ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

LIMITY FUNKCÍ VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Ivana Rybárová
Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma - Fy

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň 2015

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni 13. dubna 2015

....
vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za inspirativní vedení mé práce, za poskytnutí mnoha cenných odborných námětů, rad, připomínek, za ochotu a čas strávený při konzultacích.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

ÚVOD

Tato diplomová práce si klade za cíl shrnout problematiku limit funkcí více proměnných. Jelikož se jedná o matematickou látku již zpracovanou, snažila jsem se, aby text práce byl ucelený, přehledný a srozumitelný. Ke srozumitelnému zpracování přispívají zejména ilustrativní příklady. Řešené příklady nejsou pro pochopení dalšího výkladu bezpodmínečně nutné, ale mohou čtenáři účinně pomoci pochopit předcházející výklad. Při čtení této diplomové práce se předpokládá předchozí znalost základů matematické analýzy. Nejvíce se v práci zabývám funkcemi dvou reálných proměnných.

Problematikou limit funkcí jedné reálné proměnné jsem se zabývala již v mé bakalářské práci s názvem „*Limity a různé způsoby jejich výpočtů*“ [1], která byla obhájena v roce 2013. Tato diplomová práce je nadstavbou výše zmíněné bakalářské práce a prohloubením problematiky výpočtu limity funkce, neboť výpočet limit funkcí jedné reálné proměnné je jednodušší problematikou než výpočet limit funkcí více reálných proměnných. Pro pochopení následujícího textu je nezbytné ovládat dovednosti výpočtu limit funkcí jedné reálné proměnné, jelikož se některé příklady opírají o věty, které platí pro výpočet limit funkcí jedné reálné proměnné. V některých příkladech dokonce pro výpočet používám převod limity funkcí více reálných proměnných na limitu funkce jedné reálné proměnné.

Diplomová práce je koncipována tak, že jsou v první části nejprve definovány pojmy, které s výpočtem limit funkcí více proměnných bezprostředně souvisejí, respektive první kapitola pojednává o definici funkce více reálných proměnných. Následuje kapitola zabývající se spojitostí funkce více proměnných, kde jsou uvedeny i příklady, které jsou pro tuto matematickou oblast charakteristické. Další kapitola se věnuje limitě funkce více reálných proměnných, a je dále členěna na samotné definování limity, a poté jsou popsány vlastnosti, které se při výpočtech využívají. Dále je zde vysvětlena transformace kartézských souřadnic do souřadnic polárních a závěr této kapitoly je věnován samotnému výpočtu. Kapitola 3.4 obsahuje výpočet limit. V této části jsou nejprve popsány způsoby, jakými lze limity počítat, a poté jsou pro lepší pochopení této problematiky ke každé metodě uvedeny příklady. Mimo jiné je v diplomové práci nastíněno určení spojitosti funkce pomocí limit funkcí více reálných proměnných a problematika zápisu symbolu limity dle definice s využitím kvantifikátorů. Takovýto zápis je důležitý při použití metody eliminace kvantifikátorů, což je zatím vcelku málo známá metoda pro výpočet některých limit funkcí více reálných proměnných. Poslední kapitola uvádí výpočty v softwaru

Mathematica. Zde se nachází zdrojový kód, který umožní vypočítat limitu funkce více reálných proměnných metodami uvedenými v kapitole 3.4 a také zdrojový kód využívající k výpočtu metodu eliminace kvantifikátorů.

Výstupem práce je ucelený a přehledný výklad problematiky limit funkcí více reálných proměnných. Všechny grafy a zdrojové kódy jsou k nahlédnutí na CD přiloženém k této diplomové práci, a proto je možné zobrazit grafy vybraných funkcí více reálných proměnných počítaných v diplomové práci. Výhodou vykreslení grafů, například v programu Mathematica, je lepší představa o průběhu funkce, což statické obrázky v tištěné podobě neumožňují.

1 DEFINICE FUNKCE VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

Jak již bylo řečeno, má bakalářská práce se zabývala pouze funkcemi jedné reálné proměnné. Ve vyučování na základních a většině středních škol se zavádí pouze pojem funkce o jedné neznámé, avšak při hlubším zamyšlení dojdeme k závěru, že v našem okolí (i v učivu základních škol) vše závisí nejen na jedné proměnné, ale na dvou či dokonce větším počtu proměnných. Například podle Ohmova zákona elektrický proud závisí nejen na napětí, ale i na odporu, objem kužele je závislý na poloměru podstavy a výšce. V matematice je pro tyto případy zaveden pojem funkce více reálných proměnných.

Protože jsou při výpočtu limit funkcí více reálných proměnných používány definiční obory těchto funkcí, je potřebné zabývat se nejdříve základními vlastnostmi vícerozměrných prostorů. Proto jsou v této kapitole uvedeny definice týkající se euklidovského prostoru. Dále jsou pak zavedeny pojmy okolí bodu (sférické (v E_2 kruhové), prstencové), pojmy charakterizující polohu bodu vzhledem k množině (vnitřní, hraniční, vnější, hromadný a izolovaný bod) a definice zabývající se množinou (otevřená, uzavřená, ohraničená, kompaktní množina, oblast). Na závěr je uvedena definice funkce více reálných proměnných.

1.1 DEFINICE EUKLIDOVSKÉHO PROSTORU

n-rozměrným euklidovským prostorem E_n nazýváme množinu všech uspořádaných n-tic $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reálných čísel, v níž vzdálenost $\rho(X, Y)$ dvou bodů $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y(y_1, y_2, \dots, y_n) \in E_n$ je definována vzorcem:

$$\rho(X, Y) = \sqrt{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]}.$$

Vzdálenost $\rho(X, Y)$ má tyto vlastnosti:

a. Pro každé dva body X, Y $\in E_n$ platí $\rho(X, Y) \geq 0$, přičemž $\rho(X, Y) = 0$, právě když je X = Y. (axióm totožnosti)

b. Pro každé dva body X, Y $\in E_n$ platí $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$. (axióm symetričnosti)

c. Pro každé dva body X, Y, Z $\in E_n$ platí $\rho(X, Z) \leq \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$. (trojúhelníková nerovnost)

[2]

1.2 OKOLÍ BODU

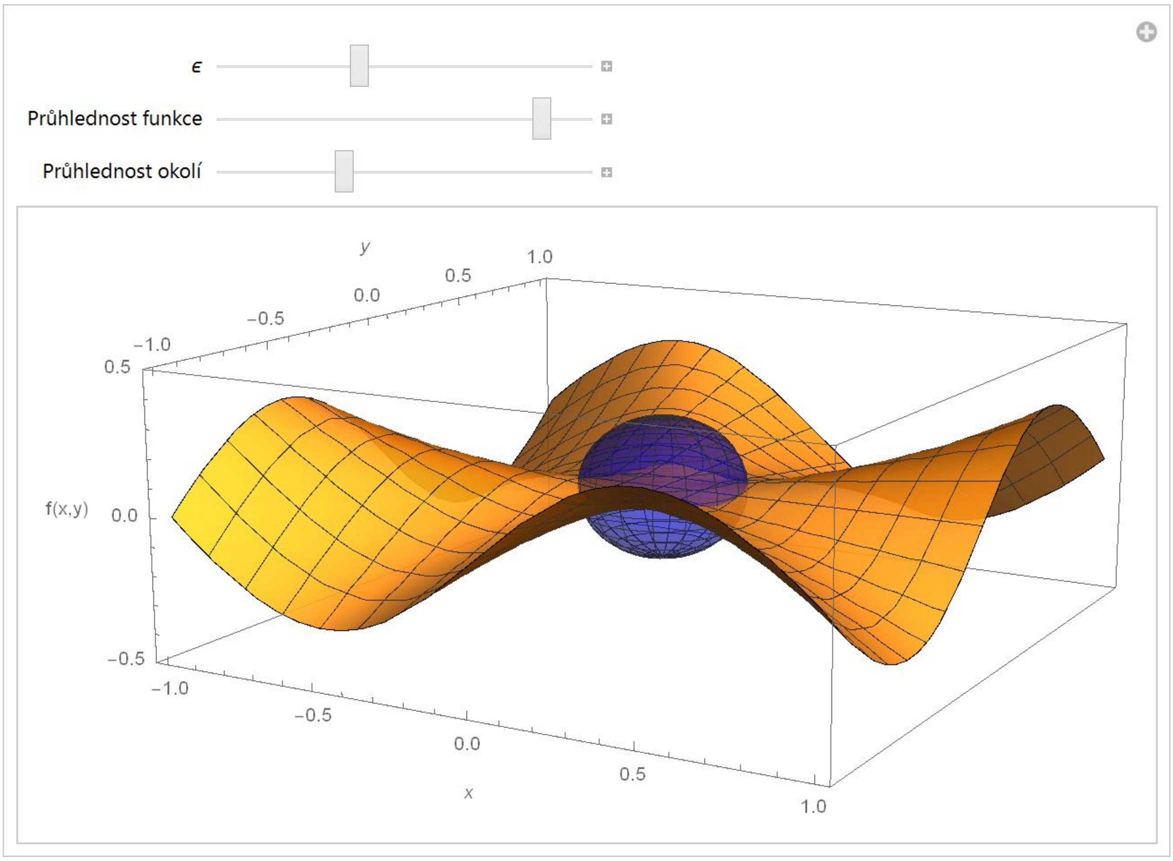
a. Sférické (kulové) okolí bodu: Nechť x je bod v euklidovském prostoru E_n. Každou množinu $U(x) = \{y \in E_n, \|x - y\| \leq \delta\}$, kde $\delta > 0$, nazveme sférickým (kulovým) δ-okolím $U(X)$.

Symbolem $\| \quad \|$ se označuje euklidovská norma $\|a\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$. Touto definicí je okolím bodu myšlena „vícerozměrná“ koule opsaná kolem bodu. V E_2 je toto okolí nazýváno kruhovým okolím a okolo bodu je toto okolí ohraničeno kruhem se středem v tomto bodě. V E_3 se jedná o kulovou oblast, tzn. je okolo bodu definována koulí.

b. **Prstencové (redukované) okolí bodu:** Každou množinu $U(x) = \{y \in \mathrm{E}_n, 0 < \|x - y\| \leq \delta\}$, kde $\delta > 0$ prstencovým δ-okolím bodu x.

Prstencové okolí je v podstatě sférické okolí, které neobsahuje střed (tj. bod okolo kterého okolí určujeme).

[3]



Obr. 1. Znázornění sférického okolí bodu. Pohyblivý graf s nastavováním velikosti ε a průhlednosti funkce a okolí se nachází na přiloženém CD.

Kromě sférického a prstencového okolí jsou známa i jiná okolí. Jejich názvy většinou souvisejí s vlastnostmi těchto okolí. Mám na mysli například čtvercové okolí bodu. Toto okolí kolem bodu nevytvoří kouli, ale tvar čtverce, popřípadě v prostoru E_n, kde $n \geq 3$, vytvoří tvar krychle. Čtvercové $\varepsilon-$ okolí bodu $A = (x, y)$ je množina $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Jedná se zde o čtvercové okolí, do kterého nepatří strany tohoto čtverce.

1.3 POLOHA BODU VZHLEDEM K MNOŽINĚ

Nechť *x* je bod a *M* je množina v euklidovském prostoru E_n. Řekneme, že bod *x* je

a. **vnitřním bodem** množiny M, jestliže existuje okolí $U(x)$ bodu x tak, že $U(x) \subset M$,

b. **vnějším bodem** množiny *M*, jestliže existuje takové okolí $U(x)$ bodu *x*, že $U(x) \cap M = \emptyset$,

c. **hraničním bodem** množiny *M*, jestliže pro každé okolí $U(x)$ bodu *x* platí současně $U(x) \cap M \neq \emptyset$ a $U(x) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$,

d. **hromadným bodem** množiny *M*, jestliže pro každé prstencové okolí $P(x)$ bodu *x* platí $P(x) \cap M \neq \emptyset$,

e. **izolovaným bodem** množiny *M*, jestliže existuje takové okolí $U(x)$bodu *x*, že $U(x) \cap M = \{x\}$.

[3]

Vnitřní bod množiny má tu vlastnost, že se v jistém okolí tohoto bodu nacházejí jen body množiny *M*. Hraničním bodem je myšlen bod, kolem kterého leží body z množiny *M*, a také body náležející doplňku množiny *M*. Vnější bod je v podstatě vnitřním bodem doplňku množiny *M*. To znamená, že jisté okolí tohoto bodu neobsahuje žádný bod množiny *M*. V každém prstencovém okolí hromadného bodu se musí nacházet alespoň jeden bod množiny *M*. Izolovaný bod je poté opakem hromadného bodu, tj. tento bod lze pomocí okolí oddělit od ostatních bodů množiny. Daný bod je tedy izolovaným bodem množiny *M*, pokud není bodem hromadným. Množina všech hromadných bodů na množině *M* se nazývá derivace množiny *M* (značí se M').

1.4 MNOŽINY

Pro určení, zda je množina otevřená či uzavřená, musím nejdříve definovat pojmy hranice, vnitřek a uzávěr množiny *M*.

Definice hranice a vnitřku množiny: Nechť M je množina v euklidovském prostoru. Množinu všech hraničních bodů dané množiny *M* nazýváme hranicí množiny *M* (značí se hr *M*, nebo také ∂M). Vnitřek množiny *M* je množina všech vnitřních bodů této množiny (značí se $M°$). Uzávěr množiny *M* je množina $M \cup \partial M$ (značí se $\overline{M}$).

Nyní mohu určit, zda je množina otevřená nebo uzavřená.

Definice otevřené a uzavřené množiny: Množina M je v euklidovském prostoru otevřená, jestliže je rovna svému vnitřku. Množina M je uzavřená, pokud je rovna svému uzávěru.

Množina je tedy otevřená, jestliže každý její bod je vnitřním bodem množiny M. Vnitřek množiny v E_n je u každé množiny otevřenou množinou. Uzavřenou množinou je množina M, pokud do ní patří všechny její hromadné body, nebo naopak nemá žádný hromadný bod. Hranice a uzávěr každé množiny v euklidovském prostoru je uzavřenou množinou.

Definice oblasti: Otevřenou množinu v E_n nazýváme oblastí, jestliže každé dva její body A a B lze spojit lomenou čarou, která celá leží v této množině. Množinu M nazýváme uzavřenou oblastí, je-li uzávěrem některé oblasti, tj. existuje-li taková oblast M_1, že platí $M = \overline{M_1}$.

Definice ohraničené množiny: Množinu $M \subset E_n$ nazýváme ohraničenou v E_n, právě tehdy, když existuje takový bod $X \in E_n$ a takové číslo $\rho > 0$, že platí $M \subseteq U(X, \rho)$.

Definice kompaktní množiny: Množinu $M \subset E_n$ nazýváme kompaktní, je-li uzavřená a ohraničená.

[2][3]

1.5 DEFINICE FUNKCE VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

Reálnou funkcí n reálných proměnných nazýváme zobrazení f množiny $M \subset E_n$ do množiny E_1 (předpoklad $M \neq \emptyset$). Píšeme $f: M \to E_1$.

Množinu $M = D(f)$ nazýváme definičním oborem funkce f. Číslo y, které je přiřazeno bodu $X[x_1, x_2, \dots, x_n] \in M$, nazýváme funkční hodnotou funkce f v bodě X a označujeme zpravidla $f(X)$ nebo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Množinu všech funkčních hodnot funkce f nazýváme oborem funkčních hodnot funkce f a značíme ji $H(f)$.

[2]

Případ $n = 1$ se nazývá funkce jedné reálné proměnné. Pokud je $n = 2$, jedná se o funkci dvou reálných proměnných a většinou se tato situace značí: $z = f(x, y)$, kde x, y jsou reálné proměnné. Předpis pro funkci dvou reálných proměnných se znázorňuje například i takto: $f: E_2 \to E_1$. Pokud je tedy zavedena funkce n reálných proměnných, zapisuje se tento případ: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Proměnné $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou na sobě navzájem nezávislé.

Není-li definiční obor funkce explicitně zadán, rozumí se jím nejširší možná množina, tj. u funkcí jedné reálné proměnné množina všech reálných čísel. V některých případech je z této množiny zapotřebí některé body vyjmout (příkladem jsou lomené funkce či goniometrické funkce). Podobné dohody dodržujeme i u funkcí více reálných proměnných.

2 SPOJITOST FUNKCE VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

V této kapitole je definován pojem spojitost funkce více reálných proměnných analogicky, jako je definována spojitost u funkcí jedné reálné proměnné. V závěru kapitoly jsou uvedeny příklady týkající se spojitosti funkcí. Příklady na spojitost funkce s využitím limit jsou uvedeny v kapitole 3.

2.1 DEFINICE SPOJITOSTI

Nechť M je množina bodů prostoru E_n a nechť $X \in M$. Nechť f je funkce n reálných proměnných. Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě X vzhledem k množině M, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro každý bod X' množiny M, jehož vzdálenost od bodu X je menší než δ [tj. $\rho(X, X') < \delta$], platí $|f(X') - f(X)| < \varepsilon$.

Je-li funkce *f* spojitá v každém bodě množiny *M* vzhledem k množině *M*, budeme říkat, že je spojitá na množině *M*.

Spojitost lze definovat i pomocí okolí bodu:

Definice spojitosti: Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě X vzhledem k množině M, jestliže ke každému okolí $U(f(X))$ existuje takové okolí $U(X)$ bodu $X \in E_n$, že pro všechny body X' množiny M, které leží v okolí $U(X)$, tj. pro všechny body průniku $M \cap U(X)$, platí $f(X') \in U\big(f(x)\big)$.

[2]

Je třeba dodat, že funkce *f* je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě definičního oboru této funkce. Pokud je funkce spojitá na nějaké množině, tak je spojitá i na podmnožině této množiny. Funkce *f* je spojitá ve vnitřním bodě množiny *M*, právě když je funkce f spojitá v tomto bodě. Naproti tomu v hraničním bodě množiny M funkce f být spojitá může vzhledem k množině *M*, ale v hraničním bodě být spojitá nemusí.

Spojitost funkce více reálných proměnných lze, stejně jako spojitost funkce jedné reálné proměnné, definovat pomocí pojmu limity. Tento pojem budu podrobně studovat později, avšak je patrné, že je velice těsně spojen se spojitostí funkce.

Definice spojitosti: Řekneme, že funkce $f(x, y)$ je spojitá v bodě $X = [x_0, y_0]$, jestliže platí $\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

[3]

2.2 VLASTNOSTI SPOJITOSTI

U vlastností spojitosti funkcí více reálných proměnných se opět vychází z analogických vlastností pro spojitost funkce jedné reálné proměnné, avšak místo spojitosti na intervalu se používá spojitost na kompaktní množině či oblasti.

Vlastnosti spojitosti u algebraických úprav funkcí: Nechť funkce f a g n proměnných jsou spojité v bodě X vzhledem k množině $M \subset E_n$. Pak funkce $|f|, cf$, kde c je libovolné číslo, $f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$, pokud $g(X) \neq 0$ pro každý bod $X \in M$, jsou rovněž spojitými funkcemi v bodě X vzhledem k množině M.

[2]

Tato věta ukazuje, že pokud s funkcemi provedu jakoukoliv z uvedených algebraických úprav, tak spojitost u těchto upravených funkcí zůstává totožná.

Definice největší a nejmenší hodnoty funkce: Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $M \subseteq E_n$, existují v množině M takové dva body X', X'' ($X' \leq X''$), že pro každý bod $X \in M$ platí $f(X') \leq f(X) \leq f(X'')$.

[2]

Definice říká, že na kompaktní množině spojitá funkce nabývá nejmenší a největší hodnoty.

2.3 PŘÍKLADY TÝKAJÍCÍ SE SPOJITOSTI FUNKCÍ VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

V následující kapitole jsou uvedeny příklady, ve kterých se používá k výpočtu definice spojitosti nebo je výpočet založen na znalostech vlastností spojitých funkcí.

Příklad č. 1 Určete množiny, na nichž jsou dané funkce spojité:

a) $f(x, y) = \frac{x^2+x+y-20}{x^2+y^4+8}$

Funkce je spojitá, pokud se jmenovatel nerovná nule (podmínka $g(X) \neq 0$ na této stránce nahoře). Avšak pro všechna X = [x, y] ∈ E2 je $x^2 + y^4 + 8 > 0$. Tato funkce je proto spojitá na celé množině E_2.

b) $f(x, y) = \frac{5x}{x^2-5y}$

Funkce je opět spojitá ve všech bodech, ve kterých se jmenovatel nerovná nule. V tomto případě položím funkci $x^2 - 5y$ rovnu nule: $x^2 - 5y = 0$

$$5y = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{5}$$

Funkce $f(x,y) = \frac{5x}{x^2-5y}$ je spojitá na množině $E_2 \setminus \left\{[x,y] \in E_2; y = \frac{x^2}{5}\right\}$.

c) $f(x,y,z) = e^{z^2+5x} \cdot \sin(8x+y)$

Tato složená funkce je spojitá na celé množině E_3, protože pokud rozdělím tuto funkci na dílčí funkce $[g(x,z) = z^2 + 5x, h(r) = e^r, i(x,y) = 8x + y, j(t) = \sin t]$, jsou všechny spojité na E_3.

Obdobně se řeší příklady, ve kterých se vyskytuje požadavek na zjištění bodů nespojitosti.

Příklad č. 2 Rozhodněte o spojitosti v bodě (0, 0) funkce $f(x,y)$, která je definována předpisem: $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(0,0) = 0.$$

Řešení: Pokud zvolím bod (t, t^2), kde t je malé číslo, které leží v blízkosti počátku, tak daná funkce neustále nabývá hodnoty $\frac{t^2t^2}{t^4+t^4} = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$. Pokud tedy zvolím $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, nebude platit nerovnost$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \varepsilon$ pro všechny body v okolí počátku. Tudíž tato funkce není v bodě (0, 0) spojitá.

Příklad č. 3 Ukažte spojitost v počátku funkce s předpisem:

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \text{ pro } (x,y,z) \neq (0,0,0),$$

$$f(0,0,0) = 0.$$

Řešení: Vím, že platí $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ a $|z| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, kde $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od počátku. Pro každý bod $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ poté platí: $|f(x,y,z) - f(0,0,0)| = \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Pokud tedy zvolím libovolné $\varepsilon > 0$, tak je nerovnice $|f(x,y,z) - f(0,0,0)| < \varepsilon$ splněna pro všechny body (x,y,z), které mají vzdálenost od počátku menší než δ, kde $\delta = \varepsilon$.

[2]

3 LIMITA FUNKCE VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

V této části diplomové práce je definován pojem limita funkce více reálných proměnných a jsou zde uvedeny vlastnosti týkající se limity funkce více proměnných, samotný výpočet limit s různými metodami výpočtů a příklady zabývající se spojitostí funkce, při jejichž výpočtu je využit pojem limita funkce více reálných proměnných.

Limita popisuje tendenci, které podléhají hodnoty vyšetřované funkce, pokud se blížím k danému bodu. U limit funkcí jedné reálné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit zprava, zleva či z obou stran. U limit funkcí více reálných proměnných se však k tomuto bodu můžeme blížit libovolnými cestami (například po spirálách nebo polopřímkách). Abych v definici obsáhla všechny „cesty“, budu definovat tento pojem vůči podmnožině definičního oboru. Uvedu také „úzkou“ definici limity funkce více reálných proměnných.

3.1 DEFINICE LIMITY FUNKCE VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

Definice vlastní limity v bodě: Nechť je funkce f definována na podmnožině euklidovského prostoru. Předpokládejme, že bod a je hromadným bodem podmnožiny M jejího definičního oboru. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu (vlastní) vzhledem k množině M rovnou $b \in$ R, jestliže pro každé okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a, jehož průnik $P \cap N$ s množinou M se funkcí f zobrazí do okolí U, tj. $f(P \cap N) \subset U$.

Pro označení skutečnosti, že f má v bodě a limitu b vzhledem k množině M, používáme zápis

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = b.$$

V případě, kdy je M rovna celému definičnímu oboru, hovoříme pouze o limitě dané funkce a používáme pro ni zjednodušený zápis $\lim_{x \to a} f(x)$.

[3]

Funkce v bodě, pro který počítáme limitu, nemusí být definována, ale tento bod musí být hromadným bodem této funkce. Pokud limita v bodě existuje, tak to znamená, že hodnota limity bude stejná, i když se budu k bodu blížit po jakékoliv křivce. Když naopak dostanu různé hodnoty limity pro různé cesty, po kterých se k bodu blížím, tak limita v daném bodě neexistuje.

„Úzká“ definice limity: Funkce $f(x, y)$ má v bodě $c = (x_0, y_0)$ limitu $A \in \mathrm{E}_1$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists O_\delta^*(c)\ \forall (x, y) \in O_\delta^*(c)$ platí $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Zapisujeme $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ nebo $\lim_{[x,y] \to [x_0, y_0]} f(x, y) = A$.

Kde se vůbec vzala potřeba mít „úzkou“ definici limity a limity vzhledem k množině? Vraťme se kupř. ke vlastní limitě ve vlastním bodě u funkce jedné proměnné.

Je $\lim_{x \to c} f(x) = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x\ \neq c$ platí

$$a - \varepsilon < f(x) < a\ + \varepsilon.$$

Přepišme vše pomocí okolí.

$$\lim_{x \to c} f(x) = a \in R \Leftrightarrow \forall O_z(a) \exists O_\delta^*(c) \forall x \in O_\delta^*(c) \text{platí } f(x) \in O_z(a).$$

Zde $O_z(a)$ ovšem značí obyčejné okolí bodu a, tj. interval (a – ε, a + ε) a $O_\delta^*(c)$ je redukované δ- okolí bodu c, tj. množina $(c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$.

Přepišme analogicky fakt, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $c = (x_0, y_0)$ opět vlastní limitu a:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a \Leftrightarrow \forall O_z(a) \exists O_\delta^*(c) \forall [x, y] \in O_\delta^*(c) \text{platí } f(x, y) \in O_z(a).$$

Symbol $O_\delta^*(c)$ symbolizuje redukované δ- okolí bodu $c = (x_0, y_0)$, to znamená v případě, že zvolíme čtvercové okolí, množinu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)x(y_0 - \delta, y_0 + \delta) - \{c\}$. Povšimněme si, že ve všech bodech tohoto okolí musí být definována funkce $f(x, y)$ a příslušné funkční hodnoty ještě musejí patřit do okolí $O_z(a)$.

Limita funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) může existovat i v případě, že funkce není v bodě (x_0, y_0) definována, protože se v definici vyskytuje redukované okolí tohoto bodu. V definici se vyskytuje kubické okolí bodu c. Limita funkce ale nezávisí na použitém okolí. Můžeme například použít i sférické okolí bodu, protože každé sférické okolí vždy obsahuje jisté jeho kubické okolí a to platí i naopak.

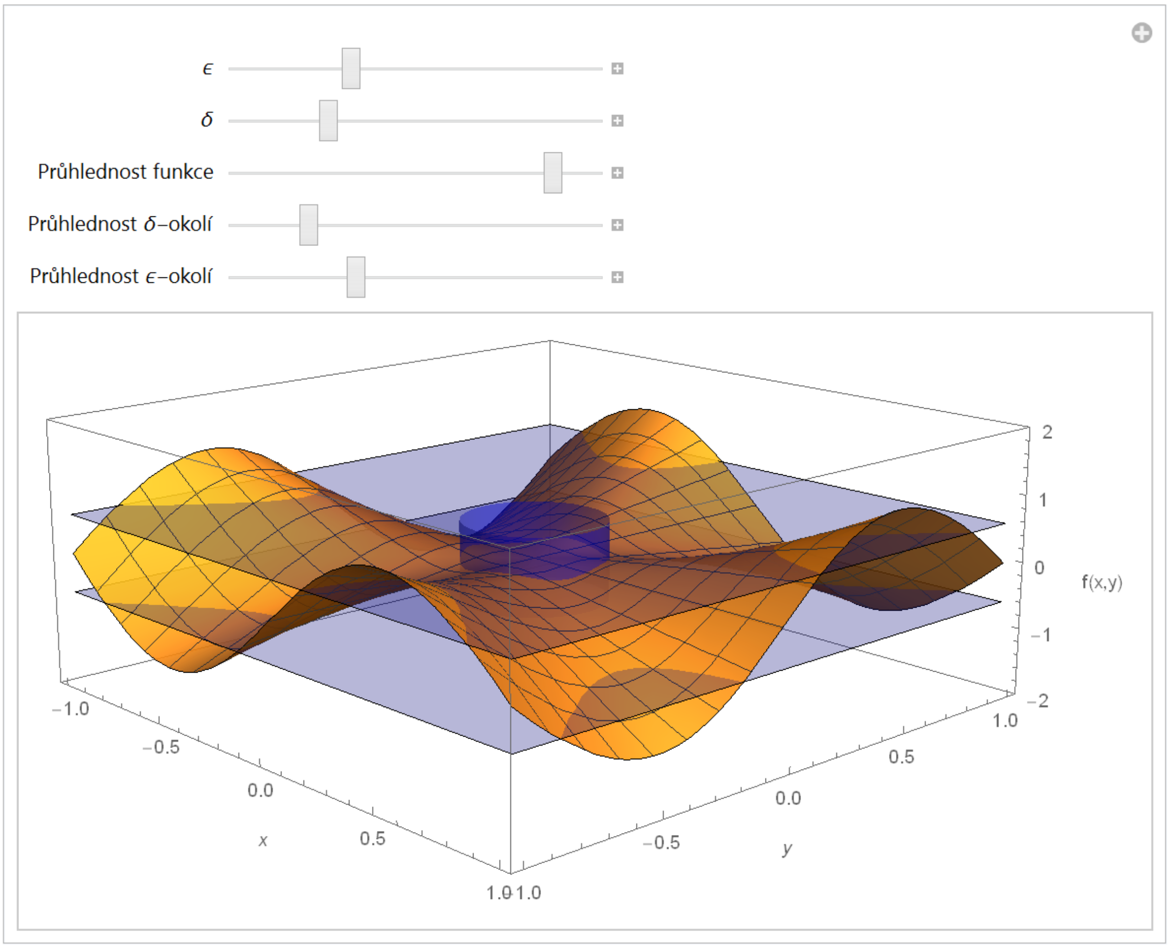
Co by se ale stalo, kdyby funkce $f(x, y)$ nebyla definována nejen v bodě $c = (x_0, y_0)$, ale např. ani na některé přímce či křivce tímto bodem procházející? Podle „úzké“ definice limity by již nemohla existovat $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a$, neboť podmínka $f(x, y) \in O_z(a)$ má být splněna pro všechny body daného redukovaného čtvercového okolí $O_\delta^*(c)$.

Taková situace je sice příznivá např. z pohledu studentského, neboť se v podobném případě nemusí žádná limita počítat a lze se odkázat na definiční obor funkce f. Z druhé strany je „úzká“ definice limity přesným přepisem situace známé z teorie limit funkcí jedné proměnné, jen pracujeme ne s úsečkovým, ale se čtvercovým či sférickým okolím.

Vzhledem k tomu, že přímka či křivka prochází bodem nespojitosti $c = (x_0, y_0)$ v němž hledáme limitu, můžeme tvrdit, že limita funkce f neexistuje. Proto se zavádí pojem limity funkce vzhledem k množině, při kterém dané křivky zanedbáváme, a tak může dojít k samotnému výpočtu limity funkce f v limitním bodě c.

Máme tedy dva druhy limit a je dobré si při studiu literatury všimnout, s jakým typem limity autor pracuje či zda uvádí dokonce oba druhy dvojných limit.

O „úzkou“ definici se lze opřít v některých příkladech a tím si případně ulehčit práci. Někdy limita funkce podle této definice neexistuje, avšak podle definice limity funkce na množině existuje. Tento případ uvedu v části 3.4 týkající se výpočtu limit.



Obr. 2. Vyobrazení „úzké“ definice limity. Tento graf s nastavitelnými okolími a průhledností se nachází na CD.

Definice nevlastní limity v bodě: Nechť f je funkce n proměnných. Nechť $M \neq \emptyset$ je množina bodů prostoru E_n a bod A je hromadným bodem množiny $M \cap D(f)$. Pak říkáme, že funkce f má v bodě A nevlastní limitu $+\infty$ (resp. $-\infty$) vzhledem k množině M a píšeme $\lim_{\substack{X \to A \\ X \in M}} f(X) = +\infty$ (resp. $\lim_{\substack{X \to A \\ X \in M}} f(X) = -\infty$, jestliže ke každému kladnému číslu K existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny body X množiny M, různé od bodu A, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ (tj. platí $0 < \rho(A, X) < \delta$), platí $f(X) > K$ (resp. $f(X) < -K$).

[2]

Limity jednostranné nejsou pro funkce více reálných proměnných definovány.

Dvojná limita: Limitu $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ nazveme dvojnou limitou za předpokladu, že pro určité číslo $\delta > 0$ platí: Pro každé číslo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ existuje $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = b(x)$.

Při tomto „limitování" se x nemění, jen „y se blíží k y_0". Pro každé číslo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ jde tedy o limitu funkce jedné proměnné *y*. Proto je nalezená limita *b* obecně funkcí proměnné *x*, definovanou na množině $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

[2]

Toto tvrzení platí i pro vícerozměrné limity (tedy pro limity funkcí více reálných proměnných).

Vícenásobné (dvojnásobné) limity: Tyto limity dostaneme, počítáme-li postupně limity funkce podle jednotlivých proměnných. Existence limity funkce více proměnných zaručuje existenci všech limit vícenásobných a všechny limity jsou si rovné.

Platí tedy: Je-li $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$, pak

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = A.$$

[4]

Pro funkce dvou reálných proměnných tyto limity nazýváme dvojnásobné.

3.2 VLASTNOSTI LIMIT FUNKCÍ VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

3.2.1 JEDNOZNAČNOST LIMITY

Funkce *f n* proměnných má v bodě *A* vzhledem k množině *M* nejvýše jednu limitu.

3.2.2 PODMNOŽINY

Je-li $\lim_{\substack{x\to A\\ x\in M}} f(x) = b$, pak totéž musí platit, pro každou podmnožinu $N \subset M$, pro niž je *A* také hromadným bodem.

Věta říká, že pokud má v daném bodě funkce limitu, tak musí mít stejnou limitu i v podmnožinách definičního oboru této funkce, čehož se často využívá při vyšetřování existence limity a stanovení její hodnoty.

3.2.3 PRSTENCOVÉ OKOLÍ

Jestliže funkce f (X) má v bodě A limitu, pro niž platí $\lim_{\substack{x\to A\\ x\in M}} f(X) > 0$ (resp. $\lim_{\substack{x\to A\\ x\in M}} f(X) < 0$), pak existuje takové prstencové okolí *P* bodu *A*, že v každém bodě množiny $P \cap M$ platí $f(X) > 0$ (resp. $f(X) < 0$).

3.2.4 ALGEBRA LIMIT

Nechť funkce $f(X)$ a $g(X)$ mají v bodě A vlastní limitu. Pak v bodě A mají limitu funkce $|f(X)|, c_1 f(X) \pm c_2 g(X)$, kde c_1, c_2 jsou konstanty, $f(X)g(X), \frac{f(X)}{g(X)}$ (je-li $\lim_{X\to A} g(X) \neq 0$) a platí:

a) $\lim_{X\to A}|f(X)| = |\lim_{X\to A} f(X)|$,

b) $\lim_{X\to A}(c_1 f(X) \pm c_2 g(X)) = c_1 \lim_{X\to A} f(X) \pm c_2 \lim_{X\to A} g(X)$,

c) $\lim_{X\to A}[f(X)g(X)] = \lim_{X\to A} f(X) \lim_{X\to A} g(X)$,

d) $\lim_{X\to A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\lim_{X\to A} f(X)}{\lim_{X\to A} g(X)}$.

3.2.5 LIMITNÍ PŘECHOD V ARITMETICKÝCH OPERACÍCH

Nechť f a g jsou funkce definované na stejné množině v euklidovském prostoru. Předpokládejme, že $\lim_{x\to A} f(x) = b$, $\lim_{x\to A} g(x) = c, b, c \in \mathrm{E}_1$. Pak platí následující tvrzení:

a) $\lim_{x\to A}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,

b) $\lim_{x\to A} f(x)\, g(x) = bc$,

c) $\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, za předpokladu, že $c \neq 0$.

3.2.6 OMEZENÁ FUNKCE

Nechť existuje vlastní limita $\lim_{\substack{X\to A \\ X\in M}} f(X)$. Pak existuje takové okolí U bodu A, že funkce f je omezená na množině $U \cap M$.

3.2.7 SPOJITOST FUNKCE

Nechť f je funkce definovaná na množině $M \subseteq \mathrm{E}_n$ a nechť A je hromadný bod množiny M, přičemž $A \in M$. Pak funkce f je spojitá v bodě A vzhledem k množině M, právě když $\lim_{\substack{X\to A \\ A\in M}} f(X) = f(A)$.

3.2.8 „SEVŘENÁ“ FUNKCE

Nechť f a g jsou funkce definované na stejné množině v euklidovském prostoru. Předpokládejme, že $\lim_{x\to A} f(x) = b$, $\lim_{x\to A} g(x) = c$. Pak platí následující tvrzení: Platí-li pro funkci h na jistém prstencovém okolí bodu A nerovnost $f \leq h \leq g$ a je-li přitom $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} g(x)$, pak $\lim_{x\to A} h(x) = \lim_{x\to A} f(x)$.

3.2.9 SOUVISLOST DVOJNÉ A DVOJNÁSOBNÉ LIMITY

Nechť existuje dvojná limita $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$, limity $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ pro všechny hodnoty proměnné y z určitého prstencového okolí bodu y_0 a limity $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ pro všechny hodnoty proměnné x z určitého prstencového okolí bodu x_0. Pak existují také dvojnásobné limity v následujícím vztahu a platí $\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$.

Obrácená věta neplatí. Z existence dvojnásobných limit neplyne existence dvojné limity. Tato vlastnost platí i pro funkce více reálných proměnných.

3.2.10 OSTATNÍ VLASTNOSTI

Nechť f a g jsou funkce definované na stejné množině v euklidovském prostoru. Předpokládejme, že $\lim_{x\to A} f(x) = b$, $\lim_{x\to A} g(x) = c, b, c \in \mathrm{E}_1$. Pak platí následující tvrzení:

a) Nechť h (t) je funkce definovaná v jistém prstencovém okolí bodu b, která má v tomto bodě vlastní limitu a nechť existuje prstencové okolí P bodu A, že $f(x) \neq b$ pro $x \in P$. Pak $\lim_{x\to A} h\big(f(x)\big) = \lim_{t\to b} h(t)$.

b) Je-li $f \leq g$ na jistém prstencovém okolí bodu A, pak $b \leq c$.

c) Je-li $|f| \leq |g|$ na jistém prstencovém okolí bodu A a současně $\lim_{x\to A} g(x) = 0$, pak $\lim_{x\to A} f(x) = 0$.

[2][3][4][5]

3.3 TRANSFORMACE KARTÉZSKÝCH SOUŘADNIC DO SOUŘADNIC POLÁRNÍCH

Pro mnoho výpočtů limit funkcí více reálných proměnných je výhodnější použít místo kartézských souřadnic souřadnice polární, proto se v této kapitole zabývám popisem procesu transformace tohoto typu souřadnic.

Pomocí polárních souřadnic je bod určen, obdobně jako u kartézských souřadnic, dvěma parametry, avšak u polárních souřadnic jsou jimi míněny vzdálenost ρ bodu od počátku a orientovaný úhel φ, který svírá polohový vektor daného bodu s kladnou částí osy x.

Vztah mezi kartézskými souřadnicemi (x, y) a polárními souřadnicemi (ρ, φ):

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi$$
$$y = y_0 + \rho\sin\varphi$$
$$\rho \geq 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$

kde (x_0, y_0) je hromadný bod, ve kterém počítám limitu dané funkce. [6]

3.4 METODY VÝPOČTŮ LIMIT FUNKCÍ VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

V následující kapitole se budu věnovat výpočtům limit funkcí více reálných proměnných. Problematika výpočtu těchto limit je poněkud náročnější než výpočet limit funkcí jedné reálné proměnné. Jsou zde uvedeny nejčastější metody, které se k výpočtu používají. U každého příkladu je popsán postup, jaký jsem při počítání použila. Pro názornost jsou u některých příkladů znázorněny i grafy vytvořené v programu Mathematica. Z grafů je často patrné, kam funkce z různých směrů k danému hromadnému bodu směřuje. U některých příkladů lze dojít k výsledku i jiným způsobem. Ve dvou případech (Příklad č. 7, Příklad č. 8) je ukázáno i řešení pomocí „úzké" definice limity.

Ve většině případů se zabývám funkcemi dvou reálných proměnných. Pro funkce více reálných proměnných by byl postup obdobný, avšak poněkud složitější. U některých výpočtů limit funkcí dvou reálných proměnných použiji transformaci kartézských souřadnic na souřadnice polární, avšak u funkcí tří reálných proměnných už může dojít k převodu kartézských souřadnic do sférických souřadnic. Proto je pro výpočet limit složitějších funkcí výhodnější použít počítačový program, například Mathematica či Matlab.

Nejprve popíši způsoby, kterými lze dojít k požadovanému výsledku u výpočtu limit, a následně ukážu nějaké příklady.

Pokud mám vypočítat limitu funkce $f(x,y)$ pro $x \to x_0$ a $y \to y_0$, mohu použít tyto metody:

a) Jestliže je funkce f v hledaném bodě (x_0, y_0) spojitá, pak mohu za neznámé x, y dosadit a dostanu $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}(x,y) = f(x_0, y_0)$.

   (Příklad č. 4, Příklad č. 5, Příklad č. 6)

b) Pokud po dosazení hromadného bodu do funkce dostanu neurčitý výraz, tak se mohu pokusit pomocí elementárních úprav funkci upravit tak, aby byl výsledný tvar vhodnější. Poté už lze postupovat obdobně jako v a).

   (Příklad č. 7, Příklad č. 8)

c) Výpočty lze také provést tak, že zavedu substituci, ve které se nachází funkce, která je definována v jistém okolí bodu (x_0, y_0). Nejčastěji se zavádí substituce: $y = kx$ pro $x \to 0$ a $y \to 0$ nebo $y = k(x - x_0) + y_0$ pro $x \to x_0$ a $y \to y_0$. V tomto případě se k bodu přibližujeme po svazku přímek. Pokud se budu k bodu (x_0, y_0) blížit po parabolách, tak si daný bod (x_0, y_0) zvolím vrcholem paraboly, a poté dostanu substituci: $y - y_0 = k(x - x_0)^2$. Po úpravách bude

$y = k(x - x_0)^2 + y_0$. Jestliže se poté tyto dvě limity nerovnají, nebo je jedna z těchto limit závislá na koeficientu (směrnici) k, tak mohu tvrdit, že původní limita neexistuje. Avšak pokud se limity rovnají, tak o původní limitě nelze říci, že existuje.

(Příklad č. 9, Příklad č. 10, Příklad č. 11, Příklad č. 12, Příklad č. 13)

d) Jinou možností je vypočtení dvojnásobných limit. Pokud se tyto limity nerovnají, tak hned mohu o limitě v bodě (x_0, y_0) říci, že neexistuje. Avšak pokud se dvojnásobné limity rovnat budou, tak o existenci dvojné limity nelze nic říci a musím pokračovat ve výpočtu. Dvojnásobné limity lze také použít pro ověření správnosti vypočtené limity (pokud se rovnají obě dvojnásobné limity a limita dvojná, tak je výsledek správný).

(Příklad č. 14, Příklad č. 15, Příklad č. 16, Příklad č. 17)

e) Lze také použít již zmiňovanou transformaci kartézských souřadnic do souřadnic polárních a algebraickými úpravami eliminovat jednu proměnnou (φ).

Věta, která platí pro limitu funkce při transformaci souřadnic:

Funkce f má v bodě (x_0, y_0) limitu b, jestliže existuje nezáporná funkce g: $< 0, \infty) \to < 0, \infty)$ splňující $\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0$ taková, že $|f(x_0 + \rho\cos\varphi,\ y_0 + {} + \rho\sin\varphi) - \mathrm{b}| < g(\rho)$ pro každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $\varphi > 0$ dostatečně malé. Speciálně, platí-li po transformaci do polárních souřadnic $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{\rho \to 0^+} h(\rho) g(\varphi)$ kde $\lim_{\rho \to 0^+} h(\rho) = 0$ a funkce $g(\varphi)$ je omezená pro $\varphi \in < 0, 2\pi)$, pak $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = 0$.

[9]

(Příklad č. 18, Příklad č. 19)

f) Další alternativou výpočtu je použití základních limit. Mám na mysli použití stejných vzorců jako u funkcí jedné proměnné. K těmto vzorcům se dostanu pomocí vhodné substituce. Příklady některých vzorců, které se používají: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\sin f(x,y)}{f(x,y)} = 1$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\ln(1 + f(x,y))}{f(x,y)} = 1$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (1 + f(x, y))^{\frac{1}{f(x,y)}} = e$, pokud $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = 0$.

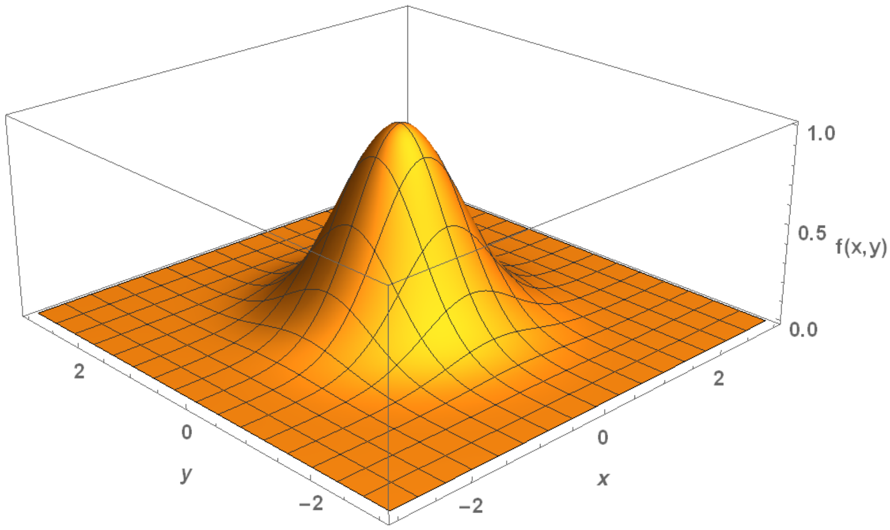
(Příklad č. 20, Příklad č. 21, Příklad č. 22, Příklad č. 23)

g) Dále je možné využít odhadu pomocí funkcí (posloupností), o jejichž průběhu v daném bodě mám představu a liší se jen málo od původní funkce.
(Příklad č. 24, Příklad č. 25, Příklad č. 26, Příklad č. 27)

Příklad č. 4 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-x^2-y^2}$.

Řešení: Tuto limitu lze jednoduše vyřešit tím, že za neznámé x, y dosadím hromadný bod (0, 0), protože daná funkce je spojitá v celém prostoru E_2.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-x^2-y^2} = e^{-0-0} = e^0 = 1.$$



Obr. 3. Graf funkce $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, ze kterého je patrné, že v bodě (0, 0) má limitu rovnou hodnotě 1.

Příklad č. 5 Určete $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+6}{3x-y+5}$.

Řešení: Funkce je v bodě (2, 1) definována a spojitá, proto mohu za neznámé x, y dosadit tento hromadný bod a limitu nalézt.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+6}{3x-y+5} = \frac{2+6}{3\cdot 2-1+5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Příklad č. 6 Stanovte limitu funkce $f(x,y,z) = x^3y^2z$ v bodě (1, 2, 1).

Řešení: Funkci lze pomocí algebry limit rozdělit na součin spojitých funkcí $g(x,y,z) = x^3, h(x,y,z) = y^2, i(x,y,z) = z$. Poté lze dosadit limitní bod a limitu vypočítat.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} x^3y^2z = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} x^3 \cdot \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} y^2 \cdot \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} \mathrm{z} = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4.$$

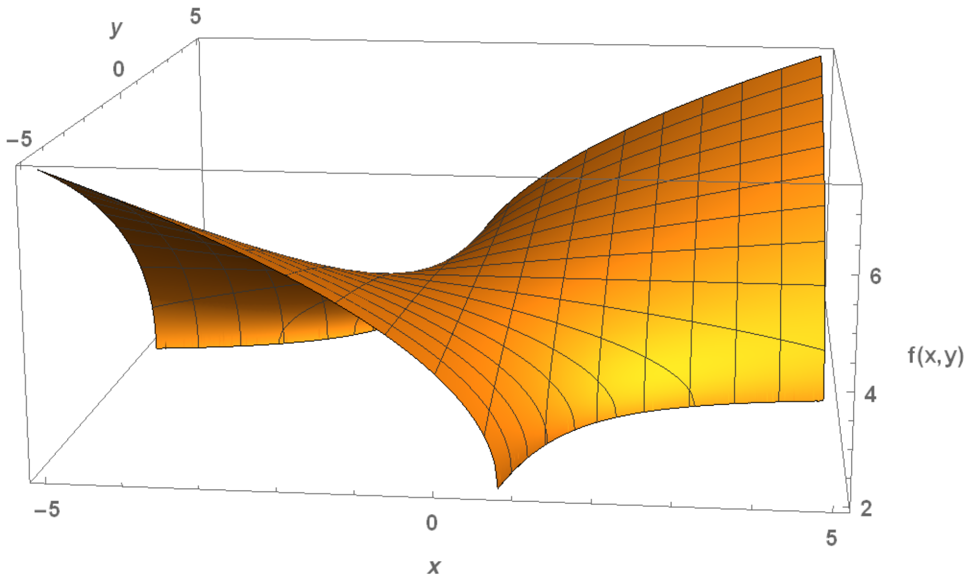
Příklad č. 7 Přesvědčte se, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} = 4$.

Řešení: Funkce $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$ není definována v bodě (0, 0) a podle „úzké" definice limity ještě na osách x, y. Podle této definice limita funkce $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$ v bodě (0, 0) neexistuje, protože v každém redukovaném okolí bodu (0, 0) existuje nekonečně mnoho bodů, ve kterých neexistuje funkční hodnota. Funkční hodnoty by se ale bez výjimek měly blížit k hodnotě limity. Nyní přistoupím k prozkoumání chování limity na množině $\mathrm{E}_2 \setminus \{(0,0)\}$. Nejjednodušší možnost, jak dojít k výsledku, je rozšířit celý výraz „chytrou" jedničkou. Poté už snadnými algebraickými úpravami vypočítám limitu funkce $f(x,y)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{xy+4}+2}{\sqrt{xy+4}+2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy \cdot (\sqrt{xy+4}+2)}{xy+4-4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy \cdot (\sqrt{xy+4}+2)}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{xy+4}+2\right)$$

$$= \sqrt{0 \cdot 0 + 4} + 2 = 4.$$



Obr. 4. Graf funkce $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$.

Příklad č. 8 Vypočítejte limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^4-y^4}{x^3-y^3}$ v bodě (3, 3).

Řešení: Daná limita neexistuje podle „úzké“ definice limity. Funkce $f(x, y) = \frac{x^4-y^4}{x^3-y^3}$ totiž není definována nejen v bodě (0, 0), ale kromě toho i na osách *x*, *y*. Proto v každém redukovaném okolí bodu (0, 0) existuje dokonce nekonečně mnoho bodů, v nichž vůbec neexistuje funkční hodnota (a ty by se měly k hodnotě limity „blížit“ bez výjimek). Proto přistupuji k prozkoumání limity vzhledem k množině, tj. vzhledem k definičnímu oboru (pomíjím osy *x*, *y*). Protože po dosazení limitního bodu do funkce dostanu neurčitý výraz, tak musím nejprve danou funkci upravit algebraickými úpravami. Poté už lze do upravené funkce dosadit a vypočítat zadanou limitu.

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 3}} \frac{x^4-y^4}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 3}} \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 3}} \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{(x^2+xy+y^2)} = \frac{(3+3)(3^2+3^2)}{(3^2+3\cdot 3+3^2)} = \frac{108}{27} = 4.$$

Příklad č. 9 Rozhodněte, zda existuje $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}} \frac{2x+5}{3x-y+4}$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že funkce v čitateli i jmenovateli jsou spojité v bodě (1,4), lze tento příklad řešit dosazením limitního bodu (1, 4) do funkce. Limita je rovna číslu $\frac{7}{3}$. Uvedu zde ale jiný způsob výpočtu, aby byla správně pochopena problematika substituce přímky a paraboly za neznámou y. Pokusím se prozkoumat „blížení" do bodu (1, 4) po všech přímkách tímto bodem procházejících a posléze i po vybraných parabolách. Nejprve za proměnnou y dosadím rovnici přímky pro bod (1, 4), to jest $y = k(x-1)+4$. Tato limita mi vyjde rovna číslu $\frac{7}{3}$, protože po elementárních úpravách není funkce závislá na směrnici k. V druhém případě budu nahrazovat y rovnicí paraboly pro bod (1, 4): $y = k(x-1)^2+4$. Limita po vyřešení opět nezávisí na parametru k, a proto vyjde rovna číslu $\frac{7}{3}$.

- Substituce $y = k(x-1)+4$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+5}{3x-[k(x-1)+4]+4} = \frac{2\cdot 1+5}{3\cdot 1-[k(1-1)+4]+4} = \frac{7}{3}.$$

- Substituce $y = k(x-1)^2+4$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+5}{3x-[k(x-1)^2+4]+4} = \frac{2\cdot 1+5}{3\cdot 1-[k(1-1)^2+4]+4} = \frac{7}{3}.$$

- Dosazení limitního bodu

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}} \frac{2x+5}{3x-y+4} = \frac{2\cdot 1+5}{3\cdot 1-4+4} = \frac{7}{3}.$$

Příklad č. 10 Určete $\lim_{\substack{x\to 6\\ y\to 8}} \frac{y-8}{x+y-14}$.

Řešení: V tomto případě je limitní bod bodem nespojitosti této funkce. Budu postupovat jako v předchozím příkladu, takže nahradím proměnnou y rovnicí přímky $k(x-6)+8$. Ve výsledku se poté vyskytuje směrnice k, což znamená, že dostanu pro různá k různé limity, a proto tato limita neexistuje.

$$\lim_{\substack{x\to 6\\ y\to 8}} \frac{y-8}{x+y-14} = |y = k(x-6)+8|$$

$$= \lim_{x\to 6} \frac{k(x-6)+8-8}{x+k(x-6)+8-14} = \lim_{x\to 6} \frac{k(x-6)}{(x-6)(k+1)} = \lim_{x\to 6} \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{k}{k+1}, \text{pro } k \neq -1.$$

$\lim_{\substack{x\to 6\\ y\to 8}} \frac{y-8}{x+y-14}$ → neexistuje.

Příklad č. 11 Rozhodněte, zda existuje $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení: Bod (0, 0) je bodem nespojitosti funkce $\frac{x+y}{x-y}$. Opět se budu snažit dokázat, že existuje taková křivka, že pokud se po ní budu blížit k bodu (0, 0), tak dostanu jinou hodnotu než při přibližování po jiné křivce. Tím dospěji k tomu, že funkce $\frac{x+y}{x-y}$ nemá v bodě (0, 0) limitu. Nejdříve substituuji rovnicí paraboly ($y = kx^2$). Po dosazení dostanu hodnotu 1. Limita proto může existovat, ale již při dosazení rovnice přímky ($y = kx$) se ve výsledku vyskytuje parametr k, takže je tato limita pro různé hodnoty směrnice různá. Proto $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$ neexistuje.

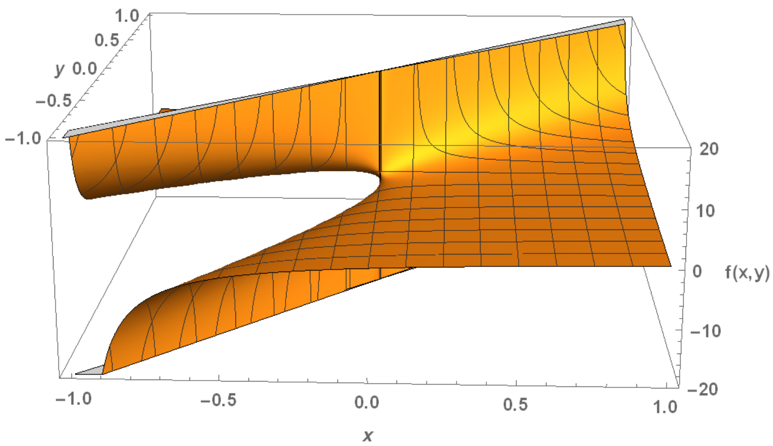
- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+kx)}{x(1-kx)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+kx}{1-kx} = 1.$$

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+k)}{x(1-k)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+k}{1-k} = \frac{1+k}{1-k}, \text{pro } k \neq 1.$$

$\rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$ neexistuje.



Obr. 5. Grafické znázornění funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$. Zde je patrné, že limita v bodě (0, 0) nemůže existovat.

Příklad č. 12 Vypočtěte $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

Řešení: Funkce $f(x,y)$ není definována nejen v bodě (0, 0), ale ani na přímce o rovnici $y=-x$. Z toho je jasné, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ neexistuje podle „úzké“ definice limity.

Pokusím se zjistit, co se děje v těsném okolí přímky o rovnici $y=kx$, a také v těsném okolí paraboly o rovnici $y=kx^2$. V obou případech vyjde limita rovna nule, to znamená, že limita může existovat. Vyšetřím funkční hodnoty v bodech $(x,-x+x^2)$, $(x,-x-x^2), x\neq 0$. Tyto body volím proto, že se k přímce $y=-x$ přibližují velmi blízko, protože pro malé hodnoty *x*, je druhá mocnina tohoto čísla velmi malá. Pro bod $(x,-x+x^2)$ jsou pro $x\to 0$ v každém okolí bodu (0, 0) funkční hodnoty blízké číslu dva. Pokud se přibližuji k přímce $y=-x$ „zezdola“ (bod $(x,-x-x^2)$), je vidět, že se funkční hodnoty v okolí bodu (0, 0) blíží k hodnotě -2. To znamená, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ počítaná vzhledem k definičnímu oboru této funkce neexistuje.

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+k^2x^2}{x+kx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+k^2)}{x(1+k)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+k^2)}{1+k}=0.$$

- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+k^2x^4}{x+kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+k^2x^2)}{x(1+kx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+k^2x^2)}{1+kx}=0.$$

- Substituce $y=-x+x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(-x+x^2)^2}{x+(-x+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2-2x^3+x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}(2-2x+x^2)=2-2\cdot 0+0$$
$$=2.$$

- Substituce $y=-x-x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(-x-x^2)^2}{x+(-x-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2+2x^3+x^4}{-x^2}=\lim_{x\to 0}(-2-2x-x^2)=-2-2\cdot 0-0$$
$$=-2.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x+y}\ \text{neexistuje.}$$

Příklad č. 13 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^6}$.

Řešení: Opět nejprve prostuduji, co se děje, kdybychom se přibližovali do počátku po přímkách a parabolách. Obě tyto limity vyjdou rovny nule. Když ale studuji křivku $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (pro $x > 0$), po algebraických úpravách zjistím, že když postupuji do bodu (0, 0) po této křivce, nachází se na ní body s funkčními hodnotami rostoucími k nekonečnu. Dvojná limita proto existovat nebude.

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xk^2x^2}{x^2+k^6x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^3}{x^2(1+k^6x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x}{1+k^6x^4} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xk^2x^4}{x^2+k^6x^{12}} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^5}{x^2(1+k^6x^{10})} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^3}{1+k^6x^{10}} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Substituce $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{xx^{\frac{1}{3}}}{x^2+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{5}{3}}}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^6} \text{ neexistuje.}$$

Příklad č. 14 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-5y}{7x+y}$.

Řešení: Definiční obor funkce je $E_2 \setminus \{[0,0]\}$. V tomto příkladu využiji okolnosti, že pokud se dvojnásobné limity nerovnají, tak limita dané funkce neexistuje. Vypočítám proto dvojnásobné limity, a protože jsou navzájem různé, mohu říci, že daná limita neexistuje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-5y}{7x+y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-5y}{7x+y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-5y}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-5}{1} = -5.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-5y}{7x+y} \text{ neexistuje.}$$

Příklad č. 15 Přesvědčte se, že pokud limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje, je rovna nule.

Řešení: Nejprve určím dvojnásobné limity. Tyto limity se rovnají, limita proto může existovat. O existenci se přesvědčím substitucí *y* = *kx*. Limita po úpravách opět vyjde rovna nule. Proto $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje a je rovna 0.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5}=\frac{2\cdot 0}{5}=0.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{7y^2}{-8y}=\lim_{y\to 0}\frac{-7y}{8}=\frac{-7\cdot 0}{8}=0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}=|y=kx|\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+7k^2x^2}{5x-8kx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(2+7k^2)}{x(5-8k)}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{2+7k^2}{5-8k}=0.$$

Závěr: Pokud limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje, platí

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}=0.$$

Příklad č. 16 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$.

Řešení: Po výpočtu dvojnásobných limit mohu tvrdit, že limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ může existovat, protože se tyto dvojnásobné limity rovnají, respektive obě jsou rovné 0. Dále zkusím do limity dosadit za proměnnou *y* svazek přímek (*y* = *kx*). Po algebraických úpravách ale vyjde tato limita závislá na směrnici *k*. Proto limita funkce $f(x,y)=\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ v bodě (0, 0) neexistuje.

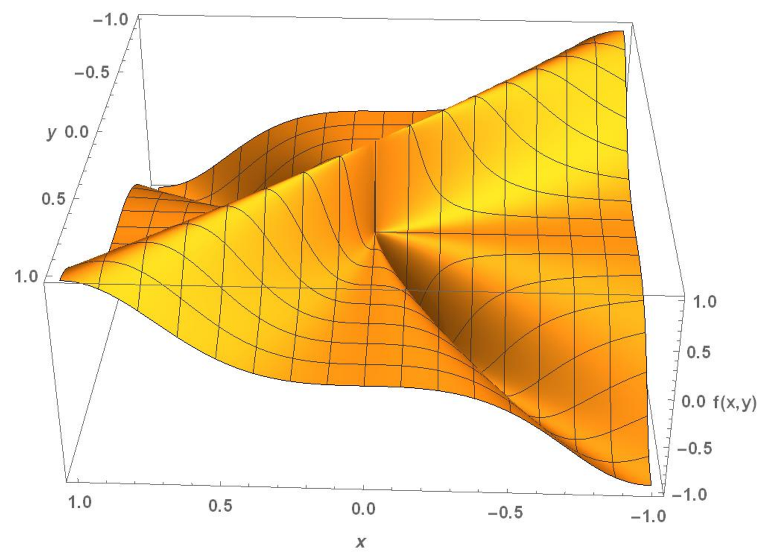
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3\cdot 0}{x^6+0}=0.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{2\cdot 0\cdot y^3}{0+y^6}=0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}=|y=kx|=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3k^3x^3}{x^6+k^6x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{2k^3x^6}{x^6(1+k^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{2k^3}{1+k^6}$$

$$=\frac{2k^3}{1+k^6}.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6 + y^6} \text{ neexistuje.}$$



Obr. 6. Funkce $f(x,y) = \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ má v počátku neobvyklý průběh, který značí, že limita v tomto bodě neexistuje.

V daném případě graf funkce $f(x,y)$ naznačuje, že by bylo třeba prozkoumat parciální funkce $f(x,x)$ a $f(x,0)$. Je $f(x,x) = 1$ pro x ≠ 0, $f(x,x)$ = 0 pro x ≠ 0. V sebemenším okolí počátku se tedy vyskytují funkční hodnoty 1 i 0 a dvojná limita nemůže existovat.

Příklad č. 17 Zjistěte, zda existuje $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2+y^2}$.

Řešení: Pokud vypočtu dvojnásobné limity této funkce, zjistím, že jedna z těchto limit neexistuje. Proto limita funkce $f(x,y) = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2+y^2}$ v bodě (0, 0) neexistuje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x} + 0}{x^2 + 0} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = \text{neexistuje.}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0\cdot\sin\frac{1}{0} + y^2}{0 + y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}1 = 1.$$

Závěr: Je $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$. Fakt, že první činitel má limitu nula, je zcela jasný a funkce $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ je omezená. Proto

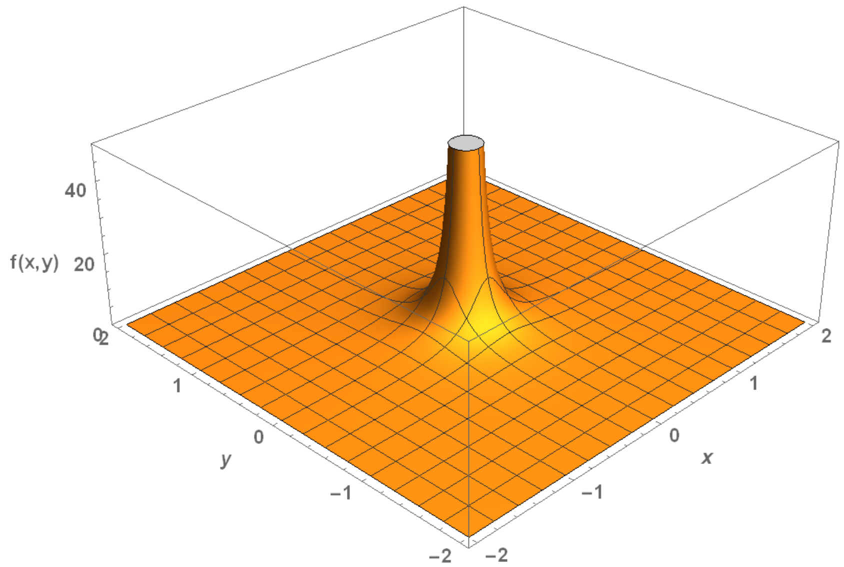
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2 + y^2} \text{ neexistuje.}$$

Příklad č. 18 Vypočítejte limitu v bodu $[0, 0]$ funkce $\frac{1}{x^2+y^2}$.

Řešení: Daná funkce má definiční obor $D(f) = \mathrm{E}_2 \setminus \{[0,0]\}$, proto nelze postupovat stejně jako v příkladech, kde jen dosadím za proměnné. Při řešení této limity použiji převod z kartézských souřadnic do souřadnic polárních. Po této transformaci se ve jmenovateli objeví známý vzorec pro počítání s goniometrickými funkcemi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Po uvedené úvaze je již zřejmé, že limita této funkce v daném bodě je rovna nekonečnu.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+y^2} = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho, \varphi \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{0} = \infty.$$



Obr. 7. V okolí bodu (0, 0) funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ roste nade všechny meze, to znamená, že limita je v tomto bodě rovna nekonečnu.

Příklad č. 19 Vypočítejte limitu v bodě $(2,2)$ funkce $f\colon \frac{1}{(x-2)^3+(y-2)^3}$.

Řešení: Definičním oborem funkce je $\mathrm{E}_2 \setminus \{(2,2)\}$. Budu postupovat obdobně jako v příkladu č. 3. Převedu si kartézské souřadnice na souřadnice polární. V případě funkce $f\colon \frac{1}{(x-2)^3+(y-2)^3}$ po převedení souřadnic a vytknutí výrazu ρ^3 dostanu výraz $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi$. Úpravami zmíněného výrazu pomocí goniometrickým vzorců dojdu k výsledku $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi = (\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi) = \left[\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) + \sin\varphi\right]\left[1 - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right] = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{1}{4}\pi\right)\left[1 - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]$. Výraz $\left[1 - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]$ je vždy kladný, avšak u výrazu $\cos\left(\varphi - \frac{1}{4}\pi\right)$ tomu tak není. Tento výraz je kladný například na intervalu $\left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$ a záporný pro $\varphi \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$. Proto vypočtu limitu pro oba dva případy. Jelikož se vypočtené limity nerovnají, limita této funkce v bodě $[2,2]$ neexistuje.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{1}{(x-2)^3+(y-2)^3} = \left|\begin{matrix} x = 2 + \rho\cos\varphi \\ y = 2 + \rho\sin\varphi \\ \rho, \varphi \to 0 \end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{(2+\rho\cos\varphi-2)^3+(2+\rho\sin\varphi-2)^3} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}.$$

Pro $\varphi \in \left(0, \frac{3}{4}\pi\right)\colon \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)} = +\infty$.

Pro $\varphi \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)\colon \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)} = -\infty$.

Příklad č. 20 Vypočtěte limitu $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+|y|)^{\frac{6}{(x^2+|y|)}}$.

Řešení: Limitu opět nelze řešit pouze dosazením za neznámé. Avšak lze vidět podobu s funkcí (jen jedné neznámé), při které byl použit pro výpočet limity vzorec $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Protože $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+|y|) = 0$, mohu tento vzorec použít. Proto zvolím vhodnou substituci, která mi pomůže výše uvedený vzorec získat. Po matematických úpravách mi vyjde limita rovna e^6.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+|y|)^{\frac{6}{(x^2+|y|)}} = \left|\begin{matrix} x^2+|y| = t \\ t \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{6}{t}} = e^6.$$

Příklad č. 21 Přesvědčte se, že $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{\sin[(x-1)^2+(y-1)^2]}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 1$.

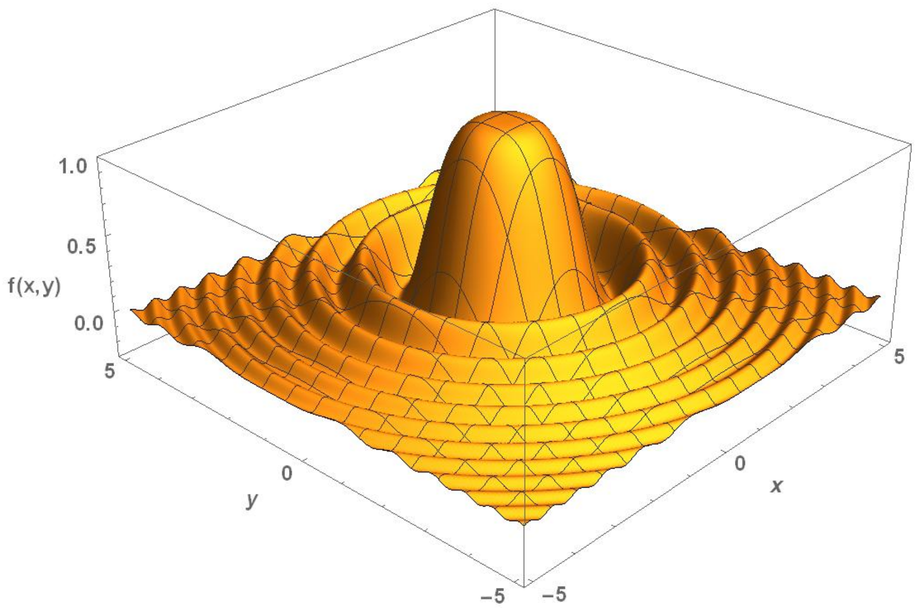
Řešení: U funkce lze opět najít podobnost se vzorcem pro výpočet limity funkce jedné reálné proměnné ($\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Kartézské souřadnice převedu na souřadnice polární a po jednoduchých algebraických úpravách dostanu již známý vzorec a limita vyjde rovna jedné. Vzorec jsem mohla použít, jelikož $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$. V tomto příkladu lze použít i substituci.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{\sin[(x-1)^2+(y-1)^2]}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \left| \begin{matrix} x = 1 + \rho\cos\varphi \\ y = 1 + \rho\sin\varphi \\ \rho, \varphi \to 0 \end{matrix} \right|$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{\sin[(1+\rho\cos\varphi - 1)^2 + (1+\rho\sin\varphi - 1)^2]}{(1+\rho\cos\varphi - 1)^2 + (1+\rho\sin\varphi - 1)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{\sin(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}} \frac{\sin[\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)]}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sin(\rho^2)}{\rho^2} = 1.$$



Obr. 8. Z grafu funkce $f(x,y) = \frac{\sin[(x-1)^2+(y-1)^2]}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ je zřejmé, že $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y) = 1$.

Příklad č. 22 Vypočtěte $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x}$.

Řešení: Celou funkci rozšířím výrazem $\frac{yz}{yz}$ a vzniklou funkci rozdělím podle věty 3.2.4. Zvolím si substituci $t = xyz$. Následně lze u funkce opět najít podobnost se vzorcem pro výpočet limity funkce jedné reálné proměnné ($\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Po složení jednotlivých funkcí dostanu limitu rovnou 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x} \cdot \frac{yz}{yz} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{xyz} \cdot yz = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{xyz} \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} yz =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{xyz} = \begin{vmatrix} t = xyz \\ t \to 0 \end{vmatrix} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} yz = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} y \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} z = 0 \cdot 0 = 0 \end{cases} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Příklad č. 23 Rozhodněte o existenci limity $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$, a pokud existuje, vypočítejte ji.

Řešení: Celou funkci rozšířím takzvanou chytrou jedničkou, tj. $\frac{x}{x}$. Rozložím novou funkci na dvě funkce $f(x,y) = \frac{\operatorname{tg} xy}{xy}$ a $g(x) = x$, podle věty týkající se algebry limit. Při výpočtu limity funkce $f(x,y)$ využiji substituci a funkci tangens si vyjádřím pomocí funkcí sinus a kosinus. Po dosazení dostávám limitu funkce $f(x,y)$ rovnou jedné a limitu funkce g(x) rovnou 2. Tudíž je výsledná limita v bodě (2, 0) rovna dvěma.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy} \cdot x = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy} \cdot \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy} = \begin{vmatrix} t = xy \\ t \to 0 \end{vmatrix} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t} = 1 \cdot 1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x = 2 \end{cases} = 1 \cdot 2 = 2.$$

Příklad č. 24 Určete limitu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} x \sin \frac{1}{x-y+z}$.

Řešení: Limitu budu řešit pomocí odhadu. Mohu totiž tvrdit, že pokud vynásobím proměnnou x funkcí sinus v absolutní hodnotě, vždy dostanu číslo menší nebo rovné absolutní hodnotě z x, protože absolutní hodnota funkce sinus je vždy menší nebo rovna 1. Využiji zde také znalosti věty uvedené v kapitole 3.2.10. Proto se tato limita rovná nule.

$$\left|x \sin \frac{1}{x-y+z}\right| \leq |x|$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} |x| = 0 \ \to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} x \sin \frac{1}{x-y+z} = 0.$$

Příklad č. 25 Dokažte, že platí $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

Řešení: K dokázání tohoto tvrzení opět použiji odhad hodnot funkcí v okolí bodu (0, 0). Nejprve si funkci rozložím na dvě funkce podle kapitoly 3.2.4. Dostanu limity: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x$ a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$. Je zřejmé, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = 0$. Funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ je omezená na množině $E_2 \setminus \{[0,0]\}$, protože pro všechna (x, y) z definičního oboru platí $-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$. Pokud ověřím tuto nerovnost, bude zřejmé, že opravdu platí pro všechna $(x,y) \neq (0,0)$. Konečně platí, že součin funkce mající limitu rovnou nule a funkce omezené je roven nule.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\to \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{xy}{x^2+y^2} \to -2xy \leq x^2+y^2 \ \to 0 \leq x^2+2xy+y^2 \to 0 \leq (x+y)^2 \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2} \to 2xy \leq x^2+y^2 \ \to 0 \leq x^2-2xy+y^2 \to 0 \leq (x-y)^2 \end{cases}$$

$$\to f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ je omezená.}$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \cdot \text{omezená funkce} = 0.$$

Příklad č. 26 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

Řešení: Při výpočtu využiji odhadu. V nové funkci si výraz ve jmenovateli upravím tak, aby se v něm nacházel vzorec $(a+b)^2$. Nerovnost bude platit, protože pokud bude výraz ve jmenovateli v nové funkci větší než ve funkci původní, tak tato původní funkce bude vždy větší nebo rovna vytvořené funkci. Nová funkce je po úpravě $g(x) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Limita funkce $g(x) = \frac{1}{x^2+y^2}$ pro $x, y \to 0{,}0$ vyjde, použitím převodu kartézských souřadnic do souřadnic polárních, rovna nekonečnu. Proto i limita původní funkce musí vyjít rovna nekonečnu.

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \geq \frac{x^2+y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+y^2} = \left|\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho,\varphi \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\to 0}} \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \infty.$$

Příklad č. 27 Vypočítejte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ v bodě (0, 0).

Řešení: Při výpočtu této limity použiji odhad. Zabývám se výpočtem v prvním kvadrantu, kdy $x > 0, y > 0$. Pro další kvadranty platí, že vždy bude alespoň jedna z proměnných záporná, a tak bude nerovnost určitě platit. Proto mohu použít pro odhad absolutní hodnotu funkce $f(x,y)$. Nejprve jsem pomocí algebraických úprav upravila odhad za funkci $g(x,y) = x^3 + y^3$, z něhož je patrné, že zvolená nerovnost platí, a následně jsem tuto funkci upravila podle funkce zadané. Porovnáním původní funkce a funkce zvolené odhadem dojdu k výsledné limitě.

$$\text{I. kvadrant } (x > 0, y > 0)\colon x^3 + y^3 \leq 2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \ /^2$$

$$(x^3+y^3)^2 \leq 4(x^2+y^2)^3$$

$$x^6 + 2\mathrm{x}^3\mathrm{y}^3 + y^6 \leq 4(x^6 + 3\mathrm{x}^4\mathrm{y}^2 + 3\mathrm{x}^2\mathrm{y}^4 + y^6)$$

$$0 \leq 3x^6 - 2\mathrm{x}^3\mathrm{y}^3 + 12\mathrm{x}^4\mathrm{y}^2 + 12\mathrm{x}^2\mathrm{y}^4 + 3y^6$$

$$\rightarrow \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = 2\left(0^2+0^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

3.5 Určování spojitosti funkce více reálných proměnných pomocí limit

V této části jsou uvedeny případy určování spojitosti funkce s využitím výpočtu limit funkcí více reálných proměnných. Velmi často se problematika spojitosti funkce spojuje s výpočtem limit, protože tímto způsobem lze k výsledku dojít velmi rychle. Při výpočtech se opírám o větu zmíněnou v kapitole 3.2.7.

Příklad č. 28 Vyšetřete spojitost funkce $f(x,y)$ v bodě (0, 0), která je definována předpisem:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{pro } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Řešení: Vypočítám limitu funkce $f(x,y)$ v bodě (0, 0). K výpočtu limity postačí algebraické úpravy. Celou funkci rozšířím výrazem $\frac{\sqrt{x^2y^2+1}+1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1}$ a po vykrácení výrazu x^2y^2 už mohu za proměnné dosadit. Limita poté vyjde rovna číslu 2, a proto je funkce $f(x,y)$ spojitá v bodě (0, 0).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2y^2+1}+1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)}{x^2y^2+1-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right) = \sqrt{0^20^2+1}+1$$

$$= 2$$

$$\rightarrow\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \quad \text{je spojitá v bodě } (0,\ 0).$$

Příklad č. 29 Ukažte, že funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$ není spojitá v bodě (0, 0).

Řešení: Pro určení spojitosti postačí, když vypočítám dvojnásobné limity. Protože se sobě nerovnají, neexistuje ani dvojná limita, a proto funkce $f(x,y)$ není spojitá v bodě (0, 0).

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{0^2+y^2}} = 0.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ neexistuje.}$$

$$\to f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \text{ není spojitá v bodě } (0,0).$$

Příklad č. 30 Ověřte spojitost funkce $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě (0, 0).

Řešení: V příkladu uvedu dva způsoby řešení. Nejprve vypočítám limitu funkce $f(x,y)$ v bodě (0, 0) transformací kartézských souřadnic do souřadnic polárních. Limita je rovna 0. Funkce $f(x,y)$ je v bodě (0, 0) spojitá.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left|\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho,\varphi \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\to 0}}\frac{\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\to 0}}\frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi\to 0}}\rho\cos\varphi\sin\varphi = 0.$$

$$\to f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ je spojitá v bodě } (0,0).$$

Další možností výpočtu je ověření hypotézy: Pokud čitatel funkce klesá k nule rychleji než jmenovatel, bude se limita funkce rovnat 0. Čitatel (*xy*) je polynomem druhého stupně se dvěma reálnými proměnnými. Jmenovatel je podle všeobecně známého vztahu větší nebo roven absolutní hodnotě proměnné *x* $\left(\text{tzn. } \sqrt{x^2+y^2} \geq |x|\right)$. Po algebraických úpravách dostanu nerovnost $\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y|$. Za předpokladu pravdivosti věty c) v kapitole

3.2.10 mohu tvrdit, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, protože $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y| = 0$. Proto je funkce $f(x,y)$ spojitá v bodě (0, 0).

$$|xy||x| \leq |x||y|\sqrt{x^2+y^2} \to |f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x||y|}{|x|} = |y|$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y| = 0 \to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

$$\to f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ je spojitá v bodě } (0,0).$$

Příklad č. 31 Rozhodněte, zda je možno nalézt funkci $g(x)$ tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} \text{ pro } x \neq y \\ g(x) \text{ pro } x = y \end{cases} \text{ byla spojitá v } E_2.$$

Řešení: Funkce $f(x,y)$ je spojitá, pokud existuje limita na celé množině E_2. Nejprve si funkci upravím pomocí algebraických úprav, a dále za proměnnou y dosadím x. Aby byla funkce spojitá v E_2, musí mít funkce $g(x)$ předpis $g(x) = 2x$.

$$\frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y.$$

$$\to g(x) = x + x = 2x.$$

3.6 DEFINICE SYMBOLU $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$

V této podkapitole je uvedeno několik ukázek zápisu limit funkcí více reálných proměnných pomocí definice limity a s tím spojené symboliky. Touto problematikou se budu dále zabývat při výpočtu limit pomocí eliminace kvantifikátorů.

Příklad č. 32 Uveďte definici symbolu $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 5}} f(x,y) = 4$.

Řešení: Jelikož je limitním bodem bod (2, 5), nadefinuji k neznámým x a y jen ε a δ.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; \forall x,y \colon 2-\delta < x < 2+\delta \wedge 5-\delta < y < 5+\delta$$
$$4-\varepsilon < f(x,y) < 4+\varepsilon.$$

Příklad č. 33 Zapište definici symbolu $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -\infty}} f(x,y) = 8$.

Řešení:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0, y_0 \; \forall x,y \colon 2-\delta < x < 2+\delta \wedge y < y_0$$
$$8-\varepsilon < f(x,y) < 8+\varepsilon.$$

Příklad č. 34 Napište definici symbolu $\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}} f(x,y) = \infty$.

Řešení: V tomto případě musím definovat i neznámou x_0, protože x jde pro tento limitní bod do nekonečna. Jde o nevlastní limitu, proto rozpis nebude začínat kladným ε jako u předchozích limit, ale číslem k. Ve vztahu k chystané eliminaci kvantifikátorů se v definici vyskytuje jedna proměnná navíc (dvojice x_0, δ) a případné použití eliminace kvantifikátorů pro racionální lomenou funkci $f(x,y)$ bude složitější.

$$\forall k > 0\ \exists x_0, \delta > 0\ \forall x, y{:}\ x > x_0 \wedge 3 - \delta < y < 3 + \delta$$
$$f(x,y) > k.$$

Příklad č. 35 Zapište definici symbolu $\lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to -5}} f(x,y) = -\infty$.

Řešení: Postup bude obdobný jako v předchozím příkladu.

$$\forall k < 0\ \exists\ \delta > 0, x_0\ \forall x, y{:}\ x < x_0 \wedge -5 - \delta < y < -5 + \delta$$
$$f(x,y) < k.$$

4 VÝPOČTY V PROGRAMU WOLFRAM MATHEMATICA

Kapitola je rozdělena do tří podkapitol, které obsahují výpočty limit různými metodami, které jsou popsané v kapitole 3.4, určení správnosti výpočtu limity dané funkce pomocí eliminace kvantifikátorů a grafické znázornění funkcí dvou reálných proměnných pomocí programu Wolfram Mathematica. V podkapitolách je uvedeno vysvětlení příkazů, které jsem použila při tvorbě zdrojových kódů, samotný kód a jeho výstup. Všechny vytvořené zdrojové kódy se nacházejí na CD přiloženém k této diplomové práci.

4.1 VÝPOČET LIMITY FUNKCE VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

Výstupem zdrojového kódu je výpočet limity funkce více reálných proměnných různými způsoby (spojitost, dvojnásobné limity, substituce pomocí svazku přímek a parabol a transformace kartézských souřadnic do souřadnic polárních). V tomto zdrojovém kódu jsou předdefinovány funkce, které lze libovolně volit a také je možné měnit limitní bod (x_0, y_0). Pro názornost je v této práci uveden jeden příklad, ostatní příklady jsou k nahlédnutí na přiloženém CD v souboru s názvem „*Výpočet limity funkce více reálných proměnných*“.

Na výstupu zdrojového kódu dochází nejprve k určení spojitosti funkce v limitním bodě. Zde se vypíše, jestli je funkce spojitá či nikoliv. Dalším výstupem je výpočet dvojnásobných limit. Pokud se tyto limity rovnají, na výstupu se objeví hlášení: „*Výsledné hodnoty si odpovídají, a proto může limita funkce $f(x,y)$ existovat*“. Jestliže se výsledné hodnoty dvojnásobných limit nerovnají, program vypíše text: „*Výsledné hodnoty si neodpovídají, a proto funkce $f(x,y)$ nemá limitu*“. Následně dochází k výpočtu limity pomocí substituce svazkem přímek. Jestliže je výsledek této limity závislý na koeficientu *k*, tak výsledná limita neexistuje a na výstupu se vypíše hlášení: „*Limita funkce je závislá na koeficientu k, a proto funkce $f(x,y)$ nemá limitu*“. V opačném případě se ukáže text: „*Limita funkce není závislá na koeficientu k, a proto může limita funkce $f(x,y)$ existovat*“. Obdobně je tomu u substituce pomocí svazku parabol. Dalším výpočtem limity funkce dvou reálných proměnných je použití transformace kartézských souřadnic do souřadnic polárních. Když je tato limita závislá na úhlu φ, tak limita funkce $f(x,y)$ neexistuje. Pokud na tomto úhlu závislá není, tak limita funkce dvou reálných proměnných může existovat. Po všech těchto výpočtech dochází ke srovnání vypočtených hodnot. Jestliže se tyto hodnoty rovnají, tak limita funkce $f(x,y)$ může existovat. Pokud se nerovnají, tak limita neexistuje. Nakonec dochází k ověření správnosti výpočtu pomocí příkazu *Reduce*.

Použité funkce v programu Wolfram Mathematica:

- **Off[symbol::tag]** – příkaz vypne oznámení, které hlásí, že při výpočtu se objevuje nedefinovaný příkaz. V mém případě totiž program hlásí chybu, pokud se zde vyskytuje výraz $\frac{1}{0}$. Tento výraz je pro mne ale žádoucí, proto jsem hlášení vypnula.
- **DynamicModule[{x, y,…}, expr]** – reprezentuje objekt, který umožňuje změnu nadefinovaných proměnných v závislosti na funkci **Dynamic[expr]**. Pomocí tohoto příkazu se tudíž budou měnit proměnné $f(x, y), x_0, y_0$.
- **Dynamic[expr]** – představuje objekt, ve kterém lze provádět změnu nadefinovaných proměnných. Bez tohoto příkazu by nemohlo docházet ke změně výpočtu v závislosti na změně vstupních proměnných.
- **Panel[expr]** - vykreslí panel, ve kterém se budou nacházet zadané výrazy.
- **Grid[{{expr$_{11}$, expr$_{12}$,…},{expr$_{21}$, expr$_{22}$,…},…}]** – definuje dvourozměrnou tabulku.
    - **ItemStyle** – umožňuje nadefinování stylu pro příslušný **Grid**.
    - **Spacings** – určuje rozestupy mezi buňkami.
    - **Dividers** – generuje dělicí čáru.
- **Directive[g$_1$, g$_2$,…]** – slouží k nadefinování více grafických parametrů pro jeden objekt (například barva písma, styl písma, velikost písma, průhlednost, tloušťka čáry,…).
- **FontSize** – velikost písma.
- **Bold** – tučné písmo.
- **PopupMenu[Dynamic[x], {val$_1$,…}]** – objekt pro zadávání vstupních hodnot za pomoci **rolovací lišty**.
- **Subscript[x, y]** – dolní index.
- **Superscript[x, y]** – horní index.
- **Underscript[x, y]** – text ve formě $\underset{y}{x}$.
- **InputField[ ]** – vytváří textové pole pro zadání vstupní proměnné.
- **ImageSize** – velikost obrázku.
- **If[condition, true, false]** – podmínka když. **Condition** určuje vyšetřovanou podmínku, která pokud je splněna, provede akci **true**, v opačném případě **false**.
- **Solve[expr, vars]-** řeší rovnici nebo nerovnici výrazu pro proměnnou **vars**.

- **Limit[expr, $\mathbf{x \rightarrow x_0}$]** - vypočítá limitu výrazu $f(x)$ pro **x** jdoucí k $\mathbf{x_0}$.
- **Length[expr]** – určuje velikost vektoru (počet prvků ve vektoru).
- **Position[expr, pattern]** – vyhledává pozice v mnou určeném vektoru podle zadaného vzoru (**pattern**).
- **Table[expr, {i, $\mathbf{i_{min}}$, $\mathbf{i_{max}}$}]** – generuje řadu čísel závislých na **expr** s proměnnou **i** v rozsahu od $\mathbf{i_{min}}$ do $\mathbf{i_{max}}$.
- **RGBColor[red, green, blue]** – určení barvy podle RGB škály.
- **Reduce[expr, vars] -** příkaz, který vyhodnotí rovnici nebo nerovnici pro proměnnou **vars** a odstraní kvantifikátory.
- **ForAll[x, expr]** – prohlašuje, že **expr** platí pro všechna **x**.
- **Exists[x, expr]** – tvrzení, že existuje hodnota **x**, pro kterou je **expr** pravda.
- **EuclideanDistance[u, v]** – počítá euklidovskou vzdálenost mezi dvěma vektory (v mém případě mezi dvěma body).
- **True** – logická jednička (pravda).
- **False** – logická nula (nepravda).
- **Plot3D[f, {x, $\mathbf{x_{min}}$, $\mathbf{x_{max}}$}, {y, $\mathbf{y_{min}}$, $\mathbf{y_{max}}$}]** – trojrozměrné vykreslení grafu funkce dvou reálných proměnných.
  - **PlotRange** – nastavení rozsahu jednotlivých os daného grafu.
  - **AxesLabel** – popisky k daným osám.
  - **LabelStyle** – nastavení formátu pro popisky jednotlivých os.
  - **PlotPoints** – hustota vzorkování grafu.
- **ContourPlot[f, {x, $\mathbf{x_{min}}$, $\mathbf{x_{max}}$}, {y, $\mathbf{y_{min}}$, $\mathbf{y_{max}}$}]** – generuje 2D zobrazení vrstevnic ke grafu funkce dvou reálných proměnných.
  - **FrameLabel** – zobrazí popisky os po stranách grafu.
  - **Mesh** – vykreslí čtvercovou síť v daném grafu.
  - **PlotLegends** – zobrazí barevnou škálu funkčních hodnot $f(x, y)$.
  - **Contours** – charakterizuje hustotu zobrazených vrstevnic.

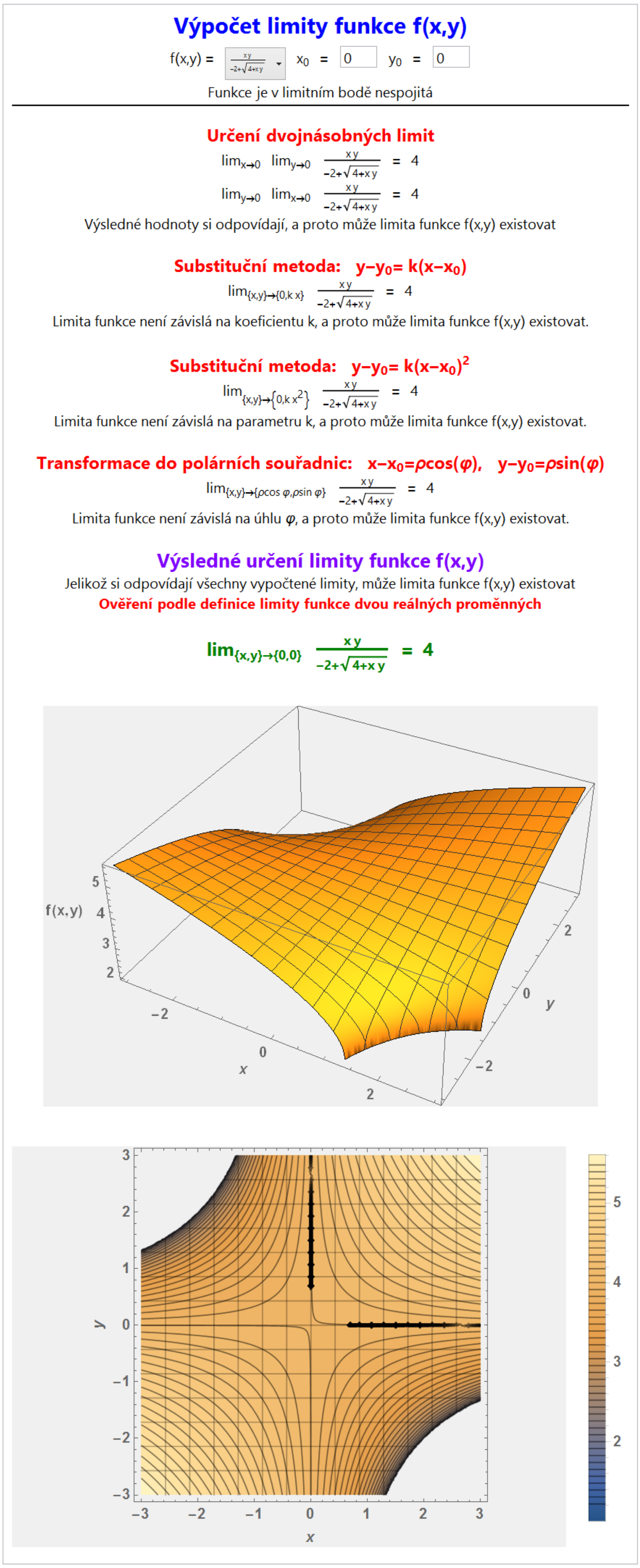
Příkaz:

```
Off[Power::infy]
Off[Infinity::indet]
Off[Solve::incnst]
DynamicModule[{f,x0=0,y0=0},
 Panel[
  Grid[{
   {Grid[{{"Výpočet limity funkce f(x,y)"}},ItemStyle->
     Directive[FontSize->18,Blue,Bold]]},
   {Grid[{{"f(x,y) =",PopupMenu[Dynamic[f],
    {(x+6)/(3*x-y+5),
     (x*y)/(Sqrt[x*y+4]-2),
     (x^4-y^4)/(x^3-y^3),
     (2*x+5)/(3*x-y+4),
     (y-8)/(x+y-14),
     (x+y)/(x-y),
     (x-5y)/(7x+y),
     (2x^2+7y^2)/(5x-8y),
     (2x^3 y^3)/(x^6+y^6),
     1/(x^2+y^2),
     (x^2*y)/(x^2+y^2),
     (x^3+ y^3)/(x^2+y^2)}],
     Subscript[x,0],"=",
     InputField[Dynamic[x0],ImageSize->30],
     Subscript[y,0],"=",
     InputField[Dynamic[y0],ImageSize->30]}}]},
   {Grid[{{"Funkce je v limitním bodě ",
     Dynamic[
      If[
       Solve[f-z==0&&y==y0&&x==x0,{x,y,z}]=={},
        nespojitá,spojitá]]}},Spacings->0]},
   {},
   {Grid[{{"Určení dvojnásobných limit"}},ItemStyle->
    Directive[FontSize->14,Red,Bold]]},
   {Grid[{{Dynamic[Underscript[lim,x->x0]],
     Dynamic[Underscript[lim,y->y0]],Dynamic[f],
     "=",Dynamic[Limit[Limit[f,x->x0],y->y0]]}}]},
   {Grid[{{Dynamic[Underscript[lim,y->y0]],
     Dynamic[Underscript[lim,x->x0]],
     Dynamic[f],"=",
     Dynamic[
      Limit[Limit[f,y->y0],x->x0]]}}]},
   {Dynamic[
     If[Limit[
      Limit[f,x->x0],y->y0]==Limit[Limit[f,y->y0],x->x0],
       "Výsledné hodnoty si odpovídají, a proto může limita
        funkce f(x,y) existovat","Výsledné hodnoty si
        neodpovídají, a proto funkce f(x,y) nemá limitu"]]},
   {},
   {Grid[{{"Substituční metoda:   y-",Subscript[y,0],
```

```
  "= k(x-",Subscript[x,0],")"}},Spacings->0,ItemStyle->
  Directive[FontSize->14,Red,Bold]]},
{Grid[{{Dynamic[Underscript[lim,{x,y}->{x0,k*(x-x0)+y0}]],
  Dynamic[f],"=",Dynamic[Limit[
   f/.y->k*(x-x0)+y0,x->x0]]}}]},
{Dynamic[
  If[
   Length[
    Position[
     Table[
      Limit[f/.y->k*(x-x0)+y0,x->x0],{k,0,10}],
      Table[Limit[f/.y->k*(x-x0)+y0,x->x0],
       {k,0,10}][[10]]]]>9,
   "Limita funkce není závislá na koeficientu k, a proto
   může limita funkce f(x,y) existovat.","Limita funkce je
   závislá na koeficientu k, a proto funkce f(x,y) nemá
   limitu"]]},
{},
{Grid[{{"Substituční metoda:   y-",Subscript[y,0],
 "= k(x-",Subscript[x,0],Superscript[")",2]}},Spacings->0,
  ItemStyle->Directive[FontSize->14,Red,Bold]]},
{Grid[{{Dynamic[
  Underscript[lim,{x,y}->{x0,k*(x-x0)^2+y0 }]],
  Dynamic[f],"=",Dynamic[Limit[f/.y->k*(x-x0)^2+y0,
   x->x0]]}}]},
{Dynamic[
  If[
   Length[
    Position[
     Table[
      Limit[f/.y->k*(x-x0)^2+y0,x->x0],{k,0,10}],
      Table[Limit[f/.y->k*(x-x0)^2+y0,x->x0],
       {k,0,10}][[10]]]]>9,
   "Limita funkce není závislá na parametru k, a proto
   může limita funkce f(x,y) existovat.","Limita funkce je
   závislá na parametru k, a proto funkce f(x,y) nemá
   limitu"]]},
{},
{Grid[{{"Transformace do polárních souřadnic:   x-",
  Subscript[x,0],"=ρcos(φ)",",   ","y-",
  Subscript[y,0],"=ρsin(φ)"}},Spacings->0,
  ItemStyle->Directive[FontSize->14,Red,Bold]]},
{Grid[{{Dynamic[
  Underscript[lim,{x,y}->{x0+ρcos(φ),y0+ρsin(φ)}]],
  Dynamic[f],"=",Dynamic[Limit[f/.{x->x0+ρ*Cos[φ],
   y->y0+ρ*Sin[φ]},ρ->0]]}}]},
{Dynamic[
  If[
   Length[
    Position[
     Table[
```

```
      Limit[f/.{x->x0+ρ*Cos[φ],y->y0+ρ*Sin[φ]},ρ->0],
       {φ,0,10}],
       Table[Limit[f/.{x->x0+ρ*Cos[φ], y->y0+ρ*Sin[φ]},
        ρ->0],{φ,0,10}][[10]]]]>9,
   "Limita funkce není závislá na úhlu φ, a proto může
   limita funkce f(x,y) existovat.","Limita funkce je
   závislá na úhlu φ, a proto funkce f(x,y) nemá
   limitu"]]},
{},
{Grid[{{"Výsledné určení limity funkce f(x,y)"}},
  ItemStyle->Directive[FontSize->16,
  RGBColor[0.5,0,1],Bold]]},
{Dynamic[
  If[
   If[
    Limit[Limit[f,x->x0],y->y0]==Limit[Limit[f,y->y0],
    x->x0],True,False]==True&&
   If[
    Length[
     Position[
      Table[
       Limit[f/.y->k*(x-x0)+y0,x->x0],{k,0,10}],
       Table[Limit[f/.y->k*(x-x0)+y0,x->x0],
       {k,0,10}][[10]]]]>9,True,False]==True&&
   If[
    Length[
     Position[
      Table[
       Limit[f/.y->k*(x-x0)^2+y0,x->x0],{k,0,10}],
       Table[Limit[f/.y->k*(x-x0)^2+y0,x->x0],
      {k,0,10}][[10]]]]>9,True,False]==True&&
   If[
    Length[
     Position[
      Table[
       Limit[f/.{x->x0+ρ*Cos[φ],y->y0+ρ*Sin[φ]},ρ->0],
       {φ,0,10}],Table[Limit[f/.{x->x0+ρ*Cos[φ],
       y->y0+ρ*Sin[φ]},ρ->0],{φ,0,10}][[10]]]]>9,
   True,False]==True,"Jelikož si odpovídají všechny
   vypočtené limity, může limita funkce f(x,y) existovat",
   "Jelikož si neodpovídají všechny vypočtené limity,
   limita funkce f(x,y) neexistuje"]]},
{Grid[{{"Ověření podle definice limity funkce dvou
  reálných proměnných"}},
  ItemStyle->Directive[   FontSize->12,Red,Bold]]},
{Grid[{{}},ItemStyle->Directive[FontSize->12,Red,Bold]]},
{Grid[{{Dynamic[Underscript[lim,{x,y}->{x0,y0}]],
  Dynamic[f],"=",
  Dynamic[
   If[
    If[
```

```
      Limit[
       Limit[f,x->x0],y->y0]==Limit[Limit[f,y->y0],x->x0],
      True,False]==True&&
     If[
      Length[
       Position[
        Table[
         Limit[f/.y->k*(x-x0)+y0,x->x0],{k,0,10}],
         Table[Limit[f/.y->k*(x-x0)+y0,x->x0],
         {k,0,10}][[10]]]]>9,True,False]==True&&
     If[
      Length[
       Position[
        Table[
         Limit[f/.y->k*(x-x0)^2+y0,x->x0],{k,0,10}],
         Table[Limit[f/.y->k*(x-x0)^2+y0,x->x0],
        {k,0,10}][[10]]]]>9,True,False]==True&&
     If[
      Length[
       Position[
        Table[
         Limit[f/.{x->x0+ρ*Cos[φ],y->y0+ρ*Sin[φ]},ρ->0],
         {φ,0,10}],Table[Limit[f/.{x->x0+ρ*Cos[φ],
         y->y0+ρ*Sin[φ]},ρ->0],{φ,0,10}][[10]]]]>9,
      True,False]==True,
     If[
      Reduce[
       ForAll[ϵ,ϵ>0,
        Exists[δ,δ>0,
         ForAll[{x,y},
          0<EuclideanDistance[{x,y},{x0,y0}]<δ,
          Limit[Limit[f,x->x0],y->y0]-ϵ<f<Limit[Limit[f,
           x->x0],y->y0]+ϵ]]]]==True,
      Limit[Limit[f,x->x0],y->y0],"Limita neexistuje"],
     "Limita neexistuje"]]}},
 ItemStyle->Directive[FontSize->15,RGBColor[0,0.5,0],
 Bold]]},
{},
{Dynamic[
  Plot3D[f,{x,x0-3,x0+3},{y,y0-3,y0+3},
   PlotRange->Automatic,ImageSize->{450,325},
   AxesLabel->{x,y,"f(x,y)"},LabelStyle->Directive[Bold,
   Medium],PlotPoints->100]]},
{},
{Dynamic[
  ContourPlot[
   f,{x,x0-3,x0+3},{y,y0-3,y0+3},PlotRange->Automatic,
   FrameLabel->Automatic,Mesh->Full,ImageSize->{450,325},
   LabelStyle->Directive[Bold, Medium],
   PlotLegends->Automatic,Contours->50]]}
},Dividers->{False,4->True}]]]
```



Obr. 9. Výstup programu pro výpočet limity funkce dvou reálných proměnných.

4.2 VYKRESLOVÁNÍ GRAFŮ FUNKCÍ DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

V této kapitole je uveden kód, který slouží k vykreslení grafů funkcí vypočítaných v této diplomové práci. Všechny grafy funkcí, seřazené podle čísla příkladu, jsou znázorněné na CD přiloženém k této práci, protože s grafy lze v tomto programu pohybovat a jsou tudíž názornější.

Výstupem tohoto zdrojového kódu jsou čtyři grafy. První dva znázorňují řez podél *x*-ové a *y*-ové osy. Poté je zde vyobrazen samotný graf funkce dvou reálných proměnných. Poslední graf značí vrstevnice dané funkce, z tohoto grafu je patrné, jak se funkce v daném bodě chová.

Použité funkce v programu Wolfram Mathematica:

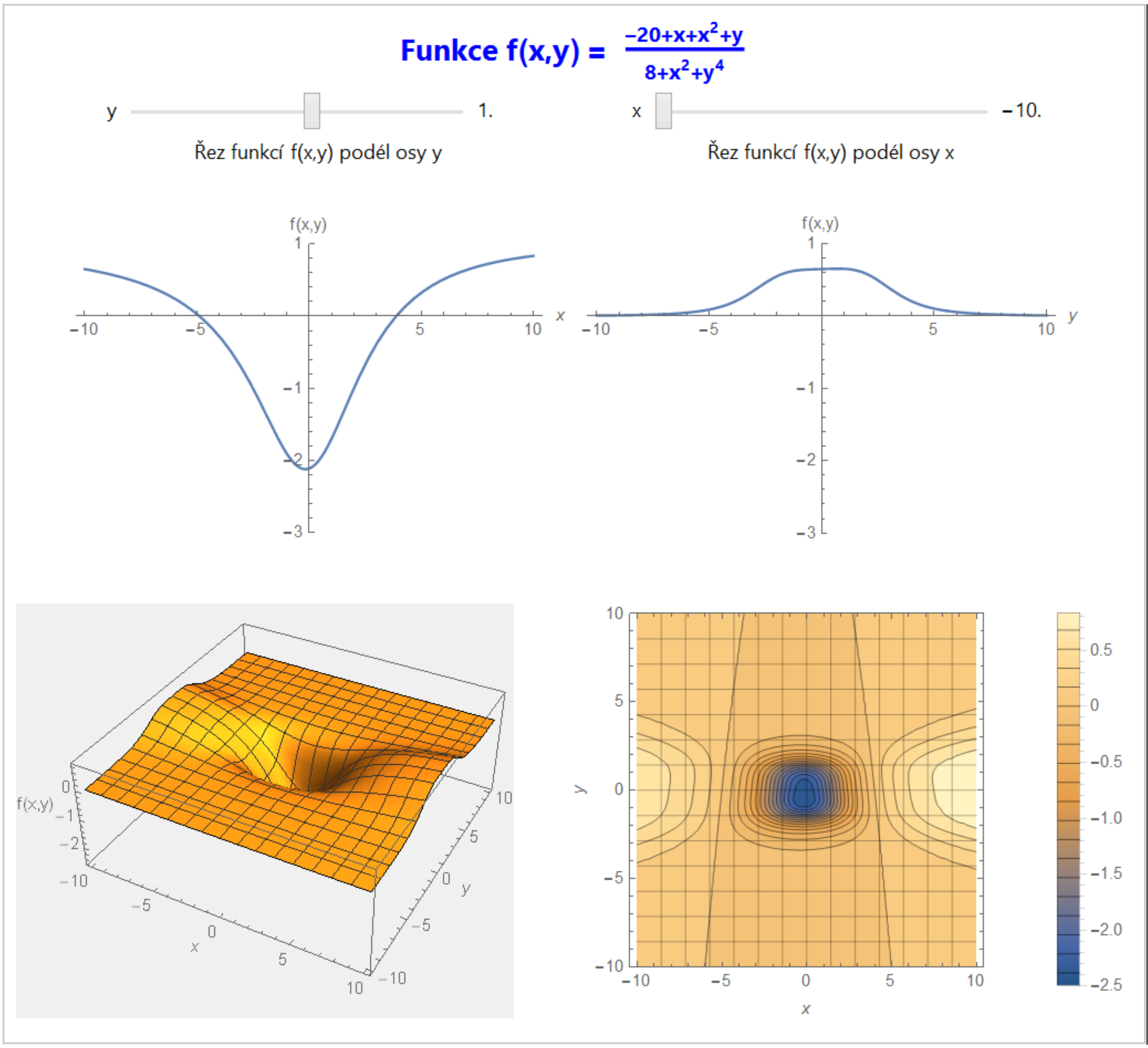
- **Slider[x, {$\mathbf{x_{min}}$, $\mathbf{x_{max}}$, dx}]** – jezdec pro nastavení proměnné **x** v rozsahu od $\mathbf{x_{min}}$ do $\mathbf{x_{max}}$ s krokem **dx**.
- **Plot[f, {x, $\mathbf{x_{min}}$, $\mathbf{x_{max}}$}]** - vykreslí graf funkce $f(x)$ v mezích od $\mathbf{x_{min}}$ do $\mathbf{x_{max}}$.

Ostatní příkazy, použité při tvorbě programu, jsou vysvětlené v podkapitole 4.1.

Příkaz:

```
DynamicModule[{x1, y1},
 Panel[
  Grid[{
   {Grid[{{"Funkce f(x,y)=",(x^2+x+ y-20)/(x^2+y^4+8)}},
     ItemStyle->Directive[FontSize->18,Blue,Bold]]},
   {Grid[{{"y",
     Slider[Dynamic[y1], {-10,10,0.1}],
     Dynamic[y1],"x",Slider[Dynamic[x1],{-10,10,0.1}],
     Dynamic[x1]}},Spacings->{{4->7}}]},
   {Grid[{{"Řez funkcí f(x,y) podél osy y","Řez funkcí f(x,y)
     podél osy x"},
     {Dynamic[
       Plot[(x^2+x+y1-20)/(x^2+y1^4+8),{x,-10,10},
        PlotRange->{-3,1},ImageSize->{300,250},
        AxesLabel->{x,"f(x,y)"}]],
      Dynamic[
       Plot[(x1^2+x1+y-20)/(x1^2+y^4+8),{y,-10, 10},
```

```
     PlotRange->{-3,1},ImageSize->{300,250},
     AxesLabel->{y,"f(x,y)"}]]}}]]},
{Grid[{{
  Plot3D[(x^2+x+y-20)/(x^2+y^4+8),{x,-10,10},{y,-10,10},
   PlotRange->All,PlotStyle->Opacity[1], PlotPoints->50,
   ImageSize->{300,250},AxesLabel->{x,y,"f(x,y)"}],
  ContourPlot[(x^2+x+y-20)/(x^2+y^4+8),{x,-10,10},
   {y,-10,10},ImageSize->{300,250},FrameLabel->Automatic,
   Mesh->Full,Contours->20,PlotLegends->Automatic,
   PlotRange->{-2.7,1}]}}]]}
}]]]
```



Obr. 10. Výstup programu, ve kterém se nachází řezy, graf a vrstevnice funkce.

4.3 ELIMINACE KVANTIFIKÁTORŮ

Teorii týkající se eliminace kvantifikátorů u funkcí jedné reálné jsem již uvedla ve své bakalářské práci v kapitole s názvem „*Limity a různé způsoby jejich výpočtů*". V případě dvou a více reálných proměnných probíhá eliminace kvantifikátorů obdobně jako u funkcí jedné reálné proměnné. Výpočet je ale poněkud složitější, protože se v definici vyskytuje více proměnných. Výpočet proto trvá déle a nelze použít na výpočet všech limit funkcí více reálných proměnných (například limitu funkce obsahující odmocninu či goniometrické funkce nelze pomocí příkazu *Reduce* vypočítat).

Při výpočtu limit pomocí eliminace kvantifikátorů jsem použila software Mathematica a v něm příkaz *Reduce*. Tento zdrojový kód spíše slouží pro kontrolu, zda jsem limity vypočítala správně. Při zadávání příkazu jsem nejprve musela příklady převést do symboliky definice limity funkce (několik příkladů je uvedeno v 3.6). Poté už jsem dosadila vše do příkazu *Reduce* a výstupem tohoto programu je výraz *True* (pokud je limita vypočítána správně podle definice limity) nebo *False* (pokud je limita funkce vypočítána chybně).

Nejprve uvedu příklad, kdy je limita vypočítána správně a tudíž by mělo být výsledkem hlášení *True*. V druhém případě dosadím jiný (špatný) výsledek výpočtu stejné limity a výstupem je poté hlášení *False*.

Příkaz:

```
f[x_,y_]:=(x^2*y^2)/(x^2+y^2)+2;
x0=0;
y0=0;
limita=2;
   Reduce[ForAll[ϵ,ϵ>0,
      Exists[δ,δ>0,
         ForAll[{x,y},0<EuclideanDistance[{x,y},{x0,y0}]<δ,
           limita-ϵ<f[x,y]<limita+ϵ]]]]
```

Řešení: True

Příkaz:

```
f[x_,y_]:=(x^2*y^2)/(x^2+y^2)+2;
x0=0;
y0=0;
limita=1;
   Reduce[ForAll[ϵ,ϵ>0,
      Exists[δ,δ>0,
         ForAll[{x,y},0<EuclideanDistance[{x,y},{x0,y0}]<δ,
           limita-ϵ<f[x,y]<limita+ϵ]]]]
```

Řešení: False

ZÁVĚR

Tato diplomová práce je přehledným a uceleným výkladem limit funkcí více reálných proměnných. K úplnému porozumění výše zmíněné problematiky přispěla řada řešených příkladů. Příklady uvedené v mé diplomové práci nejsou plným výčtem řešení jednotlivých limit funkcí více reálných proměnných, ale slouží pouze k uvedení čtenáře do problematiky výpočtů limit funkcí více reálných proměnných.

Při zpracování diplomové práce a studiu odborné literatury jsem důkladně prostudovala různé metody používané při výpočtech limit funkcí více reálných proměnných. Shrnu-li získané poznatky z této práce, mohu konstatovat, že dokáži určit chování funkce více reálných proměnných v jakémkoli bodě.

Dále jsem se v této práci zabývala výpočtem limit funkcí více reálných proměnných pomocí softwaru Mathematica. Zmíněný software umožňuje jak určení limity funkce, tak její grafické znázornění. Mnou vytvořený zdrojový kód může sloužit i jako kontrola při numerickém výpočtu limit, který je často náročný nejen numericky, ale i časově. Vytvořila jsem také zdrojový kód, který graficky znázorňuje funkci, respektive její 3D zobrazení, vrstevnice a řezy podél osy x a podél osy y. Pro výpočet limity funkce jsem také použila příkaz *Reduce,* který slouží k eliminaci kvantifikátorů symboliky zápisu limity pomocí definice limity funkce více reálných proměnných, ale například u funkce obsahující odmocninu nelze použít z důvodu složitosti výpočtu.

Výstupem mé diplomové práce jsou řešené příklady limit funkcí více reálných proměnných a jejich grafické znázornění. Zdrojové kódy a grafické znázornění funkcí dvou reálných proměnných jsou k nahlédnutí na CD přiloženém k této diplomové práci ve složkách nazvaných „*Výpočet limity funkce více reálných proměnných*“, „*Vykreslování grafů funkcí dvou reálných proměnných*“ a „*Eliminace kvantifikátorů*“. Toto umožní čtenáři vylepšit představu o průběhu funkce, což statické obrázky v tištěné podobě neumožňují.

RESUMÉ

The target of my thesis was to report a complete presentation of the limits of the functions of several real variables. Many solved examples should help it. These examples are not the complete list of particular limits but it is only used as problem explanation of the limits´ calculations of the functions of several real variables. During the processing and studying of reference books, I get to know various new methods used for limits of the functions of several real variables calculation. I deal with calculation used with software Mathematica in the last chapter of this thesis. This software is not necessary for understanding the curriculum but it is practical. The limit can be calculated by five methods of the programme that I have created. This programme can be used for the check of the numeric calculation of the limit which is often difficult (numerically and time-consuming). I have also created the programme which paints the graph, the cuts and the graph of contour line of the specified funtion. I used the order Reduce which is not possible to use for all types of the functions of several real variables (for example the function where the root is used) for the calculation of the limit of the function.

It is possible to find practical presentations of my programmed examples and graphs on added CD in the sections called The calculation of the limit of the functions of several real variables, The painting of the graphs of the function of two real variables and The elimination of quantifiers.

SEZNAM LITERATURY

[1] RYBÁROVÁ, Ivana. *Limity a různé způsoby jejich výpočtů*. Plzeň, 2013. Bakalářská práce. ZČU v Plzni.

[2] JIRÁSEK, František, Stanislav ČIPERA a Milan VACEK. *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*. Praha: SNTL, 1989. ISBN 80-03-00187-0.

[3] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1999. ISBN 80-01-01589-0.

[4] HLAVÁČEK, Antonín. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky: Pro přípravu pracujících ke studiu na vysokých školách II*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971. SPN 07-0-31.

[5] KALUS, René a Daniel HRIVŇÁK. *Breviář vyšší matematiky*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, 2001. ISBN 80-7042-819-8.

[6] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03357-0.

[7] BROŽÍKOVÁ, Alena a Milana KITTLEROVÁ. *Sbírka příkladů z matematiky II*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02465-2.

[8] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Brno: Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

[9] *Sbírka příkladů z diferenciálního počtu funkcí dvou proměnných*. 2009, Brno. Diplomová práce. Masarykova univerzita.

[10] FONG, Yuen a Yuan WANG. *Calculus*. Singapore: Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd., 2000. ISBN 981-3083-01-8.

[11] *Wolfram Mathematica* [online]. 2015 [cit. 2015-04-12]. Dostupné z: http://www.wolfram.com/mathematica/

[12] DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Brno, 1999. ISBN 80-210-2052-0.

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ