ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

LOGIKA VE VÝUCE MATEMATIKY NA ZŠ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michaela Trejbalová
Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň 2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Horní Bříze 14. dubna 2015

....

Michaela Trejbalová

Chtěla bych poděkovat vedoucí práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za trpělivost a pomoc při psaní této práce.

OBSAH

ÚVOD 2
1 SPRÁVNÝ A NESPRÁVNÝ ÚSUDEK, ODVOZOVACÍ PRAVIDLA 3
1.1 SLOŽENÉ VÝROKY 4
1.1.1 Konjunkce 4
1.1.2 Disjunkce 4
1.1.3 Ostrá disjunkce 5
1.1.4 Implikace 5
1.1.5 Ekvivalence 6
1.1.6 Negace výroku 6
1.2 ODVOZOVACÍ PRAVIDLA PŘIROZENÉ DEDUKCE 7
1.2.1 Pravidla obsahující konjunkci 7
1.2.2 Pravidla obsahující disjunkci 9
1.2.3 Pravidla obsahující dvojí negaci 10
1.2.4 Pravidla obsahující implikaci 11
1.2.5 Pravidla obsahující ekvivalenci 14
2 LOGICKÉ ÚLOHY JEJICH ROZBOR A ŘEŠENÍ 18
2.1 PŘÍKLAD 1 18
2.2 PŘÍKLAD 2 22
2.3 PŘÍKLAD 3 23
3 LOGIKA V MATEMATICE NA DRUHÉM STUPNI ZŠ 26
3.1 OHODNOCOVÁNÍ VÝROKŮ 26
3.2 PRÁCE SE SLOŽENÝM VÝROKEM 29
3.3 PŘIŘAZOVÁNÍ 30
3.4 USUZOVÁNÍ 33
3.5 HANOJSKÁ VĚŽ 35
ZÁVĚR 38
RESUMÉ 39
SEZNAM LITERATURY 40

Úvod

Jak už napovídá název bakalářské práce, budu se zde zabývat formální logikou a jejím zastoupení v učebnicích či příkladech matematiky na základních školách. Logika jako taková, s řešením příkladů pomocí tabulek pravdivostních hodnot, je předmětem matematiky na střední škole. Chtěla bych proto zkusit najít nějaké ukázky příkladů, které studenty základních škol povedou k rozvoji logického myšlení. Ačkoliv student nebude schopen pojmenovat složený výrok, jistě bude muset před řešením příkladu vydedukovat nějaký závěr či úsudek, podle kterého poté bude při řešení postupovat.

V první kapitole své práce bych chtěla zopakovat složené výroky, neboť od nich se logika odvíjí a je to základní stavební kámen pro další práci. Abych byla schopna popsat vyvození závěru příkladu, budu ještě potřebovat zavést několik odvozovacích pravidel. Díky těmto pravidlům pak budu moci rozebrat jednotlivé příklady a pochopit, jak vést studenty ke správnému logickému myšlení.

Ve druhé kapitole bych chtěla některé příklady podrobně rozebrat, a ukázat na nich způsob použití odvozovacích pravidel, které matematicky popisují jednotlivé kroky logického myšlení.

Třetí a poslední kapitolu bych pak chtěla věnovat konkrétním příkladům z učebnic pro druhý stupeň základních škol. Dle mého názoru je logické myšlení nebo také „selský rozum" pro studenty velmi důležitý a jeho rozvoj by se měl podporovat. Proto si myslím, že ačkoliv logika není do výuky zařazena, každý pedagog si jí tam může zahrnout sám. Je totiž mnoho možností, jak se na konkrétní věc zeptat, a díky dobře položeným dotazům můžeme studenty vést k dedukcím správných závěrů.

Toto téma jsem si vybrala, protože jako jedno z mála bylo spjato se školou. Jako budoucí pedagog jsem si slibovala, že takové téma mi pomůže přiblížit se školnímu prostředí a výuce jako takové. Doufám, že díky této práci budu schopná ve studentech probudit zvídavost.

1 SPRÁVNÝ A NESPRÁVNÝ ÚSUDEK, ODVOZOVACÍ PRAVIDLA

V této kapitole si vysvětlíme postupy, kterými lze zjistit, zda provedené úsudky jsou či nejsou správné. V běžném životě se při rozhodování o správnosti vlastního nebo cizího úsudku řídíme intuicí či podvědomě. Zde přiblížíme postupy, jimiž lze o správnosti úsudku rozhodnout jakýmsi „výpočtem“, při kterém se používají korektní zákony (pravidla). K tomu, aby bylo možno takový „výpočet“ provést, je nezbytné oznamovací věty běžného jazyka, o jejichž pravdivosti má smysl rozhodnout, převést do formulí („logických slov“). Nejprve proto připomeňme, jak formalizaci provést pomocí výrokových proměnných a logických spojek.

Například složený výrok:

Jestliže pojedu do práce autem a skončím brzy, pak po cestě domů vyzvednu tátu nebo nakoupím.

Tento složený výrok můžeme zapsat formulí $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) => (\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d})$, kde a, b, c, d jsou výrokové proměnné. Při volbě a „*Pojedu do práce autem.*“, b „*Skončím brzy.*“, c „*Po cestě domů vyzvednu tátu.*“ a d „*Nakoupím.*“, dostaneme původní výrok. Formalizace je tedy postup od konkrétního výroku k „logickému slovu“, kterému říkáme formule. Je to obrácený postup k dosazení za proměnnou, podobně jako je vytvoření výrazu $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}).\,\boldsymbol{2y}$ s proměnnými x, y z číselného výrazu „součet čísel 3 a 5 zvětšený desetkrát“.

Co je vlastně výrok?

- Výrok – je tvrzení, u kterého má smysl rozhodovat o jeho pravdivosti (přiřadíme mu hodnotu 1, je-li pravdivý) či nepravdivosti (v takovém případě mu přiřadíme hodnotu 0). Většinou má formu oznamovací věty.

Úsudek se skládá z premis (předpokladů) a závěru. Premisy i závěr jsou výroky. V této práci mimo jiné vysvětlíme, jak zjistit, zda je úsudek správný, tj. jestli závěr úsudku vyplývá z premis. Co je správný úsudek a co znamená, že závěr vyplývá z premis, bude vhodnější přiblížit na příkladě.

Premisa 1: Je-li číslo sudé, pak je dělitelné dvěma.
Premisa 2: Číslo 13 není dělitelné dvěma.
Bez jakékoliv znalosti výrokové logiky jsme schopni vyvodit závěr*: „Číslo 13 není sudé.“.* U mnoha příkladů nám k vyvozování závěrů stačí přirozená schopnost

logického uvažování nebo tzv. „selský rozum“ dle [HEJNÝ88]. Jelikož v této kapitole směřujeme k odvozovacím pravidlům, jejichž korektnost lze ukázat ohodnocením příslušné formule v tabulce pravdivostních hodnot, zařadíme nejprve kapitolu zabývající se složenými výroky. Z nich totiž odvozovací pravidla vychází.

1.1 SLOŽENÉ VÝROKY

V této kapitole připomeneme šest základních složených výroků, uvedeme příklady a pomocí tabulek pravdivostních hodnot zjistíme, kdy jsou složené výroky pravdivé a kdy nikoliv.

1.1.1 KONJUNKCE

Výrok *„Číslo 1 je menší než číslo 3 a zároveň číslo 3 je menší než číslo 10.“* vznikl spojením výroků *„Číslo 1 je menší než číslo 3.“, „Číslo 3 je menší než číslo 10.“* spojkou *„a zároveň“,* kterou ve formuli zapisujeme symbolem ∧. Složený výrok zformalizujeme formulí $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Jelikož jsou oba dílčí výroky pravdivé, je pravdivá i konjunkce.

Závislost konjunkce dvou výroků na pravdivosti dílčích výroků uvedeme v tzv. pravdivostní tabulce:

a	b	$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.1.2 DISJUNKCE

Ve výroku *„Do školy pojedu vlakem nebo autobusem.“* jsou spojkou *„nebo“* spojeny výroky: *„Do školy pojedu vlakem.“* a *„Do školy pojedu autobusem.“*. Tyto výroky označme a, b. Složený výrok zapíšeme formulí $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$. Disjunkce je pravdivá právě tehdy, když je pravdivý alespoň jeden z výroků. Pokud pojedu autobusem, je složený výrok pravdivý, pokud pojedu vlakem, je složený výrok také pravdivý. Z obsahu výroků je zřejmé, že nemůže nastat případ, kdy pojedu zároveň autobusem i vlakem, i když z hlediska logiky je v tomto případě složený výrok též pravdivý.

Opět uveďme tabulku pravdivostních hodnot:

a	b	$\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.1.3 OSTRÁ DISJUNKCE

Výrok *„Buď zde zůstane morče, nebo já.“* vznikl spojením dvou navzájem se vylučujících výroků *„Zůstane zde morče.“* a *„Nebo zde zůstanu já.“* Složený výrok je spojen spojkou *„Buď a, nebo b“* a zapisujeme ho formulí $\boldsymbol{a} \veebar \boldsymbol{b}$. Na rozdíl od neostré disjunkce je ostrá disjunkce pravdivá, pouze tehdy, pokud je pravdivý právě jeden z jejích dílčích výroků.

Pravdivostní tabulka:

a	b	$\boldsymbol{a} \veebar \boldsymbol{b}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.1.4 IMPLIKACE

V případě implikace je nutné určit jednoznačně její význam (vyhodnotit pravdivost v závislosti na vstupních premisách). Řeknu-li *„Jestliže bude zítra svítit slunce, pak pojedu na výlet.“* a druhý den svítí slunce, ale já na výlet nepojedu, pak jsem lhala. Pokud svítí slunce a já na výlet vyrazila, pak jsem říkala pravdu. A jestliže celý den prší, mohu dělat cokoliv a stále mluvím pravdu. O tom, co budu dělat, pokud nebude svítit slunce, jsem nic neřekla. Čerpáno z [SOCHOR01].

Implikaci dvou výroků a, b zapíšeme formulí $\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}$, kde výrok a je *„Bude svítit slunce.“* a výrok b je *„Pojedu na výlet.“* pro vyjádření implikace používáme spojku „jestliže a, pak b; pokud a, pak b; když a, tak b“. Tvrzení ve formě implikace je nepravdivé, pouze pokud z pravdivého výroku plyne výrok nepravdivý.

Ohodnocení pravdivosti $a => b$ v závislosti na pravdivostních hodnotách a, b.

a	b	$\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.1.5 EKVIVALENCE

Ve složeném výroku „Číslo je dělitelné 6 právě tehdy, když je dělitelné 2 a 3." jsou spojkou „právě tehdy, když" spojeny dva výroky „Číslo je dělitelné 6.", označíme ho a, výrok b „Číslo je dělitelné 2 a 3.". Složený výrok pak zapíšeme formulí $\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}$**.** Ekvivalence je pravdivá pouze tehdy, pokud mají oba výroky stejnou pravdivostní hodnotu.

Uveďme si tabulku pravdivostních hodnot:

a	b	$\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ekvivalence je tvořena konjunkcí dvou implikací, proto se dá formule $\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}$ rozepsat jako $(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{b} => \boldsymbol{a})$

a	b	$\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b} => \boldsymbol{a}$	$(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{b} => \boldsymbol{a})$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Z tabulky je patrné, že pravdivostní hodnoty ekvivalence a konjunkce dvou implikací jsou totožné.

1.1.6 NEGACE VÝROKU

Formulí „$\neg\boldsymbol{a}$" zapíšeme složený výrok „*Není pravda, že číslo 7 je liché číslo.*", který vznikl spojením spojky „*není pravda, že*" a výroku „*Číslo 7 je liché číslo.*". Složený výrok $\neg a$ má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok původní.

Výrok znegovaný touto spojkou však často upravujeme do mluvnicky jednoduššího tvaru např. „*Číslo 7 je sudé číslo.*" či „*Číslo 7 není liché číslo.*". Negace se používá v běžném životě i u složených výroků jako například „*Číslo 10 je sudé a není pravda, že je dělitelné 3.*", „*Jestliže 4 vydělím číslem 3, pak není pravda, že vyjde nulový zbytek.*".

1.2 ODVOZOVACÍ PRAVIDLA PŘIROZENÉ DEDUKCE

Uveďme příklad úsudku, v němž jsou dány dvě premisy, ale závěr chybí. Kamarádka mi prozradila: *„Petr je blonďatý a Michal brunet.“* a *„Nelíbí se mi blonďatý kluk.“*. Z těchto dvou výroků mi jasně plyne závěr: *„kamarádce se líbí Michal“*. Nalezení závěru bylo jednoduché, ale z hlediska logiky při něm bylo použito několik odvozovacích pravidel (pravidlo vypuštění obecného kvantifikátoru, pravidlo eliminace konjunkce, pravidlo modus ponens). S některými z nich se seznámíme v této části práce.

Zopakujme některé pojmy, které budeme často používat.

- <u>Úsudek</u> – se skládá z premis a závěru. Jak premisy, tak závěr jsou výroky. Podle toho zda závěr z těchto premis vyplývá, či ne, můžeme rozhodnout, jestli se jedná o úsudek správný, či nikoliv.
- <u>Správný úsudek</u> – Je úsudek, ve kterém za žádných okolností nemůže nastat takový případ, že premisy jsou pravdivé, ale závěr nikoliv. Tedy vždy, když jsou premisy pravdivé, je závěr také pravdivý.

V této kapitole se naučíme zjišťovat, zda je úsudek správný pomocí odvozovacích pravidel. K tomu budeme potřebovat nejprve zformalizovat premisy, tj. zapsat je formulí – to jsme se naučili v předchozí kapitole, a pak umět používat odvozovací pravidla.

- <u>Odvozovací pravidla</u> jsou povolená pravidla, která umožňují z daného výroku nebo více výroků odvodit jiný výrok, či původní výrok transformovat.

V následujícím textu je čerpáno z [HROMEK02] a nejvýznamnější pravidla si zde podrobněji rozebereme.

1.2.1 PRAVIDLA OBSAHUJÍCÍ KONJUNKCI

1. ***<u>Zavedení konjunkce</u>***

$$\frac{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}}$$

Toto pravidlo nám říká, že ze dvou pravdivých premis můžeme vyvodit pravdivou konjunkci. Takto vyvozená konjunkce bude správným závěrem vydedukovaným ze zadaných premis.

Pro lepší pochopení si uveďme příklad.

Premisa 1: Obraz útvaru ve středové souměrnosti má stejné rozměry jako jeho vzor.

Premisa 2: Obraz útvaru v osové souměrnosti má stejné rozměry jako jeho vzor.

Závěr: Obraz útvaru ve středové i osové souměrnosti má stejné rozměry jako jeho vzor.

2. ***<u>Eliminace konjunkce</u>***

$$\frac{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \qquad \frac{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}}$$

Pravidlo vychází z tabulky pravdivostních hodnot pro konjunkci. Zde je premisou pouze konjunkce, a pokud je naše premisa pravdivá, můžeme z toho vyvodit dva závěry takové, že je pravdivý výrok a (dle prvního schématu), resp. výrok b (dle druhého schématu).

Nyní si uveďme příklad. V tomto případě máme pouze jednu premisu ve tvaru konjunkce „*Číslo 1 je menší než číslo 3 a číslo 3 je menší než číslo 10.*“. Pro první schéma nám vyplývá závěr neboli výrok a „*Číslo 1 je menší než číslo 3.*“ pro druhé schéma výrok b „*Číslo 3 je menší než číslo 10.*“. Z pravdivé premisy plyne pravdivost každého z jejích členů, proto je pravdivý i výrok a (resp. výrok b).

3. ***<u>Konjunktivní sylogismus</u>***

$$\frac{\neg(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a}}{\neg \boldsymbol{b}} \qquad \frac{\neg(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}), \boldsymbol{b}}{\neg \boldsymbol{a}}$$

V tomto pravidle předpokládáme nepravdivost konjunkce. To znamená, že neplatí výroky a, b zároveň. Dále předpokládáme pravdivost výroku a, resp. v druhém schématu pravdivost výroku b. Pak lze vyvodit závěr, že je výrok b nepravdivý, resp. v druhém schématu vyplývá nepravdivost výroku a. Uveďme si příklad.

Premisa 1: Není pravda, že $3^2 = 9$ a zároveň $2^3 = 9$

Premisa 2: $3^2 = 9$

Z toho nám plyne závěr „není pravda, že $2^3 = 9$“.

Konjunktivní sylogismus je díky prvnímu de Morganovu zákonu v postatě stejným pravidlem jako pravidlo eliminace disjunkce, viz níže. První de Morganův zákon nám říká, že formule $\neg(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$ a $(\neg \boldsymbol{a} \vee \neg \boldsymbol{b})$ mají stejné pravdivostní hodnoty pro všechny hodnoty výrokových proměnných a, b.

Takže užijeme-li pravidlo eliminace disjunkce na disjunkci negací a premisu pozměněnou pomocí pravidla zavedení dvojité negace[1], pak dostaneme stejný závěr jako při použití konjunktivního sylogismu.

1.2.2 PRAVIDLA OBSAHUJÍCÍ DISJUNKCI

1. ***Zavedení disjunkce***

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}}$$

Jestliže je pravdivá premisa a, pak musí být pravdivý i závěr ve tvaru disjunkce bez ohledu na to, zda výrok b je, či není pravdivý. Z pravdivostní tabulky disjunkce vyplývá, že stačí, aby byl pravdivý alespoň jeden její člen, což nám zajišťuje výrok a.

Příklad:

Premisa 1: Jsem studentkou třetího ročníku bakalářského studia.

Premisa 2: Můj pes každý den vynáší odpadky.

Z těchto dvou premis mohu vyvodit závěr „Jsem studentkou třetího ročníku bakalářského studia nebo můj pes každý den vynáší odpadky.“. Jelikož víme, že je premisa 1 pravdivá, pak celý závěr je také pravdivý.

2. ***Eliminace disjunkce***

$$\frac{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}, \neg \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \qquad \frac{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}, \neg \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

U tohoto pravidla předpokládáme, že je pravdivá premisa, kterou je v našem případě disjunkce, a není pravdivý výrok a, resp. výrok b (v druhém schématu). Z toho plyne závěr, že musí být pravdivý výrok b, resp. výrok a (druhé schéma). Jinak by totiž disjunkce byla nepravdivá.

Příklad:

Premisa 1: Dnes budu psát bakalářskou práci nebo oslavím složení zkoušky.

Premisa 2 : Dnes bakalářskou práci psát nebudu. (negace a)

Závěr: Dnes oslavím složení zkoušky.

[1] Pravidlo podrobněji vysvětlíme v části 1.2.3. Zde pouze uveďme, že premisu a lze nahradit premisou $\neg(\neg a)$.

Pro pravdivost disjunkce stačí pravdivost jen jednoho tvrzení, a jelikož premisa 2 je negace výroku a, víme, že je nepravdivý. Z toho nám vyplývá, že musí být pravdivý výrok b. Pokud bychom postupovali dle druhého schématu, vycházeli bychom z pravdivé disjunkce a z pravdivé negace výroku b, odtud by plývala pravdivost výroku a.

3. ***Negace disjunkce***

$$\frac{\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})}{\neg \boldsymbol{a}} \quad \frac{\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})}{\neg \boldsymbol{b}}$$

Toto pravidlo předpokládá nepravdivost disjunkce, tedy že výroky a, b neplatí zároveň. Z jedné premisy můžeme vyvodit dva závěry a to takové, že je nepravdivý výrok a (první schéma), či je nepravdivý výrok b (druhé schéma). Zde ještě můžeme poukázat na druhý de Morganův zákon, který nám říká, že formule $\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$, $\neg \boldsymbol{a} \wedge \neg \boldsymbol{b}$ mají stejné pravdivostní hodnoty pro všechny hodnoty výrokových proměnných a, b. Nahradíme-li formuli $\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$ formulí $(\neg \boldsymbol{a} \wedge \neg \boldsymbol{b})$, lze podle pravidla eliminace konjunkce dojít ke stejným závěrům jako s použitím pravidla negace disjunkce.

Příklad:

Premisa: Není pravda, že pojedu vlakem nebo autobusem.

Premisa říká, že nepojedu ani vlakem ani autobusem Z toho můžeme vydedukovat dva závěry „Nepojedu vlakem.“ a „Nepojedu autobusem.“

1.2.3 PRAVIDLA OBSAHUJÍCÍ DVOJÍ NEGACI

1. ***Zavedení dvojí negace***

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\neg\neg \boldsymbol{a}}$$

Toto pravidlo vychází z jedné pravdivé premisy. A říká nám, že můžeme vyvodit závěr, který má díky použití dvou negací stejnou pravdivostní hodnotu jako původní výrok a. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot formule a a $\neg\neg a$ by bylo možné ověřit, že výrok a je ekvivalentní s výrokem $\neg\neg a$.

$\boldsymbol{a}$	$\neg \boldsymbol{a}$	$\neg\neg \boldsymbol{a}$
1	0	1
0	1	0

Opět si uveďme příklad.

Premisa: Dnes půjdu do práce.

Závěr: Není pravda, že dnes nepůjdu do práce.

2. ***Eliminace dvojí negace***

$$\frac{\neg\neg \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}$$

Toto pravidlo je obrácené k předchozímu. Tentokrát je premisa dvakrát znegovaný výrok a a závěrem je neznegovaný výrok a.

1.2.4 PRAVIDLA OBSAHUJÍCÍ IMPLIKACI

1. ***Modus ponens***

Nejprve si uveďme příklad. Mám dvě premisy: premisa a *„Jestliže mám pravděpodobnost a statistiku, pak jsem nešťastná.“* a premisa b *„Mám pravděpodobnost a statistiku.“* závěrem tedy je *„Jsem nešťastná.“*. K odvození závěru jsme postupovali dle schématu, kterému říkáme modus ponens nebo také pravidlo odloučení.

$$\frac{\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

Pravidlo odloučení spočívá v tom, že pokud máme pravdivé obě premisy, jednu ve tvaru implikace a druhou, která je totožná s antecedentem (předpokladem) implikace, pak je pravdivý i výrok obsažený v konsekventu (závěru) implikace, v našem případě výrok b. Pro lepší představu si tento příklad znázorníme v tabulce.

Výroky		Předpokládáme		Vyvodili jsme
a	b	$\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Avšak u tohoto pravidla je potřeba dát si pozor. Úsudková forma daná následujícím schématem, která se podobá předchozímu, je nekorektní. Podle ní provedený úsudek není správný.

$$\frac{\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \qquad (*)$$

Uveďme si příklad.

Máme premisu 1 *„Jestliže byla Alena za nemocným Pepou, pak má v sobě viry chřipky.“* a premisu 2 *„Alena má v sobě viry chřipky“*. Někdo může usoudit, že z toho plyne závěr, že *„Alena byla za nemocným Pepou“*. Tento závěr však z premis nevyplývá. Alena se nemusela nutně nakazit od nemocného Pepy, ale mohla se nakazit kdekoliv jinde.

Pro přehlednost opět uveďme tabulku pravdivostních hodnot.

Výroky		Předpokládáme		Vyvodili jsme
a	b	$\boldsymbol{a => b}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

V předposledním řádku jsou pravdivé obě premisy, ale závěr je nepravdivý. Z toho důvodu není schéma (*) odvozovacím pravidlem, neposkytuje správné úsudky. Závěry vyvozené podle tohoto schématu mohou, ale nemusejí být správné.

2. ***Modus tollens***

$$\frac{\boldsymbol{a => b, \neg b}}{\boldsymbol{\neg a}} \qquad \frac{\boldsymbol{\neg a => \neg b, b}}{\boldsymbol{a}}$$

U tohoto pravidla předpokládáme pravdivost implikace a nepravdivost jejího závěru. Potom musí být nepravdivý i předpoklad. Pokud by tomu bylo jinak, byla by nepravdivá celá implikace. V druhé variantě stejného pravidla předpokládáme pravdivost implikace negací dvou formulí a pravdivost té z nich, která je v závěru implikace. Podle schématu lze za korektní považovat závěr, v němž je formule vystupující v předpokladu implikace.

Příklad:

Premisa 1: Jestliže v pátek přiletěli mimozemšťané, pak mi od pátku dělají každé ráno snídani.

Premisa 2: Není pravda, že mi od pátku dělají mimozemšťané každé ráno snídani.

Pro přípravu snídaně byl podmiňující přílet mimozemšťanů. Snídaně nejsou, proto lze vyvodit, že mimozemšťané nepřiletěli.

Poznámka: Podobně jako je pravidlo modus ponens často zaměňováno s „pravidlem" (*), bývá pravidlo modus tollens nahrazováno nekorektním úsudkovým schématem.

$$\frac{\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}, \neg \boldsymbol{a}}{\neg \boldsymbol{b}}$$

Pokud by byl nepravdivý předpoklad v pravdivé implikaci, pak to ještě nutně neznamená nepravdivost závěru implikace, což lze opět ukázat tabulkou[2].

3. ***Hypotetický sylogismus***

$$\frac{\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} => \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a} => \boldsymbol{c}}$$

Toto pravidlo vychází z postupných implikací. Jestliže z výroku a vyplývá výrok b a jestliže z výroku b vyplývá výrok c, pak z výroku a musí vyplývat výrok c.

Příklad:

Premisa 1: Jestliže půjdu na přednášku, pak budu mít důležité poznámky.

Premisa 2: Jestliže budu mít důležité poznámky, pak se budu snáze učit na zkoušku.

Závěr: Jestliže půjdu na přednášku, pak se budu snáze učit na zkoušku.

Jsou-li pravdivé obě implikace, přičemž závěr první je totožný s předpokladem druhé, je pravdivá i implikace sestavená z předpokladu první implikace a závěru druhé implikace. Implikace je tedy tranzitivní.

4. ***Negace implikace***

$$\frac{\neg(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a} \wedge \neg \boldsymbol{b}}$$

Implikace může být nepravdivá, pouze tehdy, když z jejího pravdivého předpokladu vyplývá nepravdivý závěr. Právě takto je vyvozeno pravidlo negace implikace. Předpokládáme pravdivost negace implikace a dostáváme konjunkci s pravdivým výrokem a (předpoklad implikace) a nepravdivým výrokem b (závěr implikace).

Příklad:

Premisa: Není pravda, že jestliže je číslo 2015 přirozené, pak je záporné.

[2] Viz tabulka pravdivostních hodnot implikace v podkapitole 1.1.4.

Tato premisa je díky přidání negace pravdivá, ale závěr implikace je nepravdivý. Přirozená čísla jsou nezáporná. Konjunkce výroku a „Číslo je přirozené." a negace výroku b „Číslo není záporné." má pak stejnou pravdivostní hodnotu jako negace implikace. Pro přehlednost si ještě uveďme tabulku pravdivostních hodnot.

a	b	$\boldsymbol{a => b}$	$\neg (\boldsymbol{a => b})$	$\boldsymbol{a} \wedge (\neg \boldsymbol{b})$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

Zde už je jasně patrné, že jak negace implikace, tak konjunkce mají stejné pravdivostní hodnoty a zavedením tohoto odvozovacího pravidla můžeme negaci implikace nahradit takto sestavenou konjunkcí.

1.2.5 PRAVIDLA OBSAHUJÍCÍ EKVIVALENCI

1. ***Zavedení ekvivalence***

$$\frac{\boldsymbol{a => b}, \boldsymbol{b => a}}{\boldsymbol{a <=> b}}$$

Jestliže z výroku a vyplývá výrok b a zároveň z výroku b vyplývá výrok a, pak jsou výroky a i b ekvivalentní. Toto už jsme naznačovali v části 1.1.5 o ekvivalenci, kde jsme ukázali, že ekvivalenci lze rozložit na konjunkci dvou implikací. Z příslušné tabulky vyplývá, že lze konjunkcí dvou navzájem obrácených implikací získat ekvivalenci.

Příklad:

Premisa 1: Jestliže je číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma i třemi.

Premisa 2 : Jestliže je číslo dělitelné dvěma i třemi, pak je dělitelné šesti.

Závěr: Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi.

Jelikož jsou oba výroky pravdivé, mají stejnou pravdivostní hodnotu, a proto je pravdivá i z nich sestavená ekvivalence.

2. ***Eliminace ekvivalence***

$$\frac{\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}} \quad \frac{\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} => \boldsymbol{a}}$$

Toto pravidlo se zdá hodně podobné pravidlu zavedení ekvivalence, nicméně u tohoto pravidla potřebujeme pouze jednu premisu (ekvivalenci) a můžeme vyvodit dva různé závěry. Na rozdíl od pravidla zavedení ekvivalence, kde jsme potřebovali premisy dvě, a závěr nám vyplýval jeden.

Příklad:

Premisa: Číslo je dělitelné dvěma právě tehdy, když je sudé.

Z této premisy nám vyplývají dva závěry „Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné dvěma.“ a „Jestliže je číslo dělitelné dvěma, pak je sudé.“.

3. ***Negace ekvivalence***

$$\frac{\neg (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b})}{\neg \boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}} \quad \frac{\neg (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b})}{\neg \boldsymbol{b} <=> \boldsymbol{a}}$$

U tohoto pravidla předpokládáme pravdivost negace ekvivalence a můžeme vyvodit dva závěry. Buď je nepravdivý první člen ekvivalence a druhý člen je pravdivý, nebo je nepravdivý druhý člen ekvivalence a první člen je pravdivý.

Příklad:

Premisa: Není pravda, že číslo 10 je sudé právě tehdy, když je dělitelné třemi.

Označme si a výrok „Číslo 10 je sudé.“ a výrok b „Číslo 10 je dělitelné třemi.“. Díky pravidlu negace ekvivalence, můžeme z premisy vyvodit první závěr „Číslo 10 není sudé právě tehdy, když je dělitelné třemi.“ a druhý závěr „Číslo 10 je sudé právě tehdy když, není dělitelné třemi.“

Na závěr kapitoly si ukažme příklad odvozování. Můžeme mít příklady, kde závěr již známe (nebo alespoň tušíme) a pomocí odvozovacích pravidel tento závěr pouze potvrdíme, a tedy zjistíme, zda je úsudek správný. Častěji ovšem máme příklady, kdy o závěru nevíme nic a musíme ho přímo vyvodit ze zadání, které máme.

PŘÍKLAD 1:

Premisa 1: Číslo je dělitelné 6 právě tehdy, když je dělitelné 2 a 3.

Premisa 2: Číslo je dělitelné 2, ale není dělitelné 6.

V tomto příkladě tušíme, že pokud díky premise 2 číslo není dělitelné 6, tak je to proto, že číslo není dělitelné 3. K takovému závěru bychom pomocí odvozovacích pravidel měli dojít. V prvním kroku si musíme označit jednotlivé výroky. Označme tedy výrok *a* „*Číslo je dělitelné 6.*“, výrok *b* „*Číslo je dělitelné* 2.“ a výrok *c* „*Číslo je dělitelné 3.*“ Nyní si přepišme premisy do formálního schématu:

premisa 1: $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$

premisa 2: $\boldsymbol{b} \wedge (\neg \boldsymbol{a})$

1. $\boldsymbol{b} \wedge (\neg \boldsymbol{a}) \rightarrow \neg \boldsymbol{a}$, zde jsme použili pravidlo *eliminace konjunkce* na druhou premisu.
2. $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \rightarrow (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) => \boldsymbol{a}$, na první premisu jsme použili pravidlo *eliminace ekvivalence*.
3. $(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) => \boldsymbol{a}, \neg \boldsymbol{a} \rightarrow \neg(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$, na 1. a 2. řádek jsme použili pravidlo modus tollens.
4. $\boldsymbol{b} \wedge (\neg \boldsymbol{a}) \rightarrow \boldsymbol{b}$, v tomto krku jsme na druhou premisu použili pravidlo *eliminace konjunkce*.
5. $\neg(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}), \boldsymbol{b} \rightarrow \neg \boldsymbol{c}$, na 3. a 4. řádek jsme použili pravidlo *konjunktivního sylogismu*.

V pěti řádcích jsme odvodili závěr, že „*Číslo není dělitelné 3.*“ Příklady, kde známe či tušíme závěr, jsou jednodušší, neboť při odvozování víme k čemu dojít.

O správnosti úsudku se lze přesvědčit i jinými postupy než užitím odvozovacích pravidel. Mezi nejjednodušší patří metoda, v níž je úsudek převeden na formuli. Rozhodnutí o správnosti úsudku se změní na rozhodnutí o tom, zda je tato formule tautologií, tj. při ohodnocení formule dostáváme jen pravdivostní hodnotu 1. Pro použití tohoto postupu je nutné znát pouze tabulky pravdivostních hodnot složených výroků a postup, jímž se výrok transformuje na formuli.

Blíže o tom viz [HROMEK02], str. 27.

Zkusme ještě vyřešit zadání tohoto příkladu podle postupu rozhodnutí o správnosti úsudku ze str. 7 za pomoci tabulky pravdivostních hodnot.

Výroky				Premisa 1	Premisa 2	Závěr
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$	$\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$	$\boldsymbol{b} \wedge (\neg \boldsymbol{a})$	$\neg \boldsymbol{c}$
1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1

Nejprve do tabulky vepíšeme všechny kombinace pravdivostních hodnot výrokových proměnných. Poté se zaměříme na vyhodnocení jednotlivých premis. Postupujeme dle vyhodnocování výroků, které jsme si ukázali v podkapitole 1.1. Premisu 1 musíme vyhodnotit postupně. Každý složitější složený výrok rozložíme na jednodušší složené výroky, které vhodně uzávorkujeme a poté je postupně vyhodnotíme mezi sebou. Začneme tedy nejprve vyhodnocením konjunkce a následně vyhodnotíme implikaci. Nyní se zaměříme na ty řádky tabulky, kde mají obě premisy pravdivostní hodnotu 1 (označeny oranžovou barvou). Ty porovnáme s pravdivostní hodnotou závěru. Vždy, když jsou obě premisy pravdivé a závěr je také pravdivý, dospěli jsme ke správnému úsudku (viz str. 7).

Jestliže je v tabulce řádek, ve kterém mají obě premisy pravdivostní hodnotu 1 a závěr pravdivostní hodnotu 0, pak jsme dospěli k nesprávnému úsudku. V našem případě jsme tedy dospěli ke správnému úsudku. Tabulkovou metodou není jednoduché vyvozovat závěr. Proto se tato metoda většinou používá pouze k ověření správnosti úsudku.

2 LOGICKÉ ÚLOHY JEJICH ROZBOR A ŘEŠENÍ

V druhé kapitole své práce bych chtěla na několika příkladech ukázat, jak můžeme řešit příklady bez tabulek pravdivostních hodnot. K řešení budeme potřebovat odvozovací pravidla, která jsme zavedli a vysvětlili v první kapitole této práce. Jeden takový příklad jsme si již na konci první kapitoly uvedli.

Některé použité příklady budou zahrnovat Smullyanovy hlavolamy, pro které je typické, že se zabývají poctivci a padouchy. Tyto postavy buď vždy za všech okolností mluví pravdu (poctivci), nebo vždy za všech okolností lžou (padouši). Převzato z [ORGANON].

Na příkladech můžeme demonstrovat, že přirozená dedukce sleduje přirozené uvažování, neboli jak bychom příklady řešili i bez zavedení formální logiky.

2.1 PŘÍKLAD 1

„Sčítač lidu pan McGregor obchází na ostrově poctivců a padouchů (který je obydlen pouze poctivci a padouchy) manželské páry a zjišťuje, kdo z manželů je poctivec a kdo padouch. Mohou nastat takovéto situace."

První dvojice. Muž prohlásil: „*Oba jsme padouši.*"

Druhá dvojice. Muž prohlásil: „*Jestliže jsem poctivec, pak i moje žena je poctivec*."

Třetí dvojice. Muž prohlásil: „*Jsem poctivec právě tehdy, když i moje žena má poctivou povahu.*" [ORGANON], str. 13

Vyřešme nejprve první dvojici. Předpokládejme, že je domorodec poctivec. Z toho plyne, že to co řekl, tedy že on i jeho žena jsou padouši, je pravda. Ale pokud by poctivec řekl, že je padouch, lhal by, a tudíž by padouchem byl. Proto nám při této možnosti vyplynul spor s tím, co jsme předpokládali. Domorodec nemůže být poctivec. Nyní předpokládejme, že je domorodec padouch a není pravda to, co řekl. On i jeho manželka nejsou padouši. Ale protože o domorodci tvrdíme, že padouch je, jeho manželka musí být poctivec.

Pokusme se tento rozbor přeformulovat do formálního výroku a vyvodit závěr pomocí odvozovacích pravidel.

Označme $\boldsymbol{a}$ = domorodec je poctivec, $\boldsymbol{b}$ = manželka je poctivec

Premisa: $\boldsymbol{a} <=> (\neg\boldsymbol{a} \wedge \neg\boldsymbol{b})$

Pro lepší práci s premisou si ji nejprve přepišme. Použijeme druhý de Morganův zákon[3].

1. $\boldsymbol{a} <=> \neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{a} => \neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$, na premisu jsme použili pravidlo *eliminace ekvivalence.*
2. $\boldsymbol{a} <=> \neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \rightarrow \neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) => \boldsymbol{a}$, opět jsme na premisu použili pravidlo *eliminace ekvivalence.*
3. Abychom mohli použít odvozovací pravidla, předpokládejme platnost a, tedy že domorodec je poctivec. Nyní již můžeme na premisu použít pravidlo *modus ponens* ve tvaru:

   $\boldsymbol{a} => \neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a} \rightarrow \neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$
4. $\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \rightarrow \neg\boldsymbol{a}$, v tomto kroku jsme použili pravidlo *negace disjunkce*. Zde nám ale vyvstává spor s předpokladem a.

   V dalším řešení proto předpokládejme znegovaný výrok a, tedy že je domorodec padouch. Značme $\neg a$.
5. $\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) => \boldsymbol{a}, \neg\boldsymbol{a}, \rightarrow \neg\big(\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})\big)$, na 2. řádek a nový předpoklad $\neg a$ jsme použili pravidlo *modus tollens*.
6. $\neg\big(\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})\big) \rightarrow (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$ na 5. řádek jsme použili pravidlo *eliminace dvojí negace.*
7. $(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}), \neg\boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{b}$, na 6. řádek jsme použili pravidlo *eliminace disjunkce.*

Obdobně zkusme vyřešit výrok druhé dvojice, kde muž prohlásil: *„Jestliže jsem poctivec, pak i moje žena je poctivec.“* To znamená, že pokud je domorodec poctivcem, pak je pravda to, co říká. Pokud je ovšem padouch, lže. Zkusme nyní předpokládat, že je domorodec poctivec. Dle našeho předpokladu tedy můžeme tvrdit, že je – li domorodec poctivcem i jeho žena je poctivec. Tímto jsme dokázali to, co domorodec říká. Tudíž jsou on i jeho manželka opravdu poctivci.

Ponechme dle předchozího řešení stejné označení pro domorodce a manželku.

[3] Více viz podkapitola 1.2.2 Pravidla obsahující disjunkci na str. 10.

Premisa: $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b})$

V prvních dvou krocích opět použijme pravidlo *eliminace ekvivalence* jako v předchozím řešení.

1. $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{a} => (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b})$
2. $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) \rightarrow (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) => \boldsymbol{a}$
3. $\boldsymbol{a} => (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a} \rightarrow (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b})$, v tomto bodě jsme použili pravidlo *modus ponens* na 1. řádek a předpoklad a (domorodec je poctivec), který považujeme za pravdivý.
4. $(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{b}$, opět jsme použili pravidlo *modus ponens* neboli *pravidlo odloučení* na 3. řádek a předpoklad a. Nyní jsme dokázali, že manželka je poctivec.
5. $(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) => \boldsymbol{a}, (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{a}$, zde jsme použili pravidlo *modus ponens* na 2. a 3. řádek. Tím jsme dokázali pravdivost předpokladu a, tedy že domorodec je poctivec.
6. Na závěr už jen použijeme pravidlo *zavedení konjunkc*e, ve kterém jen potvrdíme, že domorodec i manželka jsou poctivci.

   $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$

Pro úplnost by bylo vhodné ještě provést odvození s předpokladem $\neg a$.

7. $(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) => \boldsymbol{a}, \neg \boldsymbol{a} \rightarrow \neg(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b})$, na 2. řádek a nový předpoklad jsme použili pravidlo *modus tollens*.
8. $\neg(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{a} \wedge (\neg \boldsymbol{b})$, na 7. řádek jsme použili pravidlo *negace implikace*.
9. $\boldsymbol{a} \wedge (\neg \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{a}$, zde jsme na 8. řádek použili pravidlo *eliminace konjunkce.*

   V posledním kroku, jsme ovšem vyvodili závěr, který je ve sporu s předpokladem $\neg a$. Tudíž muž je opravdu poctivec a závěr vyvozený z tohoto předpokladu je správný.

Na závěr zkusme vyřešit i třetí manželský pár, kde muž prohlásil: „*Jsem poctivec právě tehdy, když i moje žena má poctivou povahu.*“

Předpokládejme nejprve, že je manžel poctivec. Označení opět ponechme stejné jako v předchozích dvou řešeních, tedy $\boldsymbol{a}$ = domorodec je poctivec, $\boldsymbol{b}$ = manželka je poctivec.

Premisa: $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b})$

Začněme opět použitím pravidla *eliminace ekvivalence* na premisu.

1. $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{a} => (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b})$
2. $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}) \rightarrow (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}) => \boldsymbol{a}$
3. Předpokládáme pravdivost předpokladu a, tedy že domorodec je poctivec.

   $\boldsymbol{a} => (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a} \rightarrow (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b})$, zde jsme na 1. řádek a předpoklad a použili pravidlo *modus ponens.*
4. $(\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}) \rightarrow (\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b})$, v tomto bodě jsme na 3. řádek použili pravidlo *eliminace ekvivalence*.
5. $(\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{b}$, na 4. řádek a předpoklad a jsme použili pravidlo *modus ponens.* Nyní jsme dokázali, že manželka je poctivec.
6. $(\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}) \rightarrow (\boldsymbol{b} => \boldsymbol{a})$, zde jsme znovu na 4. řádek použili pravidlo *eliminace ekvivalence*.
7. $(\boldsymbol{b} => \boldsymbol{a}), \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{a}$, v posledním kroku jsme na 5. a 6. řádek použili pravidlo *modus ponens*.

Pomocí odvozovacích pravidel jsme dokázali, že domorodec i manželka jsou poctivci.

Nyní si ukažme, jak by se příklad řešil při předpokladu, že je domorodec padouch, tedy $\neg a$.

8. $(\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}) => \boldsymbol{a}, \neg\boldsymbol{a} \rightarrow \neg(\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b})$, v tomto kroku jsme na druhý řádek použili pravidlo *modus tollens*.
9. $\neg(\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}) \rightarrow \neg\boldsymbol{b} <=> \boldsymbol{a}$, na 8. řádek jsme použili pravidlo *negace ekvivalence*.
10. $\neg\boldsymbol{b} <=> \boldsymbol{a} \rightarrow \neg\boldsymbol{b} => \boldsymbol{a}$, zde jsme použili pravidlo *eliminace ekvivalence*.

11. $(\neg \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a}), \neg \boldsymbol{a} \rightarrow \neg(\neg \boldsymbol{b})$, na 10. řádek a předpoklad jsme použili pravidlo *modus ponens* .

12. $\neg(\neg \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{b}$, nakonec jsme na 11. řádek použili pravidlo *eliminace dvojí negace*. Zde jsme vyvodili, že je manželka poctivec.

Pro dva různé předpoklady, jsme dostali ten samý závěr. Co nám z toho vyplývá? Že manželka je jistě poctivec, ale o povaze domorodce nejsme schopni rozhodnout. Ukažme si ještě řešení za pomoci tabulky pravdivostních hodnot, ve které uvedeme několik možných závěrů a vysvětlíme si, které jsou správné a které ne.

Výroky			Premisa	Závěry					
a	b	$\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{b})$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\neg \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} \vee (\neg \boldsymbol{a})$	$\boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}$	$\neg \boldsymbol{a} => \boldsymbol{b}$
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0

Nyní se zaměřme na barevně vyznačené řádky, jsou to řádky, kde je premisa pravdivá. Pokud má nějaký závěr, vypsaný v tabulce, na obou oranžových řádcích pravdivostní hodnotu 1, pak je tento závěr správný. Pokud má alespoň na jednom oranžovém řádku pravdivostní hodnotu 0, pak je tento závěr nesprávný. Jaké závěry tedy můžeme prohlásit za správné? Manželka je poctivec. Domorodec je poctivec nebo je padouch. Jestliže je domorodec poctivec, pak je manželka poctivec. Jestliže je domorodec padouch, pak je manželka poctivec. Ostatní závěry uvedené v tabulce jsou nesprávné.

Při řešení tohoto příkladu byla použita literatura [ORGANON].

2.2 PŘÍKLAD 2

Mějme opět A, B z ostrova poctivců nebo padouchů.

A řekne: *„Já jsem padouch, ale B ne.“* Co jsou A a B? Zadání dle [SMULLYAN86]

Pro lepší práci se složeným výrokem si ho přeformulujme: *„Já jsem padouch a B je poctivec.“*. Nejprve proveďme úvahu. Pokud bychom předpokládali, že je A poctivec, pak by tvrdil, že je padouch a lhal by. Zde nám vyvstal spor s předpokladem a domorodec A musí být padouchem. Pokud je ovšem A padouchem, není pravda to co tvrdí, tedy že je padouch a B ne. Pokud by byl B poctivec, pak by výrok padoucha A byl pravdivý. Proto musí i B být padouch. Zkusme nyní tuto úvahu převést do formálního výroku a vyvodit závěr.

Označme: $\boldsymbol{a}$ = A je poctivec, $\boldsymbol{b}$ = B je poctivec. Předpokládejme nejprve, že A je poctivec.

Premisa: $\boldsymbol{a} \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$

Jako první opět použijme na premisu pravidlo *eliminace ekvivalence.*

1. $\boldsymbol{a} \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{a} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$
2. $\boldsymbol{a} \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \rightarrow (\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \Rightarrow \boldsymbol{a}$
3. $\boldsymbol{a} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a} \rightarrow (\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$, na 1. řádek a předpoklad a jsme použili pravidlo *modus ponens*.
4. $(\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \rightarrow \neg \boldsymbol{a}$, zde jsme na 3. řádek použili pravidlo *eliminace konjunkce* a vyvstal nám spor s předpokladem, že A je poctivec. Nyní tedy předpokládejme, že je A padouchem tedy $\neg \boldsymbol{a}$.
5. $\neg \boldsymbol{a}, (\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \Rightarrow \boldsymbol{a} \rightarrow \neg(\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$, v tomto kroku jsme na 2. a 4. řádek použili pravidlo *modus tollens*.
6. $\neg(\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}), \neg \boldsymbol{a} \rightarrow \neg \boldsymbol{b}$, na 5. řádek a předpoklad jsme použili pravidlo *konjunktivního sylogismu*.

Tím jsme dokázali, že B je padouch. Nyní si můžeme shrnout závěr, který nám vyplynul z předpokladů a premisy. Domorodec A je padouchem. Při vyslovení výroku lhal o povaze B. Oba domorodci jsou padouši.

2.3 PŘÍKLAD 3

„Další hádanka je jednoduchá, má však překvapivé rozluštění. Jsem buď poctivec, nebo padouch. Pronesu dva výroky:

(1) Miluji Lindu

(2) Pokud miluji Lindu, pak miluji Katku

Jsem poctivec nebo padouch?“ [SMULLYAN86], str. 98

Proveďme opět nejprve úvahu. Pokud budu předpokládat, že je autor poctivec, pak bude první výrok pravdivý, tedy že miluje Lindu. Jestliže je ovšem pravdivý první výrok, který je zároveň předpokladem výroku druhého, pak dostáváme pravdivý závěr, tedy že miluje i Katku. Nyní předpokládejme, že je autor padouchem. První výrok je nepravdivý a autor nemiluje Lindu. Z druhého výroku však plyne, že autor miluje Lindu a ne Katku. Tím ovšem potvrzuje pravdivost prvního výroku a vyvstává nám spor. Proto víme, že autor je poctivec a miluje Lindu i Katku.

Převeďme si výroky do formálních premis a vyvoďme závěr.

Nejprve předpokládejme, že je autor poctivec, tedy předpokládejme a.

Premisa 1: $\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{l}$

Premisa 2: $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k})$

1. $\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{l} \rightarrow \boldsymbol{a} => \boldsymbol{l}$, na první premisu jsme použili pravidlo *eliminace ekvivalence*.
2. $\boldsymbol{a} => \boldsymbol{l}, \boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{l}$, v tomto kroku jsme na 1. řádek a předpoklad a použili pravidlo *modus ponens*. Nyní jsme vyvodili, že autor miluje Lindu.
3. $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k}) \rightarrow \boldsymbol{a} => (\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k})$, zde jsme na druhou premisu a 2. řádek použili pravidlo *eliminace ekvivalence*.
4. $\boldsymbol{a} => (\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k}), \boldsymbol{a} \rightarrow (\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k})$, na 3. řádek a předpoklad jsme použili pravidlo *modus ponens*.
5. $(\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k}), \boldsymbol{l} \rightarrow \boldsymbol{k}$, v tomto bodě jsme na 2. a 4. řádek opět použili pravidlo *modus ponens*. Nyní jsme vyvodili, že autor miluje i Katku.

Ukažme si ještě postup odvození, pokud předpokládáme, že je autor padouchem, tedy $\neg a$.

6. $\boldsymbol{a} <=> \boldsymbol{l} \rightarrow \boldsymbol{l} => \boldsymbol{a}$, v tomto kroku jsme na první premisu použili pravidlo *eliminace ekvivalence*.
7. $\boldsymbol{l} => \boldsymbol{a}, \neg\boldsymbol{a} \rightarrow \neg\boldsymbol{l}$, na 6. řádek a nový předpoklad jsme použili pravidlo *modus tollens*. Dostáváme závěr, že autor Lindu nemiluje.

8. $\boldsymbol{a} <=> (\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k}) \rightarrow (\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k}) => \boldsymbol{a}$, zde jsme na druhou premisu použili pravidlo _eliminace ekvivalence._

9. $(\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k}) => \boldsymbol{a}, \neg\boldsymbol{a} \rightarrow \neg(\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k})$, v tomto kroku jsme na 8. řádek a předpoklad použili pravidlo _modus tollens_.

10. $\neg(\boldsymbol{l} => \boldsymbol{k}) \rightarrow \boldsymbol{l} \wedge (\neg\boldsymbol{k})$, na 9. řádek jsme použili pravidlo _negace implikace_.

11. $\boldsymbol{l} \wedge (\neg\boldsymbol{k}) \rightarrow \boldsymbol{l}$, v posledním kroku jsme na 10. řádek použili pravidlo eliminace konjunkce. Zde nám ovšem vyvstává spor s tím, co jsme dokázali v 7. řádku. Proto můžeme tvrdit, že autor je poctivec a miluje Lindu i Katku. A jak autor sám uvádí ve slovném řešení příkladu: „Není tedy možné, abych byl padouch, za kterého mě Lindina matka považuje od té doby, co mě viděla s Katkou.“ [SMULLYAN86], str. 104

3 LOGIKA V MATEMATICE NA DRUHÉM STUPNI ZŠ

Logika jako taková se na druhém stupni základních škol nevyučuje. Nicméně v učebnicích či doporučených učebních osnovách matematiky pro základní školy v části nestandardní aplikační úlohy a problémy můžeme najít náměty na rozvoj logického myšlení studentů. V této kapitole si některé z těchto námětů podrobněji rozebereme.

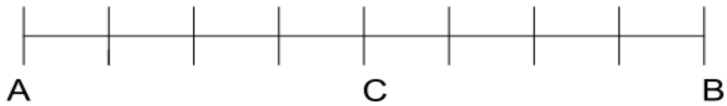
3.1 OHODNOCOVÁNÍ VÝROKŮ

V učebnicích lze najít několik typů úloh, ve kterých mají studenti rozhodovat o správnosti výroku či opravovat chyby. V některých úlohách mají z předem daných možností vybrat správnou odpověď. Tyto typy úloh předpokládají studentovu znalost daného tématu a nutí jej zamýšlet se nad vyslovenými větami a dále s nimi pracovat.

Uveďme si tedy konkrétní příklady.

I. *<u>Rozhodnutí o pravdivosti výroku</u>*

- „Pepa s Čendou určují podle obrázku poměr délky úsečky AC a délky úsečky AB.



Pepa: *„Úsečka AC má stejnou délku jako čtyři osminy délky úsečky AB. Poměr délek je 4:8.“*

Čenda: *„Délka úsečky AC je jedna polovina délky úsečky AB. Poměr délek je 1:2.“*

Rozhodni, kdo z nich má pravdu.“ [OVÁDKO7R2], str. 8

V tomto příkladě můžeme říci, že mají pravdu oba, tedy že oba výroky jsou pravdivé. Jen to každý z nich řekl jinak. Na studentovi je, aby dokázal, zda je poměr 1:2 a 4:8 stejný.

- Pan Kotrba si nechal zvětšit fotografii o rozměrech 9 cm x 13 cm v poměru 1:3. Zvětšená fotografie má rozměry 36 cm a 52 cm.

Rozhodni, zda panu Kotrbovi zvětšili fotografii správně. Dle [OVÁDKO7R2]

Pokud student zvládl látku, ve které se probírají poměry a jejich rozšiřování, je schopen na tuto otázku odpovědět.

- Rozhodni, zda je tvrzení správné: „Součet dvou záporných čísel je vždy kladné číslo."

V dalším typu úloh je vysloveno tvrzení a student má odpovědět ano, pokud je tvrzení pravdivé, či ne, usoudí-li, že je tvrzení nepravdivé.

- Přímo úměrné – ano, či ne?

„Je počet hub, které najdeme, vždy *přímo úměrný* době, kterou strávíme jejich hledáním?"

„Je výška člověka *přímo úměrná* jeho věku?" [OVÁDKO7R2], str. 29

- Rozhodni, zda tvrzení platí: piš *ano-ne*.

27 % ze 400 je větší než 100.

54 % z 800 je menší než 400.

18 % z 63 je větší než 18 % z 58.

44 % z 800 je menší než 43 % ze 780 dle [OVÁDKO7R2]

- Pepa počítá procenta

„Pepa vypočítal, že v jejich třídě je 38 % dívek a 54 % chlapců. Je to možné?"

[OVÁDKO7R2], str. 60

Pokud se student nad touto otázkou zamyslí, je schopen odpovědět, že po sečtení procent ze zadání nedostane celkových 100%, tzn., že má Pepa ve třídě spolužáky, kteří nejsou ani chlapci ani dívky.

II. Výběr pravdivého výroku

V tomto typu úloh má student za úkol z řady výroků vybrat ten, který je pravdivý.

- Mezi třemi zápisy je jen jeden správný, vyber ho:

  1) $0 < \frac{40}{26} < 1$ 2) $1 < \frac{40}{26} < 2$ 3) $2 < \frac{40}{26} < 3$ dle [OVÁDKO7R1]

- „Vyber správnou odpověď. Když se absolutní hodnota neznámého čísla x rovná 7, potom platí:"

  a) x je 7 b) x je -7 c) x je 7 nebo -7 [OVÁDKO7R1], str. 43

- Vyber správnou odpověď!

  Číslo -3,7 leží na číselné ose mezi čísly:

  -4 a -3,5 -3,5 a -2 -3 a -2,5 [OVÁDKO7R1]

- Vyber správnou odpověď. Součet čísel 6,32, 0,027 a 11,045 je:

  17,128 17,392 17,527 dle [OVÁDKO6R2]

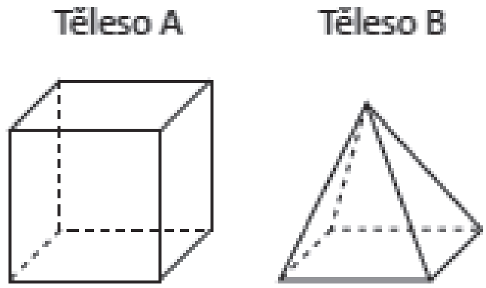
- Jen jeden výsledek je správný. Vyber ho.

  1275,4: 5 se rovná: 255,08 248,6 256,09 275,1 [OVÁDKO6R2]

Na závěr této podkapitoly si uveďme jeden příklad z šetření TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), které zjišťuje úroveň znalostí a dovedností žáků čtvrtých a osmých ročníků základní školy v matematice a přírodovědných předmětech. Příklad je čerpán z metodické publikace pro učitele základních škol a víceletých gymnázií. [ÚLOHY]

Zadání:

V tabulce je několik tvrzení o tělesech A a B. Označte křížkem X, jestli je tvrzení pravdivé nebo nepravdivé.



Tvrzení	Pravdivé	Nepravdivé
A i B mají alespoň jednu čtvercovou stranu.	X	
A i B mají stejný počet stěn.		
Všechny úhly A jsou pravé úhly.		
B má více hran než A		
Některé hrany B jsou zakřivené		

Za zmínění jistě stojí i komentář k této úloze:

„Čeští žáci výrazně zaostali za mezinárodním průměrem – 18/33. Úloha patří kromě geometrie do oblasti logiky. Pracuje se zde s pravdivostní hodnotou složených a kvantifikovaných výroků. Toto učivo ve většině našich učebnic schází.“ [ÚLOHY], str. 88

Z komentáře je jasné, že jen 18% českých žáků dokázalo tuto úlohu správně vyřešit na rozdíl od mezinárodního průměru, kde tuto úlohu vyřešilo 33% žáků. Z logického hlediska ji však řadíme mezi úlohy jednodušší. Můžeme říci, že velký podíl na takovémto výsledku má i malé zastoupení logiky v učivu pro žáky základních škol.

3.2 PRÁCE SE SLOŽENÝM VÝROKEM

Je známo, že studenti mají problém s řešením slovních úloh, které obsahují dlouhé zadání či souvětí, protože potom musejí pracovat s textem a několikrát se k němu vracet. Je pro ně obtížnější takové úlohy zvládnout na rozdíl od jasně zadaných a krátkých slovních úloh.

Několik takových úloh si zde ukážeme a rozebereme.

- „O zbylých 25 perníčků se Jeníček a Mařenka rozdělili s Karkulkou, Budulínkem a Otesánkem. Mařenka si nechala pětinu perníčků, Jeníček čtvrtinu z toho co zůstalo. Karkulka si vzala třetinu zbytku po předchozím dělení. Budulínek s Otesánkem se rozdělili o zbývající perníčky tak, že Otesánek dostal o 2 perníčky víc než Budulínek. Kolik perníčků měl Otesánek?" [VÄTEROVÁ10], str. 31

V tomto příkladu máme několik jednoduchých i složených výroků, rozeberme si nejprve zadání z hlediska logiky a poté naznačme jeho řešení. Počáteční věta zadání je zároveň prvním výrokem. Z něj jsme se dozvěděli, kolik perníčků budeme dělit a mezi koho. *„Mařenka si nechala pětinu perníčků, Jeníček čtvrtinu z toho co zůstalo.*" Tento složený výrok je konjunkcí dvou výroků: *„Mařenka si nechala pětinu perníčků.*" a „Jeníček *si nechal čtvrtinu z toho, co zůstalo.*" Ačkoliv jsou výroky spojeny pouze čárkou, můžeme pro snazší identifikaci konjunkce použít spojku *„a zároveň*". Dalším výrokem je věta o podílu Karkulky. Ve větě *„Budulínek s Otesánkem se rozdělili o zbývající perníčky tak, že Otesánek dostal o 2 perníčky víc než Budulínek.*" máme opět složený výrok ve formě konjunkce. Prvním výrokem je *„Budulínek s Otesánkem se rozdělili o zbývající perníčky.*", druhý výrok bychom mohli spojit spojkou „a" či opět *„a zároveň" „Otesánek dostal o 2 perníčky víc než Budulínek.*"

Nyní si naznačme postup řešení:

Máme 25 perníčků, pětina z nich je 5 perníčků. Tím máme vypočtenu Mařenčinu část. Zbytek po odebrání Mařenčiny části je 20 perníčků. Jeníček si vzal čtvrtinu, tzn. 5 perníčků. Zbytek po předchozím dělení je 15. Z toho si vzala Karkulka třetinu tedy 5 perníčků. Na Otesánka s Budulínkem nám tedy zbylo jen 10 perníčků. Otesánek dostal o 2 perníčky více než Budulínek. Z toho dostáváme, že Budulínek dostal 4 perníčky a Otesánek 6.

- „První výpravy do Nového světa se zúčastnilo málo lodí a méně než 100 námořníků. Na druhou výpravu jelo už 17 lodí a přibližně 1500 mužů. Kolik námořníků se zúčastnilo první, dramatické plavby? Kdyby se všichni účastníci plavby seřadili na palubě do řad tak, aby v každé řadě bylo 29 námořníků, žádný by nezbyl. Kdyby se všichni seřadili do řad po 21 mužích, tři muži by zbyli. Kolik námořníků se vlastně zúčastnilo první plavby?"

  [VÄTEROVÁ10], str. 55

Zde si opět příklad rozebereme nejprve z logického hlediska a následně si ukážeme postup řešení. První věta zadání je složený výrok ve formě konjunkce, který je spojen spojkou *„a*". Druhá věta souvětí je opět konjunktivní složený výrok. Věty o postavení námořníků do řad jsou implikační složené výroky. Pokud bychom chtěli zadání udělat z hlediska logiky přehlednější, věty zapíšeme takto: *„Jestliže by se všichni účastníci plavby seřadili na palubě do řad, a v každé řadě bylo 29 námořníků, pak by žádný nezbyl.*" V tomto složeném výroku máme jako implikační premisu složený výrok ve formě konjunkce. Poslední oznamovací věta zadání je opět implikace. Pro přehlednost ji můžeme zformulovat takto: *„Jestliže by se všichni seřadili do řad po 21 mužích, pak by tři muži zbyli.“* Nyní je patrné, že v zadání se hojně vyskytují složené výroky.

Při řešení tohoto příkladu je důležité si uvědomit, co vlastně máme vypočítat, neboť se zde vyskytují i údaje, které k výpočtu vůbec nepotřebujeme. To jsou například informace o druhé výpravě. Nyní si naznačme postup řešení této slovní úlohy.

Víme, že první plavby se zúčastnilo méně než 100 námořníků, to je naše první podmínka.

Druhou podmínkou je, že se námořníci beze zbytku mohou seřadit do řad po 29 mužích. Takže hledaný počet je dělitelný 29 bezezbytku. Máme několik možností: 29, 58 a 87 námořníků, protože další násobek 29 je 116, to je více než 100, což porušuje první podmínku.

Třetí podmínku máme zadanou tak, že pokud námořníky postavíme do řad po 21, zbydou 3 muži.

Rozeberme možnosti z druhé podmínky postupně. Pokud vezmeme 29 námořníků, a postavíme je do řady po 21, zbyde 8 mužů. To nesplňuje třetí podmínku, a proto 29 námořníků není správný výsledek. Nyní vezměme 58 mužů a opět je postavme do řady po 21. Při tomto počtu zbyde 16 námořníků. To opět nesplňuje třetí podmínku a nenašli jsme správný výsledek. Nakonec vezměme 87 námořníků. Pokud je rozestavíme do řady po 21 mužích, vzniknou 3 řady a 3 námořníci zbydou. Při tomto počtu máme splněny všechny podmínky a můžeme prohlásit, že první výpravy se zúčastnilo 87 mužů.

3.3 PŘIŘAZOVÁNÍ

Do této podkapitoly patří úlohy typu ZEBRA. Tyto úlohy jsou označovány jako obtížné. A to proto, že je poměrně náročné studentům vysvětlit jednotlivé kroky a jejich logickou návaznost, navíc je potřeba určitý stupeň abstrakce. Aby však tyto úlohy byly snadněji řešitelné i pro ostatní studenty a ne jen ty nadané, dají se řešit za pomoci grafického znázornění. Potom je řešení a logická návaznost mezi jednotlivými výroky zřetelnější. [UHLÍŘOVÁ15]

Začneme jednodušším příkladem pro názorné řešení a poté si rozebereme příklady složitější.

- *Příklad 1*

„Při vypracování rozvrhu hodin vyslovili tři učitelé svá přání k rozvrhu prvních třech vyučovacích hodin v pondělí.

a) Bylo by dobře, kdyby matematika byla první nebo druhou vyučovací hodinu.

b) Dějepis by měl být první nebo třetí vyučovací hodinu.

c) Literatura by určitě neměla být první vyučovací hodinu.

Je možné vyhovět přání všech tří učitelů?“ [UHLÍŘOVÁ15]

Začněme literaturou. O ní bylo řečeno, že by neměla být první vyučovací hodinu. Z toho vyplývá, že bude buď druhou, nebo třetí vyučovací hodinu.

Nyní si zapišme další informace jak vytvořit rozvrh hodin do tabulky.

Matematika	Dějepis	Literatura
1.	1.	
2.		2.
	3.	3.

Díky tabulce již vidíme, že máme dvě možnosti, jak vyhovět přání učitelů.

1. Matematika → Literatura → Dějepis
2. Dějepis → Matematika → Literatura

- *<u>Příklad 2</u>*

„Spolužáci Emil, Michal, Petr a Zdeněk (tedy Karásek, Pospíšil, Tereba a Zíma) si povídali, kam se chystají na jarní prázdniny. Všichni čtyři pojedou se svými rodiči do hor (do Jeseníků, Jizerských hor, Krkonoš a Orlických hor).

1. Do Krkonoš se chystají Karáskovi.
2. Do Jizerských hor pojede Zdeněk, který se nejmenuje Tereba.
3. Petr pojede do Orlických hor
4. Michal se jmenuje Pospíšil.

Jak se jmenuje Emil? Kam pojedou Zímovi?“ [UHLÍŘOVÁ15]

Opět si zapišme do tabulky vše, co už známe.

Jméno	Příjmení	Hory
Emil		
Michal	Pospíšil	
Petr		Orlické hory
Zdeněk		Jizerské hory

Z prvního výroku víme, že do Krkonoš pojedou Karáskovi. Z tabulky plyne, že do těchto hor může jet Emil, nebo Michal. Michal se jmenuje Pospíšil. Tudíž Emil je Karásek a pojede s rodiči do Krkonoš.

Poslední pohoří, které jsme ještě nikomu nepřiřadili, jsou Jeseníky. Tam tedy pojede Michal.

Z druhého výroku se dozvíme, že se Zdeněk nejmenuje Tereba. U dvou spolužáků už jsme příjmení určili a můžeme říci, že Zdeněk se jmenuje Zíma a Petr Tereba.

Jméno	Příjmení	Hory
Emil	Karásek	Krkonoše
Michal	Pospíšil	Jeseníky
Petr	Tereba	Orlické hory
Zdeněk	Zíma	Jizerské hory

Nyní již známe odpověď na otázku ze zadání. Emil se jmenuje Karásek a Zímovi pojedou do Jizerských hor.

Jako poslední příklad si uvedeme takové zadání úlohy, kde už nám vystupuje větší množství výroků, a proto bude řešení o trochu složitější. Nicméně pokud budeme postupovat jako doposud, vše co už známe zapisovat do tabulky, měli bychom se dobrat k jednoznačnému závěru.

- *<u>Příklad 3</u>*

Každý ze čtyř studentů má rád jiný předmět a dělá jiný sport.

1. Lukáš má rád fotbal.
2. Ten, kdo má rád fyziku, hraje softbal.
3. Petr nechodí na florbal.
4. Honza nemá rád matematiku.
5. Lukáš má rád zeměpis.
6. Matěj nehraje softbal.
7. Petr nemá rád fyziku.
8. Honza nehraje basketbal.
9. Florbalista nemá rád dějepis.

Jaký předmět má rád Petr a jaký sport hraje?

Jako v předchozích příkladech si zapíšeme vše, co již známe, do tabulky.

Student	Sport	Předmět
Petr		
Lukáš	fotbal	zeměpis
Matěj		
Honza		

Nyní se zaměřme na složitější část, kdy musíme doplnit zbytek tabulky.

Víme, že Petr nehraje florbal (3. výrok) tzn., že hraje buď softbal, nebo basketbal (fotbal je zabraný Lukášem). A víme, že nemá rád fyziku (7. výrok). Proto můžeme říct, že má rád buď dějepis, nebo matematiku, protože zeměpis už má rád Lukáš a každý student má rád jiný předmět.

Honza nemá rád matematiku (4. výrok) takže má rád buď fyziku, nebo dějepis a nehraje basketbal (8. výrok). Takže hraje buď florbal, nebo softbal.

Matěj nehraje softbal (6. výrok).

Víme, že ten, kdo má rád fyziku, hraje softbal. Z výše uvedeného víme, že Petr nemá rád fyziku, takže nehraje softbal. Matěj nehraje softbal. Z toho plyne, že ten kdo hraje softbal a má rád fyziku je Honza.

Teď jsme vyvodili, že softbal hraje Honza, takže Petrovi se výběr redukoval jen na basketbal a na Matěje zbyl florbal. Nyní máme sporty vyřešeny a ještě musíme doplnit předměty.

Díky 8. výroku víme, že florbalista nemá rád dějepis. Teď už víme, že florbal hraje Matěj. Fyzika a zeměpis jsou již zabrané, takže máme volné předměty dějepis a matematiku. Dějepis Matěj nemá rád, a tak na něj zbývá matematika. Jediný zbývající předmět je dějepis a ten připadá na Petra.

Student	Sport	Předmět
Petr	basketbal	dějepis
Lukáš	fotbal	zeměpis
Matěj	florbal	matematika
Honza	softbal	fyzika

Nyní už máme tabulku vyplněnou a můžeme odpovědět na otázku, jaký předmět má rád Petr a jaký sport hraje?

Petr má rád dějepis a hraje basketbal.

Příkladů tohoto typu existuje nespočet. Mohou obsahovat otázky typu: kdo bydlí v jakém domě, kdo co rozbil, kdo co chová, či pěstuje atd. Nicméně z výše uvedených příkladů je zřejmé, že velkým pomocníkem při řešení je tabulka. Pokud si příklad rozdělíme na informace, které neobsahují negaci a vypovídají něco o objektu a poté si rozebereme informace, které negaci obsahující, vše zapíšeme do tabulky, snadno dojdeme k vyřešení příkladu, ačkoliv možná na první pohled vypadá poměrně složitě.

3.4 USUZOVÁNÍ

1. *<u>Kontrola správnosti úsudku</u>*

Do této části patří úlohy, ve kterých je vysloven závěr a na studentovi je rozhodnutí, zda je úsudek správný, či ne. Uveďme si příklady:

- Franta porovnává čísla: „Číslo 7,35 a 7,358 porovnám takto: Jelikož 7=7, 3=3 a 5=5, jsou obě tato čísla stejná“. Říká Franta pravdu? Dle [OVÁDKO7R1]

V tomto příkladě student pracuje s desetinnými čísly. Jestliže mám číslo 7,35, mohu za 5 připsat nulu, aby měla obě čísla stejný počet desetinných míst. Potom je zřejmé, že čísla stejná nejsou.

- „Ze školního výletu, kterého se zúčastnilo všech 27 žáků 6.A, zbylo 556 korun. Pokladník Mirek bude peníze vracet. „Když vrátím každému 20 korun, zbyde mi 16 korun. Ale dát každému 21 korun je zase moc, tolik peněz nám nezbylo.“ Má Mirek pravdu?“ [OVÁDKO6R2], str. 50

Toto je typická úloha na násobení a dělení. Víme, že máme 27 žáků a každý dostal po 20ti korunách $20 * 27 = 540$ a $556 - 540 = 16$. Číslo 16 není dělitelné 27, takže má Mirek pravdu.

- „Konec Mirkových starostí. Třída 6. A se rozhodla koupit paní učitelce za to, že s nimi jela na výlet, květiny. Mirek za ně zaplatil 70 Kč ze zbylých peněz a oddechl si: „Zbytek peněz už snadno rozdělím v celých korunách a nic mi nezbyde.“ Je to pravda?“ [OVÁDKO6R2], str. 50

Řešení této úlohy je poměrně jednoduché. Od částky 556 Kč odečteme 70 Kč za květiny, zbyde nám 486 Kč. Po vydělení zbytku počtem žáků dostaneme výsledek, že každý student dostane 18 Kč. Mirek měl opět pravdu.

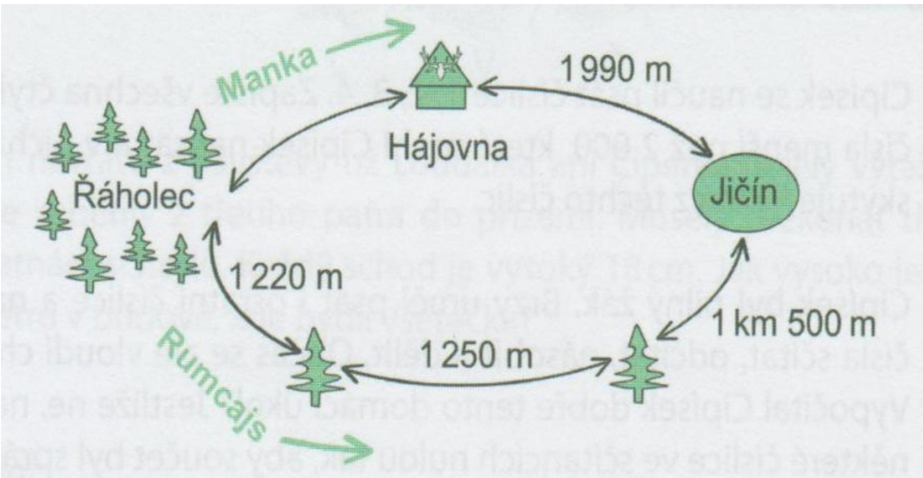
2. *<u>Úsudek ve slovní úloze</u>*

Do této části patří úlohy, kde student musí před začátkem řešení nejprve provést logické úsudky, než bude moci úlohu správně řešit.

- „Malér! Cipísek zapomněl, kdy se narodil! Rok si pamatoval, ale den a měsíc ne. Věděl jen, že tam je šestka, dvojka a trojka. Také si pamatoval, že mu Křemílek a Vochomůrka pokaždé přinesou k narozeninám čerstvé třešně. Kdy se Cipísek narodil?“ [VÄTEROVÁ10], str. 17

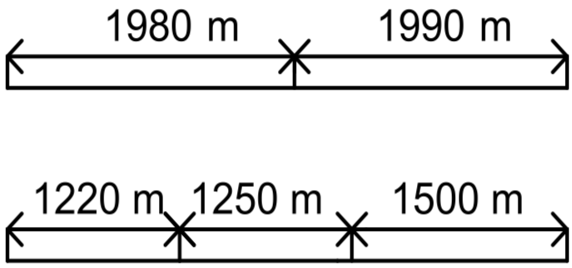
Tato úloha nutí studenta zapojit dedukci a logickým postupem dospět k závěru. Máme informaci, že datum Cipískova narození obsahuje čísla 6, 3, 2. Začněme nejprve měsícem. Máme tedy na výběr měsíc únor, březen a červen. V zadání máme informaci o čerstvých třešních, proto můžeme únor a březen zavrhnout, protože v tuto roční dobu v našich krajinách třešně nerostou. Na den nám tedy zbývají čísla 3 a 2. Jelikož víme, že měsíc má maximálně 31 dní, logicky nám z toho plyne, že datum Cipískova narození je 23.6.

- „Manka chodí z Řáholce do Jičína kolem hájovny. Rumcajs chodí raději celou cestu lesem. Který z nich to má do Jičína dál? Cesta z Řáholce do hájovny měří bez 20 m právě 2 km.“ [VÄTEROVÁ10], str. 16



V tomto příkladě musí student nejprve pořádně pochopit a rozebrat zadaní. Než může porovnat, kdo to má do Jičína dále, musí nejprve znát vzdálenosti jednotlivých částí cesty. Je potřeba určit, jak daleko je les Řáholec od hájovny. V zadání máme informaci, že bez 20 m právě 2 km. Co to tedy znamená? Student musí 2 km převést na metry a nakonec odečíst 20 m. Tím se dozví poslední neznámý údaj do mapky a pak už může poměrně snadno určit, kdo to má do Jičína dále. Můžeme ovšem tento příklad řešit i jiným způsobem, 20 m prozatím ponecháme stranou, sečteme 2 km s 1,99 km a pak teprve odečteme 20 m. Resp. podle zadání můžeme vzdálenosti porovnávat: 1990 m je o 770 m větší, než 1220 m, zbývá porovnat 2 km bez 20 m se vzdáleností 1250 m + 1500 m – 770 m.

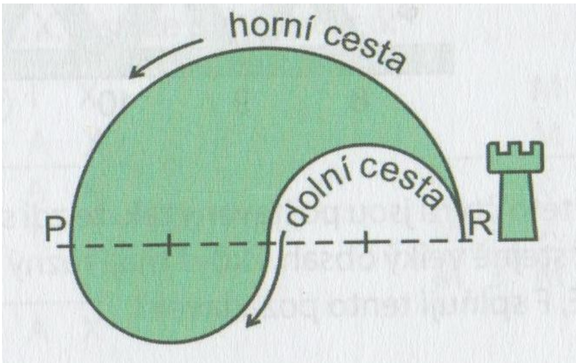
Popřípadě můžeme úlohu řešit i graficky:



Z grafického řešení je jasně vidět, že obě vzdálenosti jsou stejně dlouhé. Odpovědí na otázku ze zadání by tedy bylo, že Rumcajs i Manka to mají do Jičína stejně daleko.

- „Uprostřed neznámé země je jezero ve tvaru kapky. Určete jeho rozlohu v hektarech, jestliže vzdušná vzdálenost rozhledny R a přístaviště P je 2 km.“

  [VÄTEROVÁ10], str. 37



Zde vidíme, že se plocha jezera skládá z polovin dvou kruhů o rozdílném poloměru. Pokud se student na obrázek podívá pozorně, může si výpočet velmi usnadnit. Tedy že plochu jezera lze spočítat jako polovinu velkého kruhu, neboť to, co v pravé části jezera chybí, v levé přebývá. Tato úvaha vede k jednoduššímu řešení, než si spočítat poloměr malého kruhu a následně obsah jeho poloviny. Poté z poloviny velkého kruhu odečíst tento obsah a nakonec ho opět přičíst.

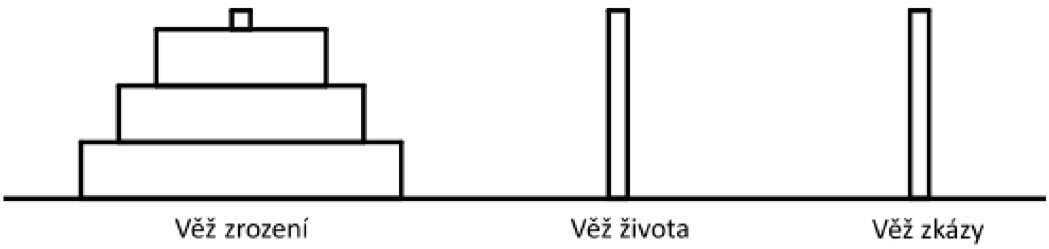
3.5 HANOJSKÁ VĚŽ

V doporučených studijních osnovách matematiky pro základní školy najdeme i část nestandardní aplikační úlohy a problémy. Jsou to doplňkové úlohy pro výuku. V těchto nestandardních úlohách pro 8. ročník základních škol nalezneme algoritmy. Jedním z nich je Hanojská věž.

K tomuto problému se váže příběh.

„V jednom indickém chrámu mají tři věže – Věž zrození, Věž života a Věž zkázy. Uvnitř každé z nich je kůl, na kterém je navlečeno několik zlatých disků. Ve všech třech věžích je dohromady 64 disků. Každý disk je jinak široký. Disky smí být na kůlu navlečeny pouze tak, že užší disk leží na širším. Jinak to prý přinese smůlu. Proto každý kůl spolu s disky vypadá jako kužel.

Při stvoření chrámu byly všechny disky navlečeny na jeden kůl ve Věži stvoření. Kněží, kteří v chrámu přebývají, každý den přesunou jeden disk (víc jich přesunout nesmí) tak, aby se jim co nejdříve podařilo přesunout všechny disky na kůl ve Věži zkázy. Jinak by se zastavilo plynutí života. Stará legenda říká, že až se jim to podaří, tak nastane konec světa.“ [ČERNÝ13]

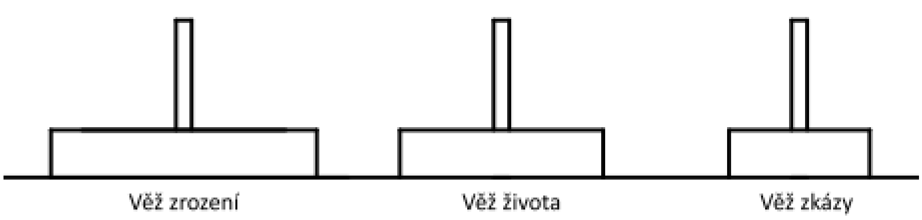


V této úloze se snažíme přesunout všechny disky z kůlu Věže zrození na kůl Věže zkázy s co nejmenším počtem tahů. Máme ovšem podmínky, které nesmíme porušit. V každém tahu smíme přesunout pouze jeden disk a nesmíme položit širší disk na užší. Čím více budeme mít disků, tím bude úloha složitější.

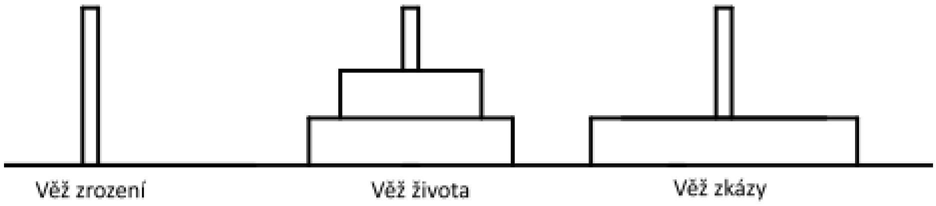
Zkusme si vyřešit nejjednodušší zadání a to takové, že máme pouze 3 disky.

V prvním kroku musíme nejužší disk přesunout na kůl Věže zkázy.

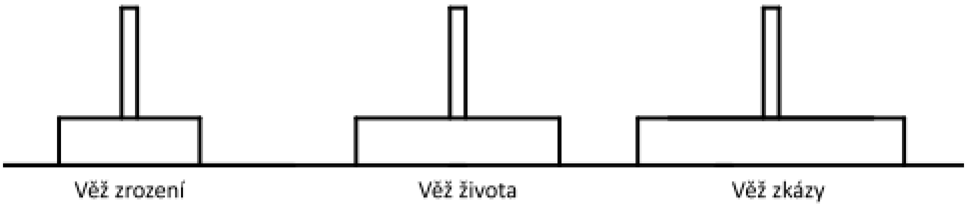
Následně musíme vzít další disk a přesunout ho na kůl Věže života.

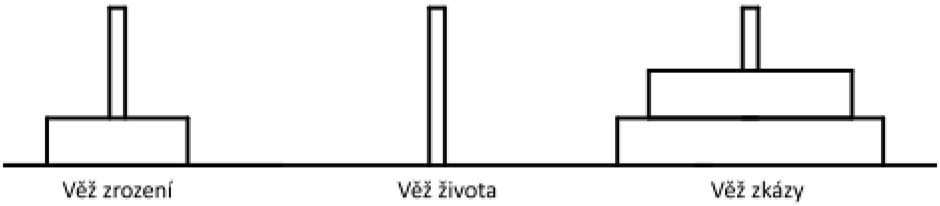


Ve třetím tahu opět vezmeme nejužší disk a přesuneme ho na kůl Věže života a ve čtvrtém tahu přesuneme nejširší disk z kůlu Věže zrození na kůl Věže zkázy. Tím budeme mít základ kužele na kůlu Věže zkázy.



Nyní už zbývají poslední tři tahy. V prvním musíme opět přesunout nejužší disk, abychom mohli prostřední disk přesunout na nejširší, který už máme připraven na kůlu Věže zkázy.





V posledním tahu už jen přesuneme nejužší disk na Věž zkázy a úkol máme vyřešen.

Vyřešení úlohy vyžadovalo 7 tahů, přidáním dalšího disku bychom museli provést $2^4 - 1$ tahů, tzn. 15 tahů. S rostoucím počtem disků roste i počet tahů, které musíme provést.

Tato logická hádanka procvičuje studentovo myšlení. Ten si musí uvědomit, jaký je vlastně cíl této logické hry a následně jaké tahy je potřeba provést. Při každém tahu student volí kam disk umístit s tím, že musí vyhodnotit, zda neporušuje podmínku a jestli je tato volba správná vzhledem k dalšímu tahu. Čím častěji student tuto úlohu řeší, tím rychleji a s menším počtem tahů je schopen disky přesunout.

Jak je vidět ve výše uvedených příkladech této kapitoly, je logika v učebnicích a osnovách pro základní školy jen velmi okrajovou tématikou. Přitom je logické myšlení a dedukce v životě důležité nejen pro pochopení školní látky, ale pomáhá v praktickém životě ke správnému rozhodování a analýze informací.

ZÁVĚR

V první kapitole o složených výrocích jsem nejprve zopakovala jejich řešení pomocí tabulek pravdivostních hodnot, a poté zavedla několik odvozovacích pravidel. Ty jsem pro přehlednost rozčlenila do skupin podle toho, které druhy složených výroků obsahují.

Druhá kapitola mi přišla nejnáročnější. Až při psaní této části mi došlo, jak složité je matematicky popsat jednotlivé kroky logického postupu řešení příkladu. Při tvorbě úvahy za každým zadáním, se postup zdál celkem jednoduchý, a bez větších problémů jsem dokázala dedukcí dospět k závěru. Nicméně jakmile došlo na použití odvozovacích pravidel zavedených v první kapitole, každý krok se mi zdál náročný a často jsem nevěděla jak se dostat k dalšímu bodu.

V třetí a poslední kapitole jsem se snažila najít náznaky výrokové logiky v příkladech pro studenty druhého stupně základních škol. Ačkoliv se nějaké příklady našly, překvapilo mě, jak málo jich bylo. Učebnice matematiky pro základní školy jsou plné příkladů, které jsou zadány poněkud monotónně. Nejčastější zadání byla položena takto: vypočítej, urči, sečti apod. Nicméně stačí příklad či otázku zadat trochu jinak např. „Je pravda, že pokud je trojúhelník ostroúhlý, pak má všechny vnitřní úhly menší než 90°?“ a hned dostaneme takový dotaz, který studenty nutí nejen opakovat aktuální probíranou látku, ale také se nad otázkou zamyslet a správně na ní odpovědět. Tedy co znamená, že je trojúhelník ostroúhlý? Co znamená, když má trojúhelník všechny úhly menší než 90°? Jsou obě tyto tvrzení stejná? Takovýchto zvídavých otázek bych byla nyní schopna položit mnohem více, než před začátkem tvorby této práce.

Toto téma je poměrně široké a dalo se pojmout různými způsoby. Já se však chtěla co nejvíce přiblížit školnímu prostředí a utvořit si představu o tom, jak by se dalo přirozené logické myšlení studentů rozvíjet během hodin matematiky. Tuto mou prvotní představu práce splnila, protože jsem se naučila pokládat dotazy tak, aby se student musel nejprve zamyslet, než mi správně odpoví.

Dle mého názoru by bylo vhodné, aby logika byla ve větší míře zařazena do učebnic i hodin matematiky na základních školách.

RESUMÉ

The theme of this diploma work is called logic in math lessons at elementary schools. Although logic as such is not included in the elementary school mathematics teaching, in textbooks we can find certain types of examples that develops students´ logical thinking.

The first part of my work deals with the propositional logic and the rules of inference which can both mathematically describe the process of logical thinking. When deciding on our own or somebody else´s judgment, we follow intuition or subconscious, however, the inference rules give us some description of how to determine whether the judgment is valid or not.

In the second chapter, there are examples of problem solving using the inference rules.

The third chapter of the work is focused on the demonstration of the examples from mathematics textbooks for secondary schools that supports the development of logical thinking of students.

SEZNAM LITERATURY

[ČERNÝ13] ČERNÝ, Jakub. Základní grafové algoritmy: Algoritmy na grafech jednoduše a srozumitelně*: Algoritmy jednoduše a srozumitelně* [online]. ©2013. [cit. 2015-04-01]. Dostupné z: http://algoritmy.eu/zga/rozdel-a-panuj/hanojske-veze/

[HEJNÝ88] HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania metematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateĺstvo v Bratislavě, 1988. ISBN 80-08-00014-7.

[HROMEK02] HROMEK, Petr. *Logika v příkladech*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2002, 210 s. ISBN 80-244-0578-4.

[OVÁDKO6R2] OVÁDKO, SrSc., Doc. RNDr. Oldřich a Doc. RNDr. Jiří KADLEČEK, CSC. *MATEMATIKA pro 6. ročník základní školy [2]*. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-086-1.

[OVÁDKO7R1] OVÁDKO, SrSc., Doc. RNDr. Oldřich a Doc. RNDr. Jiří KADLEČEK, CSC. *MATEMATIKA pro 7. ročník základní školy [1]*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-111-6.

[OVÁDKO7R2] OVÁDKO, SrSc., Doc. RNDr. Oldřich a Doc. RNDr. Jiří KADLEČEK, CSC. *MATEMATIKA pro 7. ročník základní školy [2]*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-126-4.

[SMULLYAN86] SMULLYAN, Raymond M. *Jak se jmenuje tahle kniha*. Praha: Mír, 1986.

[SOCHOR01] SOCHOR, Antonín. *Klasická matematická logika*. Praha: Karolinum, 2001. ISBN 80-246-0218-0.

[UHLÍŘOVÁ15] UHLÍŘOVÁ, Martina. Projekt Středoevropské virtuální univerzity: Logické úlohy typu ZEBRA: *Univerzita Karlova v Praze Pedagogická fakulta* [online]. ©2015 [cit. 2015-04-01]. Dostupné z:http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_47.pdf

[VÄTEROVÁ10] VÄTEROVÁ, Věnceslava. *Matematika převážně nevážně: sbírka zajímavých úloh pro ZŠ*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2010, 115 s. ISBN 978-80-7196-402-5.

<u>Další zdroje:</u>

[ÚLOHY] *Úlohy pro rozvoj dovedností: metodická publikace pro učitele základních škol a víceletých gymnázií*. Praha: Česká školní inspekce, 2014, 93 s. ISBN 978-80-905632-2-3.

[ORGANON] *Organon VI., aneb, Odkud a jak brát stále nové příklady?: sborník příspěvků ze semináře o výuce logiky : Dub nad Moravou, 14.-17. září 2008*. Vyd. 1. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni, 2009. ISBN 978-80-7043-840-4.

http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2011/03/Doporucene-ucebni-osnovy-predmetu-CJL-AJ-a-M-pro-zakladni-skolu.pdf