci výskytu náhodného jevu A za podmínky, že nastal určitý náhodný jev B (jev B není nemožný, P(B) $\neq$ 0). Pro řešení takovýchto situací se používá podmíněná pravděpodobnost.

K určení této pravděpodobnosti, musíme znát veškeré podmínky, za kterých nastanou jednotlivé jevy. Pak podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, definujeme jako podíl pravděpodobnosti současného výskytu jevů A a B a pravděpodobnosti jevu B. Píšeme:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ kde}$$

$P(A|B) \ldots$ podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B

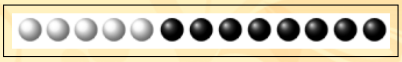
$P(A \cap B) \ldots$ pravděpodobnost současného výskytu jevů A a B

$P(B) \ldots$ pravděpodobnost jevu B

Příklad 25. *V losovací urně je 5 bílých a 8 černých koulí. Postupně vylosujeme 2 koule, přičemž vylosované koule nevracíme zpět.*
S jakou pravděpodobností jsou vylosované koule různých barev?

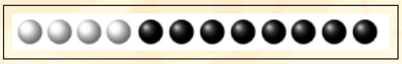
Řešení:

před prvním tažením: 5B + 8C = 13 kuliček

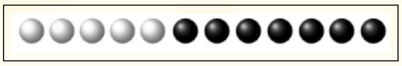


$P(B1) = \frac{5}{13}$ nebo $P(C1) = \frac{8}{13}$

po prvním tažení: 4B + 8C = 12 kuliček



nebo: 5B + 7C = 12 kuliček



chceme různé barvy kuliček po druhém tažení: $P(C2|B1) = \frac{8}{12}$ nebo $P(B2|C1) = \frac{5}{12}$

jev A = různé barvy

$P(A) = P(C2 \cap B1) \cup P(B2 \cap C1) = P(C2|B1) \cdot P(B1) + P(B2|C1) \cdot P(C1)$

$P(A) = \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} = 51,3\%$

Pravděpodobnost, že dvě po sobě vylosované kuličky budou různých barev, je 51,3 %.

3.2.2 Pracovní list: STUDENT

DEFINICE

Při řešení některých konkrétních situací nás nezajímá přímo otázka pravděpodobnosti určitého jevu A, ale řešíme situaci výskytu náhodného jevu A za podmínky, že nastal určitý náhodný jev B (jev B není nemožný, P(B) $\neq$ 0). Pro řešení takovýchto situací se používá **podmíněná pravděpodobnost**.

K určení podmíněné pravděpodobnosti jevu A, musíme znát veškeré podmínky, za kterých nastane nejen jev A, ale také, za kterých nastane jev B. Pak podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, definujeme jako podíl pravděpodobnosti současného výskytu jevů A a B a pravděpodobnosti jevu B. Píšeme:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A|B) \dots$ podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B

$P(A \cap B) \dots$ pravděpodobnost současného výskytu jevů A a B

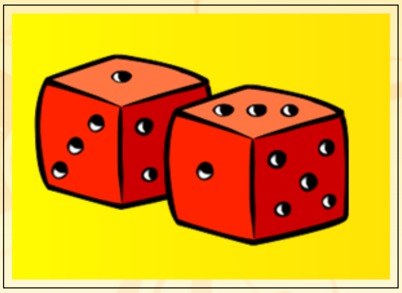
$P(B) \dots$ pravděpodobnost jevu B

Snadno z tohoto výrazu odvodíme vzorec pro pravděpodobnost průniku dvou náhodných jevů A a B

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Příklad 26. *Házíme obyčejnou hrací kostkou a sledujeme jaká čísla na ní padnou. Urči, jaká je pravděpodobnost, že na kostce padnou čísla 1 nebo 2. Označme si tento jev A.*
Dále urči, jaká je pravděpodobnost, že na kostce padnou sudá čísla. To pro nás bude jev B.
Pak urči pravděpodobnost současného výskytu jevů A a B: $A \cap B$.
A jako poslední urči pravděpodobnost, že na kostce padla 1 nebo 2, za podmínky, že na kostce padlo sudé číslo (podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev $B : P(A|B)$).

Řešení:



Příklad 27. *Zásilkový prodejce rozlišuje objednávky od zákazníků podle způsobu přijetí do 3 skupin: telefonické, e-mailové a objednávky na tištěném formuláři pro stálé zákazníky.*
Podle velikosti objednávky rozděluje objednávky do 4 skupin: malé, střední, velké a prioritní. Z databáze všech objednávek za poslední časové období lze vyčíst informace uvedené v tabulce (viz. níže).

a) Dnes volal zákazník, který si chtěl objednat zboží. S jakou pravděpodobností bude jeho objednávka prioritní?

b) Referentka řekla, že právě vyřídila prioritní objednávku. S jakou pravděpodobností ji vyřizovala se zákazníkem telefonicky?

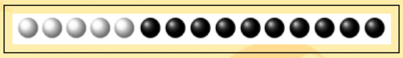
	malá	**střední**	**velká**	**prioritní**	**celkem**
telefon	1021	216	109	14	1360
e-mail	86	371	308	49	814
formulář	1497	230	86	13	1826
celkem	2604	817	503	76	4000

Řešení:

Příklad 28. *V neprůhledném sáčku je 10 černých a 5 bílých kuliček.*

Budeme provádět náhodný pokus: vytáhneme jednu kuličku, přičemž ji do sáčku nevracíme, a pak vytáhneme další. Určete pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku.

Řešení:



Příklad 29. *Hráč pokeru dostane postupně 2 karty z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet. Je- li první karta král, s jakou pravděpodobností mu jako druhá karta přijde také král?*

Řešení:

Příklad 30. *Vrat'me se ještě jednou k situaci hráče, který postupně dostane dvě karty z promíchaného balíčku 52 karet.*
Vypočítej pravděpodobnost, že hráč dostane eso a krále.

Použij vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost.

Řešení:

Příklad 31. *Doplň chybějící slova tak, aby věty dávaly smysl.*

Při řešení některých konkrétních situací nás nezajímá přímo otázka pravděpodobnosti určitého jevu A, ale řešíme situaci .... za podmínky, že nastal .... (jev B není nemožný, P(B) $\neq$ ...). Pro řešení takovýchto situací se používá ....

K určení této pravděpodobnosti, musíme znát ...., za kterých nastanou jednotlivé jevy. Pak podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, definujeme jako podíl .... jevů A a B a .... B. Píšeme:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ kde}$$

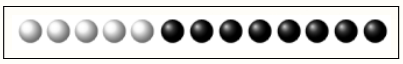
..................podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B

..................pravděpodobnost současného výskytu jevů A a B

$P(B)$... ....

Příklad 32. *V losovací urně je 5 bílých a 8 černých koulí. Postupně vylosujeme 2 koule, přičemž vylosované koule nevracíme zpět.*
S jakou pravděpodobností jsou vylosované koule různých barev?

Řešení:



3.3 Paradoxy v pravděpodobnosti

čas	učivo	činnost učitele	činnost žáků	výuk. metody/formy	hodnocenní	pozn.
5	uvedení do hodiny, zápis do třídní knihy, kontrola úkolu	řešení příkladů z domácího úkolu	oprava domácího úkolu	diskuze frontálně- individuální, pracovní listy	zpětná vazba	čas na dotazy
8	motivační příklad	zavedení paradoxu narozenin,	pochopení pojmu paradox	frontálně-individuální, pracovní listy	zpětná vazba, slovní hodno- cení	
22	vysvětlení dalších paradoxů	ukázky známých paradoxů, rozdělení žáků do dvojic	aplikace poznatků na složitějších příkladech, zapojení se	frontálně-individuální párová, pracovní listy	hodnocení známkou za odvedenou prá- ci	
10	opakování z minulých hodin, oznámení písemné práce	opakování příkladů na pravděpodob- nost (z minulých hodin)	řešení úloh zadaných vyučujícím	frontálně-individuální diskuze, pracovní listy	slovní hodno- cení, zpětná vazba	čas na dotazy

3.3.1 Pracovní list: UČITEL

DEFINICE

Paradox je tvrzení, které spojuje pojmy nebo výroky v běžném slova smyslu si odporující v neočekávaný, překvapivý, ale smysluplný celek. Nesmyslnost paradoxu je tedy pouze zdánlivá.

Nejznámnějším paradoxem je **paradox lháře**, který vyřknul následující tvrzení: „Tato věta je nepravdivá“. Paradox je v tom, že pokud je ona věta opravdu nepravdivá, tak věta říká pravdu. Pokud ale věta říká pravdu, tak přece nemůže být pravdivá, vždyť to sama o sobě tvrdí!

Paradox narozenin

V teorii pravděpodobnosti je narozeninovým problémem (či narozeninovým paradoxem) myšlena pravděpodobnost, že pro skupinu náhodně vybraných 23 (či více) lidí, je více než 50 % pravděpodobnost, že nějací dva lidé budou mít narozeniny ve stejný den. Pro 57 a více lidí je ona pravděpodobnost více než 99 %. Postupně pravděpodobnost roste až ke 100 % pro 366 lidí (za předpokladu že pracujeme s rokem o 365 dnech).

Pro výpočet pravděpodobnosti, že v místnosti s n lidmi mají alespoň dva lidé narozeniny ve stejný den, budeme předpokládat rovnoměrné rozdělení narozenin během roku (budeme ignorovat přestupné roky, dvojčata atd.).

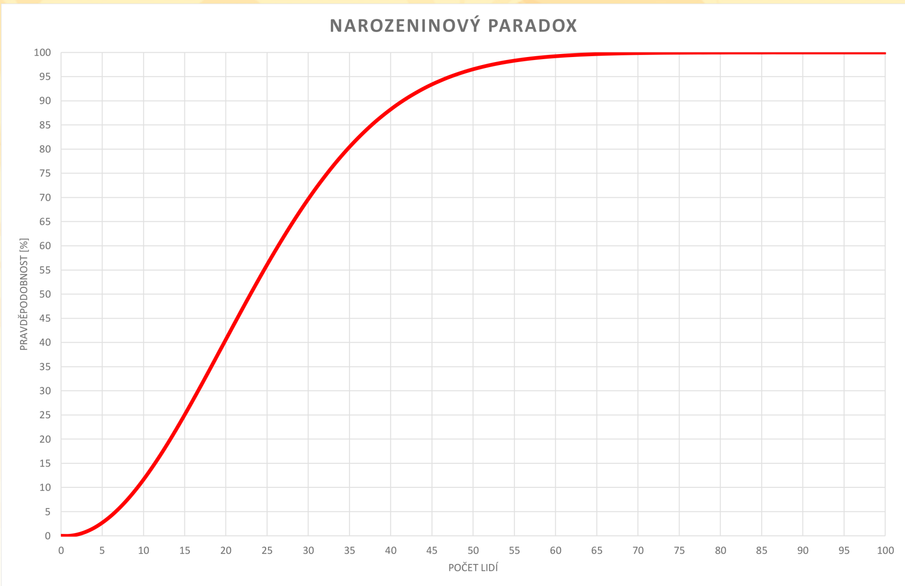
Je jednodušší nejprve spočítat pravděpodobnost P(n), že všech n narozenin je rozdílných. Pak se dopočítá doplněk k pravděpodobnosti 1-P(n) a dostaneme pravděpodobnost, že existují alespoň dva lidé, kteří mají narozeniny ve stejný den. Platí:

$$P(n) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n},$$

protože druhá osoba nemůže mít ve stejný den narozeniny jako první osoba, třetí osoba je nemůže mít ve dny jako je mají první dvě, atd.

Následující tabulku si studenti dopočtou pomocí výše uvedeného vzorce.

n	**1 - P(n)**[%]
10	11,69482
23	50,72972
30	70,63162
50	97,03736
100	99,99996
366	100



Tento paradox je hezké zkusit si se studenty ve třídě. Protože je jich poměrně málo, bude pravděpodobnost malá. Když bychom jim to zadali jako domácí úkol a nechali je sehnat, co nejvíce lidí z jejich okolí, pravděpodobnost by razantně stoupla.

Problém tří dveří

V soutěži o automobil jsou troje tajemné dveře. Moderátor Monty Hall umístil za jedny dveře auto, za ostatní dveře umístil prasata. Našim úkolem je najít a vybrat ty dveře, za kterými je auto.

V tuto chvíli nás vybídne, abychom si zvolili jedny ze tří dveří (označujeme je A, B a C). Řekněme, že jsme si vybrali dveře B.

Dále vstupuje do hry znovu moderátor, který ze zbývajících dveří (tj. A, C) otevře ty dveře, za kterými se skrývá jedno z prasat. Tím nám tedy prozradí dveře, které určitě nevedou k cíli. Řekněme, že otevře dveře A.

Pointa celého problému je v následujícím kroku: moderátor nám nabídne, že můžeme svou volbu změnit. My jsme si nejdřív vybrali dveře B, pak nám moderátor řekl, že za dveřmi A auto není a nabízí nám, že můžeme změnit svou volbu na dveře C. Můžene si však také ponechat svou původní volbu B.

Jak se rozhodneme? Je větší šance, že auto bude za dveřmi B, nebo za dveřmi C? Nebo je to jedno?

Také tento paradox si mohou studenti vyzkoušet sami. Jednomu z nich podrobně vysvětlíme pravidla a tím se stane moderátorem, který se bude snažit přemlouvat soutěžícího. Necháme soutěžícího, aby si promyslel, které dveře si vybere a vysvětlil, proč si dané dveře vybral- z hlediska pravděpodobnosti. Pokud by na to student sám přišel a dokázal to správně vysvětlit z hlediska pravděpodobnosti, může vyhrát místo pomyslného automobilu skutečnou známku.

Řešení:

Existují troje dveře. Jedny dveře jsou ze hry pryč, takže vlastně máme už jen dvoje dveře, a tím pádem 50 % šanci, že vyhrajeme auto. Přibližně takové je myšlení u velké části lidí. Řešení je to ale samozřejmě **špatné**.

Ukážeme si zde, že se vyplatí změnit svou volbu na jiné dveře. Pro snadnější pochopení si rozepíšeme pravděpodobnosti od začátku až do konce.

Když si poprvé zvolíme dveře, tak pravděpodobnost, že zrovna za nimi bude auto, je $\frac{1}{3}$. Žádnou další indicii nemáme, takže pravděpodobnost je rozdělena rovnoměrně.

Zároveň ale existuje $\frac{2}{3}$ pravděpodobnost, že se auto nachází za dveřmi A nebo C. Je tedy pravděpodobnější, že se auto nachází za dveřmi, které jsme nezvolili. Toto je **důležité**!

V dalším kroku vstupuje do hry moderátor a otevře jedny ze dveří, za kterými není auto. Řekli jsme si, že to budou dveře A. Co se stane s tou $\frac{2}{3}$ pravděpodobností? Víme, že pravděpodobnost, že je auto za dveřmi A nebo C je $\frac{2}{3}$ a zároveň víme, že za dveřmi A není. $\frac{2}{3}$ pravděpodobnost se tak přelije na dveře C. Šance, že auto je za dveřmi C je tedy 2 ku 3.

Naše šance u dveří B ale zůstává stále stejná, ta se nijak nezměnila. Takže máme $\frac{1}{3}$ **šanci, že je auto právě za dveřmi B**, které jsme zvolili, a $\frac{2}{3}$ **šanci, že je za dveřmi C**, na které můžeme svou volbu změnit. To je tedy důvod, proč je rozumné svou volbu změnit.

Simpsonův paradox

Simpsonův paradox porovnává úspěšnost dvou osob či skupin během delšího období, přičemž v jednotlivých obdobích je úspěšnější skupina A, ale celkově je úspěšnější skupina B.

Máme dva různé studenty na dvou různých školách, kteří studují dva různé obory. Označme je A a B. Oba píší za semestr ve svém předmětu dva testy. Student A má v prvním úspěšnost 30 % a ve druhém 100 %. B má v prvním úspěšnost 25 % a ve druhém 75 %. Který ze studentů je úspěšnější?

Řešení:

Na první pohled se zdá, že A je úspěšnější student. Ovšem pokud doplníme počet správně zodpovězených otázek, už se to tak nemusí jevit. Podstatou problému je, že A s B psali různé testy, protože chodlili na různé školy.

Student A totiž v prvním testu mohl odpovědět správně na 3 z 10 otázek (30 % úspěšnost) a pak na 2 ze 2 otázek (100 %). Celkem tak zodpověděl správně 5 z 12 otázek. Student B však mohl zodpovědět správně 1 ze 4 (25 %), a pak 6 z 8 otázek (75 %). Celkem tak zodpověděl 7 z 12 otázek. Z tohoto pohledu je tedy vidět, že úspěšnější je student B.

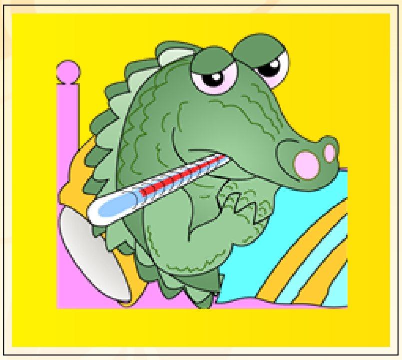
Lékařův paradox

Pacient absolvuje test na určitý typ nemoci a ten mu vrátí pozitivní výsledek, tj. test odpoví, že pacient nemoc má. Ve skutečnosti ale může být pravděpodobnost, že nemoc skutečně má, mnohem menší, než že ji nemá. To je základem tohoto matematického paradoxu.

Stalo se, že se v Praze objevila prasečí chřipka. Pan X jde k doktorovi, který jej podrobí testu, zda tuto chřipku má, nebo nemá. Tento test má úspěšnost 99,95 %. Po týdnu se pan X dozví, že test vyšel pozitivně.

Chvíli z toho byl smutný, ale pak si uvědomil, že test má přece jen 99,95 % úspěšnost, takže šance na to, že se zmýlil je 0,05 %. Protože je pan X velmi schopný matematik, začal počítat a zajásal. Zjistil totiž, že pravděpodobnost, že skutečně prasečí chřipku má je pouze 16 %. Jak je to možné?

Řešení:



Zkusme si to projít celé znovu. Pro jednoduchost si představme, že náš imaginární test by mohl fungovat takto:

1. Pokud nemoc máte, test vám ve 100 % případů řekne, že jste nemocní.

2. Pokud nemoc nemáte, test je úspěšný v 99,95 % případů. Tedy i když nemoc nemáte, tak v 0,05 % případů test řekne, že nemoc máte.

3. Pokud test oznámí, že nemoc nemáte, určitě nemocní nejste.

4. Pokud test oznámí, že nemoc máte, může to být pravda i lež.

To ovšem není vše, co potřebujeme vědět. Musíme ještě znát, kolik nemocných v dané populaci je.

Hodně nemocných

Představme si populaci A, kde jsou 2 % lidí infikovaných. Provádíme test na jednom milionu lidí, což znamená, že 20 000 lidí má chřipku a ostatní ji nemají.

Protože test je vždy úspěšný, pokud danou nemoc člověk má, označí 20 000 lidí za nemocných. Zbývá 980 000 lidí, kteří nemoc nemají. Zde má test úspěšnost 99,95 %, neboli má 0,05 % neúspěšnost. Takže označí 980 000 · 0,0005 = 490 lidí za nemocných, přestože nemocní nejsou.

V celkovém součtu tak test označí 20 490 lidí jako nemocných. Z tohoto množství je ale nemocných pouze 20 000 lidí. Pravděpodobnost, že skutečně máte nemoc je tak $P(N) = \frac{20000}{20490} = 0.9760858956$, což je přibližně 97,6 %.

Málo nemocných

Podívejme se na populaci B, kde nemoc má 0,01 % obyvatel. Provádíme stejný test na jednom milionu lidí.

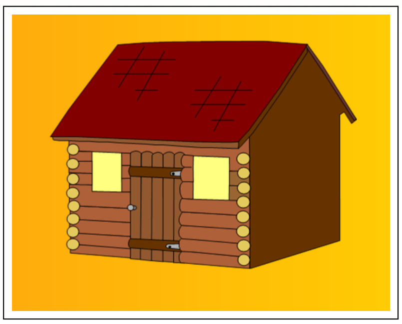
> Vzhledem k tomu, že jsme studentům vysvětlili podrobně tento paradox na populaci A, mohou si jej zkusit spočítat na populaci B. Nejrychlejší dvě dvojice, které to budou mít správně vypočítané, dostanou 1.

Z jednoho milionu lidí je nemocných pouze 100 lidí- tyto lidi test správně označí za nemocné. Zbývá nám 999 900 lidí, kteří jsou zdraví. Z těchto lidí test označí 0,05 % jako nemocných, kvůli své chybě. Test tak označí 999 900 · 0,0005 = 500 zdravých lidí jako nemocné.

V celkovém součtu označí 100 + 500 = 600 lidí jako nemocných. Z těchto lidí je ale skutečně nemocných pouze 100, takže pravděpodobnost, že skutečně máte nemoc je pouze $P(N) = \frac{100}{600} = 1/6$, přibližně 17 %. I když vás test označil jako nemocné, máte tedy stále šanci, že nemoc nemáte.

Jeden nemocný

> Příklad s jedním nemocným si studenti nechají jako domácí úkol.



Předpokládejme populaci C jednoho milionu lidí, z nichž je pouze jeden jediný člověk nemocný. Test, kterým se testujeme, má 90 % úspěšnost v případě kladné odpovědi. Co to znamená? Že test z 999 999 zdravých lidí označí 10 % za nemocné, tj. označí přibližně 100 000 lidí jako nemocných. Přitom je ale skutečně nemocný pouze jeden člověk.

I pokud vás test označí, máte pouze šanci 1 ku 100 000, že skutečně nemoc máte, tj. $P(N)$ je přibližně 0,001 %.

3.3.2 Pracovní list: STUDENT

DEFINICE

Paradox je tvrzení, které spojuje pojmy nebo výroky v běžném slova smyslu si odporující v neočekávaný, překvapivý, ale smysluplný celek. Nesmyslnost paradoxu je tedy pouze zdánlivá.

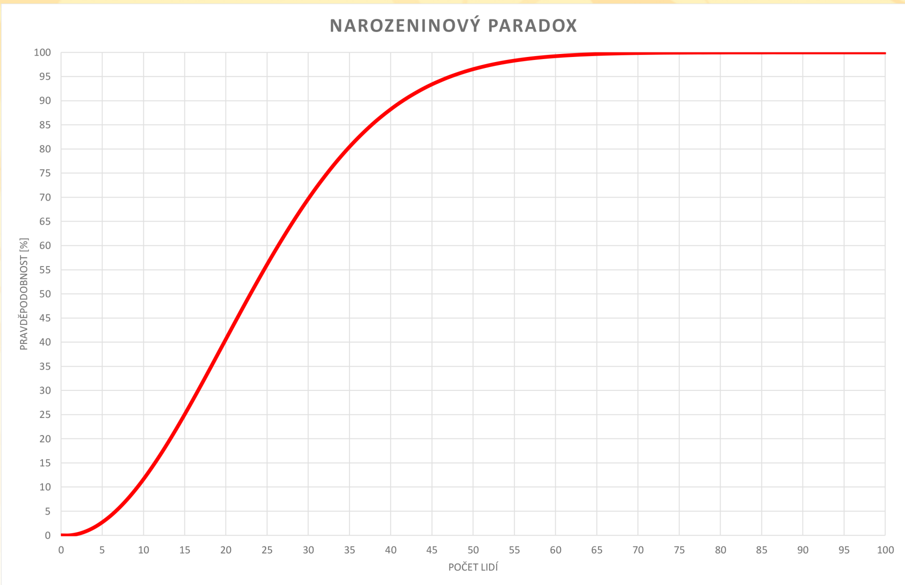
Nejznámnějším paradoxem je **paradox lháře**, který vyřknul následující tvrzení: „Tato věta je nepravdivá“. Paradox je v tom, že pokud je ona věta opravdu nepravdivá, tak věta říká pravdu. Pokud ale věta říká pravdu, tak přece nemůže být pravdivá, vždyt' to sama o sobě tvrdí!

Paradox narozenin

V teorii pravděpodobnosti je narozeninovým problémem (či narozeninovým paradoxem) myšlena pravděpodobnost, že pro skupinu náhodně vybraných 23 (či více) lidí, je více než 50 % pravděpodobnost, že nějací dva lidé budou mít narozeniny ve stejný den. Pro 57 a více lidí je ona pravděpodobnost více než 99 %. Postupně pravděpodobnost roste až ke 100 % pro 366 lidí (za předpokladu že pracujeme s rokem o 365 dnech).

Řešení:

n	1 - P(n)[%]
10	
23	
30	
50	
100	
	100



Problém tří dveří

V soutěži o automobil jsou troje tajemné dveře. Moderátor Monty Hall umístil za jedny dveře auto, za ostatní dveře umístil prasata. Našim úkolem je najít a vybrat ty dveře, za kterými je auto.

V tuto chvíli nás vybídne, abychom si zvolili jedny ze tří dveří (označujeme je A, B a C). Řekněme, že jsme si vybrali dveře B.

Dále vstupuje do hry znovu moderátor, který ze zbývajících dveří (tj. A, C) otevře ty dveře, za kterými se skrývá jedno z prasat. Tím nám tedy prozradí dveře, které určitě nevedou k cíli. Řekněme, že otevře dveře A.

Pointa celého problému je v následujícím kroku: moderátor nám nabídne, že můžeme svou volbu změnit. My jsme si nejdřív vybrali dveře B, pak nám moderátor řekl, že za dveřmi A auto není a nabízí nám, že můžeme změnit svou volbu na dveře C. Můžene si však také ponechat svou původní volbu B.

Jak se rozhodneme? Je větší šance, že auto bude za dveřmi B, nebo za dveřmi C? Nebo je to jedno?

Řešení:

Simpsonův paradox

Simpsonův paradox porovnává úspěšnost dvou osob či skupin během delšího období, přičemž v jednotlivých obdobích je úspěšnější skupina A, ale celkově je úspěšnější skupina B.

Máme dva různé studenty na dvou různých školách, kteří studují dva různé obory. Označme je A a B. Oba píší za semestr ve svém předmětu dva testy. Student A má v prvním úspěšnost 30 % a ve druhém 100 %. B má v prvním úspěšnost 25 % a ve druhém 75 %. Který ze studentů je úspěšnější?

Řešení:

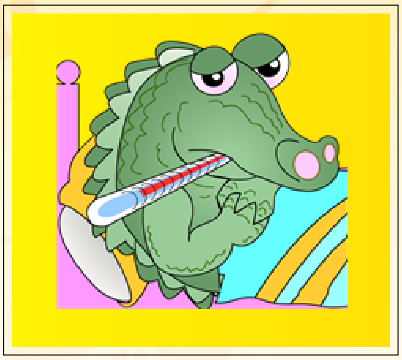
Lékařův paradox

Pacient absolvuje test na určitý typ nemoci a ten mu vrátí pozitivní výsledek, tj. test odpoví, že pacient nemoc má. Ve skutečnosti ale může být pravděpodobnost, že nemoc skutečně má, mnohem menší, než že ji nemá. To je základem tohoto matematického paradoxu.

Stalo se, že se v Praze objevila prasečí chřipka. Pan X jde k doktorovi, který jej podrobí testu, zda tuto chřipku má, nebo nemá. Tento test má úspěšnost 99,95 %. Po týdnu se pan X dozví, že test vyšel pozitivně.

Chvíli z toho byl smutný, ale pak si uvědomil, že test má přece jen 99,95 % úspěšnost, takže šance na to, že se zmýlil je 0,05 %. Protože je pan X velmi schopný matematik, začal počítat a zajásal. Zjistil totiž, že pravděpodobnost, že skutečně prasečí chřipku má je pouze 16 %. Jak je to možné?

Řešení:



Zkusme si to projít celé znovu. Pro jednoduchost si představme, že náš imaginární test by mohl fungovat takto:

1. Pokud nemoc máte, test vám ve 100 % případů řekne, že jste nemocní.

2. Pokud nemoc nemáte, test je úspěšný v 99,95 % případů. Tedy i když nemoc nemáte, tak v 0,05 % případů test řekne, že nemoc máte.

3. Pokud test oznámí, že nemoc nemáte, určitě nemocní nejste.

4. Pokud test oznámí, že nemoc máte, může to být pravda i lež.

To ovšem není vše, co potřebujeme vědět. Musíme ještě znát, kolik nemocných v dané populaci je.

3.4 Realizace v praxi

V rámci této diplomové práce byla vyzkoušena jedna z výše popsaných hodin na Mikulášském gymnáziu v Plzni. Přístup paní učitelky i studentů byl velmi přátelský a vstřícný, což samozřejmě vedlo k příjemnému klimatu v hodině.

Na začátku hodiny byl studentům krátce popsán obsah diplomové práce. Třída poslouchala a zajímala se o další podrobnosti této práce. Hodina byla zaměřená na téma paradoxy v pravděpodobnosti a po krátkém úvodu následoval klasický výklad látky. Struktura hodiny, plánovaná v tabulce z kapitoly 3.3, byla dodržena. Každý student dostal svůj pracovní list, do kterého si zapisoval řešení příkladů, poznámky a potřebné informace.

V posledních 10 minutách dostali studenti k vyplnění dotazník, ve kterém byly otázky týkající se příkladů, výkladu i pracovních listů. Dotazník obsahoval 4 krátké otázky s otevřenými odpověďmi:

1. Jak se Vám líbily z estetického hlediska pracovní listy?

2. Jak byste ohodnotili vybrané příklady?

3. Byly příklady vysvětleny dostačujícím způsobem?

4. Jaký máte z pozice posluchače názor na projev praktikantky?

Všichni studenti spolupracovali a odpověděli na položené otázky. Celkový výsledek byl překvapující a velmi příjemný. Pro zajímavost je níže uvedeno pár odpovědí:

ad 1.
Velmi přehledné a hezky zpracované, zajímavý design.
Pracovní listy byly precizně vytvořené a na čtenáře působí příjemně a přehledně.
Oceňuji dostatek místa pro výpočty a čitelné písmo na zajímavém pozadí.
Grafická úprava se mi moc líbila.

ad 2.
Srozumitelné, zajímavá témata příkladů.
Vybrané příklady jsou ze zajímavých oborů, posluchače dokáží zaujmout.
Nejzajímavější mi přišel lékařův paradox. Dříve mi nedošlo, že tak malá chyba v testu může být velkým problémem.
Zajímavé užití pravděpodobnosti v praxi.
Příklady byly podle mého názoru vybrány skvěle. Příklady ze života se hodí.

ad 3.
Vysvětlení bylo srozumitelné, měli jsme možnost se zapojit do řešení a diskuze- to se mi

líbilo.
I přesto, že to byla trošku složitější matematika, vše bylo vysvětleno dostačujícím způsobem. Pochopil jsem vše.
Řešení bylo srozumitelné i pro lidi, co pravděpodobnost zapomněli.
Všechny naše doplňující dotazy slečna zodpověděla bez problémů.

ad 4.
Projev byl výrazný, příjemný, svým výkladem získala naši pozornost.
Dobré vyjadřovací schopnosti, snaha zaujmout, zapojit posluchače do diskuze i do výpočtů.
Z projevu bylo poznat, že praktikantku učení baví. Všechny otázky byly dostatečně vysvětleny.
Dobré vyjadřovací schopnosti, správná artikulace, spisovná čeština, bylo znát, že ji matematika baví.
Hodinu měla hezky připravenou.

Kapitola 4

Závěr

Tato diplomová práce je rozdělena do tří hlavních částí, které spolu úzce souvisejí a tvoří celek. První část pojednává o obecných didaktických zásadách platných pro vyučování na středních školách, jež jsou platné i pro vytváření příprav na jednotlivé vyučovací hodiny matematiky.

Druhá část práce je zaměřena na aplikaci těchto zásad pro jednotlivé rámcové vzdělávací programy a školní vzdělávací programy. Můžeme se zde seznámit také s hodinovou dotací předmětu matematika na středních školách různých typů.

Třetí, stěžejní část, byla vypracována v souladu s poznatky předchozích dvou celků. Zásady byly aplikovány na přípravu vzorových hodin a také pracovních listů pro oblast pravděpodobnosti. Pracovní listy jsou zpracovány nejen pro studenty, ale i pro učitele, přičemž listy pro učitele obsahují metodické pokyny pro řešení jednotlivých úloh.

Pro přípravu konkrétních vyučovacích hodin byl využit mimo jiné i program SMART notebook, který umožňuje interaktivní zapojení žáků a aktivní spoluúčast při řešení úloh.

Vybrané typy příkladů byly zpracovány též ve verzi vhodné k publikování na internetu a ukázky jsou dostupné na portálu http://almamather.zcu.cz/SFU.

Literatura

[1] Skalková J. *Obecná didaktika.* Grada Publishing, 2007.

[2] Čábalová D. *Pedagogika.* Grada Publishing, 2011.

[3] Vališová A. a Kasíková H. *Pedagogika pro učitele.* Grada Publishing, 2011.

[4] Kalhous Z., Obst O., and kolektiv. *Školní didaktika.* Portál, 2009.

[5] Zormanová L. *Výukové metody v pedagogice.* Grada Publishing, 2012.

[6] Švec V. a Maňák J. *Výukové metody.* Brno: Pedagogická literatura, 2003.

[7] Hrabal V., Man F., and Pavelková I. *Psychologické otázky motivace ve škole.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989.

[8] Lokša J. a Lokšová I. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole.* Praha: Pedagogická praxe, 1999.

[9] Hlavatý J. *Didaktická technika pro učitele.* Vysoká škola chemicko technická v Praze, 2011.

[10] wikipedia. online, [cit. 20.10.14]. dostupné z http://cs.wikipedia.org/wiki/Ramcovy_vzdelavaci_program.

[11] atlas školství. online, [cit. 12.11.14]. dostupné z http://www.atlasskolstvi.cz/stredni-skoly.

[12] MŠMT. online, [cit. 20.11.14]. dostupné z http://www.msmt.cz/.

[13] MŠMT. online, [cit. 22.11.14]. dostupné z http://www.rvp.cz/.

[14] Robová J., Hála M., and Calda E. *Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.* Prometheus, 2013.

[15] Hebák P. a Kahounová J. *Počet pravděpodobností v příkladech.* Informatorium, 2010.

[16] Dupač V. a Hušková M. *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Karolinum, 2011.

[17] Vydavatelství Nová média. online, [cit. 9.2.15]. dostupné z http://www.matematika.cz/pravdepodobnost.