

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Bakalářská práce

SPECIÁLNÍ MATEMATICKÉ MODELY
SAMOORGANIZACE

BcA. Anežka Bělohoubková

Plzeň 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím uvedených zdrojů a literatury.

v Plzni dne 10.8.2015

Anežka Bělohoubková

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu své bakalářské práce doc. Dr. RNDr. Miroslavu Holečkovi za jeho vedení, cenné rady, které mi poskytl v průběhu práce a za jeho ochotu a vstřícnost. Dále bych ráda poděkovala doc. Ing. Václavu Černému, Ph.D. za jeho ochotu a radu. Na závěr bych ráda poděkovala své rodině a blízkým za jejich podporu při tvorbě této práce.

Abstrakt

Cílem této práce je představení jevů, které vznikly samoorganizací a matematických modelů, které se používají pro jejich popis. Dále pak zkoumání podmínek vzniku nestability systému pro jeden z matematických modelů a numerická simulace chování jednoho konkrétního nelinearizovaného modelu. Následně proběhne porovnání získaných výsledků.

Klíčová slova: samoorganizace, matematický model, nestabilita, stabilita, difuze, difuzní rovnice, struktura, podmínky vzniku nestability, fluktuace

Abstract

The goal of this thesis is presentation of self-organization which can be visible around us and the presentation of mathematical models, which are used to describe such systems. In second part of this thesis we will find conditions, which have to be fulfilled for appearance of the self-organisation. Finally we will create a numerical simulation of one particular unlinear system's behaviour. All results will be presented and compared.

Keywords: self-organisation, mathematical model, unstability, stability, difusion, difusion equation, structure, unstability appearance condition, fluktuation

Obsah

1	Úvod	1
2	Značení	2
3	Výskyt samoorganizovaných struktur	3
3.1	Motýlí efekt	3
3.2	Turbulentní proudění	4
3.3	Sdílení tepla v tekutinách	5
3.4	Styk dvou různých tekutin	7
3.5	Vlny a duny	8
3.6	Hvězdy a galaxie	9
3.7	Krystalizace	9
3.8	Chemické oscilační reakce a chemické vlny	10
3.9	Fraktální struktury	12
3.10	Chování kolonie živočichů	13
3.11	Životní cykly	13
3.12	Biorytmy	15
3.13	Skvrny na zvířecí srsti	16
3.14	Výskyt Voronoi struktur v přírodě	17
3.15	Ekonomie	17
4	Vybrané matematické modely	19
4.1	Reakčně-difuzní model	19
4.2	Navierovy-Stokesovy rovnice	21
4.3	Lorenzův model	22
5	Podmínky vzniku samoorganizace	24
5.1	Počáteční a okrajové podmínky	24
5.2	Linearizace modelu	25
5.3	Porucha vyjádřená jako Fourierova řada	26
5.4	Přechod k původním prostorovým souřadnicím	28
5.5	Výpočet pro dvě prostorové proměnné	29
6	Problém stability v konkrétním případě	33
6.1	Numerický model	33
6.2	Simulace chování modelu	35
6.3	Porovnání výsledků	40
7	Závěr	42

8	Seznam použité literatury	44
9	Seznam příloh	46

1 Úvod

Jev samoorganizace můžeme sledovat všude kolem nás, ať už se jedná o přírodní jevy, sociální struktury, či ekonomické jevy. Samoorganizace může být závislá na mnoha faktorech, které determinují jak její samotný vznik a existenci, tak i její vzhled.

Cílem této práce je ve stručnosti představit, kde se samoorganizace vyskytuje a jaké jevy s její pomocí vznikají. Zároveň s tím budou i představeny některé matematické modely, které se pro popis systémů, ve kterých může vzniknout samoorganizace, používají. Druhá část této práce je zaměřena na zjištění podmínek (pro jednu i dvě prostorové proměnné), při jejichž splnění samoorganizace vznikne. Tento výpočet bude proveden pro jeden z matematických modelů. V poslední části pak bude provedena numerická simulace chování jednoho konkrétního nelinearizovaného modelu a všechny výsledky budou porovnány.

2 Značení

$\frac{df}{dt}$	derivace funkce $f(t)$ podle času
$\frac{\partial f}{\partial x}$	parciální derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\Delta f(x)$	Laplaceův operátor
Δx	diference x
f_0	počáteční podmínka
$h(x, y, t)$	porucha zavedená do počáteční podmínky
D	koeficient difuze
C	integrační konstanta
Re	Reynoldsovo číslo

3 Výskyt samoorganizovaných struktur

Všude kolem nás se vyskytuje velké množství struktur. Mohou být nápadné, ale i na první pohled nepatrné a v místech, kde bychom je nečekali. Některé struktury jsou vytvářeny záměrně, existují ale i takové, které vznikají samovolně — samoorganizací. Vyvinutí struktury v nějakém systému je umožněno zpravidla jeho nestabilitou, to znamená, že malá fluktuace se vlivem nestability neutlumí, ale naopak se rozšíří po celém systému. Hranice, kdy se ze stabilního systému stává nestabilní, bývá určena kritickou hodnotou bezrozměrného čísla charakterizujícího systém (např. Reynoldsova, Taylorova). Samoorganizaci můžeme sledovat ve fyzikálních, chemických, biologických, ale například i v ekonomických či sociálních systémech. Je to jev, který spojuje takřka veškeré oblasti vědy, přírody i života. V této úvodní kapitole bych ráda uvedla některé příklady jejího výskytu, které poslouží jako motivace pro celou práci.

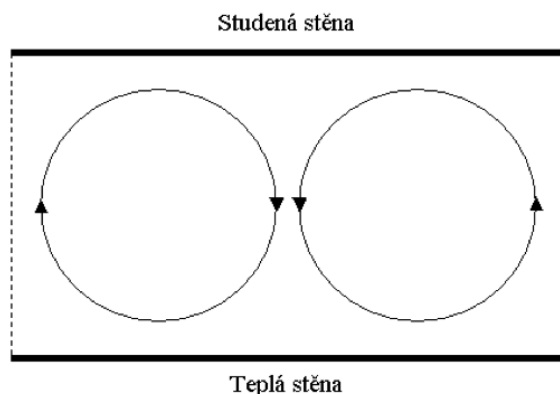
3.1 Motýlí efekt

Edward Lorenz byl asi první, kdo formuloval teorii chaosu¹. Při své práci meteorologa se zajímal o to, proč je tak složité vytvořit dobrou předpověď počasí. Při svých výzkumech na matematických modelech atmosféry objevil nestabilní chování, kdy i malá odchylka na počátku (v jeho případě zaokrouhlení ze 6 na 3 platné číslice) může mít na vývoj dynamického systému zásadní vliv. Později pro tento jev formuloval termín motýlí efekt.

Lorenzův model atmosféry byla soustava celkem dvanácti diferenciálních rovnic, které reprezentovaly změny tlaku, teploty, síly větru apod. V roce 1963 byl tento model zjednodušen na třídímní Lorenzův model. V něm rovnice popisují základní vlastnosti proudění tekutiny se sdílením tepla — Rayleigh-Bénardovu nestabilitu (je detailněji uvedena dále), tedy rotační pohyb elementů, kdy teplé elementy tekutiny stoupají od povrchu země vzhůru, kde se zchladí a pak opět klesají dolů, aby se znovu ohřály a stoupaly (viz obrázek 1).

Jednotlivé proměnné v rovnicích charakterizují vlastnosti elementů, jako jsou rychlost rotace, rozdíl a rozložení teplot, hodnoty parametrů určují stabilitu systému (zemská atmosféra je systém nestabilní). Všechny dynamické systémy jsou charakterizovány limitním stavem, tzv. atraktorem,

¹V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: URUBA, Václav. *Náhoda v exaktní vědě* [online]. 2005 [cit. 2014-11-15]. Dostupné z: <http://www.it.cas.cz/~uruba/docs/lit/Nahoda.pdf>



Obrázek 1: Rayleigh-Bénardova buňka¹

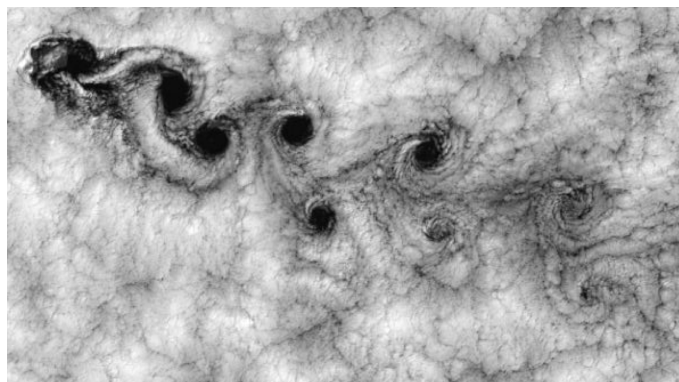
do kterého se systém po uplynutí určitého času dostane. Atraktory jsou různých druhů — může jím být bod či uzavřená křivka. Pro Lorenzův systém přísluší atraktor, pro který se vžil název podivný. Jedná se o křivku, která má jistý počáteční bod, ale nekonečnou délku a se nikdy neustálí, nikdy sama sebe neprotne ani se neopakuje, ale přitom nikdy nevybočí z přesně vymezeného prostoru. Má fraktální vlastnosti a její průběh je nepředpověditelný. Lorenzův atraktor byl prvním objeveným podivným atraktorem, skládá se ze dvou větví (každá reprezentuje jeden směr rotace válců v atmosféře) a právě podle jeho tvaru dostal motýlí efekt svůj název. Systém limitně směřuje k podivnému atraktoru, pokud překročí kritickou mez a stane se nestabilním.

3.2 Turbulentní proudění

Turbulence jsou projevy samoorganizace dynamického charakteru¹. Turbulentní proudění (tzn. nestabilní systém) vzniká v tekutinách tehdy, pokud Reynoldsovo číslo překročí kritickou hranici. Pokud ji nepřekročí, proudění zůstává laminární (systém je stabilní). Turbulentní proudění je charakteristické vznikem struktur. Vznikající struktury se skládají z jednotlivých vírů, jejichž tvar a velikost jsou dány určitými zákonitostmi, jejich orientace a okamžitá poloha se však jeví jako náhodná. Turbulentní proudění se stalo prvním dynamickým systémem, ve kterém se objevuje chaos, který začala věda systematicky zkoumat a to zejména kvůli jeho důležitosti v praxi. Modeluje se pomocí Navier-Stokesových rovnic spolu s rovnicí kontinuity. Jedná se o nelineární matematický model, pro které je typické, že s jejich pomocí lze popisovat jak stabilní stavy systému, to znamená, že pokud se v něm vyskytne malá porucha, tak bude utlumena, tak i nestabilní stavy systému, kdy bude

malá porucha zesílena a rozšířena po celém systému. Důležitým problémem, který se v oblasti turbulencí řeší, je správné určení mezních podmínek, kdy systém přechází ze stabilního na nestabilní. Proudící tekutina je velmi složitý systém s velkým množstvím stupňů volnosti a v současnosti není prakticky možné ho přímo numericky simulovat, proto se v praxi obvykle modeluje pomocí statistického přístupu. Turbulentní proudění často nastává i v kombinaci s dalšími faktory, jako je například tepelná výměna.

Konkrétními příklady výskytu turbulentního proudění jsou úplavy, neboli turbulence vznikající za špatně obtékanými tělesy². Kritická hranice Reynoldsova čísla závisí v tomto případě i na tvaru obtékaného tělesa. Vzniká vírová struktura, která se nazývá Kármánova-Bénardova vírová řada (viz obrázek 2). Dalšími příklady jsou Taylorova-Couettova nestabilita, která vzniká při proudění kapaliny v mezeře mezi souosými válci, které se vůči sobě pohybují. Dále pak vznik turbulencí v mezních vrstvách, mřížková turbulence nebo turbulence ve volných smykových vrstvách, která je velmi častá a vyskytuje se prakticky všude, kde se objevuje paprsek tekutiny vyfukovaný do klidného prostředí a nebo při odtržení mezní vrstvy.



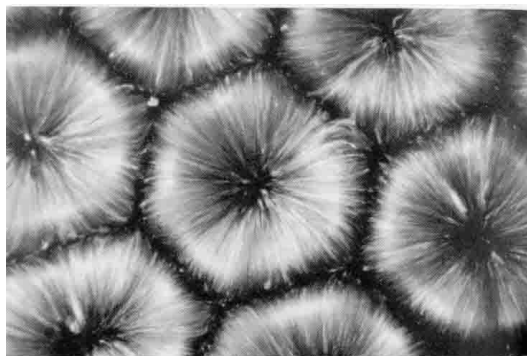
Obrázek 2: Vírová řada vzniklá v úplavu za ostrovem¹

3.3 Sdílení tepla v tekutinách

Charakteristická samoorganizace se objevuje při proudění tekutin spojeném se sdílením tepla. První z nich je Rayleigh-Bénardova nestabilita a

²V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: URUBA, Václav. Turbulence [online]. ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2009 [cit. 2014-11-15]. Dostupné z: http://www.it.cas.cz/uruba/docs/Aero/Turbulence_45.pdf

nastává v kapalině, která je umístěna mezi dvěma deskami³. Spodní deska má teplotu T_1 a je pozvolna zahřívána, horní deska se udržuje na stálé teplotě T_2 , přičemž po celou dobu platí, že $T_1 > T_2$. Teplo se vedením pozvolna šíří tekutinou. Vlivem vyšší teploty se ve spodních vrstvách kapaliny snižuje hustota a vzniká vztlaková síla a po překročení kritické hranice začne převažovat tíha horních vrstev nad viskózními silami, které působí stabilizačně. Důsledkem je, že kapalina začne v systému proudit, spodní teplejší vrstvy budou stoupat vzhůru a chladnější vrchní vrstvy budou klesat ke dnu. Výsledné proudění má tvar válců, kdy se vždy dva sousední válce otáčejí v opačném směru (viz obrázek 1). Stabilitu systému charakterizuje Rayleighovo číslo. Pokud překročí kritickou hranici, systém se stane nestabilním. Rayleigh-Bénardova nestabilita se modeluje pomocí tří základních rovnic hydrodynamiky, Navier-Stokesovy rovnice, rovnice kontinuity a rovnice vedení tepla.



Obrázek 3: Bénardovy buňky³

Podobná předchozí uvedené je Bénardova-Marangoniova nestabilita. Tenká vrstva kapaliny je taktéž umístěna na desce, která je pozvolna zahřívána, avšak v tomto případě je kapalina s volným povrchem. Teplé spodní a chladné vrchní vrstvy začnou opět při překročení kritické hranice rozdílu teplot proudit. Kvůli teplotním rozdílům v kapalině se navíc na povrchu začnou objevovat fluktuace v povrchovém napětí, které podporují vznik nestability. Pro jejich vznik musí být rozdíl teplot na dně a u hladiny tak velký, aby byla stoupající teplá kapalina schopna udržet gradient povrchového napětí. Tyto fluktuace umožňují vznik charakteristických obrazců, známých jako Bénardovy buňky, které mají nejčastěji tvar šestiúhelníků (viz obrázek 3). V jed-

³V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: PROKŠOVÁ, Jitka a Jan DURŠPEK. Tepelná konvekce. In: Nerovnovážná termodynamika a její aplikace [online]. 2007 [cit. 2014-11-15]. Dostupné z: <http://nelterm.kof.zcu.cz/hydrodynamika/tepelnakonvekce/tepelnakonvekce.htm>

notlivých buňkách kapalina proudí vždy středem vzhůru a podél okrajů dolů. Celá buňka je v podstatě složena z válců popsaných v předchozím případě, které jsou uspořádány po jejích okrajích. Stabilitu systému vyjadřuje Marangoniovo číslo, ve kterém je vyjádřena bilance protichůdných stabilizačních a destabilizačních sil.

3.4 Styk dvou různých tekutin

Nestability se mohou vyskytnout i za speciálního případu styku dvou tekutin s rozdílnými vlastnostmi. Kelvinova-Helmholtzova nestabilita vzniká na rozhraní dvou tekutin různých hustot⁴. Tekutiny uvažujeme ve dvou paralelních horizontálních vrstvách, které se vůči sobě pohybují (resp. každá z vrstev má jinou rychlost). Tím na jejich rozhraní vzniká tenká smyková vrstva. V ní se začnou objevovat periodicky poruchy tlaku kvůli tomu, že mezní vrstva začne kmitat — v konkávitách se objeví přetlak, v konvexitách podtlak. Tyto tlakové poruchy způsobují, že se amplituda stále zvětšuje a vyklenuté části se klenou stále více, naopak vpadlé části se stále více prohlubují. Vzniklé výstupky se postupně stáčí ve směru proudění a při dostatečně velkém zavnutí se odtrhnou a existují dále jako samostatné víry. Tento jev můžeme pozorovat například v oblačnosti (viz obrázek 4). Jako dvojitou Kelvinovu-Helmholtzovu nestabilitu lze chápat proud tekutiny vtékající do prostředí s jinou rychlostí, popř. i hustotou. Taktéž vznikají charakteristické obrazce, které jsou pozorovatelné např. na písčných dnech rezervoárů s vtokem.

Styk dvou rozdílných proudících vrstev tekutiny nastává i u již výše zmíněného úplavu. Za překážkou je rychlost tekutiny nižší než v okolí a tak se zde setkávají vrstvy s rozdílnými vlastnostmi. Smykové vrstvy se opět rozkmitají a začnou vznikat postupně se uvolňující víry se střídajícím se směrem otáčení. Jejich tvar závisí na tvaru překážky a frekvence jejich oddělování na rychlosti obtékající tekutiny.

Nestabilním systémem, tzv. Rayleighovou-Taylorovou nestabilitou, je i situace, kdy se nad sebou nachází ve vrstvách dvě tekutiny, přičemž vrchní vrstva má větší hustotou, než spodní. Díky působící tíže vrchní tekutiny je spodní vrstva nestabilní a při malé fluktuaci (např. v důsledku teplotní výchyly) začnou vrstvy proudit. Jako stabilizační síly zde působí viskozita a povrchové napětí tekutin.

⁴V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: PROKŠOVÁ, Jitka a Jan DURŠPEK. Nestability vznikající na styku dvou tekutin různé hustoty. In: Nerovnovážná termodynamika a její aplikace [online]. 2007 [cit. 2014-11-15]. Dostupné z: <http://nelterm.kof.zcu.cz/hydrodynamika/styktekutin/styktekutin.html>



Obrázek 4: Vznik vírů v oblačnosti³

3.5 Vlny a duny

Vlny na otevřené vodní hladině jsou způsobovány především větrem. Při vodní hladině s sebou vanoucí vítr strhává vodu na povrchu a tím zapříčiňuje její pohyb. Při vzniku vln je v podstatě aplikován výše popsáný případ Kelvinovy-Helmholtzovy nestability, kdy ve dvou vrstvách nad sebou proudí dvě tekutiny rozdílných hustot a rychlostí⁴. Protože voda má nepoměrně větší hustotu, než vzduch, není schopna vytvářet dlouhotrvající svinuté víry, jaké je možno vidět například v oblačnosti (pokud se objeví, ihned padají zpět k hladině). Rozkmitáním mezní vrstvy vznikne ale mechanické vlnění, které je schopno se po vodní hladině šířit i na vzdálenosti mnoha kilometrů.

Písečné a sněhové duny jsou svým charakterem vodním vlnám velmi podobné. Jejich vznik je taktéž způsoben větrem (popřípadě proudící vodou, pokud se jedná o duny na písčném dně), který zachytává jednotlivé částice a strhává je s sebou. Protože písek i sníh jsou tvořeny velkým množstvím drobných částic, které se mohou rozptýlovat v médiu, jejich chování je značně podobné chování tekutiny. Proto i v případě písku a sněhu stržených větrem či proudem můžeme vznik dun připisovat Kelvinově-Helmholtzově nestabilitě. I v tomto případě je tíha spodní vrstvy natolik velká, že nemohou vznikat svinuté víry. Přesto, že písek a sníh ve větru můžeme považovat za tekutinu, na povrchu se nemohou šířit vlny, jako tomu bylo na vodě. Vzniklé struktury jsou proto téměř nehybné a jejich pohyb závisí na pohybu větru (popř. vody). Na uspořádání dun je možno občas sledovat i vliv Bénardovy-Marangiovy nestability, která způsobuje vznik Bénardových buněk v at-

mosféře. Vítr, který se pohybuje v rámci jednotlivých buněk vytváří duny opisující jejich hexagonální tvar.

3.6 Hvězdy a galaxie

Galaxie jsou jedněmi z největších kompaktních uskupení ve vesmíru a lze u nich pozorovat stavbu a vývoj⁵. Vznikaly po Velkém třesku, kdy hmota postupně ztrácela své původní vlastnosti a vlivem gravitace se začala shlukovat v jednotlivé hvězdy, které se staly centry budoucích galaxií. V dnešní době již nové galaxie nevznikají, protože v místech, kde by bylo dostatek hmoty, již vznikly. Přesto ale můžeme sledovat vývoj galaxií i dnes a to díky tomu, že pohled do vzdáleného vesmíru je v podstatě pohled do jeho minulosti. Při sledování velkého množství galaxií v různých vzdálenostech od Země pak můžeme sestavit model vývoje „typické“ galaxie.

Většina galaxií ve vesmíru má spirální tvar⁶. Ten může být porušen například jejich srážkami, ale pozorování ukazují, že spirální tvar galaxií má tendenci se i po porušení znovu obnovovat. Takoveto vírové útvary podobné těm, které se vyskytují u turbulencí, zde lze pozorovat, protože, podobně jako u předchozích příkladů, i vesmírnou hmotu lze považovat za tekutinu (stejně jako písek ve větru) a má některé její typické vlastnosti. Proto se v něm objevují i podobné struktury.

3.7 Krystalizace

Výrazným příkladem samoorganizace je krystalizace látek⁷. Když látka přechází do pevného stavu, její atomy či molekuly většinou nezaujímají své pozice náhodně, ale uspořádávají se do krystalové mřížky, která je pro danou látku typická. Toto uspořádání je základním stavem látky, který odpovídá (lokálnímu) minimu energie. Skládá z bází, které jsou umístěny v uzlech nebo i mimo uzly mřížky. V krystalech se objevuje také několik druhů symetrií — translace, zrcadlení podle roviny, inverze, rotace kolem osy i jejich vzájemné kombinace. Pro popis krystalové struktury se využívá teorie grup a Schrödingerova rovnice. Celkem existuje 32 bodových grup, při aplikaci všech možných

⁵V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: FUCHS, Martin. Kdy a jak vznikly spirální galaxie?. Štefánikova hvězdárna [online]. 3.3.2005 [cit. 2014-12-05]. Dostupné z: <http://observatory.cz/news/kdy-a-jak-vznikly-spiralni-galaxie-.html>

⁶V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: URUBA, Václav. Turbulence [online]. ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2009 [cit. 2014-11-25]. Dostupné z: http://www.it.cas.cz/uruba/docs/Aero/Turbulence_45.pdf

⁷V této pasáži byly jako zdroj informací využity materiály získané během studia předmětu KFY/FPL1

kombinací symetrických zobrazení lze dosáhnout 230 různých prostorových grup. V přírodě bylo pozorováno 177 z nich. V praxi se používá dělení krystalických struktur podle Bravais, které rozlišuje čtrnáct typů prostorových mřížek uspořádaných v sedmi soustavách. Jsou to:

- krychlová (kubická) — celkem 3 typy
- šesterečná (hexagonální) — 1 typ
- čtverečná (tetragonální) — 2 typy
- kosočtverečná (rombická) — 4 typy
- klencová (trigonální) — 1 typ
- jednoklonná (monoklinická) — 2 typy
- trojklonná (triklinická) — 1 typ

Látka může krystalizovat buď pouze v jedné krystalové mřížce, nebo, pokud se jedná o sloučeninu několika prvků, může být krystal látky složen z více krystalových mřížek (pro každý prvek jedna), které sebou prostupují a tvoří tak složitou strukturu.

3.8 Chemické oscilační reakce a chemické vlny

Významným příkladem samoorganizace v oblasti chemie je Bělousova-Žabotinského reakce⁸. Jedná se o cyklickou chemickou reakci, ve které se pravidelně střídají tři stavy — oxidace katalyzátoru, jeho zpětná redukce a vzájemná reakce a spotřeba vzniklých produktů. Tento jev poprvé objevil Boris Pavlovič Bělousov, který zkoumal Krebsův cyklus a vznik chemické energie v metabolismu organismů a chtěl je napodobit v laboratorních podmínkách. Pro svůj pokus použil jiné látky, než jaké se reakce účastní v metabolismu (kyselinu citronovou, bromid draselný, kyselinu sírovou a katalyzátor na bázi iontů ceru). Po spuštění reakce začal roztok oscilovat mezi bezbarvým a žlutým stavem. Tento objev zůstal dlouho bez odezvy a až o více než deset let později Anatolij Žabotinskij pokus zopakoval a změnami iontových činidel objevil velké množství variant.

⁸V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: BALÚCH, Pavel. Synergetika a samoorganizace v ekonomice [online]. Brno, 2012 [cit. 2014-11-18]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=51504. Diplomová práce. VUT v Brně.

K oscilaci v chemické reakci dochází samovolně⁹. Vliv na průběh oscilační reakce může mít míchání, i když se v pohledu na něj autoři různí. Vyskytují se názory, že mechanické míchání oscilace nijak neovlivňují, ale existují i opačné, že míchání oscilační jevy zmenšují, jelikož se ovlivňují disipativní jevy a při prudkém míchání pak mohou oscilace zcela zanikat vlivem turbulence. Dalším názorem je, že míchání (ani vzniklé turbulence) samo o sobě oscilační reakci neovlivňují, ale působí sekundárně zvýšením kontaktu reagující směsi se vzdušným kyslíkem. Vliv kyslíku na průběh oscilačních reakcí závisí především na použitých sloučeninách a jejich koncentracích a nelze obecně formulovat pravidlo chování při vyšší a nižší koncentraci kyslíku. Pokud se naruší průběh reakce přidáním reagujících složek, systém zareaguje buď zastavením reakce a nebo naopak bouřlivou turbulentní reakcí.



Obrázek 5: Chemické vlny¹⁰

Vznikající struktury mohou být jak dynamického charakteru (turbulence), tak i statického charakteru, kdy vznikají Turingovy struktury¹⁰. Takzvané chemické vlny můžeme pozorovat v tenké vrstvě roztoku, v němž

⁹V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: PROKŠOVÁ, Jitka a Jan DURŠPEK. Chemické oscilační reakce. In: Nerovnovážná termodynamika a její aplikace [online]. 2007 [cit. 2014-11-20]. Dostupné z: <http://nelterm.kof.zcu.cz/chemie/oscilace/oscilace.html>

¹⁰V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: PROKŠOVÁ, Jitka a Jan DURŠPEK. Chemické vlny. In: Nerovnovážná termodynamika a její aplikace [online]. 2007 [cit. 2014-11-20]. Dostupné z: <http://nelterm.kof.zcu.cz/chemie/vlny/vlny.htm>; COVENEY, Peter V a Roger HIGH-

probíhá Bělousova-Žabotinského reakce (viz obrázek 5). Jednotlivé vlny se projevují jako lokální změny koncentrace šířící se prostředím. Vznikající samoorganizace je důsledkem reakčně-difuzního systému — chemické reakce, která je spojena se zákonitostmi difuze. Vlny vycházejí ze samovolně vznikajících či uměle vyvolaných (pomocí stříbrného drátku) iniciačních center a mohou mít různé podoby. Při Bělousově-Žabotinského reakci mají vlny tvar koncentrických kružnic kolem center. V nehomogenních prostředích vznikají dvouramenné spirální vlny (reverbatory). Vlivem nehomogenity dojde totiž k přerušení soustředné vlny a ta se nemůže na vzniklých koncích dále šířit. Celá vlna má ale tendenci dále růst a prodlužovat se a proto dochází na obou volných koncích k jejímu stáčení. Pokud je nehomogenita zároveň i iniciačním centrem, pak vznikají pouze jednoramenné spirály. Při setkání dvou rostoucích vln se obě vzájemně propojí a vytvoří jednu velkou vlnu. Dalo by se říci, že chemické vlny jsou v podstatě samoudržující se signály, které indukují lokální uvolňování energie v oblastech kolem jejich zdrojů. Indukovaná energie se spotřebovává při iniciaci stejných procesů v sousedních oblastech. Podobné signály se objevují nejen v chemických systémech, ale např. i v srdci, sítnici, či ekologických systémech.

V posledních letech se začínají objevovat způsoby využití Bělousovy-Žabotinského reakce jako zdroje energie, kdy v periodicky pulzujícím gelu jednotlivé polymery opakovaně prodlužují a zkracují svoji délku. Jev bývá přirovnáván k pulsování srdce, ale odezní po několika hodinách. Je zajímavé, že velmi podobné struktury (i když vzniklé na jiném principu), jaké se objevují u chemických vln lze pozorovat například u vlnění povrchu kapaliny či růstu kolonie jednobuněčných organismů.

3.9 Fraktální struktury

Fraktálové struktury nalézáme prakticky ve všech oblastech. Základní vlastnost fraktálů je soběpodobnost, to znamená, že při libovolném zvětšení je daná část fraktálu podobná celku¹¹. Fraktály mohou být výsledkem matematické konstrukce. Jejich struktura je potom naprosto přesná a při libovolném

FIELD. Mezi chaosem a řádem: hranice komplexity: hledání řádu v chaotickém světě. Vyd. 1. Praha: Mladá fronta, 2003, 428 s., [8] s. barev. obr. příl. Kolumbus. ISBN 80-204-0989-0.

¹¹V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: VILÍMEK, Radek. Deterministický chaos v prostředí Web-Mathematica [online]. Zlín, 2007 [cit. 2014-12-07]. Dostupné z: https://dspace.k.utb.cz/bitstream/handle/10563/3911/vil%C3%ADmek_2007_dp.pdf?sequence=1. Diplomová práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.

zvětšení nejen podobná, ale totožná s celkem, jejich dimenze je neceločíselná a mohou mít zajímavé vlastnosti, jako je například nekonečná délka či povrch přičemž zabraný prostor je jednoznačně vymezen. Fraktální vlastnosti vykazují kupříkladu i podivné atraktory, o kterých byla zmínka výše, nebo bifurkační diagram, který znázorňuje chování logistické rovnice. Kromě těchto přesných matematickými rovnicemi vyjádřitelných fraktálů existuje celá řada struktur, které by se daly označit jako přibližné či náhodné fraktály, tedy struktury, které při libovolném zvětšení nejsou s celkem zcela totožné, ale jsou mu statisticky podobné. Uspořádání do takovýchto struktur můžeme pozorovat hojně v přírodě, například u větvení stromů, květenství rostlin, uspořádání listů, rostoucí kolonie bakterií, korálových útesů, žilnatiny listů, ulit hlemýžďů, sněhových vloček či struktury plic. Pokud nechceme modelovat systém jako takový, který by zahrnoval veškeré fyzikální, chemické či biologické zákonitosti působící v systému, problém se značně zjednoduší. Díky fraktálním vlastnostem je možno vzhled některých přírodních útvarů i přes jejich velkou složitost relativně jednoduše a přesně modelovat. Pro tento způsob modelování se vžil název fraktálová komprese, protože množství dat potřebných pro vytvoření modelu se radikálně redukuje.

3.10 Chování kolonie živočichů

U početných kolonií živočichů lze pozorovat samoorganizované chování¹¹. Pohyb jednotlivce v hejnu není řízen žádnou nadřazenou autoritou či globálním plánem, řídí se pouze několika jednoduchými pravidly, jako je soudržnost, zařazení nebo oddělení, které mají svůj biologický význam. Modely založené na těchto pravidlech bývají velmi přesné a lze jimi dosáhnout popisu i velmi složitěho a komplexního chování. Toto chování lze pozorovat například u hejna ryb, ptáků nebo kolonie mravenců, ale i u kolektivního chování lidí, na akciovém trhu nebo u změn v orientaci spinů ve feromagnetických látkách.

3.11 Životní cykly

Jedním z nejjednodušších popisů chaotického chování je logistická rovnice, která byla vytvořena pro modelování chování živočišných druhů v přírodě¹². Rovnice předpokládá uzavřený systém (v návaznosti na uzavřené teritorium obývané danými společenstvími), ve kterém se vyskytují na sobě

¹²V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: PROKŠOVÁ, Jitka a Jan DURŠPEK. Životní cyklus hlenek. In: Nerovnovážná termodynamika a její aplikace [online]. 2007 [cit. 2014-12-09]. Dostupné z: <http://nelterm.kof.zcu.cz/biologie/rds/rds.htm>

závislé druhy. Nejjednodušší případ představuje závislost dvou druhů — predátorů a kořisti. Situace bude následující — po nasazení predátorů i kořisti do prostředí se začnou oba druhy množit. Vzrůstající počet predátorů ale bude mít stále větší nároky na potravu, což zapříčiní rychlý úbytek kořisti. Po překročení kritické hranice již nestačí populace kořisti uspokojit potřebu predátorů a ti proto začnou hladovět a vymírat. Z toho důvodu se začne populace kořisti opět množit, protože již nebude tolik lovena. Nová hojnost kořisti způsobí opětovný nárůst počtu predátorů. Tento cyklus se bude stále periodicky opakovat a bude mít podobu dvou po sobě jdoucích vln, každá představující populaci jednoho z druhů. Logistickou rovnici poprvé sestavil a zkoumal biolog Robert May a objevil, že s její pomocí lze modelovat jak takto jednoduché, tak i velmi složité chaotické systémy. Chování logistické rovnice lze znázornit pomocí bifurkačního grafu, který má vlastnosti fraktálu.

Životní cykly v rámci jednoho druhu můžeme sledovat v přírodě na různých příkladech, mezi něž patří například mechrosty nebo kapradiny (cykly s uplatněním rodozměny — střídání pohlavní a nepohlavní generace). Velmi zajímavý životní cyklus mají hlenky, jednobuněčné organismy řadící se do říše hub, které žijí v půdě nebo na rozkládajících se organických zbytcích. Skládá se ze dvou fází. První z nich je fáze trofická, kdy hlenky existují ve formě jednotlivých buněk, které mohou být buď nezávislé nebo se shlukovat v těsné skupiny či vytvořit mnohojaderné buňky. Druhá fáze je reprodukční a nastává většinou při nedostatku potravy. Shluky buněk se začnou zvětšovat, až dosahují počtu okolo 100 000 jedinců. V těchto početných skupinách se začnou buňky diferencovat na tři funkčně odlišné typy. Tímto způsobem vznikne „jedinec“, který je schopen koordinovaného pohybu, takzvaný stav „slimáka“. Pokud „slimák“ nalezne místo s ideálními životními podmínkami, dochází k usednutí a k vytvoření plodničky, ve které začnou vznikat spory. Spory se začnou uvolňovat a vzniká z nich nová generace buněk v trofické fázi.

Z pohledu samoorganizace je nejzajímavější částí cyklu vytvoření jedince z jednotlivých buněk tak, že je schopen koordinovaného pohybu a cíleného jednání. Proces shlukování je řízen katalyzátorem cAMP, který buňky začnou produkovat z ATP (adenosin trifostát sloužící jako zdroj energie v buňce) při nedostatku potravy. Zvýšená koncentrace cAMP vyvolává pohyb okolních buněk k tomuto místu a navíc produkci dalšího cAMP v nich. Zároveň se zpětně obnovuje ATP v buňkách. Jedná se tedy o autokatalytickou cyklickou reakci, která se šíří prostředím v koncentračních vlnách. Tyto vlny jsou analogickým příkladem výše zmíněných chemických vln a způsobují i stejný vizuální efekt. Dalšími autokatalytickými reakcemi se ve vzniklém shluku objeví funkční diferenciace buněk, která spočívá v tvorbě různých

genů. Ty poté odpovídají za vytvoření různých částí plodničky a spor.

3.12 Biorytmy

Samooorganizaci můžeme sledovat i sami na sobě a to ve formě různých biorytmů, kterými se náš organismus řídí. Ve většině případů se jedná o oscilace hladin enzymů, které následně vyvolávají pozorovatelné projevy¹³.

Poprvé byla oscilace u živočišných druhů sledována při glykolýze (buněčné dýchání). Každá buňka má svůj cyklus dýchání, ve skupinách buněk se ale periodické projevy oscilace při glykolytické reakci všech buněk dokonale synchronizují. Tyto reakce byly pozorovány na různých buňkách a za rozdílných podmínek, předpokládá se tedy, že glykolytické oscilace nejsou závislé na biologickém stavu buněk. Enzym uplatňující se při glykolýze je fosfofruktokináza.

Vnitřní rytmy organismů, často nazývané biologické hodiny, mohou být velmi různorodé, s rozdílnými periodami (nejčastěji ale cirkadiální) a projevují se opakováním specifických dějů a funkcí. Základ těchto periodických dějů je až u genetické informace v DNA, podle které se pomocí transkripce a posléze translace vytváří proteiny. Oscilace se objevují při produkci kolísajícího množství proteinů odpovídajících určitým genům, což pak způsobí ony změny funkcí či struktury. Aby byly oscilace možné, musí všechny organismy obsahovat takzvaný pacemaker, nositele oscilací s danou periodou, podle něhož se biorytmy řídí. Pacemaker osciluje i když se nachází v prostředí bez pravidelných změn a jeho chování většinou nezávisí na výkyvech prostředí, může ale být ovlivněn výjimečnými silnějšími podněty, jako je třeba osvit. Při jeho zničení se organismus stane arytmičtým, může však být znova obnoven např. implantací. U člověka se pacemaker nachází v hypotalamu.

Kvůli velké složitosti se oscilace v živých systémech zkoumají na jednodušších organismech s krátkým životním cyklem, jako je octomilka či chlebová plíseň. U octomilek byly pozorovány cirkadiální rytmy v pohybové aktivitě a při líhnutí kukel, které probíhá vždy v ranních hodinách, u chlebové plísně cyklická produkce spor. U člověka se projevuje velké množství cyklů s různými délkami period od roků (stárnutí, sezónní cykly), přes měsíce (menstruační cyklus žen), dny (spánek, tělesná teplota, produkce některých hormonů)

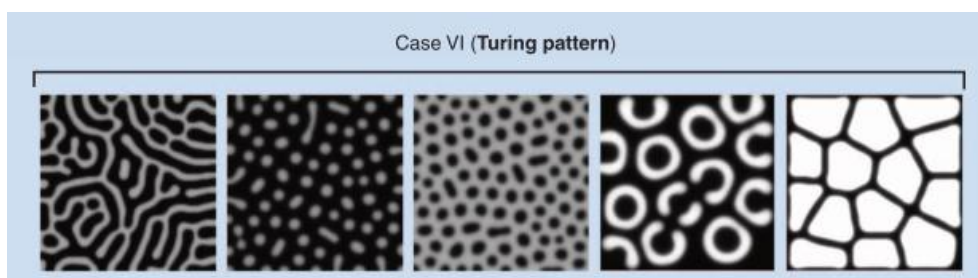
¹³V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: PROKŠOVÁ, Jitka a Jan DURŠPEK. Biochemické oscilace. In: Nerovnovážná termodynamika a její aplikace [online]. 2007 [cit. 2014-12-12]. Dostupné z: <http://nelterm.kof.zcu.cz/biologie/eo/eo.htm>

až po zlomky sekund (biochemické a neurofyziologické děje).

3.13 Skvrny na zvířecí srsti

V živé přírodě je pro mě jedním z nejzajímavějších případů samoorganizace vznik struktur na zvířecí kůži či srsti nebo na schránkách měkkýšů, takzvaná morfogeneze (viz obrázek 6). Vznik těchto struktur z matematického hlediska zkoumal Alan Turing¹⁴. Jedná se (podobně jako u chemických oscilací) o reakčně-difuzní systém. Díky tomu, že Alan Turing nebyl biolog, ale matematik, měl na celou problematiku jiný úhel pohledu, než jeho předchůdci snažící se objasnit mechanismy vzniku vzorů na kůži zvířat. Věřil, že celý problém lze vyjádřit matematickými rovnicemi. Základním předpokladem je přítomnost dvou rozdílných chemických látek (aktivátoru a inhibitoru) rovnoměrně rozložených v určitém prostoru vlivem difuze, tzv. morfogenů. Vzájemná reakce aktivátoru a inhibitoru je schopná vyvolat místní změny v koncentraci obou látek a je závislá na čtyřech proměnných pro každou z nich — rychlosti produkce, rychlosti zániku, rychlosti difuze a síle aktivační respektive inhibiční reakce. Turingův model je schopen popisovat vznik a vývoj vzorů, aniž by musel nutně znát jejich výslednou podobu, která po určitém časovém úseku vznikne, nebo konkrétní počáteční fluktuaci. Pouhými změnami parametrů v tomto jediném modelu lze docílit velmi odlišných vzorů, které silně evokují ty, které můžeme pozorovat v přírodě. Někteří biologové považují Turingův model za nesprávný, protože nemá základ v biologických faktech a není dostačující pro některé případy, u nichž nelze předpokládat, že se skutečně chovají jako reakčně-difuzní systémy. Nicméně obecně panuje názor, že i když takové případy existují a není ani zcela jasné, zda reakčně-difuzní systémy vůbec jsou biologicky relevantní, pro modelování mnoha přírodních vzorů Turingův model použít lze a shoduje se i s experimentálními výsledky. Turingův model byl zkoumán po dlouhou dobu a byly navrženy i jeho variace, například s přidáním proměnnou odpovídající změně velikosti prostoru nebo modely systémů na principu aktivátor-aktivátor.

¹⁴V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: CABLE, Kele W. Alan Turing's Reaction-Diffusion Model – Simplification of the Complex. *Kestrels and Cerevisiae* [online]. December 1, 2010 [cit. 2014-12-13]. Dostupné z: <http://phylogenous.wordpress.com/2010/12/01/alan-turings-reaction-diffusion-model-simplification-of-the-complex/>; COVENEY, Peter V a Roger HIGHFIELD. *Mezi chaosem a řádem: hranice komplexity: hledání řádu v chaotickém světě*. Vyd. 1. Praha: Mladá fronta, 2003, 428 s., [8] s. barev. obr. příl. Kolumbus. ISBN 80-204-0989-0.



Obrázek 6: Turingovy struktury na zvířecí srsti¹⁴

3.14 Výskyt Voronoi struktur v přírodě

Jedním z nejčastějších vzorů, které v přírodě vznikají, je Voronoi struktura¹⁵. Nalezneme ji například u žiraf a želv, ale i na mnoha dalších místech, jako jsou křídla vážek, žilnatina listů, praskliny ve vysušené půdě, včelí plástve, pavučiny, Bénardova-Marangoniova nestabilita a další. Vznik těchto struktur může mít různé fyzikální, chemické či biologické příčiny a modely systémů, kde vznikají, mohou být různé (některé z nich byly popsány výše). Ovšem pokud nechceme modelovat systém jako takový, ale pouze výslednou strukturu, problém se značně zjednoduší. Podobně jako u fraktálů, i Voronoi struktury lze generovat pomocí jednoduchých pravidel, jejichž základem je soubor generátorů. Každý bod nacházející se uvnitř buňky má nejkratší vzdálenost právě k jejímu generátoru, každý bod tvořící hranici buněk má nejkratší vzdálenost právě ke dvěma generátorům a uzlové body mají nejkratší vzdálenost ke třem a více bodům, které leží na kružnici se středem v uzlovém bodě. Množství potřebných dat pro vytvoření modelu (vzhledu) se ak velmi redukuje.

3.15 Ekonomie

Stejně jako v jiných vědních oborech, i v ekonomii existují systémy s dostatečnou energií pro vznik a šíření vln a cyklického chování, jsou jimi kapitálové a finanční trhy, růst a konkurenční boj společností, burza¹⁶. V každém hospodářském cyklu se objevují vždy čtyři fáze — dno (deprese), expanze, vrchol a recese. Elliotovu vlnu, která popisuje vývoj ekonomiky, se

¹⁵V této pasáži byly jako zdroj informací využity materiály získané během studia předmětu KIV/VAM

¹⁶V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: BALÚCH, Pavel. Synergetika a samoorganizace v ekonomice [online]. Brno, 2012 [cit. 2015-02-06]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=51504. Diplomová práce. VUT v Brně.

stavil R. N. Elliot po zkoumání dat získaných z New Yorské burzy ve 30. a 40. letech minulého století a později se u ní zjistil fraktální charakter. Spouštěcí faktory ekonomických cyklů jsou zejména vnějšího charakteru, jako např. války, politické a finanční krize či surovinové krize. Mezi vnitřní spouštěcí faktory patří např. nedostatečná spotřeba, nadměrné investice, technologie, nedostrategické či přebytek peněz v ekonomice.

V minulosti bylo představeno množství různých teorií o cykličnosti hospodářských systémů, nejstarší již ve Starém Zákoně. Psychologická teorie pracuje s myšlenkou toho, že se ve společnosti objevuje optimistická či pesimistická nálada, která reaguje na predikce vývoje ekonomiky a tím je začne naplňovat. Teorie J. M. Keynesse zcela vylučuje samoorganizaci s tím, že každá ekonomika může z vnitřních příčin upadnout do krize, ale samoorganizační procesy ji nejsou schopny uvést zpět do stabilního stavu a musí tedy cíleně zasáhnout vláda. Teorie o politickém hospodářském cyklu zkoumá sílu vlivu kroků vlády na počátku funkčního období, kdy se snaží splnit své předvolební sliby, a na konci, kdy pak nastanou jejich důsledky. Nejznámější a nejucelenější je teorie Josefa Aloise Schumpetera, která je založena na dynamickém přístupu k hospodářským cyklům. Poukazuje na funkci podnikatele na trhu, který naruší rovnováhu systému tím, že ne za vidinou inovace, ale za vidinou zisku, využije mezeru na trhu a začne distribuovat nový artikl a tím způsobí krach distributorů podobného zboží na nižší úrovni a vznikne krize. Po čase se systém opět ustálí na vyšší úrovni. Schumpeter tak vyřkl teorii, že za každým ekonomickým cyklem stojí inovace, na jejíž významnosti také závisí míra jejího vlivu. A protože každá inovace je jedinečná, nemohou být ani žádné dva ekonomické cykly zcela totožné.

4 Vybrané matematické modely

V této kapitole bych ráda stručně představila některé rovnice, které se používají pro modelování systémů, v nichž může nastat samoorganizace. O některých z nich byla zmínka již v předchozí kapitole.

4.1 Reakčně-difuzní model

Jedním ze základních zákonů, podle kterých se řídí přírodní procesy, je difuzní zákon popsaný difuzní rovnicí. Tato rovnice popisuje přirozenou tendenci látek, částic či energie rozptýlovat veškeré shluky rovnoměrně po prostoru a dosáhnout tak rovnovážného stavu. Základní tvar difuzní rovnice je

$$\frac{df}{dt} = D\Delta f,$$

kde D je difuzní koeficient a Δ je Laplaceův operátor. V praxi se difuzní rovnice většinou nevyskytuje v tomto tvaru, ale v kombinaci s dalšími funkcemi popisujícími další vlastnosti jevu. To lze obecně zapsat jako

$$\frac{df}{dt} = D\Delta f + F(f).$$

Funkce $F(f)$ může difuzi buď podporovat a nebo mít protichůdný efekt. Aby mohla vzniknout samoorganizace, je nutné, aby $F(f)$ byla strukturotvorným činitelem. Podle tvaru funkce $F(f)$ můžeme rozlišovat množství speciálních modelů, jejichž základ tvoří difuzní rovnice. Jedním z nejznámějších modelů založených na difuzní rovnici je Turingův model, který se využívá pro popis vzniku struktur na kůži a srsti živočichů. Skládá se ze dvou diferenciálních rovnic, které popisují vzájemný vztah dvou chemických činitelů — aktivátoru a inhibitoru — přítomných v kůži či srsti živočichů. Tvar modelu je¹⁷

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= F(u, v) - d_u v + D_u \Delta u \\ \frac{dv}{dt} &= G(u, v) - d_v u + D_v \Delta v,\end{aligned}$$

kde $F(u, v)$ a $G(u, v)$ popisují produkci chemických činitelů a $d_u v$ a $d_v u$ jejich degradaci (dohromady tvoří strukturotvorný činitel modelu). Členy

¹⁷V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: CABLE, Kele W. Alan Turing's Reaction-Diffusion Model – Simplification of the Complex. Kestrels and Cerevisiae [online]. December 1, 2010 [cit. 2015-07-08]. Dostupné z: <http://phylogenous.wordpress.com/2010/12/01/alan-turings-reaction-diffusion-model-simplification-of-the-complex/>

$d_u v$, $d_v u$, D_u a D_v jsou konstanty.

Dalším modelem, který má základ v difuzní rovnici je Gray-Scottův model, který se používá pro modelování některých chemických reakcí vytvářejících zajímavé struktury. Jeho tvar je

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= D_u \Delta u - uv^2 + H(1 - u) \\ \frac{dv}{dt} &= D_v \Delta v + uv^2 + (H + k)v,\end{aligned}$$

kde H je konstanta. Gray-Scottův model se podobá Turingovu modelu, opět se jedná o vzájemné působení dvou chemických činitelů. Strukturotvorný činitel je v tomto případě tvořen členy $-uv^2 + F(1 - u)$ respektive $uv^2 + (F + k)v$.

Velmi často se difuzní rovnice používá při sestavování modelů popisujících populační dynamiku. V těchto modelech je reakční člen zastoupen výrazem popisujícím růst populace a difuzní člen pak popisuje její rozptyl¹⁸. Růst populace může být popsán různě, avšak nejčastěji se používá model exponenciálního růstu populace, kde $f(u) = au$, nebo logistického růstu populace $f(u) = au(1 - \frac{u}{K})$, kdy je nastavena horní mez. Populační modely se mohou sestavovat nejen pro jeden druh, ale existují i modely popisující vzájemný vliv a soužití více druhů. Nejznámějšími takovými modely jsou soutěživost, kdy dva druhy bojují o stejný druh potravy, dále symbióza popisující vzájemně prospěšné soužití dvou druhů a v neposlední řadě model predátora a kořisti, který popisuje nárůst a úbytek populace jednoho druhu v závislosti na nárůstu a úbytku populace druhého druhu. Poslední jmenovaný model má tvar

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy.\end{aligned}$$

Existuje mnoho dalších speciálních modelů, které obsahují difuzní člen, v této práci jsem uvedla jen některé z nejznámějších modelů.

¹⁸V této pasáži byla jako zdroj informací využita následující literatura: KUTTLER Christina. Reaction-Diffusion equations with applications[online]. Sommersemester 2011 [cit. 2015-07-08]. Dostupné z: http://www-m6.ma.tum.de/kuttler/script_reaktdiff.pdf

4.2 Navierovy-Stokesovy rovnice

Mezi významné matematické modely patří bezesporu rovnice popisující proudění tekutin⁶. Jedná se o systém s velkým počtem stupňů volnosti. Kvůli velké složitosti bylo studium takových systémů v minulosti velmi složité, protože studovat je pomocí lineárních modelů (které byly v minulosti téměř výhradně používány) lze jen velmi obtížně a s velkými nepřesnostmi. K důkladnému studiu je potřeba popsat systém pomocí nelineárního modelu. Veškeré dynamické (nikoliv termodynamické) děje probíhající v tekutinách je možné popsat systémem nelineárních rovnic, které se nazývají Navierovy-Stokesovy rovnice. Jsou aplikovatelné na tekutiny, které splňují předpoklady, že tekutina, se kterou pracujeme, je spojitá a Newtonovská. Jedná se o matematický model, který se skládá z nelineárních parciálních diferenciálních rovnic a který neumíme přesně řešit i přes jeho formální jednoduchost. Ale pokud přijmeme vhodná zjednodušení, je možno model řešit jen s relativně malou nepřesností. Pomocí Navierových-Stokesových rovnic můžeme popisovat jak klidné laminární proudění, tak i proudění, při kterém vznikají turbulence. N-S rovnice můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 u,$$

kde $\nu\nabla^2 u$ je vliv vazkosti (ν je kinematická vazkost), $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ je gradient tlaku a $(u\nabla)u$ charakterizuje konvekci a jedná se také o člen, který způsobuje nestabilitu modelu. Proti němu působí i v rovnici přítomný difuzní člen. Právě nelineární členy jsou odpovědné za vlastnosti řešení, které můžeme charakterizovat jako fraktální a při jeho popisu se využívají termíny jako deterministický chaos a samoorganizace či vznik koherentních struktur. Dalšími důležitými vlastnostmi řešení jsou jeho lokálnost a symetrie. Hranice, kdy se ze stabilního systému stává nestabilní, tedy kdy bude proudění laminární a kdy se již začnou objevovat turbulence, je určena hodnotou bezrozměrného Reynoldsova čísla. Můžeme ho vyjádřit jako

$$Re = \frac{vL}{\nu}$$

a charakterizuje vztah mezi rychlostí proudění a kinematickou viskozitou tekutiny. Pokud je Re malé (řádově $Re < 2000$), je proudění laminární. Pokud je Re velké ($Re > 4000$), je proudění turbulentní. V přechodové oblasti se objevují jen málo výrazné víry.

Úplného popsání proudění nestlačitelné tekutiny dosáhneme pomocí soustavy N-S rovnic spolu s rovnicí kontinuity. Vzhledem k tomu, že v praxi

jsou tyto soustavy velmi těžko řešitelné, přistupuje se k různým zjednodušením. Jedním z nich je úprava matematického modelu pro výpočet statisticky středních stavů⁶. Poprvé provedl tato zjednodušení v roce 1894 Reynolds a proto jsou rovnice označovány jako Reynoldsovy. Získají se tak, že se jednotlivé členy N-S rovnice ve složkovém tvaru rozloží na časově středovou složku a fluktuaci (tzv. Reynoldsův rozklad). Po úpravách dostaneme Reynoldsovy rovnice ve tvaru

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i},$$

kde čárkované členy jsou fluktuace a členy s pruhem jsou časově střední složky (čárkovaný člen s pruhem je časově střední složka fluktuace).

4.3 Lorenzův model

Jedním z prvních významných problémů týkajících se proudění tekutin (konkrétně vzduchu) a vzniku turbulencí, který se stal předmětem studia, byl tzv. Lorenzův systém⁶. Edward Lorenz vytvořil v 60. letech minulého století matematický model zemské atmosféry, na kterém zkoumal vývoj počasí. Během svých výpočtů narazil na efekt, který později dostal název efekt motýlích křídel. V jeho případě se jednalo o to, že pouhé zaokrouhlení počáteční podmínky na 3 platná místa měla na výsledek simulace výrazný vliv a objevil tak nelineární chování matematického modelu. Lorenzův model atmosféry byla soustava celkem dvanácti diferenciálních rovnic, které reprezentovaly změny tlaku, teploty, síly větru apod. V roce 1963 byl tento model zjednodušen na třídimenzionální Lorenzův systém, který má tvar

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ra(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + Pr x - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz. \end{aligned}$$

Tento matematický model zachycuje ve zjednodušené formě základní vlastnosti konvektivního proudění v atmosféře, která je zahřívána zespodu zemským povrchem a svrchu je ochlazována. Tento model tedy zahrnuje i jev známý jako Rayleigh-Bénardova nestabilita, který byl popsán v předchozí kapitole. Kvůli zjednodušení modelu je ovšem model i značně idealizovaný (například pokud se jedná o okrajové podmínky). V modelu x představuje

rotaci částice tekutiny, y rozdíl teplot stoupající a klesající tekutiny a z odchylku svislého profilu teploty od lineárního. Ra a Pr jsou parametry, Rayleighovo a Prandtlovo číslo, a b představuje šířku jedné Bénardovy buňky.

Matematických modelů existuje nespočetné množství a mnoho z nich je významných. Pro tuto práci jsem vybrala a stručně popsala důležité matematické modely, ve kterých může nastat samoorganizace, jež je předmětem zájmu této práce. Následující kapitoly se již budou věnovat jen jednomu ze zde představených modelů, konkrétně reakčně-difuznímu modelu, a jevu vzniku nestability a samoorganizace v tomto systému.

5 Podmínky vzniku samoorganizace

Základní mechanismus vzniku samoorganizace je společný všem dynamickým systémům bez ohledu na jejich složitost. Proto se v této kapitole zaměřím na jeden obecný model, se kterým budu pracovat. Jak již bylo řečeno výše, hranice, kdy se ze stabilního systému stává nestabilní, bývá určena kritickou hodnotou bezrozměrného čísla charakterizujícího systém. Mým cílem bude tuto hranici nalézt, neboli určit podmínky, za kterých se vytvoří samoorganizace v systému.

Ke vzniku samoorganizace je v systému potřeba účast dvou činitelů, destrukturalizačního a strukturotvorného. První jmenovaný je v systémech zastoupen většinou difuzí, druhým bývá síla působící na všechny subsystemy daného systému a může být velice různý (gravitační síla, mechanická síla, chemické reaktivní síly apod.). Obecný model, se kterým budu v následujících výpočtech pracovat, je určen rovnicí

$$\frac{df}{dt} = D\Delta f + F(f),$$

kde $D\Delta f$ je difuzní člen s difuzním koeficientem D a Laplaceovým operátorem Δ a $F(f)$ je příslušná strukturotvorná funkce. Celý výpočet budu provádět pro $f(x, y, t)$ závislé na dvou prostorových a jedné časové proměnné.

5.1 Počáteční a okrajové podmínky

Počáteční podmínka může být velmi různá, její konkrétní tvar závisí na daném systému. Obecně jí můžeme označit jako $f_0(x, y, 0)$. Okrajové podmínky systému zajišťují napojení systému na okolí. Pomocí okrajových podmínek by bylo možné systému vnutit uspořádání. V tomto případě ale předpokládáme, že tomu tak není, protože chceme zkoumat spontánní vznik samoorganizace. V našem případě budeme předpokládat existenci homogenního řešení. Toto řešení může být stabilní nebo nestabilní. Protože naším cílem v této práci bude zkoumat stabilitu daného řešení, zvolíme počáteční podmínku jako homogenní funkci, tzn.

$$\frac{df_0}{dt} = D\Delta f_0 + F(f_0).$$

Pokud přijmeme předpoklad, že počáteční podmínka je konstantní v prostoru (v systému nejsou v čase $t = 0$ struktury), potom pro dílčí členy modelu platí

$$\begin{aligned}\frac{df_0}{dt} &= 0, \\ D\Delta f_0 &= 0.\end{aligned}$$

Z toho plyne, že i

$$F(f_0) = 0.$$

Z toho můžeme usuzovat, že libovolná konstantní funkce je řešením a tedy že každá konstantní funkce může být počáteční podmínkou.

5.2 Linearizace modelu

Vyvinutí struktury v nějakém systému je umožněno zpravidla jeho nestabilitou, to znamená, že malá fluktuace se vlivem nestability neutlumí, ale naopak se rozšíří po celém systému. Budeme zkoumat, zda je homogenní řešení, které jsme si zvolili jako počáteční podmínku $f_0(x, y, 0)$ stabilní či nikoliv. To, jestli je počáteční podmínka stabilním řešením zjistíme tak, že do systému zavedeme malou poruchu vyjádřenou funkcí $h(x, y, t)$, pro kterou platí

$$\frac{|h|}{|f_0|} \ll 1.$$

Za proměnnou f potom dosadíme počáteční podmínku s poruchou h a sledujeme vývoj v čase. Rovnice systému po zavedení poruchy bude mít tvar

$$\frac{d(f_0 + h)}{dt} = D\Delta(f_0 + h) + F(f_0 + h),$$

kde

$$f(x, y, t) = f_0(x, y, 0) + h(x, y, t)$$

je počáteční podmínka se zavedenou poruchou h . Díky tomu, že pracujeme s konstantní počáteční podmínkou f_0 , můžeme jednotlivé členy rovnice vyjádřit následujícím způsobem:

$$\frac{d(f_0 + h)}{dt} = \frac{df_0}{dt} + \frac{dh}{dt} = 0 + \frac{dh}{dt},$$

$$\Delta(f_0 + h) = \Delta f_0 + \Delta h = 0 + \Delta h.$$

Model systému pak bude mít tvar

$$\frac{dh}{dt} = D\Delta h + F(f_0 + h),$$

kde $F(f_0 + h)$ je nelineární člen systému. Abychom získali lineární model systému, je třeba linearizovat tento nelineární člen. Pro linearizaci použijeme Taylorův rozvoj prvního stupně. Linearizaci provedeme v okolí rovnovážné polohy f_0 a jako odchylku Δf si zvolíme h .

$$F(f_0 + h) \approx F(f_0) + \frac{dF(f)}{df}(f - f_0),$$

kde A je příslušná derivace. Protože $F(f_0) = 0$ a $f - f_0 = h$, získáváme

$$F(f_0 + h) \approx Ah.$$

Po dosazení do původní rovnice tak dostáváme linearizovaný model systému, který popisuje vývoj zavedené poruchy h v čase

$$\frac{dh}{dt} = D\Delta h + Ah.$$

5.3 Porucha vyjádřená jako Fourierova řada

Pro nalezení podmínek vzniku nestability je třeba sledovat vývoj získané linearizované rovnice v čase a hledat řešení v závislosti na různých parametrech. Nejprve provedeme celý výpočet pouze pro jednu prostorovou proměnnou. Obdobným způsobem pak budeme postupovat při výpočtu pro dvě prostorové proměnné.

Nejprve musíme zvolit tvar funkce h vyjadřující poruchu. Budeme uvažovat, že funkce h je obecná periodická funkce (nad oblastí jedné periody tak lze uvažovat libovolný tvar h). V jedné prostorové proměnné lze libovolnou periodickou funkci, která splňuje Dirichletovy podmínky, vyjádřit jako kombinaci funkcí sinus a cosinus. Toto vyjádření se nazývá Fourierova řada a má tvar

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

kde a_k a b_k jsou amplitudy funkcí sinus a cosinus. Vzhledem k tomu, že funkce h vyjadřující poruchu je závislá také na čase, je třeba do předpisu zahrnout i časovou proměnnou. Toho dosáhneme tím, že budeme uvažovat koeficienty $a_0(t)$, $a_k(t)$ a $b_k(t)$ závislé na čase. Funkci h tedy zvolíme takto

$$f(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t)\cos(kx) + b_k(t)\sin(kx)).$$

Po dosazení funkce h v tomto tvaru do linearizované rovnice můžeme rovnici začít řešit. Jednotlivé členy vyjádříme jako

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-k^2 a_k(t)\cos(kx) - k^2 b_k(t)\sin(kx)) \right],$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} \frac{da_0(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{da_k(t)}{dt} \cos(kx) + \frac{db_k(t)}{dt} \sin(kx) \right).$$

Po dosazení zpět do linearizované rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{da_0(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{da_k(t)}{dt} \cos(kx) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{db_k(t)}{dt} \sin(kx) \right) = \\ & = -D \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 a_k(t)\cos(kx)) - D \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 b_k(t)\sin(kx)) + \\ & + A \frac{a_0(t)}{2} + A \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t)\cos(kx)) + A \sum_{k=1}^{\infty} (b_k(t)\sin(kx)). \end{aligned}$$

Rovnici můžeme upravit do přehlednějšího tvaru

$$\begin{aligned} & \left(\underbrace{\frac{1}{2} \frac{da_0(t)}{dt} - A \frac{a_0(t)}{2}}_{a'_0} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{da_k(t)}{dt} + Dk^2 a_k(t) - Aa_k(t) \right)}_{a'_k} \cos(kx) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{db_k(t)}{dt} + Dk^2 b_k(t) - Ab_k(t) \right)}_{b'_k} \sin(kx) \right] = 0, \end{aligned}$$

kde jsme si označili některé výrazy čárkovanými koeficienty. Pomocí nich lze rovnici přepsat následovně

$$a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos(kx) + b'_k \sin(kx)) = 0.$$

Jak je vidět, získali jsme Fourierův rozvoj nulové funkce. Tato rovnost může nastat pouze tehdy, jsou-li všechny koeficienty rovny nule. Získáváme tedy celkem tři podmínky, za nichž bude výše uvedená rovnost platit

$$a'_0 = \frac{1}{2} \frac{da_0(t)}{dt} - A \frac{a_0(t)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{da_0(t)}{dt} = Aa_0(t)$$

$$a'_k = \frac{da_k(t)}{dt} + Dk^2 a_k(t) - Aa_k(t) = 0 \Rightarrow \frac{da_k(t)}{dt} = a_k(t)(A - Dk^2),$$

$$b'_k = \frac{db_k(t)}{dt} + Dk^2 b_k(t) - Ab_k(t) = 0 \Rightarrow \frac{db_k(t)}{dt} = b_k(t)(A - Dk^2).$$

Žádná z podmínek není závislá na prostorových souřadnicích, sledujeme již pouhý vývoj amplitud v čase. Řešení podmínek hledáme ve tvaru exponenciály

$$a_0(t) = Ce^{At},$$

$$a_k(t) = b_k(t) = Ce^{(A-Dk^2)t}.$$

Aby nastala nestabilita, nesmí dojít k utlumení amplitud, to znamená, že obě výše uvedené exponenciální funkce musí být rostoucí. Exponenciální funkce je rostoucí, pokud je její exponent kladný. Pro první podmínku toto zjevně nastane pro $A > 0$. Pro druhou podmínku bude exponent kladný, pokud

$$A - Dk^2 > 0 \Rightarrow k^2 < \frac{A}{D} \Rightarrow |k| < \sqrt{\frac{A}{D}}.$$

Získali jsme dvě podmínky, při jejichž splnění se zavedená poruchová funkce $h(x, t)$ neutlumí, ale naopak se rozšíří po celém systému a vznikne samoorganizace. Musíme ale myslet na to, že jsme pracovali s poruchou vyjádřenou pomocí Fourierova rozvoje. Počítali jsme tedy pouze s případem, kdy je chybová funkce periodická. Nicméně, pokud se zaměříme pouze na oblast jedné periody, můžeme na této oblasti pomocí Fourierovy řady, jak již bylo řečeno dříve, popsat libovolný tvar funkce. Vzhledem k tomu, že jsme ve výpočtu používali funkce sinus a cosinus, pracovali jsme s periodou $\langle -\pi, \pi \rangle$.

5.4 Přechod k původním prostorovým souřadnicím

V předchozí podkapitole byl proveden výpočet podmínek vzniku samoorganizace na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ pro jednu prostorovou proměnnou. Jelikož obecně aplikujeme model na určitém intervalu $\langle a, b \rangle$, který lze po posunu počátku soustavy souřadnic vyjádřit jako $\langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \rangle$, kde L udává velikost plochy, na které model aplikujeme, musí se po vyřešení úlohy na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ provést transformace do původních souřadnic. Jedná se v podstatě pouze o změnu měřítka. Po přechodu k původním prostorovým souřadnicím dostaneme podmínky pro vznik samoorganizace na oblasti o velikosti L pro libovolnou poruchu vyjádřenou funkcí $h(x, t)$ nad touto oblastí.

Označíme si x' jako prostorovou proměnnou užívanou při výpočtu nad intervalem $\langle -\pi, \pi \rangle$ a x jako prostorovou proměnnou v původním intervalu $\langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \rangle$. Transformace mezi těmito proměnnými je

$$x = \frac{L}{2\pi}x'.$$

Obdobně označíme i k' nad intervalem $\langle -\pi, \pi \rangle$ a k nad intervalem $\langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \rangle$. Jejich transformační vztah můžeme odvodit jako

$$\cos(kx') = \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right) \Rightarrow k' = k\frac{2\pi}{L}.$$

Pomocí získaných transformačních vztahů již můžeme převést podmínky vzniku nestability nad oblast o velikosti L

$$|k'| < \sqrt{\frac{A}{D}} \Rightarrow |k|\frac{2\pi}{L_x} < \sqrt{\frac{A}{D}} \Rightarrow L_x > |k|2\pi\sqrt{\frac{D}{A}}.$$

Po přechodu k původním prostorovým souřadnicím jsme dostali podmínku (u podmínky $A > 0$ nebyla transformace nutná) pro vznik nestability na oblasti o velikosti L pro libovolný tvar funkce $h(x, t)$ nad touto oblastí. Získali jsme vztah, který určuje vzájemnou závislost mezi vznikem nestability a velikostí oblasti. Velikost oblasti potřebná pro vznik nestability je omezená zdola, to znamená, že pokud nebude L dostatečně velké, nestabilita se nerozvine. To můžeme pozorovat například při vzniku struktur na zvířecí srsti. Pokud je zvíře příliš malé, struktura se nevytvoří, ale pokud je dostatečně velké, struktura se vytvoří. Nejlépe patrný je tento jev na ocasech kočkovitých šelem, kdy v podélném směru je velikost dostatečná a tak se struktura vytvoří. V příčném směru je ale oblast pro vytvoření struktur příliš malá. Výsledkem je vznik pruhů.

5.5 Výpočet pro dvě prostorové proměnné

V předchozím výpočtu jsme zjišťovali podmínky vzniku nestability pro případ modelu závislého pouze na jedné prostorové proměnné. Obdobně můžeme postupovat, pokud chceme tyto podmínky zjistit pro model, kde $f(x, y, t)$ je závislá na dvou prostorových proměnných. Musíme přitom příslušně upravit funkci h , která vyjadřuje vnesenou poruchu. Funkci h budeme opět vyjadřovat pomocí Fourierovy řady, ovšem tentokrát nebudou jednotlivé koeficienty závislé pouze na čase, ale i na druhé prostorové proměnné. Zavedeme přitom zjednodušující podmínku a budeme předpokládat, že funkce h obsahuje pouze sinovou složku Fourierovy řady

$$h(x, y, t) = \frac{a_0(y, t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k(y, t) \sin(kx)).$$

Koeficienty $a_0(y, t)$ a $b_k(y, t)$ můžeme taktéž vyjádřit jako Fourierovy řady, tentokrát podle proměnné y . Jejich koeficienty budou závislé již pouze na čase. Opět předpokládáme nulové okrajové podmínky na okrajích peridy

$$b_k(y, t) = \frac{c_0(t)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (d_l(t) \sin(ly)),$$

$$a_0(y, t) = \frac{g_0(t)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (f_m(t) \sin(my)).$$

Po dosazení získáme poruchu vyjádřenou funkcí $h(x, y, t)$ v následujícím tvaru (poznámka: pokud bychom například předpokládali že má funkce h nulová okrajové podmínky, pak by byly členy a_0 , c_0 a g_0 nulové)

$$h(x, y, t) = \frac{g_0(t)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (f_{0m}(t) \sin(my)) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_{k0}(t)}{2} \sin(kx) \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (d_{kl}(t) \sin(ly) \sin(kx))$$

Po vypočítání derivace h podle času a Laplaceova operátoru můžeme dosadit do linearizovaného modelu systému a po úpravě dostaneme rovnici ve tvaru

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2} \frac{dg_0(t)}{dt} - A \frac{g_0(t)}{2}}_{g'_0} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{df_{0m}(t)}{dt} + Dm^2 f_{0m}(t) - Af_{0m}(t) \right)}_{f'_{0m}} \sin(my) \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{dc_{k0}(t)}{dt} + Dk^2 \frac{c_{k0}(t)}{2} - A \frac{c_{k0}(t)}{2} \right)}_{c'_{k0}} \sin(kx) \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{dd_{kl}(t)}{dt} + Dk^2 d_{kl}(t) + Dl^2 d_{kl}(t) - Ad_{kl}(t) \right)}_{d'_{kl}} \sin(ly) \sin(kx) \right] = 0.$$

Podobně jako ve výpočtu pro jednu prostorovou proměnnou, i zde jsme si některé výrazy označili čárkovanými proměnnými. Pomocí nich můžeme rovnici přepsat jako

$$g'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (f'_{0m}(t) \sin(my)) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c'_{k0}(t)}{2} \sin(kx) \right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (d'_{kl}(t) \sin(ly) \sin(kx)) = 0.$$

Můžeme pozorovat, že jsme získali Fourierův rozvoj nulové funkce, jehož koeficienty jsou taktéž Fourierovy rozvoje. Aby tato rovnost platila, musí být všechny čárkované koeficienty rovny nule. Dostáváme tedy čtyři rovnice, ze kterých budeme schopni vyjádřit podmínky vzniku nestability v systému. Stejným způsobem jako ve výpočtu pro jednu prostorovou proměnnou řešíme tyto čtyři rovnice a dostáváme řešení ve tvaru exponenciály

$$g_0(t) = C e^{At}, \\ f_{0m}(t) = C e^{(A-Dm^2)t}, \\ c_{0k}(t) = C e^{(A-Dk^2)t}, \\ d_{kl}(t) = C e^{(A-D(k^2+l^2))t}.$$

Z nich pak již získáme čtyři podmínky pro vznik nestability

$$A > 0, \\ |m| < \sqrt{\frac{A}{D}}, \\ |k| < \sqrt{\frac{A}{D}}, \\ (k^2 + l^2) < \frac{A}{D}.$$

Stejně jako v případě výpočtu pro jednu prostorovou proměnnou, i zde jsme výpočet prováděli nad intervalem $\langle -\pi, \pi \rangle$ pro obě prostorové proměnné. Musíme proto rovněž provést zpětnou transformaci nad intervaly $\langle -\frac{L_x}{2}, \frac{L_x}{2} \rangle$ respektive $\langle -\frac{L_y}{2}, \frac{L_y}{2} \rangle$. Transformační vztahy budou obdobné. Získáme celkem čtyři podmínky pro vznik nestability na oblasti o velikosti $L_x \times L_y$ pro libovolný tvar funkce $h(x, y, t)$ nad touto oblastí

$$A > 0, \\ L_y > m 2\pi \sqrt{\frac{D}{A}},$$

$$L_x > k2\pi\sqrt{\frac{D}{A}},$$
$$\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{l^2}{L_y^2} < \frac{1}{4\pi^2} \frac{A}{D}.$$

6 Problém stability v konkrétním případě

Poté, co jsme získali podmínky vzniku nestability v systému, je zapotřebí ověřit, zda je výsledek relevantní, jelikož jsme pracovali s linearizovaným modelem a do výpočtu tak byla vnesena chyba. Ověření na speciálním případě provedeme pomocí výpočtu a poté budeme porovnávat výsledky získané řešením nelinearizovaného modelu s podmínkami vzniku nestability získanými v předchozí kapitole. Nelinearizovaný model budeme řešit pomocí numerické metody s využitím diskretizace prostoru. Kvůli náročnosti výpočtu na množství dat a kvůli přehlednějšímu zobrazení výsledků budeme řešit model jen pro jednu prostorovou proměnnou. Okrajové podmínky volíme nulové a protože počáteční podmínka f_0 je konstantní, bude taktéž nulová. Budeme pracovat s modelem systému, kde zvolíme strukturotvorný člen jako

$$F(f) = \ln(|1 + f|).$$

Tvar funkce se musí zvolit tak, aby po vyjádření nebyl parametr A (který se rovná derivaci funkce $F(f)$ v bodě f_0) záporný a nevytlačila se tak možnost zisku nestabilního řešení. V našem případě bude parametr

$$A = \frac{1}{f_0 + 1}$$

a vzhledem k tomu, že $f_0 = 0$, tak $A = 1$. Získáme tedy podmínku vzniku nestability, kde je vyjádřen vztah mezi velikostí prostoru a koeficientem difuze D

$$L_x > |k|2\pi\sqrt{D}.$$

6.1 Numerický model

Nelinearizovaný model budeme řešit pomocí metody konečných diferencí. Nejprve je třeba diskretizovat prostor, na kterém budeme model aplikovat, v našem případě podél prostorové osy x a podél časové osy t . V nelinearizované rovnici, která má tvar

$$\frac{df}{dt} = D\Delta f + \ln(|1 + f|)$$

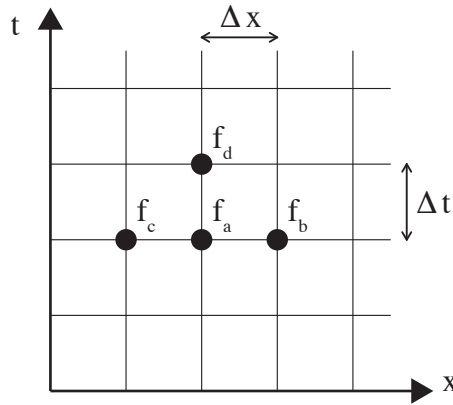
pak vyjádříme členy obsahující derivaci pomocí diferencí. Prostorovou derivaci nahradíme centrálním diferenčním podílem druhého řádu

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2}(f_b + f_c - 2f_a).$$

Časovou derivaci vyjádříme pomocí diferencí jako

$$\frac{df}{dt} \cong \frac{f_d - f_a}{\Delta t}.$$

Δx a Δt udávají parametry mříže vzniklé diskretizací prostoru ve směru osy x respektive t a f_a, f_b, f_c a f_d jsou body na mříži, jejichž vzájemná poloha je vidět na obrázku 7.



Obrázek 7: Rozdělení prostoru a označení bodů mříže

Po dosazení získáváme

$$\frac{f_d - f_a}{\Delta t} = D \frac{1}{\Delta x^2} (f_b + f_c - 2f_a) + \ln(|1 + f_a|).$$

Tento numerický model nám umožňuje vypočítat vždy jeden bod mříže pomocí tří bodů z předcházejícího časového kroku. Úpravou tak získáváme iterační rovnici ve tvaru

$$f_d = f_a + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (f_b + f_c - 2f_a) + \Delta t \ln(|1 + f_a|).$$

Pomocí této rovnice můžeme po zadání počáteční podmínky s vnese- nou fluktuací (která představuje první iteraci) vypočítat další časové kroky (každý po jednotlivých bodech) a pozorovat tak chování modelu v konečném množství časových kroků. Po získání iterační rovnice je již možno přistoupit k vytvoření algoritmu a samotné simulaci. Pro vytvoření programu jsem využila matematický software Octave, který se svým výpočetním prostředím podobá programu Matlab. Octave jsem zvolila zejména proto, že je volně dostupný a svou funkčností se téměř plně vyrovná Matlabu, ke kterému nemám přístup. Algoritmus výpočtu se skládá ze dvou vnořených for cyklů, v prvním z nich se krokuje čas, ve druhém poloha v daném časovém kroku.

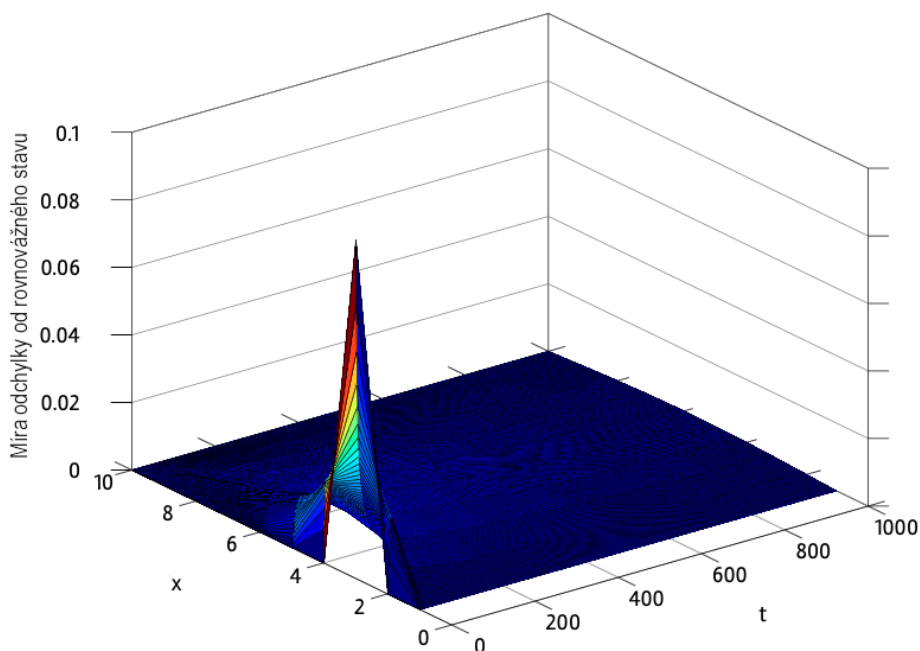
Mříž, ve které je prováděn výpočet, je reprezentována maticí M , do které se zapisují výsledky. Matice M je inicializována samými nulami. První sloupec matice představuje počáteční podmínku, do které byla vnesena porucha. Kvůli tomu, že jsou zavedeny nulové okrajové podmínky, krokování polohy probíhá od indexu 2 do $N - 1$. Po ukončení výpočtu se výsledky zapsané v matici M vykreslí do grafu. Zdrojový kód programu je možno nalézt v příloze 1.

6.2 Simulace chování modelu

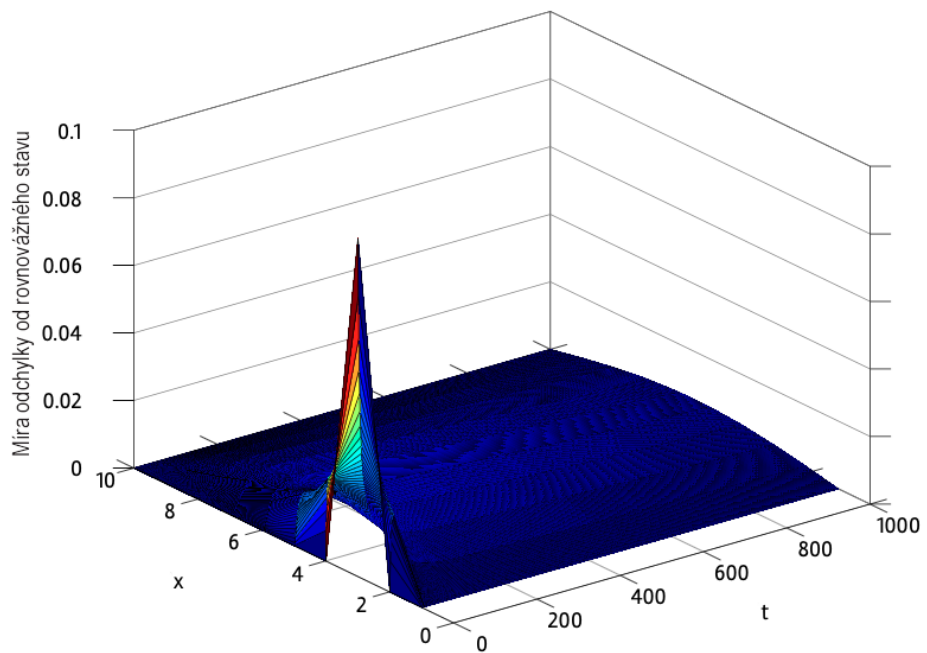
Před spuštěním simulace je nutno vhodně zvolit parametry Δx a Δt , aby bylo možno její výsledek dobře analyzovat. Taktéž je třeba zvolit počet časových kroků, ve kterých budeme chování modelu sledovat. Po nalezení vyhovující diskretizace můžeme model spustit a sledovat jeho chování pro různé hodnoty parametrů L a D . Získané výsledky budeme následně porovnávat s podmínkou vzniku nestability získanou v předchozích výpočtech. Při pozorování chování modelu postupujeme tak, že vždy jeden z parametrů L nebo D zafixujeme a poté měníme hodnotu druhého z nich. Přitom se snažíme nalézt kritickou hodnotu, kdy se chování modelu mění a ze stabilního systému se stává systém nestabilní.

Po sérii testovacích výpočtů, kdy jsem se snažila nalézt nejvhodnější dělení prostoru tak, aby model správně a bezproblémově pracoval, jsem pro simulaci zvolila parametry $\Delta x = 1$ a $\Delta t = 0,01$. Chování modelu budeme sledovat v rozmezí 1000 časových kroků. Na počátku je model inicializován počáteční podmínkou s malou fluktuací, jejíž míra je na následujících grafech znázorněna hodnotou na ose z . Podle toho, zda se počáteční fluktuace utlumí (to znamená, že s přibývajícimi časovými kroky se bude odchylka od rovnovážného — tedy v našem případě od nulového — stavu znázorněná hodnotou na ose z zmenšovat) nebo zda se počáteční fluktuace neutlumí (s přibývajícimi časovými kroky se bude odchylka od nulového stavu znázorněná hodnotou na ose z zvětšovat), budeme rozhodovat, zda je systém stabilní či nikoliv. Na následujících grafech můžeme pozorovat výsledky jedné ze simulací. V tomto případě byl v modelu fixován parametr L na hodnotě $L = 10$. Při změnách hodnoty parametru D pak můžeme sledovat změny v chování modelu. Na grafu 1 můžeme vidět, že zavedená porucha se velmi rychle utlumí a tedy že pro hodnotu $D = 10$ je systém stabilní. Na grafech 2 a 3 pozorujeme, že zavedená porucha se v rozmezí 1000 časových kroků neutlumí zcela, avšak dle jejího vývoje (a hodnot v matici M) je zřejmé, že k jejímu utlumení v dalších časových krocích dojde. Pro hodnoty $D = 9$ a $D = 8,5$ je tedy systém také stabilní. Na grafu 4 poprvé sledujeme, že se zavedená porucha neutlumí.

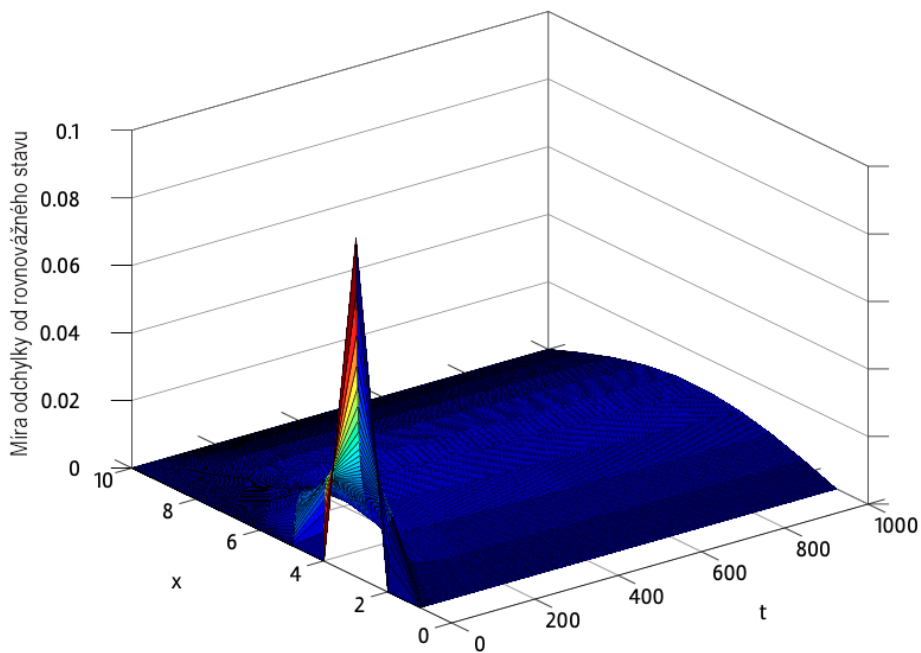
Její rozvoj je sice ještě velmi pomalý, avšak lze z něho usuzovat (stejně jako z hodnot v matici M), že k utlumení poruchy nedojde ani v dalších časových krocích. Pro hodnotu $D = 8$ je tedy systém již nestabilní. Na grafech 5 a 6 již můžeme jasně pozorovat, že zavedená porucha se neutlumí, ale naopak se rozvine. Pro hodnoty $D = 7$ a $D = 5$ je tedy systém jistě nestabilní. Z těchto výsledků můžeme usuzovat, že pro fixované $L = 10$ se kritická hodnota D pro vznik nestability nachází v intervalu $(8; 8,5)$. Pro hodnoty $D > 8,5$ bude systém stabilní a zavedená porucha se utlumí. Pro hodnoty $D < 8$ bude systém nestabilní.



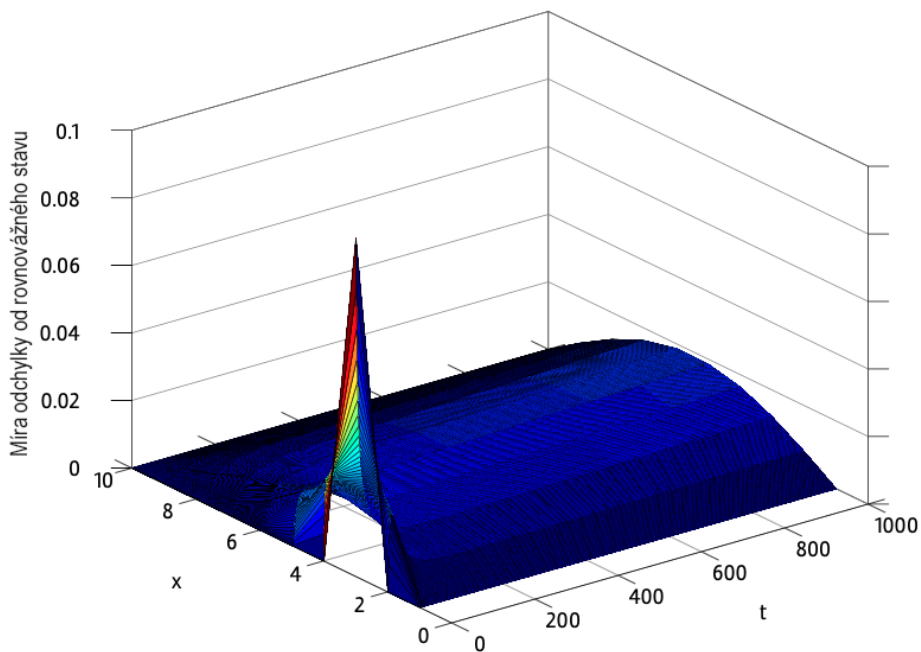
Graf 1: Chování systému pro parametry $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 10, D = 10$



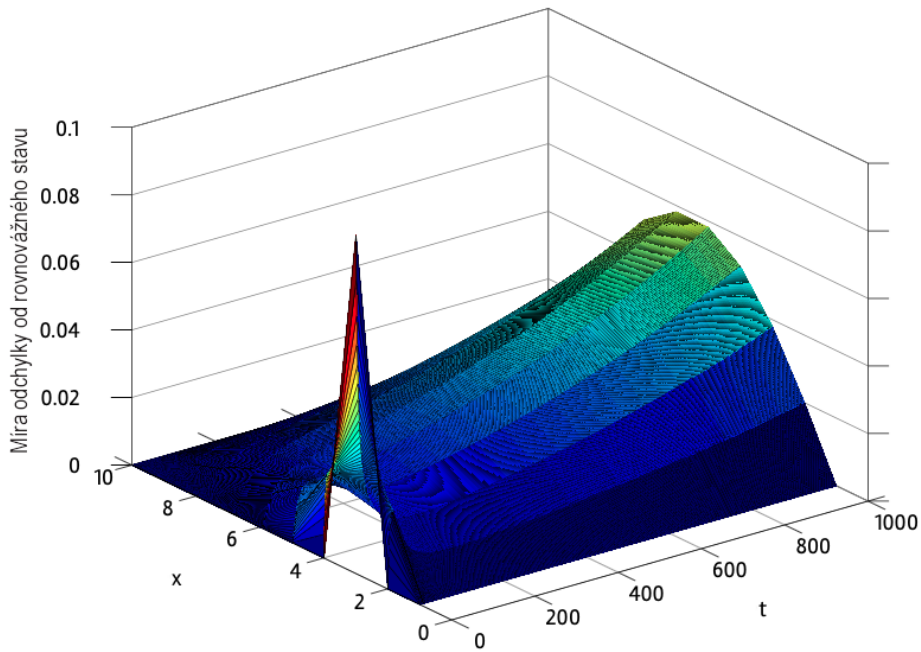
Graf 2: Chování systému pro parametry $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 10, D = 9$



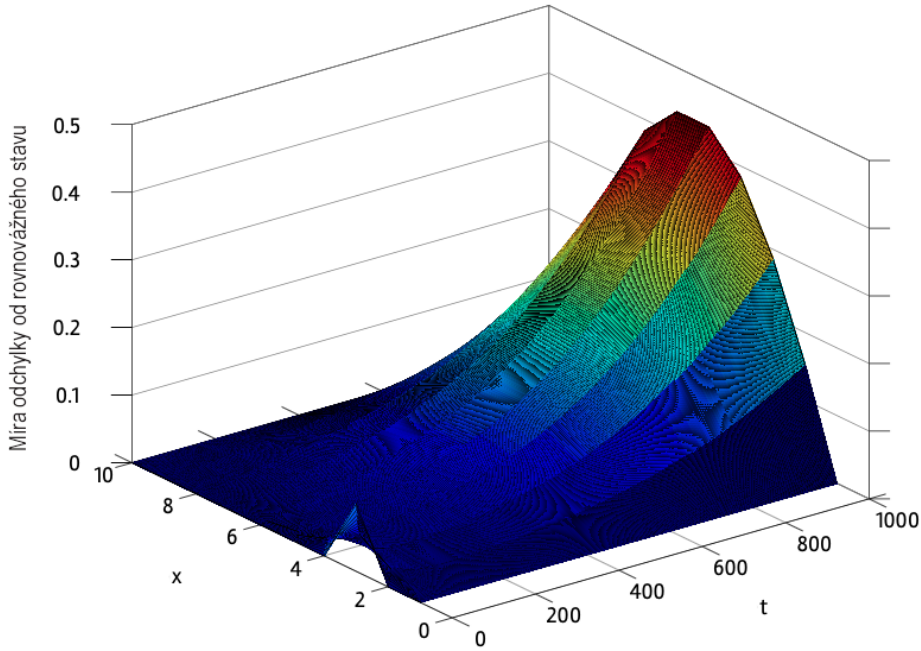
Graf 3: Chování systému pro parametry $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 10, D = 8,5$



Graf 4: Chování systému pro parametry $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 10, D = 8$



Graf 5: Chování systému pro parametry $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 10, D = 7$



Graf 6: Chování systému pro parametry $dx = 1, dt = 0,01, L = 10, D = 5$

Obdobným způsobem můžeme zafixovat parametr D a sledovat vývoj chování systému pro změny parametru L . V příloze 2 jsou uvedeny grafy, na nichž můžeme sledovat výsledky simulace, kdy byla hodnota parametru D zafixována na hodnotě $D = 10$. Podobně jako v předchozím případě můžeme pozorovat stabilní stavy systému, kdy se na počátku zavedená porucha utlumí (grafy 7 a 8) a stavy nestabilní, kdy se porucha neutlumí, ale rozvine se v systému (grafy 9 a 10). Z výsledků lze usuzovat, že pro fixované $D = 10$ se kritická hodnota L nachází v blízkém okolí hodnoty $L = 11$.

6.3 Porovnání výsledků

Výsledky získané z nelinearizovaného modelu, který jsme řešili pomocí numerické metody, nyní můžeme porovnat s podmínkou, kterou jsme získali pomocí analytického výpočtu s využitím linearizace, a zjistit, jak se liší. Podmínku vzniku nestability jsme získali ve tvaru

$$L_x > |k|2\pi\sqrt{D}.$$

Pokud zaměníme znaménko nerovnosti za rovnítko, získáme mezní hodnotu, při jejímž překročení se ze stabilního systému stává systém nestabilní a naopak.

V této práci byly uvedeny dvě simulace, s jejichž výsledky nyní budeme pracovat. V prvním případě byl zkoumán systém s fixovanou hodnotou $L = 10$. Pomocí numerické simulace jsme našli kritickou hodnotu D v intervalu $(8; 8,5)$. Pomocí analytického výpočtu získáme kritickou hodnotu tak, že dosadíme do výše zmíněné rovnice hodnotu $L = 10$ a poté vyjádříme D . Výpočtem získáme $D = 2,53k^{-2}$. Pokud porovnáme oba výsledky, zjistíme, že si odpovídají, pokud k náleží intervalu $(0,55; 0,56)$. V druhé uvedené simulaci byl zkoumán systém s fixovanou hodnotou $D = 10$ a pomocí numerické simulace jsme získali kritickou hodnotu ležící v okolí bodu $L = 11$. Analyticky získaná kritická hodnota je po dosazení a vyjádření $L = 19,89k$. Pokud opět oba výsledky porovnáme, zjistíme, že si odpovídají pro $k = 0,55$.

Z toho můžeme usuzovat, že linearizovaný model odpovídá nelinearizovanému numericky řešenému modelu, pokud $k \doteq 0,55$. k je parametr vyskytující se ve Fourierově řadě, kterou jsme využili pro vyjádření poruchy $h(x, t)$ a může nabývat pouze celočíselných hodnot. Ze získaných výsledků vyplývá, že čím vzdálenější bude parametr k od hodnoty $0,55$, tím více se bude lišit linearizovaný model od nelinearizovaného (a numericky řešeného) modelu. Například pokud zvolíme $k = 1$ bude se pro $D = 10$ kritická hodnota

L platící pro linearizovaný model lišit od té, která platí pro nelinearizovaný model, přibližně o 45% (což lze pozorovat na výsledcích získaných při druhé ze zde uvedených simulací).

7 Závěr

V této práci jsme se zabývali jevem samoorganizace, který se objevuje v systémech popisovaných nelineárními diferenciálními rovnicemi. Celá práce je pomyslně rozdělena na dva celky, které se liší způsobem, jakým jsme k jevu samoorganizace přistupovali.

V první části práce je samoorganizace představena jako jev vyskytující se téměř ve všech vědeckých odvětvích a na který můžeme narazit téměř všude kolem nás. Byly představeny jevy v proudících kapalinách a plynech, k jejichž popisu se využívá Navierova-Stokesova rovnice, termodynamické jevy a vznik Bénardovy-Marangoniovy nestability v plynech a kapalinách, vznik struktur a oscilací při chemických reakcích, vznik krystalických a fraktálních struktur v přírodě, struktury na srsti zvířat, různé životní, sociální a ekonomické cykly a další. Kromě toho byly stručně představeny některé z významných matematických modelů, které se pro popis systémů, v nichž může samoorganizace vzniknout, používají.

V druhé části práce jsme se věnovali samoorganizaci z hlediska jejího vzniku. Na příkladu reakčně-difuzního modelu jsme se pokoušeli nalézt podmínky vzniku samoorganizace ve smyslu nalezení mezních hodnot, při jejichž překročení by se stal ze stabilního systému systém nestabilní (při zavedení malé fluktuace do počáteční podmínky modelu by nedošlo k jejímu utlumení, ale naopak k rozšíření po celém systému). K řešení tohoto problému jsme využili model linearizovaný pomocí Taylorova rozvoje prvního řádu a fluktuaci jsme obecně vyjádřili jako Fourierovu řadu. Tento problém jsme řešili pro jednu a následně i pro dvě prostorové proměnné a získali jsme vztahy, které určují mezní hodnotu, při jejímž překročení bude systém nestabilní.

Pro ilustraci jsme porovnali výsledky získané numerickou simulací konkrétního nelineárního modelu s linearizovaným odhadem. K řešení nelinearizovaného modelu jsme použili numerickou metodu konečných diferencí. Numerický výpočet jsme prováděli pouze pro jednu prostorovou proměnnou a pro výpočet jsme si zvolili vhodné dělení prostoru (Δx) a času (Δt) na prostorové a časové kroky. Na osu z se pak v příslušných grafech vykreslovala míra odchylky od nulového stavu v jednotlivých časových krocích. V práci jsou uvedeny dvě simulace, každá z nich provedená pro jeden fixovaný a jeden pohyblivý parametr. Z prezentovaných výsledků jsme získali přibližné hodnoty parametrů, které představují onu mezní hranici, kdy se systém stává nestabilním. Při porovnání výsledků jsme zjistili, že mezní hodnoty parametrů získané pomocí linearizovaného modelu se od hodnot získaných při

numerické simulaci liší, vzhledem k tomu, že míra jejich rozdílu byla charakterizována hodnotou parametru k (koeficient Fourierovy řady), který může nabývat pouze celočíselných hodnot, avšak aby se oba získané výsledky rovnaly, muselo by k být neceločíselné. Protože rovnost obou výsledků by nastala pro $k \doteq 0,55$, můžeme díky tvaru vztahu

$$L_x > |k|2\pi\sqrt{\frac{D}{A}}.$$

tvrdit, že čím větší bude hodnota k , tím více se bude mezní hodnota pro vznik nestability získaná pomocí numerického výpočtu nelinearizované rovnice lišit od té, kterou získáme pomocí linearizovaného modelu (pozn. v našem případě bylo $A = 1$). Z těch samých důvodů ale můžeme říci, že pro libovolnou hodnotu k získáme (pokud uvažujeme výsledek získaný pomocí numerického výpočtu nelinearizované rovnice jako relevantní) vždy postačující (nikoli ale nutnou) podmínku pro vznik nestability v daném systému. A protože čím více se k blíží jedné, tím menší rozdíl je mezi oběma získanými výsledky, můžeme tvrdit, že pomocí vztahu

$$L_x > 2\pi\sqrt{\frac{D}{A}}.$$

získáváme postačující (nikoliv nutnou) podmínku pro vznik nestability v systému.

Simulace, která byla v této práci představena, byla provedena ve velmi zjednodušené formě, pouze pro jednu prostorovou proměnnou. Avšak i přesto přinesla zajímavé výsledky a může se stát základem pro další a detailnější práci na toto téma.

8 Seznam použité literatury

1. KREMPASKÝ, Július. Synergetické štruktúry v neobmedzených prostrediach. In: Fyzika a synergetika. Praha: JČSMF, 1989, s. 10.
2. COVENEY, Peter V a Roger HIGHFIELD. Mezi chaosem a řádem: hranice komplexity: hledání řádu v chaotickém světě. Vyd. 1. Praha: Mladá fronta, 2003, 428 s., [8] s. barev. obr. příl. Kolumbus. ISBN 80-204-0989-0.
3. STRAUSS, Walter A. Partial differential equations: an introduction. New York: John Wiley, c1992, ix, 425 s. ISBN 04-715-4868-5.
4. RAZÍM, Miroslav. Stabilita nelineárních systémů. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1973.
5. ROSSI DELL'ACQUA, Alba a Roger HIGHFIELD. Encyklopedie matematiky: hranice komplexity: hledání řádu v chaotickém světě. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1988, 280 s. Malá encyklopedie (Mladá fronta).
6. URUBA, Václav. Náhoda v exaktní vědě [online]. 2005 [cit. 2014-11-15]. Dostupné z: <http://www.it.cas.cz/~uruba/docs/lit/Nahoda.pdf>
7. URUBA, Václav. Turbulence [online]. ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2009 [cit. 2014-11-15]. Dostupné z: http://www.it.cas.cz/~uruba/docs/Aero/Turbulence_45.pdf
8. PROKŠOVÁ, Jitka a Jan DURŠPEK. Nerovnovážná termodynamika a její aplikace [online]. 2017 [cit. 2014-12-12]. Dostupné z: <http://nel-term.kof.zcu.cz/index.htm>
9. FUCHS, Martin. Kdy a jak vznikly spirální galaxie?. Štefánikova hvězdárna [online]. 3.3.2005 [cit. 2014-12-05]. Dostupné z: <http://observatory.cz/news/kdy-a-jak-vznikly-spiralni-galaxie-.html>
10. BALÚCH, Pavel. Synergetika a samoorganizace v ekonomice [online]. Brno, 2012 [cit. 2014-11-18]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=51504. Diplomová práce. VUT v Brně.
11. VILÍMEK, Radek. Deterministický chaos v prostředí WebMathematica [online]. Zlín, 2007 [cit. 2014-12-07]. Dostupné z: https://dspace.k.utb.cz/bitstream/handle/10563/3911/vil%C3%ADmek_2007_dp.pdf?sequence=1. Diplomová práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.

12. CABLE, Kele W. Alan Turing's Reaction-Diffusion Model – Simplification of the Complex. Kestrels and Cerevisiae [online]. December 1, 2010 [cit. 2014-12-13]. Dostupné z: <http://phylogenous.wordpress.com/2010/12/01/alan-turings-reaction-diffusion-model-simplification-of-the-complex//>
13. KUTTNER Christina. Reaction-Diffusion equations with applications [online]. Sommersemester 2011 [cit. 2015-07-08]. Dostupné z: http://www-m6.ma.tum.de/~kuttler/script_reaktdiff.pdf

9 Seznam příloh

Příloha 1

Zdrojový kód pro výpočet numerického modelu v jazyce Octave

Příloha 2

Grafy zobrazující chování numerického modelu pro hodnotu $D = 10$

Příloha 1

Zdrojový kód pro výpočet numerického modelu v jazyce Octave.

```
dx = 2;
dt = 0.01;
steps = 1000;
L = 20;
f = 0;
D = 50;
A = 1/(f + 1);

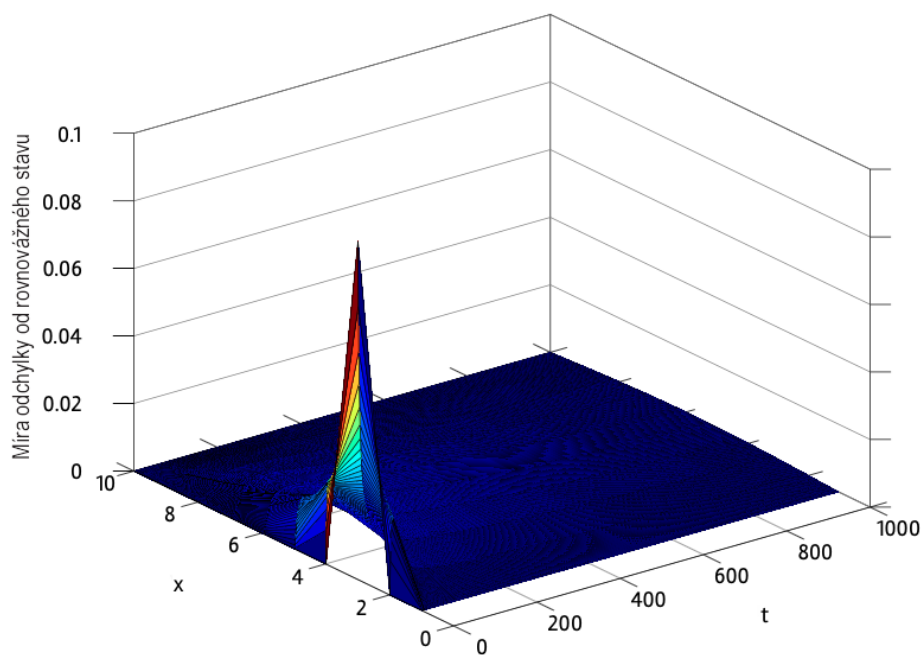
M = zeros ((L/dx), steps);
M(3,1) = 0.1;                                #inicializace

for j = 2:1:steps                              #krokování času
    for i = 2:1:((L/dx)-1)                    #krokování proměnné x
        M(i,j) = M(i, j-1) + D * (dt/(dx ^ 2 )) * (M(i+1, j-1)
            + M(i-1, j-1) - 2 * M(i, j-1))
            + dt * log(abs(1 + M(i, j-1)));
    endfor
endfor

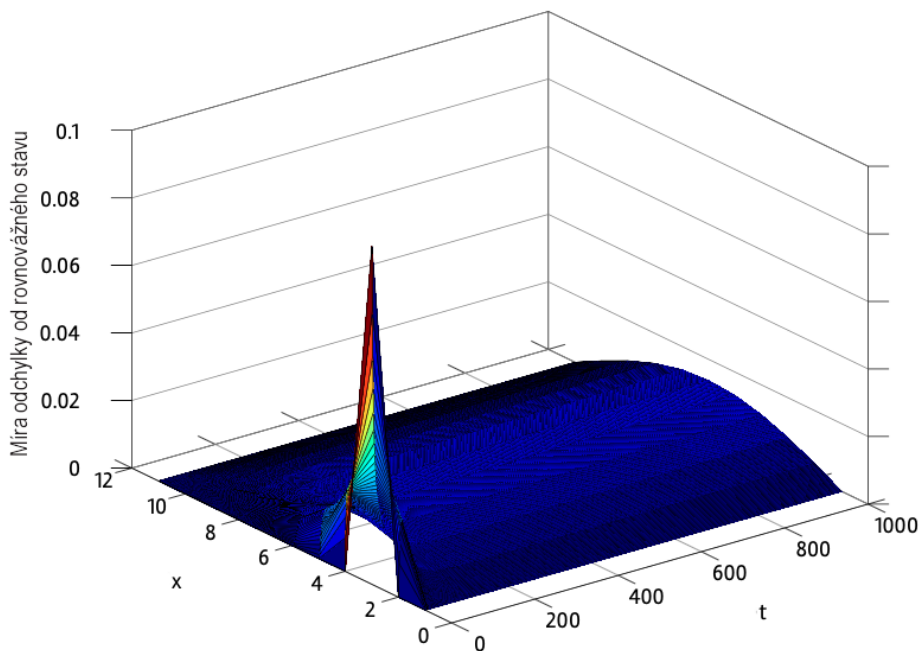
disp(M)
surf(M)
xlabel ("dt");
ylabel ("dx");
```

Příloha 2

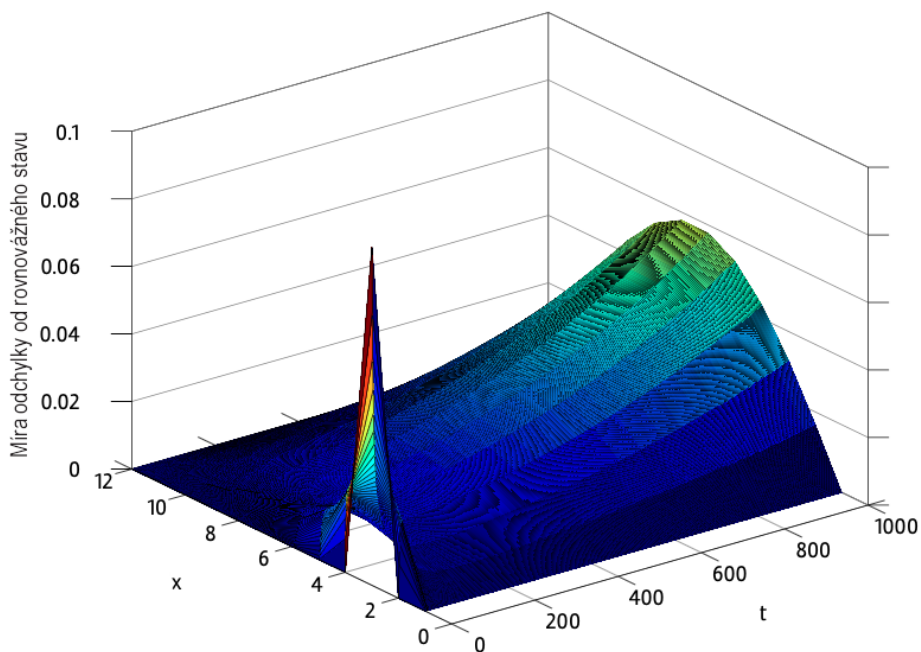
Na grafech 7 až 10 můžeme pozorovat změny v chování modelu pro fixovanou hodnotu parametru $D = 10$. Z grafů je patrné, že kritická hodnota se nachází v okolí hodnoty $L = 11$.



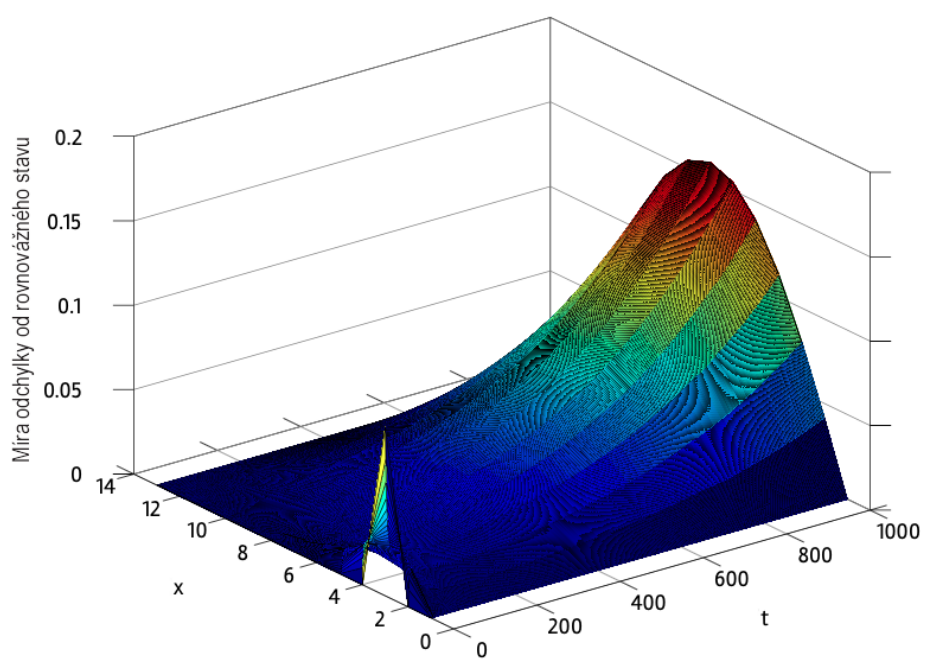
Graf 7: Chování systému pro parametry $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 10, D = 10$



Graf 8: Chování systému pro parametry $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 11, D = 10$



Graf 9: Chování systému pro parametry $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 12, D = 10$



Graf 10: Chování systému pro parametry
 $\Delta x = 1, \Delta t = 0,01, L = 13, D = 10$