

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ**

**Katedra elektroenergetiky a ekologie**

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Možnosti uplatnění studeného kelímku při ohřevu  
kovů**

**Martin Matoušek**

**2015**

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
Fakulta elektrotechnická  
Akademický rok: 2014/2015

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Martin MATOUŠEK**  
Osobní číslo: **E13N0078P**  
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**  
Studijní obor: **Elektroenergetika**  
Název tématu: **Možnosti uplatnění studeného kelímku při ohřevu kovů**  
Zadávající katedra: **Katedra elektroenergetiky a ekologie**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Uveďte teorii indukčního ohřevu
  2. Uveďte teorii sdílení tepla
  3. Uveďte problematiku studeného kelímku s důrazem na studené kelímky používané pro ohřev kovů
  4. Vytvořte numerický model pro řešení elektromagnetického pole studeného kelímku pro ohřev kovů
  5. Uveďte závěry pro praxi
-

Rozsah grafických prací: podle doporučení vedoucího

Rozsah pracovní zprávy: 30 - 40 stran

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. Langer, Emil, Teorie indukčního a dielektrického tepla , Praha : Academia 1979
2. Rudnev, Valery, Handbook of induction heating , New York : Marcel Dekker 2003
3. Starck, Axel von; Mühlbauer, Alfred; Kramer, Carl, Handbook of thermoprocessing technologies : fundamentals, processes, components, safety , Essen : Vulkan-Verlag 2005
4. Internet

Vedoucí diplomové práce: Ing. David Rot, Ph.D.

Katedra elektroenergetiky a ekologie

Datum zadání diplomové práce: 15. října 2014

Termín odevzdání diplomové práce: 11. května 2015

Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.  
děkan



Doc. Ing. Karel Noháč, Ph.D.  
vedoucí katedry

V Plzni dne 15. října 2014

## **Abstrakt**

Předkládaná diplomová práce se zabývá problematikou studeného kelímku se zaměřením na využití při tavně kovů. V prvních dvou kapitolách vysvětluje základní pojmy v oblasti šíření tepla a teorie indukčního ohřevu. Další kapitola je zaměřena na přiblížení problematiky studeného kelímku a jeho využití.

Hlavním cílem práce je vytvoření 3D modelu ve výpočetním software ANSYS. V této diplomové práci je vytvořen model studeného kelímku pro tavení titanu a je sledován vliv počtu segmentů na ztráty v kelímku a na jeho účinnost.

## **Klíčová slova**

Maxwellovy rovnice, indukční teplo, Poyntingův vektor, hloubka vniku, kelímek s integrovaným induktorem, segmentový kelímek, tavení vodivých materiálů, titan, matematický model, ANSYS

## **Abstract**

The presented thesis is focused on usage of cold crucible for melting metals. The first two chapters describes theory of heat diffusion and induction heating. Next chapter is focused on approaching of cold crucible and possibilities of its use.

Main goal of this thesis is create 3D model in software ANSYS. In thesis is created mathematical model of cold crucible for melting titanium. The influence of number of segments on power losses in cold crucible is observed.

## **Key words**

Maxwell equations, induction heating, Poynting vector, depth of penetration, crucible with integrated inductor, segment crucible, melting of conductive metals, titanium, mathematical model, ANSYS

## **Prohlášení**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

V Plzni dne

Jméno příjmení

.....

## **Poděkování**

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu mé diplomové práce Ing. Davidu Rotovi Ph.D. za cenné profesionální rady, připomínky a metodické vedení práce. Dále bych chtěl poděkovat Prof. Ing. Jiřímu Koženému CSc. a Ing. Stanislavu Jiřincovi za rady a čas, který mi věnovali při řešení této práce.

## Obsah

<b>OBSAH</b> .....	<b>8</b>
<b>SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK</b> .....	<b>10</b>
<b>SEZNAM OBRÁZKŮ</b> .....	<b>11</b>
<b>SEZNAM GRAFŮ</b> .....	<b>12</b>
<b>SEZNAM TABULEK</b> .....	<b>12</b>
<b>1 ÚVOD</b> .....	<b>13</b>
<b>2 TEORETICKÝ ÚVOD</b> .....	<b>14</b>
2.1 PŘEMĚNA ELEKTRICKÉ ENERGIE NA TEPELNOU .....	14
2.2 ZÁKLADY ŠÍŘENÍ TEPLA .....	15
2.2.1 Sálání .....	15
2.2.2 Vedení .....	19
2.2.2.1 Fourier – Kirchhoffova rovnice .....	20
2.2.2.2 Vedení tepla válcovou stěnou .....	22
2.2.3 Proudění .....	23
2.2.3.1 Určení součinitele přestupu tepla $\alpha$ .....	24
2.3 TEORIE INDUKČNÍHO OHŘEVU .....	26
2.3.1 Indukční teplo .....	27
2.3.2 Odvození vlnových rovnic pro šíření elektromagnetického vlnění [4] .....	27
2.3.3 Vektorový potenciál .....	29
2.3.4 Elektromagnetické vlnění harmonické [1] .....	30
2.3.5 Poyntingův zářivý vektor .....	30
2.3.6 Válcové elektromagnetické vlnění [1], [4] .....	31
2.3.6.1 Obecné rovnice válcového elektromagnetického vlnění [1], [4] .....	33
2.3.7 Skinefekt a hloubka vniku .....	35
<b>3 PROBLEMATIKA STUDENÉHO KELÍMKU S DŮRAZEM NA STUDENÉ KELÍMKY POUŽÍVANÉ PŘI OHŘEVU KOVŮ</b> .....	<b>37</b>
3.1 STUDENÝ KELÍMEK .....	37
3.1.1 Princip .....	37
3.1.2 Historie studeného kelímku [14] .....	37
3.1.3 Konstrukční provedení studeného kelímku .....	38
3.1.4 Dělení studených kelímků dle tvaru induktoru .....	39
3.1.4.1 Segmentový kelímek .....	39
3.1.4.2 Kelímek s integrovaným induktorem .....	40
3.1.5 Tavení kovů ve studeném kelímku (ISM) .....	41
3.1.5.1 Tavení titanu [30] .....	41
<b>4 MATEMATICKÝ MODEL PRO NUMERICKÉ VÝPOČTY</b> .....	<b>44</b>



4.1	METODA KONEČNÝCH PRVKŮ .....	44
4.2	OBECNÝ POSTUP TVORBY MATEMATICKÉHO MODELU .....	45
4.2.1	Definice problému .....	46
4.2.2	Pre-processing .....	46
4.2.2.1	Tvorba modelu .....	46
4.2.2.2	Zadání atributů modelu .....	46
4.2.2.3	Tvorba sítě elementů (mesh) .....	46
4.2.3	Solution .....	47
4.2.4	Post-processing.....	47
<b>5</b>	<b>MATEMATICKÝ MODEL STUDENÉHO KELÍMKU .....</b>	<b>48</b>
5.1	DEFINOVÁNÍ PROBLÉMU .....	48
5.2	VYTVORENÍ GEOMETRIE.....	49
5.3	MATERIÁLOVÉ PARAMETRY .....	50
5.4	TVORBA SÍTĚ ELEMENTŮ – MESH .....	50
5.5	MATERIÁLOVÉ PARAMETRY A ZATÍŽENÍ MODELU .....	51
<b>6</b>	<b>VÝSLEDKY MATEMATICKÉHO MODELU STUDENÉHO KELÍMKU .....</b>	<b>53</b>
6.1	ZTRÁTY V INDUKTORU.....	54
6.2	ZTRÁTY V SEGMENTECH.....	54
6.3	ZTRÁTY VE VSÁZCE .....	56
6.4	ZTRÁTY CELKOVÉ .....	58
6.5	POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ Z DRUHÉHO MODELU.....	58
<b>7</b>	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>59</b>
<b>8</b>	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A ZDROJŮ .....</b>	<b>61</b>
<b>9</b>	<b>PŘÍLOHY .....</b>	<b>65</b>
9.1	PŘÍLOHA 1 – MODEL STUDENÉHO KELÍMKU V JAZYCE APDL BEZ GRAFICKÉHO VYKRESLENÍ VÝSLEDKŮ .....	65
9.2	PŘÍLOHA 2 – VYPOČTENÉ HODNOTY MATEMATICKÉHO MODELU.....	73
9.3	PŘÍLOHA 3 - GRAFICKÝ VÝSTUP MODELU STUDENÉHO KELÍMKU .....	75

## Seznam symbolů a zkratek

### Tepelné pole

Symbol/zkratka	Význam	Jednotka
A	poměrná pohltivost	[-]
B	poměrná odrazivost	[-]
C	poměrná průzařnost	[-]
c	měrné teplo materiálu	[J.kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
c <sub>p</sub>	měrná tepelná kapacita	[J.kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
g	gravitační zrychlení	[m.s <sup>-2</sup> ]
L	charakteristický rozměr	[-]
n	index lomu na rozhraní	[-]
P	výkon	[W]
Q	tepelný tok	[W]
s	měrná hmotnost materiálu	[kg.m <sup>-3</sup> ]
v	rychlost šíření v prostředí	[m.s <sup>-1</sup> ]
v'	rychlost šíření v prostředí	[m.s <sup>-1</sup> ]
α	součinitel přestupu tepla	[W.m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]
γ	součinitel objemové roztažnosti	[K <sup>-1</sup> ]
ε <sub>s</sub>	stupeň černosti	[-]
η	dynamická viskozita	[Pa.s]
Θ	termodynamická teplota	[K]
θ	teplota	[°C]
λ	vlnová délka	[m]
λ	měrná tepelná vodivost	[W.m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
ν	kinematická viskozita	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]

**Elektromagnetické pole**

<b>Symbol/zkratka</b>	<b>Význam</b>	<b>Jednotka</b>
B	magnetická indukce	[T]
E	intenzita elektrického pole	[V.m <sup>-1</sup> ]
H	intenzita magnetického pole	[A.m <sup>-1</sup> ], [H]
I <sub>1</sub>	elektrický proud	[A]
i <sub>11</sub>	proudová hustota	[A.m <sup>-1</sup> ]
I <sub>11</sub>	proudová hustota	[A.m <sup>-1</sup> ]
N <sub>11</sub>	počet závitů na 1 m	[m <sup>-1</sup> ]
S	Poyntingův vektor	[W.m <sup>-2</sup> ]
W <sub>el</sub>	elektrická energie	[W]
γ	konduktivita	[S.m <sup>-1</sup> ]
ε <sub>0</sub>	permitivita vakua	[F.m <sup>-1</sup> ]
ε <sub>r</sub>	relativní permitivita	[-]
μ <sub>0</sub>	permeabilita vakua	[H.m <sup>-1</sup> ]
μ <sub>r</sub>	relativní permeabilita	[-]
ρ	objemová hustota nábojů	[C.m <sup>-3</sup> ]

**Seznam obrázků**

Obrázek 1: Snellův zákon [4] .....	15
Obrázek 2: Odvození pro Kirchhoffův zákon .....	16
Obrázek 3: Grafické znázornění Planckova vyzařovacího zákona [6].....	18
Obrázek 4: Wiennův posunovací zákon [8] .....	18
Obrázek 5: Izotermy [1] .....	19
Obrázek 6: Situace pro odvození Fourier-Kirchhoffova zákona [1] .....	21
Obrázek 7: Odvození vztahu pro vedení ve válcové stěně [1] .....	22
Obrázek 8: Stěna odporové pece [10].....	24
Obrázek 9: Zjednodušené a náhradní schéma indukčního ohřevu [11] .....	27
Obrázek 10: Znázornění Poyntingova vektoru .....	31
Obrázek 11: Řez válcovou cívkou a soustava válcových souřadnic [1].....	32
Obrázek 12: Vyzařování elektromagnetického vlnění Sp1 vnitřním povrchem cívky [1] .....	33
Obrázek 13: Odvození rotH a rotE v dutině cívky .....	35
Obrázek 14: Vliv skin efektu na rozložení proudové hustoty a rozložení proudové hustoty v závislosti na frekvenci [12], [13] .....	36
Obrázek 15: Studený kelímek patentovaný v roce 1988 [18] .....	38
Obrázek 16: Schéma konstrukčního uspořádání studeného kelímku – a) segmentový kelímek [26], b) kelímek s integrovaným induktorem [27] .....	39
Obrázek 17: Účinnost v závislosti na počtu segmentů [28] .....	40
Obrázek 18: Schématické znázornění zpracování titanu [31] .....	42
Obrázek 19: Diskretizace analyzované oblasti [32].....	45
Obrázek 20: Obecný postup vytvoření modelu [34] .....	45
Obrázek 21: Příklad úpravy meshe pro omezení počtu elementů [33] .....	47
Obrázek 22: Schématické znázornění řešeného problému.....	48
Obrázek 23: Zjednodušení problému díky symetrii .....	49

Obrázek 24: Ukázka sítě elementů modelu studeného kelímku pro 8 segmentů .....	51
Obrázek 25: Nastavení okrajových podmínek u vsázky a induktoru .....	52
Obrázek 26: Ilustrativní obrázky: a) Jouleovo ztráty ve vsázce; b) intenzita magnetického pole; c) proudová hustota v segmentu; d) proudová hustota ve vsázce .....	53
Obrázek 27: Jouleovo ztráty v segmentu .....	55
Obrázek 28: Rozložení intenzity magnetického pole .....	75
Obrázek 29: Rozložení proudové hustoty – znázornění v elementech .....	75
Obrázek 30: Rozložení proudové hustoty – vektorové znázornění .....	76

## Seznam grafů

Graf 1: Vývoj ztrát v induktoru .....	54
Graf 2: Strmost poklesu ztrát v segmentu vůči celkovým ztrátám .....	55
Graf 3: Závislost ztrát v segmentu na poloměru segmentu .....	56
Graf 4: Závislost ztrát v segmentu na vzdálenosti segment - induktor .....	56
Graf 5: Závislost ztrát ve vsázce .....	57
Graf 6: Účinnost přenosu energie do vsázky .....	57
Graf 7: Podíl složek ztrát na celkových ztrátách .....	58
Graf 8: Ověření průběhů ztrát pomocí nového modelu .....	59

## Seznam tabulek

Tabulka 1: Parametry ploch pro odvození Kirchhoffova zákona .....	16
Tabulka 2: Kovy a slitiny vyrobené metodou studeného kelímku [29] .....	41
Tabulka 3: Srovnání časů a ceny při výrobě Ti-6Al-4V golfové hole [30] .....	43
Tabulka 4: Rozměry kelímku .....	49
Tabulka 5: Materiálové parametry modelu [35] .....	51
Tabulka 6: Vypočítané hodnoty z programu pro původní model .....	73
Tabulka 7: Vypočítané hodnoty pro nový model .....	74

## 1 Úvod

V současné době překotného vývoje nových technologií stoupají i požadavky výrobců na vlastnosti používaných materiálů. Materiály s vysoce specifickými vlastnostmi však bývá z větší části technologický problém získat, ať už se jedná o zpracování surovin, nebo výsledné zpracování. V této oblasti je již více než 100 let znám postup s využitím indukčního ohřevu. Klasické indukční pece jsou tvořeny nejčastěji keramickým kelímkem, který do ohřívání vsázky přináší řadu nečistot a není schopen vydržet extrémní teploty potřebné pro zpracování mnoha materiálů. Proto byla postupem času odvozena metoda studeného kelímku, kde dochází k tavení při teplotách blízkých se 3000°C. Další nespornou výhodou je naprostá čistota vytaveného materiálu, neboť se taví „sám v sobě“ – tavený materiál vytvoří v kontaktních místech s intenzivně chlazenými segmenty kelímku tenkou pevnou krustu (skull), která odděluje kelímek od vsázky. Tato metoda vyžaduje přesný návrh kelímku podle vlastností materiálu, který se bude tavit. Nejčastěji se jedná o vysoce reaktivní materiály jako je titan, niob, apod. Tuto metodu lze využít i pro tavení elektricky nevodivých materiálu, kde princip je shodný, ale je třeba tento proces nastartovat jinou metodou, nebo vložení startovacího materiálu.

Tato práce je rozdělena do tří větších tematických celků, kde první celek je tvořen dvěma kapitolami, které uvádí nezbytné základy šíření tepla prostorem, teorii indukčního ohřevu včetně vlnových rovnic a základů povrchového jevu.

Druhý větší celek popisuje studený kelímek, jeho konstrukci a vlastnosti. Dále zde uvádí základy použití studeného kelímku, zejména pro využití při tavně kovů a konkrétně pro využití při tavení nejčastěji takto zpracovávaného kovu – titanu.

Cílem této práce je vytvoření numerického modelu studeného kelímku s kulatými segmenty. Z tohoto modelu jsem zjišťoval vliv počtu segmentů na ztráty v zařízení a s tím související účinností. Tento model byl vytvořen pro dvě různé geometrie pro ověření výsledků.

## 2 Teoretický úvod

### 2.1 Přeměna elektrické energie na tepelnou

Energie jako taková je schopností látky konat práci. Energie se může měnit a přecházet z jednoho druhu na jiný, což je nazýváno *transformace energie*. Při této přeměně dochází i k uvolnění části vnitřní energie látky, která je označována jako *tepelná energie*.

Tepelná energie je způsobena vnitřním uspořádáním látky. Atomy nesetrvávají v klidu, ale kmitají kolem své rovnovážné polohy. V těchto polohách jsou drženy přitažlivými silami, které např. u pevných látek drží atomy v krystalických mřížkách. Dodáním vnější energie (teplo) dojde ke zvětšení rychlosti a velikosti rozkmitu a může dojít i k překonání přitažlivých sil, což má za následek přechod mezi skupenstvími – nejdříve z pevné látky na kapalnou a při dalším zvyšování teploty až na plynnou.

U elektrických strojů dochází k dodání vnější energie připojením k elektrickému obvodu a procházením elektrického proudu. Při průchodu elektrického proudu dochází k zahřívání látky (dodání vnější energie způsobí rozkmit atomů, které způsobí nárůst teploty látky), což je bráno u většiny elektrických strojů jako ztrátové, neboť pro činnost stroje nepotřebujeme teplo samo o sobě a přináší nám navíc nutnost stroje chladit. V tepelné technice je naopak tato energie brána jako základ pro další využití.

V praxi látku nikdy nedokážeme dokonale izolovat, a proto dochází k přestupu tepla mezi látkami, popř. z látky do okolního prostředí, a to vždy z místa s vyšší teplotou do místa s nižší teplotou. K tomuto přestupu neboli šíření tepla dochází třemi způsoby:

- a) *sálání (radiace)* – průzračné prostředí
- b) *proudění (konvekce)* – kapalná nebo plynná tělesa
- c) *vedení (kondukce)* – pevné látky

## 2.2 Základy šíření tepla

### 2.2.1 Sálání

Každé těleso, jehož teplota je vyšší než nula kelvinů, vyzařuje tepelnou energii.[3] Tato energie je vyzařována ve formě elektromagnetického záření, které se šíří pouze v průzračném prostředí. Během interakce mezi dvěma tělesy se část energie na povrchu tělesa pohltí, část odrazí a část projde tělesem, což je vyjádřeno ve vztahu 2.2.1.

$$A + B + C = 1 \quad (2.2.1)$$

kde

$$A = \text{poměrná pohltivost} = \frac{\text{energie pohlcená}}{\text{energie celková}}$$

$$B = \text{poměrná odrazivost} = \frac{\text{energie odražená}}{\text{energie celková}}$$

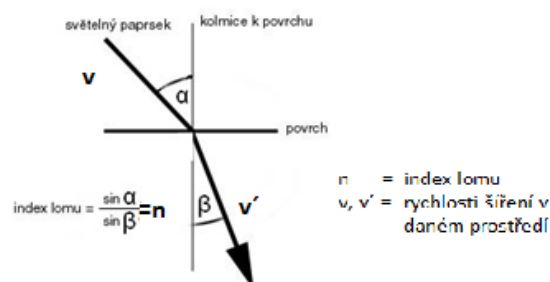
$$C = \text{poměrná propustnost} = \frac{\text{energie prošlá}}{\text{energie celková}}$$

Pro ideální teoretické příklady můžeme uvažovat extrémní hodnoty těchto parametrů (např. absolutně černý povrch:  $A=1$ ,  $B=0$ ,  $C=0$ ), avšak pro obecná tělesa dochází vždy ke kombinaci všech tří parametrů a tato tělesa poté nazýváme *šedá tělesa*. Poměrná pohltivost, odrazivost a průzařnost jsou navíc tzv. spektrální veličiny, což znamená, že jsou závislé na vlnové délce, a proto stejné těleso pro jinou vlnovou délku může vykazovat jiné parametry A, B a C.

#### a) Snellův zákon

„Při průchodu z jednoho průzračného prostředí do druhého se záření šíří dle zákonů optiky.“ [3] Platí tedy i Snellův zákon lomu, který platí podle obr. 1:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v'} = n \quad (2.2.2)$$



Obrázek 1: Snellův zákon [4]

## b) Stefan-Boltzmannův zákon

Udává, jaké množství energie vysílá absolutně černé těleso o ploše  $1 \text{ m}^2$  za časovou jednotku.

$$P_{\epsilon} = \sigma'_{\epsilon} \cdot \Theta^4 \quad (2.2.3)$$

kde

$$\sigma'_{\epsilon} = \text{Stefan-Boltzmannova konstanta} = 5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ [W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}]$$

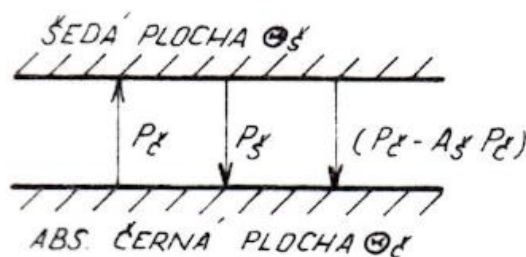
Pro snazší výpočty se tento vztah 2.2.3 upravuje a dále vyjadřuje jako:

$$P_{\epsilon} = 5,6697 \cdot \left(\frac{\Theta}{100}\right)^4 = \sigma_{\epsilon} \cdot \left(\frac{\Theta}{100}\right)^4 \quad (2.2.4)$$

$$\sigma_{\epsilon} = 5,6697 \text{ [W.m}^{-2} \cdot (\text{K}/100)^{-4}]$$

## c) Kirchhoffův zákon

Kirchhoffův zákon o vyzařování vyjadřuje skutečnost, že spojitě spektrum vyzařované reálnými tělesy závisí jak na teplotě tělesa, tak na jeho pohltivosti. Pro odvození vycházíme z modelové situace znázorněné na obr. 2:



Obrázek 2: Odvození pro Kirchhoffův zákon

Modelová situace znázorňuje dvě rozlehlé plochy s následujícími parametry, kde první považujeme za absolutně černou a druhou za šedou:

	Teplota $\theta$	Pohltivost	Průzažnost	Odrzivost	Vyzářený výkon
<b>Plocha 1</b>	$\theta_{\text{č}}$	$A_{\text{č}}$	$B_{\text{č}}$	$C_{\text{č}}$	$P_{\text{č}}$
<b>Plocha 2</b>	$\theta_{\text{š}}$	$A_{\text{š}}$	$B_{\text{š}}$	$C_{\text{š}}$	$P_{\text{š}}$

Tabulka 1: Parametry ploch pro odvození Kirchhoffova zákona

Předpokládáme, že černá plocha vyzáří na povrch šedé plochy výkon  $P_{\text{č}}$ . Na šedé ploše se pohltí pouze část dopadajícího výkonu a z šedé plochy se vyzáří výkon  $P_{\text{š}}$ , který se na černé ploše zcela pohltí. Z tohoto předpokladu můžeme odvodit bilanční rovnici pro výkon dopadající na šedou plochu:



$$P = P_{\varepsilon} - P_s - (P_{\varepsilon} - A_s \cdot P_{\varepsilon}) = A_s \cdot P_{\varepsilon} - P_s \quad (2.2.5)$$

Z dalšího předpokladu, že teploty obou ploch budou stejné ( $\theta_{\varepsilon} = \theta_s$ ), vyplývá, že celkový přenesený výkon  $P=0$ , a tudíž:

$$A_s \cdot P_{\varepsilon} = P_s \quad (2.2.6)$$

$$\frac{P_s}{A_s} = P_{\varepsilon} = \sigma_{\varepsilon} \cdot \Theta^4$$

Z rovnice 2.2.6 poté úpravou dostáváme konečný vztah pro zářivý výkon šedého tělesa

$$P_s = A_s \cdot \sigma_{\varepsilon} \cdot \Theta^4 = \varepsilon_s \cdot \sigma_{\varepsilon} \cdot \Theta^4 \quad (2.2.7)$$

kde

$$\varepsilon_s = \text{stupeň černosti (součinitel emisivity)}$$

Ze vztahu 2.2.7 tedy můžeme odvodit, že sálavost (zářivost) tělesa je přímo úměrná jeho pohltivosti. V praxi to znamená, že černé plochy jsou silnými zářiči, ale zároveň i silně pohlcují tepelné záření.

#### d) Planckův zákon

Kirchhoff dále odvodil, že sálavost dokonale černého tělesa je funkcí jeho teploty  $\theta$  a vlnové délky  $\lambda$ . Tvar a podobu této funkce dal až v roce 1900 Max Planck, který za tento objev obdržel posléze i Nobelovu cenu. Planck vyslovil hypotézu, že molekuly nevyzařují energii spojitě, nýbrž pouze po určitých množstvích – *kvantech*. Výsledný tvar Planckova vyzařovacího zákona :

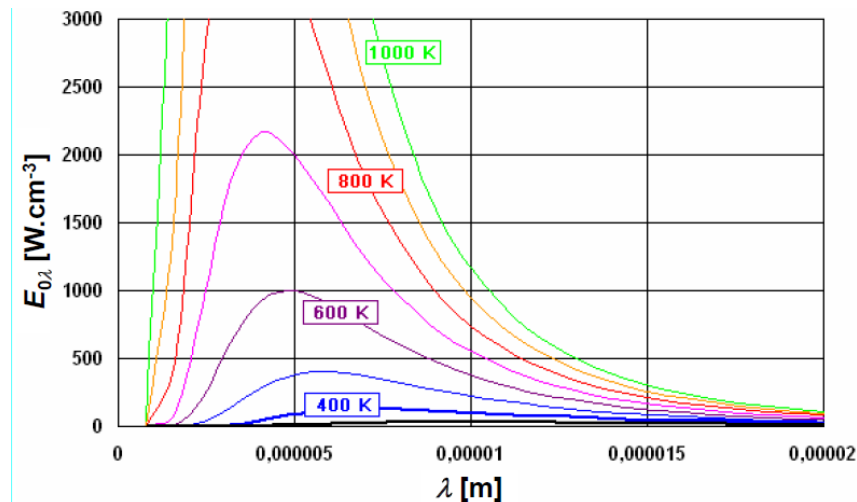
$$E_{0\lambda} = f(\lambda, \Theta) = \frac{dE_0}{d\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{C_2/\lambda\Theta} - 1)} \quad (2.2.8)$$

kde

$$C_1 = 3,73 \cdot 10^{-16} [\text{W} \cdot \text{m}^2]$$

$$C_2 = 1,438 \cdot 10^{-2} [\text{m} \cdot \text{K}]$$

Rovnice 2.2.8 je matematickým vyjádřením Planckova vyzařovacího zákona, které lze vyjádřit graficky. Se zvyšující se teplotou zdroje se zvyšuje spektrální hustota zářivého toku dokonale černého tělesa.



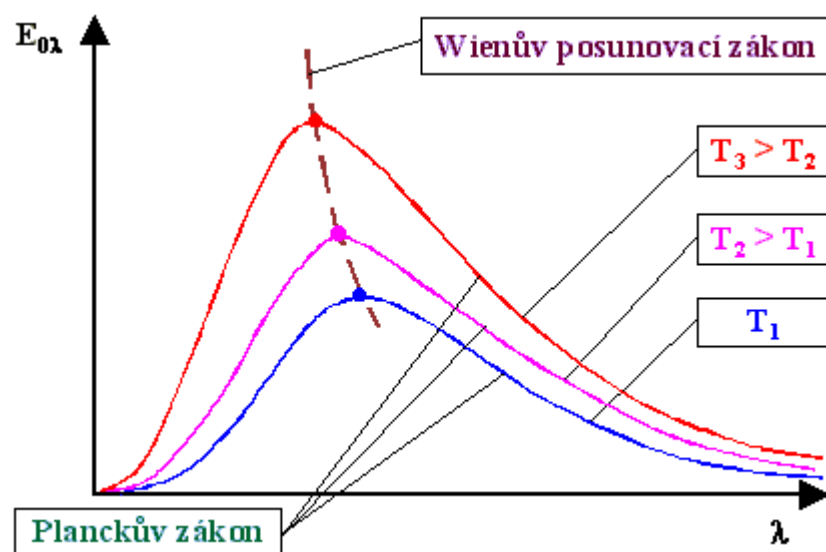
Obrázek 3: Grafické znázornění Planckova vyzařovacího zákona [6]

e) *Wiennův posunovací zákon*

Problematikou zářivého toku se zabýval i německý fyzik Wienn, který z Planckova vyzařovacího zákona odvodil, že maximum hustoty zářivého toku se s rostoucí teplotou posunuje blíže ke kratším vlnovým délkám.

$$\lambda_{\max} = \frac{2892}{\Theta} \quad (2.2.9)$$

„Tento zákon lze získat z Planckova zákona derivací hustoty zářivého toku dle vlnové délky, čímž získáme průběhy poloh maxim izoterm v diagramu závislosti spektrální hustoty  $E_{0\lambda}$  na vlnové délce  $\lambda$ .“[8]



Obrázek 4: Wiennův posunovací zákon [8]

### 2.2.2 Vedení

Při vedení dochází k výměně tepla mezi sousedními částicemi prostřednictvím srážek. Částice s vyšší kinetickou energií předávají část této energie částicím s nižší pohybovou energií. Na základě tohoto principu lze říci, že k výměně tepla vedením dochází především mezi tuhými tělesy.

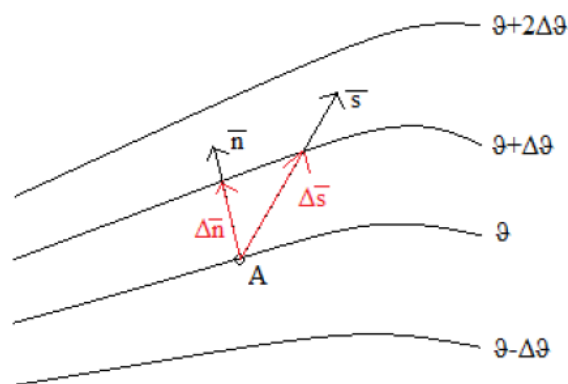
Sdílení tepla vedením je matematicky těžko popsatelný problém, a proto přistupujeme pro odvození a výpočty k několika zjednodušujícím předpokladům. Pro naše potřeby uvažujeme, že tepelný stav prostředí je určen *skalárním teplotním polem*. Další zjednodušení získáme předpokladem *izotropního prostředí a stacionárního stavu* teplotního pole (viz rovnice 2.2.10), jelikož každé těleso se snaží dostat do stavu termodynamické rovnováhy, což znamená, že dochází k nezávislosti teploty stěny tělesa na čase.

$$\vartheta = f(x, y, z), \frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad (2.2.10)$$

Je tedy zřejmé, že teplota je závislá pouze na souřadnicích bodu, ve kterém teplotu sledujeme. Pro přestup mezi dvěma prostředími o různých teplotách  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  uvažujeme přestup tepelným tokem pouze ve směru kolmém k rozhraní a dojdeme k rovnici pro teplotní pole ve stacionárním tvaru:

$$\vartheta = f(x) \quad (2.2.11)$$

Z tohoto vztahu můžeme tedy odvodit, že teplo se předává vedením pouze v jednom směru souřadného systému, a tudíž plochy rovnoběžné s plochou rozhraní mají stejnou teplotu. Tyto plochy nazýváme *izotermické plochy*. Provedeme-li řez těchto ploch, dostáváme *izotermy*, což jsou křivky spojující body se stejnou teplotou.



Obrázek 5: Izotermy [1]

Rozdíl teploty mezi sousedními izotermami označíme jako  $\Delta\vartheta$ . Pohybujeme-li se z bodu A po izotermě  $\vartheta$  ve směru vektoru  $\mathbf{s}$ , mění se nám i teplota v poměru  $\frac{\Delta\vartheta}{\Delta s}$ . Maximální hodnoty, a tedy i největší teplotní změny nastávají při pohybu ve směru normály  $\mathbf{n}$ . Limitní hodnotu  $\frac{\Delta\vartheta}{\Delta n}$  nám vyjadřuje teplotní spád (gradient) ve směru jednotkového vektoru  $\mathbf{n}_0$  ve směru normály  $\mathbf{n}$ .

$$\text{grad}\vartheta = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta n} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\partial\vartheta}{\partial n} \cdot \mathbf{n}_0 \quad (2.2.12)$$

Rozložíme-li vektor  $\mathbf{n}$  na složky ve směru souřadných os x,y,z a použijeme-li jednotkové vektory ve směru daných os  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  a  $\mathbf{k}$ , dostáváme vztah:

$$\text{grad}\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \cdot \mathbf{k} = \nabla\vartheta \quad (2.2.13)$$

Kladný gradient označuje růst teploty od nižší k vyšší a množina teplotních gradientů tvoří vektorové pole, jehož existence dokazuje šíření tepla v daném objemu.

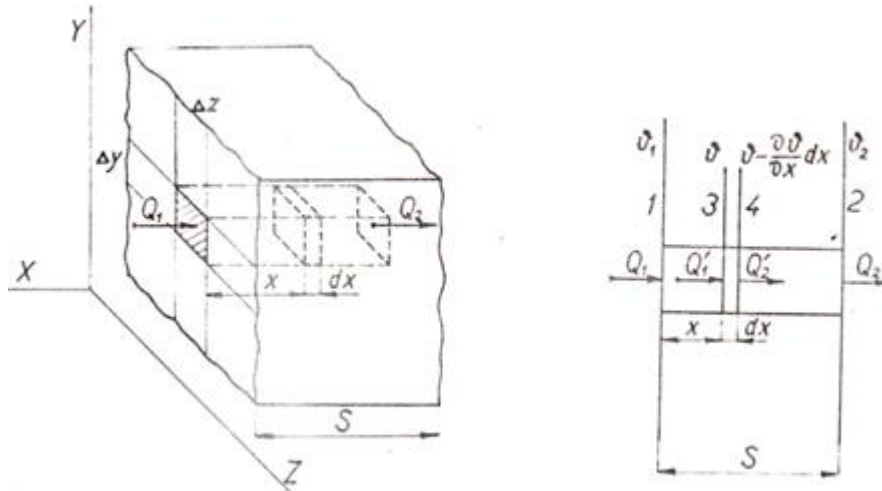
Závislost mezi tepelným tokem  $\bar{Q}$  a teplotním spádem je dána Fourierovým zákonem:

$$d\bar{Q} = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial n} \cdot dF \cdot dt \quad (2.2.14)$$

kde  $d\bar{Q}$  vyjadřuje množství tepla, které projde elementární ploškou izotermické plochy  $dF$  za čas  $dt$ . Tento tok je závislý na prostředí, což je vyjádřeno měrnou tepelnou vodivostí  $\lambda$ , která vyjadřuje množství tepla, které projde za 1 s plochou  $1 \text{ m}^2$  izotermické plochy při teplotním spádu  $1^\circ\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ . Tepelný tok  $\bar{Q}$  jde vždy od vyšší teploty k nižší, což je opačný směr, než směr  $\text{grad}\vartheta$ , což je respektováno znaménkem minus ve vztahu 2.2.14.

### 2.2.2.1 Fourier – Kirchhoffova rovnice

Diferenciální rovnici pro vedení tepla získáme ze zjednodušeného případu, ve kterém uvažujeme tepelný tok kolmý k rozhraní ve směru osy x rovnou stěnou o tloušce  $S$ .



Obrázek 6: Situace pro odvození Fourier-Kirchhoffova zákona [1]

Pro zjednodušení uvažujeme prozatím 1D problém, který poté rozšíříme na 3D. Na rozhraní 1 vytkneme hranol se základnou  $\Delta y$  a  $\Delta z$ , do kterého vstupuje na rozhraní 1 tepelný tok  $Q_1$  a ve vzdálenosti  $S$  vystupuje tok  $Q_2$ . Ve vzdálenosti  $x$  zvolíme prostorový element  $(\Delta y \cdot \Delta z \cdot dx)$ , do kterého vstupuje tok  $Q_1'$  a vystupuje  $Q_2'$ . Rozdíl těchto toků zvýší teplotu elementu o  $d\theta$ . Poté v místě  $x$  platí:

$$\text{grad } \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (2.2.15)$$

$$Q_1 = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot dt$$

a v místě  $(x+dx)$ :

$$\text{grad} \left( \vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot dx \right) = \text{grad } \vartheta - \text{grad} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (2.2.16)$$

$$Q_2 = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot dt$$

Poté element  $(\Delta y \cdot \Delta z \cdot dx)$  změní svoji teplotu o  $d\theta$ , což lze vyjádřit jako rozdíl tepelných toků  $Q_1'$  a  $Q_2'$ :

$$Q_1 - Q_2 = \lambda \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot dt = (\Delta y \cdot \Delta z \cdot dx) \cdot s.c.d \vartheta \quad (2.2.17)$$

Z této rovnice poté dostáváme Fourier-Kirchhoffovu rovnici pro 1D problém:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{s.c} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (2.2.18)$$

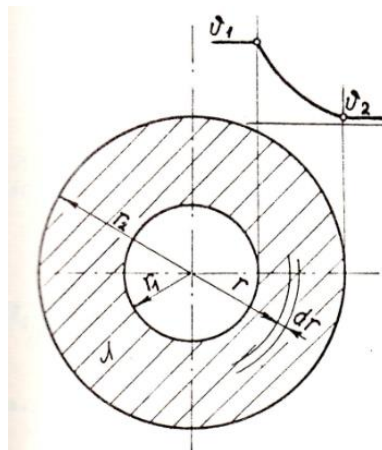
kde  $a = \frac{\lambda}{s.c}$  je součinitel teplotní vodivosti materiálu a komplexně popisuje daný materiál a jeho chování z hlediska tepelného ohřevu. Čím vyšší je tento součinitel, tím rychleji dané těleso mění svoji teplotu.

Ze zjednodušeného problému, ve kterém jsme uvažovali tepelný tok pouze ve směru osy  $x$ , lze snadno přejít k obecně orientovanému vektoru tepelného toku, který rozložíme do jeho složek ve směru os souřadného systému. Změna teploty pak bude dána součtem změn v jednotlivých směrech a dostaneme diferenciální rovnici pro vedení tepla v obecném případě ve tvaru:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{s.c} \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) = a \cdot \nabla^2 \vartheta \quad (2.2.19)$$

### 2.2.2.2 Vedení tepla válcovou stěnou

V kelímkových pecích se setkáváme výhradně s kelímky ve tvaru válce, čemuž odpovídá situace na obr. 7:



Obrázek 7: Odvození vztahu pro vedení ve válcové stěně [1]

Plochou o obecném poloměru  $r$  prochází tepelný tok  $Q$ , je-li výška válce  $l$ :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{s.c} \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) = a \cdot \nabla^2 \vartheta \quad (2.2.20)$$

Integrací dostáváme vztah:

$$\vartheta = -\frac{Q}{2\pi l \lambda} \cdot \ln r + C \quad (2.2.21)$$

Konstantu  $C$  dostaneme z okrajových podmínek  $r = r_1$  a  $r = r_2$ , čímž dostáváme i dvě rovnice pro krajní poloměry:

$$\vartheta_1 = -\frac{Q}{2\pi l \lambda} \cdot \ln r_1 + C, \vartheta_2 = -\frac{Q}{2\pi l \lambda} \cdot \ln r_2 + C \quad (2.2.22)$$

Odečtením těchto rovnic a vyjádřením  $Q$  získáme výsledný tepelný tok přes jednovrstvou válcovou stěnu.

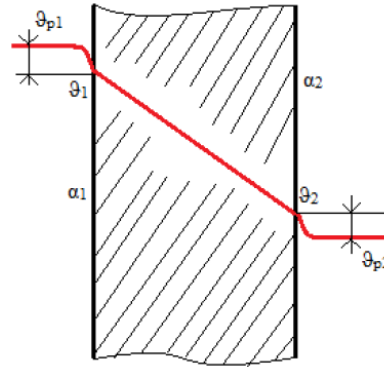
$$Q = \frac{2\pi l \lambda (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.2.23)$$

Pro vícevrstvou válcovou stěnu můžeme analogicky odvodit vztah:

$$Q = \frac{2\pi l (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad (2.2.24)$$

### 2.2.3 Proudění

Sdílení tepla prouděním není příliš významné u běžných elektrotepelných zařízení, nebo se projevuje z větší části pouze při nižších teplotách. V našem případě studeného kelímku však nabývá na významu zejména z hlediska nuceného proudění chladicí kapaliny induktorem. Pro objasnění využijeme obr. 8 se znázorněnou svislou stěnou odporové pece v ustáleném stavu a prouděním kapaliny.



Obrázek 8: Stěna odporové pece [10]

Uvnitř odporové pece je teplota  $\vartheta_1$  vyšší, než teplota v okolí pece  $\vartheta_2$ . Stěnou pece prochází tepelný tok ze strany vyšší teploty k nižší. Vzniká nám tedy situace  $\vartheta_{p1} > \vartheta_1 > \vartheta_2 > \vartheta_{p2}$ . Jelikož na povrchu vnější stěny je kapalina s vyšší teplotou, než dále od stěny, dochází k přirozenému proudění kapaliny. Tenká vrstva kapaliny sousedící přímo se stěnou se však proudění neúčastní a teplotní tok přes ní prochází pouze vedením, což je vzhledem k nízké teplotní vodivosti plynů nevýhodné. Proto pro lepší chlazení využíváme nucené cirkulace chladicí kapaliny. Pro výpočty přestupu tepla prouděním se využívá Newtonova výrazu pro tepelný tok:

$$Q = \alpha_1 \cdot (\vartheta_{p1} - \vartheta_1) \cdot S \quad (2.2.25)$$

$$Q = \alpha_2 \cdot (\vartheta_{p2} - \vartheta_2) \cdot S$$

kde  $S$  je teplosměnná plocha a  $\alpha$  [ $W \cdot m^{-2} K^{-1}$ ] je součinitel přestupu tepla.

### 2.2.3.1 Určení součinitele přestupu tepla $\alpha$

Součinitel přestupu tepla závisí na mnoha parametrech prostředí, jako jsou rozměry, poloha, tvar, drsnost povrchu, viskozita kapaliny, rychlost proudění, apod. Určení tohoto součinitele je tedy velmi obtížné a určuje se buď experimentálně, nebo pomocí matematických rovnic na základě kritérií podobnosti. Nejčastěji se rovnice vyjadřují ve tvaru  $Nu = f(Re, Gr, Pr, \dots)$ , kde

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad \text{Nusseltovo číslo}$$

$$Re = \frac{wL}{\nu} \quad \text{Reynoldsovo číslo}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda} \quad \text{Prandtlovo číslo}$$



$$Gr = \gamma \cdot \Delta\vartheta \cdot \frac{gL^3}{\nu^2} \quad \text{Grashofovo číslo}$$

$$Pe = Re \cdot Pr \quad \text{Pecletovo číslo}$$

Z těchto vztahů je tedy jasné, že do výpočtů součinitele přestupu tepla zasahuje velké množství parametrů. Rovnice mají různý tvar pro různé případy proudění (např. pro volnou a nucenou konvekci, se změnou skupenství či beze změny, atd. ). Pro náš případ chlazení, tedy nucené proudění v uzavřeném induktoru, se nejčastěji využívají rovnice ve tvaru:

$$Nu = f(Re, Pr, L/d) \quad (2.2.26)$$

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^p$$

kde příslušné konstanty C, m, n p závisí na typu proudění. Určení těchto parametrů je velmi složité a závisí zejména na rychlosti proudění a geometrii chladicích segmentů. V praxi se tedy místo složitých matematických modelů používá zejména experimentální určení  $\alpha$ , nebo přibližné určení za pomoci podobnosti s již realizovaným zařízením.

Určení  $\alpha$  však nelze zanedbat zejména pro výpočty tepelných ztrát indukčních zařízení, zvláště u studeného kelímku, kde dochází ke všem třem způsobům vedení tepla – sálání povrchem vsázky, vedení stěnou vsázky a prouděním chladicí kapaliny kolem stěn vsázky. Proudění a chlazení plynem nad povrchem vsázky je zanedbatelné zejména z důvodu provozu ve vakuu.

### 2.3 Teorie indukčního ohřevu

Z teorie zachování energií je dokázáno, že energie se neztrácí, ale může se pouze měnit. U elektrotepelného ohřevu víme, že tepelná energie potřebná k ohřevu vzniká přivedením elektrické energie do soustavy:

$$W_{el} = \int_0^T u \cdot i \cdot dt \quad (2.3.1)$$

Tato elektrická energie může být přeměněna na tepelnou mnoha způsoby, podle nichž rozeznáváme několik druhů elektrotepelných zařízení odvozených na základě způsobu přeměny elektrické energie na tepelnou:

*Odporové teplo* – teplo vzniká průchodem proudu  $I$  v elektricky vodivém prostředí; tepelná zařízení lze rozdělit na *přímé odporové*, kde proud prochází přímo ohřívaným materiálem, a *nepřímé odporové*, kde proud prochází topnými tělesy a teplo je poté do vsázky přenášeno především sáláním

*Obloukové teplo* – teplo vzniká mezi dvěma elektrodami, kdy jejich oddálením dojde k vzniku elektrického oblouku, který může být přímo mezi elektrodou a vsázkou, pak mluvíme o *přímém oblouku*, nebo mezi dvěma elektrodami, kde se teplo do vsázky opět přenáší sáláním (= *nepřímý oblouk*)

*Plazmový ohřev* – jde o zvláštní druh elektrického oblouku, který je usměrněn aerodynamickou tryskou a jehož hoření je podpořeno vhodně zvolenými plyny (např. argon)

*Dielektrické teplo* – mezi dvěma elektrodami připojenými na střídavé napájení dochází změnou tohoto pole k natáčení dipólů vsázky (elektricky nevodivé), čímž vzniká třením ke teplo; mezi dielektrické ohřevy patří i mikrovlnné ohřevy.

*Elektronový ohřev* – teplo vzniká předáním kinetické energie urychlených elektronů na vsázku

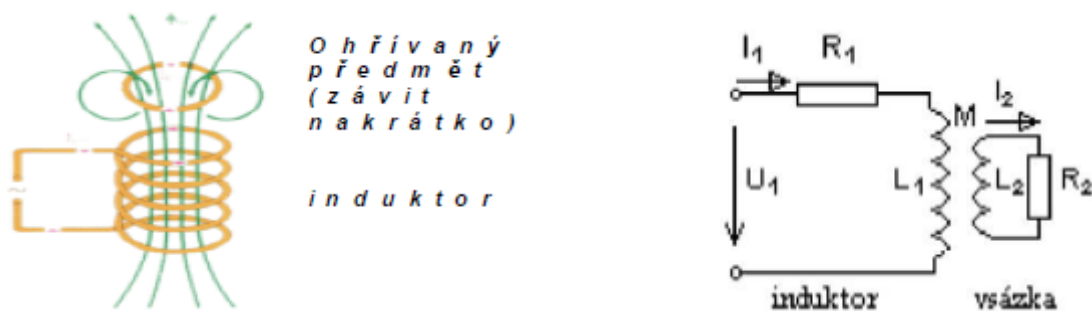
*Ohřev pomocí infrazářičů* – každé reálné těleso vyzařuje elektromagnetickou energii, která je v blízkých tělesech pohlcována a přeměněna na teplo

Pro využití ve studeném kelímku je však nejdůležitější *indukční ohřev*, který vzniká ve střídavém magnetickém poli.

### 2.3.1 Indukční teplo

Indukční teplo vzniká při interakci střídavého elektromagnetického vlnění, kdy se část vlnění odrazí od vodivého materiálu a část do něj proniká a vyvolává indukované, nebo li vířivé proudy. Tato vstupující energie uvede do pohybu volné elektrony, které se pohybují ve směru elektrického pole, nabývají vysokých rychlostí a získávají vysokou kinetickou energii. Při nárazu těchto elektronů do atomů látky předají svoji energii, způsobí větší rozkmit atomů, a tím i zvýšení teploty.

Zdrojem elektromagnetického vlnění je každý vodič procházející střídavým elektrickým proudem. Vložením vodivého materiálu do střídavého magnetického pole dochází ke vzniku vířivých proudů, které jsou vlivem skin efektu (viz kapitola 2.3.7) vytlačovány směrem k povrchu, kde dochází k vývinu Joulova tepla. Na obr. 9 je znázorněno zjednodušené schéma a náhradní obvod indukčního ohřevu. Spodní cívka představuje induktor a vrchní cívka (nakrátko) představuje ohříváný předmět, kde se indukuje napětí, a tím i vzniká proud, který způsobí ohřátí předmětu.



Obrázek 9: Zjednodušené a náhradní schéma indukčního ohřevu [11]

Z náhradního obvodu lze říci, že indukční ohřev je možno považovat v principu za transformátor, kde primární vinutí je reprezentováno induktorem a sekundární vinutí, zapojené do krátka, je zde možné interpretovat elektricky vodivou vsázkou. Tvar induktoru volíme zejména dle tvaru ohříváné vsázky, abychom zajistili nejlepší přenos energie. Jedná se tedy v praxi o nejpoužívanější induktory ve tvaru hranolu nebo válce.

### 2.3.2 Odvození vlnových rovnic pro šíření elektromagnetického vlnění [4]

Pro popsání šíření elektromagnetického vlnění v indukčních zařízeních vycházíme z Maxwellových rovnic, které popisují elektromagnetické pole. Pro zjednodušení výpočtů a odvození předpokládáme, že fyzikální vlastnosti jsou konstantní, uvažovaný objem je homogenní, izotropní a vyšetřované oblasti považujeme za

materiály tuhé. Dále budeme uvažovat pouze ustálené stavy a elektromagnetické pole jako harmonicky proměnné.

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.3.2)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.3.3)$$

$$\operatorname{div}\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \mathbf{E} = \rho \quad (2.3.4)$$

$$\operatorname{div}\mu_0 \cdot \mu_r \mathbf{H} = 0 \quad (2.3.5)$$

Provedeme rotaci 1. Maxwellovy rovnice a dosadíme za  $\operatorname{rot}\mathbf{B}$  do druhé:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{H}) &= \operatorname{rot}(\gamma\mathbf{E}) + \operatorname{rot}\left(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = \gamma\operatorname{rot}\mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \frac{\partial(\operatorname{rot}\mathbf{E})}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{H}) &= -\gamma\mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Z matematických zákonů vektorového počtu víme, že:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H} \quad (2.3.7)$$

Položením rovnosti rovnice 2.3.6 a 2.3.7 dostáváme:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H} = -\gamma\mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (2.3.8)$$

Ze 4. Maxwellovy rovnice (2.3.5) dosadíme  $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$  a dostáváme rovnici pro magnetickou složku elektromagnetického vlnění:

$$\nabla^2\mathbf{H} = \gamma\mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (2.3.9)$$

Analogickým odvozením pro elektrickou složku dostáváme rovnici:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \gamma\mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.3.10)$$

Pro zjednodušení výrazů můžeme rovnice rozdělit na případy pro elektricky vodivé a nevodivé prostředí. V prvním případě získáváme obecné rovnice elektromagnetického vlnění pro vodivé prostředí ( $\gamma \neq 0, \varepsilon_r = 0$ ):

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.3.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.3.12)$$

A pro elektricky nevodivé prostředí ( $\gamma = 0$ ):

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.3.13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \mu_0 \cdot \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (2.3.14)$$

### 2.3.3 Vektorový potenciál

Pro další využití v numerických výpočtech, a tedy i pro software ANSYS, ve kterém bude zpracována druhá, praktická část této diplomové práce, je důležité uvést popis elektromagnetických veličin pomocí elektrodynamických potenciálů. Definice je odvozena ze čtvrté Maxwellovy rovnice. Využijeme rovnici

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (2.3.15)$$

Dosadíme do druhé Maxwellovy rovnice a upravíme na:

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.3.16)$$

V důsledku nulové rotace můžeme vyjádřit jako gradient potenciálu  $\varphi$  a po úpravě:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.3.17)$$

S využitím vztahů  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  a  $\mathbf{J}_v = \gamma \mathbf{E} + \mathbf{J}_v$  a dosazením rovnic 2.3.15 a 2.3.17 do první a třetí Maxwellovy rovnice dostaneme:

$$\text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} + \gamma \left( \text{grad} \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \left( \text{grad} \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{J} \quad (2.3.18)$$

$$\text{div} \varepsilon \text{grad} \varphi + \text{div} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\rho \quad (2.3.19)$$

### 2.3.4 Elektromagnetické vlnění harmonické [1]

Pro další odvození budeme již uvažovat veličiny  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{J}$ ,  $\bar{B}$  jako harmonicky proměnné, a budeme je tedy vyjadřovat ve tvaru fázorů.

Do rovnice 2.3.10 dosadíme parciální derivace 1. a 2. řádu příslušných fázorů a dostáváme:

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \varepsilon \mu \bar{E} - j\omega \mu \gamma \bar{E} = \nabla^2 \bar{E} + \bar{E}(\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \gamma) = 0 \quad (2.3.20)$$

Pro další zjednodušení můžeme výraz  $(\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \gamma)$  nahradit součinitelem  $k^2$ , čímž dostáváme:

$$k^2 = (\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \gamma) = -j\omega \mu (\gamma + j\omega \varepsilon) \quad (2.3.21)$$

Dosadíme-li součinitel  $k^2$  do rovnice 2.3.20, dostáváme obecné rovnice pro elektromagnetické vlnění ve vodivém i nevodivém prostředí v harmonickém stavu. Součinitel  $k^2$  se nazývá *konstanta šíření* a charakterizuje elektromagnetické vlnění při uvažovaném úhlovém kmitočtu  $\omega$ . Obecně je tato konstanta komplexní číslo a obsahuje tedy reálnou a imaginární složku. Po odmocnění dostáváme výraz  $k = \alpha + j\beta$ , kde  $\alpha$  je fázová konstanta a  $\beta$  je měrný útlum. Po dosazení součinitele  $k^2$  do rovnice 1.44 dostáváme obecné rovnice pro harmonické elektromagnetické rovinné i válcové vlnění ve vodivém i nevodivém prostředí pro fázory  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ .

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0 \quad (2.3.22)$$

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = 0 \quad (2.3.23)$$

### 2.3.5 Poyntingův zářivý vektor

Poyntingův zářivý vektor udává hustotu plošného toku výkonu elektromagnetického vlnění v prostoru. Lze díky němu dokázat, že např. energie se ve vedení nešíří přímo vodiči, ale jejich blízkým okolím. Vyjadřuje množství energie, které projde přes danou plochu. Při jeho odvození vycházíme z rovnice pro množství energie v elektromagnetickém poli:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dV \quad (2.3.24)$$

Při zohlednění faktu, že energie v objemu se v čase mění, zderivujeme rovnici 2.3.24 podle času  $dt$ . Dále uvažujeme, že bez dodání energie z okolí se musí energie pouze snižovat, což respektujeme znaménkem minus.

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV - \mu_0 \mu_r \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dV = \quad (2.3.25)$$

Dosazením z 1. a 2. Maxwellovy rovnice za časové parciální derivace dostáváme:

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \mathbf{E} \cdot (\gamma \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{H}) dV + \int_V \mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{E} dV = \dots = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV + \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \quad (2.3.26)$$

První člen rovnice  $\int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV$  vyjadřuje teplo vyvinuté v objemu za jednotku času a

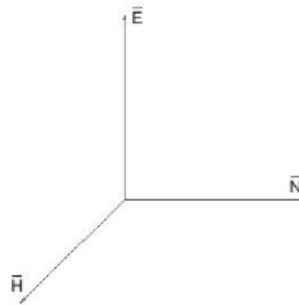
druhý člen převedeme pomocí Gaussovy věty na plošný integrál:

$$\int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dA = \int_A \mathbf{S} dA \quad (2.3.27)$$

Z rovnice 2.3.27 je tedy zřejmé, že Poyntingův vektor je:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.3.28)$$

vož lze zjednodušeně znázornit na obr. 10:

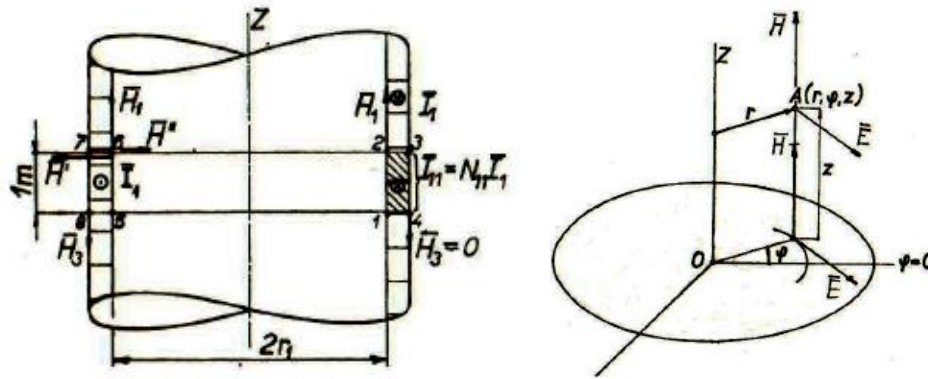


Obrázek 10: Znázornění Poyntingova vektoru

### 2.3.6 Válcové elektromagnetické vlnění [1], [4]

V praxi má velké množství indukčně ohříváných předmětů tvar válce a vzhledem ke snaze co nejlepšího přenosu energie mezi induktorem a vsázkou má poté i cívka tvar válce. V případě studeného kelímku se jedná také o válcové indukční zařízení, proto je vhodné odvodit si rovnice pro válcové elektromagnetické vlnění. Realizovaná zařízení mají induktor tvořen většinou dutým vodičem ve tvaru obdélníka, který je

navinut jako cívka. V dutině induktoru proudí chladicí kapalina. Pro zjednodušení odvození předpokládáme, že válcová vsázka je nekonečně dlouhá a závisí pouze na jejím poloměru  $r_1$ . Pro další zjednodušení provádíme výpočty a odvození ve válcových souřadnicích.



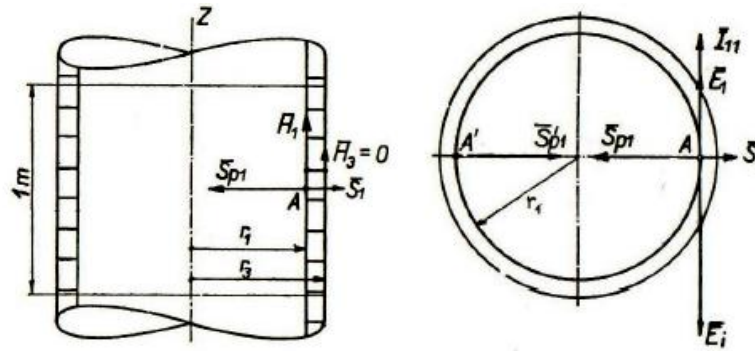
Obrázek 11: Řez válcovou cívku a soustava válcových souřadnic [1]

Přepokladem vyzařování elektromagnetického vlnění do dutiny válce je stejná okamžitá hodnota proudové hustoty  $i_{11}$  připadající na část válcové plochy o délce 1 m v každém zvoleném okamžiku.

Zvolíme vyzařující válec tak, aby osa válce splynula s osou Z souřadnicového systému. Vektory  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  a  $\mathbf{S}$  v obecném bodě  $A(r, \varphi, z)$  v dutině válce jsou funkcí pouze poloměru  $r$ . Dále lze dokázat, že určíme-li fázory  $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}$  v bodě ve vzdálenosti  $r$  od osy Z, všechny body ležící na sousední válcové ploše o poloměru  $r$  budou mít stejné hodnoty  $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}$ . Dle obr. 11 určíme počet závitů cívky o osově délce 1 m jako  $N_{11}$  a proud procházející závity cívky  $I_1$ . Proudová hustota je:

$$\mathbf{I}_{11} = \mathbf{I}_1 \cdot N_{11} \quad (2.3.29)$$



Obrázek 12: Vyzařování elektromagnetického vlnění  $S_{p1}$  vnitřním povrchem cívky

[1]

Je-li proud  $I_{11}$  orientován dle obr. 12, je intenzita  $\mathbf{E}_1$  na poloměru  $r_1$  shodného směru i smyslu. Vektor  $\mathbf{H}_1$  intenzity magnetického pole směřuje směrem vzhůru. Poté Poyntingův vektor  $\mathbf{S}_1$  daný vektorovým součinem  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1$  je kolmý k jejich rovině a vstupuje do stěny cívky. Proud  $I_1$  v závitě cívky vyvolá magnetický tok v dutině cívky, který v závitě indukuje napětí  $\mathbf{E}_i$  opačného smyslu, než intenzita  $\mathbf{E}_1$ . Intenzita  $\mathbf{H}_1$  a naindukované napětí  $\mathbf{E}_i$  vytvoří zářivý vektor  $\mathbf{S}_{p1} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1$  kolmý na vnitřní povrch cívky. Vnitřní povrch tedy vyzařuje jalový elektromagnetický tok do své dutiny o hustotě  $\mathbf{S}_{p1}$ .

Předpokládáme-li nekonečnou délku cívky, vrací se magnetický tok vyvolaný v dutině cívky nekonečně velkým prostorem v okolí cívky a nulovou intenzitou magnetického pole. Proto lze odvodit, že intenzita  $\mathbf{H}_3$  na poloměru  $r_3$  je rovna nule. Z obr. 11 vypočteme intenzitu  $\mathbf{H}_1$  na poloměru  $r_1$ :

$$\mathbf{I}_{11} = \left[ \int_S \mathbf{H} ds \right] = \mathbf{H}_1 l - \mathbf{H}_3 l = \mathbf{H}_1 \quad (2.3.30)$$

Z předešlého vyplývá, že ve stěně válce se nekoná žádná práce, neboť intenzita  $\mathbf{H}$  se rovná nule. Proud  $I_{11}$  vyvolá ve stěně intenzitu  $\mathbf{H}'$ , ale v sousedním pruhu cívky vyvolá intenzitu  $\mathbf{H}''$  stejné velikosti opačného směru.

### 2.3.6.1 Obecné rovnice válcového elektromagnetického vlnění [1], [4]

Pro odvození vycházíme z již dříve dokázaných obecných fázorových rovnic (viz kapitola 2.3.3):

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + k^2 \bar{\mathbf{E}} = 0, \nabla^2 \bar{\mathbf{H}} + k^2 \bar{\mathbf{H}} = 0 \quad (2.3.31)$$

Vzhledem k faktu, že pro válcové vlnění používáme válcové souřadnice, musíme převést i Laplaceův operátor  $\nabla^2 \mathbf{H}$  do válcových souřadnic. To lze pouze za předpokladu, že počítaný vektor má směr osy Z válcového souřadnicového systému:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \quad (2.3.32)$$

Z předpokladu, že intenzita  $\mathbf{H}$  závisí u válcového vlnění pouze na poloměru  $r$ , můžeme položit parciální derivace podle  $\varphi$  a  $z$  za nulové a dosadíme do výrazu 2.3.31:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{H}}{dr} + k^2 \mathbf{H} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Vydělíme-li výraz konstantou šíření  $k^2$ , dostáváme Besselovu diferenciální rovnici nultého řádu s argumentem ( $kr$ ):

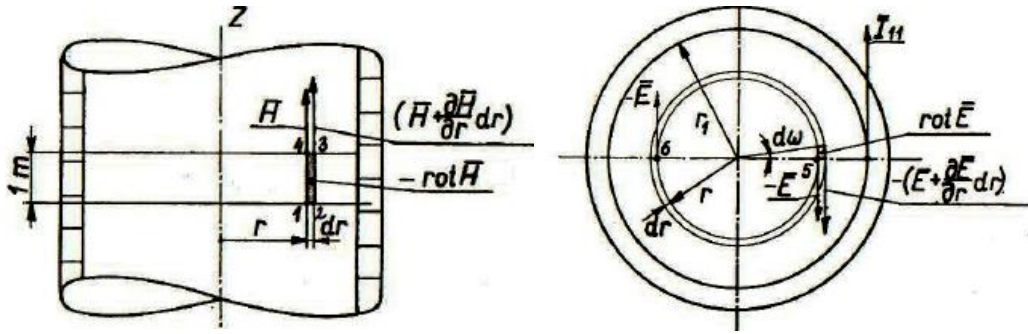
$$\frac{d^2 \mathbf{H}}{d(k.r)^2} + \frac{1}{(k.r)} \frac{d\mathbf{H}}{d(k.r)} + \mathbf{H} = 0 \quad (2.3.34)$$

jejímž řešením je kombinace cylindrických funkcí:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}_1 J_0(k.r) + \mathbf{C}_2 N_0(k.r) \quad (2.3.35)$$

Integrační konstanty  $\mathbf{C}_1$  a  $\mathbf{C}_2$  určíme z mezních stavů. Výrazy  $J_0(kr), N_0(kr)$  jsou cylindrické funkce nultého řádu prvního a druhého druhu. Nyní již máme odvozen vztah pro intenzitu magnetického pole  $\mathbf{H}$  a zbývá odvodit výraz pro elektrickou intenzitu  $\mathbf{E}$  z 1. Maxwellovy rovnice:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + j\omega \mathbf{E} = (\gamma + j\omega \epsilon) \mathbf{E} \quad (2.3.36)$$

Obrázek 13: Odvození  $\text{rot}\mathbf{H}$  a  $\text{rot}\mathbf{E}$  v dutině cívky

Na poloměru  $r$  jsme vyznačili intenzitu  $\mathbf{H}$  a na poloměru  $(r + dr)$  bude intenzita o diferenciál větší:  $\mathbf{H} + \left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial r}\right) dr$ . Vytknutý element o osové délce 1 m označíme vrcholy 1,2,3 a 4. Rotace  $\mathbf{H}$  na poloměru  $r$  vyjádříme z práce vykonané jednotkou magnetického množství po obvodu plochy 1-2-3-4-1. Vektor rotace  $\mathbf{H}$  je kolmý k vyznačené plošce a z pohledu osy  $Z$  má záporný smysl:

$$-\text{rot}\mathbf{H} = \frac{(\mathbf{H} + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial r} dr) - \mathbf{H}}{dr} = \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial r} \quad (2.3.37)$$

Z rovnic 2.3.36 a 2.3.37 dostaneme výraz pro vektor intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma + j\omega\epsilon} \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial r} \quad (2.3.38)$$

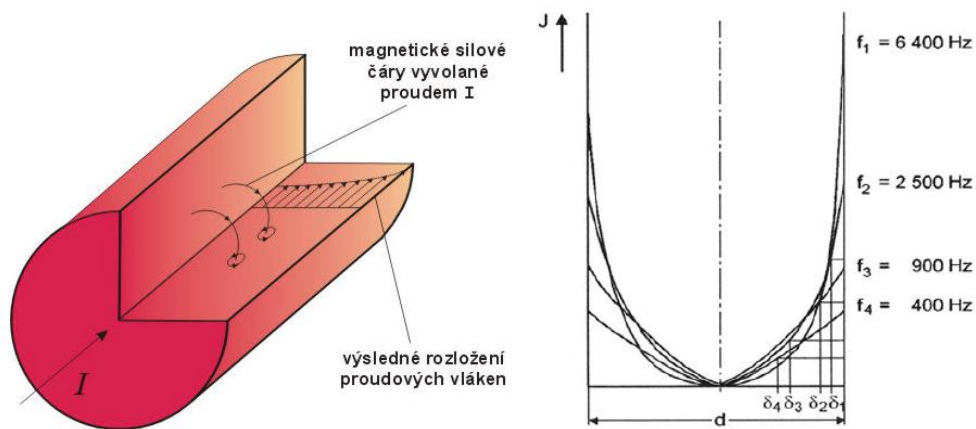
Derivací obou cylindrických funkcí z rovnice 2.3.35 dostáváme intenzitu  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{5}{\gamma + j\omega\epsilon} \cdot [\mathbf{C}_1 J_1(kr) + \mathbf{C}_2 N_1(kr)] \quad (2.3.39)$$

### 2.3.7 Skinefekt a hloubka vniku

Jelikož se v indukčních zařízeních používají vysoké frekvence napájecích proudů, je nutno zohlednit i vliv tzv. povrchového jevu. Skinefekt, nebo li povrchový jev, je fyzikální děj projevující se zejména u vyšších frekvencí střídavého proudu ve vodiči. Elektrický proud procházející vodičem vyvolává kolem sebe magnetický indukční tok. Část tohoto toku prochází i samotným vodičem, čímž v něm indukuje uzavřené vířivé proudy. Ty mají ke středu vodiče opačný směr, než původní proud, a tudíž dochází k jejich odečítání. Blíže k povrchu se naopak vířivé proudy a původní proud sčítají, čímž vytlačují proudovou hustotu od středu k povrchu. Čím je vyšší frekvence

střídavého proudu, tím více na povrch se proudová hustota vytlačuje, což je zobrazeno na obr. 14:



Obrázek 14: Vliv skin efektu na rozložení proudové hustoty a rozložení proudové hustoty v závislosti na frekvenci [12], [13]

Proudová hustota  $J$  ve vodiči směrem od povrchu, kde dosahuje hodnoty  $J_s$ , k jádru vodiče tedy klesá, a to s exponenciálním průběhem:

$$J = J_s \cdot e^{-\frac{d}{\delta}} \quad (2.3.40)$$

kde činitel  $\delta$  se nazývá hloubka vniku a vyjadřuje míru útlumu vniku elektromagnetického vlnění do vodiče. Tato hloubka je definována jako hloubka pod povrchem vodiče, kde proudová hustota klesne na hodnotu  $\frac{1}{e}J_s$ . Tuto hloubku lze vyjádřit jako funkci materiálových vlastností vodiče a frekvence procházejícího proudu.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}} \quad (2.3.41)$$

Tento jev musíme brát na zřetel při návrhu vodičů induktoru, kterým protékají velmi vysoké frekvence, čímž dochází k průchodu proudu pouze tenkou vrstvou na povrchu. Tím dochází k velkému zahřátí vodičů induktoru.

### 3 Problematika studeného kelímku s důrazem na studené kelímky používané při ohřevu kovů

#### 3.1 Studený kelímek

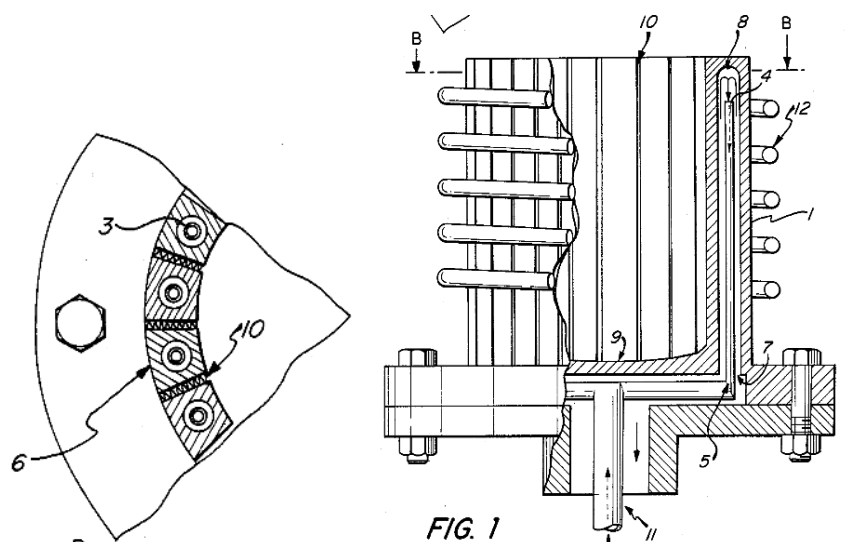
##### 3.1.1 Princip

Tavení vysoce reaktivních materiálů v běžných keramických kelímcích indukčních pecí může vést někdy k nežádoucí kontaminaci taveniny vlivem nečistot na povrchu kelímku. U kovů, u nichž vyžadujeme vysokou čistotu, jako například titan, tantal, molybden či niobium, je tudíž jejich tavení v konvenčních pecích téměř nemožné. Tomuto znečištění lze zabránit pomocí tavení ve studeném kelímku. Díky kontaktu taveniny s vodou chlazeným kovovým povrchem kelímku dochází k okamžitému tuhnutí taveniny a tím k vytvoření tenké vrstvy, také známé jako *skull*, která chrání vlastní taveninu před kontaktem s okolím.

##### 3.1.2 Historie studeného kelímku [14]

Ačkoliv tavení ve studeném kelímku je záležitostí spíše posledních dekad, princip jako takový je znám již delší dobu. S myšlenkou tavby v kovovém kelímku chlazeném vodou přišli jako první ve společnosti *Siemens und Halske Company* v Německu v roce 1931.[15] Jednalo se však pouze o teoretický patent, který nebyl vzhledem ke své technické náročnosti uveden do praxe. Až v letech 1957 až 1961 H. F. Sterling a R. W. Warren uskutečnili pokus s tavením silikonu ve vodou chlazeném kelímku vyrobeném ze stříbra. V roce 1963 přišli opět H. F. Sterling a R. W. Warren s možností využití tavení krystalů křemíku použitelných později k výrobě polovodičů. Jednalo se však pouze o laboratorní postupy, které nebyla žádná světová společnost schopna opakovat ve větším, průmyslovém měřítku.

Pro tavení kovů zveřejnil G. H. Schippereit v roce 1961 ve své publikaci [16] využití studeného kelímku pro tavení velmi reaktivních kovů, ve které dokázal výhody, jako malou kontaminaci vsázky, nižší finanční náročnost vzhledem k tomu, že není třeba používat vysoce chemicky čisté kelímky, apod. což si posléze nechal i patentovat. [17]



Obrázek 15: Studený kelímek patentovaný v roce 1988 [18]

V počátečních fázích vývoje technologie studeného kelímku se jevila jako největší problém velká provázanost jednotlivých problémů – elektromagnetického, teplotního a vírového pole vsázky, společně s extrémními rozdíly mezi vysokou teplotou vsázky skullem na povrchu. Takto komplexní problém nebylo možné řešit analyticky, a proto se jednalo spíše o výzkum experimentální.

Většina případů velkého technického pokroku a rozvoje mívá společného jmenovatele – válku. V tomto případě jím byla studená válka, kdy byla potřeba extrémně čistých kovů pro nové technické aplikace, např. ve vesmírném výzkumu. K největšímu rozmachu ve výzkumu tedy došlo v 80. letech 20. století, a to zejména v bývalém SSSR, Francii a Japonsku.[19-24]

Na začátku 90. let došlo k rozvoji spíše v závislosti na automobilovém průmyslu, kde například slitina TiAl vykazuje výborné výsledky teplotní odolnosti, a tudíž je využívána pro výfukové ventily. V dnešní době je již možné popsat studený kelímek i pomocí matematických a počítačových modelů, což nám dává schopnost zlepšovat vlastnosti a parametry kelímků.

### 3.1.3 Konstrukční provedení studeného kelímku

Zařízení pro tavení ve studeném kelímku je velmi složité a má mnoho součástí, (vysokofrekvenční generátor, systémy chlazení, elektrické ochrany, apod.). Nejdůležitější součástí jsou však duté lamely, většinou měděné, kterými protéká chladicí voda, a závitů induktoru.



Obrázek 16: Schéma konstrukčního uspořádání studeného kelímku – a) segmentový kelímek [26], b) kelímek s integrovaným induktorem [27]

Do induktoru je přiváděn elektrický proud o vysoké frekvenci, který kolem sebe vytváří elektromagnetické pole. Toto pole indukuje uvnitř vsázky vířivé proudy, které ohřívají samotný materiál. Teplo tedy vzniká přímo ve vsázce, a tím se omezují ztráty.

### 3.1.4 Dělení studených kelímků dle tvaru induktoru

#### 3.1.4.1 Segmentový kelímek

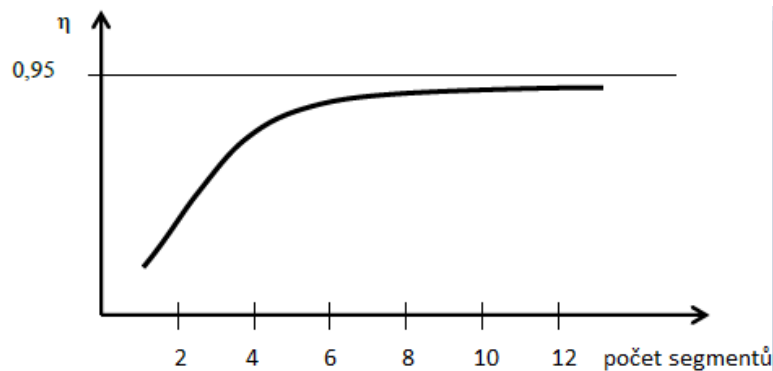
Jak je patrné z obr. 16, segmentový kelímek je tvořen induktorem a segmenty. Segmenty mohou mít různý tvar a počet, ale nejvýhodnější se jeví tvar obdélníku. Nejčastěji se vyrábějí z magneticky nevodivých kovů s vysokou elektrickou vodivostí, čímž je zachována podmínka pro přenos elektromagnetické energie skrz segmenty do vsázky. Těmto požadavkům nejlépe vyhovuje měď.

Rozdělení kelímku na segmenty nám způsobí zmenšení plochy, přes kterou by se uzavíraly vířivé proudy indukované elektromagnetickým polem cívky, a tím i zmenšení ztrát v kelímku. Mezera mezi segmenty musí být velmi pečlivě zvolena, aby byl možný přenos elektromagnetické energie do vsázky. Současně s tím však musí být co nejmenší, aby nedošlo k úniku vsázky z kelímku. Experimentálně bylo zjištěno, že počet segmentů při tavení kovů by měl být co největší. Zároveň musí segmenty zajistit i dostatečné chlazení kelímku, proto byla určena minimální šířka segmentu 5 mm. Mezeru mezi segmenty je z technologického hlediska obtížné zajistit menší než 1 mm. Z těchto požadavků poté vychází vztah pro určení počtu segmentů kelímku:

$$n = \frac{\pi D_v}{b+1} < \frac{\pi D_v}{6} \quad (3.1)$$

kde  $D_v$  je průměr vsázky v mm,  $b$  je šířka segmentu

Z grafu na obr. 17 je zřejmé, že účinnost tavby ve studeném kelímku není ve větší míře závislá na počtu segmentů. Potvrzením této teorie se dále zabývá i praktická část této diplomové práce. V praxi se tedy využívají kelímky s minimálním počtem 8 segmentů (konstrukční minimum) až po několik desítek segmentů bez většího vlivu na účinnost. Volba počtu segmentů tedy z velké míry závisí na velikosti kelímku.



Obrázek 17: Účinnost v závislosti na počtu segmentů [28]

Induktor je v tomto případě tvořen také z mědi a je chlazen vodou. Teoreticky je nejlepším tvarem pro chlazení obdélník, ale technologicky je téměř nemožné vytvořit zatočený induktor tohoto průřezu, proto se v praxi využívá zejména kruhový tvar. Induktor musí co nejlépe kopírovat tvar kelímku pro co nejvyšší účinnost přenosu elektromagnetické energie do vsázky. Cívka musí být také aktivně chlazená. Nejčastěji je chlazená vodou, která by neměla přesáhnout teplotu 50-60°C, aby nedošlo k jejímu odpařování, a tím zhoršení vlastností.

Vzhledem k vnitřní teplotě vsázky, která může dosahovat až 3000°C, je tedy zřejmé, že takto velký teplotní rozdíl mezi částmi zařízení vsázka – segment – induktor je nutné velmi aktivně chladit, což není jednoduchou záležitostí. Je nutné zohlednit velké množství parametrů, jako např. rychlost proudění chladicí kapaliny, její schopnost odvádět teplo ze segmentů, apod.

#### 3.1.4.2 Kelímek s integrovaným induktorem

Méně používaným druhem studeného kelímku je kelímek s integrovaným induktorem (viz obr. 16). Kelímek je tvořen pouze jednozávitovou cívkou, bez použití chladicích



segmentů. Stěnu kelímku tvoří tedy induktor sám. Induktor je jako v předchozím případě dutý, protékaný chladicí vodou.

Výhodou tohoto uspořádání je vyšší účinnost a nižší ztráty, protože nedochází k naindukování proudů do kelímku a nedochází ke vzniku ztrát v mědi. Nevýhodou je možnost vzniku mezizávitového zkratu mezi přívody induktoru, proto se pro napájení používá maximální napětí 1 kV. Tento druh kelímku se využívá zejména pro tavení elektricky špatně vodivých materiálů, jako např. oxidů, skla, apod.

### 3.1.5 Tavení kovů ve studeném kelímku (ISM)

Studený kelímek je používán pro svoji vysokou účinnost a vysokou čistotu taveného materiálu. Nejčastěji se taví ve studeném kelímku materiály se špatnou elektrickou vodivostí, jako jsou oxidy a skla, nebo tzv. přechodné kovy, např. titan nebo zirkonium (viz tab. 1).

Na bázi titanu	Aluminidy titanu	Na bázi zirkonia	Na bázi niklu	ostatní
CP-Ti (Grade 1, 2, 3, 4)	Na bázi TiAl ( $\gamma$ )	Čisté Zr (Grade 702)	Čistý nikl	Cu a Cu slitiny
Ti-12Pd (Grade 7, 8)	Na bázi Ti <sub>3</sub> Al ( $\alpha_2$ )	Zr-2,5Nb	C201	Cr
Ti-6Al-4V (Grade 5)	TiAlNb (orthorombická)	Zircalloy 2	NiAl	Co slitiny
Ti-6Al-4V ELI	Slitina TiAl *	Zircalloy 4	Ni <sub>3</sub> Al	Sn slitiny
Ti-6-2-4-2		Slitina Zr *	IN-718	Al a Al slitiny
Ti-15-3-3-3		Amorfni slitiny	IN-713	Nb slitiny
Ti-3-8-6-4-4			IN-792	Fe slitiny
Ti-55Ni (Nitinol)			MAR-M247	
60Nitinol			Slitina Ni *	
Slitiny beta				
Slitina Ti *				

Tabulka 2: Kovy a slitiny vyrobené metodou studeného kelímku [29]

Zmíněné kovy se vyznačují velmi vysokou reaktivností s nekovovými prvky. Ačkoliv je tedy např. titan 7. nejrozšířenější kov v zemské kůře, jeho výroba a zpracování bylo prakticky téměř nemožné, protože za vyšších teplot prudce reagoval s kyslíkem, vodíkem, uhlíkem a dalšími prvky. Až s nástupem a rozvojem studeného kelímku lze získávat extrémně čistý titan díky kombinaci vakuového prostředí a nemožnosti kontaminace vsázky ze stěn kelímku.

#### 3.1.5.1 Tavení titanu [30]

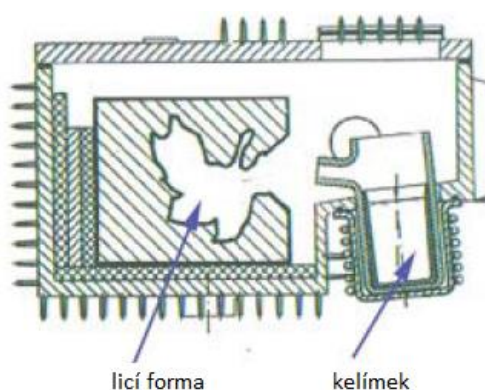
Titan je díky svým jedinečným vlastnostem využíván v mnoha aplikacích, kde nemohou být použity jiné kovy. Jeho skvělý poměr pevnosti vůči hmotnosti ho předurčuje k použití v leteckém průmyslu. Vyznačuje se také mimořádnou chemickou stálostí, je naprosto odolný vůči působení vody, atmosférických plynů (za běžné

teploty), alkalických hydroxidů, atd. Tého chemické stálosti titanu a jeho sloučenin je také využíváno pro aplikace ve zdravotnictví.

Tavení titanu probíhá v inertní atmosféře, nebo ve vakuu pomocí metody studeného kelímku. Tato aplikace je výhodnější, než klasické indukční tavení ve vakuu, vzhledem ke kratší době tavení, téměř nulové kontaminaci vsázky a schopností recyklace kovového šrotu.

Při výrobě odlitků dojde k roztavení vsázky v kelímku a poté odlití tekutého titanu do připravené formy. Vzhledem k vysoké reaktivnosti titanu s kyslíkem za vysokých teplot musí být použity speciální materiály na formy odlitků. Formy z běžných materiálů by způsobily vysokou poréznost povrchu a skryté materiálové vady.

Samotná výroba se zjednodušeně skládá z několika kroků, jimiž jsou příprava materiálu do kelímku, roztavení a odlití tekutého titanu do připravených forem (schematicky znázorněno na obr. 18).



Obrázek 18: Schématické znázornění zpracování titanu [31]

Po odlití zůstává na povrchu kelímku tenká vrstva titanu, která však může být velmi rychle odstraněna, a je tedy možné pouze s krátkou prodlevou pokračovat v dalším tavení materiálu.

Další nespornou výhodou tavení ve studeném kelímku oproti tavení v běžných indukčních pecích je také nižší cena ve srovnání například s technologií VAR (tavení ve vakuu pomocí elektrického oblouku). Výhoda je způsobena zejména absencí tavných elektrod a snížením ztrát, protože ke vzniku tepla dochází přímo ve vsázce.

<b>Metoda</b>	<b>VAR</b>	<b>ISM</b>
Průměrný čas cyklu	7,75 min	6 min
Cyklů za den	152,32	196,8
Náklady na tavení	15\$/kg	8,25\$/kg

Tabulka 3: Srovnání časů a ceny při výrobě Ti-6Al-4V golfové hole [30]

## 4 Matematický model pro numerické výpočty

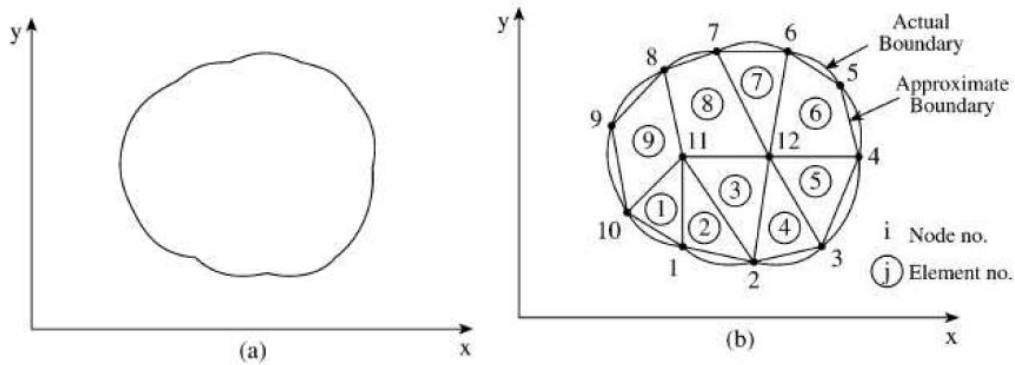
Návrh studeného kelímu je velmi složitý, protože se jedná o silně sdruženou úlohu, ve které se propojuje velké množství různých polí – elektromagnetické, teplotní, proudové, atd. . Analytické řešení je tedy téměř nemožné a experimentální ověření návrhů je ekonomicky a technologicky velmi náročné. Rozumným řešením se jeví využití výpočetní techniky při numerických výpočtech. Tyto výpočty byly dříve nemožné vzhledem k omezeným schopnostem výpočetní techniky. Samotný výpočet je založen nejčastěji na metodě konečných prvků.

### 4.1 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP) patří v dnešní době k předním výpočetním nástrojům. Její prvotní využití ve strojírenství se postupem času rozšířilo i do ostatních odvětví průmyslu. Využívá se nejen v oblasti vývoje nových zařízení, ale také k optimalizaci stávajících technologií. Předností MKP je bezesporu názorná grafická interpretace fyzikálních polí, ve kterých analytická řešení zavádí značná zjednodušení a tím i zanáší nepřesnosti do výpočtů.

Samotná metoda je založena na řešení soustavy diferenciálních rovnic, popisujících vlastnosti řešeného systému. Analytické řešení těchto diferenciálních rovnic není příliš složité pro jednoduché geometrické úlohy. Pro složité průmyslové a inženýrské problémy, které pomocí MKP analyzujeme, jsou naopak charakteristické fyzikálně komplexní a matematicky nespojitě soustavy s velmi složitou geometrií. Pro řešení těchto problémů je nejvhodnější použití numerické aproximační metody, označované jako MKP.

Princip MKP je jednoduchý. Spočívá v rozdělení geometricky definovaného objektu, na kterém provádíme výpočet, na konečný počet částí (tzv. elementů), které s dostatečnou přesností tento objekt vyplňují. V názorném příkladu rozdělení oblasti na obr. 18 je oblast diskretizována pomocí dvou typů elementů (obdobně platí i pro 3D). Z hlediska tvarové aproximace je tato varianta vhodná, ale z hlediska matematického se doporučuje využívat pouze jeden tvar elementů pro celou vyšetřovanou oblast. Jednotlivé elementy jsou vzájemně spojeny v tzv. uzlech. Tyto uzly (odborně nazývané *node*) jsou matematické body se známými souřadnicemi v prostoru. Zjednodušeně lze říci, že počítané hodnoty neznámých parametrů se vyšetřují právě v těchto bodech.



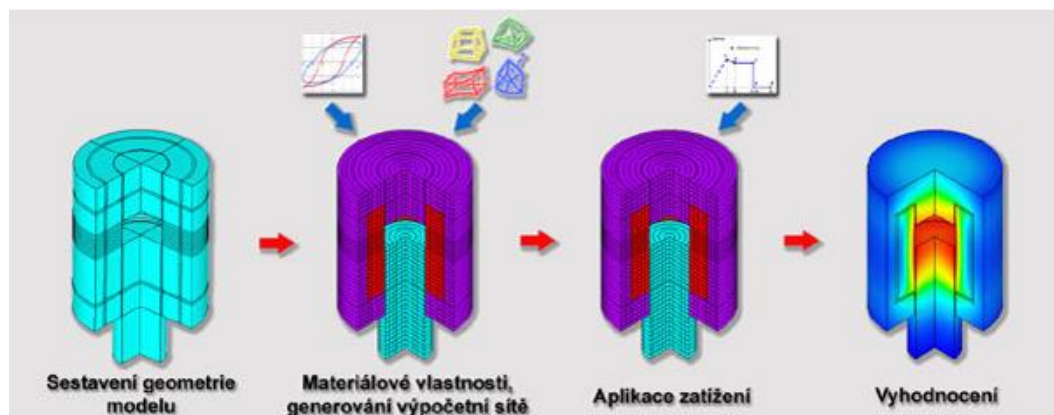
Obrázek 19: Diskretizace analyzované oblasti [32]

Vlastnosti těchto elementů jsou popsány jednoduchou matematickou funkcí, a tím dostáváme soustavu rovnic pro popis vlastností objektu. Diferenciální rovnice jsou tak převedeny na řešení algebraických rovnic, jejichž neznámé jsou námi požadované neznámé parametry fyzikálního problému. Tyto soustavy rovnic pro celý objekt poté mohou dosahovat řádově tisíců až milionů rovnic pro složité problémy. Takový počet je nemožné řešit analyticky, a proto k rozvoji MKP dochází v závislosti na navýšení výpočetní kapacity dnešních počítačů.

## 4.2 Obecný postup tvorby matematického modelu

Pro výpočet fyzikálních polí existuje v dnešní době řada kvalitních software. Jedním z nich je i software ANSYS, ve kterém je i řešena praktická část této diplomové práce. Struktura tohoto software dovoluje simulovat různé druhy polí, včetně jejich kombinací.

Vytvoření modelu v ANSYSu, ale i obecně v jakémkoliv výpočetním software, se skládá z několika základních kroků.



Obrázek 20: Obecný postup vytvoření modelu [34]

#### 4.2.1 Definice problému

Prvotním krokem je rozhodnutí, o jaký typ výpočtu se jedná. Toto rozhodnutí, které je pro kvalitu výpočtu MKP rozhodující, se neliší od úvah, které se vyskytují v řešení klasických výpočtů. Jedná se o zvolení parametrů modelu (statický lineární, dynamický, statický tepelný, atd. ), materiálových vlastností modelu (lineární, plastický, teplotně závislý, atd. ), zatížení, okrajových podmínek, apod.

#### 4.2.2 Pre-processing

V této fázi se vytváří fyzikální (geometrické) vlastnosti modelu, volí se materiálové vlastnosti a generuje rozdělení oblasti na elementy. Je možné zde aplikovat i okrajové podmínky a zatížení.

##### 4.2.2.1 Tvorba modelu

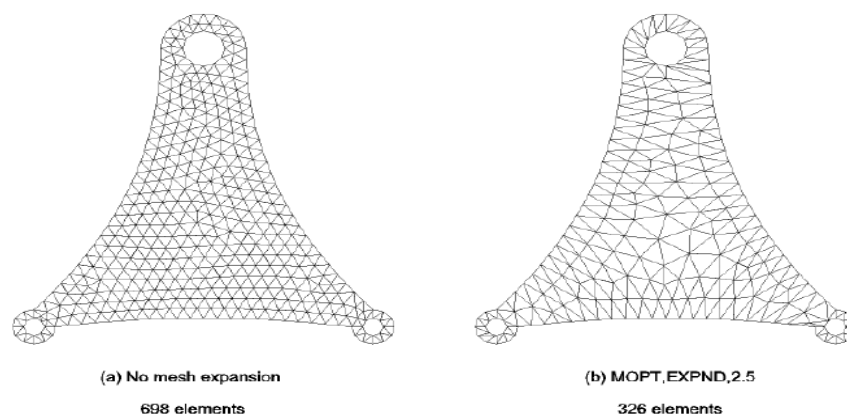
V dnešních MKP programech lze vytvářet 1D, 2D i 3D modely. Samotný model může být vytvořen přímo v programu, nebo lze převzít geometrii modelu z CAD systémů. Při přebírání geometrie tvarově složitých objektů je vhodné si takový model zjednodušit např. odebráním některých, pro výpočet nedůležitých, detailů, jako jsou např. závity. Tím dochází k zjednodušení výsledné sítě elementů a zrychlení výpočtu. Je možné také využít symetrie některých objektů a počítat pouze pro tyto symetrické části.

##### 4.2.2.2 Zadání atributů modelu

Do této části patří zadání materiálových vlastností modelu, které lze zadat pomocí konstant či lineárních i nelineárních závislostí v podobě tabulek. Dále se zde vybírá typ elementu. Volba vhodného typu je velmi důležitá. V ANSYSu se nachází přes 200 typů elementů a každý je vhodný pro řešení jiného problému. Při nevhodné volbě je možné, že výpočet bude chybný, nebo k němu ani nemusí dojít.

##### 4.2.2.3 Tvorba sítě elementů (mesh)

Tato část Pre-processoru je zřejmě nejdůležitější částí ve vytváření modelu. Je nutné zvolit optimální velikost elementů, aby výsledek byl co nejpřesnější. Současně se musí uvažovat i celkový počet elementů. V případě velkého množství elementů dochází ke zdlouhavým výpočtům a někdy i k pádu softwaru. Nejvhodnější je využít možnosti řídit velikost elementů v jednotlivých částech modelu tak, aby v okrajích či detailech byla mesh dostatečně jemná a v okolí, kde již tak přesný výsledek nepotřebujeme, síť zhoršit (obr. 21).



Obrázek 21: Příklad úpravy meshe pro omezení počtu elementů [33]

#### 4.2.3 Solution

Zde probíhá volba typu analýzy (statická, harmonická,transientní), výběr způsobu řešení pro dané fyzikální pole a nastavení přesnosti výpočtu. Dále zde dochází k samotnému výpočtu problému.

#### 4.2.4 Post-processing

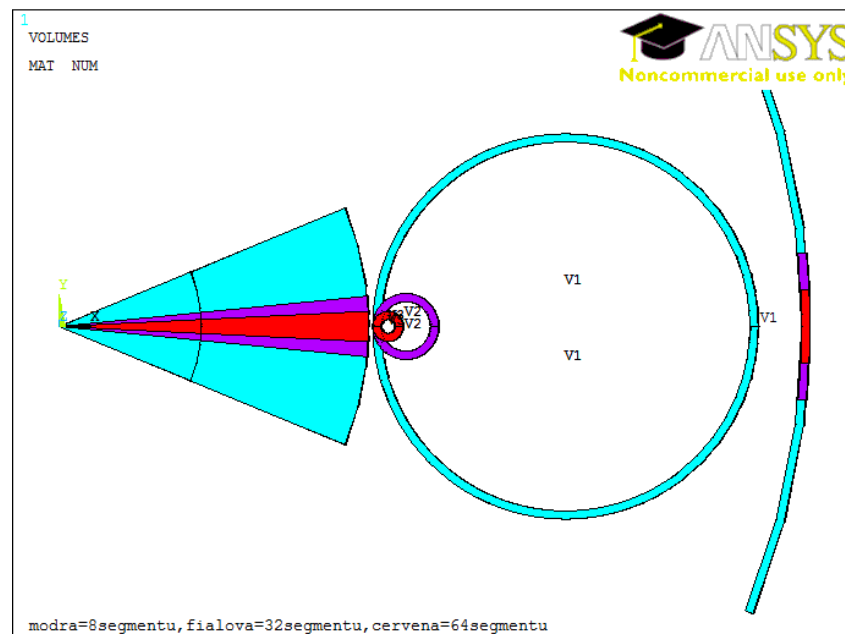
Závěrečná část je určena pro vyhodnocení řešené úlohy. Využívá se zde možnosti grafického vykreslení výsledků v podobě map požadovaných veličin v prostoru, nebo závislosti veličin (na čase, teplotě, rychlosti, apod. ) .

## 5 Matematický model studeného kelímku

V praktické části této diplomové práce je řešen problém návrhu studeného kelímku s ohledem na jeho účinnost v závislosti na počtu segmentů pro již roztavenou elektricky vodivou vsázku – tekutý titan.. Jak již bylo řečeno dříve, experimentální či analytické řešení návrhu je ekonomicky a výpočtově nemožné, a proto se využívá numerických výpočtů. Problém byl řešen v software ANSYS, který umožňuje vytváření modelu v uživatelském rozhraní, nebo pomocí programovacího jazyka APDL (ANSYS Parametric Design Language). První způsob pomocí uživatelského rozhraní je vhodný spíše pro modelování jednoduších problémů, ve kterých nechceme příliš často měnit parametry modelu. Druhý způsob (APDL) je vhodnější díky možnosti zadávání vlastností parametrickým způsobem. Proto jsem samotný model studeného kelímku řešil právě pomocí jazyka APDL. (Příloha 1)

### 5.1 Definování problému

Studený kelímek je tvořen vsázkou, segmenty a induktorem. Počet segmentů je možné volit různě v počtu od 8 až do cca 32 pro praktické využití. Teoreticky byl problém řešen až do počtu 64 segmentů. Problém je schematicky znázorněn na obr. 22.



Obrázek 22: Schématické znázornění řešeného problému

Je zřejmé, že s měnícím se počtem segmentů se mění i řešená výseč studeného kelímku. Pro tuto situaci jsem poté vytvořil matematický model a sledoval změny



vzniku Jouleových ztrát v jednotlivých částech kelímku. Napájení bylo řešeno vložením harmonického proudu o frekvenci  $f=10\ 000\text{Hz}$  do induktoru.

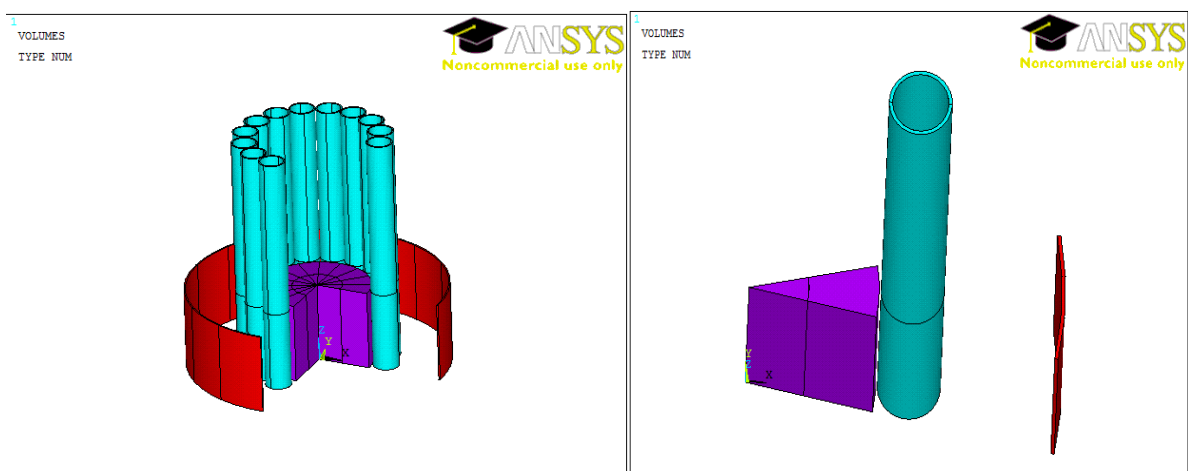
## 5.2 Vytvoření geometrie

Vzhledem k povaze problému, který je řešen pro teoretické úvahy, lze zjednodušit volbu geometrických parametrů studeného kelímku. Nelze však zcela ignorovat zásady konstrukčního uspořádání, a proto byly zvoleny geometrické rozměry velmi podobné již realizovaným zařízením. Dále je třeba brát v potaz, že geometrické rozměry se s různým počtem segmentů mění. Pevně dané rozměry pro výpočet jsou tedy jen poloměr ohřívané vsázky, vzdálenost induktoru a výška kelímku.

r vsázky	0,075 m
r induktoru	0,18 m
výška vsázky	0,225 m
výška segmentu	0,675 m
výška induktoru	0,225 m

Tabulka 4: Rozměry kelímku

Pro zjednodušení a zrychlení výpočtu bylo dále možné využít symetrie daného problému a model byl tedy uvažován jen jako výseč obsahující vždy příslušnou část vsázky, jeden segment a induktor. Dále byla daná výseč ještě rozpůlena díky symetrii podél osy x.



Obrázek 23: Zjednodušení problému díky symetrii

Dalším zjednodušením byla aplikace teorie elektromagnetického pole, kdy víme, že elektromagnetické pole je utlumeno na vrstvě silné  $6,28 \cdot a$ ; kde  $a$  je hloubka vniku.

Dále lze uvažovat, že více než 98% Jouleových ztrát vzniká dokonce ve vrstvě silné pouze  $3 \cdot a$ . Na základě těchto poznatků bylo tedy možné zvolit sílu induktoru a sílu stěny segmentů jako trojnásobek hloubky vniku, aniž by došlo k většímu zkreslení výsledků. Následkem toho je opětovné ušetření počtu elementů a výpočetního času.

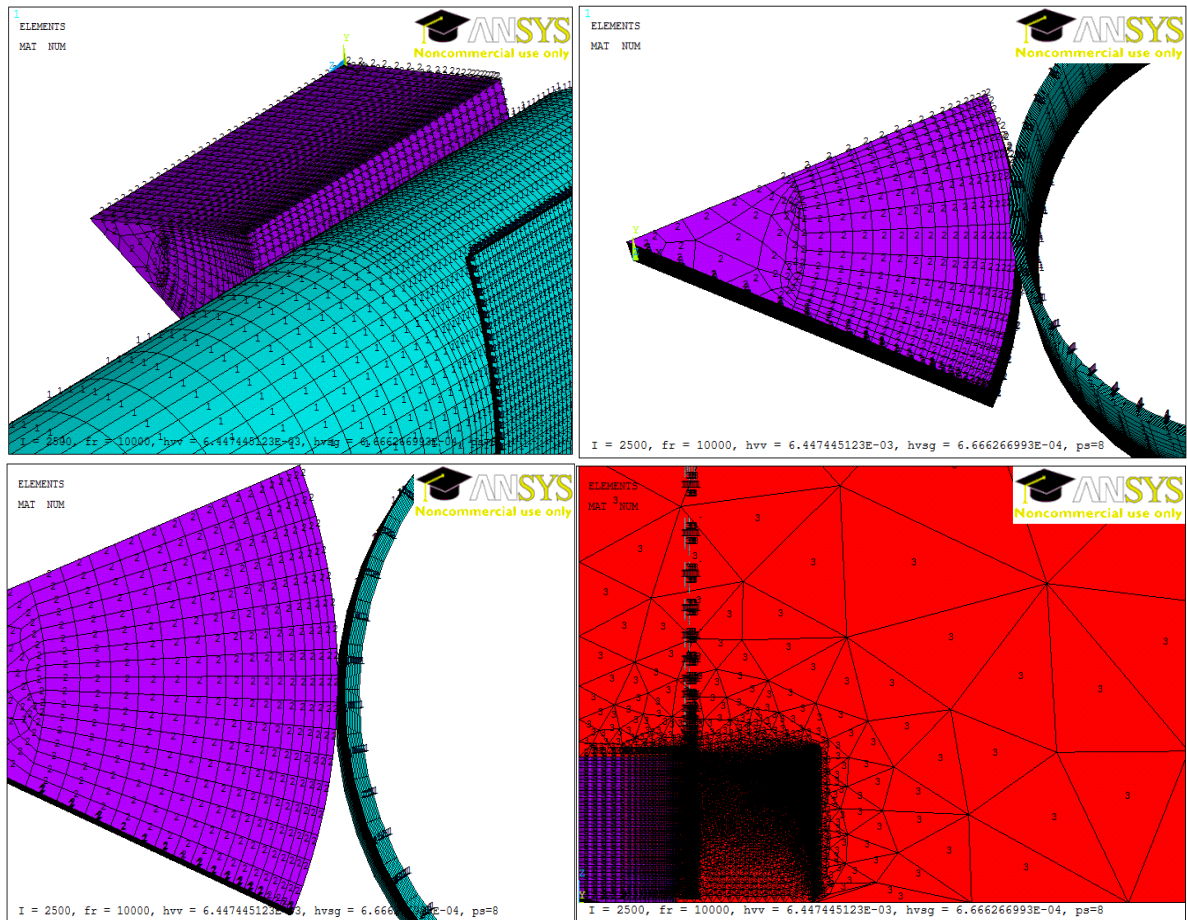
### 5.3 Materiálové parametry

Díky povaze řešeného problému bylo možné zanedbat veškeré materiály, ve kterých nevznikají ztráty elektromagnetickou indukcí – izolace, chladicí vodu v segmentech, apod. . Tím došlo k zjednodušení situace na pouhé dva materiály – měď použitou v segmentech a tekutý titan ve vsázce..

### 5.4 Tvorba sítě elementů – mesh

Jak již bylo řečeno v kapitole 4.2.2.3, tvorba vhodně definované meshe řešeného objektu je zřejmě nejdůležitější částí matematického modelu. Pokud zvolíme velmi hrubou síť elementů (= malý počet elementů), dostaneme nepřesné výsledky. V případě naopak velmi jemné sítě (= velký počet elementů) dojde k vytvoření velkého množství rovnic a tím i ke zdoluhavým výpočtům s velkými nároky na výpočetní techniku. Úkolem výpočtáře je tedy zvolit optimálně jemnou síť, aby k výpočtům došlo v rozumném čase, ale současně s ohledy na přesnost řešení. Nejvhodnějším způsobem u tvarově jednoduších objektů je tedy využití různých druhů symetrie modelu a využití poznatků z teoretické oblasti pro zanedbání nedůležitých částí modelu ve výpočtu.

V modelu studeného kelímku došlo tedy k zjednodušení pomocí symetrie kelímku dle osy  $x$  a dále využitím výpočtů pouze pro výseč kelímku. Dále došlo k zjednodušení modelu použitím poznatků o útlumu elektromagnetického vlnění v materiálech, a tím k dalšímu omezení počtu elementů a tím i k redukci počtu řešených rovnic. Naopak bylo nutné zjemnit síť na rozhraní různých materiálů a na hranách a v rozích částí modelu.



Obrázek 24: Ukázka síť elementů modelu studeného kelímku pro 8 segmentů

## 5.5 Materiálové parametry a zatížení modelu

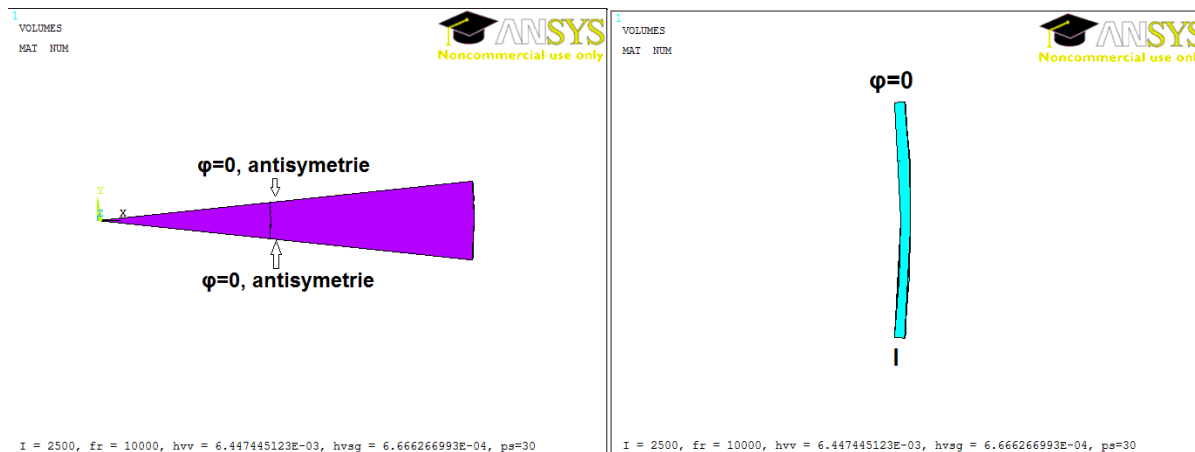
Díky povaze řešeného problému bylo možné zanedbat veškeré materiály, ve kterých nevznikají ztráty elektromagnetickou indukci – izolace, chladicí vodu v segmentech, apod. . Tím došlo k zjednodušení situace na pouhé dva materiály – měď použitou v segmentech a tekutý titan ve vsázce. Elektrická vodivost tekutého titanu byla zvolena pro teplotu 1953 K, protože teplota tání titanu je 1941 K.

Materiál	Elektrická vodivost [S.m-1]	Relativní permitivita [-]
Měď	57*10e6	1
Titan	1,6411*10e6	1

Tabulka 5: Materiálové parametry modelu [35]

Model studeného kelímku byl dále nadefinován okrajovými podmínkami a zatížením. Na ose symetrie uvnitř kelímku je nastavena podmínka symetrie a na stěnách výseče vsázky je nastavena podmínka antisymetrie, která softwaru určí, že daná oblast dále

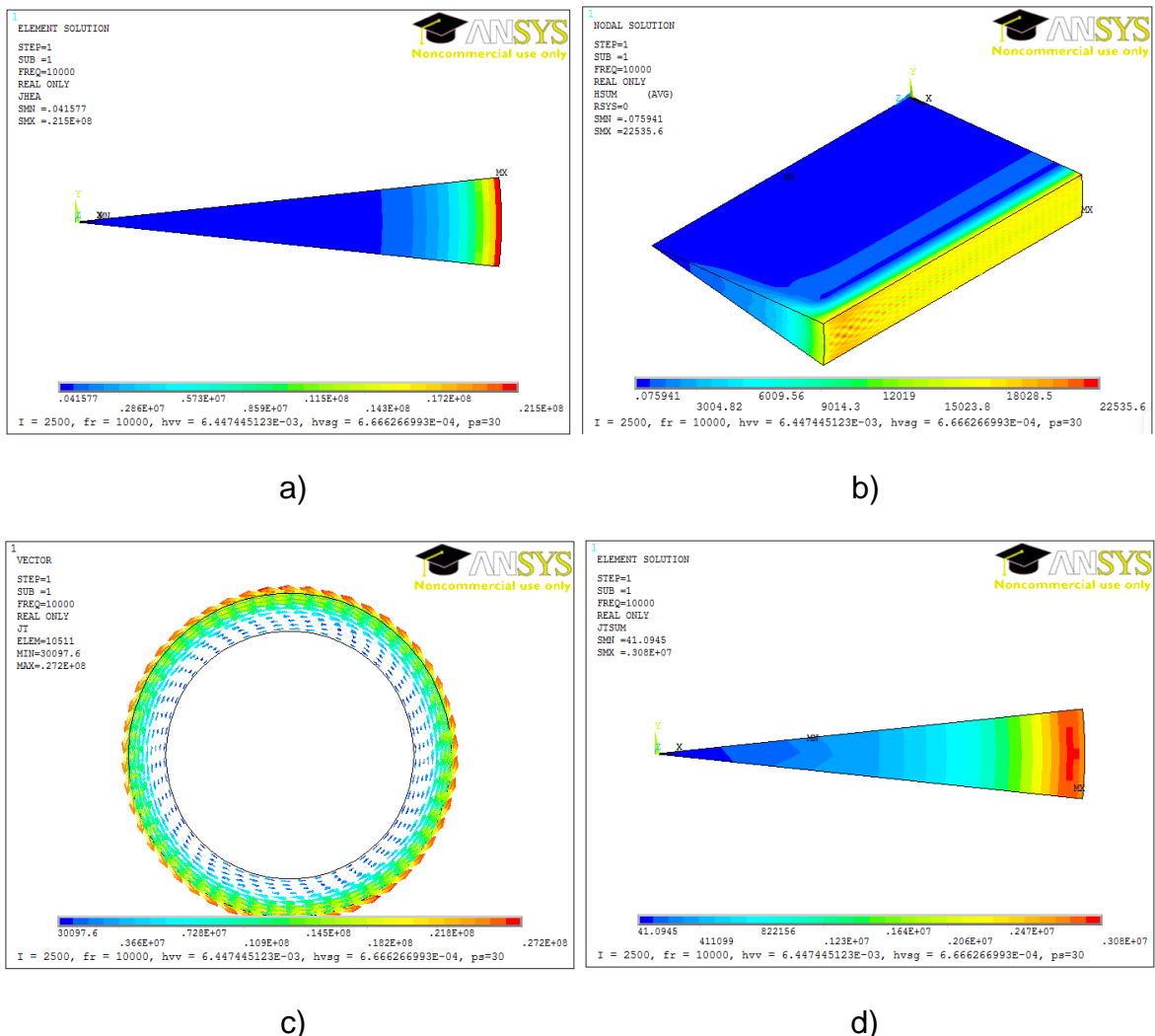
pokračuje a je shodná s další uvažovanou částí. Na okrajích vzduchového okolí je nastavena Dirichletova podmínka vektorového magnetického potenciálu rovného nule ( $A=0$ ) a na stěnách vsázky byla nastavena podmínka nulového elektrického potenciálu ( $\varphi=0$ ). Do stěny induktoru byl poté vložen harmonický proud o velikosti 2500A a frekvenci 10 000Hz.



Obrázek 25: Nastavení okrajových podmínek u vsázky a induktoru

## 6 Výsledky matematického modelu studeného kelímku

V této kapitole se zabývám grafickým znázorněním vypočítaných výsledků. S danou geometrií a materiálovými parametry popsanými dříve jsem vypočítal Jouleovo ztráty v jednotlivých částech studeného kelímku (induktor, segmenty a vsázka) v závislosti na počtu segmentů. Pro praktické využití je žádoucí, aby největší ztráty vznikaly přímo ve vsázce. Dále jsme sledovali rozložení intenzity magnetického pole a proudovou hustotu ve vsázce a segmentu, pro potvrzení teoretických předpokladů o útlumu elektromagnetického vlnění (obr. 26).



Obrázek 26: Ilustrativní obrázky: a) Jouleovo ztráty ve vsázce; b) intenzita magnetického pole; c) proudová hustota v segmentu; d) proudová hustota ve vsázce

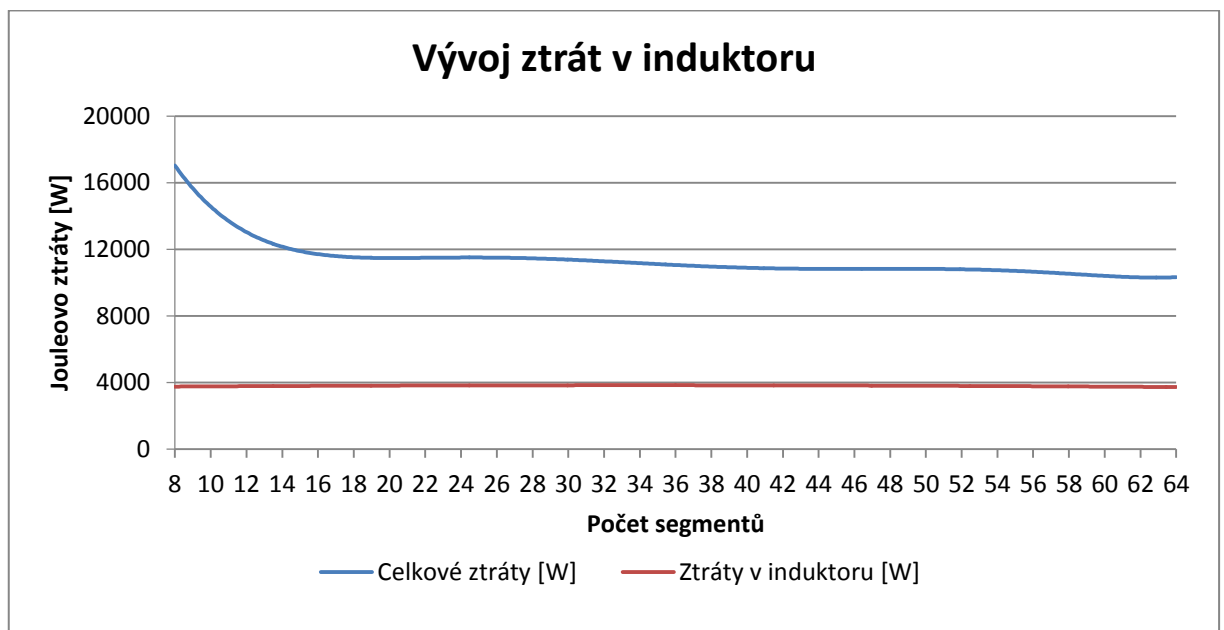
Z obrázků je patrné, že matematický model se chová dle teoretických předpokladů, a proto lze využít vypočítaná data k další analýze řešeného problému. Vypočítané hodnoty Jouleových ztrát jsou součástí této diplomové práce jako Příloha 2.

## 6.1 Ztráty v induktoru

Průchodem elektrického proudu induktorem dochází ke vzniku tepla, které zahřívá induktor a ovlivňuje průběh tavení. Ztráty lze vypočítat pomocí jednoduchého vzorce, ve kterém vystupuje pouze odpor cívky  $R_1$  a proud  $I_1$  procházející cívkou.

$$P_1 = \frac{1}{2} R_1 I_1^2 \quad (2.3.24)$$

Pro minimalizaci ztrát je důležité, aby byl induktor z materiálu s dobrou elektrickou vodivostí – nejčastěji měď. V matematickém modelu byl zvolen průměr induktoru a vzdálenost induktoru od vsázky jako konstantní. Teoreticky by tedy jediný vliv na ztráty v induktoru měly mít rozměry segmentů. V praxi se však ukazuje, že vzhledem ke konstantním rozměrům induktoru a neměnnému proudovému zatížení induktoru jsou ztráty v závislosti na počtu segmentů víceméně konstantní.

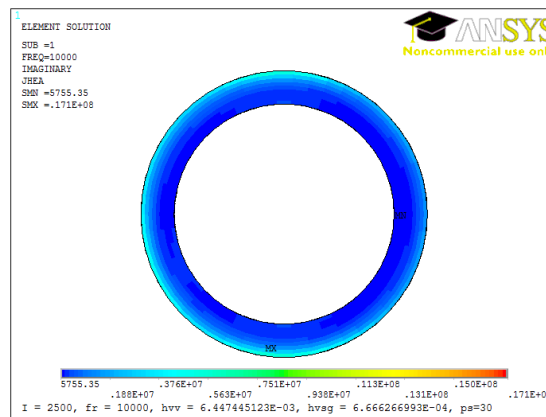


Graf 1: Vývoj ztrát v induktoru

## 6.2 Ztráty v segmentech

Vzhledem k faktu, že ztráty v induktoru jsou konstantní, zbývající ztráty se musí rozdělit mezi ztráty v segmentech a ztráty ve vsázce. Pro co nejvyšší účinnost celého zařízení chceme, aby se co největší část ztrát generovala pouze ve vsázce. Bohužel

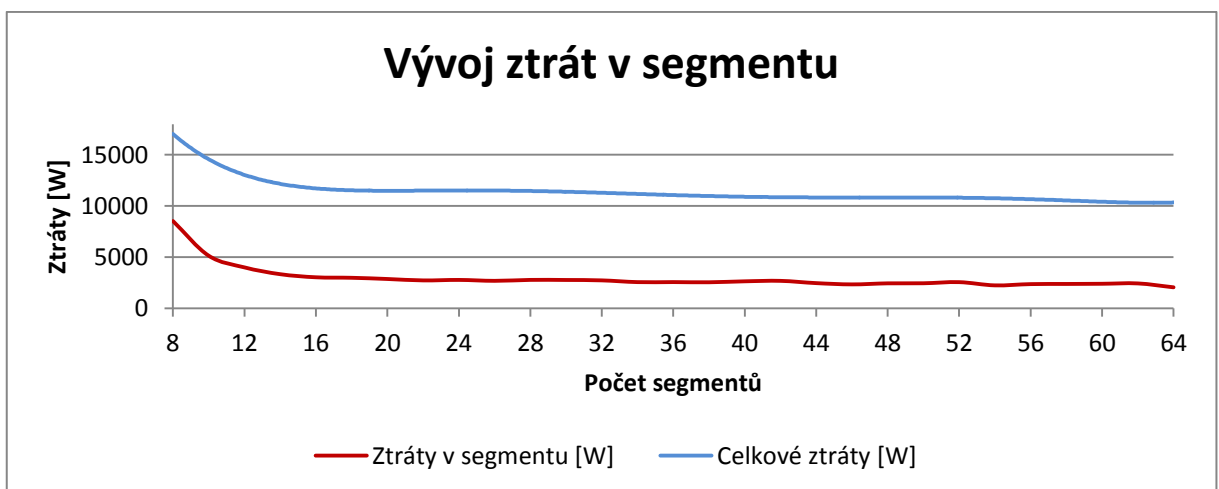
velká část ztrát se generuje v segmentech, což způsobuje jejich zahřívání. Úkolem při návrhu je tedy stanovit optimální počet segmentů tak, aby se v nich produkovalo co nejméně ztrát, ale zároveň plnily svoji funkci obálky vsázky. Proto se v praktickém měřítku dá využívat pouze počet segmentů do cca 32 pro tento poloměr vsázky. Pro vyšší počet by bylo technicky velmi náročné, až nemožné, vyrobit segment tak, aby jeho průřezem protékalo dostatečné množství chladicí vody. V teoretické rovině jsem však problém řešil až do počtu 64 segmentů pro ověření.



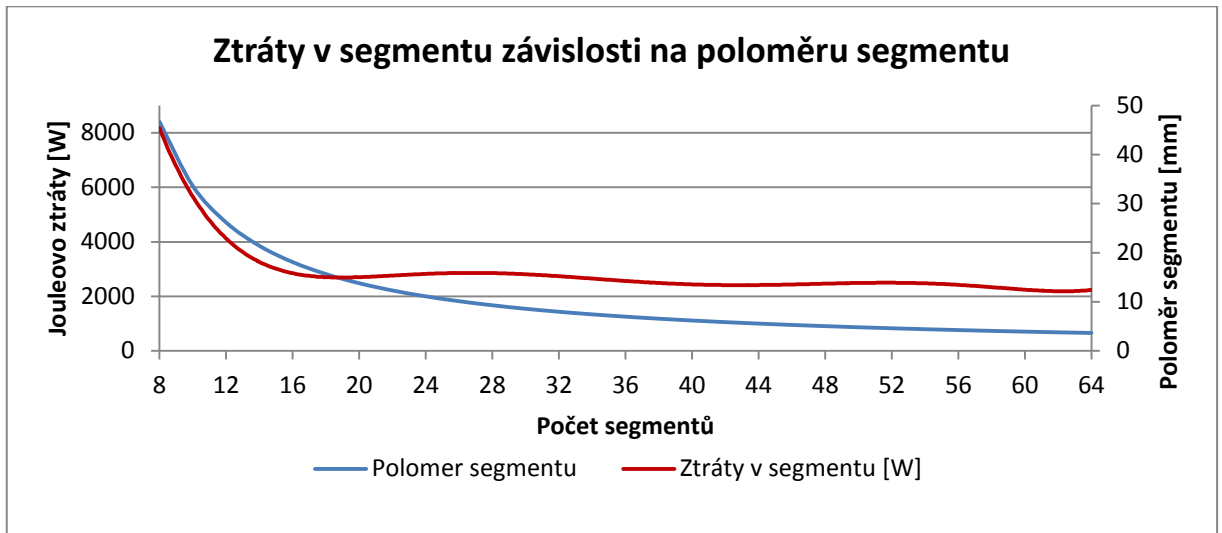
Obrázek 27: Jouleovo ztráty v segmentu

Jak je patrné z obr. 27, opět se téměř veškeré Jouleovo ztráty generují v tenké vrstvě na povrchu segmentu, což potvrzuje teoretické předpoklady skinefektu.

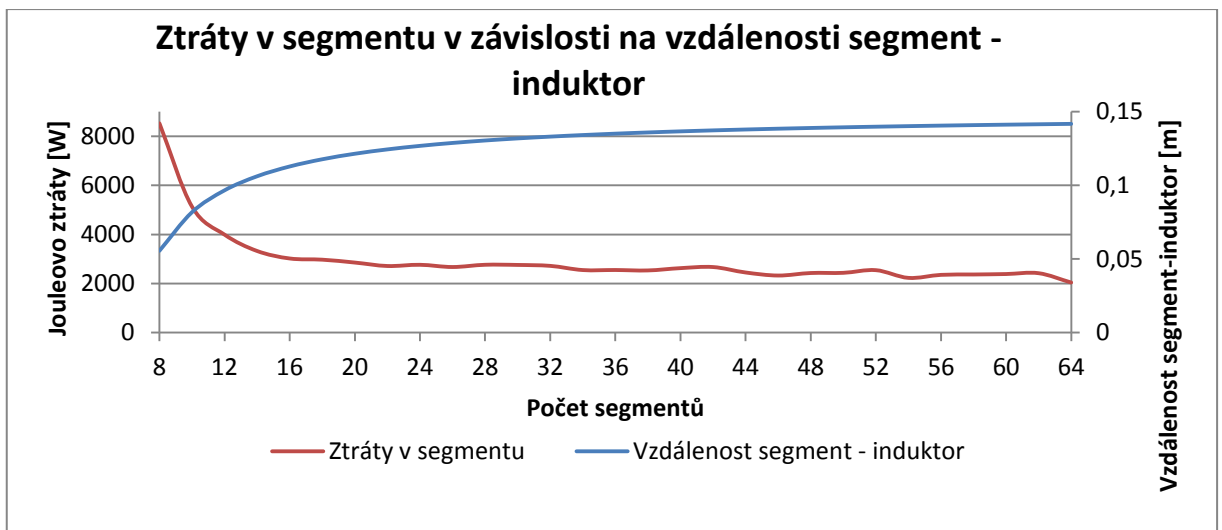
Z následujících grafů je patrné, že velikost ztrát v segmentech se výrazněji mění pouze pro malý počet segmentů (8-14) a poté se ztráty již ustalují na konstantní hodnotě, respektive mírně klesají. Strmost poklesu je viditelná v následujících grafech.



Graf 2: Strmost poklesu ztrát v segmentu vůči celkovým ztrátám



Graf 3: Závislost ztrát v segmentu na poloměru segmentu



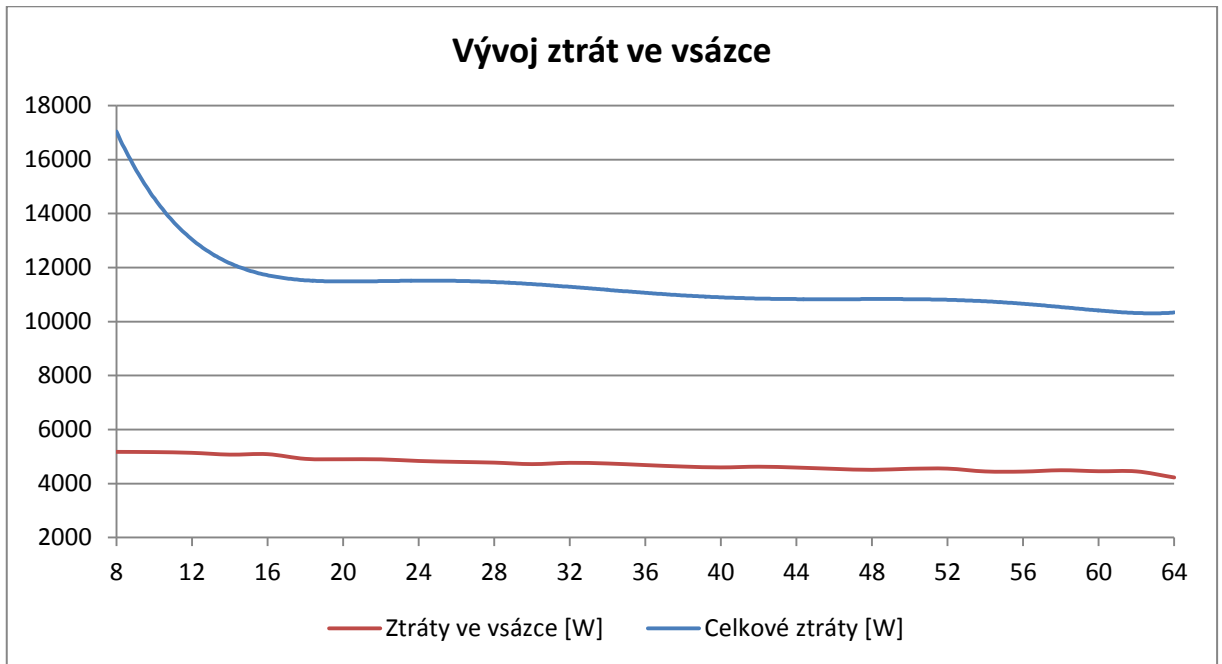
Graf 4: Závislost ztrát v segmentu na vzdálenosti segment - induktor

Ztráty v segmentu tedy závisí z větší míry na poloměru segmentu a s tím souvisejícím množstvím mědi, ze které je segment tvořen. Dále závisí téměř úměrně na vzdálenosti mezi segmentem a induktorem. Tato vzdálenost by měla být co nejmenší s ohledem na účinnost zařízení. Je však důležité navrhnout takovou vzdálenost, aby byla možná mechanická manipulace se segmenty.

### 6.3 Ztráty ve vsázce

Poslední částí modelu, kde se generují ztráty, je vsázka. Ta byla v tomto případě tvořena tekutým titanem. Vzhledem k použití elektricky vodivého materiálu dochází ke vzniku tepla přímo ve vsázce, což značně zvyšuje účinnost tohoto zařízení.

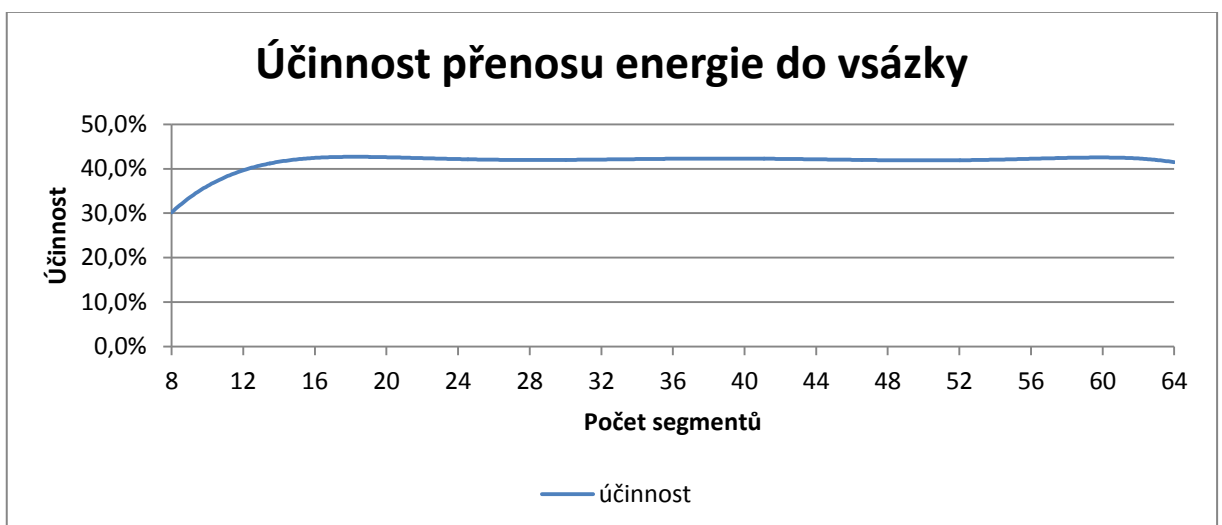




Graf 5: Závislost ztrát ve vsázce

Z grafů závislosti ztrát ve vsázce je zřejmé, že počet segmentů nemá přílišný vliv. Mnohem větší vliv na procentuální množství ztrát, které se vytvoří ve vsázce, bude mít tedy zřejmě vzdálenost induktoru od vsázky. Ta je v tomto případě konstantní, a tak ani množství segmentů ( a s tím související množství mědi a vody) příliš tyto ztráty neovlivní.

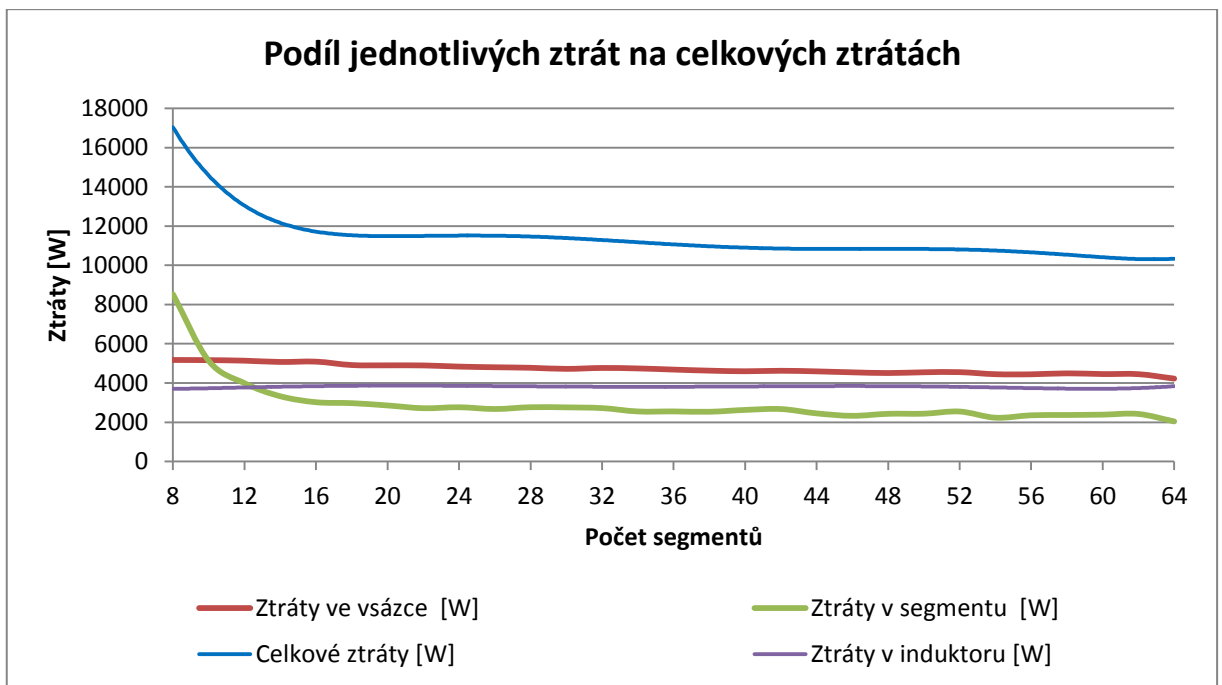
Účinnost přenosu energie do vsázky se poté pohybuje v okolí 30% pro malý počet segmentů a s rostoucím počtem se od cca 14 segmentů ustalují na hodnotě, která lehce kolísá okolo 42%.



Graf 6: Účinnost přenosu energie do vsázky

## 6.4 Ztráty celkové

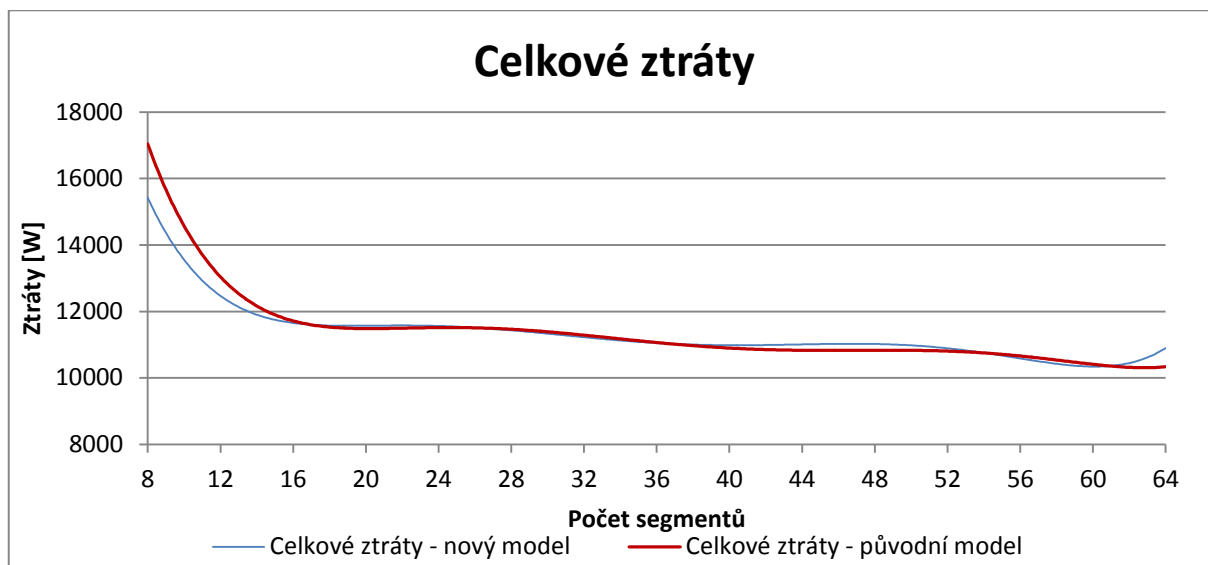
V předcházejících kapitolách jsme se věnovali jednotlivým oblastem, kde ztráty vznikají a jejich průběhům. Důležité je i zjistit procentuelní zastoupení jednotlivých oblastí na celkových ztrátách. Z následujícího grafu je zřetelně vidět, že ztráty ve vsázce a ztráty v induktoru jsou téměř konstantní. Jediná oblast, kde dochází ke změně velikosti ztrát v závislosti na počtu segmentů, je tedy oblast právě segmentu. Tato změna je zřejmě zapříčiněna poloměrem segmentu, a s tím souvisejícím objemem segmentu, a vzdáleností mezi segmentem a induktorem, která se mění. Z teorie elektromagnetického pole víme, že větší vliv má vzdálenost mezi jednotlivými částmi.



Graf 7: Podíl složek ztrát na celkových ztrátách

## 6.5 Porovnání výsledků z druhého modelu

Pro ověření průběhů a závislostí ztrát na počtu segmentů jsem vytvořil nový matematický model. Nastavení materiálů a vstupních dat (jako je napájecí proud a frekvence, okrajové podmínky, apod.) jsem nechal shodné s původním modelem. Byla však pozměněna geometrie modelu, a to tak, že jsem změnil vzdálenost mezi vsázkou a induktorem. Předpoklad, že průběhy a závislosti budou shodné, se naplnil. (Vypočítané hodnoty jsou součástí této diplomové práce jako Příloha 2)



Graf 8: Ověření průběhů ztrát pomocí nového modelu

## 7 Závěr

Při řešení této práce bylo postupováno metodicky a práce byla rozdělena na dva velké celky – teoretickou a praktickou část.

V první, teoretické části, byla za pomoci mnoha informačních zdrojů vytvořena teoretická řešená, která nastiňuje problematiku šíření tepla, elektromagnetického vlnění a teorie indukčního ohřevu. Dále obsahuje i popis studeného kelímku, včetně jeho konstrukce a použití.

Ve druhé části byl proveden souhrn základních znalostí a princip vytvoření matematického modelu jak obecně, tak poté i konkrétně pro model studeného kelímku při tavení titanu. V tomto případě bylo použito modelování metodou konečných prvků v programu ANSYS. Při vytváření modelu bylo použito mnoho zjednodušujících předpokladů, bez kterých by bylo řešení velmi obtížné (využití symetrie modelu, změna velikostí elementů v rámci modelu, apod. ).

Výstupy získané z modelu nám ukazují jak rozložení elektromagnetických veličin v modelu, tak nám i zobrazují rozdělení ztrát do jednotlivých částí zařízení. Výsledky nám tedy ukazují závislost ztrát na počtu segmentů. Dle těchto výsledků můžeme uvažovat, že kromě oblasti 8-14 segmentů jsou ztráty v nejdůležitější části pro tavení – vsázce – téměř konstantní, a proto při návrhu studeného kelímku je třeba zohlednit zejména konstrukční možnosti. Z hlediska konstrukce je totiž nemožné vyrobit studený kelímek s větším počtem segmentů než 36 pro zvolený poloměr

vsázky ( tenké stěny, malý průřez chladicího kanálku). Z tohoto pohledu je tedy ideální použít studený kelímek s kulatými segmenty v počtu 16 až 32 segmentů. Přesný počet už však záleží čistě na vstupních parameterech, jako je tavený materiál, velikost vsázky, atd. S tím poté souvisí i návrh chlazení, induktoru, apod. Návrh studeného kelímku je tedy velmi komplexní záležitostí, která sdružuje mnoho oborů. Využití numerických modelů nám umožňuje návrh takovýchto zařízení pro konkrétní aplikace bez nutnosti postavení zkušebních zařízení, což zejména ve fázi návrhu nových zařízení vede ke značným úsporám.

V současné době se výzkumu této technologie zabývá mnoho univerzit, které spolupracují i s oblastí průmyslu na vývoji vysoce čistého křemíku pro použití ve fotovoltaice nebo pro přípravu superčistých slitin nebo oxidů kovů (např. zirkon). Dalším možným využitím je vitifikace jaderného odpadu. V nejbližší době by mezi tyto významné univerzity měla patřit i Západočeská univerzita v Plzni ve spolupráci s ÚJV Řež , která v rámci projektu SUSEN 2020 pracuje na stavbě experimentálního studeného kelímku.

## 8 Seznam použité literatury a zdrojů

- [1] LANGER, Emil. Elektrotepelná technika. část I, II, Společné základy, elektrické pece odporové. 2. vyd. Plzeň: VŠSE, 1974. 140 s.
- [2] Energie – Wikipedie. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: [cs.wikipedia.org/wiki/Energie](http://cs.wikipedia.org/wiki/Energie)
- [3] RADA, Josef. Elektrotepelná technika. 1. vyd. Praha: SNTL, 1985. 344 s.
- [4] Akademon. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: <http://www.akademon.cz/clanekDetail.asp?name=Zaporny%20index%20lomu&source=0405>
- [5] Sálání tepla - radiace. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: [http://people.fsv.cvut.cz/www/wald/Pozarni\\_odolnost/e-text/specialiste/1/1-4\\_Salani\\_tepla.pdf](http://people.fsv.cvut.cz/www/wald/Pozarni_odolnost/e-text/specialiste/1/1-4_Salani_tepla.pdf)
- [6] Termomechanika - přenos tepla záření [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: [http://ottp.fme.vutbr.cz/~pavelek/termo/19\\_Zareni.pdf](http://ottp.fme.vutbr.cz/~pavelek/termo/19_Zareni.pdf)
- [7] Planckův vyzařovací zákon. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: <http://ottp.fme.vutbr.cz/~pavelek/optika/0202.htm>
- [8] Wienův posunovací zákon. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: <http://ottp.fme.vutbr.cz/~pavelek/optika/0203.htm>
- [9] Přenos tepla. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/texttz.pdf>
- [10] DOLEJŠ, R. Možnosti spuštění procesu tavby ve studeném kelímku. Plzeň, 2011. Diplomová práce (Ing.). Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická. Vedoucí práce David Rot.
- [11] Elektrické teplo. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: [http://fei1.vsb.cz/kat420/vyuka/Bakalarske\\_FMMI/Prednasky/TEPLO\\_bc\\_08.pdf](http://fei1.vsb.cz/kat420/vyuka/Bakalarske_FMMI/Prednasky/TEPLO_bc_08.pdf)
- [12] Jevy ovlivňující útlum symetrických kabelových vedení. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: <http://access.feld.cvut.cz/view.php?cislocianku=2004120201>
- [13] HRADÍLEK, Z.: Přednášky z předmětu - Elektrotepelná technika

- [14] MÜHLBAUER, A. History of induction heating and melting. Essen: Vulkan, c2008, x, 202 p. ISBN 38-027-2946-3
- [15] SIEMENS UND HALSKE: Verfahren zum Schmelzen schwerschmelzbarer Metalle, insbesondere von Tantal, Wolfram, Thorium oder Legierungen dieser Metalle in einem wassergekühlten Behälter, German Pat.518.499, 1931
- [16] SCHIPPEREIT, G. H., LETHERMANN, A. F., Evers, D.: Cold-crucible induction melting of reactive metals, Journal of Metals, r.v.1961, s.140-143
- [17] SCHIPPEREIT, G. H. Induction furnace [patent]. USA. Uděleno 14. 12. 1965. Dostupné z: <https://www.google.com/patents/US3223519>
- [18] STICKLE, Donald R., Shelby W. SCOTT a Donald J. CHRONISTER. THE DURIRON COMPANY, Inc. Method for induction melting reactive metals and alloys [patent]. USA. Uděleno 3. 8. 1988. Dostupné z: <http://www.google.com.ar/patents/EP0276544A1?cl=en>
- [19] TIR, L. L., GUBCHENKO, A. P., PROSTYAKOV, A. A., BRUTSKUS, Y. K.: Increasing the technical and economic indexes of induction furnaces with a cold crucible, Sov. Electr. Engineering 55, 37 (1984)
- [20] DELAGE, D., ERNST, R., DRIOLE, J.: Induction melting in a cold crucible, Proc. Symp. IUTAM, Cambridge, 108, (1982)
- [21] GAGNOUD, A., ETAY, GARNIER, J. M.: Trans. ISIJ, 28, 36 (1988)
- [22] CHOUDHURY, A., BLUM, M. H., SCHOLZ, H., BUSSE, P.: Economical Production of Titanium- Alu-minide Valves using Cold Crucible Induction Melting and Centrifugal Casting in a Permanent Mould, Proc. Int. Symp. Liquid Metal Processing and Casting, Santa Fe, 226, (1997)
- [23] CHOUDHURY, A., BLUM, M., SCHOLZ, H., JARCZYK G., BUSSE, P.: Quality assessment of centrifugally cast Titanium- Aluminide automotive valves in a permanent mould, Proc. Int. Symp. Liquid Metal Processing and Casting, Santa Fe, 244 (1999)
- [24] CHOUDHURY, A., BLUM, M., SCHOLZ, H., JARCZYK, G., BUSSE, P., FROMMEYER G., and KNIPPSCHER, S.: Properties of low-cost TiAl automotive valves produced by cold wall induction melting and permanent

- mold centrifugal casting, Proc. Int. Symp. Gamma Titanium Aluminides, The Minerals, Metals & Materials Soc. (TMS), San Diego, 35 (1999)
- [25] BLUM, M., FELLMANN, H. G., FRANZ, H., JARCZYK, G., RUPPEL, T., BUSSE, P., SEGTRUP, K., LAUDEN-BERG, H.-J.: Commissioning of a Prototype Plant for the Economical Mass Production of TiAl-Valves. In: Proc. III. Int. Symposium on structural intermetallics, Jackson Hole, TMS 2001, (2001)
- [26] Laboratoř studených kelímků. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: <http://susen2020.cz/vyzkum/vyhled-2015-infrastruktura-projektu-susen/laborator-studenych-kelimku/>
- [27] NACKE, Bernard. Recent research and developments in induction heating at the Institute of Electrotechnology of Leibniz University Hannover. In: 2008 Third International Forum on Strategic Technologies [online]. 2008 [cit. 2015-02-25]. DOI: 10.1109/ifost.2008.4602967.
- [28] POZNIAK, I. *Workshopy pořádané katedrou KEE na ZČU v Plzni. Plzeň : ZČU, 2014-2015*
- [29] Technologie speciálních slitin. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: [http://katedry.fmmi.vsb.cz/Modin\\_Animace/Opory/03\\_Materialové\\_inzenyrstvi/07\\_Technologie\\_specialnich\\_slitin/Losertova\\_Technologie\\_specialnich\\_slitin.pdf](http://katedry.fmmi.vsb.cz/Modin_Animace/Opory/03_Materialové_inzenyrstvi/07_Technologie_specialnich_slitin/Losertova_Technologie_specialnich_slitin.pdf)
- [30] Induction Skull Melting Offers Ti Investment Casting Benefits. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: <http://www.industrialheating.com/articles/83906>
- [31] HAUPTMANN, Thomas a Hans BILLHOFER. Titan - Werkstoffe für den Automotive-Bereich und ihre Verarbeitung. [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z: [http://www.linn-high-herm.de/images/stories/supercast\\_titan\\_titan\\_-\\_werkstoffe\\_fr\\_den\\_automotive-bereich\\_und\\_ihre\\_verarbeitung.pdf](http://www.linn-high-herm.de/images/stories/supercast_titan_titan_-_werkstoffe_fr_den_automotive-bereich_und_ihre_verarbeitung.pdf)
- [32] KINDL, V. *Učební text k předmětu KEV/MPS*
- [33] ANSYS Modeling and Meshing Guide. ANSYS Release 10.0.002184.
- [34] Metoda konečných prvků v elektrotechnické praxi. [online]. [cit. 2015-04-21]. Dostupné z: [http://homen.vsb.cz/~kac37/\\_num\\_met\\_Kacor/#lit2](http://homen.vsb.cz/~kac37/_num_met_Kacor/#lit2)

- [35] Temperature Dependent Elastic & Thermal properties Database. *[online]. [cit. 2015-04-21].* Dostupné z: <https://www.jahm.com/>



## 9 Přílohy

### 9.1 Příloha 1 – Model studeného kelímku v jazyce APDL bez grafického vykreslení výsledků

```

finish
/CLEAR,NOSTART ! Vymaže rezpracovanou úlohu a
/PLOPTS,DATE,0 ! Na obrazovce se nebude zobrazovat datum a čas
/filename,30segmentu,0 ! nazev souboru
/units,si ! nastaveni jednotek SI
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
*set,pi,3.141592654 ! nastaveni pi
*set,fr,10000 ! nastaveni frekvence
*set,ur,1 ! nastaveni relativni permeability
*set,u0,4*pi*1e-7 ! nastaveni permeability vakua
*set,pr,5000*0.5*sqrt(2) ! nastaveni proudu (polovina - symetricky podle osy)
*set,rm,1/57e6 ! nastaveni rezistivity induktoru(segmentu)
*set,rmv,1.6411e-6 ! nastaveni rezistivity vsazky (tekutý titan pro 1953K)
*set,hvi,sqrt(2/(2*pi*fr*(1/rm)*ur*u0)) ! nastaveni hloubky vniku pro induktor
*set,hvv,sqrt(2/(2*pi*fr*(1/rmv)*ur*u0)) ! nastaveni hloubky vniku pro vsazku
*set,ge,0.01 ! nastaveni globalni velikost elementu
*set,gev,hvv/3 ! nastaveni globalni velikost elementu-vsazka
*set,gei,hvi/3 ! nastaveni globalni velikost elementu-segment
*set,prv,2*pi ! nasobek hloubky vniku pro stanoveni proudove vrstvy
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
*set,rk,0.075 !polomer kelimku - ZADA SE
*set,ps,30 !pocet segmentu - ZADA SE
*set,vmms,0.001 !velikost mezery mezi segmenty - ZADA SE
*set,vzis,0.15 !vzdálenost induktor-segment - ZADA SE
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
*set,tli,3*hvi !tlouška induktoru - vypocita se
*set,tls,3*hvi !tlouška segmentu - vypocita se
*set,vvs,3*rk !vyska vsazky - vypocita se
*set,vs,3*vvs !vyska segmentu - vypocita se
*set,vind,vvs !vyska induktoru - vypocita se
*set,dok,rk*2*pi !delka obvodu kelimku(vsazky) - vypocita se
*set,uhel,180/ps !vypocet uhlu
*set,prevod,uhel*(pi/180) !prevod na radiany
*set,sin,sin(prevod) !sinus
*set,s,(0.076*2*sin-0.0005)/(2*(1-sin)) !strana n-uhelnika
*set,rs,s !polomer segmentu vnejsi
*set,rv,rs-tls !polomer segmentu vnitri - vypocita se
*set,umss,360/ps !uhel mezi stredy segmentu - vypocita se

```

```

!titulek
/title, l = %pr/sqrt(2)%, fr = %fr%, hvv = %hvV%, hvsg = %hvi%, ps=%ps%
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!INVERTUJE BARVY CERNA-BILA !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,80,80,80,13
/RGB,INDEX,60,60,60,14
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/REPLOT
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!*****
!*****VYTVORENI GEOMETRIE*****
/PREP7
/units,si
!segmenty
CYLIND,rv,rs,0,vvs/2,0,180,          ! segmenty-spodni cast-prava
CYLIND,rv,rs,0,vvs/2,180,360,        ! segmenty-spodni cast-leva
CYLIND,rv,rs,vvs/2,vs/2,0,180,       ! segmenty - horni cast-prava
CYLIND,rv,rs,vvs/2,vs/2,180,360,     ! segmenty - horni cast-leva
VGEN, ,all, , ,rk+rs+0.001,0,0, , ,1 ! posunuti segmentu na pozici
!vsazka
CYLIND,rk-prv*hvv,rk,0,vvs/2,-umss/2,umss/2, ! vsazka-vnejsi pro jemnejsi sit
CYLIND,0,rk-prv*hvv,0,vvs/2,-umss/2,umss/2, ! vsazka
!induktor
CYLIND,rk+vzis,rk+vzis+tli,0,vind/2,-umss/2,umss/2, ! induktor
!*****
!pro vykresleni jen obrazku modelu
!CSYS,1 ! cylindricky koordinacni system
!VGEN,ps*3/4,ALL, , ,0,360/ps,0, ,
!CSYS,0 ! kartecky koordinacni system
!*****
!okoli
CYLIND,0,2,0,2,-umss/2,umss/2          !okoli
allsel,all          ! vybere vse
vovlap,all          ! spojí oblasti
ALLSEL,ALL          ! vybere vse
numcmp,all          ! přečíslování oblastí od začátku
/VIEW,1,,-1          ! Nastavení zobrazení
/ANG,1,30,YS,1      ! Pootoení modelem
/REP,FAST           ! Poekreslení zobrazení
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!PRIRAZENI MATERIALU A ELEMENT TYPU!!!!!!
et,1,97,1,          ! segment spodni,induktor
et,2,97,1,          ! vsazka
et,3,97,,           ! okoli
mp,murx,1,1         ! segment,induktor - měď
mp,rsvx,1,rm        ! segment,induktor - měď

```

```

mp,murx,2,1          ! vsazka - (Ti)
mp,rsvx,2,rmv       ! vsazka - (Ti)
mp,murx,3,1          ! okoli - vzduch
vsel,s,volume,,1    ! vybere objekt volume 1 - segment spodni leva
vatt,1,,1           ! priradi objektu zvolené materiálové parametry a element typ
vsel,s,volume,,2    ! vybere objekt volume 2 - vsazka - slupka
vatt,2,,2           ! priradi objektu zvolené materiálové parametry a element typ
vsel,s,volume,,3    ! vybere objekt volume 3 - induktor
vatt,1,,1           ! priradi objektu zvolené materiálové parametry a element typ
vsel,s,volume,,4    ! vybere objekt volume 4 - vsazka vnitri
vatt,2,,2           ! priradi objektu zvolené materiálové parametry a element typ
vsel,s,volume,,5    ! vybere objekt volume 5 - segment horni leva
vatt,1,,1           ! priradi objektu zvolené materiálové parametry a element typ
vsel,s,volume,,6    ! vybere objekt volume 6 - segment spodni prava
vatt,1,,1           ! priradi objektu zvolené materiálové parametry a element typ
vsel,s,volume,,7    ! vybere objekt volume 7 - segment horni prava
vatt,1,,1           ! priradi objektu zvolené materiálové parametry a element typ
vsel,s,volume,,8    ! vybere objekt volume 8 - okoli
vatt,3,,3           ! priradi objektu zvolené materiálové parametry a element typ
allsel,all
/PNUM,MAT,1         ! barevne odliši pouzite materialy
/REPLOT
allsel,all
!ulozeni obrazku
VSEL,U,MAT,3        ! odebere z vıběru oblasti s material. cislem 3
ALLSEL,BELOW,VOLU
VPLOT
/REPLOT
SAVE,30segmentu,db
/VIEW,1,1,2,3
/ANG,1
/REP,FAST
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
!*****
!*****NASTAVENI PARAMETRU MESHE*****
!natoceni pohledu
/VIEW, 1, -0.173632505784E-04, -0.732404866828E-01, 0.997314308936
/ANG, 1, 0.597256573575E-01
/REP,FAST
!*****
!segment spodni leva
*set,nev,0.05*vvs/gei          !pocet elementu na vysku
LSEL,S,,7
LSEL,A,,2                      !nastaveni velikosti elementu na vnitri oblouk
LESIZE,ALL,,0.5*nev,,,,,1
LSEL,S,,5

```

```

LSEL,A,,4                                !nastaveni velikosti elementu na vnejsi oblouk
LESIZE,ALL,,0.5*nev,,,,,1
LSEL,S,,9                                !nastaveni poctu elementu na vysku
LESIZE,ALL,,nev,,,,,1
LSEL,S,,1                                !nastaveni poctu elementu na tloustku segmentu
LSEL,A,,3
LSEL,A,,6
LSEL,A,,8
LESIZE,ALL,,9,,,,,1
VSEL,S,,1
Vsweep,all
!*****
!segment spodni prava
*set,nev,0.05*vvs/gei                    !pocet elementu na vysku
LSEL,S,,57                               !nastaveni velikosti elementu na vnitri oblouk
LESIZE,ALL,,0.5*nev,,,,,1
LSEL,S,,56                               !nastaveni velikosti elementu na vnejsi oblouk
LESIZE,ALL,,0.5*nev,,,,,1
LSEL,S,,10                              !nastaveni poctu elementu na vysku
LESIZE,ALL,,nev,,,,,1
LSEL,S,,1                                !nastaveni poctu elementu na tloustku segmentu
LSEL,A,,3
LESIZE,ALL,,9,,,,,1
VSEL,S,,6
Vsweep,all
!*****
!segment horni leva
*set,nev,0.1*vvs/gei
LSEL,S,,7                                !nastaveni velikosti elementu na vnitri oblouk
LESIZE,ALL,,0.5*nev,,,,,1
LSEL,S,,5                                !nastaveni velikosti elementu na vnejsi oblouk
LESIZE,ALL,,0.5*nev,,,,,1
LSEL,S,,52,55
! nastaveni velikosti elementu ! nastaveni adaptivni meshe
*set,delkah,hvi*prv                      ! nastavit delku hrany
*set,pom,0
*set,pomm,0
*do,i,0,10000
pom=(hvi/9)*1.2**i                       ! vypocet velikosti elementu na kazdem kroku
pomm=pomm+pom                            ! soucet rady od pocatku ukoncen ve chvili,kdy seoucet presahne delku hrany
*IF,pomm,GT,delkah,THEN
*EXIT
*ENDIF
*enddo
LESIZE,ALL,,i+1,NINT(pom/(hvi/9)),1,,0,
LSEL,S,,6                                !nastaveni poctu elementu na tloustku segmentu napojeni

```

```

LSEL,A,,,8
LESIZE,ALL,,,9,,,,,1
VSEL,S,,,5
Vsweep,all
!*****
!segment horni prava
*set,nev,0.1*vvs/gev
LSEL,S,,,59                !nastaveni velikosti elementu na vnitřni oblouk
LESIZE,ALL,,,0.5*nev,,,,,1
LSEL,S,,,58                !nastaveni velikosti elementu na vnější oblouk
LESIZE,ALL,,,0.5*nev,,,,,1
LSEL,S,,,52,55
! nastaveni velikosti elementu ! nastaveni adaptivni meshe
*set,delkah,hvi*prv        ! nastavit delku hrany
*set,pom,0
*set,pomm,0
*do,i,0,10000
pom=(hvi/9)*1.2**i        ! vypocet velikosti elementu na kazdem kroku
pomm=pomm+pom            ! soucet rady od pocatku ukoncen ve chvili, kdy seoucet presahne delku hrany
*IF,pomm,GT,delkah,THEN
*EXIT
*ENDIF
*enddo
LESIZE,ALL, , ,i+1,NINT(pom/(hvi/9)),1, , ,0,
LSEL,S,,,6                !nastaveni poctu elementu na tloustku segmentu napojeni
LSEL,A,,,8
LESIZE,ALL,,,9,,,,,1
VSEL,S,,,7
Vsweep,all
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
!*****
!vsazka-slupka
*set,nevs,0.2*vvs/gev
LSEL,S,,,25
LESIZE,ALL,,,2*nevs,,,,,1
LSEL,S,,,17
LSEL,A,,,19
LSEL,A,,,22
LSEL,A,,,24
! nastaveni velikosti elementu ! nastaveni adaptivni meshe
*set,delkah,hvv*prv        ! nastavit delku hrany
*set,pom,0
*set,pomm,0
*do,i,0,10000
pom=(hvv/6)*1.1**i        ! vypocet velikosti elementu na kazdem kroku
pomm=pomm+pom            ! soucet rady od pocatku ukoncen ve chvili, kdy seoucet presahne delku hrany

```

```

*IF,pomm,GT,delkah,THEN
*EXIT
*ENDIF
*enddo
LESIZE,ALL,, ,i+1,NINT(pom/(hvv/6)),1,, ,0,
LSEL,S,,,21
LSEL,A,,,23
! nastaveni velikosti elementu ! nastaveni adaptivni meshe
*set,delkah,hvv*prv          ! nastavit delku hrany
*set,pom,0
*set,pomm,0
*do,i,0,10000
pom=(hvv/6)*1.1**i          ! vypocet velikosti elementu na kazdem kroku
pomm=pomm+pom               ! soucet rady od pocatku ukoncen ve chvili,kdy soucet presahne delku hrany
*IF,pomm,GT,delkah,THEN
*EXIT
*ENDIF
*enddo
LESIZE,ALL,, ,i+1,-NINT(pom/(hvv/6)),1,, ,0,
VSEL,S,,,2
VSWEEP,ALL
!*****
!vsazka
LSEL,S,,,48,51
LESIZE,ALL,,,5,,,,,1
LSEL,S,,,29
LESIZE,ALL,,,5,,,,,1
VSEL,S,,,4
VSWEEP,ALL
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
!*****
!induktor
*set,nei,gei*8
LSEL,S,,,30
LSEL,A,,,32
LSEL,A,,,35
LSEL,A,,,37
LESIZE,ALL,,,6,,,,,1
LSEL,S,,,31
LSEL,A,,,33
LESIZE,ALL,,,nei,,,,,1
LSEL,S,,,38,41
LESIZE,ALL,,,0.06*vs/gei,,,,,1
VSEL,S,,,3
Vsweep,all
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES

```

```

/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
/VIEW,1,,,1
/ANG,1
/REP,FAST
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
/ZOOM,1,RECT,0.0541223,0.469231,1.0389838832,0.161538454203
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
/VIEW,1,,-1
/ANG,1
/AUTO,1
/REP,FAST
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
/ZOOM,1,RECT,-0.242106,-0.230769,0.900487717308,-0.392307674492
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
!*****
!okoli
VSEL,S,MAT,,3          !mesh okoli
MSHKEY,0
MSHAPE,1,3d
VMESH,ALL
ALLSEL,ALL
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
VSEL,S,MAT,,1,2
ALLSEL,BELOW,VOLU
/AUTO,1
/REP,FAST
/UI,COPY,SAVE,PNG,GRAPH,COLOR,NORMAL,PORTRAIT,YES
allsel,all
SAVE,30segmentu,db
!*****
!!!!!!!!!!!!!!vlozeni proudu!!!!!!!!!!!!!!
CSYS,1
VSEL,S,MAT,,1
ALLSEL,BELOW,VOLU
ASEL,R,LOC,Y,umss/2    ! Výbir plochy do které bude vložen proud
CSYS,0
NSLA,S,1              ! Výbir všech uzlu ve zvolené oblasti
CP,1,VOLT,all        ! Sjednocení potenciálu všech zvolených uzlu pro výpočet skin efektu
*get,maxnode,node,,num,max    ! Výbir uzlu s nejvyšším číslem ve zvoleném výběru
F,maxnode,AMPS,pr,0    ! prirazení proudu uzlu s nejvyšším číslem

```

```

FINISH                                ! Uzavření preprocesoru
!*****
!!!!!!!!NASTAVENI ANALYZY A OKRAJOVYCH PODMINEK!!!!!!!!!!!!!!
/SOLU                                  ! Otevření solveru
ANTYPE,3                               ! Výber harmonické analýzy
HROPT,FULL                             ! metoda řešení
HROUT,ON                               ! printout format
!EQSLV,ICCG,1e-008,                   ! Výber solveru - způsob řešení rovnic + tolerance
HARFRQ,fr,fr,                          ! nastavení frekvence
CSYS,1
VSEL,S,MAT,,2
ALLSEL,BELOW,VOLU
ASEL,U,LOC,Y,umss/2-0.001,-umss/2+0.001
CSYS,0
DA,ALL,VOLT,0,0                        ! nastavení potenciálu na obe strany vsazky
CSYS,1
VSEL,S,MAT,,1
ALLSEL,BELOW,VOLU
ASEL,R,LOC,Y,-umss/2
CSYS,0
DA,ALL,VOLT,0,0                        ! nastavení potenciálu na opacnou stranu induktoru, nez e vkladan proud
ALLSEL,ALL
ASEL,S,LOC,X,2                          ! vyber vnejsiho okoli (slupka)
ASEL,A,LOC,Z,2
DA,all,AX,0,0,                          ! nastavení okrajových podmínek
DA,all,AY,0,0,                          ! nastavení okrajových podmínek
DA,all,AZ,0,0,                          ! nastavení okrajových podmínek
ALLSEL,ALL
LSEL,S,LOC,X,0                          ! vyber vnejsiho okoli (slupka)
DL,all,,AX,0,0,                          ! nastavení okrajových podmínek
DL,all,,AY,0,0,                          ! nastavení okrajových podmínek
DL,all,,AZ,0,0,
ALLSEL,ALL
CSYS,1
ASEL,U,LOC,Y,umss/2-0.001,-umss/2+0.001
CSYS,0
DA,all,ASYMM                           ! Nastavení podmínky antisymetrie
ASEL,S,LOC,Z,0
DA,all,SYMM                             ! Nastavení podmínky antisymetrie
ALLSEL,ALL                              ! Výbir všeho v modelu
SOLVE                                    ! Vyřešení úlohy

```



## 9.2 Příloha 2 – Vypočtené hodnoty matematického modelu

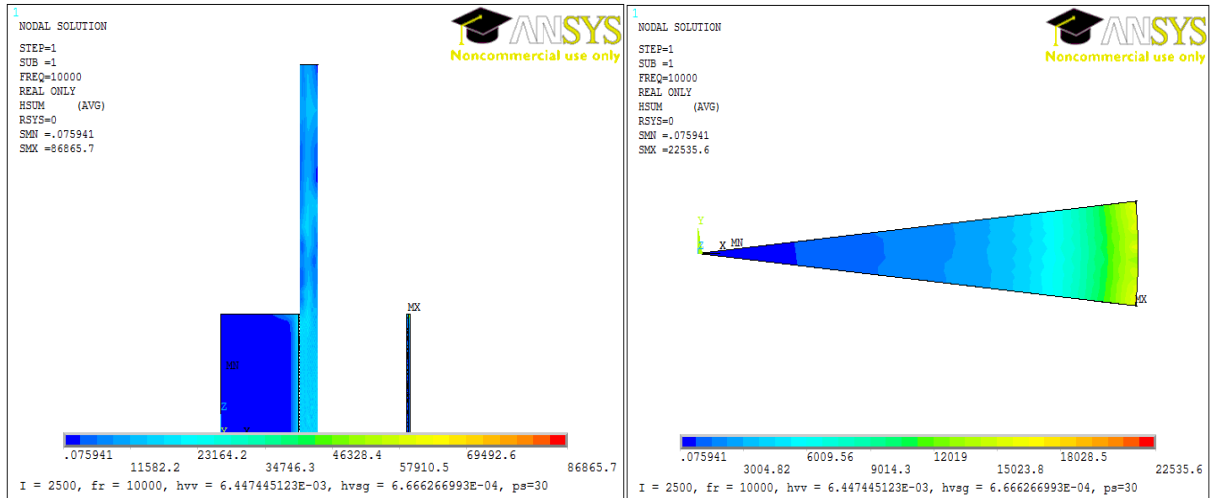
počet segmentů	Ztráty v 1 části				Ztráty v celém kelímku						
	induktor [W]	segment [W]	vsázka [W]	CELKEM [W]	induktor [W]	segment [W]	vsázka [W]	CELKEM [W]	induktor	segment	vsázka
8	230,00	532,62	323,32	1085,94	3680,04	8521,97	5173,05	17375,06	21,18%	49,05%	29,77%
10	187,38	256,44	258,26	702,08	3747,53	5128,83	5165,29	14041,65	26,69%	36,53%	36,79%
12	155,56	166,24	214,06	535,86	3733,50	3989,70	5137,40	12860,61	29,03%	31,02%	39,95%
14	142,23	118,76	181,15	442,13	3982,35	3325,22	5072,07	12379,64	32,17%	26,86%	40,97%
16	117,02	94,42	159,01	370,45	3744,76	3021,43	5088,34	11854,53	31,59%	25,49%	42,92%
18	104,51	82,57	136,52	323,60	3762,25	2972,67	4914,73	11649,65	32,29%	25,52%	42,19%
20	100,10	71,38	122,50	293,98	4003,96	2855,23	4900,03	11759,23	34,05%	24,28%	41,67%
22	82,38	61,71	111,28	255,38	3624,87	2715,37	4896,44	11236,68	32,26%	24,17%	43,58%
24	85,54	57,58	100,75	243,88	4106,11	2763,96	4835,98	11706,06	35,08%	23,61%	41,31%
26	71,83	51,43	92,36	215,61	3735,04	2674,10	4802,55	11211,70	33,31%	23,85%	42,84%
28	64,36	49,38	85,28	199,02	3604,42	2765,23	4775,53	11145,17	32,34%	24,81%	42,85%
30	69,57	45,97	78,67	194,20	4174,11	2757,98	4719,98	11652,07	35,82%	23,67%	40,51%
32	59,22	42,50	74,49	176,21	3790,03	2719,80	4767,33	11277,15	33,61%	24,12%	42,27%
34	55,89	37,50	69,74	163,13	3800,35	2549,92	4742,53	11092,80	34,26%	22,99%	42,75%
36	49,98	35,44	65,06	150,47	3598,58	2551,56	4684,06	10834,20	33,22%	23,55%	43,23%
38	53,83	33,35	60,92	148,09	4090,81	2534,24	4629,66	11254,72	36,35%	22,52%	41,14%
40	47,69	32,85	57,48	138,02	3814,98	2628,35	4598,02	11041,36	34,55%	23,80%	41,64%
42	45,91	31,81	55,04	132,77	3856,49	2672,40	4623,76	11152,65	34,58%	23,96%	41,46%
44	41,36	27,86	52,19	121,40	3639,49	2451,25	4592,43	10683,18	34,07%	22,95%	42,99%
46	38,50	25,29	49,39	113,18	3542,11	2327,13	4543,48	10412,72	34,02%	22,35%	43,63%
48	41,13	25,31	46,96	113,40	3948,71	2429,62	4508,31	10886,64	36,27%	22,32%	41,41%
50	40,69	24,37	45,46	110,52	4068,59	2436,67	4546,44	11051,71	36,81%	22,05%	41,14%
52	39,03	24,48	43,78	107,29	4058,81	2545,91	4553,04	11157,77	36,38%	22,82%	40,81%
54	34,32	20,66	41,18	96,16	3706,16	2231,63	4447,90	10385,69	35,69%	21,49%	42,83%
56	31,59	21,02	39,67	92,29	3538,28	2354,57	4443,36	10336,21	34,23%	22,78%	42,99%
58	31,23	20,43	38,73	90,39	3623,24	2369,92	4492,12	10485,28	34,56%	22,60%	42,84%
60	31,57	19,90	37,13	88,60	3788,61	2387,92	4455,82	10632,34	35,63%	22,46%	41,91%
62	30,49	19,53	35,89	85,91	3781,04	2421,53	4449,98	10652,55	35,49%	22,73%	41,77%
64	29,87	15,95	33,00	78,82	3823,82	2041,21	4224,37	10089,39	37,90%	20,23%	41,87%

Tabulka 6: Vypočítané hodnoty z programu pro původní model

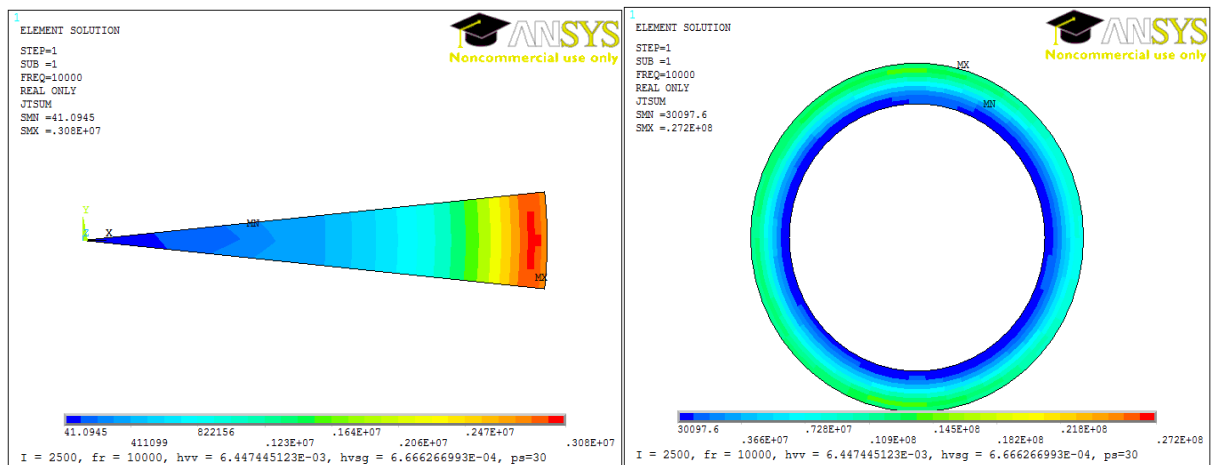
počet segmentů	Ztráty v 1 části				Ztráty v celém kelímku						
	induktor [W]	segment [W]	vsázka [W]	CELKEM [W]	induktor [W]	segment [W]	vsázka [W]	CELKEM [W]	induktor	segment	vsázka
8	326,629715	381,519219	262,09451	970,243444	5226,08	6104,31	4193,51	15523,90	33,66%	39,32%	27,01%
10	263,474852	197,64438	207,364514	668,483746	5269,50	3952,89	4147,29	13369,67	39,41%	29,57%	31,02%
12	215,743003	134,277326	168,183308	518,203637	5177,83	3222,66	4036,40	12436,89	41,63%	25,91%	32,46%
14	180,599777	100,778354	146,136871	427,515002	5056,79	2821,79	4091,83	11970,42	42,24%	23,57%	34,18%
16	156,437014	83,138447	124,148705	363,724166	5005,98	2660,43	3972,76	11639,17	43,01%	22,86%	34,13%
18	151,409413	70,344715	107,406458	329,160586	5450,74	2532,41	3866,63	11849,78	46,00%	21,37%	32,63%
20	128,745767	63,274983	96,352896	288,373646	5149,83	2531,00	3854,12	11534,95	44,65%	21,94%	33,41%
22	111,914072	57,616897	86,305212	255,836181	4924,22	2535,14	3797,43	11256,79	43,74%	22,52%	33,73%
24	113,292996	54,032635	78,193304	245,518935	5438,06	2593,57	3753,28	11784,91	46,14%	22,01%	31,85%
26	98,659624	48,744318	71,909451	219,313393	5130,30	2534,70	3739,29	11404,30	44,99%	22,23%	32,79%
28	88,81331	46,019484	66,614423	201,447217	4973,55	2577,09	3730,41	11281,04	44,09%	22,84%	33,07%
30	87,996201	41,961537	61,69242	191,650158	5279,77	2517,69	3701,55	11499,01	45,92%	21,89%	32,19%
32	74,485463	41,073591	57,412555	172,971609	4767,07	2628,71	3674,40	11070,18	43,06%	23,75%	33,19%
34	76,273027	38,664206	53,101467	168,0387	5186,57	2629,17	3610,90	11426,63	45,39%	23,01%	31,60%
36	65,727232	34,831095	50,239029	150,797356	4732,36	2507,84	3617,21	10857,41	43,59%	23,10%	33,32%
38	65,681439	32,619048	47,62813	145,928617	4991,79	2479,05	3619,74	11090,57	45,01%	22,35%	32,64%
40	63,630803	31,845683	44,617937	140,094423	5090,46	2547,65	3569,43	11207,55	45,42%	22,73%	31,85%
42	58,367059	28,987547	42,216545	129,571151	4902,83	2434,95	3546,19	10883,98	45,05%	22,37%	32,58%
44	55,07567	27,874331	40,067878	123,017879	4846,66	2452,94	3525,97	10825,57	44,77%	22,66%	32,57%
46	51,869021	26,955946	37,755131	116,580098	4771,95	2479,95	3473,47	10725,37	44,49%	23,12%	32,39%
48	52,027683	26,236794	37,081109	115,345586	4994,66	2518,73	3559,79	11073,18	45,11%	22,75%	32,15%
50	52,551015	26,695227	34,823407	114,069649	5255,10	2669,52	3482,34	11406,96	46,07%	23,40%	30,53%
52	48,656836	23,471832	33,347278	105,475946	5060,31	2441,07	3468,12	10969,50	46,13%	22,25%	31,62%
54	44,171179	22,307144	32,343215	98,821538	4770,49	2409,17	3493,07	10672,73	44,70%	22,57%	32,73%
56	40,88529	20,954216	30,700221	92,539727	4579,15	2346,87	3438,42	10364,45	44,18%	22,64%	33,18%
58	38,976667	20,842203	29,871627	89,690497	4521,29	2417,70	3465,11	10404,10	43,46%	23,24%	33,31%
60	40,575965	17,924611	27,766531	86,267107	4869,12	2150,95	3331,98	10352,05	47,04%	20,78%	32,19%
62	40,439185	17,741662	27,414217	85,595064	5014,46	2199,97	3399,36	10613,79	47,24%	20,73%	32,03%
64	39,156739	17,53481	27,82385	84,515399	5012,06	2244,46	3561,45	10817,97	46,33%	20,75%	32,92%

Tabulka 7: Vypočítané hodnoty pro nový model

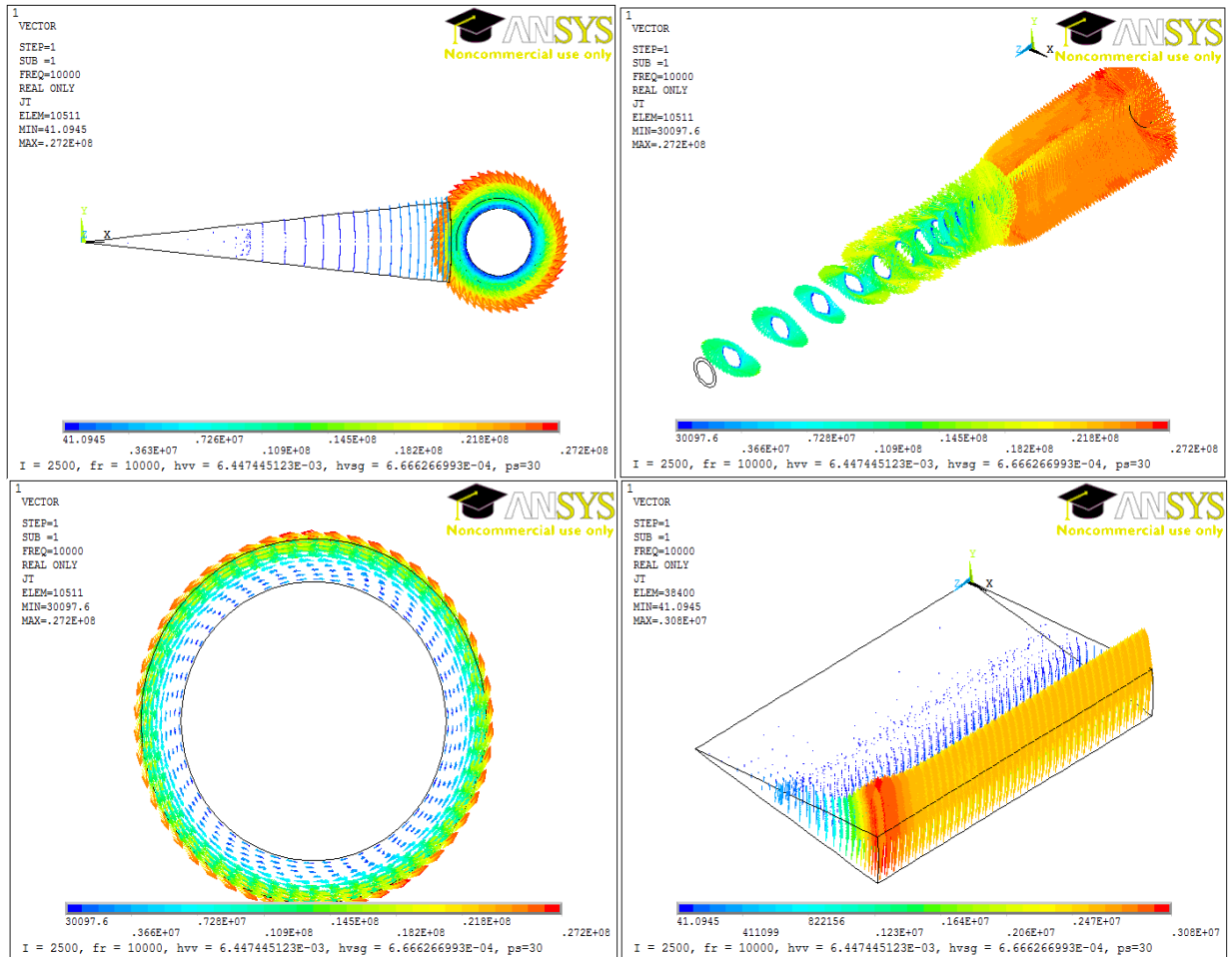
### 9.3 Příloha 3 - Grafický výstup modelu studeného kelímku



Obrázek 28: Rozložení intenzity magnetického pole



Obrázek 29: Rozložení proudové hustoty – znázornění v elementech



Obrázek 30: Rozložení proudové hustoty – vektorové znázornění