Západočeská Univerzita v Plzni
Fakulta Aplikovaných Věd
Katedra Matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Evoluční dynamika malých populací

Plzeň, 2015 Daniel Špale

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni, dne 27. května 2015

. . . .
vlastnoruční podpis

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Petru Stehlíkovi, Ph.D. za vstřícnost, trpělivost a odborné rady při konzultacích a psaní této práce. Děkuji i své rodině a přátelům za podporu.

Abstrakt

Cílem této práce je čtenáře seznámit se základními principy teorie evoluční dynamiky a evolučních her na grafech obzvlášť ve vztahu k vývoji spolupráce. Hlavní pozornost bude následně upřena na nový model podle vzoru replikátorové dynamiky pro vývoj spolupráce populací, které jsou spojeny v jednom grafu. Dále je provedena analýza modelu jako takového stejně jako analýza jeho dynamických vlastností. Nakonec je model vyzkoušen na malém grafu, jehož základní vlastnosti jsou prozkoumány.

Klíčová slova: teorie her, evoluční dynamika, evoluční hry na grafech, replikátorová dynamika, matematická analýza, diferenciální rovnice

Abstract

The aim of this thesis is to give an introduction to the basic principles of evolutionary dynamics and evolutionary games on graphs especially in connection with evolution of cooperation. The main focus will be then directed to a new model generalizing the replicator dynamics. It describes evolution of cooperation for populations connected in one graph. Furthermore, both the model itself and its dynamical characteristics are analysed. Finally, the new model is tested on a small graph whose basic characteristics are investigated.

Keywords: game theory, evolutionary dynamics, evolutionary games on graphs, replicator dynamics, mathematical analysis, differential equations

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Pojem "hra" je ve světě široce známý od nejmladších, až po nejstarší obyvatele této planety. Hrát si může úplně každý a s každým, avšak předměty her mohou být zcela odlišné - může jít o společenskou hru mezi dvěma dětmi stejně, jako o lva, který nahání svou kořist.

Na (téměř) všechny takové situace dokáže oblast teorie her nabídnout model, ze kterého se dá odvodit nějaký budoucí vývoj, a to ne jen pro dvě malé děti, ale třeba i pro celé populace.

V rámci této práce právě do této oblasti nahlédneme. Nejdřív si představíme několik základních pojmů z teorie her včetně jednoho ze základních konceptů této matematické disciplíny - Nashovy rovnováhy. Jako součást druhé kapitoly budou nastíněny čtyři klasické kooperační hry, které ještě využijeme později v této práci.

Poté totiž nahlédneme do problematiky evolučních dynamik. Teorie her dokáže, jak již bylo naznačeno, modelovat vývoj v čase pro nejrůznější situace, což je jedním z důvodů, proč nachází široké využití v biologii nebo třeba ekonomii. My se pak budeme zvlášť soustředit na vývoj spolupráce a představíme si některé koncepty, jak spolupráci "v budoucnu" sledovat.

Následuje přesun k poměrně nové tematice z této oblasti - evoluční hry na grafech. Ukážeme si některé zvláštnosti a základní principy, jak se evoluce na grafech sleduje.

Předposlední a zároveň nejdůležitější kapitola je věnovaná novému modelu spolupráce v grafech. Pokusíme se popsat chování populací, které jsou spojené v grafu, popíšeme si základní vlastnosti modelu a budeme hledat takové podmínky, aby všechny populace spolupracovaly nebo naopak. Na závěr model "vyzkoušíme" na jednoduchém grafu.

Veškeré výpočty či simulace, které se objeví v této práci, byly naprogramovány v softwaru MATLAB. Jejich zdrojové kódy se nachází na přiloženém CD.

Kapitola 2

Základy z teorie her

2.1 Úvod

Obecně známé jsou hry jako "Vězňovo dilema", či koordinační hry jako "Válka pohlaví". V rámci této práce se i krátce podíváme na to, jak tyto takzvané statické hry vyřešit, ale teorie her sahá svým polem působnosti mnohem dál. Později uvidíme, že za určitých podmínek (například při konstelaci užitků, jakou můžeme najít u zmíněných her), existují nástroje, jak popsat vývoj celých populací z hlediska evoluce - tato problematika sahá do takzvané evoluční dynamiky, o kterou se zajímají ve velkém také biologové, jako se píše například v této literatuře [1].

Nicméně v této kapitole si uvedeme několik základních pojmů, které budeme potřebovat a používat v dalších kapitolách.

2.2 Základní pojmy

Definujme si nejprve pojem, který dává celé této disciplíně matematiky své jméno - hra.

Definice 2.2.1 (hra)**.** Model střetnutí několika stran, které na sebe navzájem svými rozhodnutími působí, se nazývá *hra* (viz [1]).

Poznámka 2.2.1. Ve hře účastněné strany se nazývají *hráči*.

Obecně platí, že počet hráčů není omezen, ba naopak. Později uvidíme, že budeme uvažovat i "nekonečně velké" populace.

Definice 2.2.2 (strategie, čistá strategie)**.** Rozhodnutí, která mohou hráči učinit, se jmenují *strategie*. Pokud volba není určena pravděpodobností, tak mluvíme o *čisté strategii* (viz [8])

Poznámka 2.2.2. Mimo čisté existují i takzvané *smíšené strategie*, které udávají, s jakou pravděpodobností si hráč určitou čistou strategii zvolí (viz [1], [8]).

Pokud nebude stanoveno jinak, tak budeme uvažovat pouze čisté strategie.

Příklad 2.2.1. Ve hře "Vězňovo dilema" si mohou hráči (vězni) vybírat ze dvou čistých strategií: "Přiznat se"a "Zapírat". Hra "Kámen, nůžky, papír" má právě 3 strategie.

Poznámka 2.2.3. Stejně jako počet hráčů nemá omezení, tak totéž platí pro počet strategií. U velkého počtu (čistých) strategií v literatuře objevíme i princip aproximace *spojitou množinou strategií* (viz [8]).

Přeformulujeme-li znění Definice 2.2.1, tak se hráči navzájem ovlivňují volbou jejich strategie. Z našeho pohledu je zde důležité nějakým způsobem číselně vyjádřit, jestli je pro hráče volba určité strategie výhodná či nikoli, a právě za tímto účelem se v teorii her zavádí pojem *užitek*. Definici pojmu užitek, která stojí v souvislosti s pojmem optimalizace, můžeme nalézt například ve zdroji [8]. Pro naše účely nahradíme v definici autora množinu akcí množinou strategií.

Definice 2.2.3 (užitek)**.** Užitek je funkcí $u : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, kde **S** je množinou všech strategií a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ budou užitky všech hráčů.

Neznamená to nic jiného, než že pro každou volbu strategie dostaneme číselné vyjádření výše užitku, a to nejen pro jednoho, ale rovnou pro všechny hráče. Zohledňujeme tím to, co nám říká Definice 2.2.1, tedy že volba strategie jednoho hráče má vliv na ostatní. Tudíž i pro ně dostaneme při zohlednění jejich volby strategie odpovídající užitek.

Jak ale takové střetnutí hráčů modelovat, či znázornit? I zde existuje více možností, které i závisí na konkrétních podmínkách daného střetu.

Definice 2.2.4 (statická hra)**.** Hra, ve které každý hráč udělá jedno rozhodnutí, které navíc udělá bez vědomosti o tom, jak si zvolili ostatní hráči, nazveme *statickou hrou* (viz [8]).

Poznámka 2.2.4. Ve statických hrách udělají hráči rozhodnutí "najednou", to znamená hra nezávisí na čase. Opakem statické hry, je hra *dynamická*, kde hráči rozhodují po sobě a tedy ví, jakou strategii zvolili ostatní hráči (viz [8]).

Abychom měli jasně určenou statickou hru, musíme znát tři aspektech:

(i) přesný počet hráčů i,

(ii) pevně danou množinu strategií **S** (viz 2.2.2),

(iii) užitkovou funkci u (viz 2.2.3).

Uvedeme si několik příkladů statických her, které se v této práci ještě několikrát objeví.

Příklad 2.2.2. Zavedeme si další hru: "Lov jelena". V této hře dochází ke "střetu" dvou myslivců, kteří vyrazili na lov. Každý z nich má dvě volby: buď lovit jelena nebo se spokojit s menší kořistí - se zajícem. Jelena jsou schopni ulovit jen v případě, kde ho loví oba najednou, zatímco zajíce dokáže ulovit každý myslivec sám. Myslivci o sobě ví, ale netuší, pro kterou kořist se rozhodne ten druhý.

Máme tedy případ klasické statické hry o dvou hráčích a dvou strategiích. Poněvadž strategie jsou stejné, může z hlediska jejich kombinace dojít ke 3 situacím:

- oba se rozhodnou pro jelena - v takovém případě jsou schopni ho ulovit a získají oba maximální užitek (10)

- jeden z nich se rozhodne pro jelena a druhý pro zajíce - myslivec lovící jelena vyjde "naprázdno" (0), druhý je odměněn za zajíce jen nepatrně větším užitkem (1)

- oba se rozhodnou pro zajíce - oba jsou schopni zajíce ulovit a mají stejný a stejně malý užitek (1)

Všechny tyto podmínky lze zapsat maticově:

	jelen	zajíc
jelen	10;10	0;1
zajíc	1;0	1;1

Maticovému zápisu je třeba rozumět takto: v prvním sloupci zleva stojí strategie prvního, takzvaného *řádkového*, hráče - v prvním řádku shora strategie druhého, takzvaného *sloupcového*, hráče. Zbylá část matice nám pak ukazuje pro danou kombinaci strategií užitky obou hráčů - nejprve užitek řádkového, pak užitek sloupcového hráče.

Příklad 2.2.3. Podobně, jako pro hru "Lov jelena", si zavedeme matice užitků pro již zmíněné "Vězňovo dilema":

	přiznat se	zapírat
přiznat se	-10;-10	0;-20
zapírat	-20;0	-1;-1

Záporné užitky si zde můžeme představit jako počet let, které si daný hráč (podezřelý) odsedí ve vězení. Zdánlivé jasně z hlediska podezřelých "vítězí" kombinace (zapírat, zapírat), ale pomoci metod řešení, které si krátce uvedeme později, ukážeme, že pokud by hráči volili racionálně, tak "správné řešení" dopadne přesně opačně, než bychom asi očekávali. Jedná se o jeden z nejznámějších příkladů z oblasti teorie her.

Příklad 2.2.4. "Jestřábi a holubice":

	jestřáb	holubice
jestřáb	-5;-5	10;0
holubice	0;10	5;5

I tato hra je známým příkladem a zajímají se o ni především biologové. Zkoumá se totiž chování agresivních (jestřábi) a pasivních (holubice) jedinců v jedné populaci s tím, jestli může dojít k jejich soužití, či nikoli. Skutečně struktura užitků této hry ukazuje, že jedinci budou mít "optimální" užitek, když jen část populace bude agresivní a druhá část pasivní (viz [1]).

Příklad 2.2.5. "Plná spolupráce"- tato hra se nejčastěji objevuje v souvislosti s nejvyšším stupněm spolupráce (k tomu více později). Při jakékoli počáteční volbě strategií vede struktura užitků (opět při racionálním chování hráčů) k tomu, že oba budou chtít spolupracovat.

	spolupracovat	nespolupracovat
spolupracovat	10;10	5;-5
nespolupracovat	-5;5	-10;-10

Definice 2.2.5 (Symetrické hry)**.** Pokud mají oba hráči stejné strategie a pro kombinace těchto strategií stejné užitky, tak můžeme matici užitků zjednodušit. Matice ve své původní podobě bude vypadat takto:

	A	B
A	$a;a$	$b;c$
B	$c;b$	$d;d$

kde $\mathbf{S} = \{A,B\}$ a a, b, c, d jsou jednotlivé užitky.
V zjednodušeném tvaru pak vypadá takto:

	A	B
A	a	b
B	c	d

Hry, které mají dané vlastnosti, budeme nazývat *symetrické* (viz [1]).

Nás samozřejmě bude zajímat, jak tyto hry řešit, to znamená jaká je z matematického pohledu optimální volba jednotlivých hráčů. Existují v tomto směru různé koncepty, které se liší především odlišným významem pojmu "optimální". My se podíváme na ten asi nejznámější z nich.

Definice 2.2.6 (Nashova rovnováha)**.** Kombinaci strategií budeme považovat za *Nashovu rovnováhu*, pokud hráči změnou vlastní strategie nemůžou zvýšit vlastní užitek (viz [6]).

Poznámka 2.2.5. V případě, že Nashovu rovnováhu budou tvořit pouze čisté strategie, tak hovoříme o čisté Nashově rovnováze.

Poznámka 2.2.6. Pro případ dvou hráčů s množinami strategií $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_2$, znamená tato definice, že pokud platí následující:

$u(s_1^*, s_2^*) \geq u(s_1, s_2^*), \forall s_1 \in \mathbf{S}_1$

a zároveň

$u(s_1^*, s_2^*) \geq u(s_1^*, s_2), \forall s_2 \in \mathbf{S}_2$

tak kombinace strategií (s_1^*, s_2^*) je čistou Nashovou rovnováhou. Vycházíme zde z podobného vyjádření pro smíšené strategie (viz [8]).

Podmínky uvedené v předchozí poznámce nám rovnou dávají předpis pro způsob řešení těchto her - optimální kombinace strategií hráčů budeme hledat pomocí takzvané *podtrhávací metody*. Její princip si osvětlíme na následujícím příkladu.

Příklad 2.2.6. Uvažujme znovu situaci z Příkladu 2.2.3. Které strategie budou volit racionálně se rozhodující hráči?

Definice 2.2.6 a speciálně pro tento případ pak Poznámka 2.2.6 nám dávají jasný návod. Znamená to, že pro pevně zvolenou strategii druhého hráče budeme pro prvního hráče z jeho strategií hledat nejvyšší užitek, který podtrhneme (proto se tato metoda nazývá *podtrhávací*). To samé provedeme pro ostatní strategie druhého hráče, čímž získáme optimální "reakce" prvního na jakoukoli strategii druhého hráče.

Celý tento postup opakujeme i pro druhého hráče. V našem příkladu podtrhneme následovně:

	přiznat se	zapírat
přiznat se	<u>-10</u>;<u>-10</u>	<u>0</u>;-20
zapírat	-20;<u>0</u>	-1;-1

Z hlediska obecného blaha se zdá být nejlepší kombinace (zapírat, zapírat). Oba ale mají možnost si změnou strategie přilepšit a proto se raději přiznají, což vede ke kombinaci (přiznat se, přiznat se). V této konstelaci si však už nikdo vlastním rozhodnutím přilepšit nemůže a jedná se tedy o čistou Nashovu rovnováhu.

Poznámka 2.2.7. Samozřejmě existují hry, které mají větší počet čistých rovnovah (například pokud bychom Příklady 2.2.4 a 2.2.2 vyřešili podtrhávací metodou) stejně, jako existují hry, kde nenajdeme ani jednu čistou Nashovu rovnováhu.

Tušíme, že když neexistuje čistá rovnováha, tak ta naše "optimální reakce" bude ležet někde "mezi" čistými strategiemi - dostáváme se opět ke smíšeným rovnováhám a tím i k jedné z centrálních vět teorie her.

Věta 2.2.1 (Existence Nashovy rovnováhy)**.** *Každá (statická) hra s konečným počtem hráčů disponujícím konečným počtem strategií má minimálně jednu Nashovu rovnováhu. Ta může být čistá, ale i smíšená (viz [8]).*

Poznámka 2.2.8. Stejně jako pro hledání čistých rovnovah existuje i pro hledání rovnovah smíšených koncept řešení, který se nazývá *funkce nejlepší reakce* (viz [1]).

Kapitola 3

Evoluční dynamika - vývoj spolupráce

3.1 Úvod

V předchozí části jsme si zavedli základní pojmy a v závěru i Nashovu rovnováhu, která je konceptem optimální volby pro jednorázovou situaci - hráči se potkají a podle užitků se rozhodnou. Případný "další vývoj" se neuvažuje.

V rámci této práce ale právě toto uděláme. Co se stane, když danou hru bude hrát daleko víc hráčů, než jen dva (třeba nekonečně mnoho)? Jaký nastane vývoj, pokud v této skupině (budeme ji nazývat populací) se situace bude opakovat? Kam spěje populace za určitých okolností (to znamená při určité konstelaci užitků) a které strategie mají z hlediska evoluce největší šanci přežít?

Přesně touto problematikou se zabývá *evoluční teorie her* a nás bude zajímat především vývoj spolupráce a určitý typ her - *evoluční hry o spolupráci*.

3.2 Evoluční hry - základní vlastnosti

Průkopníkem myšlenky evoluce byl zcela jistě *Charles Darwin* a jeho myšlenka o "zdatnosti", která určuje další vývoj jedince - čím vyšší zdatnost, tím vyšší je jeho šance se v průběhu času prosadit [1].

Možná i proto se v teorii her mluví často o zdatnosti místo o užitku, když se pohybujeme v oblasti evolučních her. Nás ale zajímá především vývoj spolupráce, a tak si uvedeme následující pojem.

Definice 3.2.1 (Evoluční hra o spolupráci)**.** Symetrická statická hra, kde množina strategií $\mathbf{S} = \{spolupracovat(S), nespolupracovat(N)\}$, kterou hrají členy populace (či populací) a na základě které se rozhoduje o dalším vývoji v čase, nazýváme *evoluční hrou o spolupráci*.

Jak ale bude konkrétně daná statická hra vypadat?

Základní podoba takové hry vypadá následovně: kde

	S	N
S	a	b
N	c	d

a - odměna pro oba hráče, když spolupracují (v literatuře s objevuje také r jako "reward"),

b - odměna pro řádkového hráče za to, že spolupracuje, i když jeho protějšek tak nekoná (objevuje se také s jako "sucker"),

c - užitek řádkového hráče v případě, že neodolá "pokušení" nespolupracovat (objevuje se také t jako "temptation"),

d - trest pro oba hráče za to, že nespolupracují (objevuje se také p jako "punishment").

Poznámka 3.2.1. Na užitky klademe určité požadavky (viz [3]):

(i) $a > d$ - pro hráče je lepší, když oba spolupracují, než když nespolupracují

(ii) $c > b$ - v případě, že jen jeden z hráčů spolupracuje, tak je lepší nespolupracovat

(iii) $a > b \wedge c > d$ - nehledě na vlastní volbu je vždy lepší, když druhý hráč spolupracuje

Z toho plyne následující důležitý vztah:

$$min\{a, c\} > max\{b, d\} \tag{3.2.1}$$

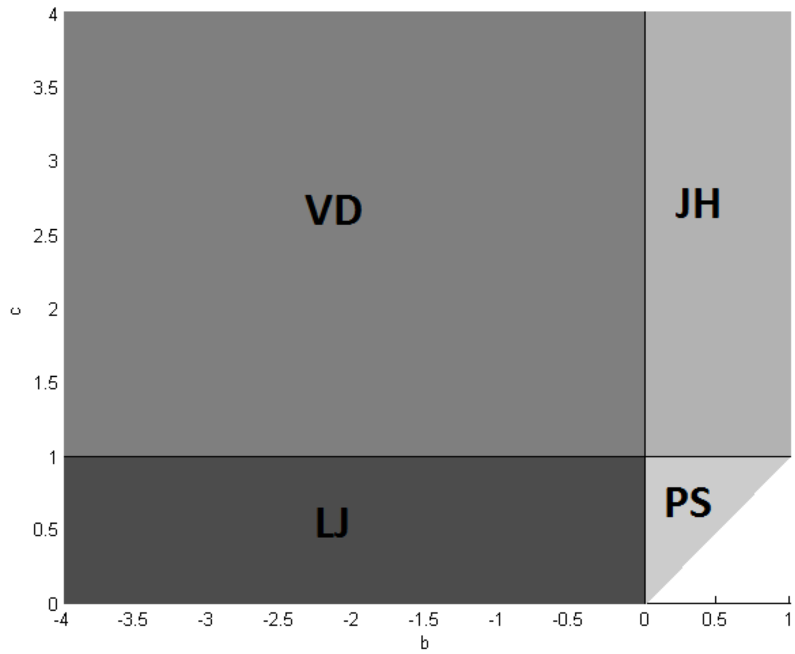
Podíváme-li se na Příklady 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, tak vidíme, že struktura užitku splňuje vztah (3.2.1). Samozřejmě existuje mnoho variací těchto her a užitky tedy nemusí být stejné, jako jsme zvolili v této práci. Důležité je však, aby změnou užitků nedošlo ke změně Nashových rovnovah - poměry užitků tedy musí zůstat stejné. Vše podstatné k těmto 4 hrám můžeme shrnout do následující tabulky (viz [3]).

poměry užitků	název hry	zkratka	Nashovy rovnováhy
$c > a > d > b$	vězňovo dilema	VD	(N;N)
$a > c > d > b$	lov jelena	LJ	(N;N) (S;S) + smíšená
$c > a > b > d$	jestřábi a holubice	JH	(N;S) (S;N) + smíšená
$a > c > b > d$	plná spolupráce	PS	(S;S)

Tabulka 3.1: 4 hry o spolupráci - základní vlastnosti

Jen na kombinaci strategií, které tvoří Nashovu rovnováhu, vidíme, že od VD směrem k PS se postupně zvyšuje stupeň spolupráce. I na základě této skutečnosti budeme tyto hry dále zkoumat v situaci, kdy bude "propojeno" více populací.

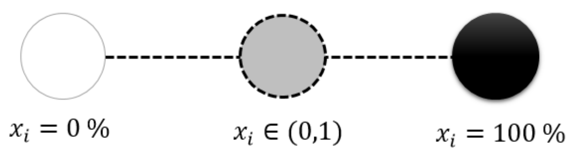
Pro nás v tomto ohledu velice cenné je to, že můžeme bez újmy na obecnosti zvolit $a = 1; d = 0$ (pro odvození této myšlenky viz [3]). Hodně se nám tak zjednoduší oblast



Obrázek 3.1: Znázornění přípustných parametrů b a c pro hry VD, LJ, JH, PS, pokud zvolíme $a = 1; d = 0$

parametrů, kterou budeme později zkoumat - pro naše 4 hry je můžeme znázornit tak, jak to vidíme na Obrázku 3.1.

V rámci této práce budeme později zkoumat pro takto "vhodně" zvolené parametry chování členů populace. Jde především o to, jakou tendenci bude populace mít, to znamená, jestli se bude posouvat spíše ke spolupráci nebo naopak. Na Obrázku 3.2 vidíme ještě třetí možnost, kde se populace může ustálit. Mimo plnou a žádnou spolupráci můžeme narazit na takzvanou koexistenci, to znamená, že v populaci "žijí" najednou (v našem případě) spolupracující a nespolupracující. Stane se tak u her o spolupráci se smíšenou Nashovou rovnováhou (viz Tabulka 3.1).



Obrázek 3.2: Hodnoty, na kterých se populace může ustálit včetně koexistence

Jak ale zjistit, na které strategii se populace ustálí? Tuto otázku řeší řada konceptů a několik z nich si představíme v následující části.

3.3 Koncepty a modely pro zahrnutí vlivu času

V tuto chvíli je třeba od sebe odlišit, čeho přesně chceme dosáhnout a jaké nástroje k tomu použijeme. My si zde představíme 3 možnosti, přičemž první dvě z nich si naznačíme, zatímco té třetí se budeme věnovat později podrobně. Představíme si následující:

(i) Hry s opakováním,

(ii) Evolučně stabilní strategie,

(iii) Modelování dynamiky populace pomoci diferenciálních rovnic.

U her s opakováním platí jednoduchá myšlenka: hráči mají před sebou určitou situaci v podobě statické hry (např. konstelaci VD). Jak název napovídá, hra se bude opakovat, a my musíme počítat s nejistotou určenou parametrem $\delta \in \langle 0; 1 \rangle$, který si můžeme představit jako trpělivost hráčů. Bude-li δ "vysoké", tak bude hráč trpělivý a za cenu nižšího užitku bude čekat, než další hráč(i) své rozhodnutí, ať už z jakéhokoliv důvodu změní, a on si tím přilepší. Může se tak stát, že kombinace strategií, která není Nashovou rovnováhou v "normální"statické hře, se stane rovnováhou za podmínek té samé hry s opakováním (více viz [8]).

Celá tato myšlenka je poměrně jednoduchá, ale vadit nám může "nejistota" v podobě δ - budeme-li chtít modelovat vývoj populace, která se rozhoduje čistě podle užitků, musíme volit jinou možnost.

Tou může například být ta druhá jmenovaná, která také patří k těm nejznámějším - *evolučně stabilní strategie* (ESS).

Definice 3.3.1. Uvažujme strategii $s^* \in \mathbf{S}$. Tato strategie bude *evolučně stabilní*, pokud $\forall s \in \mathbf{S} \setminus \{s^*\}$ bude splněna jedna z následujících podmínek (viz [6]):

$u(s^*, s^*) \geq u(s, s^*)$

NEBO

$u(s^*, s^*) = u(s, s^*) \wedge u(s^*, s) > u(s, s)$

Poznámka 3.3.1. Definici ESS dokážeme vyjádřit slovy přibližně takto: strategie bude evolučně stabilní, pokud se jedná buď o ostrou Nashovu rovnováhu nebo pokud následování jiné strategie s je pro nás nevýhodné - strategie je tím pádem odolná vůči invazi.

Poznámka 3.3.2. Tato definice platí obecně i pro smíšené strategie.

Jsme tedy schopni o určité strategii říct, jestli je evolučně stabilní, to znamená v dalším průběhu času už daná populace nebude mít motivaci si zvolit jinou strategii.

Budeme-li chtít vidět vývoj, než populace dospěje (třeba) k ESS, tak zas musíme volit jinou možnost. Navíc strategií může být víc (budeme-li uvažovat smíšené strategie, tak jich bude například nekonečně mnoho) a určit "kandidáta" na ESS nemusí být nutně jednoduché.

Ze tří výše jmenovaných možností nám zbyla poslední, kde se do hry dostávají diferenciální rovnice. Avšak právě ony nám dovolují modelovat vývoj populace v čase. Jak ale stanovit podmínky pro to, jak jedinci populace budou časem své strategie měnit? Právě to je klíčovou otázkou.

Dynamik totiž existuje celá řada a každá z nich může mít jiné podmínky pro to, jak se volby strategie v čase mění (viz [4]). V rámci této práce si později ukážeme jednu z nejznámějších, takzvanou *replikátorovou dynamiku*, kterou budeme modifikovat pro použití na grafech.

Kapitola 4

Evoluční hry na grafech

4.1 Úvod

V této části se podíváme na evoluci z hlediska teorie her z trochu jiného úhlu pohledu. Doposud jsme uvažovali velkou (spojitě aproximovanou) skupinu jedinců, populaci, kde každý se může potkat s každým a všichni se mohou navzájem ovlivnit - v populaci tedy není žádná struktura.

Představme si nyní situaci, kde má populace jasně danou strukturu, která definuje, které části populace se mohou ovlivnit a které naopak vývojem jiné části jedinců ovlivněny vůbec nejsou. V reálném životě se to může dít např. na základě jazykové bariéry, struktury společnosti atd.

Stejně, jako jsme schopni zkoumat vývoj nestrukturované populace, tak tu samou problematiku lze přenést i na grafy - strukturované skupiny jedinců. V této kapitole se tedy seznámíme se základy takzvaných *evolučních her na grafech.*

4.2 Základní princip

Z pohledu matematiky zde spojíme dvě oblasti:

- evoluční hry
- grafy

S první jmenovanou oblastí jsme se seznámili v předcházející kapitole a nás i zde budou přímo zajímat evoluční hry o spolupráci.

Připomeňme si tedy definici grafu.

Definice 4.2.1 (Graf, vrcholy, hrany)**.** Dvojici $G = (V, E)$, přičemž V je množinou konečnou a $E \subset \binom{V}{2}$, kde

$$\binom{V}{2} = \{\{x, y\} : x, y \in V \wedge x \neq y\}$$

nazýváme *neorientovaným grafem*. Prvky množiny V budeme nazývat *vrcholy* nebo také *uzly* a prvky množiny E *hrany* (viz [2]).

Poznámka 4.2.1. Pro pozdější využití v této práci si zde uvedeme ještě další dva pojmy:

- graf se nazývá *k-regulární*, pokud $\forall u \in V : deg(u) = k$,
- graf se nazývá úplný, pokud má jako hrany všechny možné neuspořádané dvojice, to znamená, že každý vrchol sousedí s každým. Při $|V| = n$ značíme takový graf K_n (oba viz [2]).

Otázkou je, kde se naše dvě jmenované oblasti potkají aneb jak lze evoluční hru spojit s grafem? Připomeňme náš problém, který jsme stanovili v úvodní části této kapitoly: možnost zkoumání vývoje evoluce na strukturované populaci.

Je zřejmé, že danou strukturu populace znázorníme právě grafem - vrcholy tedy budou reprezentovat každého jednotlivého jedince a hrany si můžeme doslova představit jako spojení jedinců. Právě v souvislosti s tímto spojením se objeví i evoluční hry: jsou-li libovolné vrcholy u a v spojeny hranou, tak to znamená, že daní jedinci spolu hrají statickou hru.

Užitková matice nám udává užitky jednoho hráče pro určitou kombinaci strategií. Jak ale určit užitek jedince, který má víc než jednoho souseda, to znamená dané hry se účastní více hráčů než jeden jediný? Na to navazuje další otázka: jak se pak bude každý hráč rozhodovat, jakou strategii volit v dalším průběhu času?

4.3 Užitky a zvolení nových strategií

Řekněme si tedy nejprve, jak se u grafů určují užitky každého jednotlivého jedince. Uvažujme opět naši symetrickou, statickou hru o spolupráci, kde $\mathbf{S} = \{S, N\}$, v této podobě (podrobně viz Definice 3.2.1):

	S	N
S	a	b
N	c	d

Díky užitkové matici víme, jaký užitek budou mít oba hráči pro jakoukoli kombinaci strategií. V případě, že libovolný uzel i bude mít více než jen jednoho souseda, tak bude hrát danou statickou hru s každým svým sousedem. Výsledný užitek bude tedy součtem součinů, který může mít následující dvě podoby:

(i) pokud bude hráč na uzlu i hrát strategii S, tak jeho užitek bude:

$$u_i = ka + (deg(i) - k)b,$$

(ii) pokud bude hráč na uzlu i hrát strategii N, tak jeho užitek bude:

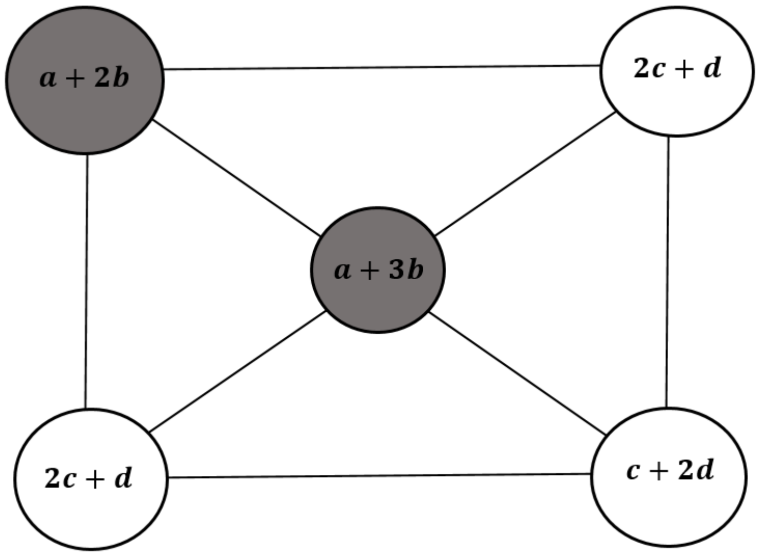
$$u_i = kc + (deg(i) - k)d,$$

kde k je v obou případech počet sousedů hrajících strategii S a a, b, c, d jsou užitky pro určité kombinace strategií (viz užitková matice výše v této části).

Určení užitků v praxi si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 4.3.1. Uvažujme užitkovou matici, kterou jsme si připomněli na začátku této části, a pravidla, která jsme si stanovili pro určení užitků. Je tedy třeba vycházet ze strategie, kterou si daný jedinec ("uzel") volí, a podle toho určit jeho užitek. Jednoduchou kontrolou pak je celkový počet parametrů, který se v celkovém užitku objeví.

V rámci znázornění si předvedeme tento postup na velmi jednoduchém grafu s pěti uzly. Podle toho, jakou strategii daný jedinec hraje, zabarvíme uzel tmavě, pokud spolupracuje (to znamená hraje strategii S) nebo necháme bez barvy, pokud nespolupracuje (to znamená hraje strategii N). Užitky jsou pak vepsané do jednotlivých uzlů.



Obrázek 4.1: Graf s 5 uzly - určení užitků

Jednorázové určení užitků tedy není příliš velkým problémem, pokud uzly daného grafu nemají příliš vysoký stupeň. Jak ale budeme postupovat dál, to znamená jak určíme, kterou strategii si bude každý jedinec volit?

K této problematice najdeme v literatuře více konceptů. My si představíme tři možné způsoby, či dynamiky, jak určit další vývoj každého jedince, jako je najdeme například v literatuře [7]:

1. narození-smrt
2. smrt-narození
3. imitace

Zjednodušeně řečeno, každá z těchto dynamik má jiné pravidlo pro stanovení nové strategie. První z nich vychází z myšlenky, že v každém časovém (diskrétním) kroku vybereme jedince, který se bude "rozmnožovat". Tato volba proběhne v závislosti na užitku (zdatnosti) jedinců a nový (narozený) jedinec nahradí náhodně vybraného souseda.

Ve své podstatě opačně vypadá i dynamika "smrt-narození", kde nejdříve je vybrán (opět náhodně) jedinec, který je nahrazen novým, jehož strategie se určí podle užitků sousedů.

V "imitaci" pak je vybrán náhodný jedinec, který bude nově volit svoji strategii. Ta se určuje podle sousedů dle velice jednoduchého pravidla: má-li jeden ze sousedů vyšší užitek, než zvolený jedinec, tak "imituje" jeho volbu strategie. V opačném případě svou volbu měnit nebude.

Vidíme, že všechna pravidla, jak stojí v [7], zahrnují "náhodný výběr". Již v předchozí kapitole jsme ale vyjádřili cíl modelovat evoluční vývoj čistě podle užitků bez vlivu pravděpodobností. Za tímto účelem dokážeme upravit princip "imitace", když nebudeme volit souseda náhodně, ale dané pravidlo aplikujeme na všechny jedince. Tato myšlenka se využívá v evolučních hrách na grafech často (najdeme ji třeba v zdroji [6]).

Z této podoby imitační dynamiky budeme v této práci dále vycházet a pravidlem pro volbu nové strategie tedy bude, že u každého jedince budeme porovnávat jeho užitek s užitky jeho sousedů - daný jedinec pak imituje tu strategii, která v tomto okolí přináší nejvyšší užitek, ať už jde o jeho vlastní nebo o jednu ze zkoumaného okolí sousedů.

Kapitola 5

Nový model dynamiky spolupráce v grafech

5.1 Úvod

V předchozích kapitolách jsme se podívali na základy evoluční dynamiky a představili jsme si koncepty, které nám mohou pomoci určit vývoj jedné populace v čase. Později jsme zkoumali evoluci pro případ strukturované populace.

Nyní se pokusíme spojit obě tyto problematiky do nového modelu - budeme chtít totiž zkoumat situace, kde v jednom grafu již nebudou jednotliví jedinci, nýbrž celé populace. V rámci této práce se pak podíváme detailně na jednoduchý graf a budeme sledovat, jak se budou vyvíjet volby strategií. Později si řekneme něco o vlastnostech nového modelu pro jiné grafy.

Za tímto účelem si napřed zavedeme známý model pro jednu populaci, než později přejdeme na náš případ.

5.2 Úplné "nekonečně velké" grafy a aproximace replikátorovými rovnicemi

Uvažujme pro začátek populaci, kde každý sousedí s každým. Odpovídalo by to tak struktuře úplného grafu. Pro velikost této populace jdoucí do nekonečna můžeme využít jeden z nejznámějších modelů v souvislosti evolučních dynamik, takzvanou *replikátorovou dynamiku*. Tento model má určité vlastnosti (viz níže), které budeme požadovat i po našem modelu, kde spojíme více takovýchto populací do jednoho grafu.

Zpět ale k replikátorové dynamice. Vychází z již dříve zmíněné teorie zdatnosti a tedy otázky "evolučního vývoje". Podíváme se tedy na samotný model.

Definice 5.2.1 (Replikátorová dynamika). *Replikátorovou dynamiku* definují takzvané *replikátorové rovnice* - soustava diferenciálních rovnic prvního řádu následující podoby:

$$\dot{x}_i = (u(s_i, \vec{x}) - \bar{u}(\vec{x}))x_i, \tag{5.2.1}$$

kde

s_i - i-tá strategie z množiny všech strategií $\mathbf{S} = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$

x_i - podíl jedinců hrajících i-tou strategii

$\vec{x}$ - vyjádření všech typů jedinců v populaci

$u(s_i, \vec{x})$ - užitek populace z i-té strategie při zohlednění volby ostatních strategií

$\bar{u}(\vec{x})$ - průměrný užitek populace

Poznámka 5.2.1. Konkrétní odvození popisuje *James Webb* v této knize [8].

Čeho vlastně chceme dosáhnout? Mluvili jsme o tom, že bychom chtěli modelovat chování populace s postupem času. Replikátorová dynamika nám ale navíc napovídá, kdy se vývoj ustálí, to znamená, že nám určí, pro kterou konstelaci podílů x_i již nenastane žádný vývoj. Definujme si právě v tomto ohledu další důležitý pojem - *pevný bod*.

Definice 5.2.2 (pevný bod)**.** Konstelaci podílů x_i, pro které platí, že $\dot{x}_i = 0, \forall i$, budeme nazývat *pevným bodem* (viz [8]).

Poznámka 5.2.2. Pokud populace dojde do konstelace pevného bodu, tak již nenastane žádný další vývoj.

Již dříve jsme si stanovili, že budeme sledovat vývoj spolupráce - v části o evolučních hrách a Definici 3.2.1 jsme si řekli, že námi uvažované hry budou mít právě dvě strategie - spolupráci a nespolupráci. Budeme-li uvažovat, že jedinci populace mohou vybírat jen ze dvou strategií, tak se nám celý tento model zjednoduší.

Poznámka 5.2.3. Uvažujme pro replikátorovou dynamiku evoluční hru a její typickou užitkovou matici v podobě

	S	N
S	a	b
N	c	d

Označíme-li si podíl spolupracujících v populaci jako x, tak podíl nespolupracující části dokážeme vyjádřit jako $1 - x$. Tudíž nemusíme sestavovat dvě replikátorové rovnice, pokud chceme sledovat pouze vývoj spolupráce, a vystačíme si s jednou. Při zohlednění rozdělení užitků stanovených v matici výše bude naše jediná rovnice vypadat následovně:

$$\dot{x} = (ax + b(1-x) - (ax^2 + bx(1-x) + cx(1-x) + d(1-x)^2))x. \tag{5.2.2}$$

Po jednoduché úpravě získáme následující podobu:

$$\dot{x} = x(1-x)(x(a+d-b-c) + b - d). \tag{5.2.3}$$

Poznámka 5.2.4. Všimněme si, že z (5.2.3) vyplývá, že pokud mají hráči jen dvě strategie, můžeme za pevné body okamžitě prohlásit $x = 0$ a $x = 1$. Na konkrétním rozdělení užitků pak závisí, jestli najdeme i třetí pevný bod v podobě

$$x = \frac{d-b}{a+d-b-c}.$$

Jak ale celá dynamika "funguje"? Klíčovou roli pro určení budoucího vývoje zde sehrává část rovnice (5.2.1), kterou nacházíme v závorce - rozdíl užitku z i-té strategie a průměrného užitku populace nám dovolí si odvodit důležité základní vlastnosti tohoto modelu.

Nejprve si stanovme "povolené" hodnoty x_i. Po modelu chceme, aby nastal "nějaký" vývoj a zároveň dosazované hodnoty byly realistické. Podíl populace hrající určitou strategii se tím pádem může pohybovat pouze mezi 0 a 1. Otázku, zda volit otevřený či uzavřený interval, si zodpovíme při pohledu na rovnici (5.2.1) - pokud bychom volili $x_i = 0$ (pro hru se dvěma strategiemi i $x_i = 1$ viz (5.2.3)), tak bude $\dot{x}_i = 0$ a máme konstelaci pevného bodu. Proto budeme podíly x_i uvažovat v otevřeném intervalu $(0, 1)$.

Pro tyto hodnoty dokážeme odvodit následující:

(i) pokud $u(s_i, \vec{x}) - \bar{u}(\vec{x}) > 0$, to znamená užitek z i-té strategie je větší než průměrný užitek populace, bude platit též $\dot{x}_i > 0$ a jedinců i-tého typu bude tedy přibývat,

(ii) pokud $u(s_i, \vec{x}) - \bar{u}(\vec{x}) < 0$, to znamená užitek z i-té strategie je menší než průměrný užitek populace, bude platit též $\dot{x}_i < 0$ a jedinců i-tého typu bude tedy ubývat,

(iii) pokud $u(s_i, \vec{x}) - \bar{u}(\vec{x}) = 0$, to znamená užitek z i-té strategie je roven průměrnému užitku populace, bude platit též $\dot{x}_i = 0$ a jedinců i-tého typu nebude ani ubývat, ani přibývat. Pokud toto platí pro všechna i, tak jsme v takovém případě našli pevný bod.

5.2.1 Populace spojené v grafu - potřeba nového modelu

Zatímco výpočet užitku z určité strategie a průměrného užitku je u úplných, co se týká velikosti do nekonečna jdoucích grafů celkem jednoduchou operací, tak už jsme si v předchozí kapitole ukázali, že pro neúplné grafy konečné velikosti se celá věc komplikuje.

Pro výše uvedené úplné "nekonečně velké" grafy můžeme celou populaci popsat již uvedenými replikátorovými rovnicemi. Pro grafy neúplné se celá situace ale mění - užitek jednoho jedince již nezávisí na celé populaci, ale třeba jen na několika málo dalších jedincích, a pokud graf nebude regulární, tak se sestavení užitků jednotlivých jedinců může i výrazně lišit.

Nyní se pokusíme všechny doposud v této práci uvedené oblasti spojit - budeme sledovat vývoj v situaci, kde spojíme několik populací do jednoho grafu. Přenesou se nám tak eventuální problémy zmíněné v předchozím odstavci na náš případ, jen již nebudeme uvažovat jednotlivé jedince, ale celou populaci. Jak již bylo uvedeno, tak pro populaci v podobě "nekonečně velkého" úplného grafu použijeme replikátorové rovnice. Je ale zřejmé, že díky jejich spojení se budou populace vzájemně ovlivňovat. Pro určení užitku populace tedy bude hrát roli i určení užitků v grafu, které jsme si představili v předchozí kapitole.

Dojde tak k propojení diferenciálních rovnic pro "nekonečně velkou" populaci a "problémů" spojenými s konstrukcí užitku ve hrách na grafech. Pokud stále chceme sledovat vývoj volby určité strategie, tak potřebujeme jiný model, než replikátorové rovnice. Musí mít stejné vlastnosti, které byly uvedené v předchozí části, a zároveň musí zohlednit i strukturu, ve které jsou populace spojeny.

5.3 Populace spojené v grafu - nový model spolupráce

V této části se tedy pokusíme o vytvoření nového modelu, který zohledňuje všechny naše požadavky kladené na vývoj populace při určité konstelaci užitků v okolí.

Nejprve si ale nadefinujeme dvě okolí, která budeme potřebovat později buď přímo v této podobě nebo v podobném smyslu. První bude množina všech uzlů v, které mají od zvoleného uzlu u vzdálenost 1 a budou tedy jeho sousedi:

$$N_1(u) = \{v \in V : dist(u,v) = 1\}. \tag{5.3.1}$$

Druhá množina bude podobná té první s tím, že teď bude součástí množiny i samotný uzel u:

$$N_{\leq 1}(u) = \{v \in V : dist(u,v) \leq 1\}. \tag{5.3.2}$$

Poznámka 5.3.1. Nebude-li stanoveno jinak, tak místo výrazů *uzel* a *vrchol* budeme používat jednoduše slovo *populace*.

Obrázek 5.1 nám pro příklad grafu v podobě cyklu znázorňuje, kterými uzly je (libovolný) uzel i ovlivněn, což si objasníme ještě později. Zároveň ilustruje pro tento případ i jednotlivá okolí $N_{\leq 2}(i), N_{\leq 1}(i)$ a $N_1(i)$.

Nyní se dostaneme již k samotnému modelu. Nutno je podotknout, že nejde o "správné" řešení naší úlohy. Můžeme to však považovat za koncept, se kterým se pokusíme naše požadavky co nejlépe splnit.

Nový model, který splňuje v předcházející části požadované vlastnosti a který bude sledovat vývoj spolupráce populací v grafu, může vypadat takto:

$$\dot{x_i} = (u_i - \bar{u}_i)x_i(1 - x_i)(x_i - \bar{x}_i), \tag{5.3.3}$$

kde

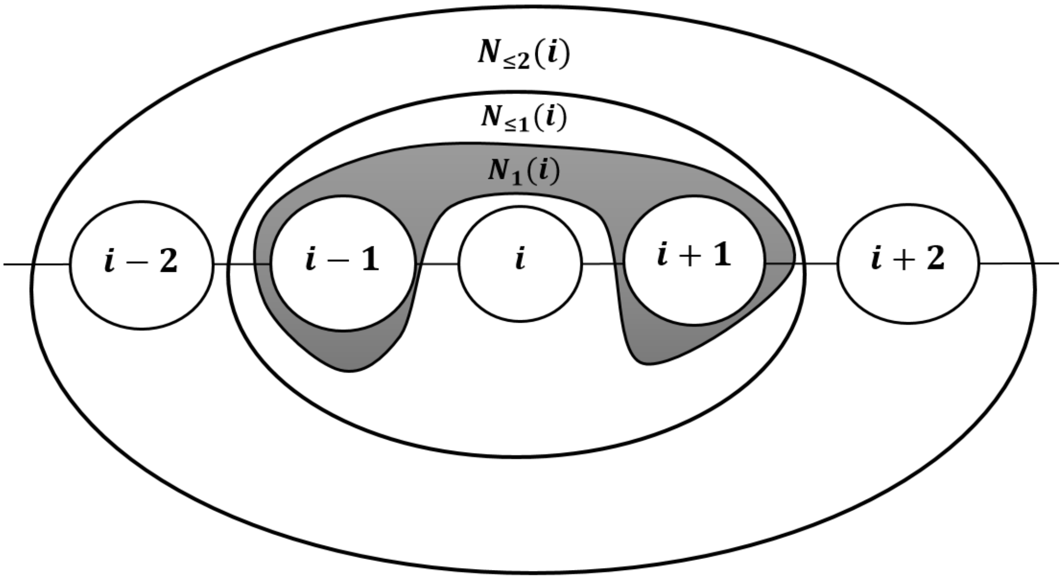
i - označení uzlů (populací) v grafu ($i = 1, 2, 3, ..., |V|$),

x_i - podíl spolupracujících jedinců v i-tém uzlu,

u_i - užitek populace v i-tém uzlu (viz (5.3.4)),

$\bar{u}_i$ - průměr užitků vzhledem k uzlu x_i (viz (5.3.8), (5.3.9)),

$\bar{x}_i$ - průměr z podílů spolupracujících v okolí $N_{\leq 1}(i)$. Platí, že $\bar{x}_i = \dfrac{\sum_{j \in N_{\leq 1}(i)} x_j}{|N_{\leq 1}(i)|}$.



Obrázek 5.1: Znázornění okolí uzlu i, které má vliv na jeho další vývoj

Poznámka 5.3.2. Důležité je si zde povšimnout jiného značení oproti replikátorové dynamice (viz (5.2.1)) - významným rozdílem je, že i zde již nepředstavuje i-tou strategii, ale i-tý uzel, u_i užitek populace na tomto uzlu a x_i podíl spolupracujících v i-tém uzlu.

Z určitého úhlu pohledu v našem modelu stále poznáme replikátorovou rovnici. Abychom si lépe znázornili rozdíl, můžeme u_i a $\bar{u}_i$ rozepsat - právě zde dochází k zásadnímu rozdílu mezi naším modelem a replikátorovou dynamikou.

5.3.1 Užitek jedné populace

Je důležité si uvědomit, že člen u_i zahrnuje i okolí daného populace. Nastoluje se zásadní otázka, jak například přesně nastavit vliv sousedů. I pro tuto problematiku existují koncepty z evolučních her na grafech, které využijeme i pro náš případ.

Věnujme se tedy užitku u_i. Na základě výše uvedeného bude funkcí, která má tuto základní podobu:

$$u_i = f(x_i, \vec{x}_j), \tag{5.3.4}$$

kde

x_i je podíl spolupracujících v i-tém uzlu,

$\vec{x}_j$ jsou všechna x_j pro všechna $j \in N_1(i)$.

Tento způsob zápisu právě má naznačit, že na užitek populace na i-tém uzlu mají vliv všichni její sousedé, podobně jako tomu je u her na grafech. Avšak zde je užitek jedné populace daleko komplexnější.

Uvažujme například situaci, kde jedna populace bude převážně spolupracující. Její sousedé však nespolupracují, a tak musí být užitek ze spolupráce logicky menší. Výpočet funkce $f(x_i, \vec{x}_j)$ v našem případě proběhne na základě součinu jejích argumentů. Přesnou podobu si ihned upřesníme.

Do funkce $f(x_i, \vec{x}_j)$ nyní zahrneme i klasické parametry z evolučních her o spolupráci (viz Definice 3.2.1).

Vyjádření z (5.3.4) pak můžeme rozvinout do podoby

$$\begin{aligned} f(x_i, \vec{x}_j) =& a x_i \frac{\sum_{j \in N_1(i)} x_j}{deg(i)} + b x_i \frac{\sum_{j \in N_1(i)} (1 - x_j)}{deg(i)} \\ &+ c(1 - x_i) \frac{\sum_{j \in N_1(i)} x_j}{deg(i)} + d(1 - x_i) \frac{\sum_{j \in N_1(i)} (1 - x_j)}{deg(i)}. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Poznámka 5.3.3. Výpočet užitku dle rovnice (5.3.5) je obecný postup. V kapitole o evoluční dynamice jsme si ukázali, že bez újmy na obecnosti můžeme položit $a = 1; d = 0$. Výpočet se nám tak zjednoduší na podobu:

$$f(x_i, \vec{x}_j) = x_i \frac{\sum_{j \in N_1(i)} x_j}{deg(i)} + b x_i \frac{\sum_{j \in N_1(i)} (1 - x_j)}{deg(i)} + c(1 - x_i) \frac{\sum_{j \in N_1(i)} x_j}{deg(i)}. \tag{5.3.6}$$

V krátkosti si předveďme konstrukci užitků na příkladu.

Příklad 5.3.1. Uvažujme graf, kde jsou populace spojené v cyklu. Chceme určit užitek pro populaci (či uzel) i, jehož dva sousedy označíme $i - 1$ a $i + 1$ (viz Obrázek 5.1).

Užitek populace i pak bude mít tuto podobu (při zohlednění Poznámky 5.3.6):

$$f(x_i, \vec{x}_j) = x_i \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} + b x_i \frac{1 - x_{i-1} + 1 - x_{i+1}}{2} + c(1 - x_i) \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}.$$

Jak je i z příkladu zřejmé, tak podílů x_j bude přesně tolik, kolik má uzel i sousedů. O počtu populací j, které mají přímý vliv na užitek populace i, můžeme tedy říct, že bude přesně roven

$$deg(i) = |N_1(i)|. \tag{5.3.7}$$

Než se dostaneme k další části, kde se budeme věnovat více funkci $\bar{u}_i$, tak se dostaneme k jedné obecné problematice v oblasti evolučních her na grafech.

Z (5.3.5) vyvodíme, že při určení užitku populace i využíváme průměr z podílů spolupracujících sousedů. Je to jeden ze způsobů, jak u evolučních her na grafech se dvěma strategiemi přistupovat k rozdělení užitků. Mimo zde používaný výpočet průměrem lze využít i způsob agregace. V této práci budeme součty x_j průměrovat, to znamená, že součty x_j a $1 - x_j$ vydělíme $deg(i)$ (viz 5.3.5).

Pro grafy regulární, tedy ty, které tu převážně budeme uvažovat, je dokonce jedno, který z dvou konceptů použijeme (viz [3]).

5.3.2 Průměrný užitek v okolí populace

V předchozí části jsme si osvětlili konstrukci užitku u_i a některé jeho základní vlastnosti. Dále si zavedeme druhou funkci pro průměrný užitek v okolí populace i, který je v modelu (5.3.3) značen jako $\bar{u}_i$:

$$\bar{u}_i = g(x_i, \vec{x}_j), \tag{5.3.8}$$

kde

x_i je podíl spolupracujících v i-tém uzlu,

$\vec{x}_j$ jsou všechna x_j pro všechna $j \in N_{\leq 2}(i) \setminus \{i\}$.

Je zřejmé, že průměrný užitek okolí kolem populace i dokážeme určit jako průměr z užitků všech populací, které se v daném okolí nachází (tedy včetně populace i). Funkci $\bar{u}_i$ tak dokážeme vyjádřit pro nás lépe uchopitelným způsobem:

$$\bar{u}_i = \frac{\sum_{j \in N_{\leq 1}(i)} u_j}{deg(i) + 1} \tag{5.3.9}$$

Podobně, jako jsme si postupně stanovili dva zápisy u_i, tak jsme provedli totéž pro $\bar{u}_i$. Oba způsoby vyjádření průměrného užitku mají svůj smysl.

Srovnáme-li (5.3.4) a (5.3.8), tak zjistíme, že v průměrném užitku $\bar{u}_i$ vstupují do modelu i populace z množiny $N_2(i)$ - tedy uzly, které mají od uzlu i vzdálenost 2. Jedná se o velice důležitý poznatek, který ještě využijeme později mimo jiné při určení analytického řešení.

Dále jsme si uvedli rovnici (5.3.9). Tento způsob vyjádření průměrného užitku je vhodnější, pokud se zajímáme o výpočet $\bar{u}_i$. Opět zde vycházíme ze skutečnosti, že se populace nachází v grafu a tedy na užitku "jednoho uzlu" mají vliv i jeho sousedé. Když tedy chceme určit průměrný užitek jedné populace $\bar{u}_i$, tak se nejedná o nic jiného, než průměr z užitků všech populací z množiny $N_{\leq 1}(i)$.

Poznámka 5.3.4. Neméně důležité je zde zamezit nedorozumění. Proč v souvislosti s populací i mluvíme také o populacích z $N_2(i)$?

Odpověď nám dá rovnice (5.3.9). Z ní vyplývá, že musíme určit také užitky populací $j \in N_1(i)$.

Pro libovolné j má u_j dle (5.3.4) podobu

$$u_j = f(x_j, \vec{x}_k),$$

kde

x_j je podíl spolupracujících v j-tém uzlu,

$\vec{x}_k$ jsou všechna x_k pro všechna $k \in N_1(j)$.

Právě zde vidíme hledaný důvod - populace z $N_2(i)$ vstupují do modelu při výpočtu užitku sousedů.

Poznámka 5.3.5. Doposud jsme si uvedli užitky, respektive funkce, pro u_i a $\bar{u}_i$. Pojďme si shrnout doposud získané znalosti o nich ve vztahu na množiny $N_1(i)$ a $N_2(i)$:

u_i - vliv na užitek populace i má pouze nejbližší okolí, to znamená pouze populace z množiny $N_1(i)$

$\bar{u}_i$ - opět zde vstupují populace z $N_1(i)$. Právě při výpočtu jejich užitku se dostaneme i k populacím z množiny $N_2(i)$ (viz Poznámka 5.3.4).

Populace z množiny $N_1(i)$ tím pádem mají přímý vliv na užitek populace i, zatímco populace z množiny $N_2(i)$ hrají roli jen pro průměrný užitek okolí.

V rámci replikátorových rovnic jsme vycházeli z toho, že vliv výhodnější strategie se šíří napříč všemi jedinci hned od počátku, jelikož celá populace je mezi sebou propojena (uvažujeme úplný "nekonečně velký" graf). Jak to dopadne pro náš model?

Určitě máme představu, jak by to mělo fungovat: vývoj, který nastane v populaci i, mohou ovlivnit jen její sousedé a teprve pak se "případný vliv" může rozšířit do celého grafu k ostatním populacím. Pokud užitek populace i bude větší, než průměrný užitek jejího okolí, tak se okolí bude snažit danou populaci, co se týká volby strategie, napodobit - v principu tedy stejně, jako tomu je u replikátorové dynamiky. Teprve pak se může vývoj rozšířit i do zbytku grafu. Pokud naopak bude užitek populace nižší, než průměrný užitek jejího okolí, tak naopak tato populace bude mít tendenci se přizpůsobit, a právě ona bude měnit strategii.

Tuto imitaci nám zaručí rozdíl mezi užitkem populace i a průměrným užitkem (okolí populace i). To odpovídá výrazům

$u(s_i, \vec{x}) - \bar{u}(\vec{x})$ v replikátorové dynamice (viz (5.2.1)) a

$u_i - \bar{u}_i$ v našem modelu (viz (5.3.3)).

Tudíž by základní vlastnosti replikátorové dynamiky měly být splněny i v našem modelu.

Poznámka 5.3.6. Nesmíme zapomenout na rozdíl mezi replikátorovými rovnicemi a našem modelem. Náš model se věnuje vývoji spolupráce v populaci, která je spojena s ostatními v grafu.

Oproti tomu jde v replikátorové dynamice o vývoj jedinců určitého typu v jedné populaci.

5.3.3 Zbývající členy v modelu

Zbývající část rovnice (5.3.3) naopak zabraňuje tomu, aby se podíl jedinců v populaci na uzlu i dostal mimo interval $(0, 1)$.

Sotva x_i dosáhne hranice tohoto intervalu, tak na základě konstrukce našeho modelu bude $\dot{x}_i = 0$ a x_i už své hodnoty nezmění. Dojde na situaci, kde je populace složena buď jen ze spolupracujících nebo naopak čistě z nespolupracujících.

Skutečnost, že pak nedochází k žádnému vývoji, si můžeme představit následovně: pokud bude populace na 100 % spolupracovat, tak žádný z jedinců nemá vzor pro imitaci strategie "nespolupracovat". Daná populace nespolupráci prostě nezná a pokud nepřijde tato informace od sousedících populací, tak bude volit "spolupráci" i nadále.

Stejnou vlastnost má i model replikátorových rovnic (5.2.1), čili i v tomto ohledu je náš model (5.3.3) "svému vzoru" podobný.

5.4 Analytické určení stabilního řešení

Model a jeho základní vlastnosti jsme si již popsali. Nás ale bude nejprve zajímat, kde se jednotlivé populace ustálí, to znamená, pro které podíly x_i již nenastane žádný další vývoj. Pokud budeme schopni takovéto podíly určit, tak nás bude zajímat, pro jaké parametry b a c (viz Definice 3.2.1 a Poznámka 5.3.6) budou populace mít tendenci k plné spolupráci nebo naopak žádná z populací spolupracovat nebude.

Při pohledu na náš model zjistíme, že se jedná o diferenciální rovnici prvního řádu - pro z toho vyplývající soustavu budeme postupovat následovně (viz [5]):

(i) najdeme stacionární řešení této soustavy - takže takové podíly x_i, které řeší $\dot{x}_i = 0$

(ii) pro nalezená řešení určíme stabilitu podle prvního přiblížení.

Které podíly x_i ale řeší soustavu? Podívejme se ještě jednou na model, ze kterého budeme vycházet.

$$\dot{x}_i = (u_i - \bar{u}_i)x_i(1 - x_i)(x_i - \bar{x}_i).$$

Pravá strana rovnice je jedním velkým součinem - bude nám proto stačit, aby jeden z činitelů se rovnal nule. Proberme tedy každého činitele zvlášť s tím, že se pokusíme najít řešení jednotlivých činitelů:

$u_i - \bar{u}_i = 0$, pokud $u_i = \bar{u}_i$ (toho docílit bude ale obzvlášť u velkých grafů složité),

$x_i = 0$,

$1 - x_i = 0$, pokud $x_i = 1$,

$x_i - \bar{x}_i = 0$, pokud $x_i = \bar{x}_i$. Tento výraz bude splněn, pokud $x_i = \dfrac{\sum_{j \in N_{\leq 1}(i)} x_j}{deg(i)}$.

Řekli jsme si, že chceme sledovat vývoj populací a konkrétně to, jestli budou mít tendenci k

plné spolupráci, tedy $\vec{x} = (1, 1, 1, ..., 1)$

nebo k žádné spolupráci, tedy $\vec{x} = (0, 0, 0, ..., 0)$.

Vidíme, že obě kombinace podílů jsou stacionárním řešením. Navíc při pohledu na výraz $x_i = \dfrac{\sum_{j \in N_{\leq 1}(i)} x_j}{deg(i)}$ zjistíme, že bude splněn právě tehdy, když $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$, pokud $n = |V|$.

Do této podmínky zahrneme již dříve uvedené podíly $\vec{x}$ pro plnou, respektive žádnou spolupráci a získáme stacionární řešení, jehož stabilitu podle prvního přiblížení určíme v dalším kroku.

K tomu potřebujeme určit Jacobiho matici, což se může projevit obzvlášť u velkých grafů jako celkem složitá operace. Podívejme se tedy předtím na to, zda pro $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_i = ... = x_n$ se nám některé výrazy v našem modelu nezjednoduší.

5.4.1 Úprava funkcí pro dané stacionární řešení

Začneme na obecném užitku jedné populace u_i v této podobě (viz Poznámka 5.3.6):

$$f(x_i, \vec{x}_j) = x_i \frac{\sum_{j \in N_1(i)} x_j}{deg(i)} + bx_i \frac{\sum_{j \in N_1(i)} (1 - x_j)}{deg(i)} + c(1 - x_i) \frac{\sum_{j \in N_1(i)} x_j}{deg(i)}.$$

Po dosazení našeho stacionárního řešení dostaneme mnohem jednodušší výraz, který bude platit navíc pro všechny populace v grafu. Pokud místo $x_1, x_2, x_3, ...$ budeme psát jen x_i, tak můžeme zapsat naši funkci jako:

$$f(x_i, \vec{x}_j) = f(x_i) = x_i \frac{deg(i) x_i}{deg(i)} + bx_i \frac{deg(i)(1 - x_i)}{deg(i)} + c(1 - x_i) \frac{deg(i) x_i}{deg(i)}, \forall i \in V.$$

$$f(x_i) = x_i^2 + x_i(1 - x_i)(b + c), \forall i \in V. \tag{5.4.1}$$

Z toho plynou pro nás dva velice důležité poznatky:

(i) užitek populace za daných podmínek nezávisí na sousedících populacích,

(ii) tvar užitkové funkce bude pro všechny populace stejný.

Postoupíme dál k průměrnému užitku v okolí populace $\bar{u}_i$ ve tvaru (viz (5.3.9)):

$$\bar{u}_i = g(x_i, \vec{x}_j) = \frac{\sum_{j \in N_{\leq 1}(i)} u_j}{deg(i) + 1}, \forall j \in N_{\leq 2}(i).$$

Využijeme již získané znalosti (viz (5.4.1)) a opět se nám tvar zjednoduší:

$$g(x_i, \vec{x}_j) = g(x_i) = \frac{(deg(i) + 1) f(x_i)}{deg(i) + 1}, \forall i \in V.$$

$$g(x_i) = f(x_i), \forall i \in V.$$

Bude tedy platit, že

$$f(x_i) - g(x_i) = 0, \forall i \in V. \tag{5.4.2}$$

Než postoupíme dál, tak se podíváme na průměr z podílů spolupracujících v okolí $\bar{x}_i$, který logicky taky přejde na jednoduší tvar:

$$\bar{x}_i = \frac{(deg(i) + 1) x_i}{deg(i) + 1} = x_i, \forall i \in V.$$

Z toho plyne opět, že

$$x_i - \bar{x}_i = 0, \forall i \in V. \tag{5.4.3}$$

5.4.2 Určení Jacobiho matice pro dané stacionární řešení

Pro určení prvků Jacobiho matice využijeme znalosti získané v předchozí části. Podívejme se nejprve na prvky, které se nachází na diagonále - z hlediska výpočtu tušíme, že právě ony budou ty nejsložitější.

Při derivování musíme mít na zřeteli, že náš model je součinem dvou součinů. Budeme-li opět vycházet z populace i, tak prvek patřící k diagonále Jacobiho matice bude mít podobu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = ((\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(x_i)}{\partial x_i})x_i + f(x_i) - g(x_i))(1-x_i)(x_i - \bar{x}_i) + \\ (f(x_i) - g(x_i))x_i((1-x_i)\frac{deg(i)}{deg(i)+1} - (x_i - \bar{x}_i)), \forall i \in V\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Aplikujme vztahy (5.4.2) a (5.4.3) - prvky na diagonále tím pádem budou všechny nulové, jelikož v obou velkých součinech z (5.4.4) je jeden z činitelů nulový. Celé si to znázorníme na následující (zkrácené) rovnici

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = ((\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(x_i)}{\partial x_i})x_i + f(x_i) - g(x_i))(1-x_i)\underbrace{(x_i - \bar{x}_i)}_{=0} + \underbrace{(f(x_i) - g(x_i))}_{=0}x_i ...$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0, \forall i \in V \tag{5.4.5}$$

Pokračujme nyní u populací z množiny $N_1(i)$. V parciální derivaci budeme část $x_i(1-x_i)$ uvažovat jako konstantu. Pro tyto populace bude mít patřičný prvek v Jacobiho matici následující tvar:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = x_i(1-x_i)(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(x_i)}{\partial x_j})(x_i - \bar{x}_i) + (f(x_i) - g(x_i))\frac{deg(i)}{deg(i)+1}, \forall j \in N_1(i), \forall i \in V \tag{5.4.6}$$

Využijeme zde stejné vztahy, jako předtím, a opět bude výsledkem, že tyto prvky Jacobiho matice jsou nulové:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = x_i(1-x_i)(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(x_i)}{\partial x_j})\underbrace{(x_i - \bar{x}_i)}_{=0} + \underbrace{(f(x_i) - g(x_i))}_{=0}\frac{deg(i)}{deg(i)+1}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = 0, \forall j \in N_1(i), \forall i \in V \tag{5.4.7}$$

Následují sousedící populace z množiny $N_2(i)$. Pro tyto populace bude příslušný prvek v Jacobiho matici mít ještě "jednodušší" podobu:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} = x_i(1-x_i)(x_i - \bar{x}_i)(-\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_k}), \forall k \in N_2(i), \forall i \in V \tag{5.4.8}$$

Okamžitě vidíme, že i tyto prvky budou nulové - stačí nám k tomu vztah (5.4.3):

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} = x_i(1 - x_i \underbrace{(x_i - \bar{x}_i)}_{=0}(-\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_k})$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} = 0, \forall k \in N_2(i), \forall i \in V \tag{5.4.9}$$

Jak budou vypadat ostatní prvky Jacobiho matice? Bez toho, abychom si určovali jejich tvar, jako jsme to dělali u populací z množiny $N_{\leq 2}(i)$, můžeme prohlásit, že budou taktéž nulové. Dokazuje to konstrukce celého modelu - již dříve jsme si uvedli, že populace, které jsou v grafu vzdálené více, než dvě hrany, se v rovnici pro x_i neobjeví (viz Poznámka 5.3.5).

Výsledkem tedy je, že pro stacionární řešení $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_i = ... = x_n$ bude Jacobiho matice nulová, a tedy není možné učinit jednoznačný závěr o stabilitě tohoto stacionárního řešení.

5.5 Hledání stabilních řešení pro jednoduchý graf

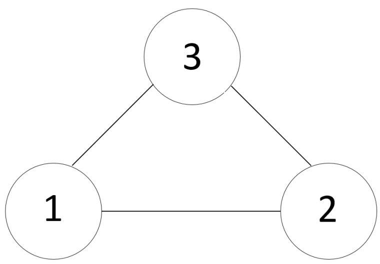
Pro jinou konstelaci podílů, než v předchozí části, je hledání analytického řešení poměrně obtížné. Na příkladu jednoduchého grafu si tak předvedeme, jak hledat stabilní řešení pomocí numerického výpočtu. Ten provedeme v programu MATLAB.

Pro hledání takovýchto řešení využijeme dva typy grafů:

(i) vykreslení takzvané teplotní mapy, která znázorní podíly spolupracujících po zvoleném čase

(ii) vykreslení trajektorií jednotlivých podílů spolupráce pro zvolený čas (pro kontrolu teplotní mapy).

Jak ale budeme postupovat, když analyticky nedokážeme určit stabilní řešení? Budeme se orientovat především na oblasti přípustných parametrů b a c pro $a = 1; d = 0$ (viz Obrázek 3.1).



Obrázek 5.2: K_3 - úplný graf se třemi vrcholy

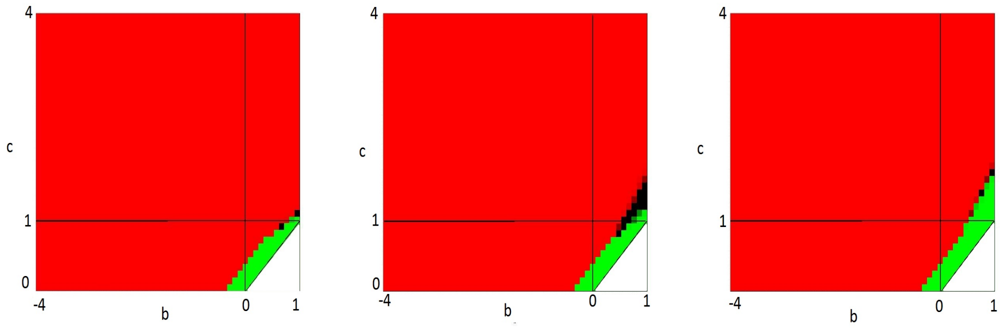
Dále budeme srovnávat naše výsledky s tím, co stojí ve zdroji [3]. Autoři našli mimo jiné pro úplný graf K_3 (viz Obrázek 5.2), ve kterém jsou na rozdíl od nás spojeni jedinci a ne populace, následující oblasti atrakce (názvy her dle Tabulky 3.1):

- plnou spolupráci zasahující do her PS a LJ,
- žádnou spolupráci zasahující do oblasti hry VD a větší části oblastí LJ a JH,

Navíc v oblastech JH a PS je bílá oblast, kde se zřejmě nachází určitá koexistence.

Přesně na to my se pokusíme navázat s naším modelem pro populace. Nebudeme sice hledat oblasti atrakce pro stejně velké podíly, ale můžeme zkoušet "podobně velké" podíly jako počáteční podmínky. Pokusíme se taky najít v našem modelu koexistenci.

Budeme tedy vycházet z grafu K_3. Ukažme si nejprve, že i v našem případě bude pro oblasti přípustných parametrů b a c převažovat nespolupráce. Pro obrázky v této kapitole platí, že červená znamená nespolupráci $x_i = 0$, zelená spolupráci $x_i = 1$ a černá koexistenci $x_i \approx 0,5$.



(a) 1. uzel (b) 2. uzel (c) 3. uzel

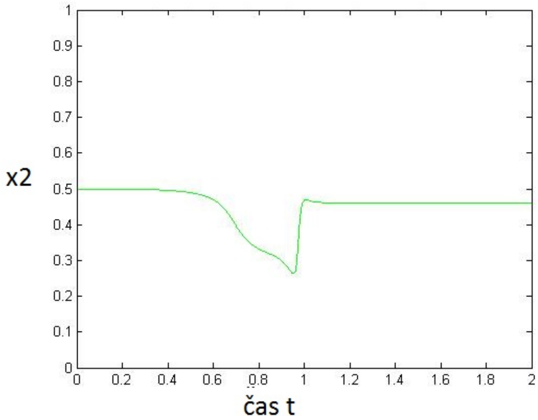
Obrázek 5.3: Teplotní mapa spolupráce všech populací pro celou oblast parametrů b a c - počáteční podmínky $x_1 = 0,49; x_2 = 0,5; x_3 = 0,51$

Na Obrázku 5.3 vidíme velmi podobné výsledky, jako ve zmíněném zdroji [3]. Náš model má ale zcela jistě horší předpoklad pro spolupráce, neboť zdánlivá oblast koexistence sahá do oblasti JH jen z malé části.

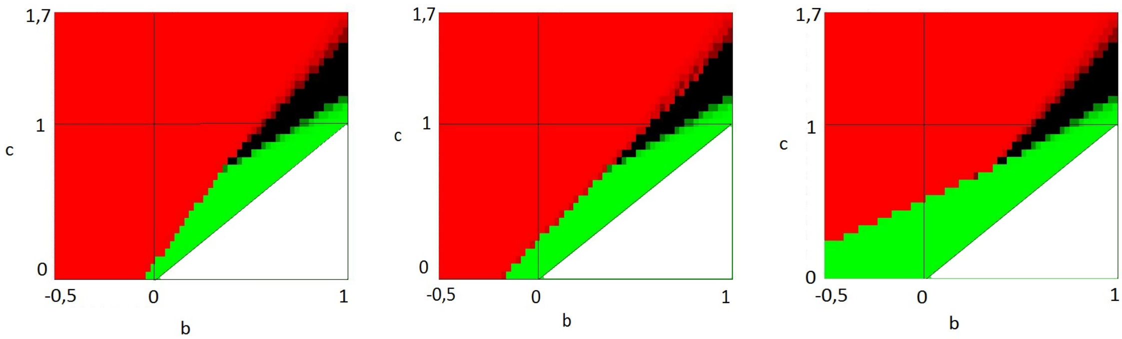
Pokud chceme mít jistotu, že populace své hodnoty již nezmění, dáme do programu simulace zastavovací podmínku, která ukončí simulaci, pokud hodnoty za určitý čas zůstanou s určitou odchylkou stejné.

Náš jednoduchý model se typicky ustaloval do času $t = 10.000$, vykreslované hodnoty jsou pro již ustálené stavy v $t = 100.000$. Podívejme se například na libovolnou hodnotu z černé oblasti druhé populace (viz Obrázek 5.4).

Pro nás tedy nemá cenu důkladněji zkoumat oblast parametrů her VD a LJ, ale budeme se víc věnovat té "zajímavé" části - 2. uzel naznačuje výskyt koexistence pro oblast, kde 1. uzel ukazuje nespolupráci a 3. uzel spolupráci. Právě na tuto část se podíváme blíže a



Obrázek 5.4: Trajektorie podílu spolupracujících x_2 pro $b = 0,9; c = 1,4$ - počáteční podmínky $x_1 = 0,49; x_2 = 0,5; x_3 = 0,51$



(a) $x_1 = 0,09; x_2 = 0,1; x_3 = 0,11$ (b) $x_1 = 0,29; x_2 = 0,3; x_3 = 0,31$ (c) $x_1 = 0,89; x_2 = 0,9; x_3 = 0,91$

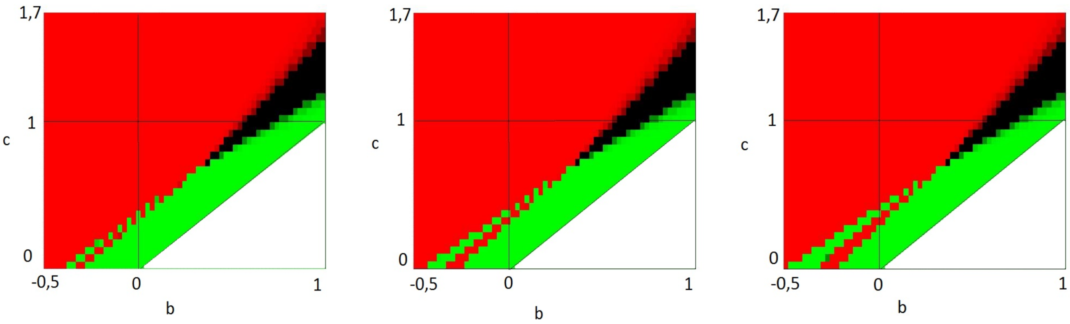
Obrázek 5.5: Teplotní mapa spolupráce v druhých uzlech pro celou oblast parametrů b a c. Počáteční podíly stojí pod příslušným obrázkem

vyzkoušíme, zda pro jiné počáteční podmínky vyjde stejný výsledek nebo jestli se naopak oblasti spolupráce změní.

Z Obrázku 5.5 dokážeme vyčíst dva zajímavé poznatky:

- oblast koexistence se při změně počátečních podílů nemění,
- čím větší (v tomto případě) x_2), tím větší je oblast atrakce pro spolupráci, která zasahuje do oblasti LJ.

V prvním příkladu jsme volili počáteční podmínky přibližně stejné kolem podílu spolupráce 0,5. Zkusme tedy volit podíl spolupráce, kolem kterého se ostatní počáteční podíly nacházejí, postupně menší a později větší. Vykreslíme si pak teplotní mapu spolupráce pro



(a) $x_1 = 0,75; x_2 = 0,5; x_3 = 0,25$ (b) $x_1 = 0,9; x_2 = 0,5; x_3 = 0,1$ (c) $x_1 = 0,99; x_2 = 0,5; x_3 = 0,01$

Obrázek 5.6: Teplotní mapa spolupráce v druhých uzlech pro celou oblast parametrů b a c. Počáteční podíly stojí pod příslušným obrázkem

populaci, jejíž počáteční podíl leží "mezi" počátečními podíly ostatních. Výsledek vidíme na Obrázku 5.5.

Zdá se tedy, že oblast koexistence v našem případě skutečně existuje. O to cennější je, že se tato oblast nezmenšuje ani nezvětšuje, když měníme počáteční podmínky. Navíc model reaguje realisticky v tom ohledu, že při celkově vyšších počátečních podílech spolupráce (teplotní (c) a (d) v Obrázku 5.5) je také oblast atrakce pro spolupráci větší.

Fungování modelu jsme prozkoumali pro případ, kdy jsou jednotlivé podíly spolupracujících x_i přibližně stejné. Zkusme nyní udělat pravý opak a zkoumat vliv rostoucího rozdílu mezi hodnotami x_i.

V Obrázku 5.6 vidíme již zmíněnou oblast koexistence, ale především vidíme, že rostoucí rozdíl mezi podíly vede k tomu, že se nám v oblasti LJ tvoří zajímavý "pás nespolupráce", který v zdroji [3] k vidění není. Zdá se tedy, že se nám poměrně silně nastavená závislost na sousedech tady projevuje celkem zřetelně.

Když vše shrneme, tak můžeme říct, že v porovnání s výsledky ze zdroje [3] "funguje" náš model přibližně stejně - oblasti atrakce a koexistence se nachází ve stejných místech. Co se spolupráce týče, je, jak zmíněno, náš model určitě "horší", což závisí i na vysokém vlivu sousedících populací, který je nastaven v tomto modelu. Navíc se zdá být neměnná oblast koexistence v podobných místech, jako v literatuře [3].

Dosáhli jsme i nových výsledků v podobě oblasti atrakce nespolupráce uprostřed oblasti atrakce spolupráce, která silně závisí na tom, jak volíme počáteční podmínky - čím různorodější konstelace populací je, tím pestřejší je i výsledná teplotní mapa.

Kapitola 6

Závěr

V této práci jsme se snažili postupně od základů teorie her dojít k již poměrně složitým strukturám - začali jsme na definici pojmu "hra" a na závěr došli až k modelování chování mezi sebou propojených populací.

Představili jsme si nejdůležitější koncepty a principy, jak teorie her řeší určité situace, kdy dojde k jednorázovému rozhodnutí - v souvislosti s touto problematikou jsme si představili Nashovu rovnováhu.

Jak bylo řečeno v úvodu, tak teorie her nezkoumá jen tyto základní a poměrně jednoduché úlohy. Podobně jsme pokročili i v této práci a ukázali jsme si na příkladech ze základů, že podle nich se dá hodnotit z určitého úhlu pohledu i evoluční vývoj. Zaměřili jsme se na spolupráci a její vývoj a dostali jsme se tak definitivně do oblasti evolučních dynamik. Evoluce je z části i náhodná, a tak jsme se seznámili s několika koncepty, které právě tento princip zahrnují. Nicméně my si ukázali cestu, jak toto "obejít"a vytvořit deterministický, to znamená "předvídatelný" model. Ukázali jsme si taktéž, jak se dá evoluce "předvídat" na grafech - jedna z možností v tomto ohledu je široce využívaná imitační dynamika.

Právě ona se stala klíčovou v další části této práce, kde jsme si představili nový model pro vývoj spolupráce. Předtím jsme si ukázali replikátorovou dynamiku a princip, na kterém je založena. Detailně jsme si rozebrali, jak se u ní určuje již zmíněný "budoucí" vývoj, a přesně na tomto základu jsme postavili náš nový model.

Vycházeli jsme z toho, že chceme modelovat chování populací, které jsou spojeny v grafu, a v podstatě ze všeho, co jsme si do tohoto okamžiku v práci uvedli, jsme něco převzali do nového modelu - došlo tak ke spojení modelu pro nekonečně velké populace a oblasti evolučních her na grafech. Patřičně jsme si pak hotový model popsali, než jsme ho začali "zkoušet" - nejdřív analyticky a pak prakticky.

V obou možnostech se skrývají možnosti pro další výzkum. Narazili jsme na zajímavé výsledky a především skutečnost, že oblast atrakce nespolupráce byla v několika případech svíraná oblastí spolupráce, což dává podklad pro další zkoumání, například: Dá se zmíněná oblast konkrétně analyticky popsat? Jak to bude vypadat u složitějších grafů?

Literatura

[1] Mark Broom and Jan Rychtár, *Game-theoretical models in biology*, CRC Press, 2014.

[2] Roman Čada, Zdeněk Ryjáček, and Tomáš Kaiser, *Diskrétní matematika*, Západočeská univerzita, 2004.

[3] Jeremias Epperlein, Stefan Siegmund, and Petr Stehlík, *Evolutionary games on graphs and discrete dynamical systems*, Journal of Difference Equations and Applications **21** (2015), no. 2, 72–95.

[4] Václav Hasenöhrl, *Srovnání evolučních dynamik*, Bachelor's thesis, West Bohemia University, 2014.

[5] Alois Kufner, *Obyčejné diferenciální rovnice*, Západočeská univerzita, 1993.

[6] Martin Nowak, *Evolutionary dynamics*, Harvard University Press, 2006.

[7] Hisashi Ohtsuki and Martin A Nowak, *Evolutionary games on cycles*, Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences **273** (2006), no. 1598, 2249–2256.

[8] James Webb, *Game theory: decisions, interaction and evolution*, vol. 2, Springer Science & Business Media, 2007.