

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ**

KATEDRA ELEKTROMECHANIKY A VÝKONOVÉ ELEKTRONIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Použití stavové zpětné vazby v elektrických pohonech

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta elektrotechnická

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Mgr. Eva JINDROVÁ
Osobní číslo: E12B0036K
Studijní program: B2644 Aplikovaná elektrotechnika
Studijní obor: Aplikovaná elektrotechnika
Název tématu: Použití stavové zpětné vazby v elektrických pohonech
Zadávající katedra: Katedra elektromechaniky a výkonové elektroniky

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Proveďte teoretický popis reprezentace stavu a stavové zpětné vazby.
2. Vypracujte případovou studii použití stavové zpětné vazby.
3. Vytvořte simulaci vybrané případové studie v programu Matlab/Simulink.

Abstrakt

Předkládaná bakalářská práce je zaměřena na použití stavové zpětné vazby v elektrických pohonech. V první části je proveden teoretický popis reprezentace stavu, který je zde i následně aplikován na příkladu RLC obvodu. V této části práce jsou také popsány jednotlivé regulátory. Druhá kapitola se věnuje použití stavové zpětné vazbě v elektrických pohonech, konkrétně ve stejnosměrných motorech. V této části práce je vytvořena simulace případové studie v programu MATLAB.

Klíčová slova

Popis reprezentace stavu, stavová zpětná vazba, stejnosměrný motor

Abstract

The bachelor thesis is focused on the use of state feedback in electrical drives. The first part is a theoretical description of state representation, which is also subsequently applied to the example of the RLC circuit. In this part the different types of regulators are described. The second part is devoted to the use of state feedback in electrical drives, particularly in DC motors. In this part of the thesis simulation of case study is created in MATLAB.

Keywords

State representation, state feedback, DC motor

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této bakalářské práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této bakalářské práce, je legální.

.....

podpis

V Plzni dne

Eva Jindrová

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala vedoucí své práce Ing. Vendule Mužikové za cenné profesionální rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah

OBSAH	8
SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK	9
y REGULOVANÁ VELIČINA, VÝSTUP w ŽÁDANÁ HODNOTA, VSTUPNÍ VELIČINA	9
1 ÚVOD	10
2 TEORETICKÝ POPIS REPREZENTACE STAVU A STAVOVÉ ZPĚTNÉ VAZBY	11
2.1 ZÁKLADNÍ POJMY AUTOMATIZAČNÍ TECHNIKY	11
2.2 POPIS REPREZENTACE STAVU	14
2.3 STAVOVÁ ZPĚTNÁ VAZBA	17
2.3.1 Příklad popisu RLC obvodu	18
2.3.2 Příklad výpočtu nul a pólů v RLC obvodu	20
2.3.3 Vliv polohy pólů na chování systému	21
2.3.4 Základní typy přenosů ve spojitých zpětnovazebních obvodech	25
2.4 REGULÁTORY	28
2.4.1 Stavové regulátory	29
2.4.2 PI – regulátor	30
2.4.3 PID-regulátor	31
3 POUŽITÍ STAVOVÉ ZPĚTNÉ VAZBY V ELEKTRICKÝCH POHONECH	32
3.1 POPIS STEJNOSMĚRNÉHO MOTORU	32
3.2 REGULACE RYCHLOSTI POMOCÍ STAVOVÉ ZPĚTNÉ VAZBY	34
3.3 REGULACE RYCHLOSTI POMOCÍ PI-REGULÁTORU	40
4 ZÁVĚR	42
POUŽITÁ LITERATURA A ZDROJE:	43

Seznam symbolů a zkratek

y	regulovaná veličina, výstup
w	žádaná hodnota, vstupní veličina
u	vstupní veličina regulované soustavy a výstupní veličina regulátoru
e	regulační odchylka
SISO	systémy s jedním vstupem a s jedním výstupem
MIMO	systémy s více vstupy a více výstupy
x	stav systému
F	přenos systému
det	determinant
I	jednotková matice
δ	Diracův impuls
p	póly systému
ω	výstup
v_{app}	aplikované napětí
ζ	poměr tlumení
ω_n	vlastní frekvence
J	moment setrvačnosti na hřídeli motoru
b	koeficient viskózního tření na hřídeli motoru
K	konstanta motoru
R	odpor vinutí
L	indukčnost
θ	pozice hřídele
$\dot{\theta}$	rychlost
V	napětí zdroje.

1 Úvod

V současné době existuje několik dobře známých metod řízení elektrických pohonů. Nejvíce rozšířeným regulátorem je v této oblasti PI regulátor. Téměř každý fyzikální systém je možné popsat přenosovou funkcí, která vyjadřuje vztah mezi vstupem a výstupem, mezi nevýhody této metody patří nemožnost popsat systém v případě absence počátečních podmínek. Dalším možným způsobem modelování je stavový popis, který vyjadřuje vztah mezi stavovými proměnnými, jejich derivacemi, vstupy a výstupy. Zároveň se také vyskytuje mnoho přístupů k návrhu regulace elektrických pohonů, tyto metody však mohou být více či méně vhodné pro konkrétní typ aplikace. Stavová zpětná vazba slouží k řízení stavů systému. V moderní teorii řízení jsou použity metody regulace využívající stavové zpětné vazby ke snížení nelineárních účinků systému a variace parametrů řídicích algoritmů. Ve většině aplikací musí být rychlost nebo poloha hřídele motorů přesně řízena. Aby bylo možné navrhnout řídicí systémy s takovou rychlostí a polohou, je třeba získat, analyticky nebo experimentálně, matematický model motoru nebo systému, který má být kontrolován.

Tato práce se zabývá problematikou stavové zpětné vazby. V první části práce je uveden teoretický popis reprezentace stavu a stavové zpětné vazby. V následující části je uveden princip stavové zpětné vazby na příkladu RLC obvodu, následuje použití regulátoru na principu stavové zpětné vazby pro regulaci rychlosti stejnosměrného motoru. V této části je také tento typ řízení porovnán s PI regulací, která patří mezi nejrozšířenější způsoby regulace rychlosti.

V této práci je uveden popis stavové zpětné vazby a příklad použití ve stejnosměrném motoru, z čehož také vyplývají následující cíle práce:

- Teoretický popis reprezentace stavu a stavové zpětné vazby.
- Použití stavové zpětné vazby v elektrických pohonech, včetně případové studie a její simulace.

2 Teoretický popis reprezentace stavu a stavové zpětné vazby

2.1 Základní pojmy automatizační techniky

Je-li cílevědomě působeno na řízený objekt za účelem dosažení předem daného stavu, pak se tento proces nazývá řízením. V případě, že toto řízení probíhá automaticky, jedná se o řízení automatické. V technické praxi se lze s automatickým řízením setkat ve dvou podobách:

- Sekvenční řízení – v takovémto řízení přechází systém z jednoho stavu do druhého postupně po splnění určitých podmínek. Jako příklad lze uvažovat start či ukončení nějakého procesu.
- Řízení dynamických procesů – u tohoto typu řízení je důležité, aby výsledná regulovaná veličina sledovala co nejpřesněji časový průběh dané řídicí veličiny. Regulátor zajišťuje věrné sledování řízení a kompenzuje poruchy tak, aby regulovaná veličina byla ovlivněna co nejméně.

Regulované soustavy mohou být s jedním vstupem a s jedním výstupem, takovéto systémy se obecně označují jako SISO systémy (Single Input- Single Output), nebo systémy s více vstupy a více výstupy, v tomto případě se jedná o MIMO systémy (Multi Input-Multi Output). Jak již bylo řečeno, SISO systémy mají jeden vstup a jeden výstup. Příkladem takového systému může být například ventilátor s regulátorem, jehož prostřednictvím lze regulovat rychlost a tím je řízen výstup, není zde zpětná vazba. Jedná se pouze o jeden vstup požadovaných hodnot a jeden regulovaný výstup. SISO systémy jsou otevřené smyčky. MIMO systém může obsahovat libovolné množství signálů. Například pokud je nutné regulovat více vstupních veličin, musí na soustavu působit více akčních veličin, a ty jsou různými vazbami svázány s výstupy ze soustavy. V systémech automatického řízení se lze setkat s následujícími veličinami: [4][6]

- Regulovaná veličina – výstupní veličina řízeného systému, obvykle označována jako y
- Řídicí veličina – žádaná hodnota nebo vstupní veličina, určuje hodnotu a časový průběh regulované veličiny, obvykle označována w
- Regulační odchylka – rozdíl mezi žádanou hodnotou a regulovanou veličinou, obvykle označena $e = w - y$
- Akční veličina – vstupní veličina regulované soustavy a výstupní veličina regulátoru, obvykle značena u , příp. x

- Porucha – veličina, která může působit na libovolném místě regulované soustavy, vstupu či výstupu, většinou je označována jako z .

Procesy, které probíhají v regulovaných soustavách lze popsat lineárními nebo nelineárními rovnicemi. U lineárních systémů jsou platné takzvané věty o linearitě:

- Je-li $y(t)$ odezva systému na vstupní signál $u(t)$, platí, že lineární systém odpoví na vstup $ku(t)$ odezvou $ky(t)$, přičemž k je konstanta. Toto tvrzení se obecně nazývá *násobení konstantou*.
- Je-li $y(t)$ systému na vstup $u(t)$, pak platí, že $u(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t)$ a $y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$. Toto tvrzení je známo jako *princip superpozice*. [4] [6] [3]

Reálné systémy však nebývají lineární, ale v okolí pracovních bodů se od nich odlišují jen málo a je tedy možné je za lineární považovat. Při takzvané linearizaci systému je tento systém nahrazen modelem, ve kterém je možné nelineární vztahy nahradit lineárními rovnicemi.

Proces řízení je možné realizovat různými způsoby, na jejichž základě se dělí do skupin. Například na základě toho, zda je působení akční veličiny v čase spojitě nebo probíhá pouze v určitých časech, v tomto případě řízení dělíme na:

- Spojitě – u tohoto typu řízení je signál spojitý. Příkladem takového systému může být například elektricky poháněný vláček, u kterého chceme řídit polohu.
- Diskrétní - diskrétní řízení pracuje s tzv. diskrétním (nespojitém) číslicovým signálem, jedná se o řízení číslicové – digitální. Toto řízení je důsledkem používání počítačů jako regulátorů. Počítače nedovedou zpracovávat spojitý signál, proto je nutné jej převádět na diskrétní.

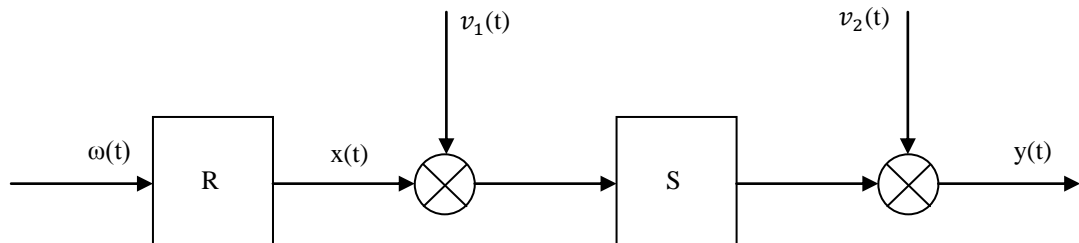
V současné době je spojitě řízení spíše na ústupu, avšak diskrétní řízení s velmi krátkou periodou vzorkování je možné považovat za téměř identické se spojitým. [4] [6] [3]

Dále lze řízení rozdělit na dva základní typy:

- Systémy přímého řízení (ovládání)
- Systémy zpětnovazebního řízení (regulace)

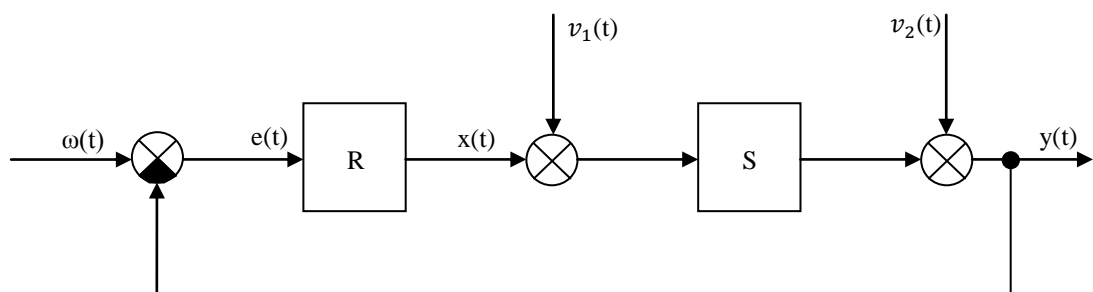
U systému přímého řízení na řízenou soustavu (S) s výstupem y působí kromě akční veličiny x také poruchy na vstupu soustavy (v_1) a na výstupu soustavy (v_2). Regulátor zde produkuje akční veličinu x na základě řídicí hodnoty w působící na jeho vstupu. V takovémto

uspořádání není regulátor schopen kompenzovat vliv poruchových signálů, a to z toho důvodu, že nemá informace o skutečné hodnotě výstupu y a nemůže tak reagovat na působení obou poruchových signálů. Tento typ řízení lze využívat tedy pouze tehdy, mění-li se vlastnosti soustavy z hlediska přenosu řídicí veličiny. Lze tedy říci, že se jedná pouze o ovládání (Obr. 2.1).



Obrázek 2.1: Schéma ovládání

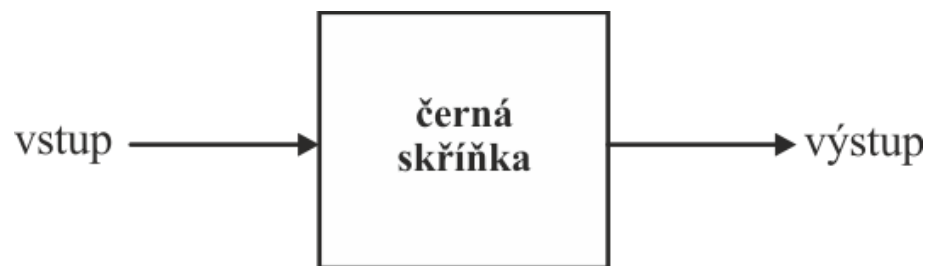
Řízení se zpětnou vazbou nabízí širší uplatnění (Obr. 2.2). Řídicí veličina w se v součtovém členu porovnává s hodnotou regulované veličiny y . Vstupní veličinou regulátoru je výsledná regulační odchylka e . Regulátor je tedy schopen reagovat, jak na změnu řídicí veličiny, tak i na působící poruchy. Zpětná vazba může být, jak kladná, tak i záporná. Záporná zpětná vazba se využívá v regulační technice pro udržení stálých parametrů systémů. Pokud se objeví výchylka od ustáleného stavu, dokáže zpětná vazba působit proti této výchylce a potlačit ji. Stabilita uzavřeného lineárního regulačního obvodu je podmíněna tím, že všechny kořeny charakteristické rovnice musí mít zápornou reálnou část. Charakteristickou rovnici lze získat, jestliže je jmenovatel přenosu roven nule. Principem kladné zpětné vazby je zvýšení hodnoty přiváděné z výstupu na vstup. To zapříčiní další zvýšení hodnoty na výstupu. Kladnou zpětnou vazbu lze využít k zesílení nebo k zrychlení žádoucích jevů, způsobuje však velmi často nestabilitu systému. [4] [6] [3]



Obrázek 2.2: Schéma regulace

2.2 Popis reprezentace stavu

Při popisu systému se používá tzv. vnějšího (Obr. 2.3) a vnitřního popisu (Obr. 2.4). Vnější popis je vyjádřením dynamických vlastností systému. Na obrázku je zřejmé, že vnější popis je uvažován jako černá skříňka. Představuje vztah mezi vstupem a výstupem. Vnitřní popis systému tyto dynamické vlastnosti systému vyjadřuje v časové oblasti. Zjednodušeně lze říci, že stav systému nám popisuje, co systém právě dělá. Při zavádění stavového popisu se uvažuje lineární systém (Obr. 2.5).



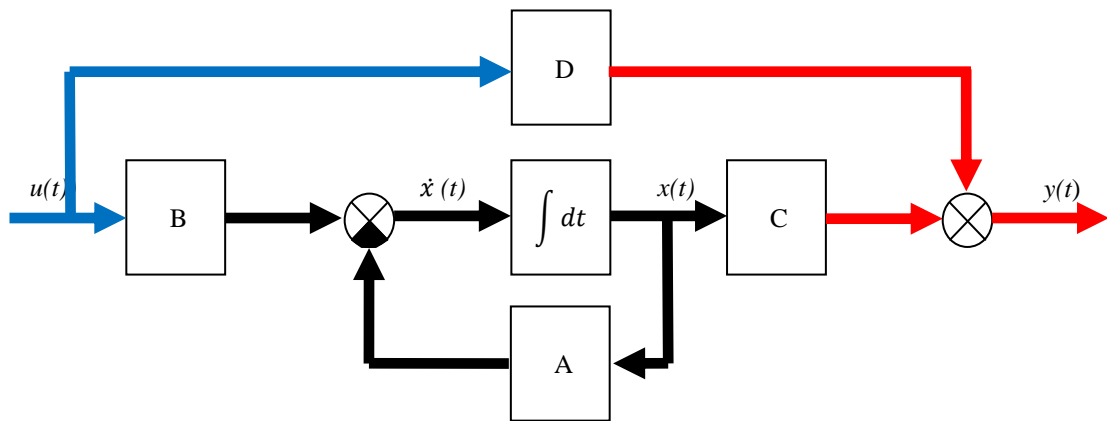
Obrázek 2.3: Vnější popis systému

Stav systému je nejmenší počet stavových proměnných n , které v čase $t=t_0$ společně se vstupy v čase $t>t_0$ určují chování systému v čase $t>t_0$. Stav systému je určen stavovým vektorem, který je tvořen stavovými proměnnými, které lze chápat jako časové funkce určující vnitřní stav systému. Dalšími pojmy, se kterými se lze u popisu stavu setkat jsou vektory vstupů, příp. výstupů, jenž jsou tvořeny vstupními, příp. výstupními veličinami systému. Stavový popis se nejčastěji používá pro systémy s více vstupy a více výstupy. Pro popis se používají maticové zápisy. Vztah mezi stavem systému a jeho vstupy a výstupy je dán stavovými rovnicemi. Reprezentaci stavu představují dvě rovnice, z nichž první představuje stav systému, druhá výstup systému. Proměnná $y(t)$ reprezentuje výstup, proměnná $x(t)$ stav systému a $u(t)$ vstup. Dále je zde zavedena proměnná $\dot{x}(t)$, která naznačuje budoucí stav systému v závislosti na současném vstupu a stavu systému.

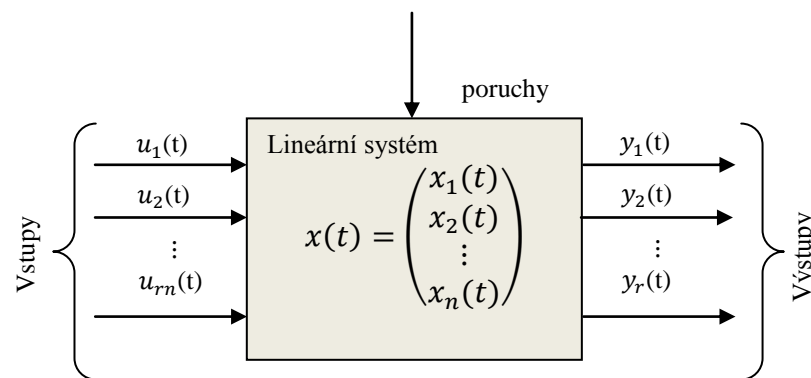
$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Rovnice vyjadřují obecné stavové schéma, které je znázorněno na obrázku Obr. 2.4.



Obrázek 2.4: Obecné stavové schéma systému – vnitřní popis systému



Obrázek 2.5: Obecný lineární systém

První rovnice ukazuje závislost stavu systému na předchozím stavu, na počátečním stavu, na čase a na vstupu systému. Obecně lze tedy říci, že vyjadřuje, jak se stavy vyvíjí v čase. Druhá rovnice ukazuje, že výstup systému je závislý na současném stavu a čase a dále pak na vstupu systému. Matice koeficientů A, B, C a D mají konkrétní význam. A je matice vnitřních vazeb systému (rozměr $n \times n$), je vyjádřena fyzikálními, elektromechanickými nebo jinými zákony. B je matice vazeb systému na vstup ($n \times m$), neboli vyjadřuje, jak vstup ovlivňuje stav. C je matice vazeb výstupu na stav ($r \times n$), je vyjádřením toho, jak lze změřit to, co se děje uvnitř systému. D je matice přímých vazeb výstupu na vstup ($r \times n$), z hlediska dynamických vazeb jsou však tyto vazby zanedbatelné a matice D je nulová.

Přenosová funkce $F(p)$ je parametrickým modelem vnějšího popisu spojitéch lineárních dynamických systémů, je nezávislá na vnitřních proměnných systému. Jinak řečeno, přenosová funkce je vhodné znázornění lineárního časově invariantního dynamického systému. Matematicky lze přenosovou funkci chápat jako funkci komplexní proměnné. Přenosovou funkci lze získat jednoduchými algebraickými úpravami diferenciálních rovnic, které popisují systém. Přenosová funkce systému může být určena z experimentů prováděných na systému. Ze stavového popisu systému lze určit matici přenosových funkcí

$\mathbf{F}(p)$.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r1}(p) & \cdots & F_{rm}(p) \end{pmatrix} \quad (2)$$

To, že se jedná o matici, je dáno tím, že stavový popis existuje pro více vstupů a více výstupů, kdežto přenos systému je dán mezi jedním vstupem a jedním výstupem. Matice přenosových funkcí představuje všechny vzájemné kombinace vstupů a výstupů. Matice je odvozena převodem stavových rovnic do Laplaceovy transformace, jejímž výsledkem je:

$$Y(p) = \left[C \frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] U(p) \quad (3)$$

V této rovnici hranatá závorka představuje získaný přenos $\mathbf{F}(p)$, \mathbf{I} je matice jednotková, matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} jsou určeny stavovým popisem systému. Přenos systému lze definovat jako poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny k Laplaceovu obrazu veličiny vstupní při nulových počátečních podmínkách systému. Stavový popis lze získat z přenosu jednorozměrných systémů v Laplaceově transformaci či diferenciální rovnici. Existují různé způsoby převodu: [4]

- Přímé programování – tento způsob je vhodný, je-li přenosová funkce ve tvaru dvou polynomů, stavový diagram lze vidět na obrázku *Obr. 1.5*.

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \quad (4)$$

Platí, že $m \leq n$.

Pro Laplaceův obraz funkce $e(t)$ platí, že $E(p) = U(p) - E(p) \left(\frac{a_{n-1}}{p} + \frac{a_{n-2}}{p^2} + \cdots + \frac{a_0}{p^n} \right)$ a pro obraz výstupu platí, že.

$$Y(p) = E(p) \left(b_n + \frac{1}{p} b_{n-1} + \cdots + \frac{1}{p^n} b_0 \right) \quad (5)$$

Matice systému jsou ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = [(b_0 - a_0 b_n), \dots, (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)], \quad \mathbf{D} = b_n$$

U většiny reálných dynamických systémů platí $n > m$, z čehož vyplývá, že b_n je nulový. Pak matice $\mathbf{D}=0$, matice \mathbf{A} má nenulové pouze jednotkové koeficienty. Tato realizace stavového popisu je známa pod pojmem Frobeniův kanonický tvar.

- Sériové programování – tento typ přenosu je vhodný, je-li přenosová funkce ve tvaru součinu kořenových činitelů, stavový diagram tohoto systému lze vidět na *Obr. 1.6*.

$$F(p) = \frac{b_0(p + b_1) \dots (p + b_n)}{(p + a_1) \dots (p + a_n)} \quad (6)$$

Stavový diagram je tvořen elementárními bloky spojenými kaskádně. V případě, že by se v čitateli či jmenovateli vyskytly komplexní kořeny, pak by bylo nutné použít blok sestavený ze dvou integrátorů.

- Paralelní programování – tento způsob přenosové funkce se využívá v případě, že přenos systému je ve tvaru součtu jednoduchých výrazů (se jmenovatelem nejvýše druhého řádu). Stavový diagram lze vidět na *Obrázku 1.7*.

$$F(p) = \frac{b_1}{p + a_1} + \dots + \frac{b_k}{p^2 + a_{k-1}p + a_k} + \frac{b_n}{p + a_n} \quad (7)$$

Stavové matice jsou ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & -a_{k-1} & -a_k \\ & & \dots & 0 & 0 \\ & & & & -a_n \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = [b_1, \dots, b_k, \dots, b_n], \mathbf{D} = 0$$

Tvar matice A se nazývá Jordanův kanonický tvar.

2.3 Stavová zpětná vazba

Jedním z možných způsobů řízení systému je stavová zpětná vazba. Zpětnou vazbou se systému přiřazuje požadované chování, které se určuje zvolenými póly. Řídit je možné pouze ty stavy, které lze ovlivňovat pomocí vstupu. Pomocí stavové zpětné vazby je možné například z nestabilního systému udělat stabilní, z pomalého systému rychlý. Stavovou zpětnou vazbu je možné zapsat obecně pomocí následující rovnice:

$$u = Fx \quad (8)$$

Vlastní dynamické chování systému je dáno vlastními čísly matice A. Stabilní systém se vyznačuje tím, že všechny póly uzavřeného systému jsou v levé polorovině komplexní roviny. Rovnice systému se stavovou zpětnou vazbou lze napsat následovně:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -Fx \\ \dot{x} &= Ax + B(-Fx) \\ \dot{x} &= (A - BF)x = A_{new}x \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{9}$$

Vhodnou volbou prvků matice F je možné umístit vlastní čísla nové matice $A_{new} = A - BF$. Poté je možné libovolně umístit póly výsledného systému:

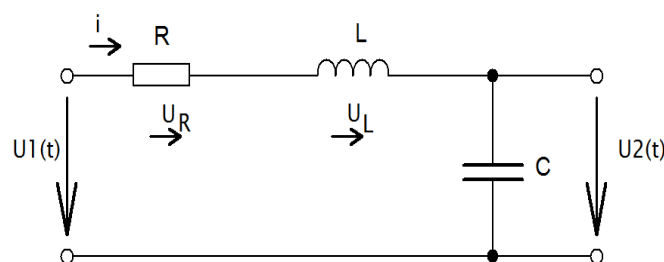
$$\det(sI - A) \rightarrow \det(sI - A_{new}) = \det(sI - (A - BF))\tag{10}$$

Volba vlastních čísel matice $A - BF$ je kompromis mezi rychlostí odezvy systému a řídicích veličin u .

Za dva důležité pojmy v teorii řízení lze označit také říditelnost a pozorovatelnost systému. Vstupním signálem lze ovlivnit jen tu část systému, která je říditelná, tzn. lze ji vybudit vstupním signálem. Pokud je možné vybudit všechny části systému, lze jej označit za systém plně říditelný. Pozorovatelnost systému je ovlivněna tím, co je možné pozorovat na výstupu systému. Pokud se na výstupu mohou projevit všechny části systému, je systém pozorovatelný.

2.3.1 Příklad popisu RLC obvodu

Příklad, jak funguje odvození stavového popisu a následné určení stavové rovnice a polohy pólů a nul, si lze ukázat na následujícím obvodu (Obr. 2.6) :



Obrázek 2.6: RLC obvod

Přenos v Laplaceově transformaci bude vypadat následovně:

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LCp^2 + CRp + 1}\tag{11}$$

Při určování stavového popisu je nejdříve nutné určit stavové proměnné. Stavovými proměnnými jsou v tomto případě proud procházející obvodem i a napětí na kondenzátoru u_2 .

$$i = C \frac{du_2}{dt} \quad (12)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

Tyto vzorce je nutné upravit tak, aby se v nich vyskytovaly pouze stavové proměnné a vstupy a výstupy:

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{i}{C} \quad (13)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(u_1 - Ri - u_2)$$

Toto lze považovat za první stavovou rovnici, druhá stavová rovnice popisuje výstup ze systému. V tomto případě bude platit:

$$y(t) = u_2(t) \quad (14)$$

Poté si lze tyto rovnice zapsat do obecných rovnic pro popis systému:

$$\frac{du_2}{dt} = 0 \cdot u_2 + \frac{1}{C}i + 0 \cdot u_1 \quad (15)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}i - \frac{1}{L}u_1$$

$$y = 1 \cdot u_2 + 0 \cdot i + 0 \cdot u_1$$

V maticovém zápisu poté vznikne tvar:

$$\begin{pmatrix} \frac{du_2}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u_1 \quad (16)$$

$$y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} u_2 \\ i \end{pmatrix} + 0u_1$$

Kde prvek $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$ představuje matici A, prvek $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$ představuje matici B a $(1 \ 0)$ matici C,

matice D = (0).

Za prvky R, L, C si lze dosadit konkrétní hodnoty, např. R=160 Ω, L=0,94 H, C=40μF, a vypočítat vlastní čísla matice A (např. pomocí programu MATLAB funkce `lambda=eig(A)`). V tomto případě se jedná o systém druhého řádu, tudíž jsou zde dva póly.

Zápis v programu Matlab/Simulink je poté v následujícím tvaru:

```
>> A=[0 1./ (40.*10^-6); -1./0.94 -160./0.94]
```

```
A =
```

```
      0      25000
-1.0638 -170.2128
```

```
>> lambda=eig(A)
```

```
lambda =
```

```
-85.11+139.1i
```

```
-85.11-139.1i
```

Vlastní čísla matice lze vypočítat i bez pomoci jakéhokoliv programu. K tomuto výpočtu je potřeba jednoduchý vzorec, a to:

$$\det(pI - A) = 0 \quad (17)$$

V tomto konkrétním příkladu by výpočet vlastních čísel matice vypadal takto:

$$\det\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} p & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & p + \frac{R}{L} \end{bmatrix}\right),$$

kdy po dosazení za jednotlivé prvky R,L,C

vyjdou ta samá vlastní čísla, která byla vypočítána pomocí programu MATLAB, a to tedy: dvojice komplexně sdružených čísel: $-85,11 \pm 139,1i$.

Dynamické vlastnosti jsou dány vlastními čísly stavové matice A, která tvoří póly soustavy v komplexní rovině. V matici A lze najít póly systému na její hlavní diagonále, v případě, že je determinant roven nule (viz rovnice 14). Na základě polohy vlastních čísel matice vůči osám je možné posuzovat stabilitu, vlastní frekvenci a tlumení. V přenosové funkci se nuly systému vypočítají z čitatele, kdy je nutné určit kořeny polynomu v tomto čitateli. Póly systému se určí výpočtem kořenů polynomu jmenovatele přenosové funkce. [4][7]

2.3.2 Příklad výpočtu nul a pólů v RLC obvodu

K získání a vykreslení pólů a nul je pro konkrétní příklad RLC obvodu nejprve nutné vypočítat přenosovou funkci, a to následujícím způsobem:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{C \operatorname{adj}(pI - A)B}{\det(pI - A)} + D \quad (18)$$

Nuly a póly systému je možné vypočítat z rovnice přenosu. Prvek $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$ představuje

matici A, prvek $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$ představuje matici B a $(1 \ 0)$ matici C, matice D = (0). Po dosazení prvků R=160 Ω, L=0,94 H, C=40μF do A, B, C, D matice pro konkrétní příklad RLC obvodu vychází přenosová funkce takto:

$$F(p) = \frac{266000}{p^2 + 170.2128p + 266000} \quad (19)$$

Nuly lze ze systému získat tak, že se čítec položí nule, v tomto případě je možné vidět, že čítec je 266000, tudíž nemůže být položen nule, z čehož vyplývá, že v systému nejsou nuly.

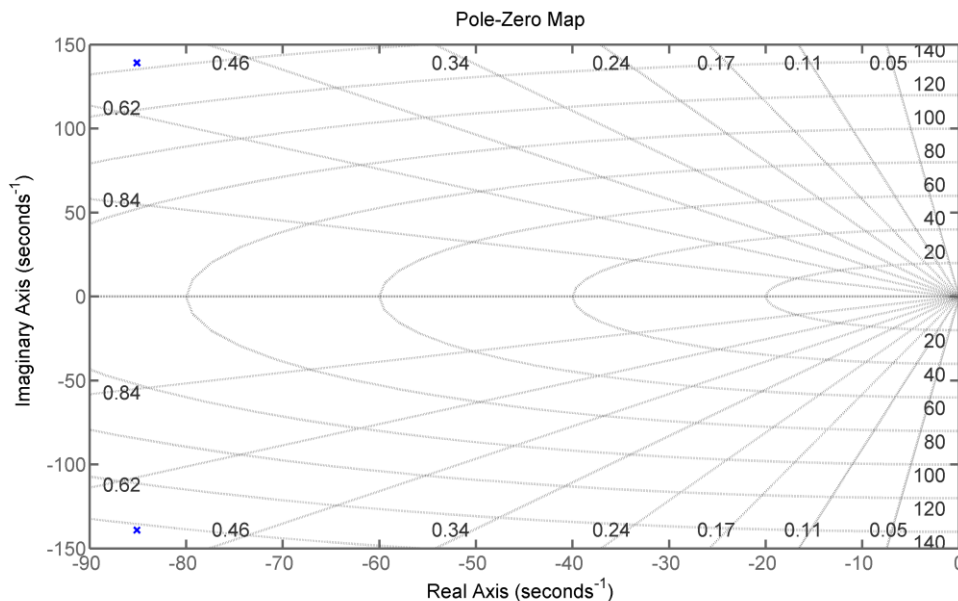
Póly se naopak určí tak, že je položen nule jmenovatel

$$p^2 + 170.2128p + 266000 = 0 \rightarrow p_{1,2} = -85,11 \pm 139,1i. \quad (20)$$

Z této funkce je patrné, že v systému nejsou nuly a póly jsou kořeny kvadratické rovnice ve jmenovateli, jejichž hodnoty jsou: $-85,11 \pm 139,1i$. Pomocí programu MATLAB je možné póly a nuly vypočítat pomocí funkce `pzmap(H)`. Do programu MATLAB je tedy výpočet pólů a nul zapsán takto:

```
H=tf([0 0 266000],[1 170.2128 266000]);sgrid
pzmap(H)
```

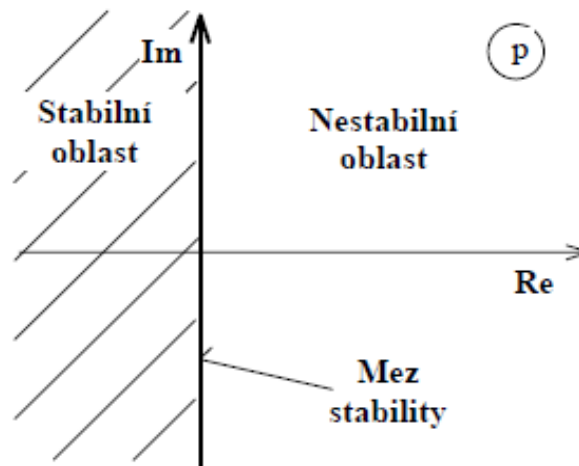
a graf s vyznačenými póly (nuly v tomto systému nejsou) lze vidět na *Obrázku 2.7*:



Obrázek 2.7: Póly systému RL obvodu

2.3.3 Vliv polohy pólů na chování systému

Nutnou a postačující podmínkou stability je, aby všechny kořeny charakteristické rovnice uzavřeného regulačního systému byly umístěny v levé polorovině komplexní roviny (*Obrázek 2.8*).

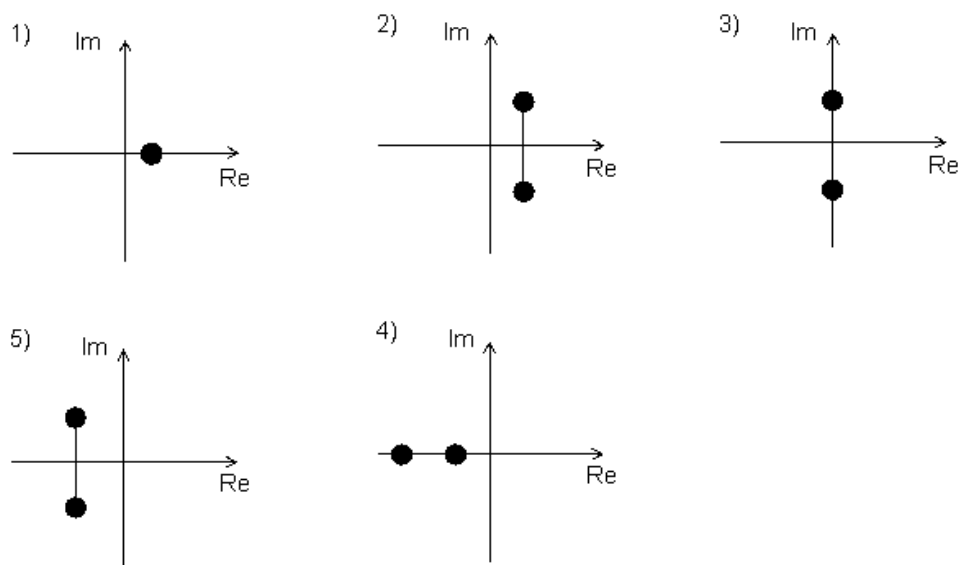


Obrázek 2.8: Znázornění komplexní roviny

Pokud kořeny leží na imaginární ose, je systém na mezi stability. V případě, že jeden nebo více kořenů v pravé polovině komplexní roviny, je systém nestabilní. Lze rozlišit následující typy systémů:

- 1) nestabilní aperiodický systém (kladné reálné kořeny)
- 2) nestabilní kmitavý systém (kladná reálná část komplexně sdružených kořenů)
- 3) systém na hranici stability (dva ryze imaginární kořeny)
- 4) stabilní aperiodický systém (jen záporné reálné kořeny)
- 5) stabilní kmitavý systém (záporná reálná část komplex. sdruž. kořenů)

Těmto průběhům odpovídá následující rozmístění pólů v komplexní rovině (Obrázek 2.9) :

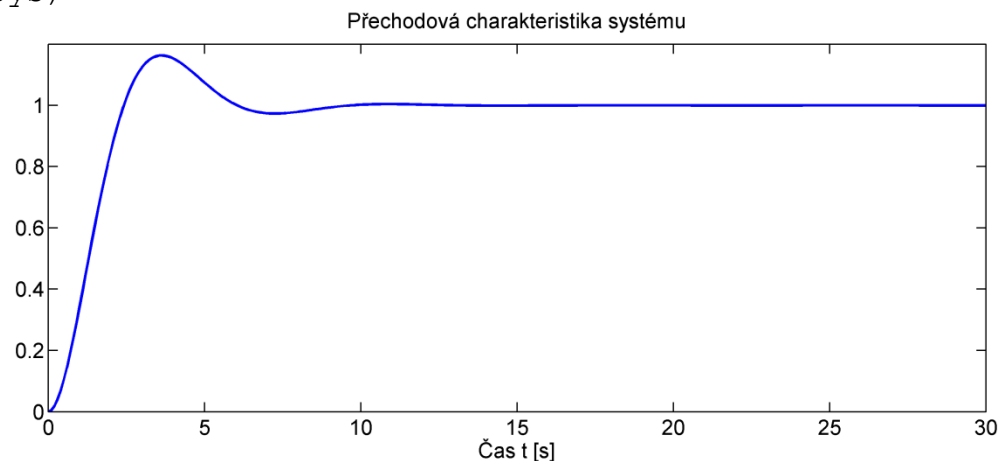


Obrázek 2.9: Rozložení kořenů v komplexní rovině pro jednotlivé průběhy [9]

Umístění pólů ovlivňuje odezvu systému z hlediska stability, konvergence, odezvy na poruchu, imunity k vnějším vlivům apod. [9] Na příkladech, které následují, si lze ukázat, jak velikost reálné části u 2 komplexně sdružených pólů ovlivňuje skokovou odezvu systému a také jak vypadá skoková odezva dvou reálných pólů. Nejprve si je však potřeba z pólů určit přenosové funkce, které jsou poté dosazeny do programu MATLAB a následně jsou vykresleny grafy.

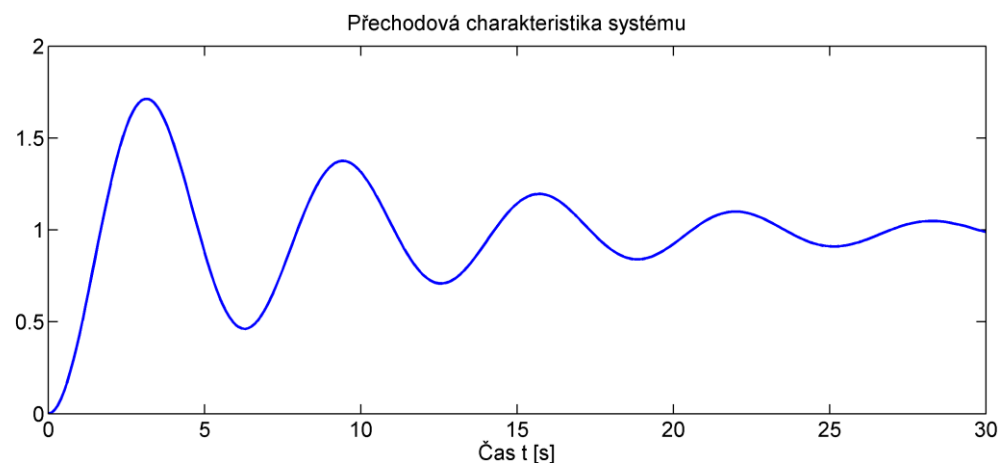
- 1) 2 komplexně sdružené póly $p_{1,2} = -0,5 \pm j$ (Obrázek 2.10) - v tomto případě je možné ve skokové odezvě vidět malý překmit.

```
num=[0 0 1];
den=[1 1 1.25];
sys=tf(num, den);
step(sys)
```



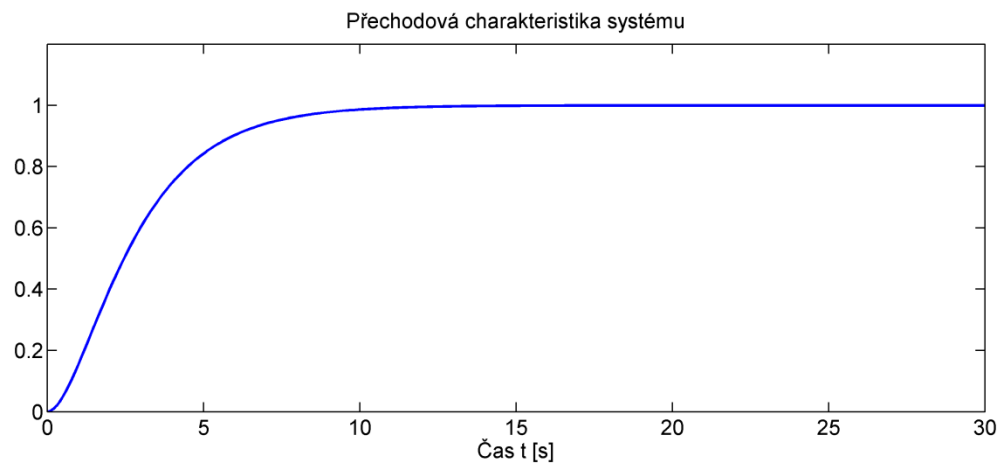
Obrázek 2.10: Skoková odezva pro póly $p_{1,2} = -0,5 \pm j$

- 2) 2 komplexně sdružené póly $p_{1,2} = -0,1 \pm j$ (Obrázek 2.11) - zde je skoková odezva kmitavá. Je možné si všimnout, že oproti předchozímu případu je zde reálná část 5krát menší.



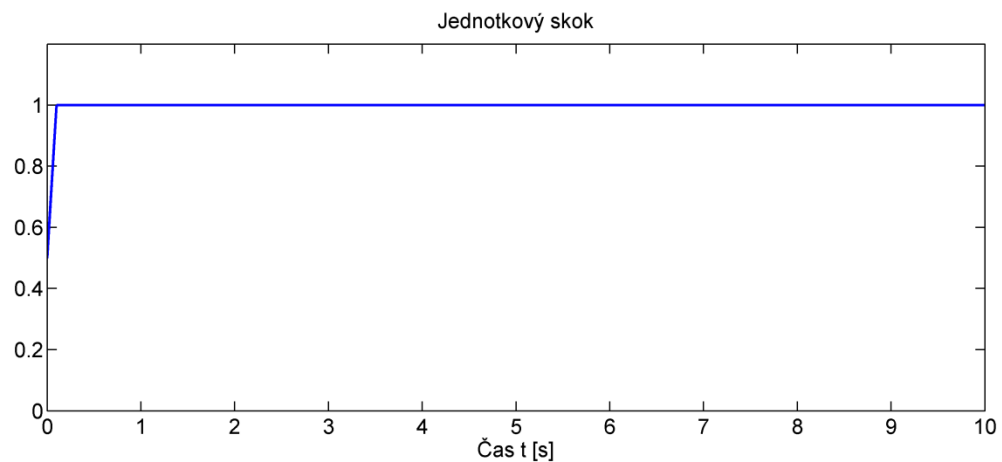
Obrázek č. 2.11: Skoková odezva pro póly $p_{1,2} = -0,1 \pm j$

3) 2 reálné póly $p_1 = -0,5$, $p_2 = -1$ (Obrázek 2.12) - v tomto případě se jedná o aperiodickou skokovou odezvu.



Obrázek č. 2.12: Skoková odezva pro póly $p_1 = -0,5$, $p_2 = -1$

Přenosová funkce je odezva na jednotkový skok. V ideálním případě by systémy měly reagovat tak, že ihned po zapnutí by nabývaly hodnoty jedna (Obr.2.13), což však není reálně dosažitelné.



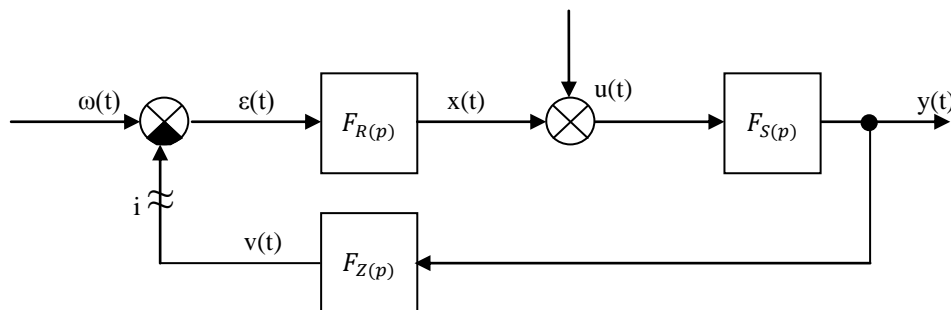
Obrázek 2.13: Jednotkový skok

Pokud je zvolen vhodný stavový zpětnovazební regulátor, je možné změnit polohu pólů uzavřené smyčky tak, aby bylo dosaženo požadovaného dynamického chování. Stavový regulátor vytváří lineární zpětné vazby od každé stavové proměnné. Metoda návrhu stavového regulátoru spočívá ve zvolení nové polohy pólů uzavřené smyčky, tj. nových vlastních čísel matice uzavřené smyčky se stavovým regulátorem. Umístěním pólů je ovlivňována odezva systému například z hlediska stability, odezvy na poruchu. Jsou-li póly reálné, tzn. imaginární složka je nulová, pak bude regulační obvod aperiodický. Pokud se jedná o dvojici pólů

komplexně sdružených, pak jde o obvod kmitavý. Rychlost regulačních pochodů závisí na velikosti reálných složek. Platí, že čím je vzdálenost od nuly větší, tím je regulační pochod rychlejší. [5][6]

2.3.4 Základní typy přenosů ve spojitých zpětnovazebních obvodech

Zpětnovazební obvody se obvykle zjednodušují na základní technologické schéma (Obrázek 2.14), kde lze nadefinovat několik typů přenosů. Toto zjednodušení však lze provést za určitých podmínek. Nejprve je nutné se ujistit, že všechny poruchy působící na systém jsou soustředěny na vstupu regulované soustavy, dále přenos regulátoru $F_R(p)$ zahrnuje i přenosy výkonových a akčních členů a přenos ve zpětné vazbě $F_Z(p)$ reprezentuje přenos měřicího čidla.



Obrázek 2.14: Zjednodušené technologické schéma

Popis vstupů a výstupů systému je v podstatě tabulka všech možných vstupních a výstupních hodnot. U lineárních systémů může být tabulka charakterizována pouze jedním vstupním párem, například impulsní odezvou nebo skokovou odezvou. Impulsní odezva je odezva filtru na jednotkový impuls, skoková je odezvou filtru na jednotkový skok. [4] Impulsní odezva je grafickým znázorněním odezvy lineárního systému na Diracův impuls $\delta(t)$ při nulových počátečních podmínkách. Diracův impuls je však fyzikálně nerealizovatelná podmínka, která je definována následujícím způsobem:

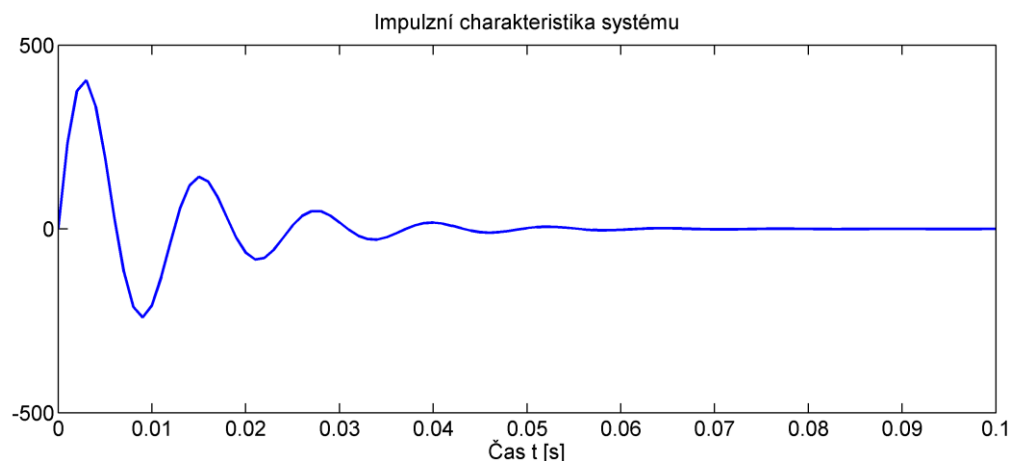
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \delta(t) = 0 \text{ pro } t \neq 0 \quad (21)$$

Přechodová charakteristika je grafickým znázorněním odezvy lineárního systému na jednotkový skok, který je popsán následujícím způsobem:

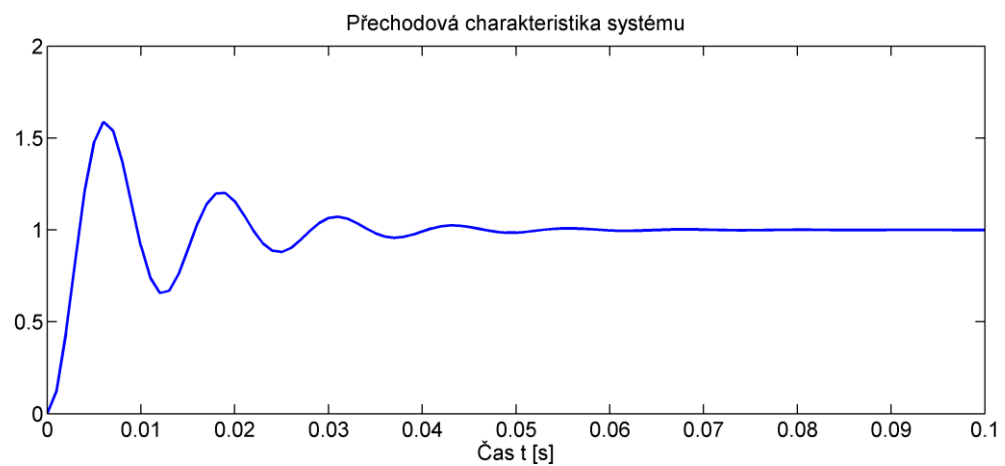
$$\begin{aligned} 1(t) &= 0 \text{ pro } t < 0 \\ 1(t) &= 1 \text{ pro } t \geq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Obě odezvy pro konkrétní příklad RLC obvodu, který se nachází výše, jsou znázorněny na *Obrázcích 2.15 a 2.16*. V programu MATLAB lze impulsní a skokovou odezvu získat pomocí následujících příkazů:

```
>> a=[0 250000;-1.0638 -170.2128];  
>> b=[0;1.0638];  
>> c=[1 0];  
>> sys=ss(a,b,c,0);  
>> impulse(sys)  
>> step(sys)
```



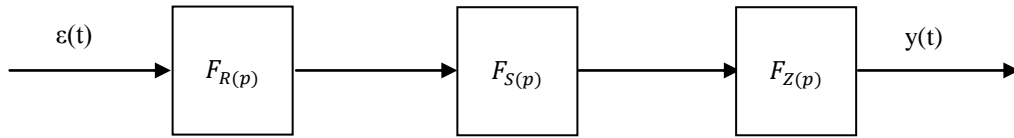
Obrázek 2.15: Impulzní odezva RL obvodu



Obrázek 2.16: Skoková odezva RL obvodu

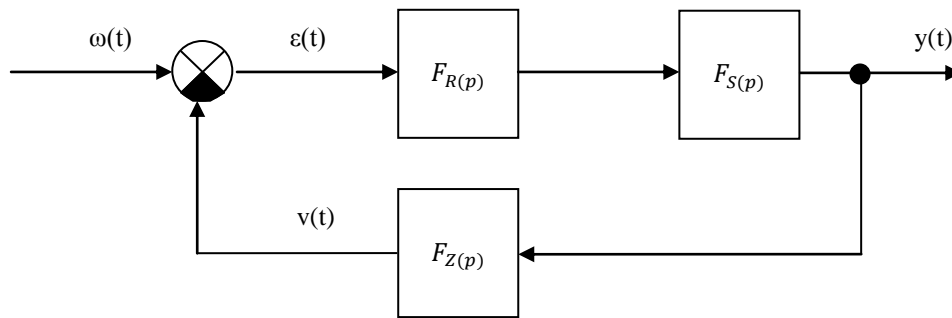
Mezi základní typy přenosů ve zpětnovazebních obvodech patří:

- Přenos otevřené smyčky (Obrázek 2.17): $F_0(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)} = F_R(p)F_S(p)F_Z(p)$



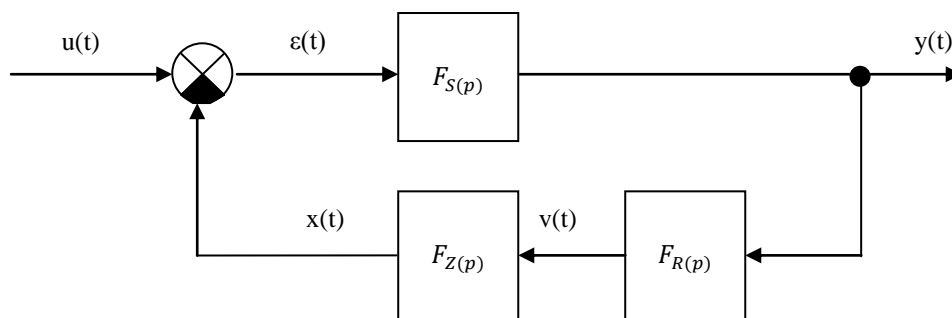
Obrázek 2.17: Zobrazení otevřené smyčky

- Přenos řízení (Obrázek 2.18): $F_\omega(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_R(p)F_S(p)}{1+F_0(p)}$



Obrázek 2.18: Přenos řízení

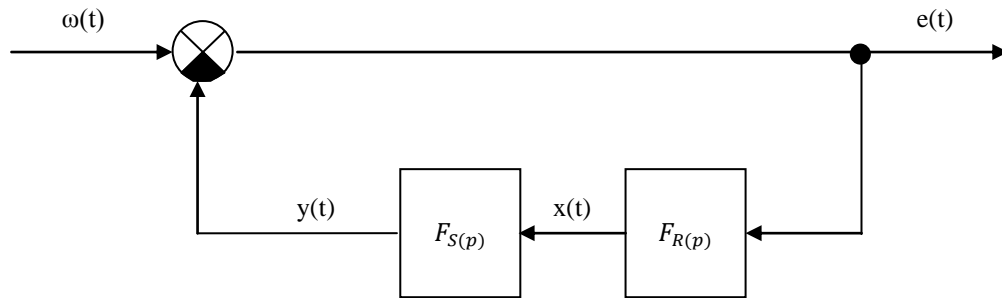
- Přenos poruchy (Obrázek 2.19): $F_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{F_S(p)}{1+F_0(p)}$



Obrázek 2.19: Přenos poruchy

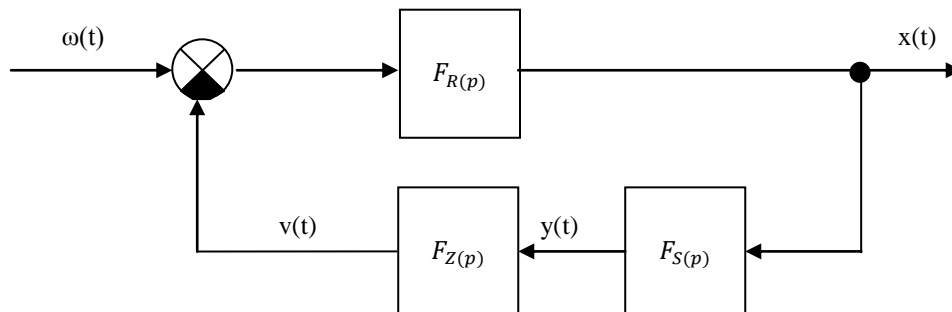
- Přenos odchylky (Obrázek 2.20):

a) $F_Z(p) = 1$, pak	$F_e(p) = \frac{1}{1+F_0(p)}$
b) $F_Z(p) \neq 1$, pak	$F_e(p) = \frac{1+F_R(p)F_S(p)[1-F_Z(p)]}{1+F_0(p)}$



Obrázek 2.20: Přenos odchyvky

- Přenos akční veličiny (Obrázek 2.21): $F_a(p) = \frac{F_R(p)}{1+F_0(p)}$



Obrázek 2.21: Přenos akční veličiny

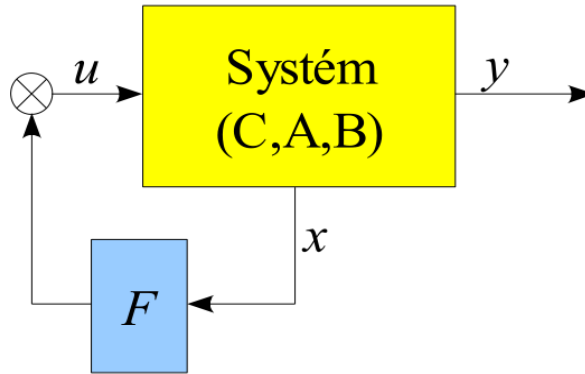
2.4 Regulátory

Regulátor se skládá z ústředního členu, výkonového zesilovače, měřicího členu a převodníku vstupní veličiny. Jeho úkolem je pomocí akční veličiny působit na soustavu tak, aby regulační odchylka byla co nejmenší. Ve výkonové elektronice a v pohonech jsou nejčastěji využívány PI regulátory. Regulátory lze obecně rozdělit:

- Nedynamické regulátory – ovlivňují pouze polohu pólů, nezvyšují řád regulační smyčky, jejich vstup může představovat regulační odchylka nebo stav (stavová odchylka). Mezi nedynamické regulátory je možné zařadit například lineární stavový regulátor.
- Dynamické regulátory – je možné jimi ovlivnit polohu pólů i nul v přenosu uzavřené regulační smyčky, zvyšují řád regulační smyčky. Lze je realizovat jako spojitě (analogové) či diskrétně. Mezi dynamické regulátory patří například PI nebo PID regulátor. [9]

2.4.1 Stavové regulátory

Ve zpětné vazbě mnohorozměrového regulačního obvodu stavový regulátor umožňuje utvářet celkovou dynamiku daného obvodu tak, aby byl cíl regulace plněn v požadované kvalitě. Schéma stavové zpětné vazby lze vidět na Obr. 2.23.



Obrázek 2.23: Schéma stavové zpětné vazby

V případě jednorozměrného lineárního stavového spojitého regulačního obvodu, kterému odpovídá regulovaná soustava o přenosu $F_S(s) = \frac{Y_S}{U_S} = \frac{d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \dots + d_1s + d_0}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0}$, kterému odpovídá stavový model:

$$\dot{x}(t) = A_s x(t) + Bu(t) \quad (23)$$

$$y(t) = C_s x(t) ,$$

hledá se řádková matice stavového regulátoru F , která zajistí požadovaný přenos řízení:

$$F_w(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + \frac{a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}{s^n + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + \frac{a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}{s^n + \dots}}}} \quad (24)$$

Formou stavového modelu je možné požadovaný přenos řízení vyjádřit :

$$\dot{x}(t) = A_w x(t) + Bw(t) \quad (25)$$

$$y(t) = C_w x(t)$$

Stavový model, který zajistí plnění požadovaného přenosu lze zapsat jako:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (26)$$

$$u = -Fx$$

Na základě porovnání těchto vztahů lze odvodit, že

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(-Fx) & (27) \\ \dot{x} &= (A - BF)x = A_{new}x \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Prvky matice stavového regulátoru f_i jsou konstanty. Hlavní rolí stavového regulátoru spočívá v tom, že přesune póly regulované soustavy do požadované polohy, která je definována zadanými kořeny jmenovatele přenosu řízení. Korekční matice výstupu přesouvá nuly regulované soustavy také do požadované polohy, jež je definována kořeny čitatele přenosu řízení. [2] [4]

2.4.2 PI – regulátor

U tohoto typu regulátoru jsou ve výstupní veličině zastoupeny dvě složky – proporcionální a integrační. Pro časové průběhy platí:

$$x(t) = r_0 e(t) + r_i \int_0^t e(t) dt + x(0). \quad (28)$$

Přenos je dán vztahem:

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = r_0 + \frac{r_i}{p} = k_r \frac{T_r p + 1}{p} = \frac{T_r p + 1}{T_i p}. \quad (29)$$

Mezi konstantami platí vztahy:

$$k_r = r_i = \frac{1}{T_i} T_r = \frac{r_0}{r_i} r_0 = \frac{T_r}{T_i} \quad (30)$$

PI – regulátor je nejběžnějším typem regulátoru. Používá se pro středně náročné aplikace s pomalými a středně rychlými změnami regulované veličiny, nastavuje se obtížněji, pracuje bez trvalé regulační odchylky. Používá se pro soustavy bez dopravního zpoždění nebo s malým dopravním zpožděním. [2][7]

2.4.3 PID-regulátor

PID-regulátor je nejsložitější ze základních typů regulátorů, který má ve výstupním signálu obsaženy tři složky, a to proporcionální, integrační a derivační.

$$x(t) = r_0 e(t) + r_d \frac{de(t)}{dt} + r_i \int_0^t e(t) dt + x(0) \quad (31)$$

Z toho vyplývá, že i přenos tohoto regulátoru má tři složky

$$F_R(p) = \frac{X(p)}{E(p)} = r_0 + \frac{r_i}{p} + r_d p = K_R \left(1 + T_D p + \frac{1}{T_I p} \right) = k_r \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p}, \quad (32)$$

pro konstanty platí následující vztahy

$$K_R = r_0 T_D = \frac{r_d}{r_i} T_I = \frac{r_0}{r_i} k_r = r_i T_{1,2} = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I(T_I - 4T_D)}}{2T_I T_D} \quad (33)$$

K_R představuje zesílení, T_D je derivační složka, T_I je složka integrační. Místo zesílení r_0 , se v praxi používá pojem pásmo proporcionality, pro který platí následující vztah $pp = \frac{1}{r_0} 100[\%]$. PID-regulátor v uzavřeném regulačním obvodu odstraňuje vlivem integrační složky trvalou regulační odchylku a vlivem derivační složky zlepšuje stabilitu regulačního obvodu. V počátku přechodového děje převládá derivační složka regulátoru, ale s narůstajícím časem převládá integrační složka regulátoru. PID-regulátor se používá pro nejnáročnější aplikace s velkými rychlými změnami regulované veličiny, poměrně obtížně se nastavuje, pracuje bez trvalé regulační odchylky, zlepšuje stabilitu. Používá se pro soustavy s větším dopravním zpožděním. Derivační složka je pozitivní v tom ohledu, že je schopna rychle reagovat na změny žádané hodnoty, což zároveň přináší s sebou i potíže. Následkem toho totiž zesiluje i vysokofrekvenční šumy a může se stát zdrojem nestability. Derivační složka působí jako brzda regulačního zásahu. Platí, že čím větší snahu na změnu hodnoty řídicí prvek má, tím více protisměrného zásahu tato složka vyvíjí. Veličina roste v reakci na změnu žádané hodnoty. Avšak jak se blíží žádané hodnotě, dochází k ustálení s minimálním přesahem. Zjednodušeně lze říci, že se nepohybuje se tak rychle jako v případě zásahu regulátoru typu PI. Derivační složka působí proti tomu, kam se proporcionální a integrační zásahy pokouší proces dostat. Složky P a I působí jedním směrem a složka D směrem opačným. [1] [4]

3 Použití stavové zpětné vazby v elektrických pohonech

Mechatronické soustavy, roboti a stroje nízkých až středních výkonů jsou běžně využity k rotačnímu (nebo lineárnímu) pohybu na různých elektromechanických zařízeních a servo systémech. Existuje několik dobře známých metod řízení stejnosměrných motorů, a existuje také mnoho přístupů k návrhu regulace těchto motorů, tyto metody však mohou být více či méně vhodné pro konkrétní typ aplikace.

Proporcionálně-integračně-derivační regulace (PID) je často používána v průmyslových aplikacích. Za největší výhody způsobu regulace PID lze považovat jeho jednoduchou konstrukci a stabilitu. Navzdory těmto výhodám, základním problémem této metody je necitlivost na systémy, které mají vysoce nelineární součástky a jsou snadno rušeny například okolními vlivy.

V moderní teorii řízení jsou použity metody regulace využívající stavové zpětné vazby ke snížení nelineárních účinků systému a variace parametrů řídicích algoritmů. Stavová zpětná vazba je metoda používaná v řídicím systému se zpětnou vazbou k tomu, aby póly uzavřené smyčky byly umístěny v předem stanovených místech s-roviny. Umístění pólů je žádoucí, protože odpovídá přímo vlastním číslům systému, který reguluje odezvu systému. Tento systém musí být říditelný a pozorovatelný, aby mohla být tato metoda použita.

V této kapitole je představen popis stejnosměrného motoru a následuje příklad regulace polohy a rychlosti pomocí stavové zpětné vazby a regulace rychlosti pomocí PI-regulátoru.

3.1 Popis stejnosměrného motoru

Ve většině aplikací musí být rychlost nebo poloha hřídele motorů přesně řízena. Aby bylo možné navrhnout řídicí systémy s požadovanou rychlostí a polohou, je třeba získat, analyticky nebo experimentálně, matematický model motoru nebo systému, který má být kontrolován. V případě, že systém je převážně lineární, je vhodný model dán jeho přenosovou funkcí. Pro regulace stejnosměrného motoru s kotvou platí, že přenosová funkce systému je odvozena ze vztahu mezi úhlovou rychlostí na výstupu (ω) a aplikovaného napětí (v_{app}) na kotvě stejnosměrného motoru na vstupu. Tento přístup obvykle vytváří systém třetího řádu, pokud nebyl žádný z jeho parametrů ignorován. V závislosti na parametrech systému určuje charakteristická rovnice systému jeho chování. Poměr tlumení (ζ) a vlastní frekvence (ω_n) jsou důležitými parametry v charakteristické rovnici přenosové funkce. Zadáním některé požadované hodnoty ζ a ω_n je možné získat požadovanou výstupní odezvu.

Obecně platí, že krouticí moment generovaný stejnosměrným motorem je úměrný proudu kotvy a síle magnetického pole.

Za předpokladu, že magnetické pole je konstantní, tudíž točivý moment motoru je úměrný pouze proudu kotvy i a konstantě K_t , jak je znázorněno v následující rovnici. Jedná se o motor regulovaný kotvou.

$$T = K_t i \quad (34)$$

Za předpokladu, že je magnetický tok konstantní, pak zpětná elektromotorická síla (indukované napětí) je úměrná úhlové rychlosti hřídele díky konstantě K_b .

$$e = K_b \dot{\theta} \quad (35)$$

Konstanty K_t , K_b lze nahradit konstantou K reprezentující, jak momentu motoru, tak i zpětné elektromotorické napětí. Na základě toho, lze odvodit následující rovnice, které jsou odvozeny na základě Newtonova druhého zákona a druhého Kirchhoffova zákona.

$$\begin{aligned} J \ddot{\theta} + b \dot{\theta} &= K i & (36) \\ L \frac{di}{dt} + R i &= V - K \dot{\theta} \end{aligned}$$

Přenosová funkce stejnosměrného motoru lze popsat následující rovnicí:

$$F(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s((Js + b)(Ls + R) + K^2)} \left[\frac{\text{rad/sec}}{V} \right] \quad (37)$$

Příčemž J je moment setrvačnosti na hřídeli motoru, b koeficient viskózního tření na hřídeli motoru, K konstanta motoru, R odpor vinutí, L indukčnost, θ pozice hřídele, $\dot{\theta}$ rychlost, V napětí zdroje.

Diferenciální rovnice mohou být také vyjádřeny pomocí stavového popisu výběrem polohy motoru, otáček motoru a proudu kotvy jako stavové proměnné. Opět napětí kotvy je považováno za vstupní a natočení je považováno za výstup.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V \quad (38)$$

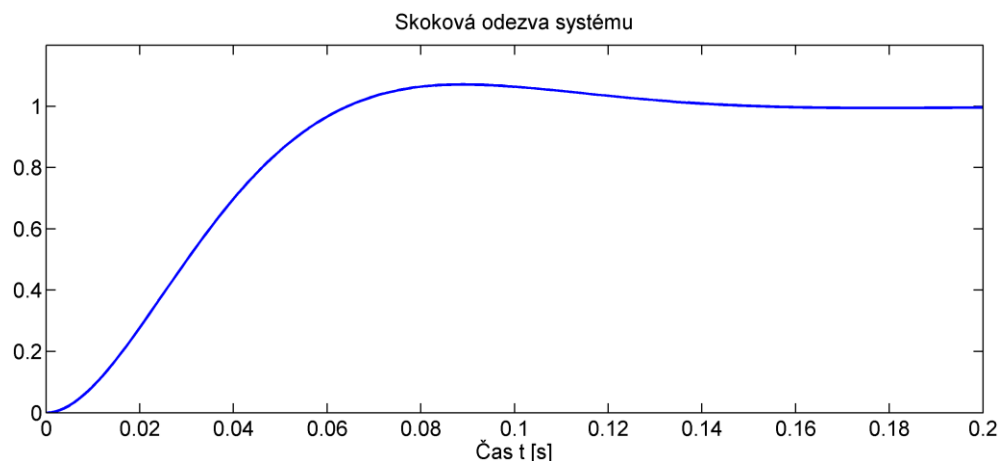
$$y = [1 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} \quad (39)$$

Je zapotřebí motor usadit velmi přesně, tudíž ustálená odchylka polohy motoru musí být nula, když je poloha zadána. Dále je potřeba, aby ustálená odchylka byla nula i vzhledem ke stálému rušení. Dalším požadavkem je, že výkon motoru dosáhne konečné polohy velmi rychle a bez překročení maximálních hodnot.

3.2 Regulace rychlosti pomocí stavové zpětné vazby

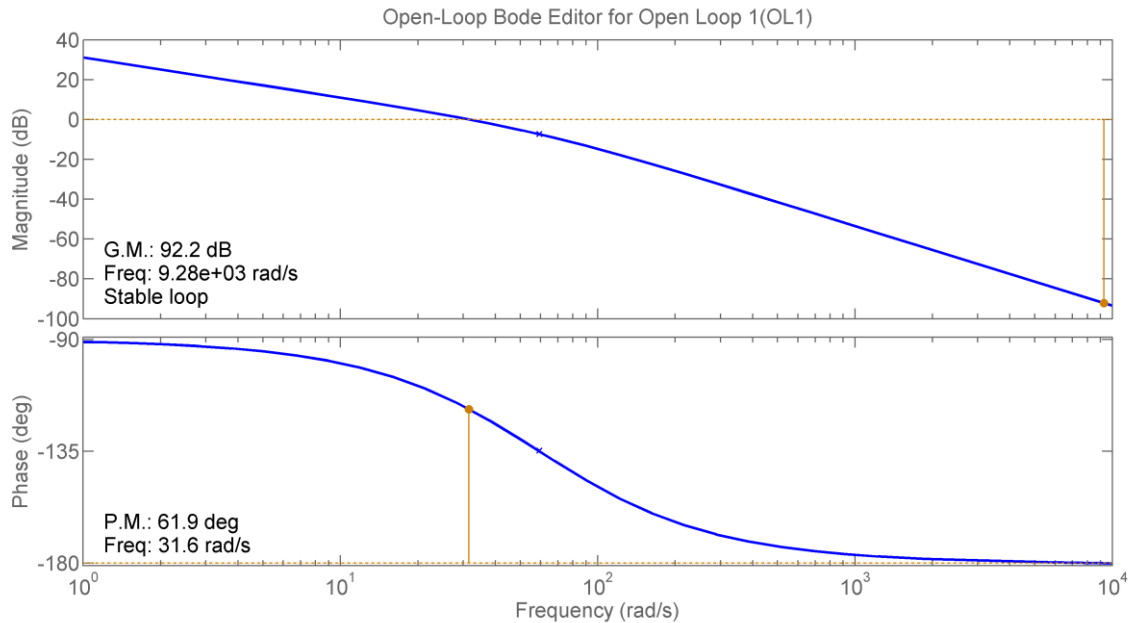
Pokud jsou dosazena konkrétní čísla za parametry stejnosměrného motoru a zadána do programu MATLAB, lze vykreslit přechodovou (Obr. 3.1), impulzní (Obr. 3.2) a fázovou a frekvenční charakteristiku (Obr. 3.3) studovaného systému. Pro účely simulace byl použit model stejnosměrného motoru s parametry: moment setrvačnosti $J = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2$, koeficient viskózního tření na hřídeli motoru $b = 3,5 \cdot 10^{-6}$, konstanta motoru $K = 0,02$, odpor vinutí $R = 4\Omega$, indukčnost $L = 2,75 \cdot 10^{-6} \text{H}$. Zde je uveden přenos systému, kdy ve zpětné vazbě je 1.

```
J=3.2284E-6;
b=3.5077E-6;
K=0.0274;
R=4;
L=2.75E-6;
s=tf('s');
P_motor=K/(s*((J*s+b)*(L*s+R)+K^2));
t=0:0.001:0.2;
sys_cl=feedback(P_motor,1);
step(sys_cl,t)
```



Obrázky3.1: Přechodová charakteristika stejnosměrného motoru

```
s=tf('s');
P_motor=K/(s*((J*s+b)*(L*s+R)+K^2));
sisotool('bode',P_motor)
```



Obrázek 3.3: Frekvenční a fázová charakteristika stejnosměrného motoru

Přenosová funkce motoru s danými parametry je tedy ve tvaru:

$$P_{motor} = \frac{0,0274}{8,87 \cdot 10^{-12}s^3 + 1,291 \cdot 10^{-5}s^2 + 0,0007648s} \quad (40)$$

Z vykreslených přechodových a impulzních charakteristik je vidět, že se systém dostane na požadovanou hodnotu za 0,18 s.

Na následujícím příkladu, kde je uveden přenos stejného řádu pro koeficienty s celými čísly, si lze ukázat, jak získat matici, která je vložena do zpětnovazební smyčky a tím je dosaženo požadovaného chování systému. Nejprve je zvolena přenosová funkce:

$$F(s) = \frac{2}{s(s^2 + 12s + 20)} \quad (41)$$

V kanonické formě bude tento systém stejnosměrného motoru definován následujícím způsobem:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \ 0 \ 0], \quad D = [0] \quad (42)$$

Z toho vyplývá, že charakteristická rovnice stejnosměrného motoru bude $s^3 + 12s^2 + 20s + 0 = 0$ a póly systému jsou $p_1 = 0, p_2 = -10, p_3 = -2$. Jedná se o systém třetího řádu, je tedy nutné stanovit tři póly systému.

Zadáním požadované hodnoty ζ a ω_n je možné získat požadovanou výstupní odezvu, to znamená, že je potřeba umístit póly jinam, aby poměr tlumení dosahoval hodnoty $\zeta = 0.8$ a vlastní frekvence nabývala hodnot $\omega_n = 6$. Pokud jsou tedy dosazeny zvolené hodnoty poměru tlumení $\zeta = 0.8$ a vlastní frekvence $\omega_n = 6$, rovnice budou mít následující tvar:

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \zeta\omega_n) \quad (43)$$

a po dosazení: $s^3 + 14,4s^2 + 82,1s + 172,8 = 0$

Pokud jsou vzaty v úvahu rovnice stavové zpětné vazby:

$$\begin{aligned} u &= -Fx \\ \dot{x} &= (A - BF)x \end{aligned} \quad (44)$$

a dosazeny:

$$BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix},$$

pak tedy: $A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & (-20 - k_2) & (-12 - k_3) \end{bmatrix}$

Nyní má charakteristická rovnice následující tvar:

$$s^3 + (12 + k_3)s^2 + (20 + k_2)s + k_1 = 0 \quad (45)$$

Z této rovnice je získána následující soustava dvou rovnic o dvou neznámých:

$$12 + k_3 = 14,4 \Rightarrow k_3 = 2,4$$

$$20 + k_2 = 82,1 \Rightarrow k_2 = 60,1$$

$$k_1 = 172,8$$

Z toho vyplývá, že nová matice lineárního zpětnovazebního regulátoru je stanovena:

$$F = [172,8 \quad 60,1 \quad 2,4].$$

Hlavní nevýhodou lineárního stavového modelu je zanedbání nelineárních efektů, jejichž vlastnosti mohou výrazně ovlivnit dynamické chování modelovaného systému. Při umisťování pólů je důležité specifikovat požadovaná vlastní čísla systému se zpětnou vazbou v levé polorovině.

Řídicí zpětnovazební signál je v souladu s mezemi pohonu.

$$u = -Kx \quad (46)$$

Pokud není regulována poloha (viz příklad výše), ale rychlost, přenosová funkce má následující tvar:

$$F(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \left[\frac{\text{rad/sec}}{V} \right] \quad (47)$$

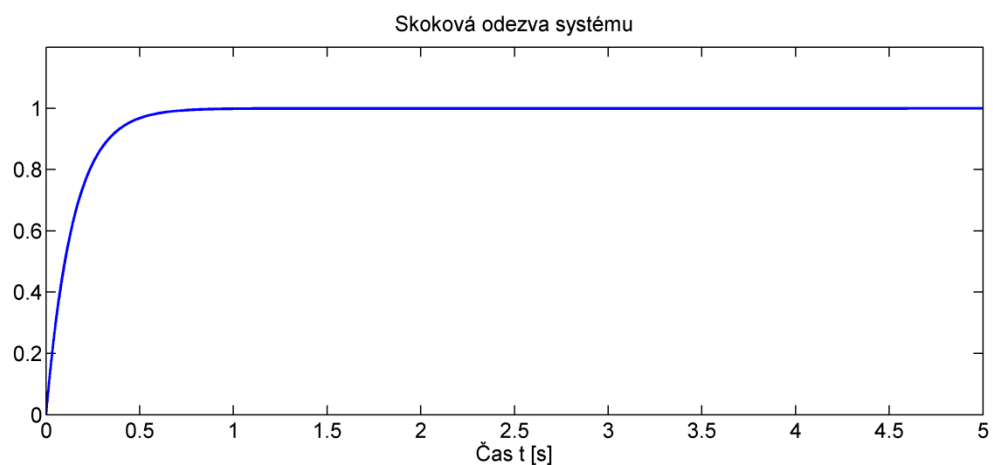
A stavový popis je zapsán následujícím způsobem:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V \quad (48)$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ l \end{bmatrix} \quad (49)$$

Stejně jako v předešlém případě je možné si zadat konkrétní hodnoty za J, b, K, R, L a vykreslit si jednotlivé charakteristiky v programu MATLAB. Zde byly použity hodnoty motoru: $J = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, koeficient viskózního tření na hřídeli motoru $b = 3,5 \cdot 10^{-5}$, konstanta motoru $K = 0,02$, odpor vinutí $R = 4 \Omega$, indukčnost $L = 2,75 \cdot 10^{-5} \text{ H}$. Na obr. 3.4 je zobrazena přechodová charakteristika daného motoru, na obr. 3.5 jsou vykresleny fázová a amplitudová charakteristika zmiňovaného systému.

```
J=3.2284E-5;
b=3.5077E-5;
K=0.0274;
R=4;
L=2.75E-5;
s=tf('s');
P_motor=K/((J*s+b)*(L*s+R)+K^2);
t=0:0.001:0.2;
step(P_motor,t)
```

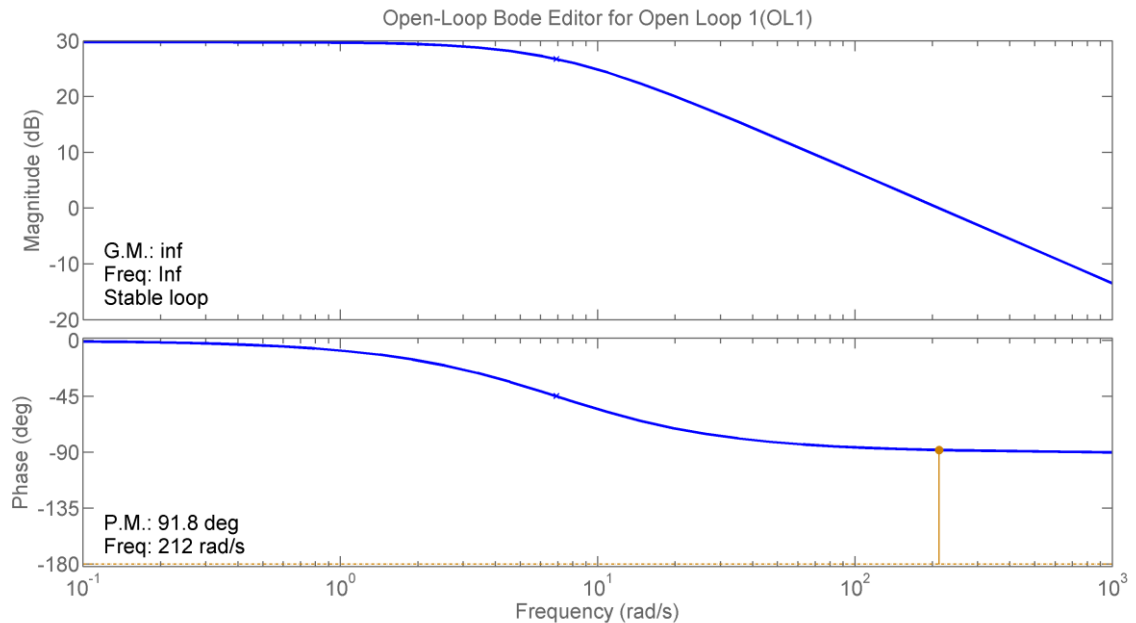


Obrázek 3.4: Přechodová charakteristika stejnosměrného motoru

```

J=3.2284E-5;
b=3.5077E-5;
K=0.0274;
R=4;
L=2.75E-5;
s=tf('s');
P_motor=K/((J*s+b)*(L*s+R)+K^2);
sisotool('bode',P_motor)

```



Obrázek 3.6: Fázová a frekvenční charakteristika stejnosměrného motoru

Pro daný systém popisující ss motor s přenosovou funkcí:

$$P_{motor} = \frac{0,0274}{8,87 \cdot 10^{-12} s^3 + 1,291 \cdot 10^{-5} s^2 + 0,0007648s} \quad (50)$$

jsou definovány matice A, B, C, D:

$$A = \begin{bmatrix} -1454156,34151836 & -86145528,2721334 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

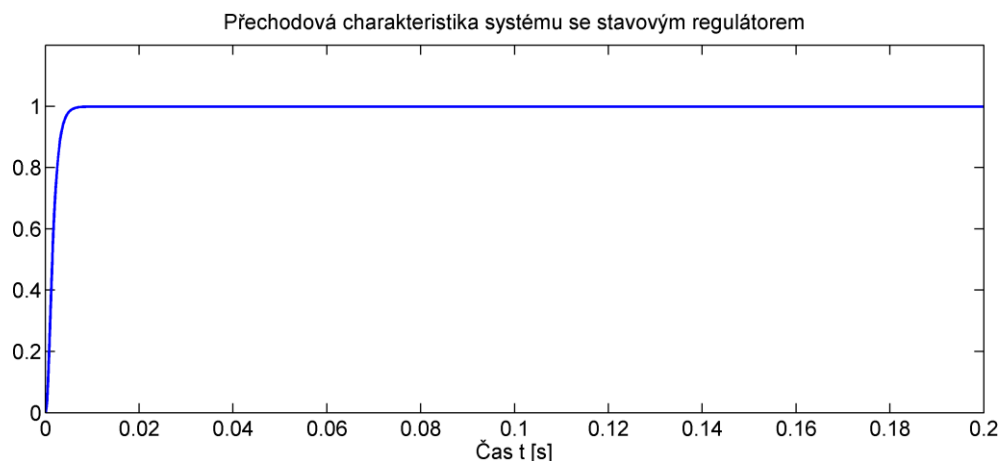
$$C = [0 \quad 0 \quad 3086280693,84997]$$

Dále jsou zvoleny tři reálné záporné póly: $p_1 = -1000$, $p_2 = -2000$, $p_3 = -4000$.

Z požadavků na umístění pólů systému je spočítána zpětnovazební matice F:

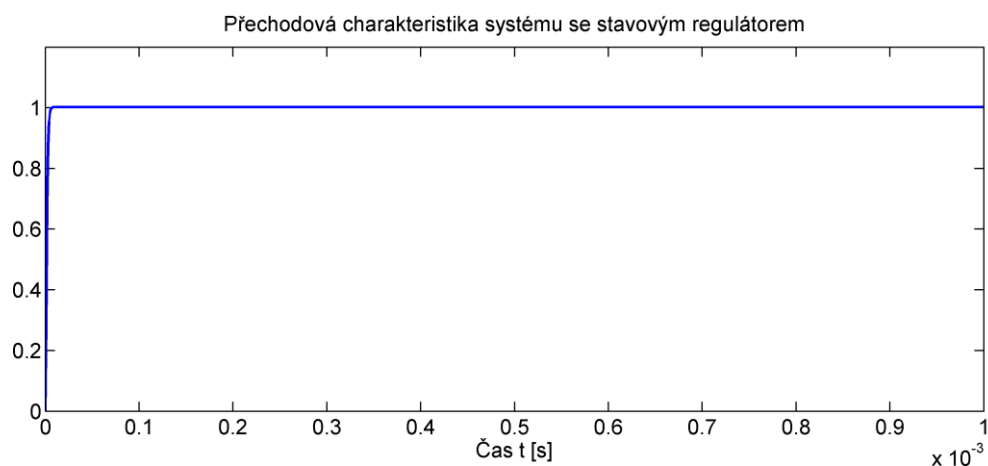
$$F = [-1447156,34152856 \quad -72145528,3086815 \quad 7999999972,00572].$$

Odezva systému se stavovou zpětnou vazbou je zobrazena na obr. 3.7.



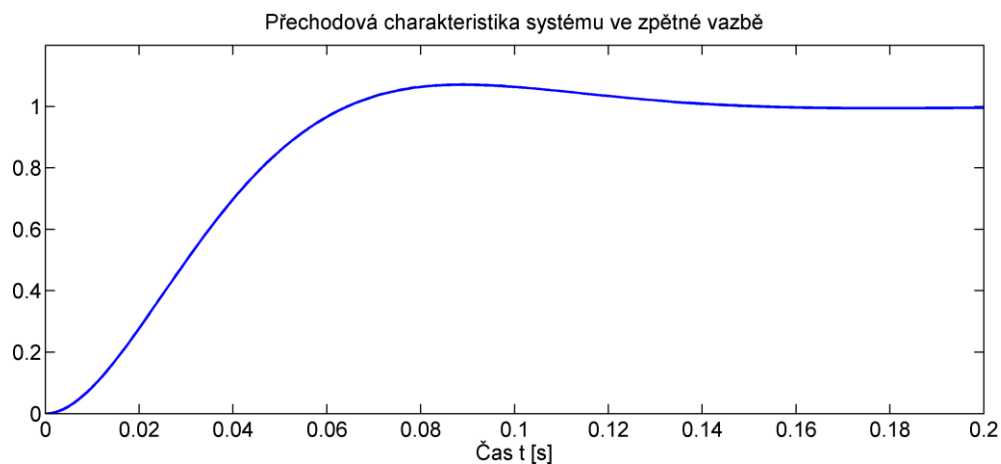
Obrázek 3.7: Přechodová charakteristika stejnosměrného motoru při použití stavové zpětné vazby.

Na obr. 3.8 jsou zobrazeny výsledky simulace pro reálné póly: $p_1 = -10^6$, $p_2 = -2 \cdot 10^6$, $p_3 = -4 \cdot 10^6$.



Obrázek 3.8: Přechodová charakteristika stejnosměrného motoru při použití stavové zpětné vazby.

Pro účely porovnání je vykreslena přechodová charakteristika systému s jednotkovou zpětnou vazbou. Výsledek této simulace je zobrazen na obr. 3.9.

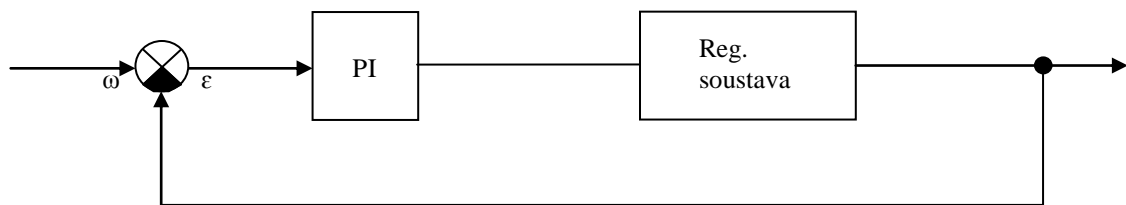


Obrázek 3.9: Přechodová charakteristika stejnosměrného motoru při použití zpětné vazby se zesílením 1.

Je tedy patrné, že lze ovlivňovat chování systému dle našich požadavků volbou námi požadovaných hodnot pólů systému za pomoci stavové zpětné vazby. Jak je vidět z obrázků, menší reálné póly vedou na rychlejší dynamickou odezvu systému. Čím dál od imaginární osy jsou póly umístěny, tím rychleji dosáhne systém požadované odezvy. System se stavovou zpětnou vazbou má oproti systému se zpětnou vazbou se zesílením 1 lepší dynamické vlastnosti. V případě jednotkové zpětné vazby vykazuje odezva systému překmit a systém se ustálí na požadované hodnotě za 0,15 s. V případě použití stavové zpětné vazby na obr. 3.8 dosáhne systém požadované hodnoty bez překmitu a to za necelých 100 μ s.

3.3 Regulace rychlosti pomocí PI-regulátoru

V této části je jako příklad použit PI-regulátor. Blokové schéma daného systému lze vidět na *Obr. 3.10*, je nutné najít vhodné konstanty K_i a K_p tak, aby se výsledná charakteristika co nejvíce blížila požadované.



Obr. 3.10: Blokové schéma regulace rychlosti při použití PI-regulátoru

Na *Obr. 3.11* je možné vidět jednu z možností při použití PI-regulátoru. Pro zjednodušení byl použit PI-regulátor a přenos motoru ve tvaru definovaném výše:

$$P_{motor} = \frac{K}{(J \cdot s + b) \cdot (L \cdot s + R) + K^2} \quad (52)$$

a přenos regulátoru ve tvaru:

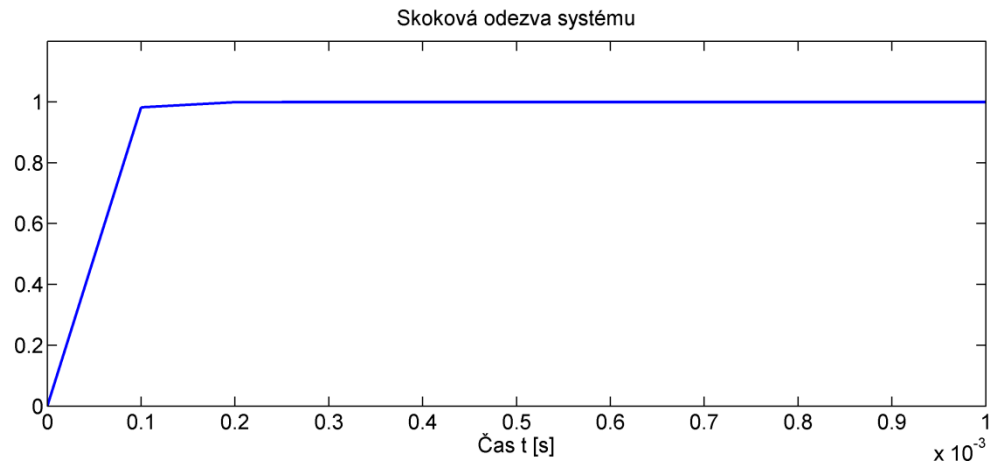
$$C = (K_p + K_i)/s. \quad (53)$$

Tyto přenosy jsou zapojeny v sérii. System regulátoru a motoru je nazýván přenos v otevřené smyčce ve tvaru $F(p) = C \cdot P_{motor}$. Použitý přenos uzavřené smyčky je $F(p) = \frac{C \cdot P_{motor}}{1 + C \cdot P_{motor}}$. Při použití stejných hodnot jako v předchozím příkladě, tedy $J = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, koeficient viskózního tření na hřídeli motoru $b = 3,5 \cdot 10^{-5}$, konstanta motoru $K = 0,02$, odpor vinutí $R = 4\Omega$, indukčnost $L = 2,75 \cdot 10^{-5} \text{ H}$, si lze vykreslit přechodovou charakteristiku pomocí programu MATLAB.

```
J=3.2284E-5;
b=3.5077E-5;
K=0.0274;
R=4;
```



```
L=2.75E-5;  
s=tf('s');  
KP=150;  
KI=100;  
C=KP+KI/s;  
P_motor=K/((J*s+b)*(L*s+R)+K^2);  
t=0:0.01:0.2;  
sys_cl=feedback(C*P_motor,1);  
step(sys_cl,t)
```



Obrázek 3.11: Přejchodová charakteristika stejnosměrného motoru při použití PI-regulátoru

Z obrázku je patrné, že systém dosáhne požadovaného chování se srovnatelnou dynamikou jako v případě zpětné vazby. Je však nutné si uvědomit, že nebylo uvažováno omezení proudu, které zásadním způsobem ovlivňuje dynamiku v reálných systémech.

4 Závěr

V této bakalářské práci byl proveden popis reprezentace stavu a stavové zpětné vazby.

První část práce byla věnována teoretickému popisu stavu a stavové zpětné vazby. V této části byl také uveden příklad, jak funguje odvození stavového popisu a následné určení stavové rovnice a polohy pólů a nul. Tato kapitola se také věnovala problematice vlivu polohy pólů na chování systému. Dále zde byl uveden popis jednotlivých typů regulátorů, a to stavového regulátor, PI – regulátoru, PID – regulátoru, a jejich využití v praxi.

Druhá část bakalářské práce se zaměřovala na použití stavové zpětné vazby v elektrických pohonech. Byl zde popsán stejnosměrný motor a nasimulovány jednotlivé průběhy charakteristik. Byl uveden příklad regulace rychlosti pomocí stavové zpětné vazby. Byly zde uvedeny dva příklady nastavení pólů pomocí stavové zpětné vazby. V prvním případě byly póly umístěny do bodů $p_1 = -1000$, $p_2 = -2000$, $p_3 = -4000$, systém dosáhl požadované hodnoty bez překmitu za 0,01 s, v druhém případě byly pomocí stavové zpětné vazby umístěny póly systému do $p_1 = -10^6$, $p_2 = -2 \cdot 10^6$, $p_3 = -4 \cdot 10^6$, systém v tomto případě vykazuje lepší dynamické vlastnosti. Pro srovnání byl dále vykreslen případ se zpětnou vazbou se zesílením 1. Systém se v tomto případě ustálil s překmitem za 0,15 s.

V poslední části je uveden příklad PI-regulátoru, který vykazuje dle provedeného nastavení, $J = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, koeficient viskózního tření na hřídeli motoru $b = 3,5 \cdot 10^{-5}$, konstanta motoru $K = 0,02$, odpor vinutí $R = 4 \Omega$, indukčnost $L = 2,75 \cdot 10^{-5} \text{ H}$, srovnatelných dynamických vlastností a ustálí se za 0,2 s. Je však nutné si uvědomit, že nebylo uvažováno omezení proudu, které zásadním způsobem ovlivňuje dynamiku v reálných systémech.

Všechny cíle práce, které byly v úvodu vytýčeny, byly splněny.

Použitá literatura a zdroje:

- [1] BABUŠKA, Robert; STRAMIGIOLI, Stefano. *Matlab and Simulink for Modeling and Control* [online]. [cit. 3.10.2014]. Dostupný na WWW: <http://www.dcsc.tudelft.nl/~sc4070/transp/refresher.pdf>
- [2] BALÁTĚ, Jaroslav. *Automatické řízení*. Praha: BEN, 2003, ISBN 80-7300-020-2.
- [3] BISHOP, Robert; DORF, Richard. *SolutionsManual to Accompany Modern Control Systems*. Upper Saddle River, NJ: PearsonEducation, Inc, 2008, ISBN -13: 9780132270298.
- [4] BLAHA, Petr; VAVŘÍN, Petr. *Řízení a regulace I*. [online]. [cit. 3.10.2014]. Dostupný na WWW: http://www.uamt.feec.vutbr.cz/~richter/vyuka/0809_BRR1/texty/brr1.pdf
- [5] FRANKLIN, Gene; POWELL, David. *Feedback Control of Dynamic Systems* [online]. [cit. 3.10.2014]. Dostupný na WWW: <http://robotics.itee.uq.edu.au/~elec3004/2013/lectures/FPE-Ch8-Digital%20Control.pdf>
- [6] GOLNARAGHI, Farid; KUO, Benjamin. *Automatic Control Systems*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc., 2010, ISBN -13 978-0470-04896-2.
- [7] ROUBAL, Jiří; HUŠEK, Petr. *Regulační technika v příkladech*. Praha: BEN, 2011, ISBN 978-80-7300-260-2.
- [8] SOUSEDÍK, Pavel. *Stabilita regulačního obvodu* [online]. [cit. 3.10.2014]. Dostupný na WWW: http://195.178.94.43/CAAC_PHP/CAAC/cesky/analyza/s_stabilita/s_stabilita.php
- [9] SROVNAL, Vilém. *Kybernetika* [online]. [cit. 3.10.2014]. Dostupný na WWW: <https://akela.mendelu.cz/~xzahrad6/TKY/Kybernetika.pdf>