Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Diplomová práce

Analýza a tvorba matematického studijního textu (3D text)

Plzeň 2015 Tereza Hercigová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 18. května 2015

Tereza Hercigová

Poděkování

Chci poděkovat vedoucímu své práce za podporu a cenné připomínky. Dále chci poděkovat svému manželovi za pevné nervy a pomoc při překonávání technických problémů.

Abstract

The aim of this paper is to create a blueprint of study material: Mathematical 3D text. It should offer explanation of given topic on several different levels of difficulty. It should also facilitate self-learning, usage of modern technology and active search for additional information. The text is intended for individual work but it will be possible to use it in a lesson led by a teacher.

The study material is created based on the following principles: It helps to promote the qualities that are the most desired by the employers. It recognizes the importance of other internet based mathematical websites and it encourages their usage. It focuses on a topic of wide practical usage - derivatives and differential equations. It is designed in layers, where each layer offers comprehensive view of the topic. The layers differ in the complexity of mathematical tools which were used.

The Mathematical 3D text has been put into practice starting in May 2015. It can be found online at almamather.zcu.cz[1]. It is used as additional resource for students of the faculty of Mechanical Engeneering of the University of West Bohemia. We gathered their reactions and also opinions of some members of public to the text.

According to the reactions the resulting 3D text is understandable with little need of previous knowledge. The layer design has been appreciated by most as well as the simple practical situation (cooling of hot tea) which was used to demonstrate the mathematical principles. On the other hand the repetitivness of the text and lack of division into subsections within the layers were subject to some criticism. Further suggestions have been made to include more pictures, videos, hyperlinks to related topics and to progress deeper into the problem by adding e.g. the influence of mixing the tea with a teaspoon.

[1] https://almamather.zcu.cz/Když_chladne_čaj_(3Dtext)

Obsah

Úvod

Cílem této práce je vytvořit prototyp studijního textu, který usnadňuje samostudium, podporuje využití dostupných moderních technologií a doplňování informací z různých zdrojů a který poskytuje výklad daného tématu na několika úrovních složitosti. Text bude určen především pro samostatnou práci žáků a studentů, čímž bude podporovat jejich schopnost samostatného učení a řešení problémů. Bude jej ale možné využít i jako podklad pro výuku vedenou učitelem.

Text bude vytvořen v souladu se zjištěními o nárocích na absolventy škol. Jaké tyto nároky a očekávání jsou, budeme analyzovat v první kapitole této práce. Bude nás zajímat jaké jsou cíle školství a jaké jsou požadavky zaměstnavatelů. Zamyslíme se nad tím, do jaké míry jsou tyto cíle a požadavky v souladu a zda jsou skutečně naplňovány nebo je zde prostor pro zlepšení.

Naším záměrem je vytvořit text, který se od existujících zdrojů odlišuje, ale zároveň podporuje jejich využívání. Ve druhé kapitole proto charakterizujeme vybrané významné matematické studijní zdroje, které jsou v současné době na internetu dostupné. Kromě tradičních zdrojů encyklopedického typu využívajících převážně hypertext zaměříme svou pozornost i na interaktivní portály a programy, které je možné legálně zdarma stáhnout.

Pak přejdeme k samotnému Matematickému 3D textu. Uvedeme, v čem spočívá jeho význam, jak dodržuje hlavní didaktické zásady, jaká bude jeho struktura a téma. Součástí práce jsou i podkladové materiály Matematického 3D textu zpracovaného nad vybraným tématem.

Abychom mohli zhodnotit, jestli se nám podařilo vytvořit užitečný studijní materiál, budeme analyzovat reakce a zpětnou vazbu od studentů a učitelů, kteří přijdou s prototypem Matematického 3D textu do styku. Jejich hodnocení, postřehy a připomínky budou shrnuté v poslední kapitole této práce.

1 Cíle vzdělávání v ČR

Často máme tendenci spojovat vzdělávání pouze se školstvím, dětmi a mladými lidmi. V této práci se ale chceme zabývat vzděláváním jako činností, která se může odehrávat v různém prostředí, za různých podmínek a s různou mírou vedení.

Stále se nám ale jedná o činnost, která má sloužit ke zlepšení znalostí, schopností, dovedností a morálních kvalit člověka. Jako kritérium pro posouzení kvality vzdělávání je potřeba si stanovit cíle, ke kterým má vzdělávání směřovat. V této práci budeme vycházet z předpokladu, že vzdělávání má člověku pomáhat k lepším výkonům v nějaké společensky a nebo ekonomicky prospěšné činnosti.

V České Republice jsou cíle vzdělávání v primárním a sekundárním školství stanoveny v Rámcových vzdělávacích programech (RVP). Těmi se budeme zabývat v kapitole 1.1. Jak ale bylo zmíněno na začátku této kapitoly, nechceme se omezovat na vzdělávání v kontextu školství. Proto abychom zjistili, co je obecně společensky a ekonomicky žádoucí (a co by tedy mělo být cílem vzdělávání), podíváme se v kapitole 1.3, jaké jsou požadavky zaměstnavatelů na potenciální zaměstnance.

1.1 Cíle vzdělávání podle RVP

Rámcové vzdělávací programy jsou majákem českého školství; jsou základním dokumentem, od kterého by se v současné době měly v České Republice odvíjet konkrétní vzdělávací programy na mateřských, základních a středních školách. Definují především obecné cíle, které by měly být všem školám příslušného typu společné. Představují oficiální manifest Českého státu o tom, jakým směrem se vzdělávání má vyvíjet (kromě vzdělávání terciálního).

Cíle vzdělávání jsou v RVP obsaženy na několika místech na různé úrovni obecnosti. Středobodem jsou *Klíčové kompetence*, které představují univerzální cíle, ke kterým by ve vzájemné spolupráci měly směřovat všechny vzdělávací oblasti. Dále je zmíněn velmi obecný cíl: „připravit žáky k celoživotnímu učení, profesnímu, občanskému i osobnímu uplatnění“ [18] [str.8], který je z části obsažen a rozpracován právě v klíčových kompetencích.

Trochu konkrétnější cíle pak nalezneme u jednotlivých vzdělávacích oblastí. Vzhledem k matematickému zaměření této práce budeme dále klást důraz na vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace*[1].

RVP měly být odpovědí na požadavek škol po větší volnosti v rozhodování, co a jak budou učit. Proto se cíle v nich obsažené drží obecné roviny a vzdělávací obsah samotný je stanoven volně.

1.1.1 Klíčové kompetence a jejich naplňování

V této kapitole chceme ukázat, jaký směr rozvoje žákovy osobnosti je podle klíčových kompetencí žádoucí. Dále se budeme zabývat příklady konkrétních typů činností, které mohou směřovat k naplňování jednotlivých klíčových kompetencí. Informace použité pro návrh činností směřujících k naplnění klíčových kompetencí byly čerpány především z publikace VÚP 2008: Klíčové kompetence na gymnáziu [18].

RVP se prostřednictvím klíčových kompetencí snaží vpravit do podstaty českého vzdělávání důraz na celostní pojetí vzdělávání. Přestává být nejdůležitější, aby žák byl schopen vyjmenovat, vysvětlit a aplikovat určitý objem učiva. Nejméně stejně ceněný má nyní být rozvoj osobnosti žáka v šesti doplňujících se oblastech specifikovaných klíčovými kompetencemi. Cílem je, aby žák disponoval nejen vědomostmi, ale také schopnostmi a dovednostmi tyto vědomosti účelně a morálně využívat.

Samotná formulace klíčových kompetencí je důležitá proto, že explicitně vyjadřuje kam má žák směřovat po stránce rozvoje své osobnosti. Dříve byly cíle rozvoje žákovy osobnosti ponechány volbě učitele. Ta byla nutně ovlivněna prostředím školy, jejíž fungování je založeno na mnoha pravidlech. Některá tato pravidla jsou zakotvena v zákoně, jiná například ve školním řádu a další jsou „jen“ zažité zvyklosti. Soubor principů fungování školy tvoří rámec, který silně určuje způsob výuky a tedy i to, zda učitel povede žáky k větší samostatnosti a kreativitě nebo spíše k disciplíně a pečlivosti.

Nyní přejdu k jednotlivým klíčovým kompetencím. Klíčové kompetence podle RVP jsou následující:

[1]Konkrétní znění RVP je dostupné na stránkách Národního ústavu pro vzdělávání zde: http://www.nuv.cz/cinnosti/kurikulum-vseobecne-a-odborne-vzdelavani-a-evaluace/ramcove-vzdelavaci-programy

- Kompetence k učení
- Kompetence k řešení problémů
- Kompetence komunikativní
- Kompetence sociální a personální
- Kompetence občanská
- Kompetence k podnikavosti

Kompetence k učení směřuje k tomu, aby byl žák schopen se bez problémů samostatně učit za použití různých zdrojů, jejichž kvalitu dokáže kriticky posoudit. Měl by dokázat sám zhodnotit svůj pokrok a přijmout zpětnou vazbu od ostatních. Celý proces by si měl být schopen naplánovat a zorganizovat. V některých bodech specifikace obsahu této kompetence se objevují i zmínky o pracovní činnosti a praxi. Z toho usuzuji, že *učení* je zde do jisté míry použito jako zástupný pojem pro *práci* a požadavky kompetence k učení se tedy dají vztáhnout na práci obecně.

Činnosti vedoucí k naplnění této kompetence mohou být například:

- Čtení textu/sledování videa s použitím různých aktivizačních metod (I.N.S.E.R.T.[2], učíme se ve dvojicích[3], učíme se navzájem,[4] a podobně) samostatně nebo ve skupinkách.
- Vyhledávání a získávání informací v knihovně, na internetu, od ostatních (při rozdělení práce, kdy jednotlivé skupiny zpracovávají různá dílčí témata).
- Plánování postupu pro dokončení většího úkolu (ve skupinové nebo samostatné práci/projektu)

[2]Získané informace jsou průběžně označovány/zařazovány do 4 kategorií: souhlasí s tím, co už jsem věděl/a nebo si myslel/a, nesouhlasí s tím, co už jsem věděl/a nebo si myslel/a, nová informace, informaci nerozumím.

[3]Ve dvojici je vždy jeden „žák“ a jeden „učitel“. Role se střídají. Po přečtení jednoho odstavce textu „učitel“ shrne získané informace, položí otázku vztahující se k přečtenému odstavci žákovi a určí, co se bude číst dál.

[4]Podobně jako učíme se ve dvojici s tím, že „učitel“ navíc vysvětlí informace, kterým někdo neporozuměl a odhadne jak bude text pokračovat.

- Vymezení dílčích oblastí většího problému (v diskuzi v rámci celé třídy, případně nejprve ve skupinách).
- Vyhodnocení kvality předložených informací (v diskuzi po skupinách nebo v rámci celé třídy).
- Reflexe vlastního pokroku za použití např. hodnoticích archů, metody I.N.S.E.R.T., myšlenkové mapy (samostatně).

Kompetence k řešení problémů spočívá ve schopnosti problém rozpoznat, definovat, rozdělit na části, navrhnout hypotézy a postupy pro jeho řešení a pak je ověřit. Žák by měl zapojovat dříve získané znalosti, dovednosti, kritické myšlení, ale i tvořivost a intuici a měl by být otevřený různým nápadům. Měl by umět zvážit důsledky řešení, jeho klady i zápory. Je překvapivé, že nikde v podrobném popisu této klíčové kompetence nenajdeme zmínku o využití moderních technologických prostředků pro řešení problému. V běžné pracovní praxi jsou přitom moderní technologie (např. počítače, SW a služby internetu) jedny z hlavních nástrojů řešení problémů.

Příklady činností vedoucí k naplnění kompetence k řešení problémů:

- Identifikace informací potřebných k řešení problému a návrh způsobu jejich získání - brainstorming, volné psaní, diskuze, samostatná nebo skupinová práce, přístup k internetu, zaznamenávání myšlenek např. na flipchart.
- Získávání potřebných informací - samostatně nebo ve skupině, z internetu, od spolužáků, z jiných škol, od jiných lidí.
- Identifikace faktorů důležitých pro řešení (zájmové skupiny, zdroje, podmínky,...) - brainstorming, diskuze v celé třídě nebo po skupinách.
- Návrh (několika variant) řešení problému včetně předpokládaných rizik, důsledků, pozitiv a negativ - samostatně, ve skupině, následná diskuze o předložených návrzích
- Sestavování rozstříhané tabulky s informacemi o základních přístupech k řešení konfliktů - skupinová práce.

Kompetence komunikativní se projevuje žákovou schopností komunikovat srozumitelně, citlivě, s ohledem na svůj protějšek a s přiměřeným využitím odborného jazyka a různých způsobů grafického vyjádření informací. Vyžaduje se, aby žák uměl vystupovat i před neznámým publikem, aby používal věcné argumenty a aby svým způsobem komunikace vždy napomáhal vzájemnému porozumění. V této klíčové kompetenci jako v jediné je explicitně požadováno, aby žák uměl efektivně využívat moderní informační technologie.

Příklady činností vedoucí k naplnění kompetence komunikativní:

- Diskuze v nejrůznějších podobách - ve dvojicích, ve skupinách, moderované učitelem nebo žákyní/žákem.
- Debata - využití konkrétního formátu soutěžní debaty, výuka zaměřená na zjišťování a výběr argumentů a protiargumentů, jejich vyhodnocování, správné použití, respekt k protistraně a řízení debaty.
- Dohoda v širší skupině ohledně náplně činnosti, potřebného času, organizace hodiny apod.
- Prezentace v různých variantách - za využití informačních technologií nebo naopak bez nich, před celou třídou, ve skupinách, metodou kmen a kořeny,[5] atp.
- Realizace rozhovorů nebo dotazníku za účelem sběru informací pro nějaký projekt.
- Tvorba plakátu jako prezentace navrhovaného řešení - ve skupině nebo samostatně.
- Poskytování zpětné vazby ostatním (např. po jejich prezentaci).
- Analýza předložených argumentů z hlediska podstatnosti, správnosti a věcnosti - ve skupinách nebo s celou třídou např. formou diskuze se zapisováním konečného stanoviska.

Kompetence sociální a personální od žáka vyžaduje, aby dokázal předvídat důsledky svého jednání, aby se ovládal, byl přizpůsobivý, empatický, choval se zodpovědně (především pokud jde o zdraví jeho nebo jiných osob) a nenechal sebou manipulovat ať už společností nebo médii. Předpokládá, že žák umí

[5] Žák v roli kmene má dané otázky. Odpovědi na ně shromažďují jeho „kořeny“ tak, že se ptají „kořenů“ jiných „kmenů“. „Kořeny“ zároveň odpovídají cizím „kořenům“ na jejich otázky. Na základě sesbíraných informací jsou formulována podstatná tvrzení.

reálně posoudit své fyzické i psychické schopnosti a stanovit si vhodné osobní cíle.

Příklady činností vedoucí k naplnění kompetence sociální a personální:

- Dlouhodobé vedení portfolia - pracovní a dokumentační portfolio prací s průběžným hodnocením vlastních pokroků.
- Týmová práce a práce ve dvojicích v různých variantách.
- Hodnocení průběhu spolupráce a realizace úkolu/projektu (samostatného nebo skupinového) - formou volného psaní, zpětné vazby ve skupině nebo třeba sestavením přehledu kladů a záporů.
- Diskuze o závěrech z článku/videa/skupinové práce.

Kompetence občanská představuje žákovu schopnost uvažovat v širších souvislostech komunity i celé společnosti a mít na mysli podmínky trvale udržitelného rozvoje. Žák má jednat pokud možno ku prospěchu všech a má se umět chovat v krizových situacích. Měl by být tolerantní, zodpovědný, oceňovat kulturu a životní prostředí a hájit svoje práva i práva ostatních.

Příklady činností vedoucí k naplnění kompetence občanské:

- Identifikace skupin lidí, kterých se týká nějaký problém (buď obecný, nebo lépe ze života školy, žáků).
- Řešení problémů s ekologickou tematikou, s dlouhodobým působením.
- Diskuze na skutečným problémem a procesem jeho řešení (např. v parlamentu nebo v zastupitelstvu).
- Získání jmen a kontaktů na zastupitele - na městě, v senátu.
- Zapojení se do projektu neziskové společnosti.
- Sebereflexe „Za co cítím zodpovědnost“ - volným psaním, diskuzí ve dvojicích.

Kompetence k podnikavosti spočívá v tom, že žák o sobě rozhoduje a rozvíjí se, aktivně naplňuje svoje cíle a uplatňuje při tom průběžné hodnocení a potřebné změny postupu. Dotahuje věci do konce, dokáže posoudit a zodpovědně nést rizika spojená s reálnými životními situacemi. Je kreativní a podporuje inovace.

Příklady činností vedoucí k naplnění kompetence k podnikavosti:

- Organizace a realizace programu pro hosty (např. z výměnného pobytu).
- Organizace a realizace vánoční besídky/divadelního představení.

1.1.2 Cíle vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

V této kapitole uvedeme přehled požadavků, které jsou na výuku matematiky kladeny v rámci příslušné vzdělávací oblasti.

V rámci cílů této vzdělávací oblasti je nejvíce zmiňován požadavek na schopnost rozumět matematickým pojmům a přesně se s jejich využitím vyjadřovat. Spojení *matemetický termín* nebo *matematický pojem* ve smyslu jeho *užívání*, *osvojování*, *vytváření zásoby* nebo *porozumění* je uvedeno ve 4 ze 14 bodů popisujících cílové zaměření vzdělávací oblasti.

Až poté následují cíle v oblasti řešení problémů. Ve 3 různých bodech ze 14 je zmíněno *Analyzování problému*, *vytváření plánu řešení* nebo *hypotéz* a *vyhodnocování matematických modelů*. V rámci zmíněných bodů je uveden požadavek na rozvoj logického myšlení.

Dalším požadavkem je, aby si žák rozvíjel prostorovou představivost, chápal, že existují různé způsoby řešení a že realita je obvykle složitější, než matematický model. Měl by umět používat kalkulátor a moderní technologie a spatřovat v matematice součást kulturního dědictví.

Vymezení cílů v RVP bylo zkoumáno ještě podrobněji za pomoci Bloomovy taxonomie cílů. Bylo nalezeno celkem 41 dílčích spojení, které mohou být vyloženy jako jednotlivé cíle. Z nich 15 bylo formulováno natolik obecně, že nebylo možné je podle Bloomovy taxonomie zařadit. Zařazení několika dalších je diskutabilní. Jedná se především o cíle, které byly nakonec zařazeny do kategorie *Aplikace*, ale za určitých podmínek by mohly být zařazeny výše.

Ze zbylých 26 dílčích cílů se 10 týkalo zapamatování a pochopení a to především matematických pojmů, ale částečně i algoritmů a vztahů. Na úrovni aplikace bylo 10 dílčích cílů týkajících se většinou řešení problémů, dva se ale týkaly využití pojmů a přesnosti vyjadřování. Na úroveň analýzy a syntézy bylo zařazeno po jednom cíli a na úroveň hodnocení čtyři dílčí cíle. Ty se už všechny týkaly řešení problémů.

Z pohledu na vzdělávací obsah této oblasti je ale okamžitě patrné, že hlavní důraz je kladen na řešení úloh za využití předložených poznatků. Samotný vzdělávací obsah je poměrně volně specifikován na třech stranách textu.

1.2 Hodnocení vzdělávání a státní maturita

V této podkapitole se budeme zabývat tím, co je v oblasti matematiky skutečně ověřováno a tedy reálně vyžadováno od absolventů středních škol.

Státní maturita jako taková má podle zprávy NKÚ [12] jen obecně stanovené cíle bez harmonogramu jejich plnění a kritérií jejich hodnocení. Tyto cíle se dají shrnout následovně:

- Snížit rozdíly v maturitní zkoušce mezi školami
- Definovat minimální standard požadavků státu na všeobecnou složku vzdělávání
- Zvýšit objektivitu a srovnatelnost výsledků
- Udělat z maturitní zkoušky kritérium pro přijetí ke studiu na vysokých a vyšších odborných školách

Podle zmiňované zprávy NKÚ ovšem státní maturita v roce 2011 poslední dva cíle neplnila a první dva cíle nebyly hodnocené, protože byly stanovené příliš obecně a jejich plnění se dost dobře hodnotit nedalo.

Některé dopady státní maturity ve svém blogu rozebírá zakladatel společnosti Scio Ondřej Šteffl [17]. Zmiňuje *wash back effect* (nebo-li učí se to, co se zkouší), který státní maturitu jakožto velmi důležitou zkoušku nutně doprovází. Tento jev může být v důsledku pozitivní i negativní. Podle Šteffla v oblasti jazyků, které jsou v rámci maturity testovány se zaměřením na jejich praktické užití, státní maturita kvalitě výuky spíše prospívá. Na druhou stranu matematiku státní maturita ve spojení s *wash back effect* do značné míry redukuje na nácvik postupů řešení jednotlivých typů úloh, které pravděpodobně žákům v dalším životě k ničemu nebudou.

Působení státní maturity se ale neomezuje jen na samotné testy. Z výchovného hlediska je bohužel celý projekt státních maturit špatným příkladem pro studenty. Na vlastní kůži si zažívají nedotažená zadání, zmatky ve vyhodnocování a vnímají společenskou diskuzi o efektivitě prostředků vynaložených na státní maturitu.

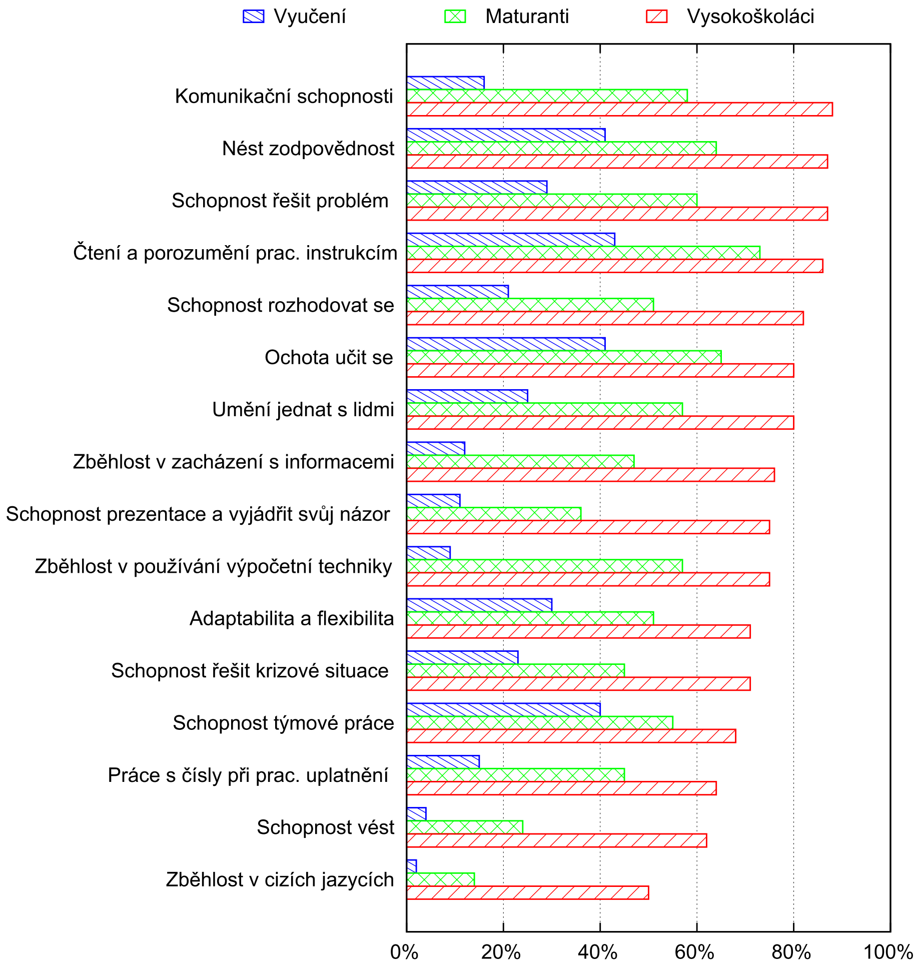
Dostávají se do situace, kdy významná část jejich budoucnosti závisí na jejich výkonu v jediný den a na dalších okolnostech, které sami nemohou ovlivnit. Tím vzniká pocit, že nemohou kontrolovat vlastní život (tzv. *external locus of control*). Bylo prokázáno, že pocity bezmocnosti, které jsou s tímto spojené vedou k větší náchylnosti k úzkostem a depresi [4].

Český učitel, který by chtěl plně využít možností, které mu nabízejí RVP, se při zavedení jednotné státní maturity dostal do nepříjemně schizofrenní situace. Na jedné straně si teoreticky může upravit obsah a formu výuky podle svého při zachování požadavků RVP, na straně druhé pokud chce, aby jeho studenti úspěšně odmaturovali, stejně musí odučit to, co se bude zkoušet u maturity. A státní maturita nezkouší klíčové kompetence, ale (pokud jde o matematiku) schopnost přiřadit zadání ke známému typu úlohy a pak správně aplikovat naučený algoritmus řešení.

1.3 Požadavky na absolventy

Zde ukážeme, jaké znalosti a dovednosti u absolventů škol nejvíce oceňují potenciální zaměstnavatelé. Zaměříme se na obecné klíčové kompetence - tedy kompetence, které jsou univerzální pro jakýkoliv obor činnosti. V roce 2014 byl na toto téma proveden výzkum NÚV [9], ze kterého budeme vycházet.

Z obrázku 1.1 je patrné, že čím vyšší vzdělání, tím vyšší je kladen důraz na klíčové kompetence. Z hlediska matematiky je zajímavé, že práce s čísly (na kterou je při výuce na základních a středních školách kladen velký důraz) nepatří mezi nejžádanější kompetence. Důležitější je v této oblasti zběhlost v zacházení s informacemi, v používání výpočetní techniky a schopnost řešit problém.



Obrázek 1.1: Důležitost kompetencí z hlediska dosažené úrovně vzdělání (Převzato z Úlovec, Martin: Potřeby zaměstnavatelů a připravenost absolventů škol – komparační analýza)

Bez rozdílu dosaženého vzdělání je u absolventů vysoce ceněná schopnost čtení a porozumění pracovním instrukcím a nést odpovědnost. U maturantů a vysokoškoláků se pak mezi pěti nejžádanějšími kompetencemi objevila ještě schopnost řešit problém a komunikační dovednosti. Velmi důležitá byla i ochota učit se, kterou ale u vysokoškoláků zaměstnavatelé žádají o něco méně, než schopnost rozhodovat se.

Je patrné, že klíčové kompetence tak, jak jsou navržené v RVP poměrně dobře odpovídají požadavkům zaměstnavatelů. Otázka ale je, do jaké míry školy skutečně klíčové kompetence rozvíjejí.

1.4 Naplňování cílů vzdělávání v ČR

Z analýzy klíčových kompetencí podle RVP v kapitole 1.1.1 vyplývá, že klíčové kompetence jsou naplňovány především činnostmi, kdy je žák aktivní a to buď ve skupině, nebo samostatně. Ještě donedávna ale v českých školách převládal (minimálně při výuce přírodovědných předmětů) frontální způsob výuky a při matematice byl kladen největší důraz na procvičování rutinních postupů a na výuku obsahu. Rozvoji kritického myšlení a vědeckého přístupu se podle Strakové [16] věnovalo jen 28 % učitelů matematiky a 31 % učitelů přírodovědných předmětů.

V souvislosti s kurikulární reformou, která klíčové kompetence zavedla, podle Strakové jen málo učitelů skutečně plánovalo změnit metody a obsah výuky. Dokonce i z těch učitelů, kteří reformu schvalovali (54 % dotázaných), jen necelá polovina uvedla, že mají v plánu výuku reálně změnit [15].

Kromě toho jen kolem poloviny až dvou třetin rodičů je přesvědčeno (na rozdíl od zhruba tří čtvrtin učitelů), že jednotlivé klíčové kompetence jsou ve škole uspokojivě rozvíjeny. Vůbec nejhůře si v tomto ohledu v roce 2006 vedla kompetence sociální a personální a kompetence k učení [15].

Ve společnosti je v tuto chvíli aktivní poptávka po klíčových kompetencích, kterou běžné školy dostatečně nenaplňují. Vzniká zde tedy prostor pro jiné formy vzdělávání, samostatné studium a osobní rozvoj. Zároveň v této oblasti zažíváme obrovský nárůst nabídky díky rozvoji nových technologií, především internetu a informačních technologií.

2 Internetové studijní zdroje

Rozvoj informačních technologií nevyhnutelně zasáhl i do oblasti vzdělávání. Počítače, internet, interaktivní tabule, tablety a další představují nové nástroje, se kterými lze ve výuce pracovat. Zároveň ale rozmach technologií znamená, že škola a učitelé přichází o své výsadní postavení jako zdroj vědomostí. Motivovaný žák nebo student v současné době nepotřebuje učitele k tomu, aby se něco naučil.

Význam školy a učitelů nicméně přetrvává v tom, že vědomosti jsou zde relativně snadno dostupné v ucelené, systematické a srozumitelné podobě (takový je alespoň ideál, kterému se některé školy blíží více, než jiné). Kromě toho mají žáci ve škole příležitost rozšířit si své obzory i v oborech, o které by se pravděpodobně sami od sebe nezajímali. Tato práce je ale zaměřená právě na využití moderních technologií pro samostatné vzdělávání a proto se budeme dále věnovat tomuto způsobu získávání vědomostí.

2.1 Statické internetové studijní zdroje

Za statický internetový studijní zdroj považujeme takový zdroj, který není interaktivní. Uživatel jeho obsah aktivně neovlivňuje. Jedná se o různé encyklopedie (Wikipedie, Encyclopedia Britannica, atp.), slovníky, skripta v podobě webových stránek a podobně.

V českém prostředí se matematikou na různých úrovních zabývá celá řada takových stránek. Obvykle jsou členěné podle učiva tak, jak se probírá na základních a středních školách. U vysokoškolské matematiky většinou neposkytují více než základy kalkulu a lineární algebry. Nezřídka nabízí placenou sekci a doučování. Stylem podání učiva kopírují běžnou praxi na školách - představí matematické téma na dané úrovni, definují pojmy, vysvětlí postupy řešení příkladů, poskytnou ukázkové řešené příklady a případně nabídnou několik příkladů na procvičení. Podrobněji charakterizujeme několik portálů, které mají obsah relevantní pro střední školy a které nás svým provedením zaujaly[1].

[1] Následující charakteristika stránek odpovídá jejich stavu z 25. - 30. 4. 2015.

2.1.1 Matematika.cz

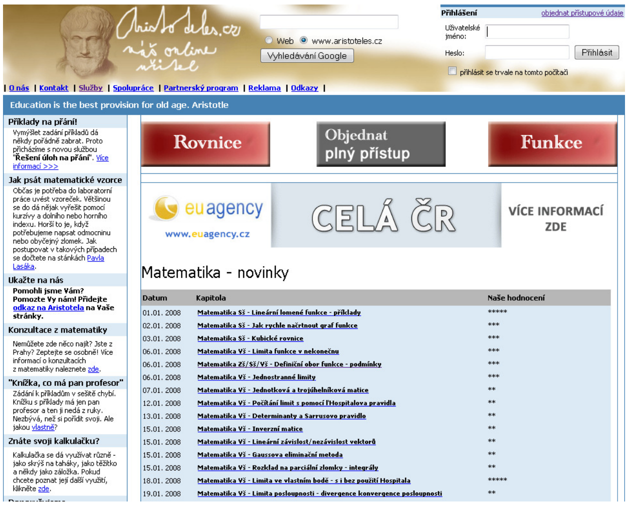
Obrázek 2.1: Úvodní stránka pro matematiku na serveru Matematika.cz, (stav ze 30.4.2015)

Jak je patrné z obrázku 2.1, stránky matematika.cz jsou graficky příjemné a přehledně členěné. Kromě online učebnice matematiky pro základní a střední školy nabízí i základy kalkulu a lineární algebry pro vysokoškoláky. Drží se osvědčené struktury předávání učiva (definice pojmů, výklad, řešené příklady) a členění po tématech z matematické teorie. Několik málo tématických celků se snaží o přesah a provázání matematiky s dalšími oblastmi - např. sekce o bezpečnosti hesel zařazená v celku kombinatoriky. Drtivá většina obsahu je ale podřízená požadavku systematičnosti a zaměřuje se čistě na matematickou teorii.

Server nemá placenou sekci, ale nabízí fórum, kde si mohou uživatelé vzájemně radit. Existuje také facebooková stránka matematika.cz, která se zaměřuje na matematické zajímavosti a hříčky a youtube kanál s návody pro konstrukci některých útvarů (např. osa úhlu, kružnice opsaná trojúhelníku, atp.).

Určité rezervy v obsahu tohoto serveru by se daly najít v oblasti množin, operací s nimi a funkcí. Téma zaměřené na množiny a relace mezi nimi zcela chybí. (Kromě úzce zaměřeného výkladu v sekci lineární algebra pro SŠ.) To je zřejmě i důvod, proč není nikde zmíněno zobrazení a tím pádem chybí i definice funkce. Několik zodpovězených dotazů na toto téma je na fóru. Jednotlivé elementární funkce jsou probrané velmi stručně a goniometrické funkce jsou ukázány jen v trojúhelníku.

2.1.2 Aristoteles.cz



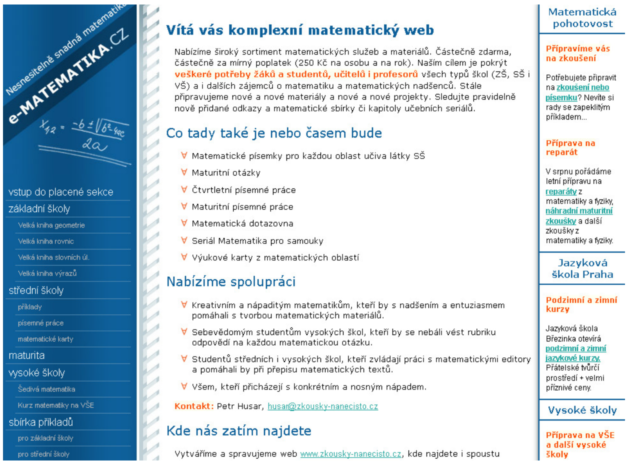
Obrázek 2.2: Úvodní stránka pro matematiku na serveru Aristoteles.cz, (stav ze 30.4.2015)

Z pohledu na obrázek 2.2 je patrné, že design těchto stránek má velké rezervy. Uživatel je zahlcen odkazy, které postrádají systematické uspořádání. Přehled obsahu stránek se nachází až úplně na konci úvodní stránky. Tam najdeme adresářovou strukturu, která sice dává smysl, ale je graficky ponechaná ve zcela základní neatraktivní podobě.

Rozsah témat je podobný jako na serveru Matematika.cz, ale charakter materiálů je odlišný. Aristoteles.cz se zaměřuje na stručné poznámky a výpisky vzájemně propojené odkazy. Obsah serveru Aristoteles.cz je tedy spíše určen pro rychlé opakování a shrnutí znalostí.

Aristoteles.cz asi v minulosti měl fórum, to je ale v současné době (30. března 2015) nedostupné. Nabízí také placenou sekci, která poskytuje uživatelům více řešených příkladů, než přístup zdarma.

2.1.3 E-matematika.cz



Obrázek 2.3: Úvodní stránka serveru E-matematika.cz, (stav ze 30.4.2015)

Grafické prostředí těchto stránek je členěné do tří sloupců, jak vidíme na obrázku 2.3. Levý sloupec obsahuje základní rozcestník, který ale nevede až na jednotlivá témata. Stránky působí trochu roztříštěným dojmem, a to nejen po grafické stránce. Pohled na vlastní obsah tento dojem jen potvrzuje.

V neplacené sekci zde nenajdeme systematicky uspořádané učivo, ale spíše sbírku popisů různých postupů řešení a zadání příkladů. Ani ty nejsou nijak přehledně členěny. Několik výkladových kapitol najdeme až v sekci pro VŠ a to na téma funkce, kalkulus, lineární algebra a nekonečné řady. Placená sekce slibuje kompletní výklad a řešení příkladů.

Ze stránek je patrné, že jsou spojené s jazykovou školou, která se zabývá i doučováním matematiky. Nabízí tedy placenou přípravu na různé zkoušky včetně reparátů.

2.1.4 Realisticky.cz

Graficky příjemné a přehledné stránky. Obsahují kompletně zpracovanou středoškolskou matematiku a fyziku a částečně i matematiku a fyziku pro druhý stupeň ZŠ.

Obsah je určen spíše pro učitele. Látka je rozčleněná podle témat až na jednotlivé vyučovací hodiny. Pro každou hodinu je ve formátu PDF připraven výklad, řešené příklady i příklady na procvičení včetně pedagogických poznámek. Jedná se o podklady pro klasickou školní výuku převedené do elektronické podoby.

Hodiny jsou vytvářeny tak, aby studenti maximum zákonitostí odvodili sami. Celý výklad je postaven na názorných příkladech, které studenty nenásilně dovedou k odvození obecnějších poznatků.

2.1.5 Nabla.cz

Stránky jsou dostatečně přehledně zpracované. Kromě matematiky jsou zde sekce pro fyziku, biologii, chemii, češtinu a programování. V sekci matematika je nejvíce zpracovaná látka základní školy, pro střední školy najdeme výklad jen k výrokové logice, kvadratickým rovnicím a k funkcím a řešené příklady pro limity, derivace a integrály.

Výklad je podobný jako kdekoliv jinde, přičemž bere v potaz úroveň matematických znalostí žáků ZŠ resp. SŠ. Snaží se o dostatečnou srozumitelnost a demonstraci na příkladech. Umožňuje stáhnout obsah lekcí v PDF.

2.1.6 Wikipedie

Wikipedie není specializovaná na matematiku. Její obsah je velmi široký a sama o sobě by mohla být předmětem dlouhého zkoumání. Mnoho lidí namítá, že se jedná o nespolehlivý zdroj informací, protože neexistuje odborné omezení pro to, kdo může články na Wikipedii psát. To s sebou nese jednak riziko, že autor není odborník na dané téma a jednak, že píše záměrně nepravdivé informace ať už za jakýmkoliv účelem. Podle několika studií se však jeví, že Wikipedie je alespoň ve své anglické verzi velmi spolehlivý zdroj [19]. Její přesnost je podle studie časopisu Nature srovnatelná s Encyclopaedia Britannica [3].

Pokud se jedná o matematický obsah najdeme na Wikipedii všechna témata středoškolské matematiky a velkou část těch vysokoškolských i v české verzi. Kvůli šíři záběru Wikipedie není možné vytvořit vyčerpávající přehled obsahu a témat. Uživatel tedy musí vědět, co přesně hledá a k souvisejícím článkům může přejít pomocí hypertextových odkazů.

Vzhledem k povaze Wikipedie se kvalita a způsob zpracování jednotlivých témat liší. Většinou je ale text srozumitelný pouze pro uživatele, kteří se v dané oblasti už alespoň trochu orientují. Wikipedie se nesnaží o didaktický přístup, který by usnadňoval pochopení tématu. Prioritou je přesný, vyčerpávající a pokud možno stručný popis dané problematiky. Na rozdíl od všech ostatních zmíněných matematických serverů ale poskytuje rychlý a relativně srozumitelný náhled i do vysokoškolských témat, kterými se ostatní servery vůbec nezabývají.

Ze zmíněných důvodů je Wikipedie z pohledu studia matematiky vhodná spíše pro vysokoškoláky. Středoškoláci by pravděpodobně měli velký problém matematickým textům na Wikipedii porozumět. Naopak pro vysokoškoláky nabízí Wikipedie u některých témat relativně jednoduché a snadno dostupné podání.

2.2 Portály s interaktivními prvky

Stránky, které umožňují nějakou interakci nebo dokonce zapojení přátel, jsou mezi portály zabývajícími se výukou matematiky vzácné. V českém prostředí se nám podařilo najít jen stránky, kde je možné vyplnit odpovědi k příkladům nebo do testu a následně zjistit správnost odpovědí (např. stránky testy.nanic.cz). V angličtině ovšem existuje interaktivních portálů hned několik např. volně dostupná výuka matematiky na stránkách bbc.co.uk nebo placený portál pro školy mymaths.co.uk.

Výjimečný je v této kategorii portál khanacademy.org, který má dokonce i českou mutaci (khanovaskola.cz), která ale nabízí jen zlomek služeb a obsahu anglického originálu. Konkrétně se omezuje na výklad a výuková videa. Dále budeme mluvit o anglické verzi.

Pro žáky a studenty jsou na Khanacademy k dispozici nespočetná videa na různá témata z různých předmětů. Nejvíce zastoupená je ale matematika a to od základní aritmetiky až po pokročilý kalkulus, diferenciální rovnice a lineární algebru. Ke každému tématu jsou připraveny i příklady na procvičení s kontrolou správných odpovědí a možností získat nápovědu, jak správně postupovat.

Za správně vyřešené příklady získává uživatel body a odznaky, což může napomáhat motivaci k pravidelnému procvičování. Účet na Khanacademy si uživatel může snadno propojit se svým účtem na Facebooku nebo Google+ a Khanacademy mu například při získání nového odznaku nabídne možnost tento úspěch sdílet na sociální síti.

Khanacademy nabízí zvláštní přístup pro rodiče a učitele. Učitelům umožňuje vytvořit virtuální třídy, do kterých si přidají profily svých žáků. Pak mohou sledovat, kolik času žáci tráví plněním úkolů na Khanacademy a jak se jim daří. Lze tedy například zadávat domácí úkoly nebo samostatnou práci v hodině z Khanacademy. Výhoda druhé možnosti je, že se učitel může individuálně věnovat pouze žákům, kteří mají s učivem problém, zatímco nadanější žáci mají příležitost si vyzkoušet nové věci i nad rámec běžného učiva, když základní látku zvládnou. Některé americké školy už s tímto přístupem k výuce matematiky experimentují. O konkrétních případech se lze dočíst v sekci *Classroom case studies* přímo na stránkách khanacademy.com.

2.3 Masové otevřené online kurzy (MOOC)

Fenoménem nedávné doby se staly kurzy, které dávají online zdarma k dispozici světové univerzity včetně těch nejprestižnějších jako např. Harvard, Princeton nebo MIT. U některých kurzů je dokonce možné za příplatek získat různé varianty certifikátu o absolvování kurzu. Konkrétní kurz je možné si vybrat např. prostřednictvím portálu edx.org, canvas.net nebo coursera.org. Různé portály spolupracují s různými univerzitami. Většina kurzů je v angličtině, ale dají se najít i třeba španělské nebo francouzské kurzy. Žádné české kurzy se mi najít nepodařilo.

Tyto kurzy nabízejí v různé kvalitě materiály a vedení v rámci uceleně zpracovaného tématu na vysokoškolské úrovni. Poskytnuté materiály obvykle zahrnují texty, videa a úkoly. K většině kurzů zároveň funguje komunitní fórum studentů, kde si studenti vzájemně pomáhají. V rámci možností na dotazy odpovídají i zaměstnanci dané univerzity.

Absolvování takového kurzu ovšem vyžaduje disciplínu, velkou motivaci a odhodlání. Na rozdíl od cíleného samostudia a dohledávání informací, které člověk v danou chvíli potřebuje, tyto kurzy nenabízí přímočarý a rychlý výsledek. Uživatel má možnost dané téma prostudovat systematicky a v souvislostech, ale nedostává okamžitě odpovědi na otázky, které ho momentálně zajímají. Kromě toho zde chybí pravidelný osobní kontakt a rozvrh, který by pomáhal udržovat disciplínu studenta. Často nemá student vůbec žádné vnější pobídky k práci v kurzu a úspěšné dokončení kurzu tedy plně závisí na studentově vnitřní motivaci.

Podle studie z Pennsylvanské univerzity dokončí kurz průměrně jen 4 % ze všech uživatelů, kteří se do kurzu registrují [14]. Častěji jsou dokončované kurzy, kde studenti nedostávají tolik úkolů. Podle analýzy dat devíti HarvardX online kurzů, kterou provedl Justin Reich, ale také vyšlo najevo, že velká část uživatelů vůbec nemá v úmyslu kurz dokončit. Z těch, kteří tento úmysl měli, kurz v průměru dokončilo 22% [7].

MOOC jsou specifickou formou vzdělávání, která není vhodná pro mladší žáky. K jejich úspěšnému využití je potřeba samostatnost a cílevědomost. Jsou určené hlavně pro dospělé a vysokoškoláky. Nedají se dost dobře použít jako doplňkový zdroj ke studiu jiného předmětu. V jejich obsahu se špatně hledá konkrétní informace, pokud člověk předtím všechny materiály už jednou neprošel. Svým rozsahem a koncepcí tvoří samostatný studijní předmět.

2.4 Volně dostupné matematické aplikace

Kromě statických a interaktivních studijních textů jsou na internetu dostupné i nástroje, které umožňují přímo provádět výpočty, které si zadá sám uživatel. Volně ke stažení je i software pro geometrické konstrukce.

Význam těchto nástrojů je dvojí. Student, který se právě učí něco počítat, si díky těmto nástrojům může zkontrolovat svůj výsledek a v některých případech i postup. Je to tedy cenný pomocník při studiu. Druhý způsob využití spočívá v tom, že tyto aplikace umožňují získat výsledky i bez plné znalosti postupu výpočtu. Student se tedy může soustředit na pochopení vztahů a zákonitostí v daném problému a nemusí se tolik zatěžovat například algoritmem výpočtu derivace složené funkce nebo diferenciální rovnice. Stačí, že ví, kdy a k čemu daný matematický aparát použít.

Maxima

Koncem šedesátých let minulého století skupina vědců na Massachusetts Institute of Technology pracovala na projektu Macsyma (projekt Project MAC's SYmbolic MAnipulator). Byl to první projekt, který se v ucelené podobě zabýval problematikou symbolických výpočtů na počítači. Maxima je jeho *Open Source* (viz dále sekce 2.4) nástupcem, který je dodnes volně dostupný a aktivně vyvíjený dobrovolnickou komunitou [10].

Aplikaci Maxima je možné spustit v Mac OS, v Linuxu, ve Windows i v Androidu. Je potřeba ji uložit a nainstalovat a pak funguje i bez připojení k internetu. Nabízí grafické uživatelské prostředí, symbolické (ale také numerické) matematické výpočty v mnoha oblastech a grafickou vizualizaci výsledku ve dvou a třech dimenzích. Nevýhodou je, že ovládání není zcela intuitivní a uživatel se musí naučit používat správnou syntaxi.

Právě Maxima se stala základem pro další projekty zabývající se symbolickými výpočty jako například Mathematica (viz sekce 2.4) nebo Maple [10].

Matematické výpočty online (MAW)

Projekt MAW[2] brněnské Mendelovy univerzity nabízí výpočty v oblasti práce s funkcemi včetně kreslení jejich grafů, integrálního a diferenciálního počtu, diferenciálních rovnic a řešení rovnic a nerovnic různými metodami včetně numerických.

MAW je koncipovaný spíše jako průvodce pro studenty, kteří se chtějí naučit postupy výpočtů. Pro zadání je připravený formulář, který usnadňuje zadávání složitějších výrazů (např. meze integrálů). Po odeslání zadání se nezobrazí pouze výsledek, ale i postup řešení. V některých případech je postup naznačen a je na studentovi, aby navrhl kroky vedoucí k řešení (výpočet integrálů).

Wolfram Alpha

Wolfram Alpha je výpočetní znalostní stroj (odpovídající pojem v angličtině je *computational knowledge engine* v češtině také odpovídací stroj) vyvinutý firmou Wolfram Research. Běžné vyhledávače po zadání dotazu vrátí seznam stránek, které mohou být pro daný dotaz relevantní. Naproti tomu Wolfram Alpha se pokusí s využitím externích zdrojů informací přímo sestavit smysluplnou odpověď na zadaný dotaz v angličtině. V jiných jazycích nepracuje, ale dokáže interpretovat matematické výrazy a rovnice.

[2]http://um.mendelu.cz/maw-html/menu.php

Jak jsme naznačili, Wolfram Alpha dokáže uživateli poskytnout informace z širokého okruhu vědeckých oborů. Jeho základní funkcí je ale právě řešení matematických problémů i proto, že byl vyvinut na základě matematického software Mathematica a je v něm implementován [8].

Veškeré dotazy uživatel zadává do jednoho pole jako u vyhledávače. Lze přitom použít kombinaci přirozeného anglického jazyka a matematických výrazů. Je ale možné, že dotaz nebude vyložen správně. Narozdíl od MAW, kde je možnost podobných problémů minimalizována specializovanou podobou zadávacího formuláře pro jednotlivé typy úloh, u Wolframu specializované formuláře nenajdeme. Vzhledem k šíři jeho záběru by to ani nebylo praktické. Pokud uživatel nemůže přijít na to, v jakém formátu dotaz správně zadat, může si projít sekci s příklady ke konkrétním tématům, kde najde i korektní způsob zadání dotazu.

Kromě volně dostupné sekce nabízí Wolfram Alpha i placený přístup - Wolfram Alpha Pro. Verze Pro nabízí řešení příkladů včetně postupu a řadu dalších funkcí (např. vstup jako soubor v různých formátech včetně jpg nebo csv, interaktivní úpravy parametrů výstupu, animace, atd.).

Ještě donedávna bylo možné si denně prohlédnout omezený počet postupů řešení. Bohužel s tím, jak tato funkce byla nahrazena placenou službou, přestává být Wolfram Alpha ve své základní neplacené podobě využitelný pro žáky a studenty, kteří se chtějí naučit jak při výpočtech postupovat. Stále ale zůstává velmi cenným pomocníkem v případě, kdy uživatel chce něco vypočítat, ale nepotřebuje se postup výpočtu naučit. Je tedy vhodný při různých problémových úlohách, kde je důležité odhalit zákonitosti a vzájemné vztahy v systému, ale není už podstatné, jak se ke konkrétním výsledkům dostaneme (jestli je spočítáme z hlavy, ručně na papír, s pomocí učitele nebo rovnice zadáme do Wolframu Alpha).

GeoGebra

GeoGebra je multiplatformní, pro nekomerční užití zdarma dostupný program, který poskytuje možnost dynamicky vizualizovat geometrické i algebraické problémy. Nabízí nástroje pro statistickou analýzu dat a je dostupný v češtině. Geometrické konstrukce lze vytvářet za použití předdefinovaných nástrojů a následně dynamicky měnit pomocí úpravy zadaných parametrů. Podobně je možné znázorňovat funkce a demonstrovat jejich chování při změně parametrů.

Tento program je vhodný hlavně jako nástroj pro učitele, pro tvorbu prezentací a ilustračních příkladů. Poskytuje totiž způsob jak názorně předvést chování různých matematických objektů. Jeho ovládání ale vyžaduje určitou praxi a nezahrnuje žádnou matematickou příručku nebo tutoriál, který by mohli studenti využít pro samostudium. Proto je vhodnější jako pomůcka v rámci učitelem připraveného studijního materiálu.

Matematika a Open Source

Pod pojmem *Open Source* rozumíme programy publikované pod některou z licencí, které splňují definici volně dostupného software podle organizace Open Source Initiative[3]. Mezi takové programy patří například již zmiňovaná Maxima (sekce 2.4). GeoGebra by pravděpodobně kritéria Open Source Initiative nesplnila, protože její licence zahrnuje určitá omezení pro případ komerčního užití.

Asi nejznámějším představitelem *Open Source* je operační systém Linux. Je dostupný v mnoha různých variantách a jedna z nich je Mathbuntu. Mathbuntu představuje balíček operačního systému a řady volně dostupných matematických programů, které jsou automaticky nainstalovány společně s operačním systémem. Další součástí balíčku jsou elektronické učebnice matematiky. Skripty pro instalaci Mathbuntu vytvořil Leon Brin, profesor matematiky na Southern Connecticut State University[4].

Ne všechny programy, které se společně s Mathbuntu instalují, jsou čistě *Open Source*, pro nekomerční použití jsou ale dostupné zdarma. V balíčku je mimo jiné Maxima, GeoGebra, Sage (*Open Source* alternativa Mathematicy nebo Matlabu, která nabízí i využití online) a R (volný statistický software). Tyto programy už ale vyžadují ochotu uživatele nastudovat si správný způsob jejich použití. Asi nejsnadněji se ovládá GeoGebra, ale i v jejím případě musí uživatel věnovat nějaký čas práci s manuálem a tutoriály, než se ji naučí dostatečně dobře ovládat.

[3]Tato definice má celkem 10 bodů a požaduje mimo jiné možnost software volně šířit včetně zdrojového kódu. Více zde: http://opensource.org/definition.

[4]Více o Mathbuntu zde: http://www.mathbuntu.org/

3 Zásady Matematického 3D textu

Myšlenka na matematický 3D text se zrodila z nespokojenosti se současným lineárním přístupem k výuce matematiky. Žáci tráví většinu času tím, že se učí a procvičují základní aritmetické operace a později postupy řešení různých typů úloh. Velmi zřídka se dostanou k praktické aplikaci získaných poznatků na reálné životní situace. Vše je podřízeno požadavku systematické výuky, navazujících celků a - bohužel ještě stále - oddělených předmětů. Zajímavosti a tvůrčí přístup k matematice se vyskytují jen okrajově případně až na vysoké škole (pokud to napjatý časový harmonogram dovolí).

Výuka matematiky se odehrává v duchu „nemůžeme dělat B, když ještě neumíte A“. Tento přístup, který je jinak vcelku správný, je ovšem příčinou toho, že žáci vidí jen malé praktické uplatnění matematiky. Navíc mohou získat dojem, že pokud nezvládnou dostatečně dobře základní látku, nemá smysl se zajímat o cokoliv dalšího. Matematickým 3D textem bychom chtěli toto vnímání narušit. Cílem našeho textu je představit praktický problém na několika úrovních matematické náročnosti tak, aby:

- Žáci měli příležitost poznat provázanost matematiky s realitou (byť modelovou).
- Žáci mohli nahlédnout i na složitější matematický aparát, než by běžně příslušelo jejich úrovni.

Matematický 3D text je určen žákům a studentům jako materiál pro samostatné studium a práci, případně jako doplněk k běžnému studiu. Může sloužit i jako podklad pro učitele při vytváření prakticky zaměřené hodiny. Pak je možné zvolit jednu úroveň, které se bude učitel držet a pokročilejším žákům umožnit samostatnou práci na vyšších úrovních 3D textu. Variantou je i situace, kdy učitel pouze představí problém a nechá všechny žáky pracovat samostatně. Má pak prostor se individuálně věnovat jednotlivcům, kteří narazí na těžko překonatelnou překážku.

3.1 Motivace při studiu matematiky

Motivace se stává v matematice palčivým problémem tím spíš, že tento předmět je často vnímaný jako obtížný. Paradoxně, ač se matematika těší velké vážnosti, je u nás podobně jako v Británii společensky přijatelné otevřeně přiznat, že člověk matematice nerozumí a že mu nikdy nešla [11]. Vzniká tak atmosféra, kde je snazší se vzdát.

Přitom právě motivace a schopnost učit se, nikoliv vrozená inteligence, určují, jak se budou studenti v matematice zlepšovat [5]. Aby si žák rozvíjel zdravou motivaci, musí mít k danému předmětu pozitivní postoj a měl by být přesvědčen, že jeho úsilí má smysl.

Přístup nebo postoj k danému předmětu (anglicky *mindset*), je pro úspěch nejen v matematice, ale v podstatě v jakémkoliv oboru, klíčový. Pro účel té to práce budu postojem rozumět nastavení mysli, které určuje, jak budeme interpretovat situace a jak na ně budeme reagovat. Na základě svého výzkumu definovala Carol Dweck fixní postoj (anglicky *fixed mindset*) a postoj otevřený růstu (anglicky *growth mindset*) [2].

Lidé s fixním postojem věří, že jejich schopnosti jsou vrozené a neměnné. Případný neúspěch nebo obtíže si vykládají jako důkaz, že v dané oblasti nemohou být dobří.

Lidé s postojem otevřeným růstu mají za to, že záleží jen na nich, jak své dovednosti rozvinou. Vrozený talent je pro ně jen výchozí bod, od kterého se odrazí a dál už je úspěch jen otázkou odhodlání a práce.

Na základě několika průzkumů bylo ověřeno, že fixní přístup je velmi rizikový z hlediska udržení motivace k dané činnosti. Když museli studenti s fixním přístupem vynaložit větší úsilí ke zvládnutí nějaké látky, znamenalo to pro ně, že nejsou chytří. Podobně, když se setkali s neúspěchem, řekli si, že v daném předmětu nejsou dost dobří. A co je vůbec nejhorší, pokud museli vynakládat v nějakém předmětu větší úsilí, nebo se setkali s neúspěchem, volili do budoucna únikovou strategii. Rozhodli se trávit studiem daného předmětu méně času a nezařazovat jej do dalšího studia. Jejich motivace se rozplynula.

Naopak studenti s přístupem otevřeným růstu viděli vynaloženou snahu pozitivně jako něco obohacujícího, co rozvíjí jejich schopnosti. Neúspěch přisuzovali nedostatku vlastního úsilí. Když něco vyžadovalo větší snahu, nebo se v nějaké oblasti setkali s neúspěchem, rozhodli se věnovat této oblasti více času a úsilí. Jejich motivace zůstala stejně silná nebo ještě zesílila [1].

Matematický 3D text by měl být nástroj, který lze využít k podpoře přístupu otevřenému růstu (*growth mindset*) u žáků. Je koncipován tak, že každá úroveň tvoří sama o sobě plnohodnotný celek a zároveň je provázána s dalšími úrovněmi. Nevyžaduje se plné zvládnutí příslušného matematického aparátu. V případě obtíží jsou žáci odkázáni na využití pomůcek a to především internetových stránek používajících symbolické operace jaké nabízí například server Wolfram Alpha.

3.2 Zásady 3D textu

Jakožto studijní pomůcka se náš text řídí především základními didaktickými zásadami. Jeho elektronická podoba umožňuje důslednější aplikaci některých těchto zásad, než je v tištěném textu možné.

Zásada uvědomělosti a aktivity

Uvědomělost a aktivita je naplněna při využití 3D textu jako materiálu pro samostatnou práci žáků (což je hlavní způsob jeho využití). Žák si sám aktivně zvolí úroveň, kterou chce studovat. Při procházení textu pak dojde na dílčí otázky, které podněcují k zamyšlení a případné využití dalších zdrojů pro získání řešení.

Zásada vědeckosti

Při tvorbě 3D textu byly dodržovány platné vědecké poznatky. Problém chladnutí kapaliny je přizpůsoben jednotlivým úrovním, ale zjednodušení jsou volená tak, aby neodporovala platným fyzikálním zákonům a matematickým tvrzením. Zdroje doporučené pro další studium jsou volené tak, aby obsahovaly potřebné informace v dostatečné kvalitě.

Zásada spojení teorie s praxí

Spojení teorie s praxí je v samém jádru našeho textu. Příklad je volen tak, že umožňuje smysluplně propojit matematiku a fyziku a přitom použít různé úrovně obtížnosti matematického aparátu. Veškerá teorie a matematický výklad jsou vedené ve spojení s pozorovaným reálným modelem. Na nižších úrovních textu jsou k dispozici i naměřená data z realizovaného experimentu, pomocí kterých jsou vyvozeny matematické závěry.

Zásada přiměřenosti

Podstatnou výhodou 3D textu je, že si žák sám zvolí úroveň podle vlastních znalostí. Základní vodítko pro výběr správné úrovně najde na začátku textu. Pokud je náš text využívaný v rámci vedené hodiny, může úroveň doporučit učitel.

K dispozici jsou celkem 4 úrovně. První úroveň je s asistencí učitele použitelná už pro děti na prvním stupni, protože nevyžaduje žádné předchozí matematické znalosti a nepracuje s rovnicemi. Druhá úroveň již předpokládá znalost elementárních funkcí a schopnost řešit rovnice. Je vhodná pro žáky středních škol. Třetí úroveň má stejné předpoklady jako druhá úroveň, ale rozšiřuje výklad o limitní přechod a derivace. Lze ji využít pro žáky gymnázií a matematicky zaměřených středních škol. Čtvrtá úroveň předpokládá znalost diferenciálního počtu a uvádí řešení pomocí obyčejné diferenciální rovnice. Může být zařazena jako rozšíření pro matematické třídy gymnázií nebo pro studenty prvních ročníků vysokých škol.

Zásada individuálního přístupu

Sám o sobě má 3D text jen jednu podobu. Pokud je ale použit pro samostatné studium, tak dává každému žákovi prostor si studium přizpůsobit podle sebe. Žák postupuje vlastním tempem, může přeskakovat úrovně nebo se naopak vracet na nižší úrovně a případně si dohledávat další informace v doporučených zdrojích. Pokud je text využit v hodině vedené učitelem, kdy každý žák má k dispozici vlastní počítač, získává učitel prostor věnovat část svého času individuálně jednotlivým žákům.

Zásada názornosti

Tato zásada je dodržena především na prvních dvou úrovních. Na vyšších úrovních ovšem praktická rovina mírně ustupuje ve prospěch pokročilejšího matematického popisu. Předpokládá se, že v případě zájmu o větší názornost se žák vrátí o úroveň níž. Pro ilustraci předkládaných zákonitostí jsou na prvních dvou úrovních k dispozici naměřená data uspořádaná přehledně v tabulce a vynesená do grafu.

Zásada soustavnosti

Úrovně 3D textu jsou vystavěné od nejjednodušší k nejsložitější, přičemž na sebe vzájemně navazují. Probírané téma dává do souvislosti matematiku s fyzikou a postupně odkrývá možnosti využití matematického aparátu.

Zásada zpětné vazby

Vzhledem k tomu, že náš text je především materiálem pro samostatné studium, tak se zpětná vazba odehrává formou odkrytí správného řešení předložených problémů. Rozvíjí se zde schopnost žáků hodnotit sám sebe a to již na samém začátku při výběru úrovně, kterou se žák chce zabývat. Zároveň není problém úroveň kdykoliv změnit, takže si žák může snadno bez zbytečného stresu poopravit své vnímání sama sebe.

3.3 Struktura 3D textu

Matematický 3D text je založen na principu vrstev, kde každá vrstva sama o sobě nabízí ucelenou informaci o problému. Vrstvy se navzájem liší náročností použitého matematického aparátu. Díky tomu je text přístupný širokému spektru žáků a studentů. Další přínos spočívá v možnosti nahlédnout, jak vypadá pokročilejší látka a čím je možné se zabývat, pokud budu matematiku dále studovat.

Na rozdíl od hypertextu, který můžeme přirovnat k mozaice dílků pospojovaných odkazy, se vrstvy 3D textu podobají spíše míře přiblížení. Na první úrovni vidíme z dálky a bez větších detailů základní obrysy problému. S tím, jak zvětšujeme rozlišení, detailů přibývá, nestane se nám ale, že bychom ztratili kontakt s původním tématem (což se u hypertextu může snadno stát).

Kromě základního principu vrstev náš text také využívá možnosti hypertextu, aby předkládaný obsah zestručnil. V každé úrovni je základní text, který bude zobrazen vždy. V rámci tohoto textu jsou didaktické otázky. Odpovědi na tyto otázky budou primárně skryté, ale žák si je může kdykoliv zobrazit kliknutím na příslušné tlačítko *Odpověď*. Stejně tak je k dispozici podrobnější vysvětlení nebo dodatečné informace pod tlačítkem *Více informací*. V tištěné podobě jsou tyto dva oddíly odlišeny kurzívou a v případě odpovědí i tučným písmem.

První úroveň nevyžaduje žádnou předchozí matematickou přípravu a nepředkládá žádné rovnice. Zaměřuje se na praktické pochopení problému a určení faktorů, které budou ovlivňovat řešení. Na závěr jsou předložena naměřená data, která dokládají úvahy předložené dříve. Látku na této úrovni je možné s vedením učitele předložit již žákům na prvním stupni. Pro samostatné studium je vhodná přibližně od sedmé třídy.

Druhá úroveň už předpokládá základní znalost elementárních funkcí včetně exponenciální funkce, schopnost upravovat výrazy a řešit rovnice. Vychází z fyzikálního popisu problému. S využitím naměřených dat je zde ověřena platnost rovnice popisující chladnutí čaje. Dále je na základě grafu odvozena souvislost chladnutí kapaliny s exponenciální funkcí a jsou vypočteny její parametry pro konkrétní případy.

Třetí úroveň má stejné předpoklady, jako úroveň druhá. Výklad ale směřuje k zavedení derivace pomocí limitního přechodu a představení diferenciální rovnice. Pro řešení získané rovnice mohou žáci využít technologii podporující symbolické operace (například Wolfram Alpha). Pro získané řešení jsou pak dopočítávány konstanty z počátečních a doplňujících podmínek. Postup pro získání konstant zde není uveden, v případě potřeby je žák odkázán na předchozí úroveň.

Čtvrtá úroveň předpokládá znalost derivací a základní povědomí o diferenciálních rovnicích. Je zde uvedeno fyzikální pozadí řešeného problému, na které je přímo aplikovaný aparát diferenciální rovnice včetně postupu řešení metodou separace proměnných.

3.4 Téma 3D textu

Při výběru tématu Matematického 3D textu jsme kladli důraz na tři hlavní kritéria:

- Téma je možné představit na více úrovních náročnosti. Základní úroveň vyžaduje minimální nebo téměř žádné předchozí znalosti.
- Téma je široce využitelné v matematice i v jiných oborech. Je pravděpodobné, že se s ním studenti při dalším studiu na vysoké škole setkají bez ohledu na konkrétní obor, který se rozhodnou studovat.
- Téma lze ilustrovat na jednoduchém praktickém příkladu, který studenty provede všemi úrovněmi.

Jsme si vědomi toho, že naše požadavky byly silné. Kromě toho jsme byli připraveni dát přednost tématu, které je nám osobně blízké. Zvažovali jsme následující témata:

- Goniometrie a goniometrické funkce
- Komplexní čísla a funkce komplexní proměnné
- Derivace a diferenciální rovnice

Téma goniometrie a goniometrických funkcí dobře splňuje první kritérium. Částečně splňuje i druhé kritérium, ale je pravděpodobné, že se tímto tématem budou zabývat většinou spíše studenti čistě technicky zaměřených oborů. Dále jsme se tedy tímto tématem nezabývali a praktický příklad pro jeho představení jsme už nehledali.

Téma komplexní čísla a funkce komplexní proměnné má široké praktické uplatnění, ale bylo by obtížné vyložit jej tak, aby bylo na první úrovni srozumitelné i bez předchozích znalostí. Kromě toho opět nemůžeme doufat, že se s ním při dalším studiu na vysoké škole setká větší část studentů. Proto jsme opustili i toto téma.

Naše nároky splnilo téma derivace a diferenciální rovnice. Myšlenku derivace jako změny je možné vysvětlit i mladším žákům. Koneckonců každý z nás má vlastní zkušenost například s rychlostí. Diferenciální a integrální počet svým využitím překračují oblast čistě technických oborů. Setkají se s nimi kromě studentů technických oborů i studenti chemie, biologie nebo ekonomie a přímé uplatnění bychom našli například i v medicíně nebo sociologii. Nakonec se nám podařilo najít jednoduchý praktický příklad z běžného života, který posloužil jako motivace a ilustrace pro probírané téma. Tímto příkladem se stalo chladnutí kapaliny reprezentované chladnutím čaje.

4 Matematický 3D text

Obsahem této kapitoly je podkladový materiál pro Matematický 3D text. Jedná se o stav z 18. května 2015. Aktuální a průběžně vyvíjená verze Matematického 3D textu je v současné době zveřejněna na almamather.zcu.cz[1].

Webová verze 3D textu byla již na konci letního semestru 2015 zařazena jako doplňkový výukový materiál předmětu M2S, M2S-K a MMM2. Reakcemi studentů se budeme zabývat v kapitole 5.

Vzhledem k tomu, že tento text je určen studentům, přizpůsobili jsme jim v podkapitolách 4.1 až 4.4 používaný jazyk. Některé formulace tedy mohou znít hovorově, ale faktická správnost zůstává zachována.

Náš text předpokládá a podporuje využití technologií schopných zpracovat symbolické operace. Vzhledem k pokročilé funkčnosti, jednoduchému ovládání a široké dostupnosti bez nutnosti instalace se v tomto kontextu nadále budeme odkazovat na Wolfram Alpha. Samozřejmě je pro účely zpracování symbolických operací možné použít jiný vhodný software např. Sage nebo Matlab.

Matematický 3D text

Představme si následující situaci: Uvařili jsme si čaj, ale ten je samozřejmě moc horký, než aby se dal hned pít. Tak jdeme dělat něco jiného a než si na čaj vzpomeneme, je už studený. Má s tímhle něco společného matematika?

Možná vás to překvapí, ale ano. Když si vezmeme na pomoc trochu logického uvažování a fyziky, můžeme přesně určit, jak bude chladnutí čaje probíhat. Pokud se chcete dozvědět víc, můžete pokračovat ve čtení:

- Nechci vidět žádné rovnice - podkapitola 4.1
- Rovnice zvládám a neleknu se exponenciální funkce - podkapitola 4.2
- Chci vědět o funkcích víc - podkapitola 4.3
- Chci vidět derivaci použitou v rovnici - podkapitola 4.4

[1]https://almamather.zcu.cz/Když_chladne_čaj_(3Dtext)

Poznámka: Pro zápis desetinných čísel budeme používat desetinnou tečku místo desetinné čárky. Důvodem je fakt, že chceme usnadnit použití matematického software při práci s tímto textem. Velká část běžně užívaného matematického software (např. Matlab, Mathematica, Sage, Maxima) je vyvíjena v anglickém jazykovém prostředí a proto používá desetinné tečky.

4.1 Když chladne čaj

S čajem je problém. Když se uvaří, nedá se pít, protože je moc horký. Tak jdete dělat něco jiného a než si na čaj vzpomenete, je studený. Já tedy nevím, jak vy, ale studený čaj není nic pro mě. Takže by mě zajímalo, jak to s tím chladnutím je a za jak dlouho čaj vystydne.

Na čem závisí, jak rychle bude čaj chladnout? Co znamená, že je studený – jaká to je teplota? Chladne celou dobu stejně rychle? A jak nejvíc může vychladnout?

Začněme poslední otázkou. Jak nejvíc může čaj vychladnout, když ho máte doma v pokoji? Co se naopak stane se studenou limonádou, kterou vyndáte z ledničky? Může čaj doma zmrznout?

Odpověď: Čaj bude chladnout, až se jeho teplota přiblíží teplotě jeho okolí (teplotě v pokoji). Čaj doma nikdy nezmrzne, pokud tedy máte doma víc než $0\ °C$.

Více informací: Asi tušíte, že čaj vám doma nezmrzne. Něco jiného by bylo, kdybyste ho zapomněli v zimě přes noc venku. To by mohl i zmrznout. Čaj doma chladne, ale limonáda vytažená z ledničky se naopak ohřeje. Zdá se, že existuje nějaká teplota, ke které směřuje jak teplota teplého čaje, tak teplota studené limonády.

Tou teplotou je teplota jejich okolí. Pokud máte čaj doma ve vytopeném pokoji, bude to asi něco kolem $21\ °C$. *Takže čaj v pokoji bude chladnout, až se přiblíží k* $21\ °C$. *Limonáda se bude ohřívat, až se její teplota přiblíží ke* $21\ °C$.

Proč píši „až se přiblíží“ a ne „až dosáhne“? Na to se můžete podívat do další úrovně tohoto textu. Teď se ale zamyslíme nad další otázkou: Na čem závisí, jak rychle bude čaj chladnout?

Odpověď: Rychlost chladnutí čaje bude záležet na rozdílu jeho teploty a teploty okolí. Dále bude záležet na poměru hmotnosti a povrchu čaje. Čím více ho bude, tím pomaleji bude chladnout, ale na druhou stranu čím bude mít větší povrch, tím bude chladnout rychleji.

Více informací: Už jste si asi všimli, že když si dáte čaj do kelímku venku v zimě (třeba na vánočních trzích), vychladne vám rychleji, než když si ho v tom samém kelímku koupíte třeba z automatu ve škole. Co se v obou situacích liší nejvíc? Nejvíc se liší teplota okolí. Tady je ale potřeba říct, že pro rychlost chladnutí čaje není až tak důležitá teplota okolí samotná, jako spíš rozdíl mezi teplotou čaje a teplotou okolí. Tenhle detail bude ještě důležitý. Napadne vás proč?

Rozdíl teploty čaje a jeho okolí je jedna věc. Ale rychlost chladnutí čaje toho ovlivňuje víc. Jak je to s malým čtvrtlitrovým hrníčkem a velkým půllitrovým? Čaj v půllitrovém bude chladnout pomaleji, než v tom čtvrtlitrovém to dá rozum. Ale na druhou stranu měli už jste někdy polévku v mističce? Když si dáte porci polévky do mističky, a nebo tu samou porci polévky do talíře, která vám vychladne rychleji?

Další věc, která může ovlivnit to, jak rychle čaj chladne, je nádoba, do které ho nalijeme. Ne nadarmo se v zimě na výlet bere s sebou čaj do termosky a ne do nějaké obyčejné lahve. Některé nádoby mají lepší izolační vlastnosti a lépe uchovávají teplo.

Ještě jsme si neřekli, co znamená, že je čaj studený. Už víte, že při pokojové teplotě čaj ani po několika hodinách nezmrzne. Nikdy nevychladne na nižší teplotu, než je teplota v pokoji, kde ho máme. Nabízí se možnost, že bychom mohli čaj považovat za studený, když dosáhne pokojové teploty. S tím je ale potíž, o které se dočtete v další úrovni tohoto textu. Jak z toho ven?

Pojem *studený čaj* souvisí s tím, jak ho vnímáme, když ho pijeme. Jako studené budeme vnímat cokoliv, co má nižší teplotu, než je teplota našeho těla. Čaj tedy můžeme prohlásit za studený při jakékoliv teplotě nižší než $37\ °C$.

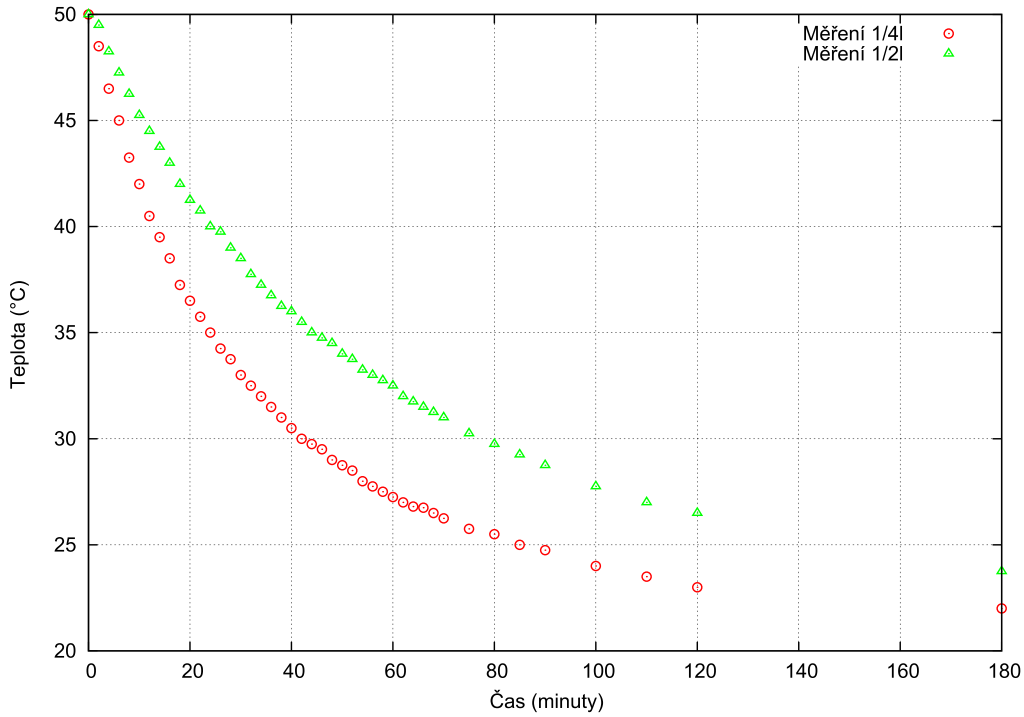
Zbývá poslední záludná otázka: Chladne čaj celou dobu stejně rychle? Vzpomeňme si na všechny ty věci, na kterých chladnutí čaje závisí: na poměru jeho hmotnosti a povrchu, na izolačních vlastnostech nádoby a na rozdílu teploty čaje a jeho okolí. Jsou všechny tyto hodnoty neměnné?

První dvě určitě ano. Ale rozdíl mezi teplotou čaje a jeho okolí se bude neustále měnit s tím, jak čaj chladne. Nejprve bude tento rozdíl velký a čaj bude proto chladnout rychleji. Pak se ale bude zmenšovat a čaj bude chladnout čím dál tím pomaleji, až bude rozdíl obou teplot téměř nulový a čaj téměř přestane chladnout. To je i důvod, proč bylo v úvodu zmíněno, že se teplota čaje jen přibléží teplotě jeho okolí, nikoliv, že jí dosáhne.

Všem výše uvedeným úvahám můžete věřit a nemusíte. Abych vás přesvědčila, vzala jsem teploměr a horkou vodu a změřila jsem chladnutí čtvrt a půl litru vody. Použila jsem vždy stejnou nádobu, abych se nemusela zabývat jejími izolačními vlastnostmi. Vždy jsem chladnutí měřila v pokoji vytopeném na 20.5 $°C$. Při obou měřeních byl tedy různý jen poměr povrchu ku hmotnosti chladnoucí vody. A jak to dopadlo? Podívejte se na graf 4.1 a tabulku 4.1 naměřených hodnot.

Čas (min)	**Teplota $\frac{1}{4}$ l (°C)**	**Teplota $\frac{1}{2}$ l (°C)**	**Čas (min)**	**Teplota $\frac{1}{4}$ l (°C)**	**Teplota $\frac{1}{2}$ l (°C)**
0	50.00	50.00	44	29.75	35.00
2	48.50	49.50	46	29.50	34.75
4	46.50	48.25	48	29.00	34.50
6	45.00	47.25	50	28.75	34.00
8	43.25	46.25	52	28.50	33.75
10	42.00	45.25	54	28.00	33.25
12	40.50	44.50	56	27.75	33.00
14	39.50	43.75	58	27.50	32.75
16	38.50	43.00	60	27.25	32.50
18	37.25	42.00	62	27.00	32.00
20	36.50	41.25	64	26.80	31.75
22	35.75	40.75	66	26.75	31.50
24	35.00	40.00	68	26.50	31.25
26	34.25	39.75	70	26.25	31.00
28	33.75	39.00	75	25.75	30.25
30	33.00	38.50	80	25.50	29.75
32	32.50	37.75	85	25.00	29.25
34	32.00	37.25	90	24.75	28.75
36	31.50	36.75	100	24.00	27.75
38	31.00	36.25	110	23.50	27.00
40	30.50	36.00	120	23.00	26.50
42	30.00	35.50	180	22.00	23.75

Tabulka 4.1: Naměřené hodnoy



Obrázek 4.1: Graf Naměřených hodnot chladnutí čaje

4.2 Jak chladne čaj

Zajímá nás následující problém: Uvaříme si čaj a chceme zjistit, jaký průběh bude mít jeho chladnutí v pokoji o teplotě 20.5 $°C$. Z praktického hlediska nás zajímá, za jak dlouho se bude dát pít a kdy už se nám bude zdát studený.

Závislost teploty chladnoucího čaje na čase není lineární. Rychlost, kterou čaj chladne, se totiž průběžně mění. Lze najít funkci, která chladnutí čaje popisuje? Pokud ano, budeme moci odpovědět na takové otázky, jako: „Za jak dlouho dosáhne čaj teploty 30 $°C$?“ Nebo „Jakou teplotu bude mít čaj 5 minut od chvíle, kdy začal chladnout?“

Na čem závisí rychlost chladnutí čaje?

Odpověď: Rychlost chladnutí závisí na povrchu a hmotnosti čaje, izolačních vlastnostech nádoby, do které jsme ho nalili a na rozdílu jeho teploty a teploty okolí. Pro podrobnější vysvětlení se

můžete podívat na předcházející úroveň tohoto textu - kapitolu 4.1.

Abychom si vytvořili prostor pro zobecnění našich závěrů i na jiné látky, než je voda (protože co jiného je čaj, než ohřátá voda s trochou vylouhovaných lístků), zahrneme do faktorů ovlivňujících rychlost chladnutí čaje i měrnou tepelnou kapacitu vody.

Více informací: Měrná tepelná kapacita říká, kolik energie musíme dodat (nebo odebrat) látce o dané hmotnosti, aby se teplota této látky zvýšila (nebo snížila) o jeden stupeň Celsia. Čím vyšší je měrná tepelná kapacita, tím pomaleji bude látka měnit svou teplotu. Rychlost chladnutí čaje na ní tedy bude záviset nepřímo úměrně.

Trochu si to shrneme. Rozdíl teploty čaje ve dvou různých časových okamžicích bude záviset na:

- Povrchu čaje (označíme F) přímo úměrně. Čím větší povrch, tím rychleji čaj chladne.
- Hmotnosti (označíme m) nepřímo úměrně. Čím vyšší hmotnost (čím více čaje), tím pomaleji chladne.
- Měrné tepelné kapacitě (označíme c) nepřímo úměrně. Čím vyšší měrná tepelná kapacita, tím pomaleji látka chladne.
- Izolačních vlastnostech nádoby, do které čaj nalijeme (označíme k).
- Rozdílu teploty čaje a teploty jeho okolí přímo úměrně. Čím větší rozdíl teplot, tím rychleji čaj chladne.
- Délce intervalu, ve kterém teploty měříme (označíme h). Čím delší interval, tím více se bude teplota při prvním měření lišit od teploty při druhém měření.
- Napadne vás ještě něco dalšího?

Teď už můžeme ze zmíněných faktorů sestavit rovnici, která nám řekne, jak se bude měnit teplota čaje T mezi dvěma časovými okamžiky t a $t + h$:

$$T\left(t+h\right)-T\left(t\right)=-\frac{kF}{cm}\Big(T\left(t+h\right)-T_o\Big)\,h \tag{4.1}$$

kde:

$T(t)$ a $T(t+h)$ jsou teploty v různých časových okamžicích,

T_o je teplota okolí,

h je časový interval mezi měřeními,

F je povrch chladnoucí kapaliny,

c je měrná tepelná kapacita chladnoucí kapaliny

m je její hmotnost,

k reprezentuje zbylé neměnné faktory ovlivňující chladnutí.

Rovnici si můžeme dovolit pro tuto chvíli zjednodušit tak, že zlomek $\frac{kF}{cm}$, který bude pro konkrétní případ chladnutí čaje neměnný, nahradíme konstantou B. Naše rovnice se trochu zjednoduší a bude vypadat následovně:

Více informací: Je zřejmé, že zlomek $\frac{kF}{cm}$ bude po celou dobu chladnutí kapaliny neměnný, neboli konstantní. Chladnoucí voda nezmění náhle svou měrnou tepelnou kapacitu nebo povrch a hmotnost (pokud tedy nepřijde vaše kočka a hrnek s čajem vám nerozlije).

$$T\left(t+h\right)-T\left(t\right)=-B\left(T\left(t+h\right)-T_o\right)h \tag{4.2}$$

Člověk nemůže věřit všemu, co se kde dočte. Proto jsem vzala $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ litru horké vody a měřila jsem, jak v průběhu času chladla. Tím jsem získala hodnoty $T(t+h)$ a $T(t)$ pro různé časové okamžiky. Z měření lze získat i hodnoty h a teplota okolí T_o byla vždy $20.5\ °C$. Tím zůstává v rovnici jediná neznámá a to konstanta B. Vyjádříme si ji:

$$B=-\frac{T\left(t+h\right)-T\left(t\right)}{h\left(T\left(t+h\right)-T_o\right)} \tag{4.3}$$

Pokud jsou naše úvahy správné a výše uvedená rovnice platí, tak by po dosazení pro všechny dvojice po sobě jdoucích teplot $T(t+h)$ a $T(t)$ mělo vyjít vždy přibližně (měření není nikdy zcela přesné) stejné číslo – konstanta B. Naměřené hodnoty najdete v tabulce 4.2.

Čas (min)	**Teplota $\frac{1}{4}$ l (°C)**	**Teplota $\frac{1}{2}$ l (°C)**	**Čas (min)**	**Teplota $\frac{1}{4}$ l (°C)**	**Teplota $\frac{1}{2}$ l (°C)**
0	50.00	50.00	44	29.75	35.00
2	48.50	49.50	46	29.50	34.75
4	46.50	48.25	48	29.00	34.50
6	45.00	47.25	50	28.75	34.00
8	43.25	46.25	52	28.50	33.75
10	42.00	45.25	54	28.00	33.25
12	40.50	44.50	56	27.75	33.00
14	39.50	43.75	58	27.50	32.75
16	38.50	43.00	60	27.25	32.50
18	37.25	42.00	62	27.00	32.00
20	36.50	41.25	64	26.80	31.75
22	35.75	40.75	66	26.75	31.50
24	35.00	40.00	68	26.50	31.25
26	34.25	39.75	70	26.25	31.00
28	33.75	39.00	75	25.75	30.25
30	33.00	38.50	80	25.50	29.75
32	32.50	37.75	85	25.00	29.25
34	32.00	37.25	90	24.75	28.75
36	31.50	36.75	100	24.00	27.75
38	31.00	36.25	110	23.50	27.00
40	30.50	36.00	120	23.00	26.50
42	30.00	35.50	180	22.00	23.75

Tabulka 4.2: Naměřené hodnoy

Sami si můžete vypočítat hodnotu B pro jednotlivé časy měření. Doporučuji pro tento účel vytvořit tabulku a vzorec v tabulkovém procesoru (např. MS Excel). Pro $\frac{1}{2}$ litru čaje mezi časy měření ve 4. a 6. minutě bude hodnota B následující:

$$B = -\frac{45 - 46.5}{2\,(45 - 20.5)}$$

A odtud:

$$B \doteq 0.0187$$

Pokud jste počítali správně, zjistili jste, že hodnota B je skutečně stále téměř stejná. Důvod, proč není zcela stejná, můžeme přisoudit jednak nepřesnosti měření a jednak určitým zjednodušením, kterých se ještě dopouštíme. Hodnota B se pohybuje kolem následujících hodnot:

- 0.0145 u $\frac{1}{2}$ litru chladnoucího čaje
- 0.0226 u $\frac{1}{4}$ litru chladnoucího čaje

Bohužel, stále nemáme explicitní vztah, který by nám říkal, jak se bude vyvíjet teplota T v závislosti na čase t. Nemáme rovnici pro funkci $T(t)$. Máme ale naměřené hodnoty, ze kterých můžeme sestavit graf 4.2.

Pokud si vzpomenete, jak vypadají grafy funkcí, možná vás napadne, které funkci se tento graf podobá. Je to exponenciální funkce. Třeba bude možné ji nějak použít? Obecná rovnice přirozené exponenciální funkce (se základem e, Eulerovo číslo) má tvar:

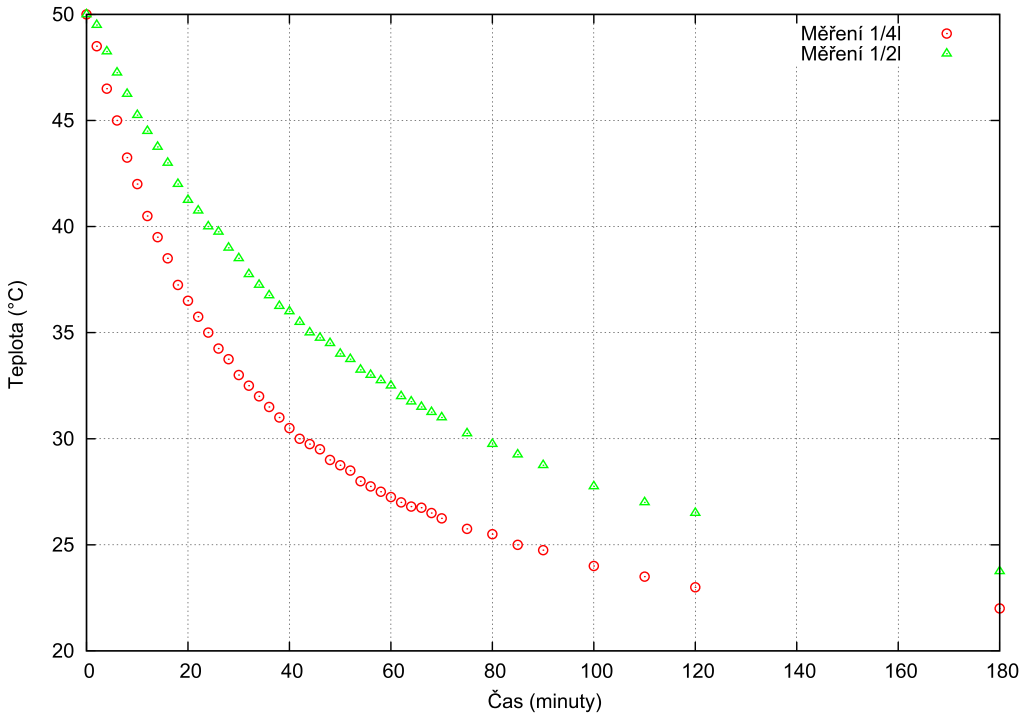
$$F\,(x) = C\,e^{B'x} + A, \tag{4.4}$$

kde A, B', C jsou reálné konstanty.

Nás zajímá chování teploty T v závislosti na čase t. Navíc, aby byla exponenciální funkce klesající, musí být B' záporné. Rovnici tedy přepíšeme následovně:

$$T\,(t) = C\,e^{-Bx} + A, \tag{4.5}$$

kde B je kladné reálné číslo a A, C jsou reálná čísla.



Obrázek 4.2: Graf Naměřených hodnot chladnutí čaje

Potřebujeme ještě zjistit hodnoty konstant A, B a C. Začneme konstantou A. Jaká bude její hodnota?

Více informací: Už víte, že přičtením konstantní hodnoty se graf funkce posouvá ve směru osy y. Také víte, že funkce e^{-x} *se v nekonečnu asymptoticky blíží 0. Z pohledu na graf je patrné, že funkce tvořená naším měřením je posunutá ve směru osy y a místo 0 se blíží hodnotě něco přes* $20\ °C$.

Odpověď: Naše funkce teploty čaje v závislosti na čase $T(t)$ ***se v nekonečnu asymptoticky blíží teplotě okolí*** T_o***. Konstanta*** A***, která představuje posunutí funkce ve směru osy y, bude rovna teplotě okolí*** T_o***, což je v našem případě*** $20.5\ °C$***.***

Více informací: Napadlo by vás, kdy čaj (téměř) přestane chladnout? Vzpomeňte si na první rovnici (4.1), která vyjadřovala závislost rozdílu teplot ve dvou různých časových okamžicích:

$$T\left(t+h\right)-T\left(t\right)=-\frac{kF}{cm}\Big(T\left(t+h\right)-T_o\Big)\,h$$

Co kdyby bylo $T(t+h) = T_o$ – neboli teplota v pozdějším okamžiku rovna teplotě okolí? Pravá strana by pak byla rovna 0 a rozdíl teplot by musel být také nulový. Čaj nemůže dál chladnout, protože jeho teplota je rovna teplotě jeho okolí. Teplota čaje se tedy teplotě jeho okolí bude nekonečně blížit, ale nikdy jí nedosáhne.

Konstantu C získáme snadno dosazením. Víme, že v čase 0 má čaj teplotu 50 $°C$ a konstantu A už známe:

$$\begin{aligned} T\,(t) &= C\,e^{-Bt} + 20.5 \\ 50 &= C\,e^{-B\cdot 0} + 20.5 \\ 50 &= Ce^{-B\cdot 0} + 20.5 \\ 50 &= C \cdot 1 + 20.5 \\ C &= 29.5 \end{aligned}$$

Poslední zbývá konstanta B. z rovnice naší funkce $T(t)$ ji vyjádříme několika úpravami:

$$\begin{aligned} T\,(t) &= 29.5\,e^{-Bt} + 20.5 \\ T\,(t) - 20.5 &= 29.5\,e^{-Bt} \\ \frac{T\,(t) - 20.5}{29.5} &= e^{-Bt} \\ \ln \frac{T\,(t) - 20.5}{29.5} &= -Bt\, \ln e \\ B &= -\frac{\ln \frac{T(t)-20.5}{29.5}}{t} \end{aligned}$$

Konkrétní hodnotu dopočítáme dosazením naměřené hodnoty teploty T pro libovolný čas t. Protože je ale měření vždy zatížené chybou (předpokládáme náhodnou chybu), spočítáme v tabulkovém procesoru hodnoty konstanty B pro všechny měřené časy. Například pro čas $t = 4$ je v případě $\frac{1}{2}$ litru čaje hodnota B následující:

$$B = -\frac{\ln \frac{48.25-20.5}{29.5}}{4}$$
$$B \doteq 0.0153$$

Jako konstantu B pak použijeme aritmetický průměr všech získaných hodnot. Je třeba si uvědomit, že použitím aritmetického průměru vnášíme do modelu určitou chybu[2], pro naše účely ale postačí:

- 0.0156 u $\frac{1}{2}$ litru chladnoucího čaje
- 0.0264 u $\frac{1}{4}$ litru chladnoucího čaje

Zkuste tyto hodnoty porovnat s těmi, které jsme získali dříve pro B ze vztahu 4.1:

$$T\left(t+h\right) - T\left(t\right) = -\frac{kF}{cm}\Big(T\left(t+h\right) - T_o\Big)\,h$$

Jsou si nápadně podobné. Je zřejmé, že musí existovat způsob, jak z výše zmíněné rovnice získat rovnici naší exponenciální funkce $T(t)$ přímo. Tomu se budeme věnovat v další úrovni tohoto textu. Pro tuto chvíli se spokojíme s tím, že jsme na základě naměřených hodnot získali předpis funkce závislosti teploty chladnoucího čaje na čase:

$$T\left(t\right) = 29.5\,e^{-0.0156\,t} + 20.5 \tag{4.6}$$

Pro $\frac{1}{2}$ litru čaje a

$$T\left(t\right) = 29.5 * e^{-0.0264\,t} + 20.5 \tag{4.7}$$

Pro $\frac{1}{4}$ litru čaje.

Graf naměřených hodnot teď můžeme doplnit grafem teoretických hodnot – tedy hodnot dopočítaných z výše uvedeného funkčního předpisu. V grafu 4.3

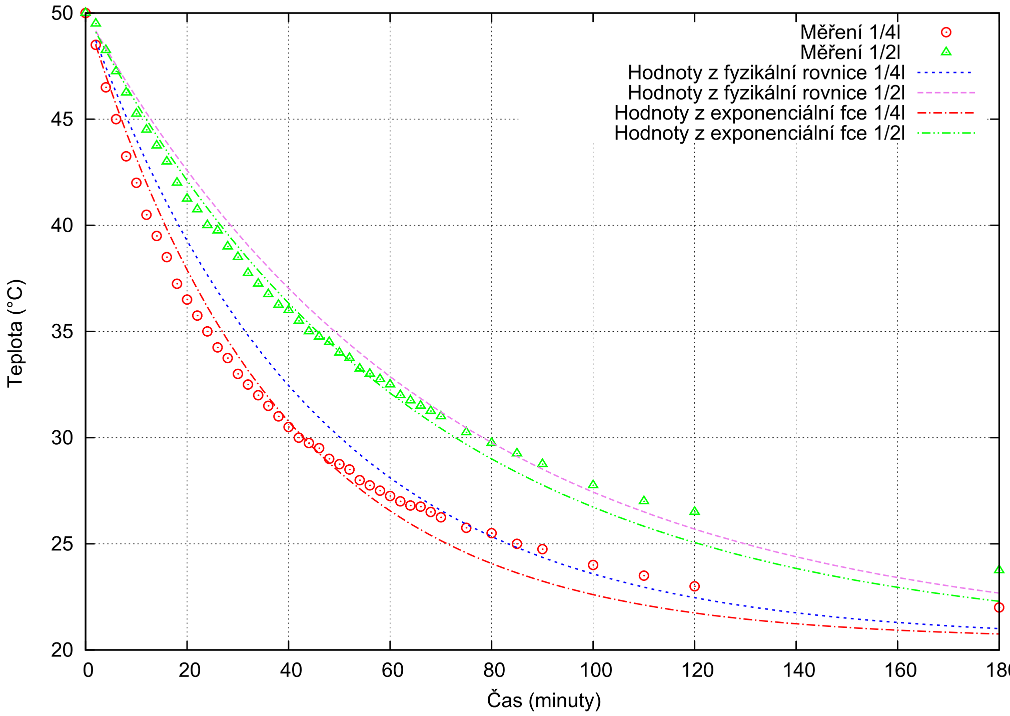
[2]Daly by se použít různé metody například metoda nejmenších čtverců, její vysvětlení by ale vydalo na samostatný studijní materiál

jsem pro výpočet teoretických hodnot použila dvě varianty exponenciální funkce. Jednu pro hodnotu konstanty B získanou ze vztahu 4.2:

$$T\,(t+h) - T\,(t) = -B\left(T\,(t+h) - T_o\right)h$$

a druhou pro hodnotu konstanty B získanou ze vztahu 4.5:

$$T\,(t) = C\,e^{-Bx} + A.$$



Obrázek 4.3: Graf Naměřených hodnot chladnutí čaje

Teď už můžeme určit předpokládanou teplotu čaje v libovolném časovém okamžiku jeho chladnutí. Nebo můžeme naopak spočítat, jak dlouho bude trvat, než čaj dosáhne přesně dané teploty.

Za jak dlouho dosáhne $\frac{1}{2}$ litr našeho čaje teploty 30 °C? A jak dlouho to bude v případě $\frac{1}{4}$ litru čaje? K řešení použijte exponenciální rovnice 4.6 a 4.7 uvedené výše.

Odpověď: Půl litru čaje dosáhne teploty 30° C asi za 73 minut od okamžiku, kdy měl 50° C. Čtvrt litru čaje dosáhne teploty 30° C přibližně za 43 minut od okamžiku, kdy měl 50° C.

4.3 Rovnice chladnutí čaje

Zajímá nás následující problém: Uvaříme si čaj a chceme zjistit, jaký průběh bude mít jeho chladnutí v pokoji o teplotě 20.5 $°C$. Z praktického hlediska nás zajímá, za jak dlouho se bude dát pít a kdy už se nám bude zdát studený.

Závislost teploty chladnoucího čaje na čase není lineární. Rychlost, kterou čaj chladne, se totiž průběžně mění. Existuje ale jiná funkce, která chladnutí čaje popisuje. V předchozí úrovni tohoto textu jsme ukázali, že z naměřených dat vynesených do grafu lze odhadnout, že se bude jednat o nějakou exponenciální funkci. Jakmile spočteme její parametry, budeme moci odpovědět na takové otázky, jako:

1. Za jak dlouho dosáhne čaj teploty 30 °C?
2. Jakou teplotu bude mít čaj 5 minut od chvíle, kdy začal chladnout?

Lze i bez zdlouhavých měření určit, která funkce bude chladnutí čaje popisovat? v předchozí úrovni tohoto textu jsme ukázali, že chladnutí čaje můžeme za určitých předpokladů i bez měření popsat vztahem 4.8, který s rovnicí hledané funkce nějak souvisí:

$$T(t+h) - T(t) = -\frac{kF}{cm}\Big(T(t+h) - T_o\Big)h \tag{4.8}$$

kde:

$T(t)$ a $T(t+h)$ jsou teploty v různých časových okamžicích,

T_o je teplota okolí,

h je časový interval mezi měřeními,

F je povrch chladnoucí kapaliny,

c je měrná tepelná kapacita chladnoucí kapaliny

m je její hmotnost,

k reprezentuje zbylé neměnné faktory ovlivňující chladnutí.

Protože zlomek $\frac{kF}{cm}$ bude v našem modelu pro konkrétní případ chladnutí čaje neměnný, nahradíme ho konstantou B a rovnici převedeme do tvaru, který bude vyjadřovat změnu teploty za jednotkový časový úsek:

$$\frac{T\left(t+h\right)-T\left(t\right)}{h}=-B(T\left(t+h\right)-T_o) \tag{4.9}$$

Protože předpokládáme, že B je konstantní, můžeme pro odvození rovnice použít Newtonův zákon chladnutí, který říká, že změna teploty je úměrná rozdílu teploty tělesa a teploty okolního prostředí a délce h časového úseku. Vidíte, že námi hledaná funkce teploty čaje v závislosti na čase $T(t)$ se v rovnici už vyskytuje, ale není možné ji explicitně vyjádřit.

Zaměřme se teď na chvíli na délku časového intervalu h. Kdy získáme přesnější představu o hledané funkci $T(t)$?

Odpověď: Získáme tím přesnější představu, čím menší bude interval h mezi měřeními.

Podle rovnice zmíněné výše můžeme vždy dopočítat změnu teploty mezi dvěma body. Co když se ale vzdálenost mezi těmito body (časový interval h) bude blížit nule? Jakou změnu pak počítáme?

Odpověď zní, že pokud se bude h blížit nule (zapisujeme $\lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)-T(t)}{h}$), počítáme změnu v jediném bodě funkce chladnutí čaje $T(t)$. Této změně v bodě říkáme derivace funkce $T(t)$ a označujeme ji $T'(t)$. Naznačený vztah můžeme zapsat takto:

$$T'\left(t\right)=\lim_{h\to 0}\frac{T\left(t+h\right)-T\left(t\right)}{h} \tag{4.10}$$

Tuto rovnici čteme: „První derivace funkce T v bodě t je rovna limitě $\frac{T(t+h)-T(t)}{h}$ pro h jdoucí k nule.“ Nebo pokud chceme zdůraznit, že počítáme změnu teploty T podle času t, můžeme se stejným významem použít následující zápis:

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} \tag{4.11}$$

který čteme: „Derivace funkce T podle času t je rovna ...“

Pokud dosadíme za t konkrétní časový okamžik, vyjde nám, jak moc se tom okamžiku změnila teplota. Z geometrického úhlu pohledu zjistíme, jak strmě v daném místě graf funkce T roste nebo klesá. Získáme směrnici tečny ke grafu funkce T v bodě t. Pokud spočteme výraz obecně, získáme funkci $T'(t)$ – derivaci funkce $T(t)$.

O významu derivací a o derivacích různých funkcí se můžete dozvědět více například na wikipedii (http://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace).Derivace funkce f se značí f'. Můžete zkusit zadat do formuláře stránek Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com) výpočet derivace nějaké funkce např. `x'`, `(x^2)'` a `(x^3)'`. Zkuste i jiné funkce. Pro derivaci v konkrétním bodě zadejte např. `(x^3)', x = 3`. Uvidíte, co derivace s různými funkcemi dělá.

Ale zpět k našemu problému s chladnoucím čajem. K čemu nám zavedení derivace bylo dobré? Pomůže nám najít explicitní předpis funkce $T(t)$?

Využijeme ji pro zjednodušení dříve uvedené rovnice 4.9. Dosadíme $T'(t)$ místo $\lim_{h\to 0} \frac{T(t+h)-T(t)}{h}$. Zároveň využijeme toho, že pokud se h blíží nule, tak $T(t+h)$ se blíží $T(t)$. Můžeme proto psát:

$$T'(t) = -B(T(t) - T_{(o)}) \tag{4.12}$$

Získali jsme diferenciální rovnici. Aby bylo na první pohled jasné, co jsou proměnné a co konstanty, nahradíme ještě v našem zápise teplotu okolí $T_{(o)}$ písmenem A:

$$T'(t) = -B(T(t) - A) \tag{4.13}$$

Zkuste výše zmíněnou diferenciální rovnici 4.13 zadat do Wolframu Alpha a uvidíte, co vyjde. Použijte následující zápis: `T'(t) = - B*(T(t) - A)`.

Odpověď: Pokud jste nikde neudělali chybu, vyšla jako řešení

obecná rovnice exponenciální funkce:

$$T(t) = C\, e^{-Bt} + A$$

Obecný předpis pro funkci chladnutí čaje v závislosti na čase už máme a nemuseli jsme měřit vůbec nic. Abychom ale určili hodnoty konstant A, B a C pro konkrétní případ, budeme už nějaká měření potřebovat. Kolik měření teploty čaje potřebujeme?

Odpověď: Potřebujeme minimálně dvě měření ve dvou různých časových okamžicích. Jedno, abychom určili parametr B v rovnici, ze které vycházíme. Druhé měření, takzvaná počáteční podmínka, je nutná pro získání hodnoty parametru C, který se objevuje po vyřešení diferenciální rovnice. Hodnota parametru A je rovna teplotě okolí čaje.

V tabulce 4.3 máme zaznamenány teploty čaje v čase 0 a v čase 110. Teplota okolí je 20.5 °C. Jaké budou hodnoty parametrů A, B a C? Postup výpočtu najdete v předchozí úrovni tohoto textu. Můžete také použít například Wolfram Alpha, musíte ale místo desetinných čárek psát desetinné tečky.

Čas (min)	**Teplota $\frac{1}{4}$ l (°C)**	**Teplota $\frac{1}{2}$ l (°C)**
0	50.00	50.00
110	23.50	27.00

Tabulka 4.3: Měření teploty čaje

Odpověď: Parametr A ***je teplota okolí:*** $A = 20.5$***. Parametr C získáme z počáteční podmínky, že v čase 0 měl čaj teplotu 50 °C. Po dosazení vyjde*** $C = 29.5$***. Parametr B získáme dosazením hodnot z druhého měření:***

Pro $\frac{1}{4}$ ***litru čaje zadáme do Wolframu následující exponenciální rovnici:*** `20.5 + 29.5*e^(-b*110)=23.5` ***a vyjde*** $B \doteq 0.0208$***.***

Pro $\frac{1}{2}$ ***litru čaje zadáme do Wolframu následující exponenciální rovnici:*** `20.5 + 29.5*e^(-b*110)=27` ***a vyjde*** $B \doteq 0.0138$***.***

Hodnoty parametrů A a C budou stejné pro $\frac{1}{2}$ i pro $\frac{1}{2}$ litru čaje. Bude se lišit jen parametr B, který jsme použili místo zlomku $\frac{kF}{cm}$. Pro oba případy totiž bude různý poměr povrchu a hmotnosti čaje $\frac{F}{m}$. A naše hledané funkce jsou:

$$T\left(t\right) = 29.5\, e^{-0.0138t} + 20.5 \tag{4.14}$$

Pro $\frac{1}{2}$ litru čaje a

$$T\left(t\right) = 29.5\, e^{-0.0208t} + 20.5 \tag{4.15}$$

Pro $\frac{1}{4}$ litru čaje.

V tuto chvíli už dokážeme snadno odpovědět na otázky, které jsme si kladli na začátku kapitoly:

1. Za jak dlouho klesne teplota $\frac{1}{4}$ litru čaje z 50 °C na 30 °C při pokojové teplotě 20.5 °C, když po 110 minutách by měl teplotu 23.5 °C?
2. Jakou teplotu bude mít v tom samém pokoji $\frac{1}{2}$ litru čaje po 5-ti minutách od chvíle, kdy měl 50 °C, když po 110 minutách by měl teplotu 27 °C?

Odpověď:

1. ***Vyřešíme exponenciální rovnici. Do Wolframu Alpha můžeme zadat `20.5 + 29.5*e^(-0.0208*t)=30` a získáme výsledek:***

   Čaj dosáhne teploty 30 °C po cca 54.5 minutách od chvíle, kdy měl 50 °C.

2. ***Dosadíme a přímo získáme výsledek. Do Wolframu Alpha můžeme zadat `20.5 + 29.5*e^(-0.0138*5)` a získáme výsledek:***

   Po pěti minutách od chvíle, kdy mělo $\frac{1}{2}$ litru čaje teplotu 50 °C bude mít teplotu přibližne 48 °C.

4.4 Diferenciální rovnice pro chladnutí čaje

Mějme $\frac{1}{4}$ litru a $\frac{1}{2}$ litru čaje, který chladne v pokoji o teplotě 20.5 °C. Provedli jsme následující měření:

Čas (min)	**Teplota $\frac{1}{4}$ l (°C)**	**Teplota $\frac{1}{2}$ l (°C)**
0	50.00	50.00
110	23.50	27.00

Tabulka 4.4: Měření teploty čaje

1. Za jak dlouho klesla teplota $\frac{1}{4}$ litru čaje z 50 °C na 30 °C?
2. Jakou teplotu bude mít $\frac{1}{2}$ litru čaje po 5-ti minutách od chvíle, kdy měl 50 °C?

Protože předpokládáme, že koeficient přenosu tepla je konstantní, můžeme pro odvození chladnutí čaje použít Newtonův zákon chladnutí, který říká, že změna teploty je úměrná rozdílu teploty tělesa a teploty okolního prostředí a délce h časového úseku. Získáme následující rovnici:

$$T\left(t+h\right) - T\left(t\right) = -\frac{kF}{cm}\Big(T\left(t+h\right) - T_o\Big)\,h, \tag{4.16}$$

kde:

$T(t)$ a $T(t+h)$ jsou teploty v různých časových okamžicích,

T_o je teplota okolí,

h je časový interval mezi měřeními,

F je povrch chladnoucí kapaliny,

c je měrná tepelná kapacita chladnoucí kapaliny,

m je její hmotnost,

k reprezentuje zbylé neměnné faktory ovlivňující chladnutí.

Z této rovnice potřebujeme získat explicitní vyjádření funkce teploty čaje v závislosti na čase $T(t)$. Za předpokladu, že délka časového intervalu h se blíží nule, získáme po úpravě obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu:

$$\frac{T\left(t+h\right)-T\left(t\right)}{h}=-\frac{kF}{cm}(T\left(t+h\right)-T_o) \tag{4.17}$$

a pro $h \to 0$ pak dostaneme:

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{kF}{cm}(T\left(t\right)-T_o) \tag{4.18}$$

T_o a zlomek $\frac{kF}{cm}$ jsou konstanty, naše rovnice je tedy lineární diferenciální rovnice. Je možné vyřešit ji metodou separace proměnných a následnou integrací.

Více informací: Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu je obyčejná diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru:

$$u^n+a_{n-1}(t)\,u^{n-1}+\cdots+a_2(t)\,u''+a_1(t)\,u'+a_0(t)\,u=f\left(t\right),$$

kde:

$u=u(t)$ *je funkce, která je hledaným řešením rovnice*

a_k *jsou koeficienty rovnice, pokud jsou* $a_k(t)$ *konstanty, hovoříme o rovnici s konstantními koeficienty*

$f(t)$ *je pravá strana rovnice. Pokud* $f(t)=0$*, hovoříme o homogenní rovnici, v opačném případě o rovnici nehomogenní.*

Více informací: Metodou separace proměnných lze řešit diferenciální rovnice prvního řádu typu:

$$u'=f\left(t\right)g(u)$$

nebo při použití Leibnizova způsobu zápisu:

$$\frac{du}{dt} = f\left(t\right)g(u)dt$$

Princip této metody spočívá (jak název napovídá) v oddělení proměnných. Při použití této metody je potřeba nejprve prošetřit případy, kdy $g'(u) = 0$, protože se může stát, že $g(u)$ je konstanta. Pak můžeme přistoupit k samotnému oddělení proměnných užitím algebraických úprav a za předpokladu, že $g'(u) \neq 0$.

Po úspěšném oddělení proměnných získáme tvar, který můžeme integrovat:

$$\frac{1}{g(u)}du = f\left(t\right)g(u)$$

Zlomek $\frac{kF}{cm}$ jsme v předchozí rovnici 4.18 pro zjednodušení nahradili konstantou B. Dále předpokládáme, že čaj postupně chladne, funkce $T(t)$ tedy není konstantní a $\frac{dT}{dt} \neq 0$. Můžeme tedy separovat proměnné:

$$\frac{dT}{dt} = -B(T\left(t\right) - T_o) \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{T\left(t\right) - T_o}\,dT = -B\,dt \tag{4.20}$$

Získali jsme tvar rovnice, který můžeme integrovat:

$$\int \frac{1}{T\left(t\right) - T_o}\,dT = \int -B\,dt \tag{4.21}$$

$$\ln\left(T\left(t\right) - T_o\right) = -Bt + \ln C \tag{4.22}$$

Konstantu C jsme s ohledem na další úpravy napsali ve tvaru $\ln C$. Po odstranění logaritmu získáme:

$$T\left(t\right) = C\,e^{-Bt} + T_o \tag{4.23}$$

K vyřešení rovnice 4.18 lze také použít Wolfram Alpha. Rovnici do něj můžeme zadat ve tvaru `dT/dt = - B*(T(t) - A)`.

Teplotu okolí známe: $T_o = 20.5\,°\mathrm{C}$. Hodnotu parametru C získáme dosazením počáteční podmínky, že teplota čaje v čase 0 je $50\,°\mathrm{C}$:

$$
\begin{aligned}
50 &= C\,e^{-B\cdot 0} + 20.5 \\
C &= 29.5
\end{aligned}
$$

Parametr B bude pro $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ litru čaje různý. Získáme jej dosazením hodnot z druhého měření a vyřešením exponenciální rovnice:

$$23.5 = 29.5\,e^{-B\cdot 110} + 20.5 \tag{4.24}$$

pro $\frac{1}{4}$ litru čaje a

$$27 = 29.5\,e^{-B\cdot 110} + 20.5 \tag{4.25}$$

pro $\frac{1}{2}$ litru čaje.

Pro řešení zmíněných rovnic můžeme opět využít Wolfram Alpha, jen místo desetinných čárek je třeba psát desetinné tečky. Naše hledané funkce s hodnotami všech parametrů budou:

Pro $\frac{1}{2}$ litru čaje: $T(t) = 29.5\,e^{-0.0138\,t} + 20.5$

Pro $\frac{1}{4}$ litru čaje: $T(t) = 29.5\,e^{-0.0208\,t} + 20.5$

Odpovědi na otázky z úvodu kapitoly už získáme jen prostým dosazením a případně vyřešením exponenciální rovnice.

Odpověď:

1. ***Vyřešíme exponenciální rovnici. Do Wolframu Alpha můžeme zadat `20.5 + 29.5*e^(-0.0208*t)=30` a získáme výsledek:***

   Čtvrt litru čaje dosáhne teploty 30°C za přibližně 54.5 min od chvíle, kdy měl teplotu 50°C.

2. ***Dosadíme a přímo získáme výsledek. Do Wolframu Alpha můžeme zadat* `20.5 + 29.5*e^(-0.0138*5)` *a získáme výsledek:***

   Po pěti minutách od chvíle, kdy mělo $\frac{1}{2}$ litru čaje teplotu 50°C bude mít teplotu přibližně 48°C.

5 Reakce studentů a učitelů

Jako hlavní prostředek k získání zpětné vazby nám posloužil dotazník připojený na konec 3D textu. Jeho plné znění najdete v příloze. Obsahoval uzavřené i otevřené otázky. Odpovědi na otevřené otázky nebyly povinné. Naším cílem bylo zjistit, do jaké míry studenti a učitelé vnímají 3D text jako užitečnou pomůcku ke studiu, jestli je pro ně srozumitelný a zábavný. Otázky s možností volné odpovědi pak měly sloužit k získání konkrétních postřehů o kladech a záporech 3D textu.

Myšlenku 3D textu jsme také představili skupině studentů učitelství a zeptali jsme se jich, co o tomto nápadu soudí. Jejich autentické reakce jsou k dispozici na přiloženém CD.

5.1 Volné odpovědi studentů učitelství

Celkem jsme získali 12 různých názorů na 3D text a použití technologií při výuce. V odpovědích se nejčastěji vyskytovaly tři zdánlivě ne zcela konzistentní názory:

- Technologické pomůcky jako PC, tablety a podobně by především na ZŠ měly být dostupné co nejméně.
- Při výuce je důležitá názornost, praktické ukázky a propojení s praxí.
- Je dobré zkoušet nové věci, inovovat.

Rozpor, který vzniká mezi otevřeností k inovacím spolu s požadavkem na praktické ukázky a jistým odporem k využití počítačů a tabletů, má pravděpodobně hlavně dva důvody. Při užití těchto pomůcek vzniká zvýšené nebezpečí nesoustředěnosti žáků. Studenti mohou mít tendenci přestat se věnovat předmětu hodiny a raději začít prozkoumávat co všechno se s tabletem nebo počítačem dá dělat. Druhý důvod spočívá v obavě budoucích učitelů, že se děti nebudou snažit myslet a zcela se spolehnou na využití počítače.

Při pohledu do praxe rychle zjistíme, že oba důvody k odmítání využití počítačů a tabletů jsou oprávněné. Zmíněným problémům však lze předejít vhodným uspořádáním hodiny, motivací a správně zvoleným zadáním. Tyto problémy se totiž netýkají pouze hodin s počítači. V takových hodinách jsou jen více viditelné. Nedostatek soustředění a neochota se zamyslet souvisí více se způsobem vedení výuky než s pomůckami.

Studenti učitelství dále uváděli, že by chtěli propojovat předměty a snažit se o co největší motivovanost žáků. Na druhé straně se objevil i názor, že by vše mělo zůstat při starém.

5.2 Zjištění z dotazníku

Ke 3D textu se prostřednictvím dotazníku vyjadřovali jednak studenti prvního ročníku fakulty strojní ZČU a jednak širší veřejnost včetně několika učitelů. Celkem svůj názor vyjádřilo 45 studentů fakulty strojní a 25 respondentů z širší veřejnosti. Mezi respondenty z širší veřejnosti bylo 6 učitelů (3 na VŠ a 3 na ZŠ) a 3 studenti SŠ. Vzhledem k počtu respondentů se v analýze odpovědí zaměříme více na otevřené odpovědi a kvalitativní zhodnocení výsledků.

Data získaná z dotazníku jsou k dispozici na přiloženém CD.

5.2.1 Názory studentů fakulty strojní ZČU

Téměř všichni studenti si prošli první úroveň textu, velká většina i čtvrtou úroveň. Kolem poloviny studentů prostudovalo druhou a nebo třetí úroveň textu. Většina studentů četla více než jednu úroveň a více než polovina jich prostudovala 3 nebo 4 různé úrovně.

Pokud sloučíme krajní kategorie (např. velmi zajímavý se zajímavý a nudný s velmi nudný), tak většina studentů považovala text za zajímavý, dobře strukturovaný, srozumitelný a praktický. Jiný názor (tedy že text je nudný, špatně strukturovaný, nesrozumitelný a teoretický) zastávala ve všech případech přibližně pětina studentů.

Asi polovina studentů si zkusila provést některé výpočty, přičemž většina z nich zvolila ruční výpočty. Jen 4 studenti použili pro výpočty výhradně Wolfram Alpha. Něco nového pomohl text pochopit 35 studentům. Ti, kteří specifikovali, o co konkrétně šlo, uváděli obvykle souvislost mezi matematikou a fyzikou a konkrétní případ chladnutí čaje nebo vody.

Z otevřených odpovědí pak vyplynulo, že studenti nejvíce oceňují názornost výkladu a fakt, že je látka probírána od základů a jednoduše. Mají pocit, že se text hodí i pro ty, kteří matematice tolik nerozumí. Naopak jim vadí, že je textu zbytečně hodně a ocenili by více barev, videa a lepší možnosti tisku.

5.2.2 Názory širší veřejnosti

Varianta dotazníku pro širší veřejnost měla většinu otázek nepovinných (včetně těch uzavřených). Jen 3 respondenti však neodpověděli na jednu nebo více uzavřených otázek.

Necelá polovina respondentů si prohlédla jen jednu úroveň textu, ostatní si prohlédli alespoň dvě různé úrovně. Nejvíce prohlížená byla první úroveň s 18 a nejméně druhá úroveň se 13 čtenáři.

Podobně jako v případě studentů fakulty strojní i širší veřejnost považovala v naprosté většině text za zajímavý, dobře strukturovaný, srozumitelný a praktický. Jednomu respondentovi se 3D text vůbec nelíbil a považoval ho za velmi nudný, ale přesto dobře strukturovaný, srozumitelný a praktický.

Výpočty si zkusilo provést jen 5 respondentů, z toho dva pouze ručně. Necelé polovině respondentů text pomohl něco pochopit a to konkrétně následující věci: fakt, že teplota čaje nikdy nedosáhne teploty okolí; průběh chladnutí čaje; obecně úloha o přenosu tepla; přechod od limity k derivaci.

Respondentům se na textu líbilo propojení matematiky a banální každodenní situace, názornost, polopatické vysvětlení a postup od obecnějšího pohledu k větším detailům a celkově dostupnost textu i bez předchozích znalostí. Více respondentů také ocenilo strukturu vrstev, otázek se skrytými odpověďmi a dodatečné informace u složitějších pojmů. Další komentáře uvedly, že text je hravý, že nutí přemýšlet a že apeluje na radost z poznávání.

Jako negativa byl uváděn opakující se text a nedostatečné hypertextové odkazy na dodatečné informace. Zmíněna byla i horší orientace v textu kvůli chybějícímu dělení na podkapitoly s nadpisy. Vytčeno bylo také přílišné zjednodušení příkladu a nekonzistentní sloh.

Mezi návrhy na vylepšení byl mimo jiné požadavek na více obrázků, interaktivní vyhodnocování odpovědí a na rozšíření vyšších úrovní o úvahu nad rozložení teploty v čaji nebo vlivu míchání lžičkou.

Závěr

Člověk, který touží po vzdělání, se už nemusí omezovat na studium ve škole. Ani by neměl, protože současným českým školám se vesměs nedaří uspokojivě rozvíjet zaměstnavateli žádané klíčové kompetence. Zároveň jednu z nejžádanějších klíčových kompetencí, kterou je schopnost učit se, si člověk může velmi dobře rozvíjet samostatným studiem, pokud k němu má přiměřené zdroje.

Na internetu je dostupná celá řada matematických studijních zdrojů a to i v češtině. Formát, který jsme zvolili pro Matematický 3D text je ale ojedinělý. Jako jediný nabízí možnost zvolit si pro dané téma různé úrovně matematické náročnosti v podobě jednotlivých vrstev. Zároveň podporuje studenty v používání ostatních zdrojů prostřednictvím doporučení a hypertextových odkazů.

Jako téma textu bylo vybráno téma derivací a diferenciálních rovnic. Toto téma nejlépe splnilo stanovená kritéria, která požadovala dostatečný prostor pro jednoduchý i složitý výklad, široké praktické uplatnění a existenci jednoduchého srozumitelného příkladu (chladnutí čaje) jako motivace a ilustrace tématu.

Projekt se nám podařilo realizovat a spustit experimentální verzi 3D textu v prostředí serveru almamather.zcu.cz[1]. Studenti fakulty strojní ZČU, kteří jej už mohou využívat, si pomocí 3D textu rozvíjí následující klíčové kompetence: Schopnost učit se (musí odhadnout své schopnosti a rozhodnout se pro přiměřenou úroveň, propojí si znalosti z fyziky a matematiky), schopnost čtení a porozumění (text je proložen kontrolními otázkami), schopnost používat výpočetní techniku (celý text je umístěn na internetu a studenti jsou vybízeni k práci s dalším matematickým software), schopnost práce s informacemi (studenti získávají pomocí textu základní informace, ale jsou vybízeni k jejich doplnění z dalších zdrojů).

[1]https://almamather.zcu.cz/Když_chladne_čaj_(3Dtext)

Studenti i širší veřejnost, kteří 3D text viděli a rozhodli se poskytnout nám zpětnou vazbu, text většinou považovali za zajímavý a užitečný. Opakoval se názor, že bylo dobře propojit matematické a fyzikální poznatky s jednoduchým až banálním příkladem z praxe. Respondenti oceňovali srozumitelnost výkladu a také fakt, že nejsou potřeba téměř žádné předchozí znalosti.

Negativní komentáře vytýkaly opakování textu a nedostatečně výrazné členění v rámci jednotlivých vrstev. Mezi náměty na zlepšení se objevily mimo jiné návrhy na přidání videí, více obrázků a rozšíření o další náročnější úrovně.

Ověřili jsme, že koncept 3D textu, který využívá různě náročných vrstev a opírá se o běžný praktický příklad, může být užitečný. Prototyp, který byl vytvořen, splnil cíle, které jsme si vytyčili. Je zde ale velký prostor pro jeho rozvoj jak do šířky (obohacení o další příklady a témata), tak do hloubky (přidání dalších úrovní). Za největší přínos textu považujeme jeho srozumitelnost široké veřejnosti.

A Dotazník

Text „Když chladne čaj“ vznikl jako experimentální 3D text. Jedná se pokus realizovat nový typ studijního textu. Jakýkoli podnět, názor či připomínka může přispět k jeho dalšímu vylepšení a rozhodně za ně budeme vděčni.

1. Jaký jste měl/a z 3D textu dojem? (prosím vyberte vždy jednu možnost)

velmi zajímavý	zajímavý	nudný	velmi nudný
velmi dobře strukturovaný	dobře strukturovaný	špatně strukturovaný	velmi špatně strukturovaný
velmi srozumitelný	srozumitelný	nesrozumitelný	velmi nesrozumitelný
velmi praktický	praktický	teoretický	velmi teoretický

2. Zkusil/a jste provést některé výpočty?
   - Ano, ručně
   - Ano, pomocí Wolfram Alpha
   - Ano, ručně i s pomocí Wolfram Alpha
   - Ne
3. Pomohl Vám text něco pochopit? Pokud ano, co?
   - Ne
   - Ano: ... (Otevřená odpověď)
4. Které úrovně 3D textu jste prostudoval/a? (Vyberte prosím všechny, které jste prostudoval/a)
   - První úroveň
   - Druhou úroveň
   - Třetí úroveň
   - Čtvrtou úroveň

5. Co se Vám na 3D textu nejvíc líbilo? (Otevřená odpověď)
6. Co se Vám na 3D textu nejvíc nelíbilo? (Otevřená odpověď)
7. Chtěl/a byste autorce vzkázat cokoliv dalšího? Dojmy, připomínky, nápady?

   (Otevřená odpověď)
8. Jste učitel? (V současnosti, nebo v minulosti alespoň 6 měsíců.)
   - Ano, ZŠ
   - Ano, SŠ
   - Ano, VŠ
   - Ne
   - Jiné
9. Studujete v současné chvíli?
   - Ano, SŠ
   - Ano, VŠ
   - Ne
   - Jiné

Literatura

[1] CAROL S. DWECK, D. C. M. Self-Theories Their Iimpact on Competence Motivation and Acquisition. In CAROL S. DWECK, D. C. M. (Ed.) *Handbook of Competence and Motivation*, New York, 2005. The Guilford Press. ISBN 1-59385-123-5.

[2] DWECK, C. What is mindset. 2015. Dostupné z: `<http://mindsetonline.com/whatisit/about/index.html>`.

[3] GILES, J. Special Report Internet encyclopaedias go head to head. 2005. Dostupné z: `<http://www.nature.com/nature/journal/v438/n7070/full/438900a.html>`.

[4] GRAY, P. The Decline of Play and the Rise of Psychopathology. *American Journal of Play*. 2011, 3, s. 443 – 463. Dostupné z: `<https://www.psychologytoday.com/files/attachments/1195/ajp-decline-play-published.pdf>`.

[5] K. MURAYAMA, S. L. R. v. H. R. P. Predicting Long Term Growth in Students' Mathematics Achievement: The Unique Contributions of Motivation and Cognitive Strategies. *Child Development*. 2012, 84. URL < `<http://srcd.org/sites/default/files/documents/washington/2012_12_pressrelease_murayama.pdf>`>.

[6] KUFNER, A. *Obyčené diferenciální rovnice*. Plzeň : ZČU Plzeň, 1993. ISBN 80-7082-106-X.

[7] LANDRY, L. Course Completion Rates Don't Really Matter When It Comes to Open Online Learning. 2014. Dostupné z: `<http://bostinno.streetwise.co/2014/12/09/mooc-course-completion-rates-harvard-study-on-online-learning/>`.

[8] LLC, W. A. Making the world's knowledge computable. 2015. Dostupné z: `<http://www.wolframalpha.com/about.html>`.

[9] ÚLOVEC, M. Potřeby zaměstnavatelů a připravenost absolventů škol – komparační analýza. 2014. Dostupné z: <http://www.infoabsolvent.cz/Temata/PublikaceAbsolventi?Stranka=9-0-90&NazevSeo=Potreby-zamestnavatelu-a-pripravenost-absolventu->.

[10] MAXIMA. Maxima, a Computer Algebra System. 2015. Dostupné z: <http://maxima.sourceforge.net/>.

[11] NATINOAL NUMERACY. Attitudes Towards Maths - Research and Approach Overview. 2015. Dostupné z: <http://www.nationalnumeracy.org.uk/userfiles/Attitudinal_Approach_final.pdf>.

[12] NKÚ. Informace z kontrolní akce č. 11/08 Peněžní prostředky použité na přípravu a realizaci státní maturitní zkoušky. 2011. Dostupné z: <http://www.nku.cz/assets/media/informace-11-08.pdf>.

[13] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha : Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

[14] STEIN, K. Penn GSE Study Shows MOOCs Have Relatively Few Active Users, With Only a Few Persisting to Course End. 2013. Dostupné z: <http://www.gse.upenn.edu/pressroom/press-releases/2013/12/penn-gse-study-shows-moocs-have-relatively-few-active-users-only-few-persisti>.

[15] STRAKOVÁ, J. Rozvíjení a hodnocení klíčových kompetencí v české škole. 2008. Dostupné z: <http://is.muni.cz/th/163638/pedf_d/Rozvijeni_a_hodnoceni_KK.pdf>.

[16] STRAKOVÁ, J. Pedagogické činnosti českých učitelů v mezinárodním srovnání. 2010, 3-4. Dostupné z: <pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?attachment_id=1690\&edmc=1690>.

[17] ŠTEFFL, O. Cíle vzdělávání a státní maturita. 2014. Dostupné z: <http://www.ceskaskola.cz/2014/07/ondrej-steffl-cile-vzdelavani-maturita.html>.

[18] Výzkumný ústav pedagogický. Rámcové vzdělávací programy pro gymnázia. 2007. Dostupné z: <http://www.nuv.cz/cinnosti/kurikulum-vseobecne-a-odborne-vzdelavani-a-evaluace/ramcove-vzdelavaci-programy/rvp-pro-gymnazia>.

[19] WOLCHOVER, N. How Accurate Is Wikipedia? 2011. Dostupné z: <http://www.livescience.com/32950-how-accurate-is-wikipedia.html>.