

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra mechaniky

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**  
Řešení akustického pole v kavitě kompresoru

---

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne .....

---

## Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá matematickým modelováním a numerickým řešením akustického pole v uzavřeném prostoru. Uvedený matematický model popisuje časově nezávislé rozložení akustického tlaku v amplitudovém tvaru, jako odezvu na harmonické buzení. Omezíme se na homogenní prostředí. Pro numerické řešení tohoto problému je užitá metoda konečných prvků. Popsaná metodika je aplikována ve výpočtovém prostředí MATLAB a dovoluje výpočet jak ve 2D tak i ve 3D prostoru, pomocí odvozených konečných prvků typu trojúhelník a čtyřstěn s lineární aproximací. Výsledky získané vlastním výpočtovým programem jsou porovnány s výsledky získanými komerčním výpočtovým systémem Altair RADIOSS.

## Klíčová slova

Akustický tlak, vnitřní akustika, šroubový kompresor, Helmholtzova rovnice, metoda konečných prvků.

## Abstract

The Diploma Thesis deals with a mathematical model and a numerical solution of an acoustic field in enclosed space. The mathematical model describes time-independent distribution of acoustic pressure in amplitude form with harmonic excitation applied. The problem is restricted within an uniform media. The finite element method is used for the numerical solution. Described methods are applied in the MATLAB computational system. The program allows numerical simulation on both 2D and 3D meshes composed of triangular or tetrahedral finite elements with linear approximation. The results of this original computational program are compared with the results which are taken from computational system Altair RADIOSS.

## Keywords

Acoustic pressure, internal acoustics, rotary screw compressor, Helmholtz equation, finite element method.

---

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Matematický model pole akustického tlaku</b>	<b>2</b>
2.1 Odvození matematického modelu . . . . .	2
2.2 Analytické řešení . . . . .	5
2.3 Řešení metodou konečných prvků . . . . .	9
2.3.1 Řešení ve 2D prostoru . . . . .	9
2.3.2 Řešení ve 3D prostoru . . . . .	20
<b>3 Výpočtový model</b>	<b>35</b>
3.1 Porovnání analytického a přibližného řešení . . . . .	35
3.2 Výpočet pole akustického tlaku v kavitě kompresoru . . . . .	37
3.2.1 Počítačový model . . . . .	37
3.2.2 Okrajové podmínky . . . . .	38
3.2.3 Úloha řešení akustického pole v kavitě kompresoru . . . . .	39
3.3 Implementace . . . . .	40
<b>4 Závěr</b>	<b>41</b>
<b>A Zdrojové kódy</b>	<b>42</b>
A.1 Sestavení globální matice v MATLAB . . . . .	42
<b>B Obrazové přílohy</b>	<b>43</b>
B.1 Model kavity šroubového kompresoru . . . . .	43
B.2 Amplitudy rychlosti naměřené na skutečném kompresoru . . . . .	44
B.3 Výsledky výpočtu . . . . .	45

---

## Seznam obrázků

2.1	Testovací úloha. . . . .	5
2.2	Trojúhelníkový prvek. . . . .	9
2.3	Transformace na jednotkový trojúhelník. . . . .	10
2.4	Uzel 1 trojúhelníkového prvku je vnitřní. . . . .	13
2.5	Uzel 2 trojúhelníkového prvku je vnitřní. . . . .	15
2.6	Uzel 3 trojúhelníkového prvku je vnitřní. . . . .	16
2.7	Konečný prvek typu čtyřstěn. . . . .	20
2.8	Transformace na jednotkový čtyřstěn. . . . .	22
2.9	Uzel 1 čtyřstěnného prvku je vnitřní. . . . .	27
2.10	Uzel 2 čtyřstěnného prvku je vnitřní. . . . .	29
2.11	Uzel 3 čtyřstěnného prvku je vnitřní. . . . .	30
2.12	Uzel 4 čtyřstěnného prvku je vnitřní. . . . .	31
3.1	Rozložení akustického tlaku získané pomocí Galerkinovy m. ve 2D prostoru. . . . .	36
3.2	Rozložení akustického tlaku získané pomocí MKP ve 2D prostoru. . . . .	36
3.3	Rozložení akustického tlaku získané pomocí MKP ve 3D prostoru. . . . .	37
3.4	Rozložení akustického tlaku získané MKP ve 3D prostoru pro $f = 100$ Hz. . . . .	39
B.1	Model šroubového kompresoru v Altair HyperMesh. . . . .	43
B.2	Amplitudy rychlostí ve směrech os $x, y, z$ v závislosti na frekvenci kmitání. . . . .	44
B.3	Amplitudy rychlostí ve směrech os $x, y, z$ v závislosti na frekvenci kmitání. . . . .	44
B.4	Rozložení akustického tlaku dle MKP pro $f = 100$ Hz. . . . .	45
B.5	Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro $f = 100$ Hz.* . . . .	45
B.6	Rozložení akustického tlaku dle MKP pro $f = 100$ Hz. . . . .	46
B.7	Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro $f = 100$ Hz.* . . . .	46
B.8	Rozložení akustického tlaku dle MKP pro $f = 100$ Hz. . . . .	47
B.9	Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro $f = 100$ Hz.* . . . .	47
B.10	Rozložení akustického tlaku dle MKP pro $f = 100$ Hz. . . . .	48
B.11	Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro $f = 100$ Hz.* . . . .	48
B.12	Rozložení akustického tlaku dle MKP pro $f = 100$ Hz. . . . .	49
B.13	Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro $f = 100$ Hz.* . . . .	49
B.14	Rozložení akustického tlaku dle MKP pro $f = 100$ Hz. . . . .	50
B.15	Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro $f = 100$ Hz.* . . . .	50

---

## Poděkování

Na tomto místě bych rád vyjádřil poděkování Prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi za vedení práce, věnovaný čas a předané znalosti. Děkuji také svým rodičům za vytrvalou podporu při studiu a své spřízněné duši za každodenní inspiraci do života.

---

# Kapitola 1

## Úvod

V předložené práci je prezentována metodika rozložení akustického tlaku (AT) v kavitě kompresoru. Cílem práce je vytvoření algoritmu a příslušného programového vybavení pro výpočet amplitud AT při uvažovaném harmonickém vstupu, který je reprezentován předepsanými amplitudami normálních rychlostí na části hranice kavity (inlet). Pomocí zmíněného přístupu je v konečném důsledku možné řešit i akustické problémy s periodickým nebo dokonce polyharmonickým buzením, neboť vzhledem k linearitě problému je možné aplikovat princip superpozice. Helmholtzova rovnice, která je modelem popsaného problému je stacionární variantou vlnové rovnice. Popisuje rozložení AT v homogenním prostředí. Pro výpočet je použita metoda konečných prvků (MKP). V práci jsou popsány dva typy konečných prvků a to trojúhelníkový prvek pro řešení ve 2D prostoru a čtyřstěnný prvek pro řešení ve 3D prostoru, oba s lineární aproximací. Výsledky získané aplikací metody konečných prvků na daný problém jsou v práci konfrontovány s výsledky Galerkinovy metody na zvolené testovací úloze. V přílohách je možné porovnat výsledky vlastního řešiče s výsledky komerčního výpočtového systému Altair RADIOSS na úloze se složitější geometrií.

---

# Kapitola 2

## Matematický model pole akustického tlaku

### 2.1 Odvození matematického modelu

Hledáme popis šíření zvukové vlny homogenním prostředím. Víme-li že pojem zvuk představuje postupné podélné kmitání částic. Zhušťováním a zředováním částic prostředí při postupu vlny dochází k rychlým změnám tlaku. Celkový tlak v daném místě prostředí můžeme vyjádřit jako součet středního tlaku a fluktuace. A právě popis této malé změny – akustického tlaku – budeme hledat. Podle [4, s. 38] můžeme popsat postup vlny v homogenním prostředí, vyjdeme-li z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.1)$$

kterou upravíme pro ustálený stav, když zapíšeme

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad (2.3)$$

Dosazením do rovnice kontinuity a vyloučením na čase závislého členu získáme výchozí rovnici

$$i\omega p(\mathbf{x}) + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.4)$$

kde operátor  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$  je operátor divergence,  $c$  je rychlost zvuku,  $\mathbf{v}$  je vektor rychlosti,  $\rho$  je hustota prostředí a  $\omega$  je úhlová frekvence harmonického vlnění. Podobně vyjádříme Navier-Stokesovu rovnici

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.5)$$

kam opět zavedeme (2.2) a (2.3) a získáme Navier-Stokesovu rovnici ve tvaru

$$\rho i\omega \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.6)$$



ze které vyjádříme vektor rychlosti

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{i}{\rho\omega} \nabla p(\mathbf{x}), \quad (2.7)$$

který dosadíme do (2.4). Získáme rovnici

$$i\omega p(\mathbf{x}) + \rho c^2 \frac{i}{\rho\omega} \nabla^2 p(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.8)$$

kterou dále upravíme. Vydělením  $i\omega$  dostaneme

$$p(\mathbf{x}) + \frac{c^2}{\omega^2} \nabla^2 p(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.9)$$

Zavedením vlnového čísla  $k = \frac{\omega}{c}$  dostáváme

$$k^2 p(\mathbf{x}) + \nabla^2 p(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.10)$$

Upravíme ještě zápis předchozí rovnice nahrazením  $\nabla^2$  Laplaceovým operátorem  $\Delta$ . Získáváme Helmholtzovu rovnici pro akustický tlak, kterou budeme řešit

$$k^2 p(\mathbf{x}) + \Delta p(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.11)$$

Slabá formulace této diferenciální rovnice má tvar

$$\int_{\Omega} k^2 w(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} w(\mathbf{x}) \Delta p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (2.12)$$

Aplikací Greenovy věty na druhý integrál dostaneme

$$\int_{\Omega} w(\mathbf{x}) \Delta p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} w(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) dS - \int_{\Omega} \nabla w(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.13)$$

Dále vyjádříme hraniční integrály pro všechny stanovené typy okrajových podmínek

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k^2 w(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla w(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\ + \int_{\Gamma_w} w(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) dS + \int_{\Gamma_{in}} w(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) dS + \int_{\Gamma_{out}} w(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) dS = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pro zamýšlenou testovací úlohu stanovíme tři typy okrajových podmínek a popíšeme je v následujícím odstavci.

1. Vstup (hranice  $\Gamma_{in}$ )

Normálovou rychlost  $v_n(\mathbf{x})$  na vstupu (hranice  $\Gamma_{in}$ ) vyjádříme z (2.7), kde se omezíme jen na směr normály této hranice. Hodnota  $v_n(\mathbf{x})$  je předem známá. Dostaneme tedy vyjádření okrajové podmínky ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) = -\rho i \omega v_n(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

 2. Tuhá stěna (hranice  $\Gamma_w$ ).

Pro tuhou stěnu na hranici  $\Gamma_w$  platí, že normálová rychlost  $v_n(\mathbf{x}) = 0$ . Potom ze vztahu (2.15) plyne, že

$$\int_{\Gamma_w} w(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) dS = 0. \quad (2.16)$$

 3. Anechoidní výstup (hranice  $\Gamma_{out}$ ).

Jedná se o výstup do volného prostoru. Rychlost  $v_n(\mathbf{x})$ , na rozdíl od předchozích bodů, neznáme. Podle [2, s. 39] využijeme veličiny vyjadřující poměr akustického tlaku a rychlosti tedy tzv. měrné akustické impedance. Pro rovinnou vlnu platí

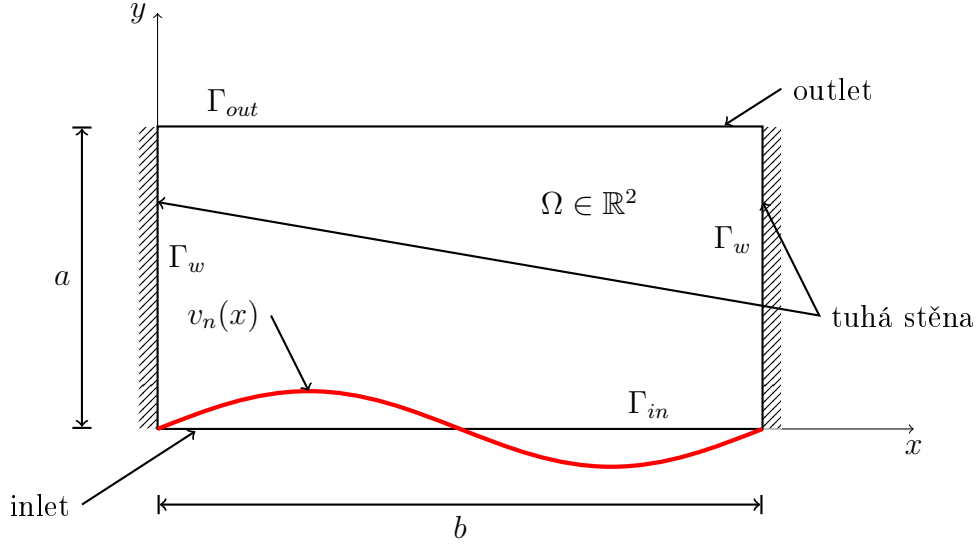
$$\frac{p(\mathbf{x})}{v_n(\mathbf{x})} = \rho c. \quad (2.17)$$

Vyjádřením rychlosti  $v_n(\mathbf{x})$  a dosazením do (2.15) dostaneme

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) = -\frac{i\omega}{c} p. \quad (2.18)$$

Aplikací vztahů (2.15), (2.18), (2.16) na (2.14) dostáváme rovnici, kterou využijeme pro výpočet akustického tlaku jak Galerkinovou metodou, tak metodou konečných prvků.

$$\underbrace{\int_{\Omega} k^2 w(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla w(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{out}} w(\mathbf{x}) \left( \frac{-i\omega}{c} p(\mathbf{x}) \right) dS}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{in}} w(\mathbf{x}) (-\rho i \omega v_n(\mathbf{x})) dS}_{\textcircled{4}} = 0. \quad (2.19)$$



Obrázek 2.1: Testovací úloha.

## 2.2 Analytické řešení

Pro verifikaci výsledků získaných pomocí metody konečných prvků uijeme jednu z metod vážených reziduí – Galerkinovu metodu. Stanovíme si testovací úlohu dle obrázku (2.1) a odvodíme potřebné vztahy. Výsledky budou uvedeny až v další kapitole, kde je porovnáme s výsledky získanými pomocí metody konečných prvků. Začneme úpravou (2.19)

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\omega^2}{c^2} w(x, y) p(x, y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla w(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b w(x, a) p(x, a) dx - \rho i \omega \int_0^b w(x, 0) v_n(x, 0) dx = 0. \quad (2.20)$$

Zavedeme aproximaci akustického tlaku  $p(x, y)$  ve formě lineární kombinace harmonických funkcí

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ a_{ij} \sin \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a} + b_{ij} \cos \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a} + c_{ij} \sin \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a} + d_{ij} \cos \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a} \right]. \quad (2.21)$$

Na vztah (2.21) aplikujeme operátor  $\nabla$  a dostaneme gradient tlaku ve formě

$$\begin{aligned} \nabla p(x, y) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \begin{array}{l} a_{ij} \frac{i\pi}{b} \cos \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a} - b_{ij} \frac{i\pi}{b} \sin \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a} + c_{ij} \frac{i\pi}{b} \cos \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a} - d_{ij} \frac{i\pi}{b} \sin \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a} \\ a_{ij} \frac{j\pi}{a} \sin \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a} + b_{ij} \frac{j\pi}{a} \cos \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a} - c_{ij} \frac{j\pi}{a} \sin \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a} - d_{ij} \frac{j\pi}{a} \cos \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Uveďme ještě, že máme akustický tlak aproximovaný lineární kombinací následujících funkcí

$$o_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a}, \quad (2.23)$$

$$q_{ij}(x, y) = \cos \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a}, \quad (2.24)$$

$$r_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a}, \quad (2.25)$$

$$s_{ij}(x, y) = \cos \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a}. \quad (2.26)$$

Nazvěme je aproximačními funkcemi. Pro Galerkinovu metodu potřebujeme ještě testovací funkce, které jsou totožné s aproximačními, jen se záměnou  $i \rightarrow k$  a  $j \rightarrow l$ . Testovací funkce vystupují v (2.20) v podobě  $w(x, y)$  a pro úplnost je také uveďme

$$t_{kl}(x, y) = \sin \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{l\pi y}{a}, \quad (2.27)$$

$$u_{kl}(x, y) = \cos \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{l\pi y}{a}, \quad (2.28)$$

$$v_{kl}(x, y) = \sin \frac{k\pi x}{b} \cos \frac{l\pi y}{a}, \quad (2.29)$$

$$w_{kl}(x, y) = \cos \frac{k\pi x}{b} \cos \frac{l\pi y}{a}. \quad (2.30)$$

Ve (2.20) se objevuje  $\nabla p(x, y)$  a  $\nabla w(x, y)$ .  $\nabla p(x, y)$  jsme již vyjádřili pomocí (2.22). Rozepišme ještě činitele lineární kombinace jednotlivě

$$\nabla o_{ij}(x, y) = \left[ \frac{i\pi}{b} \cos \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a}, \frac{j\pi}{a} \sin \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a} \right]^T, \quad (2.31)$$

$$\nabla q_{ij}(x, y) = \left[ -\frac{i\pi}{b} \sin \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a}, \frac{j\pi}{a} \cos \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a} \right]^T, \quad (2.32)$$

$$\nabla r_{ij}(x, y) = \left[ \frac{i\pi}{b} \cos \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a}, -\frac{j\pi}{a} \sin \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a} \right]^T, \quad (2.33)$$

$$\nabla s_{ij}(x, y) = \left[ -\frac{i\pi}{b} \sin \frac{i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{a}, -\frac{j\pi}{a} \cos \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a} \right]^T. \quad (2.34)$$

Formálně shodné je vyjádření gradientů testovacích funkcí

$$\nabla t_{kl}(x, y) = \left[ \frac{k\pi}{b} \cos \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{l\pi y}{a}, \frac{l\pi}{a} \sin \frac{k\pi x}{b} \cos \frac{l\pi y}{a} \right]^T, \quad (2.35)$$

$$\nabla u_{kl}(x, y) = \left[ -\frac{k\pi}{b} \sin \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{l\pi y}{a}, \frac{l\pi}{a} \cos \frac{k\pi x}{b} \cos \frac{l\pi y}{a} \right]^T, \quad (2.36)$$

$$\nabla v_{kl}(x, y) = \left[ \frac{k\pi}{b} \cos \frac{k\pi x}{b} \cos \frac{l\pi y}{a}, -\frac{l\pi}{a} \sin \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{l\pi y}{a} \right]^T, \quad (2.37)$$

$$\nabla w_{kl}(x, y) = \left[ -\frac{k\pi}{b} \sin \frac{k\pi x}{b} \cos \frac{l\pi y}{a}, -\frac{l\pi}{a} \cos \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{l\pi y}{a} \right]^T. \quad (2.38)$$

Nyní máme připravené vše pro řešení pomocí Galerkinovy metody. Abychom mohli vyjádřit tlak pomocí (2.21), potřebujeme znát koeficienty  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  a  $d_{ij}$ . Koeficienty určíme řešením soustavy rovnic  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Řádky soustavy rovnic vznikají tak, že na (2.11) aplikujeme zobecněný skalární součin postupně s každou z testovacích funkcí. To odpovídá dosazení vztahů (2.21), (2.22) do (2.20) a vždy jedné z testovacích funkcí za  $w(x, y)$ . Matice  $\mathbf{A}$  tak obsahuje produkty zobecněných skalárních součinů umístěné tak, že vektor  $\mathbf{x}$  má tvar

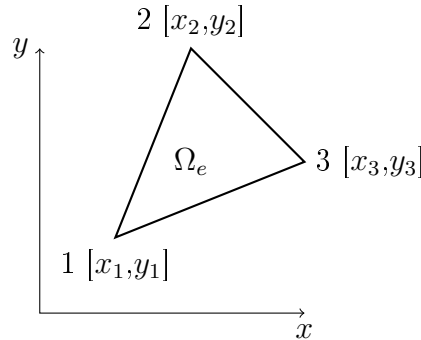
$$\mathbf{x} = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2N}, a_{31}, \dots, a_{NN}, b_{11}, \dots, b_{NN}, c_{11}, \dots, c_{NN}, d_{11}, \dots, d_{NN}]^T. \quad (2.39)$$

Vektor pravých stran pak obsahuje produkty zobecněných skalárních součinů testovací funkce a funkce popisující rozložení rychlosti  $v_n(x)$  ve směru normály. Ve světle právě zmíněného zapíšeme několik rovnic soustavy formálně a následně i jednu rovnici detailně.

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \frac{\omega^2}{c^2} t_{11}(x, y) p(x, y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x, a) p(x, a) dx = \rho i \omega \int_0^b t_{11}(x, 0) v_n(x, 0) dx, \\ & \int_0^b \int_0^a \frac{\omega^2}{c^2} t_{12}(x, y) p(x, y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{12}(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{12}(x, a) p(x, a) dx = \rho i \omega \int_0^b t_{12}(x, 0) v_n(x, 0) dx, \\ & \vdots \\ & \int_0^b \int_0^a \frac{\omega^2}{c^2} t_{1N}(x, y) p(x, y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{1N}(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{1N}(x, a) p(x, a) dx = \rho i \omega \int_0^b t_{1N}(x, 0) v_n(x, 0) dx, \\ & \vdots \\ & \int_0^b \int_0^a \frac{\omega^2}{c^2} t_{NN}(x, y) p(x, y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{NN}(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{NN}(x, a) p(x, a) dx = \rho i \omega \int_0^b t_{NN}(x, 0) v_n(x, 0) dx, \\ & \int_0^b \int_0^a \frac{\omega^2}{c^2} u_{11}(x, y) p(x, y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla u_{11}(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b u_{11}(x, a) p(x, a) dx = \rho i \omega \int_0^b u_{11}(x, 0) v_n(x, 0) dx, \\ & \vdots \\ & \int_0^b \int_0^a \frac{\omega^2}{c^2} u_{NN}(x, y) p(x, y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla u_{NN}(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b u_{NN}(x, a) p(x, a) dx = \rho i \omega \int_0^b u_{NN}(x, 0) v_n(x, 0) dx, \\ & \vdots \\ & \int_0^b \int_0^a \frac{\omega^2}{c^2} w_{NN}(x, y) p(x, y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla w_{NN}(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b w_{NN}(x, a) p(x, a) dx = \rho i \omega \int_0^b w_{NN}(x, 0) v_n(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Zvolíme-li  $N = 2$  a dosadíme do první rovnice z právě uvedené soustavy rovnic vztahy (2.21) a (2.22) a rozepíšeme sumy na sčítance pomocí definovaných aproximačních funkcí, dostaneme první rovnici ze soustavy ve tvaru

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) o_{11}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla o_{11}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) o_{11}(x,a) dx \right] a_{11} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) o_{12}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla o_{12}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) o_{12}(x,a) dx \right] a_{12} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) o_{21}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla o_{21}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) o_{21}(x,a) dx \right] a_{21} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) o_{22}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla o_{22}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) o_{22}(x,a) dx \right] a_{22} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) q_{11}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla q_{11}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) q_{11}(x,a) dx \right] b_{11} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) q_{12}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla q_{12}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) q_{12}(x,a) dx \right] b_{12} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) q_{21}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla q_{21}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) q_{21}(x,a) dx \right] b_{21} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) q_{22}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla q_{22}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) q_{22}(x,a) dx \right] b_{22} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) r_{11}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla r_{11}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) r_{11}(x,a) dx \right] c_{11} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) r_{12}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla r_{12}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) r_{12}(x,a) dx \right] c_{12} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) r_{21}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla r_{21}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) r_{21}(x,a) dx \right] c_{21} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) r_{22}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla r_{22}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) r_{22}(x,a) dx \right] c_{22} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) s_{11}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla s_{11}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) s_{11}(x,a) dx \right] d_{11} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) s_{12}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla s_{12}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) s_{12}(x,a) dx \right] d_{12} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) s_{21}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla s_{21}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) s_{21}(x,a) dx \right] d_{21} + \\
 & + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^b \int_0^a t_{11}(x,y) s_{22}(x,y) dy dx - \int_0^b \int_0^a \nabla t_{11}(x,y) \cdot \nabla s_{22}(x,y) dy dx - \frac{i\omega}{c} \int_0^b t_{11}(x,a) s_{22}(x,a) dx \right] d_{22} = \\
 & = \int_0^b t_{11}(x,0) \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right) dx.
 \end{aligned}$$



Obrázek 2.2: Trojúhelníkový prvek.

## 2.3 Řešení metodou konečných prvků

Pomocí metody konečných prvků diskretizujeme slabou formulaci (2.19). Odvození trojúhelníkového a čtyřstěnného konečného prvku pro tento problém pochází z práce [1] zveřejněné na konferenci v Lisabonu.

### 2.3.1 Řešení ve 2D prostoru

Začněme vyjádřením integrálu (1) ze vztahu (2.19), který má pro dvě prostorové proměnné tvar

$$\int_{\Omega} k^2 w(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} k^2 w(x, y) p(x, y) dx. \quad (2.40)$$

Vyjádříme nejprve tlak  $p(x, y)$  na oblasti pomocí bázových funkcí

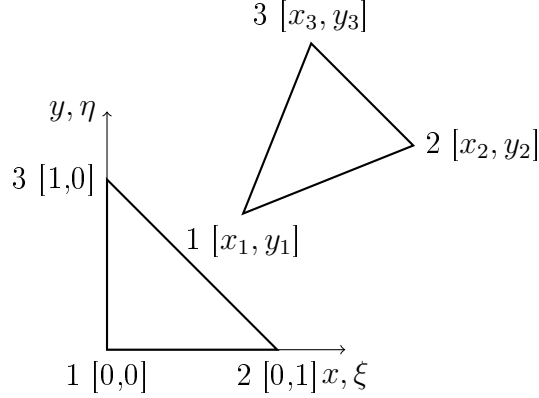
$$p(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\psi}(x, y) \mathbf{c}. \quad (2.41)$$

Hodnoty tlaků v uzlech prvku vyjádříme dosazením souřadnic jednotlivých uzlů, dle obrázku (2.2)

$$\begin{aligned} p_1 &= c_0 + c_1 x_1 + c_2 y_1, \\ p_2 &= c_0 + c_1 x_2 + c_2 y_2, \\ p_3 &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 y_3. \end{aligned}$$

Rovnice zapíšeme v maticové formě

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}}. \quad (2.42)$$



Obrázek 2.3: Transformace na jednotkový trojúhelník.

Nyní vyjádříme neznámé koeficienty  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{S}_e \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.43)$$

a dosadíme do (2.41), čímž získáme průběh akustického tlaku na jednom prvku v závislosti na hodnotách akustického tlaku v uzlech ve tvaru

$$p(x, y) = \boldsymbol{\psi}(x, y) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e. \quad (2.44)$$

Abychom se při výpočtu matic elementů vyhnuli integrování, zavedeme transformaci na jednotkový trojúhelník

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \bar{x}_2 \xi + \bar{x}_3 \eta, \\ y &= y_1 + \bar{y}_2 \xi + \bar{y}_3 \eta, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i - x_1, & i &= 2, 3. \\ \bar{y}_i &= y_i - y_1, \end{aligned}$$

Pomocí normalizovaných souřadnic  $\xi$  a  $\eta$  lze (2.44) přepsat do tvaru

$$p(\xi, \eta) = \boldsymbol{\psi}^*(\xi, \eta) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.45)$$

kde

$$\boldsymbol{\psi}^*(\xi, \eta) = \left[ 1 \quad x_1 + \bar{x}_2 \xi + \bar{x}_3 \eta \quad y_1 + \bar{y}_2 \xi + \bar{y}_3 \eta \right] = \underbrace{\left[ 1 \quad \xi \quad \eta \right]}_{\boldsymbol{\phi}(\xi, \eta)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \\ 0 & \bar{x}_3 & \bar{y}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_e}. \quad (2.46)$$



Ve světle vztahu (2.46) může přepsat (2.45) do tvaru

$$p(\xi, \eta) = \phi(\xi, \eta) \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e. \quad (2.47)$$

Zavedeme ještě Jacobiovu matici transformace souřadnic  $x, y$  a  $\xi, \eta$ . Matice má tvar

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

a její determinant (jacobíán) má tvar

$$J_e = \bar{x}_2 \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \bar{x}_3, |J_e| = |\bar{x}_2 \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \bar{x}_3|. \quad (2.49)$$

Jacobíán využijeme při integraci pomocí normalizovaných souřadnic  $\xi$  a  $\eta$ . Pomocí původních a normalizovaných souřadnic můžeme zapsat také testovací funkce na elementu

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \psi(x, y) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{w}_e, \\ w(\xi, \eta) &= \psi^*(\xi, \eta) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{w}_e = \phi(\xi, \eta) \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{w}_e = \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \phi^T(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nyní již zapíšeme integrál (1) ve vztahu (2.19) ve tvaru

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\Omega_e} w(x, y) p(x, y) dx &= k^2 \int_{\Omega_e} |J_e| w(\xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi = \\ &= k^2 |J_e| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi^T(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) d\eta d\xi}_{\mathbf{A}_o} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \end{aligned} \quad (2.51)$$

kde

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

a integrál (1) tak dostáváme pro element ve tvaru

$$k^2 \int_{\Omega_e} w(x, y) p(x, y) dx = k^2 |J_e| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A}_o \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e. \quad (2.53)$$

Uvedme integrál (2) ze vztahu (2.19) ve tvaru pro dvě prostorové proměnné, který má tvar

$$\int_{\Omega} \nabla w(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla w(x, y) \cdot \nabla p(x, y) dx. \quad (2.54)$$

Začneme vyjádřením vyjádřením gradient tlaku, vyjdeme přitom ze vztahu (2.44)

$$p(x, y) = \boldsymbol{\psi}(x, y) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e \Rightarrow \nabla p(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

kde

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\bar{y}_3}{|J_e|}, \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-\bar{y}_2}{|J_e|}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{-\bar{x}_3}{|J_e|}, \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\bar{x}_2}{|J_e|}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Gradient tlaku tak zapíšeme pomocí normalizovaných souřadnic ve tvaru

$$\nabla p(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_e)} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{y}_3 & -\bar{y}_2 \\ -\bar{x}_3 & \bar{x}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\nabla^* p(\xi, \eta)} = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_e)} \mathbf{D}_e \nabla^* p(\xi, \eta). \quad (2.57)$$

Gradient testovací funkce má obdobný tvar

$$\nabla w(x, y) = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_e)} \mathbf{D}_e \nabla^* w(\xi, \eta), \quad (2.58)$$

a po transpozici dostáváme

$$\nabla^T w(x, y) = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_e)} \nabla^{*T} w(\xi, \eta) \mathbf{D}_e^T. \quad (2.59)$$

Vztah (2.57) dále upravíme dosazením (2.47)

$$\nabla p(x, y) = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_e)} \mathbf{D}_e \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\eta \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e = \frac{1}{J_e} \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.60)$$

kde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Obdobný vztah jako pro gradient tlaku platí pro gradient testovací funkce

$$\nabla^T w(x, y) = \frac{1}{J_e} \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}_e^T. \quad (2.62)$$

Pro integrál (2) pak platí

$$\int_{\Omega_e} \nabla^T w(x, y) \nabla p(x, y) d\mathbf{x} = \frac{|J_e|}{J_e^2} \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}_e^T \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi}_{\frac{1}{2}} \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.63)$$

potom

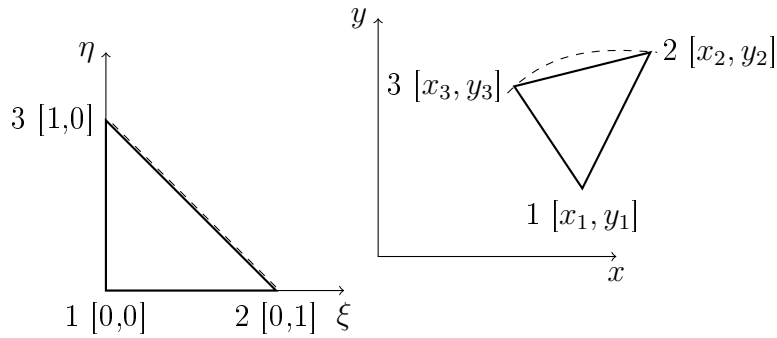
$$\int_{\Omega_e} \nabla^T w(x, y) \nabla p(x, y) d\mathbf{x} = \frac{1}{2|J_e|} \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e. \quad (2.64)$$

Integrál (3) ve vztahu (2.19) vyjadřuje hraniční člen odpovídající okrajové podmínce anechoidního výstupu a má tvar

$$\int_{\Gamma_{out}} w(\mathbf{x}) \left( -\frac{i\omega}{c} \right) p(\mathbf{x}) dS = \int_{\Gamma_{out}} w(x, y) \left( -\frac{i\omega}{c} \right) p(x, y) dS. \quad (2.65)$$

Mohou nastat tři případy dle toho, který vrchol trojúhelníkového prvku bude vnitřní, tedy jemu protilehlá strana tvoří hranici uvažované oblasti. Začneme u bodu 1.

1. Uzel 1 je vnitřní.



Obrázek 2.4: Uzel 1 trojúhelníkového prvku je vnitřní.

Ve vztahu (2.46) jsme uvedli matici básových funkcí  $\phi$  pro jednotkový trojúhelník a souřadnice  $\xi$  a  $\eta$  jsme označili za normalizované. Vyloučíme souřadnici  $\eta = 1 - \xi$ ,

provedeme transformaci souřadnic a určíme jacobíán transformace

$$\begin{aligned}\phi^*(\xi) &= [1 \quad \xi \quad 1 - \xi], \\ x &= x_1 + \bar{x}_2\xi + \bar{x}_3(1 - \xi), \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \bar{x}_2 - \bar{x}_3 = x_2 - x_1 - x_3 + x_1 = x_2 - x_3, \\ |J_e^*| &= |x_2 - x_3|.\end{aligned}$$

V případě, že by byla okrajová podmínka předepsána na hraně trojúhelníka, jejíž konce mají totožné hodnoty  $x_i$ , tj. okrajová podmínka by byla předepsána na hraně rovnoběžné s osou  $y$ , jacobíán je nulový. Proto využijeme obdobného postupu a vyjádříme jacobíán pomocí souřadnic  $y_i$  následujícím způsobem

$$\begin{aligned}y &= y_1 + \bar{y}_2\xi + \bar{y}_3(1 - \xi), \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \bar{y}_2 - \bar{y}_3 = y_2 - y_1 - y_3 + y_1 = y_2 - y_3, \\ |J_e^*| &= |y_2 - y_3|.\end{aligned}$$

Dosazením (2.47) a (2.50) dostaneme vyjádření integrálu (3) pro vnitřní uzel 1 ve tvaru

$$-\frac{i\omega}{c} \int_{\Gamma_{e_{out}}} w(x, y)p(x, y)dS = -\frac{i\omega}{c} |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^{1-\xi} \phi^{*T}(\xi)\phi^*(\xi)d\xi}_{\mathbf{A}} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.66)$$

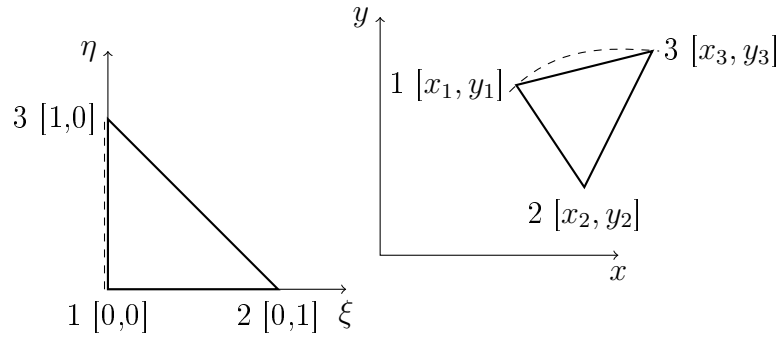
kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

2. Uzel 2 je vnitřní.

I zde platí obdobné vztahy jako v předchozím případě. Jak je vidět na obrázku (2.5), souřadnice  $\xi$  je nyní nulová. Změní se tak maticová funkce  $\phi^*$  i jacobíán transformace

$$\begin{aligned}\phi^*(\eta) &= [1 \quad 0 \quad \eta], \\ x &= x_1 + \bar{x}_3\eta, \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \bar{x}_3 = x_3 - x_1, \\ |J_e^*| &= |x_3 - x_1|.\end{aligned}$$



Obrázek 2.5: Uzel 2 trojúhelníkového prvku je vnitřní.

Abychom i nyní dokázali definovat jacobíán transformace obecně, odvodíme i druhé vyjádření ve tvaru

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \bar{y}_3 \eta, \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \bar{y}_3 = y_3 - y_1, \\ |J_e^*| &= |y_3 - y_1|. \end{aligned}$$

V případě že uzel 2 je vnitřní, dostáváme integrál (3) ve tvaru

$$-\frac{i\omega}{c} \int_{\Gamma_{eout}} w(x, y) p(x, y) dS = -\frac{i\omega}{c} |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^1 \phi^{*T}(\eta) \phi^*(\eta) d\eta}_{\mathbf{A}} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.67)$$

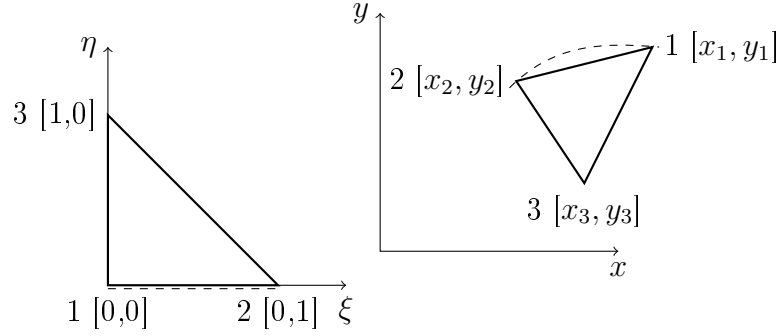
kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

3. Uzel 3 je vnitřní.

Na obrázku (2.6) je vidět, že nyní je souřadnice  $\eta = 0$ . Změna maticové funkce  $\phi$  se projeví následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \phi^*(\xi) &= [1 \quad \xi \quad 0], \\ x &= x_1 + \bar{x}_2 \xi, \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \bar{x}_2 = x_2 - x_1, \\ |J_e^*| &= |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$



Obrázek 2.6: Úzel 3 trojúhelníkového prvku je vnitřní.

A doplníme i druhý způsob odvození jacobíanu

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \bar{y}_2 \xi, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \bar{y}_2 = y_2 - y_1, \\ |J_e^*| &= |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

Pro vnitřní uzel 3 pak dostáváme vyjádření integrálu (3) ve tvaru

$$-\frac{i\omega}{c} \int_{\Gamma_{e_{out}}} w(x, y) p(x, y) dS = -\frac{i\omega}{c} |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^1 \phi^{*T}(\xi) \phi^*(\xi) d\xi}_{\mathbf{A}} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.68)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Můžeme tedy vyslovit pravidlo, že pro plnou matici  $\mathbf{A}$  v případě vnitřního uzlu 1, můžeme vynulovat druhý řádek a sloupec v případě vnitřního uzlu 2, respektive, třetí řádek a sloupec v případě vnitřního uzlu 3.

Integrál (3) tak má obecně tvar

$$-\frac{i\omega}{c} \int_{\Gamma_{e_{out}}} w(x, y) p(x, y) dS = -\frac{i\omega}{c} |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.69)$$

kde určení  $|J_e|$  a  $\mathbf{A}$  závisí na vnitřním uzlu konečného prvku.

Na závěr odvodíme integrál (4) rovnice (2.19), který popisuje vliv okrajové podmínky na vstupu (inlet)

$$\int_{\Gamma_{in}} w(\mathbf{x}) (-\rho i \omega v_n(\mathbf{x})) dS = \int_{\Gamma_{in}} w(x, y) (-\rho i \omega v_n(x, y)) dS. \quad (2.70)$$

Jako v předcházejícím odvození mohou nastat tři případy. Schéma i postup je obdobný proto uveďme jen rozdíly a jejich projev.

1. Uzel 1 je vnitřní, máme tedy schéma jako na obrázku (2.4), stejná je i maticová funkce  $\phi^*$  a jacobiany

$$\begin{aligned} \phi^*(\xi) &= [1 \quad \xi \quad 1 - \xi], \\ |J_e^*| &= |x_2 - x_3|, \\ |J_e^*| &= |y_2 - y_3|. \end{aligned}$$

Změní se však výsledek integrace, který má nyní podobu sloupcové matice  $\mathbf{b}$

$$\int_{\Gamma_{ein}} w(x, y) (-\rho i \omega v_n(x, y)) dS = -\rho i \omega v_n |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^{1-\xi} \phi^{*T}(\xi) d\xi}_{\mathbf{b}}, \quad (2.71)$$

kde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2. Uzel 2 je vnitřní, schéma je opět shodné s předchozím případem, uvedeným na obrázku (2.5), stejně tak úpravy vztahů a proto rovnou přejdeme k vyjádření podstatného. Vztahy

$$\begin{aligned} \phi^*(\eta) &= [1 \quad 0 \quad \eta], \\ |J_e^*| &= |x_3 - x_1|, \\ |J_e^*| &= |y_3 - y_1|, \end{aligned}$$

aplikujeme na integrál (4) a výsledkem je

$$\int_{\Gamma_{ein}} w(x, y) (-\rho i \omega v_n(x, y)) dS = -\rho i \omega v_n |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^1 \phi^{*T}(\eta) d\eta}_{\mathbf{b}}, \quad (2.72)$$

kde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Uzel 3 je vnitřní, schéma je na obrázku (2.6) a následující postup je také shodný. Vyjádříme tedy jen maticovou funkci  $\phi^*$ , absolutní hodnoty jacobíánů a matici  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \phi^*(\xi) &= [1 \quad \xi \quad 0], \\ |J_e^*| &= |x_2 - x_1|, \\ |J_e^*| &= |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

Tyto vztahy využijeme pro vyjádření integrálu (4) pro případ, kdy je třetí uzel vnitřní tedy

$$\int_{\Gamma_{e_{in}}} w(x, y) (-\rho i \omega v_n(x, y)) dS = -\rho i \omega v_n |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^1 \phi^{*T}(\xi) d\xi}_{\mathbf{b}}, \quad (2.73)$$

kde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stejně jako v případě vyjádření okrajové podmínky na výstupu (outlet) můžeme vidět, že pro vnitřní uzel 1 je sloupcová matice  $\mathbf{b}$  plná, pro vnitřní uzly 2 a 3 je pak druhý respektive třetí prvek nulový. Integrál (4) má tvar

$$\int_{\Gamma_{e_{in}}} w(x, y) (-\rho i \omega v_n(x, y)) dS = -\rho i \omega v_n |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{b}, \quad (2.74)$$

kde  $|J_e^*|$  a  $\mathbf{b}$  závisí na vnitřním uzlu konečného prvku.

Nyní máme vyjádřeny všechny integrály ve vztahu (2.19) v maticové formě pro trojúhelníkové prvky s lineární aproximací průběhu akustického tlaku. Shrňme dílčí odvození

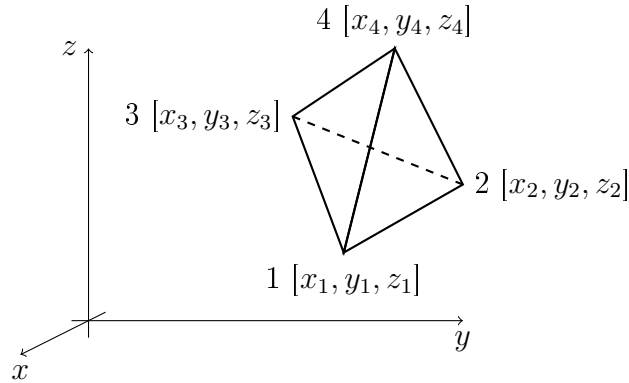


zpět do jedné rovnice, včetně vyjádření jednotlivých matic pro konečný prvek

$$\underbrace{k^2 |J_e| \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A}_o \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1}}_{\mathbf{H}_e} \mathbf{p}_e - \underbrace{\frac{1}{2|J_e|} \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1}}_{\mathbf{G}_e} \mathbf{p}_e - \underbrace{\frac{i\omega}{c} |J_e^*| \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1}}_{\mathbf{F}_e} \mathbf{p}_e = \underbrace{i\omega \rho v_n |J_e^*| \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{b}}_{\mathbf{f}_e}. \quad (2.75)$$

Sestavené globální matice pak mají formálně tvar

$$\frac{1}{\rho} \left( i\omega \mathbf{H} - \frac{1}{i\omega} \mathbf{G} - \mathbf{F} \right) \mathbf{p} = \mathbf{f}. \quad (2.76)$$



Obrázek 2.7: Konečný prvek typu čtyřstěn.

### 2.3.2 Řešení ve 3D prostoru

Uveďme nejprve předpis pro integrál (1) z rovnice (2.19), jež má pro tři prostorové souřadnice tvar

$$\int_{\Omega} k^2 w(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} k^2 w(x, y, z) p(x, y, z) d\mathbf{x}, \quad (2.77)$$

a provedme další potřebné kroky k jeho vyjádření v maticové formě. Pro řešení rozložení komplexní amplitudy akustického tlaku ve 3D prostoru použijeme opět lineární aproximaci, která má v tomto případě tvar

$$p(x, y, z) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\psi}(x, y, z) \mathbf{c}. \quad (2.78)$$

Vyjádříme hodnoty tlaků v uzlech konečného prvku dosazením souřadnic uzlů do (2.78) dle schéma na obrázku (2.7) jako

$$\begin{aligned} p_1 &= c_0 + c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1, \\ p_2 &= c_0 + c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 z_2, \\ p_3 &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3 z_3, \\ p_4 &= c_0 + c_1 x_4 + c_2 y_4 + c_3 z_4. \end{aligned}$$

Předchozí vztah můžeme vyjádřit maticově jako

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}}. \quad (2.79)$$

Nyní vyjádříme neznámé koeficienty  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{S}_e \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.80)$$

a dosadíme zpět do (2.78). Tím získáme popis rozložení akustického tlaku na jednom konečném prvku podle hodnot v uzlech ve tvaru

$$p(x, y, z) = \boldsymbol{\psi}(x, y, z) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e. \quad (2.81)$$

Provedeme, na obrázku (2.8) naznačenou, transformaci obecného čtyřstěnu na jednotkový čtyřstěn v souřadnicích  $\xi, \eta, \zeta$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \bar{x}_2 \xi + \bar{x}_3 \eta + \bar{x}_4 \zeta, \\ y &= y_1 + \bar{y}_2 \xi + \bar{y}_3 \eta + \bar{y}_4 \zeta, \\ z &= z_1 + \bar{z}_2 \xi + \bar{z}_3 \eta + \bar{z}_4 \zeta, \end{aligned} \quad (2.82)$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i - x_1, & i &= 2, 3, 4. \\ \bar{y}_i &= y_i - y_1, \\ \bar{z}_i &= z_i - z_1, \end{aligned}$$

Pomocí transformačních vztahů vyjádříme akustický tlak ve vztahu (2.81) v souřadnicích  $\xi, \eta, \zeta$  ve tvaru

$$p(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\psi}^*(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.83)$$

kde

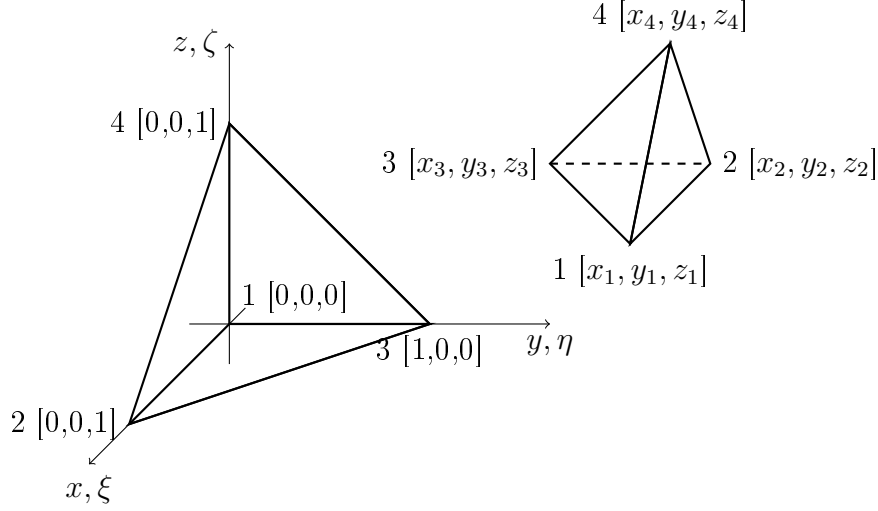
$$\boldsymbol{\psi}^*(\xi, \eta, \zeta) = \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} &= [1 \quad x_1 + \bar{x}_2 \xi + \bar{x}_3 \eta + \bar{x}_4 \zeta \quad y_1 + \bar{y}_2 \xi + \bar{y}_3 \eta + \bar{y}_4 \zeta \quad z_1 + \bar{z}_2 \xi + \bar{z}_3 \eta + \bar{z}_4 \zeta] = \\ &= \underbrace{[1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta]}_{\boldsymbol{\phi}(\xi, \eta, \zeta)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \\ 0 & \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & \bar{z}_3 \\ 0 & \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & \bar{z}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_e}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Dostáváme rozložení tlaku na jednotkovém čtyřstěnu s užitím maticové funkce  $\boldsymbol{\phi}$  ve tvaru

$$p(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\phi}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e. \quad (2.86)$$

Zavedeme ještě matici transformace souřadnic  $x, y, z$  a  $\xi, \eta, \zeta$ . Jacobiova matice má tvar



Obrázek 2.8: Transformace na jednotkový čtyřstěn.

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & \bar{z}_3 \\ \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & \bar{z}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

a její determinant

$$J_e = \bar{x}_2 \bar{y}_3 \bar{z}_4 + \bar{x}_3 \bar{y}_4 \bar{z}_2 + \bar{x}_4 \bar{y}_2 \bar{z}_3 - \bar{x}_4 \bar{y}_3 \bar{z}_2 - \bar{x}_3 \bar{y}_2 \bar{z}_4 - \bar{x}_2 \bar{y}_4 \bar{z}_3, \quad (2.88)$$

jehož absolutní hodnota má tvar

$$|J_e| = |\bar{x}_2 \bar{y}_3 \bar{z}_4 + \bar{x}_3 \bar{y}_4 \bar{z}_2 + \bar{x}_4 \bar{y}_2 \bar{z}_3 - \bar{x}_4 \bar{y}_3 \bar{z}_2 - \bar{x}_3 \bar{y}_2 \bar{z}_4 - \bar{x}_2 \bar{y}_4 \bar{z}_3|, \quad (2.89)$$

využijeme při integraci pomocí v normalizovaných souřadnicích  $\xi$ ,  $\eta$  a  $\zeta$ . Pomocí původních a normalizovaných souřadnic můžeme zapsat také testovací funkce na elementu, včetně transpozice, ve tvaru

$$w(x, y, z) = \boldsymbol{\psi}(x, y, z) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{w}_e, \quad (2.90)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\psi}^*(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{w}_e = \boldsymbol{\phi}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{w}_e = \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \boldsymbol{\phi}^T(\xi, \eta, \zeta). \quad (2.91)$$

Nyní již zapíšeme integrál (1) ve vztahu (2.19) pomocí (2.86) a (2.91) ve tvaru

$$\begin{aligned}
 k^2 \int_{\Omega_e} w(x, y, z) p(x, y, z) d\mathbf{x} &= k^2 \int_{\Omega_e} |J_e| w(\xi, \eta, \zeta) p(\xi, \eta, \zeta) d\boldsymbol{\xi} = \\
 &= k^2 |J_e| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \phi^T(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) d\zeta d\eta d\xi}_{\mathbf{A}_o} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.92)
 \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60} \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

Integrál (1) tak dostáváme pro jeden konečný prvek v maticové formě

$$k^2 \int_{\Omega_e} w(x, y, z) p(x, y, z) d\mathbf{x} = k^2 |J_e| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A}_o \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e. \quad (2.94)$$

Pro odvození maticové formy integrálu (2) rovnice (2.19), který je pro 3D prostor ve tvaru

$$\int_{\Omega} \nabla w(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla w(x, y, z) \cdot \nabla p(x, y, z) d\mathbf{x}, \quad (2.95)$$

začneme vyjádřením gradientu tlaku

$$p(x, y, z) = \boldsymbol{\psi}(x, y, z) \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e \Rightarrow \nabla p(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.96)$$

kde

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, & \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\bar{y}_3}{|J_e|}, \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-\bar{y}_2}{|J_e|}, \\
 \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{-\bar{x}_3}{|J_e|}, \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\bar{x}_2}{|J_e|}, \\
 \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}, & \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{-\bar{x}_3}{|J_e|}, \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\bar{x}_2}{|J_e|}.
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Gradient tlaku tak zapíšeme pomocí normalizovaných souřadnic v maticové podobě jako

$$\nabla p(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_e)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_e^{-T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ \frac{\partial p}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_{\nabla^* p(\xi, \eta, \zeta)}. \tag{2.98}$$

Vyjádríme gradient tlaku v souřadnicích  $\xi, \eta, \zeta$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \\
 \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \\
 \frac{\partial p}{\partial \zeta} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta},
 \end{aligned}$$

a zapíšeme jej v maticové podobě

$$\nabla^* p = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_e^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\nabla p(x, y, z)}. \tag{2.99}$$

Předchozí vztah ještě vyjádříme pomocí souřadnic uzlů konečného prvku před transformací ve tvaru

$$\nabla^* p = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & \bar{z}_3 \\ \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & \bar{z}_4 \end{bmatrix} \nabla p = \mathbf{J}_e^T \nabla p. \tag{2.100}$$

Inverzí transformační matice  $\mathbf{J}_e^T$  získáme matici potřebnou pro vyjádření gradientu tlaku, i testovací funkce, v původních souřadnicích

$$\mathbf{J}_e^{-T} = \frac{1}{J_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{y}_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3\bar{y}_4 & \bar{z}_2\bar{y}_4 - \bar{y}_2\bar{z}_4 & \bar{y}_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2\bar{y}_3 \\ \bar{z}_3\bar{x}_4 - \bar{x}_3\bar{z}_4 & \bar{x}_2\bar{z}_4 - \bar{z}_2\bar{x}_4 & \bar{z}_2\bar{x}_3 - \bar{x}_2\bar{z}_3 \\ \bar{x}_3\bar{y}_4 - \bar{y}_3\bar{x}_4 & \bar{y}_2\bar{x}_4 - \bar{x}_2\bar{y}_4 & \bar{x}_2\bar{y}_3 - \bar{y}_2\bar{x}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_e}, \quad (2.101)$$

Po dosazení získaných matic se dostáváme k závěru, že

$$\nabla^* p = \mathbf{J}_e^T \nabla p \Rightarrow \nabla p = \mathbf{J}_e^{-T} \nabla^* p = \frac{1}{J_e} \mathbf{D}_e \nabla^* p.$$

Získáme tak rozložení gradientu tlaku na jednom konečném prvku

$$\nabla p(x, y, z) = \frac{1}{J_e} \mathbf{D}_e \nabla^* p(\xi, \eta, \zeta). \quad (2.102)$$

Obdobný vztah platí také pro testovací funkce

$$\nabla w(x, y, z) = \frac{1}{J_e} \mathbf{D}_e \nabla^* w(\xi, \eta, \zeta). \quad (2.103)$$

Nyní vyjádříme gradient akustického tlaku v souřadnicích  $\xi, \eta, \zeta$  tak, že použijeme již získané vztahy (2.86) a (2.91)

$$\begin{aligned} p(\xi, \eta, \zeta) &= \phi(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \phi(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{w}_e, \end{aligned}$$

kde

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta], \quad (2.104)$$

na které aplikujeme operátor gradientu v souřadnicích  $\xi, \eta, \zeta$

$$\nabla^* p(\xi, \eta, \zeta) = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\eta \\ \phi_\zeta \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.105)$$

kde

$$\phi_\xi = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad (2.106)$$

$$\phi_\eta = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad (2.107)$$

$$\phi_\zeta = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]. \quad (2.108)$$

V důsledku toho píšeme

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

Potom je možné zapsat (2.102) ve tvaru

$$\nabla p(x, y, z) = \frac{1}{J_e} \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.110)$$

a stejně tak je možné (2.103) zapsat ve tvaru

$$\nabla w(x, y, z) = \frac{1}{J_e} \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{w}_e. \quad (2.111)$$

Nyní již zapíšeme integrál (2) ve vztahu (2.19) ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \nabla w(x, y, z) \cdot \nabla p(x, y, z) d\mathbf{x} &= \frac{|J_e|}{J_e^2} \int_{\Omega_e} \nabla^{*T} w(\xi, \eta, \zeta) \nabla^* p(\xi, \eta, \zeta) d\boldsymbol{\xi} = \\ &= \frac{1}{|J_e|} \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}_e^T \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi}_{\frac{1}{6}} \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \end{aligned} \quad (2.112)$$

Dostáváme tak integrál (2) pro jeden čtyřstěnný prvek

$$\int_{\Omega_e} \nabla w(x, y, z) \cdot \nabla p(x, y, z) d\mathbf{x} = \frac{1}{6|J_e|} \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e \quad (2.113)$$

Nyní vyřešíme integrál (3) z rovnice (2.19), který má pro tři prostorové souřadnice tvar

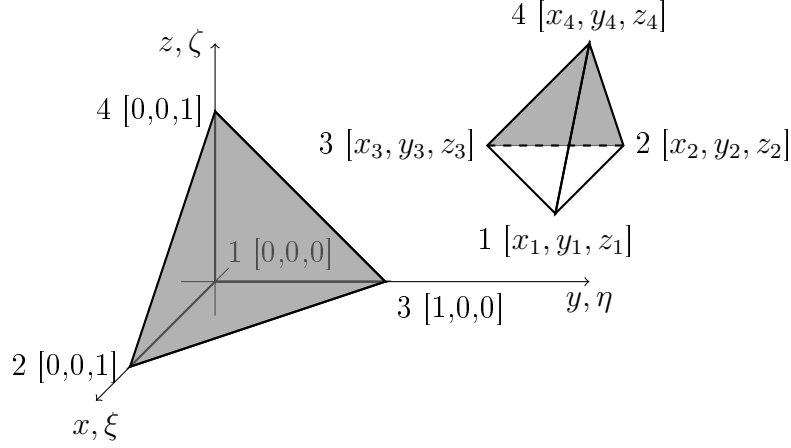
$$\frac{i\omega}{c} \int_{\Gamma_{out}} w(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) dS = \frac{i\omega}{c} \int_{\Gamma_{out}} w(x, y, z) p(x, y, z) dS. \quad (2.114)$$

Jelikož se jedná o vyjádření hraničního členu pro okrajovou podmínku, budeme rozlišovat čtyři možnosti s ohledem na to, která ze stran čtyřúhelníkového prvku leží na hranici.

1. Uzel 1 je vnitřní.

Schéma je vidět na obrázku (2.9). Znovu využijeme vztahů (2.86) a (2.91). Z (2.104) vyloučíme  $\zeta = 1 - \xi - \eta$  a dostaneme  $\boldsymbol{\phi}^*(\xi, \eta) = [1 \ \xi \ \eta \ 1 - \xi - \eta]$ . Nyní





Obrázek 2.9: Uzel 1 čtyřstěnného prvku je vnitřní.

již zapíšeme integrál (3) ve vztahu (2.19) ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_{e_{out}}} w(x, y, z) p(x, y, z) d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma_{e_{out}}} |J_e^*| w(\xi, \eta, \zeta) p(\xi, \eta, \zeta) d\xi = \\
 &= |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi^{*T}(\xi, \eta) \phi^*(\xi, \eta) d\eta d\xi}_{\mathbf{A}} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.115)
 \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

Potřebujeme určit  $J_e^*$ . Vrátime se k transformačním vztahům (2.82) a vyloučíme souřadnice  $z$  a  $\zeta$

$$\begin{aligned}
 x &= x_1 + \bar{x}_2 \xi + \bar{x}_3 \eta + \bar{x}_4 (1 - \xi - \eta), \\
 y &= y_1 + \bar{y}_2 \xi + \bar{y}_3 \eta + \bar{y}_4 (1 - \xi - \eta).
 \end{aligned}$$

Určíme také Jacobiho matici transformace

$$\mathbf{J}_e^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_4 & \bar{y}_2 - \bar{y}_4 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & \bar{y}_3 - \bar{y}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

a její determinant dostaneme ve tvaru

$$J_e^* = (\bar{x}_2 - \bar{x}_4)(\bar{y}_3 - \bar{y}_4) - (\bar{y}_2 - \bar{y}_4)(\bar{x}_3 - \bar{x}_4). \quad (2.118)$$

K úplné obecnosti výpočtového algoritmu musíme ještě vyjádřit  $J_e^*$  dalšími dvěma způsoby, tedy vyloučíme souřadnici  $y$  a posléze souřadnici  $x$ . Postup je analogický k již uvedenému. Vyloučíme souřadnici  $y$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \bar{x}_2\xi + \bar{x}_3\eta + \bar{x}_4(1 - \xi - \eta), \\ z &= z_1 + \bar{z}_2\xi + \bar{z}_3\eta + \bar{z}_4(1 - \xi - \eta). \end{aligned}$$

Znovu určíme transformační matici

$$\mathbf{J}_e^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_4 & \bar{z}_2 - \bar{z}_4 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & \bar{z}_3 - \bar{z}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.119)$$

i její determinant má tvar

$$J_e^* = (\bar{x}_2 - \bar{x}_4)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_4)(\bar{x}_3 - \bar{x}_4). \quad (2.120)$$

Nyní vyloučíme souřadnici  $x$

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \bar{y}_2\xi + \bar{y}_3\eta + \bar{y}_4(1 - \xi - \eta), \\ z &= z_1 + \bar{z}_2\xi + \bar{z}_3\eta + \bar{z}_4(1 - \xi - \eta), \end{aligned}$$

zapišeme matici transformace

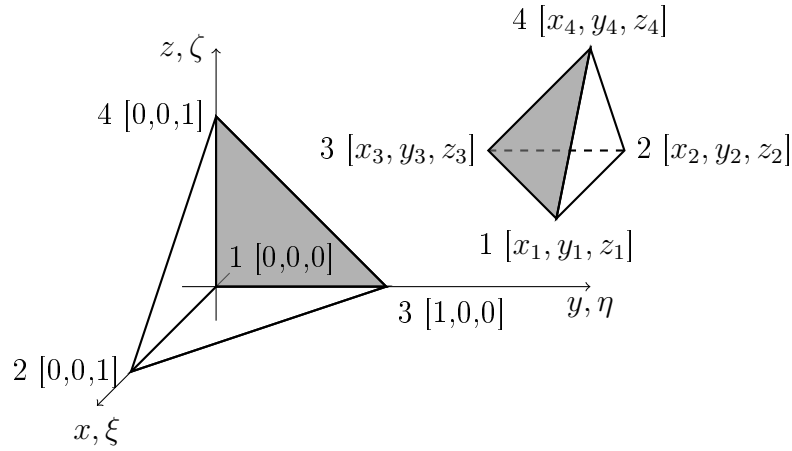
$$\mathbf{J}_e^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_2 - \bar{y}_4 & \bar{z}_2 - \bar{z}_4 \\ \bar{y}_3 - \bar{y}_4 & \bar{z}_3 - \bar{z}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.121)$$

a její determinant dostáváme v podobě

$$J_e^* = (\bar{y}_2 - \bar{y}_4)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_4)(\bar{y}_3 - \bar{y}_4). \quad (2.122)$$

Celý integrál (3) pak můžeme zapsat jako

$$\frac{i\omega}{c} \int_{\Gamma_{e_{out}}} w(x, y, z) p(x, y, z) dS = \frac{i\omega}{c} |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e. \quad (2.123)$$



Obrázek 2.10: Uzel 2 čtyřstěnného prvku je vnitřní.

Předchozí vztahy zůstávají v platnosti i pro vyjádření tvaru integrálu pro ostatní uzly konečného prvku jako vnitřní, změní se jen maticová funkce  $\phi^*$  a integrační meze, čímž se samozřejmě změní matice  $\mathbf{A}$  a determinant Jacobiovy matice  $J_e^*$ . Proto dál uveďme jen změny a jejich vliv.

2. Uzel 2 je vnitřní.

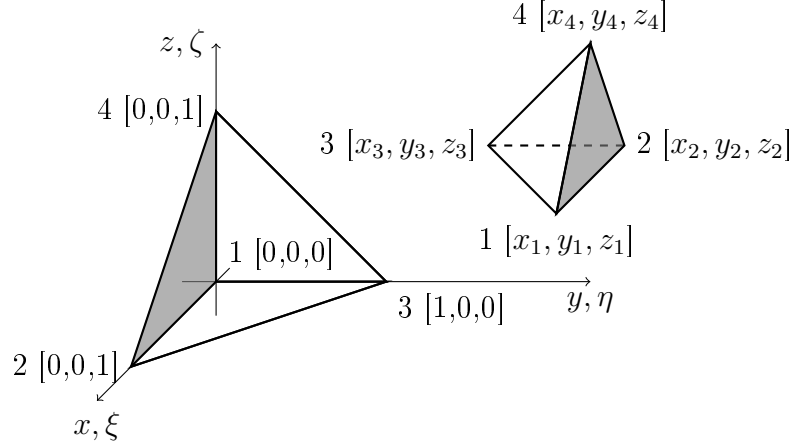
Schéma je vidět na obrázku (2.10). Potom máme bázové funkce ve tvaru  $\phi^*(\eta, \zeta) = [1 \ 0 \ \eta \ \zeta]$  a matice  $\mathbf{A}$  má tvar

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \phi^{*T}(\eta, \zeta) \phi^*(\eta, \zeta) d\zeta d\eta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

Determinant matice transformace souřadnic  $J_e^* = \bar{x}_3\bar{y}_4 - \bar{x}_4\bar{y}_3$  respektive  $J_e^* = \bar{x}_3\bar{z}_4 - \bar{x}_4\bar{z}_3$  či  $J_e^* = \bar{y}_3\bar{z}_4 - \bar{y}_4\bar{z}_3$ .

3. Uzel 3 je vnitřní.

Schéma je vidět na obrázku (2.11). Souřadnice  $\eta = 0$ . Potom máme bázové funkce



Obrázek 2.11: Uzel 3 čtyřstěnného prvku je vnitřní.

ve tvaru  $\phi^*(\xi, \zeta) = [1 \ \xi \ 0 \ \zeta]$  a matice  $\mathbf{A}$  má tvar

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi^{*T}(\xi, \zeta) \phi^*(\xi, \zeta) d\zeta d\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}. \quad (2.125)$$

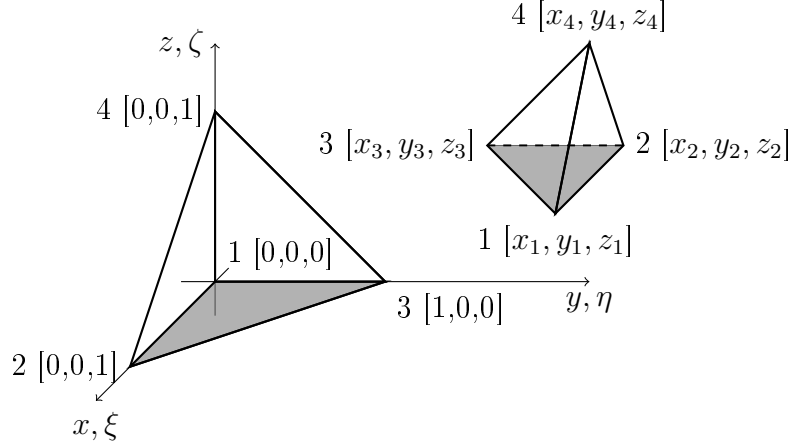
Determinant matice transformace souřadnic  $J_e^* = \bar{x}_2 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 \bar{y}_2$  respektive  $J_e^* = \bar{x}_2 \bar{z}_4 - \bar{x}_4 \bar{z}_2$  či  $J_e^* = \bar{y}_2 \bar{z}_4 - \bar{y}_4 \bar{z}_2$ .

4. Uzel 4 je vnitřní.

Schéma je vidět na obrázku (2.12). Potom máme bázevé funkce ve tvaru  $\phi^*(\xi, \eta) = [1 \ \xi \ \eta \ 0]$  a matice  $\mathbf{A}$  má tvar

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi^{*T}(\xi, \eta) \phi^*(\xi, \eta) d\eta d\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.126)$$

Determinant matice transformace souřadnic  $J_e^* = \bar{x}_2 \bar{y}_3 - \bar{x}_3 \bar{y}_2$ ,  $J_e^* = \bar{x}_2 \bar{z}_3 - \bar{x}_3 \bar{z}_2$  nebo  $J_e^* = \bar{y}_2 \bar{z}_3 - \bar{y}_3 \bar{z}_2$ .



Obrázek 2.12: Uzel 4 čtyřstěnného prvku je vnitřní.

Integrál (3) ve vztahu (2.19) pak můžeme zapsat jako

$$\frac{i\omega}{c} \int_{\Gamma_{eout}} w(x, y, z) p(x, y, z) dS = \frac{i\omega}{c} |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{p}_e, \quad (2.127)$$

kde  $J_e^*$  a  $\mathbf{A}$  závisí na vnitřním uzlu konečného prvku. Můžeme si všimnout, že matice  $\mathbf{A}$  je pro vnitřní uzel 1 plná a pro případ, kdy je vnitřní uzel 2 je vynulovaný druhý sloupec a druhá řádka matice  $\mathbf{A}$ . Pro vnitřní uzel 3 je zase vynulována třetí řádka a třetí sloupec. Stejně tak pro vnitřní uzel 4 je vynulována čtvrtá řádka a čtvrtý sloupec matice  $\mathbf{A}$ . Dále jsme pro každý případ určovali  $J_e^*$  hned několika způsoby. To za účelem obecnosti algoritmu, který vybírá z trojice určení  $|J_e^*|$  to maximální.

Nyní zbývá vyjádřit integrál (4). Stejně jako při odvození vyjádření okrajové podmínky na výstupu budeme rozlišovat čtyři případy dle toho, který uzel je vnitřní.

1. Začneme-li opět uzlem 1, tedy případem na obrázku (2.9), máme bázové funkce opět ve tvaru

$$\phi^*(\xi, \eta) = [1 \quad \xi \quad \eta \quad 1 - \xi - \eta].$$

Integrál (4) ve vztahu (2.19) má tvar

$$\int_{\Gamma_{in}} -\rho i \omega v_n w(x, y, z) d\mathbf{x} = -\rho i \omega v_n \int_{\Gamma_{in}} |J_e^*| w(\xi, \eta, \zeta) d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.128)$$

Použijeme opět vztah (2.91), ve kterém provedeme již zmíněnou redukci proměnných a dosadíme. Získáme tak vyjádření integrálu (4), pro případ, kdy je uzel 1 konečného

prvku vnitřní, ve tvaru

$$\int_{\Gamma_{e_{in}}} -\rho i \omega v_n(x, y, z) w(x, y, z) d\mathbf{x} = -\rho i \omega v_n |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi^{*T}(\xi, \eta) d\eta d\xi}_{\mathbf{b}}, \quad (2.129)$$

kde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \quad (2.130)$$

Zbývající neznámou je  $J_e^*$ . Vyjdeme ze vztahů (2.82) popisujících transformaci souřadnic, kde vyloučíme souřadnice  $z$  a  $\zeta$ . Dostaneme dvě rovnice

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \bar{x}_2 \xi + \bar{x}_3 \eta + \bar{x}_4 (1 - \xi - \eta), \\ y &= y_1 + \bar{y}_2 \xi + \bar{y}_3 \eta + \bar{y}_4 (1 - \xi - \eta), \end{aligned}$$

z nichž sestavíme Jacobiovu matici transformace

$$\mathbf{J}_e^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_4 & \bar{y}_2 - \bar{y}_4 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & \bar{y}_3 - \bar{y}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.131)$$

jejíž determinant hledáme a který má tvar

$$J_e^* = (\bar{x}_2 - \bar{x}_4)(\bar{y}_3 - \bar{y}_4) - (\bar{y}_2 - \bar{y}_4)(\bar{x}_3 - \bar{x}_4). \quad (2.132)$$

Odvození zbylých vztahů je již uvedeno v části věnující se vyjádření integrálu (3), proto si uvedeme jen výsledek

$$J_e^* = (\bar{x}_2 - \bar{x}_4)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_4)(\bar{x}_3 - \bar{x}_4), \quad (2.133)$$

$$J_e^* = (\bar{y}_2 - \bar{y}_4)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_4)(\bar{y}_3 - \bar{y}_4). \quad (2.134)$$

Celý integrál (4) pak můžeme zapsat v maticové formě jako

$$\int_{\Gamma_{e_{in}}} -\rho i \omega v_n(x, y, z) w(x, y, z) dS = -\rho i \omega v_n |J_e^*| \mathbf{w}_e^T \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{b}. \quad (2.135)$$

Stejně jako při odvození okrajové podmínky na výstupu, teď zmíníme jen změny pro ostatní uzly coby vnitřní a jejich vliv na sloupcovou matici  $\mathbf{b}$  a determinant matice transformace souřadnic  $J_e^*$ .

2. Uzel 2 je vnitřní.

Potom máme báze funkce ve tvaru  $\phi^*(\eta, \zeta) = [1 \ 0 \ \eta \ \zeta]$  a matice  $\mathbf{b}$  má tvar

$$\mathbf{b} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \phi^{*T}(\eta, \zeta) d\zeta d\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \quad (2.136)$$

Determinant matice transformace souřadnic  $J_e^* = \bar{x}_3\bar{y}_4 - \bar{x}_4\bar{y}_3$ , respektive  $J_e^* = \bar{x}_3\bar{z}_4 - \bar{x}_4\bar{z}_3$  či  $J_e^* = \bar{y}_3\bar{z}_4 - \bar{y}_4\bar{z}_3$ .

3. Uzel 3 je vnitřní.

Potom máme báze funkce ve tvaru  $\phi^*(\xi, \zeta) = [1 \ \xi \ 0 \ \zeta]$  a matice  $\mathbf{b}$  má tvar

$$\mathbf{b} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi^{*T}(\xi, \zeta) d\zeta d\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \quad (2.137)$$

Determinant matice transformace souřadnic  $J_e^* = \bar{x}_2\bar{y}_4 - \bar{x}_4\bar{y}_2$  respektive  $J_e^* = \bar{x}_2\bar{z}_4 - \bar{x}_4\bar{z}_2$  či  $J_e^* = \bar{y}_2\bar{z}_4 - \bar{y}_4\bar{z}_2$ .

4. Uzel 4 je vnitřní.

Potom máme báze funkce ve tvaru  $\phi^*(\xi, \eta) = [1 \ \xi \ \eta \ 0]$  a matice  $\mathbf{b}$  má tvar

$$\mathbf{b} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi^{*T}(\xi, \eta) d\eta d\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.138)$$

Determinant matice transformace souřadnic  $J_e^* = \bar{x}_2\bar{y}_3 - \bar{x}_3\bar{y}_2$ ,  $J_e^* = \bar{x}_2\bar{z}_3 - \bar{x}_3\bar{z}_2$  nebo  $J_e^* = \bar{y}_2\bar{z}_3 - \bar{y}_3\bar{z}_2$ .

Jako v předchozím odvozování maticového tvaru integrálu (3) můžeme vidět, že sloupcová matice  $\mathbf{b}$  je plná pro případ, kdy je uzel 1 vnitřní. V případě, že je uzel 2 vnitřní, je druhý prvek  $\mathbf{b}$  nulový, pro vnitřní uzel 3 je třetí prvek nulový a pro vnitřní uzel 4 je čtvrtý prvek nulový.

Máme vyjádřeny všechny integrály z rovnice (2.19) v maticové formě. Vzhledem k (2.94), (2.113), (2.123) a (2.135) můžeme tuto rovnici pro jeden prvek zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \overbrace{k^2 |J_e| \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A}_o \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1}}^{\mathbf{H}_e} \mathbf{p}_e - \overbrace{\frac{1}{6|J_e|} \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{L} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1}}^{\mathbf{G}_e} \mathbf{p}_e - \\ - i\omega \underbrace{\frac{1}{c} |J_e^*| \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{A} \mathbf{X}_e \mathbf{S}_e^{-1}}_{\mathbf{F}_e} \mathbf{p}_e = i\omega \rho v_n \underbrace{|J_e^*| \mathbf{S}_e^{-T} \mathbf{X}_e^T \mathbf{b}}_{\mathbf{f}_e}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Ještě připomeňme, že matice  $\mathbf{F}_e$  a  $\mathbf{f}_e$  konečných prvků se projeví jen, pokud daný prvek leží na hranici, kde předepisujeme okrajovou podmínku výstupu, respektive vstupu. Po sestavení globálních matic získáme řešením soustavy lineárních algebraických rovnic kýžené amplitudy akustického tlaku v bodech sítě konečných prvků. Soustava rovnic má formálně tvar

$$\frac{1}{\rho} \left( i\omega \mathbf{H} - \frac{1}{i\omega} \mathbf{G} - \mathbf{F} \right) \mathbf{p} = \mathbf{f}. \quad (2.140)$$



---

# Kapitola 3

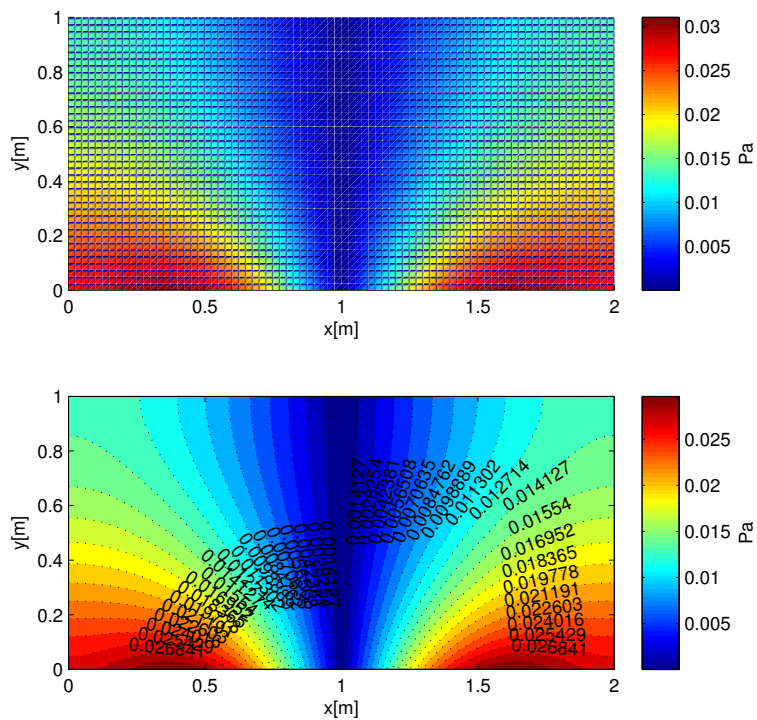
## Výpočtový model

### 3.1 Porovnání analytického a přibližného řešení

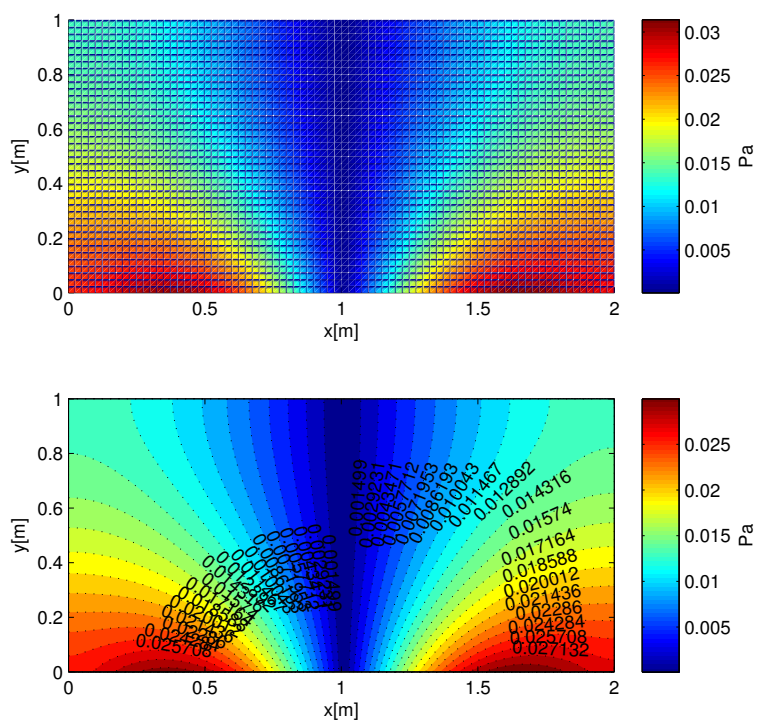
V předchozí kapitole byly zpracovány tři přístupy pro výpočet akustického tlaku. Analytické řešení pomocí Galerkinovy metody ve 2D prostoru a numerický výpočet pomocí metody konečných prvků, jak ve 2D tak ve 3D prostoru. Výsledky získané pomocí Galerkinovy metody poslouží k verifikaci výsledků získaných pomocí metody konečných prvků. Zvolíme jednoduchou obdélníkovou oblast popsanou na obrázku (2.1) na jejíž celé spodní hraně předepíšeme amplitudu rychlosti ve směru normály. Na levé i pravé hraně oblasti uvažujeme tuhé stěny. Horní hranu uvažujeme jako volný (anechoidní) výstup do prostoru. Ve třech rozměrech jen rozšíříme oblast o hloubku, z hran se tak stanou plochy, ale konfigurace úlohy zůstane totožná.

Zbývající parametry této úlohy jsou hustota vzduchu  $\rho = 1,177 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , rychlost zvuku ve vzduchu  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , kruhová frekvence buzení  $\omega = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Obdélníková oblast má potom rozměr  $b = 2 \text{ m}$  a  $a = 1 \text{ m}$ . Pro kvádrovou oblast pak tuto obdélníkovou rozšíříme o třetí rozměr  $0,1 \text{ m}$ . Rozložení amplitudy rychlosti po délce hranice  $\Gamma_{in}$  je ve tvaru  $v_n(x) = 0,001 \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pro aproximaci tlaku v Galerkinově metodě bylo zvoleno  $N = 8$ .

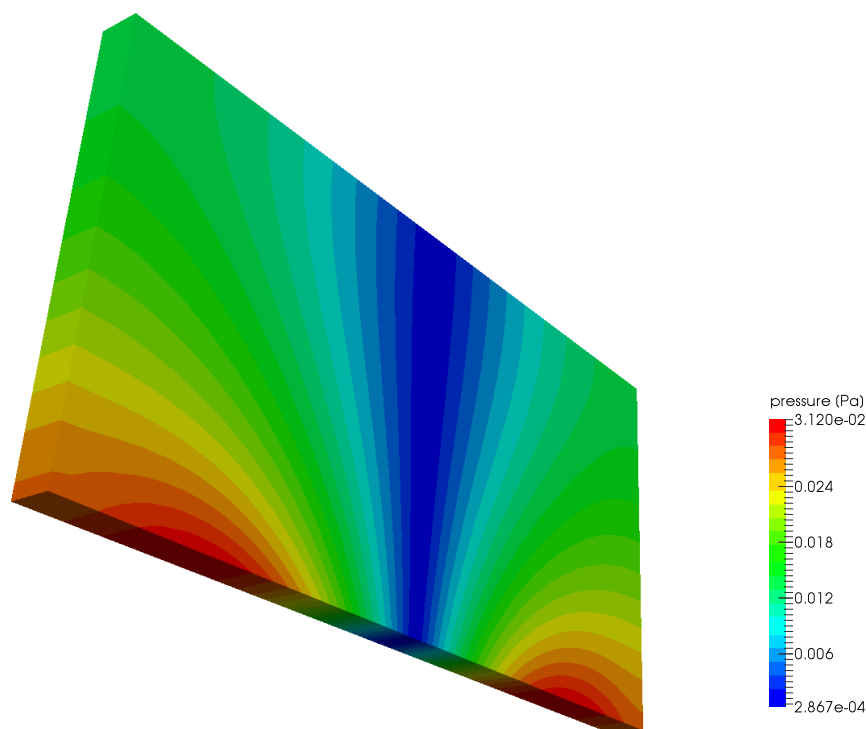
Na následujících obrázcích můžeme přímo porovnat absolutní hodnoty komplexní amplitudy akustického tlaku na 2D oblasti na izočárách. U výsledků získaných metodou konečných prvků ve 3D prostoru je k dispozici jen vizuální porovnání a srovnání maximálního akustického tlaku v celé oblasti. Shoda výsledků obou přístupů je výborná. V následující části textu tedy aplikujeme algoritmus na složitější geometrii.



Obrázek 3.1: Rozložení akustického tlaku získané pomocí Galerkinovy m. ve 2D prostoru.



Obrázek 3.2: Rozložení akustického tlaku získané pomocí MKP ve 2D prostoru.



Obrázek 3.3: Rozložení akustického tlaku získané pomocí MKP ve 3D prostoru.

## 3.2 Výpočet pole akustického tlaku v kavitě kompresoru

Testovací úlohou jsme ověřili, že vytvořený výpočetní algoritmus MKP funguje správně a můžeme jej využít pro výpočet akustického tlaku i pro složitější geometrii, než je kvádrová oblast. Nejprve bylo třeba vytvořit vstupy pro algoritmus.

### 3.2.1 Počítačový model

Geometrie zjednodušeného modelu šroubového kompresoru na obrázku (B.1) je zpracována v programu HyperMesh, kde je členěna na tři skupiny. První je šroubový kompresor spolu s motorem (hnědá barva), druhou je kryt celého zařízení (zelená barva) spolu se dnem (šedá barva) a třetí je kavita (vzduchová masa) vymezená výše zmíněnými skupinami. Tato skupina konečných prvků představuje pro tuto úlohu akustické pole. Pro převod sítě konečných prvků do prostředí MATLABu byla hledána co nejjednodušší cesta získání dat v ASCII formátu, který bude možné dávkově zpracovat nástroji pro práci s textem. Byl nalezen vyhovující exportní formát pro NASTRAN. Z textového souboru byla v několika krocích vytvořena matice souřadnic uzlů sítě konečných prvků a matice spojující tyto uzly do podoby konečných prvků.

### 3.2.2 Okrajové podmínky

V tomto případě bereme krycí konstrukci šroubového kompresoru jako tuhou stěnu. Šroubový kompresor společně s motorem a krytem vrtule tvoří vstup (inlet). Anechodíni výstup tedy nedefinujeme a jediné co zbývá definovat je vektor pravých stran  $\mathbf{f}$ .

Začneme nejprve zpracováním experimentálně získaných dat, naměřených za běhu stroje. Jako zdroj dat uvedeme výzkumnou zprávu [3]. Z měření jsou k dispozici rychlosti kmitání ve třech bodech, ve směrech os  $x$ ,  $y$  a  $z$ , pro frekvence 1 Hz až 3000 Hz. Diagramy je možno nalézt v přílohách na obrázku (B.2) a dvou následujících obrázcích. Linearita řešeného problému nám dovoluje využít principu superpozice a provádět výpočet vždy pro jednu frekvenci spektra a posléze jednotlivé výsledky superponovat. Pro zjednodušení předpokládáme, že těleso šroubového kompresoru a jeho pohonu kmitá jako tuhé těleso předepsanou rychlostí.

Okrajové podmínky úlohy (na vstupu) tvoří rychlosti kmitání v uzlech na hranici motoru a kavity. Rychlosti naměřené na skutečném kompresoru ve třech bodech A, B, C vztáhneme k počátku souřadnicového systému modelu následujícím způsobem. Definujeme rychlosti v počátku soustavy souřadnic vztažené k takovému tuhému tělesu a to rychlosti  $u, v, w$  ve směrech os  $x, y, z$  a úhlové rychlosti  $\phi, \theta, \psi$  otáčení kolem os  $x, y, z$ .

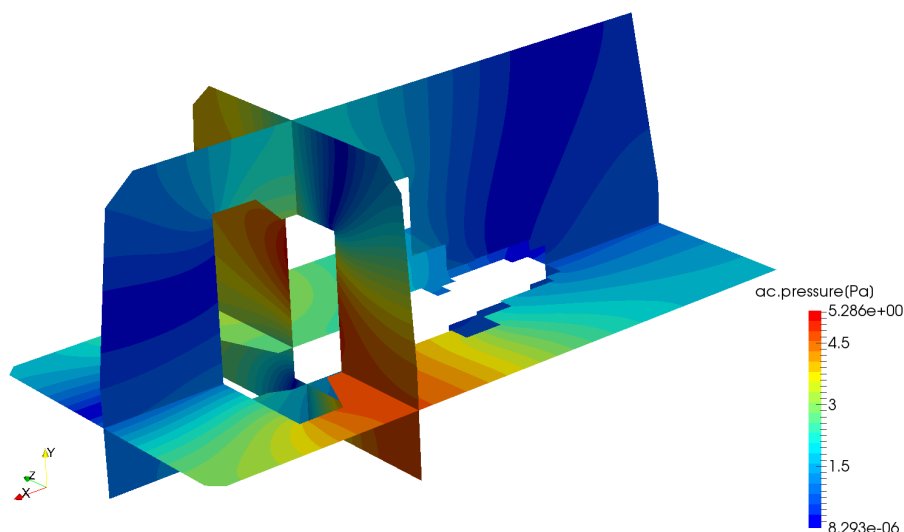
$$\begin{aligned} u_A &= u + \theta z_A - \psi y_A, \\ v_A &= v + \psi x_A - \phi z_A, \\ w_A &= w + \phi y_A - \theta x_A, \\ v_B &= v + \psi x_B - \phi z_B, \\ w_B &= w + \phi y_B - \theta x_B, \\ v_C &= v + \psi x_C - \phi z_C. \end{aligned}$$

Soustavu rovnic zapíšeme v maticové formě

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_A & -y_A \\ 0 & 1 & 0 & -z_A & 0 & x_A \\ 0 & 0 & 1 & y_A & -x_A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_B & 0 & x_B \\ 0 & 0 & 1 & y_B & -x_B & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_C & 0 & x_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \\ v_B \\ w_B \\ v_C \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Pro každou frekvenci tak získáme šestici veličin  $u, v, w, \phi, \theta, \psi$ , kterou využijeme pro výpočet složek rychlosti v každém bodě D, ve kterém definujeme okrajovou podmínku vstupní rychlosti. Použijeme zde již zmíněné vztahy

$$\begin{aligned} u_D &= u + \theta z_D - \psi y_D, \\ v_D &= v + \psi x_D - \phi z_D, \\ w_D &= w + \phi y_D - \theta x_D. \end{aligned}$$



Obrázek 3.4: Rozložení akustického tlaku získané MKP ve 3D prostoru pro  $f = 100$  Hz.

Skalární veličina  $v_n$ , která vystupuje v definici vektoru  $\mathbf{f}_e$  je pak určena jako průměrná hodnota průmětů vektorů rychlostí v jednotlivých uzlech do směru vnější normály příslušné stěny čtyřstěnu.

### 3.2.3 Úloha řešení akustického pole v kavitě kompresoru

Nyní máme vše potřebné pro výpočet akustického tlaku pomocí MKP. Doplníme jen materiálové vlastnosti  $\rho = 1,177 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a frekvenci buzení  $f = 100$  Hz. Z matic elementů zapsaných ve (2.139) sestavíme matice globální (2.140), které nám dávají soustavu lineárních algebraických rovnic, kde neznámé jsou komplexní amplitudy akustického tlaku v uzlech sítě konečných prvků. Na veškerých obrázcích v této práci je pak vykreslena absolutní hodnota tohoto komplexního čísla. Neřešili jsme totiž rozložení tlaku v čase, ale pouze jeho amplitudy v daném místě pro harmonický průběh.

Po dokončení výpočtu je geometrie spolu s absolutními hodnotami akustického tlaku v uzlech sítě uložena do souboru formátu *VTK*, se kterým lze dále pracovat v programu *ParaView* (volně dostupný).

Pro lepší orientaci nechť čtenář laskavě nahlédne do přílohy **B**, kde najde vizualizaci geometrie modelu šroubového kompresoru na obrázku (B.1), včetně dalších vizualizací získaných výsledků, počínaje obrázkem (B.4). Zde si uvedeme jen obrázek (3.4) zobrazující rozložení amplitud akustického tlaku v kavitě kompresoru podél tří řezů. Tyto řezy je možné jednotlivě dohledat v přílohách na obrázcích (B.10), (B.12) a (B.14).

### 3.3 Implementace

Tento úsek textu je věnovaný definici výpočtové úlohy v prostředí MATLAB a jedná se o naprosté minimum pro případné použití vyvinutého řešiče další osobou.

Aby bylo možné počítat úlohu pro různé geometrie či buzení, byl stanoven systém zadávání úlohy pomocí balíčků s příponou *.mat*, které MATLAB standardně využívá pro ukládání dat (proměnných, matic) v binární podobě. Při spuštění algoritmu je pouze vybrán předem připravený balíček, který obsahuje geometrii úlohy, definice okrajových podmínek a materiálové vlastnosti prostředí.

Balíček konkrétně obsahuje matici *node*, která má na každém řádku definici jednoho uzlu sítě pomocí souřadnice  $x$  v prvním sloupci,  $y$  a  $z$  pak ve druhém a třetím sloupci. Matice *elem* na každém řádku definuje konečný prvek pomocí uzlů sítě, když v každém sloupci nese referenci na řádek matice *node*. Tím je definována geometrie úlohy.

Okrajové podmínky stanovují matice *outlet* a *inlet*. Obě mají v prvním sloupci referenci na konečný prvek ležící na příslušné hranici. Ve druhém sloupci pak označení vnitřního uzlu pořadovým číslem. Matice *inlet* navíc nese souřadnice normálového vektoru k hraniční ploše konečného prvku. Ve sloupcích 3, 4 a 5 jsou souřadnice  $x$ ,  $y$  a  $z$  normálového vektoru.

K definici vektoru pravých stran se váže ještě matice  $V$ , která obsahuje šestici rychlostí popisující pohyb tuhého tělesa, popsanou v předcházejícím textu. Číslo řádky v matici pak určuje příslušnost této šestice k budící frekvenci v Hz. Pořadí sloupců odpovídá již zmíněnému pořadí rychlostí  $u, v, w, \phi, \theta, \psi$ .

Frekvence (v Hz) pro které bude úloha řešena jsou uvedeny v matici  $f$ . Zbývají jen materiálové vlastnosti  $\rho$  a  $c$  a máme všechny vstupy, které výpočtový program vyžaduje (matici *outlet* není nutné definovat).

---

# Kapitola 4

## Závěr

Všechny body zadání diplomové práce byly splněny, počínaje vytvořením matematického modelu, z něhož bylo možno vycházet jak při analytickém, tak přibližném řešení, přes diskretizaci slabé formulace, verifikaci vlastní implementace metody konečných prvků a řešení akustického pole.

Dle výše popsaných vztahů byly vytvořeny skripty a funkce spustitelné v prostředí MATLAB. Jsou dostupné na přiloženém CD.

Při implementaci výpočetního algoritmu byl nejprve kladen důraz na správnou funkci a později i na potřebný výpočetní čas. Proto je možné, že řešení ve 2D prostoru, které bylo jen mezistupněm pro algoritmus řešící úlohu ve 3D prostoru, bude trvat znatelně déle i pro menší počet elementů. Právě algoritmu řešení rozložení akustického tlaku ve 3D prostoru byla v tomto ohledu věnována největší péče. Počítačový model kavity šroubového kompresoru totiž obsahuje více než 1,8 milionu konečných prvků a téměř 330 tisíc uzlů sítě a tím pádem stejný počet rovnic řešené soustavy algebraických rovnic. Tuto úlohu lze vyřešit na dnes již standardně vybaveném počítači (3 GHz CPU, 16 GB RAM) v řádu deseti či patnácti minut. Vzhledem ke zmíněnému rozsahu řešené soustavy hraje v délce výpočtu hlavní roli množství dostupné operační paměti. Dochází tak ke značné úspoře času v porovnání s dobou běhu výpočtu v komerčním programu Altair RADIOSS s jehož výsledky jsou výstupy této práce porovnávány v přílohách. Výpočet obdobně definované úlohy na stejné geometrii v tomto výpočetním programu trvá řádově hodiny.

Zpracování výsledků umožňuje superpozici rozložení akustického tlaku pro více budících frekvencí. Možnost superpozice řešení pro různé budící frekvence nám dává nástroj pro řešení odezvy jak na zmíněné harmonické buzení, tak na buzení periodické.

Možné rozšíření této práce spočívá v nahrazení tuhé stěny stěnou poddajnou, tedy zavedením interakce mezi prostředím a opláštěním stroje pro řešení emise hluku do okolí stroje.

---

# Příloha A

## Zdrojové kódy

### A.1 Sestavení globální matice v MATLAB

Jednoduchý, ale pomalý cyklus pro přepis matice elementu do globální matice.

```
H = sparse(N,N);
for t=1:NT
    He=hctyrsten(node(elem(t,:),:));
    for i=1:4
        for j=i:4
            H(elem(t,i),elem(t,j)) = H(elem(t,i),elem(t,j)) + He(i,j);
        end
    end
end
H = H + triu(H,1)';
```

Složitější zápis stejných operací pomocí přímého indexování znatelně zrychlí celou operaci.

```
ii = zeros(16*NT,1);
jj = zeros(16*NT,1);
val = zeros(16*NT,1);
indices = [1 1; 1 2; 1 3; 1 4; 2 1; 2 2; 2 3; 2 4; ...
          3 1; 3 2; 3 3; 3 4; 4 1; 4 2; 4 3; 4 4];
index = 0;
for t=1:NT
    He=hctyrsten(node(elem(t,:),:));
    ii(index+1:index+16) = elem(t,indices(:,1));
    jj(index+1:index+16) = elem(t,indices(:,2));
    val(index+1:index+16) = He([1 5 9 13 2 6 10 14 3 7 11 15 4 8 12 16]);
    index = index + 16;
end
H = sparse(ii,jj,val,N,N);
```

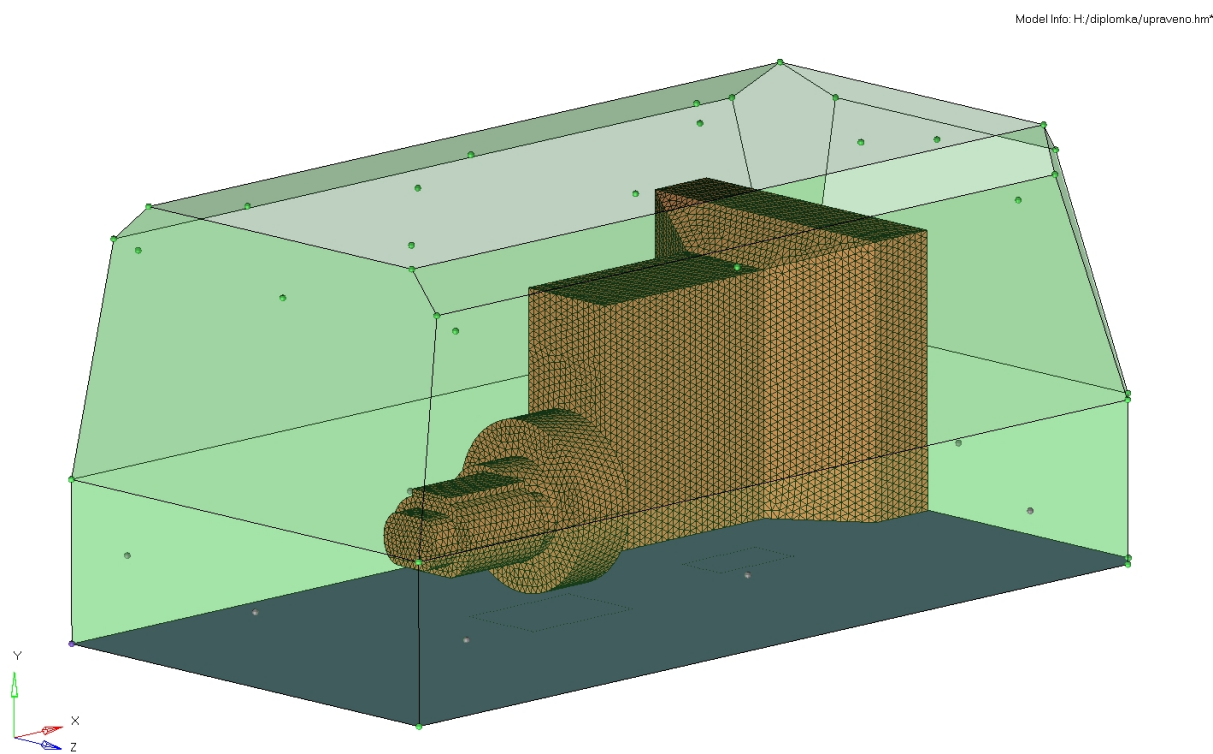


---

# Příloha B

## Obrazové přílohy

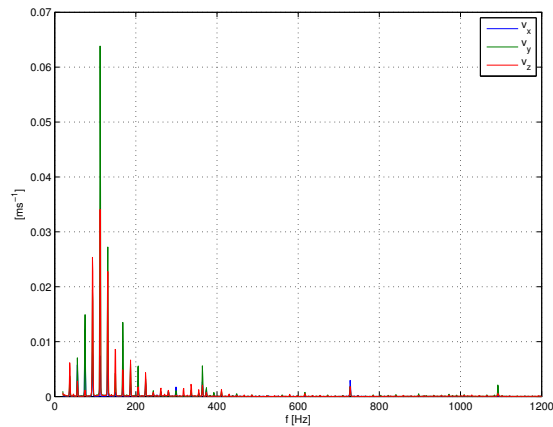
### B.1 Model kavity šroubového kompresoru



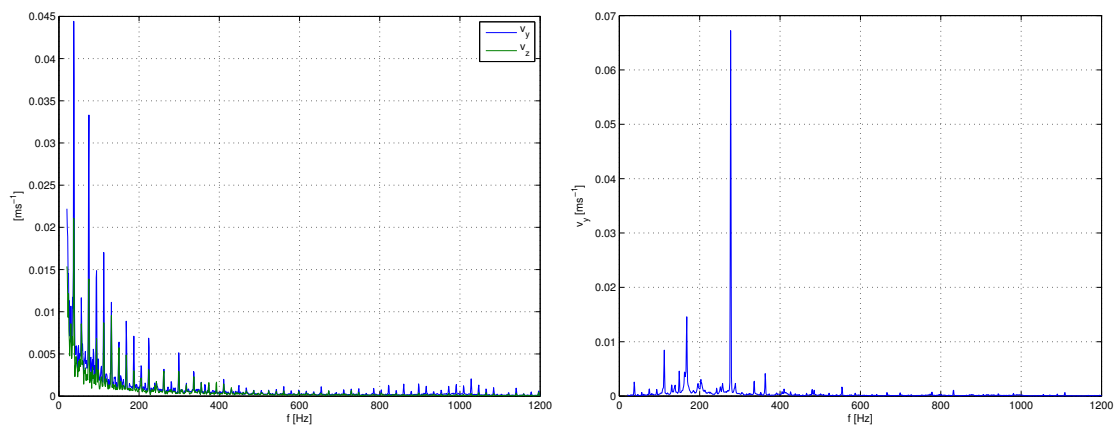
Obrázek B.1: Model šroubového kompresoru v Altair HyperMesh.

## B.2 Amplitudy rychlosti naměřené na skutečném kompresoru

Tato data pocházejí z měření provedeného pracovníky FEL, ZČU. Zdrojem je výzkumná zpráva [3].



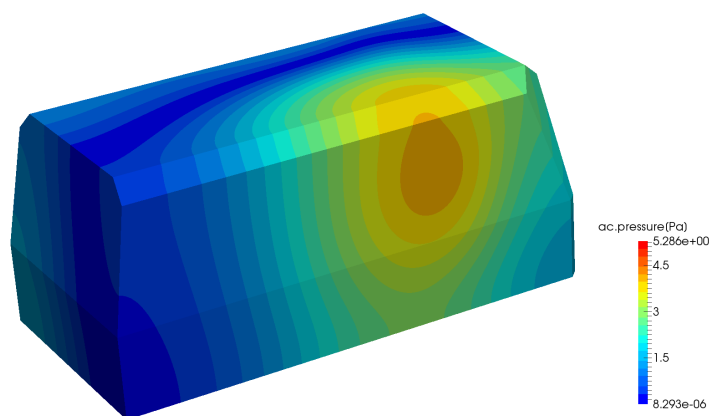
Obrázek B.2: Amplitudy rychlostí ve směrech os  $x, y, z$  v závislosti na frekvenci kmitání.



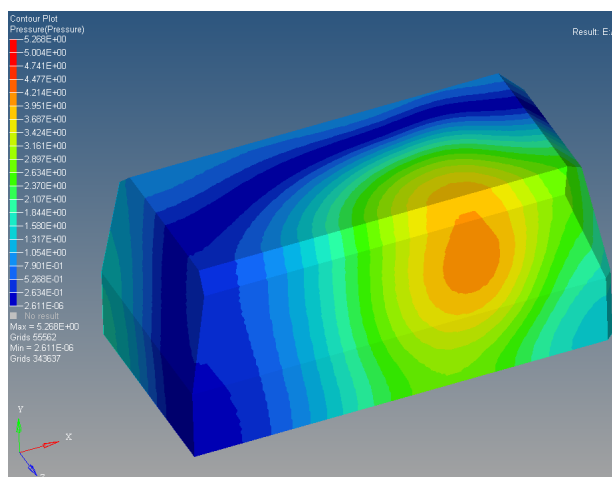
Obrázek B.3: Amplitudy rychlostí ve směrech os  $x, y, z$  v závislosti na frekvenci kmitání.

### B.3 Výsledky výpočtu

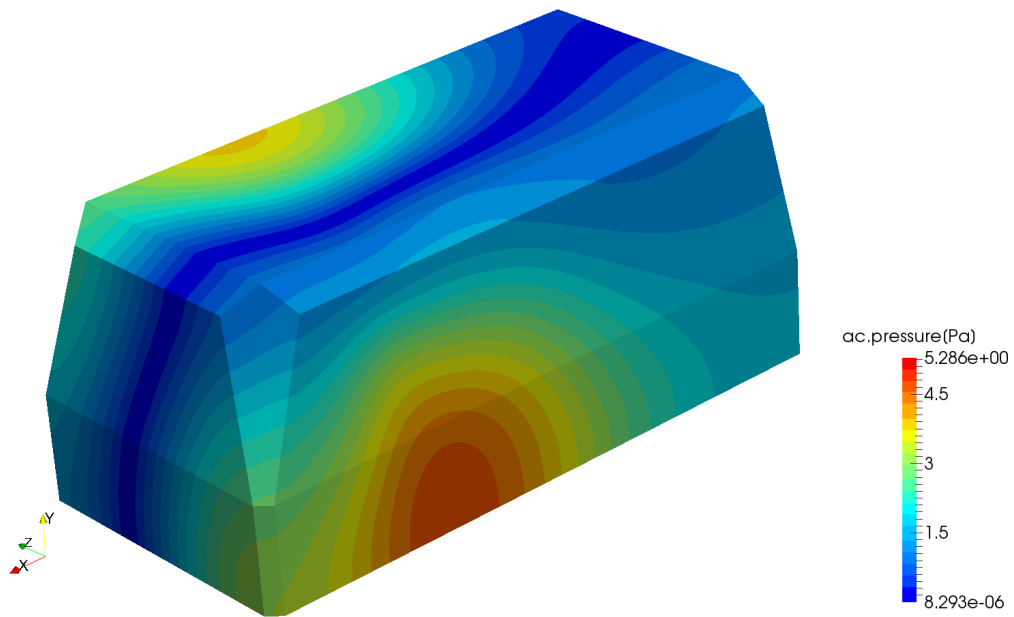
Na následujících obrazových přílohách je možné porovnat rozložení amplitud akustického tlaku pro úlohu řešenou vlastním řešičem a výsledky obdobně definované úlohy řešené pomocí komerčního SW Altair Radioss. Právě z této úlohy byla převzata síť konečných prvků pro vlastní řešič. Také použité materiálové vlastnosti a parametry úloh jsou totožné. Rozdíl spočívá v definování tuhých stěn obklopujících vzduchovou masu. V případě komerčního SW byla uvažována interakce s opláštěním stroje, které bylo nicméně také definované jako ideálně tuhé. Výpočet provedl a výsledky dal k dispozici Ing. Vítězslav Adámek, Ph.D. z katedry mechaniky, FAV, ZČU. Tyto obrazové přílohy budou na konci popisku označeny symbolem \*.



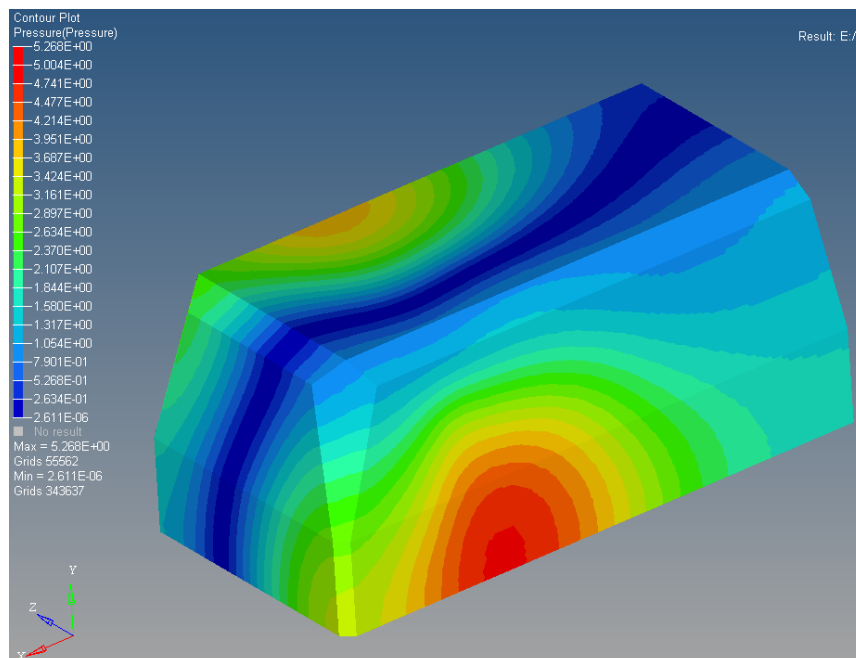
Obrázek B.4: Rozložení akustického tlaku dle MKP pro  $f = 100$  Hz.



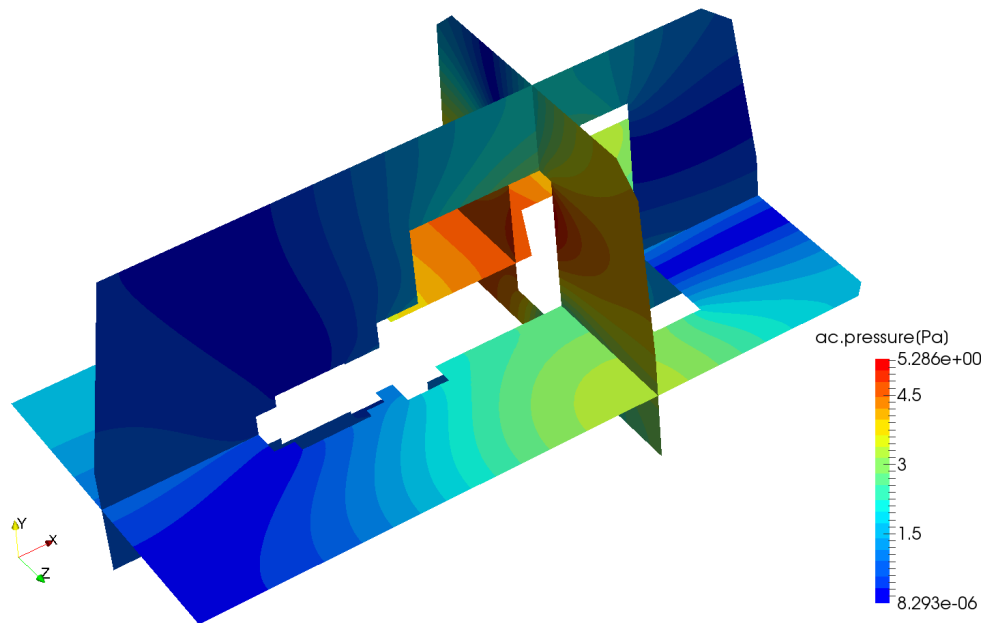
Obrázek B.5: Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro  $f = 100$  Hz.\*



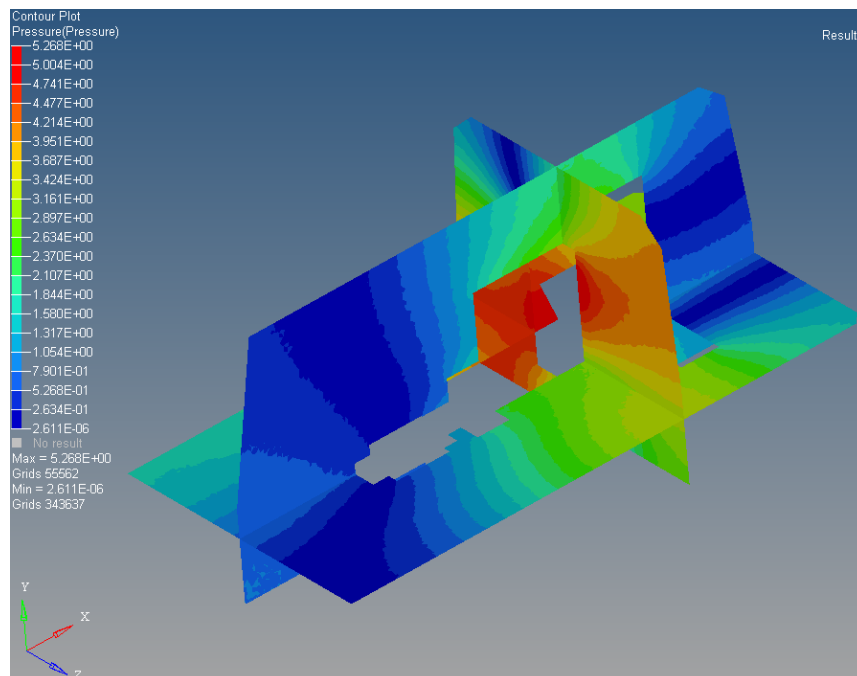
Obrázek B.6: Rozložení akustického tlaku dle MKP pro  $f = 100$  Hz.



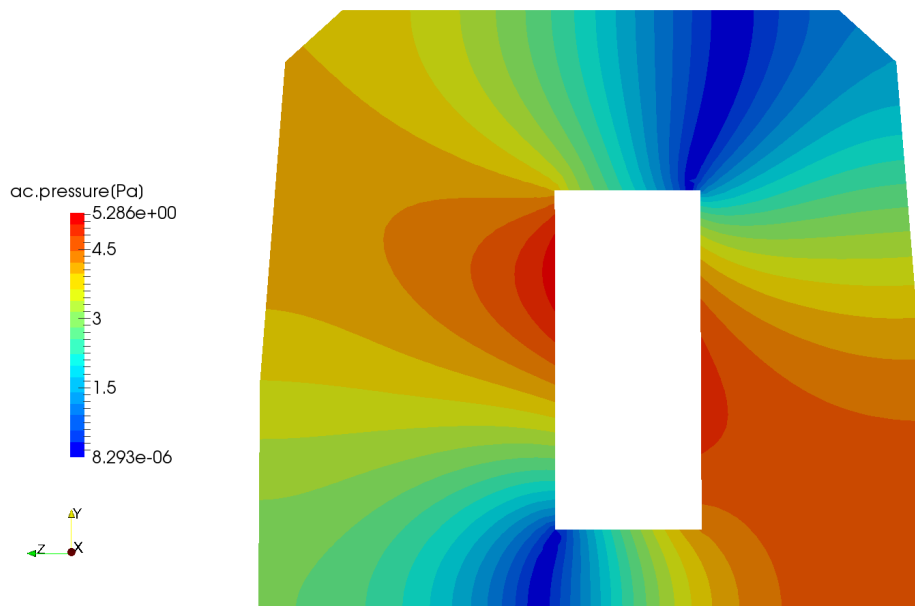
Obrázek B.7: Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro  $f = 100$  Hz.\*



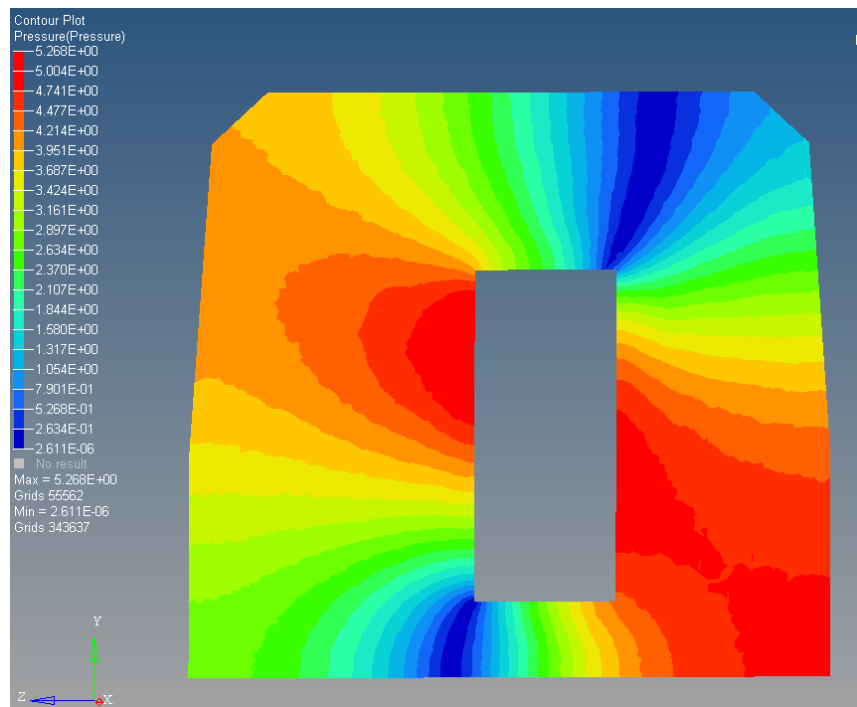
Obrázek B.8: Rozložení akustického tlaku dle MKP pro  $f = 100$  Hz.



Obrázek B.9: Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro  $f = 100$  Hz.\*



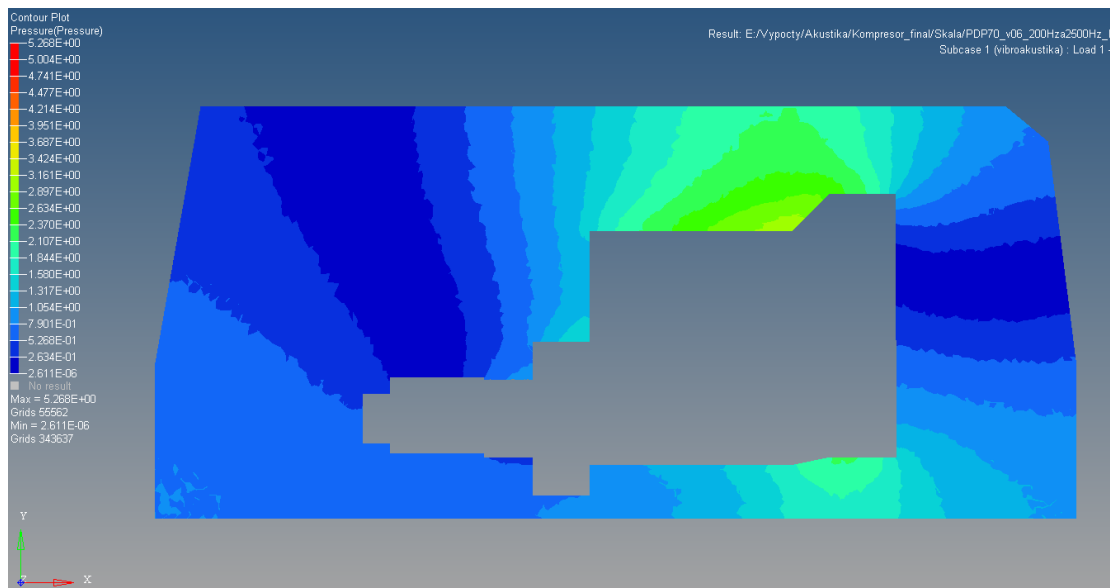
Obrázek B.10: Rozložení akustického tlaku dle MKP pro  $f = 100$  Hz.



Obrázek B.11: Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro  $f = 100$  Hz.\*



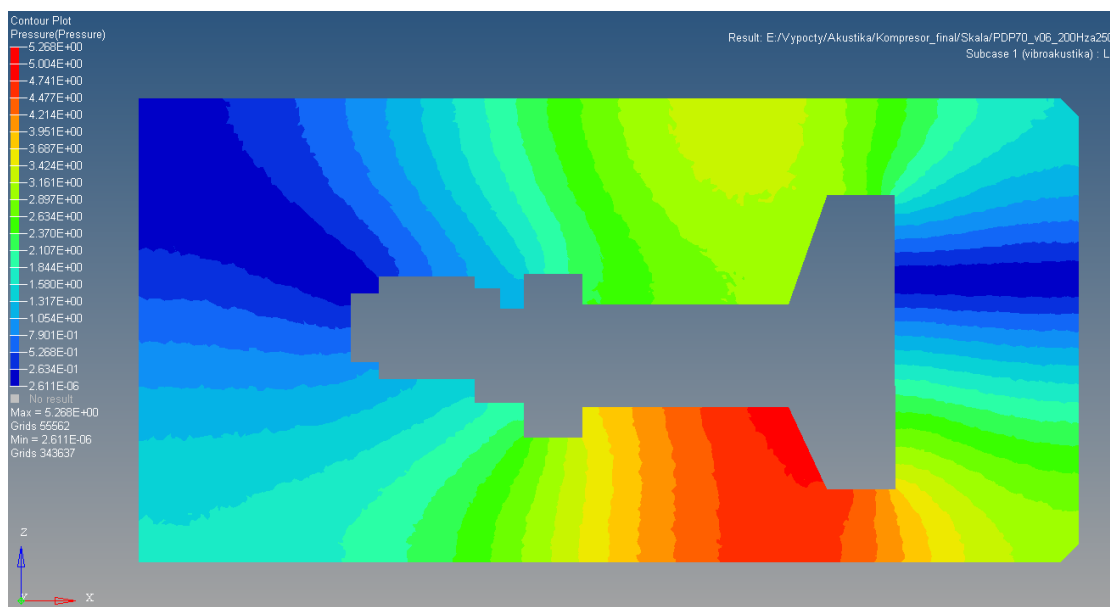
Obrázek B.12: Rozložení akustického tlaku dle MKP pro  $f = 100$  Hz.



Obrázek B.13: Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro  $f = 100$  Hz.\*



Obrázek B.14: Rozložení akustického tlaku dle MKP pro  $f = 100$  Hz.



Obrázek B.15: Rozložení akustického tlaku, komerční MKP SW pro  $f = 100$  Hz.\*



---

# Literatura

- [1] DUPAL, J.; VIMMR, J.; BUBLÍK, O.; aj.: Modelling of acoustic power radiation from mobile screw compressors. In *11th International Conference on Vibration Problems*, Lisbon: Západočeská univerzita v Plzni, 2013, ISBN 978-989-96264-4-7.
- [2] FAHY, F.: *Foundations of Engineering Acoustics*. London: Academic Press, 2003, ISBN 0-12-247665-4.
- [3] SÝKORA, M.; TUREČEK, O.; SCHLOSSER, M.; aj.: *Měření hluku a vibrací prototypů kompresorů*. Plzeň: Regionální inovační centrum elektrotechniky, 2014, výzkumná zpráva č. 2219 - 082 - 2014.
- [4] TEMKIN, S.: *Elements of Acoustics*. Woodbury: Acoustical Society of America, 2001, ISBN 1-56396-997-1.