ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Algebraické výrazy

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Magdaléna Šťastná

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Fy,Te

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň 2015

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni 15. 4. 2015

....

vlastnoruční podpis

Na tomto místě bych chtěla v první řadě poděkovat vedoucí diplomové práce Mgr. Martině Kašparové, PhD. za trpělivost a čas, který mi věnovala, a také za poskytnutí potřebných materiálů. V neposlední řadě poděkování patří také žákům Gymnázia, Plzeň a ZŠ a MŠ Švihov, bez jejichž pomoci by nemohla tato práce vzniknout.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

Obsah

ÚVOD

„V knize přírody může číst jen ten, kdo zná jazyk, ve kterém je napsána. Jejím jazykem je matematika a jejím písmem jsou matematické vzorce.“ *(Galileo Galilei)*

Ve své diplomové práci se zabývám algebraickými výrazy a operacemi s nimi prováděnými při výuce matematiky na druhém stupni základní školy a nižším stupni víceletého gymnázia.

Téma diplomové práce jsem si vybrala hlavně s ohledem na to, že je možné takto získané poznatky využít v mojí další praxi. Téma algebraických výrazů je také podle mě velmi důležitou součástí výuky matematiky v základním vzdělávání, neboť se zde žáci poprvé setkávají s obecným zápisem, nikoli jen s jim dosud známými číselnými výrazy, a učí se s ním pracovat.

Moje práce je členěna do pěti kapitol, z nichž první se zabývá definicí algebraického výrazu a jejich klasifikací s ohledem na rozsah učiva druhého stupně základní školy. Druhá kapitola je zaměřena na konkrétní operace prováděné s algebraickými výrazy při výuce matematiky na druhém stupni základní školy a nižším stupni víceletého gymnázia. V této kapitole je taktéž zmíněn minimální rozsah učiva, který je dán Rámcovým vzdělávacím programem základního vzdělávání, který byl vydán Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy a je platný od 1. 9. 2013. Konkrétní rozsah výuky toho učiva je však dán školním vzdělávacím programem, který si každá škola může upravovat, avšak s ohledem na Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Ve třetí kapitole jsou popsány předpokládané chyby žáků při operacích s algebraickými výrazy. Tato kapitola je členěna do jednotlivých podkapitol podle operací, které žáci provádějí s algebraickými výrazy v osmém a devátém ročníku základní školy a odpovídajících ročnících víceletého gymnázia. Ve čtvrté kapitole můžete nalézt příklady písemných prací, které jsou roztříděny dle předpokládané obtížnosti jednotlivých úloh. Tato kapitola je opět členěna do podkapitol podle operací s algebraickými výrazy tak, jak jsou uvedeny ve druhé a třetí kapitole, aby bylo možné se dobře zorientovat a najít práce, které jsou aktuálně potřeba. Poslední, pátá kapitola je zaměřena na chyby v operacích s algebraickými výrazy, které byly provedeny vybraným vzorkem žáků. V mém případě se jednalo hlavně o žáky osmého a devátého ročníku Základní školy a mateřské školy Švihov a žáky tercie a kvarty Gymnázia na Mikulášském náměstí v Plzni.

Cílem mé diplomové práce je podat souhrn toho, v jakém rozsahu se na druhém stupni základních škol a nižším stupni víceletých gymnázií vyučují operace s algebraickými výrazy. Má práce měla také za cíl vytvořit systém příkladů, které jsou roztříděny podle náročnosti, a tím usnadnit hlavně začínajícím, ale i zkušeným učitelům matematiky výběr a stupeň náročnosti jednotlivých příkladů. Tomuto se věnuje hlavně čtvrtá kapitola. Ke každému zadanému tématu zde najdeme příklady krátkých písemných prací, od nejjednodušších až po obtížné. Tyto písemné práce je možné přímo použít při výuce, popřípadě se jimi nechat inspirovat. Hlavní výhodou je zde to, že v mé diplomové práci může učitel nalézt přímo jednotlivé práce nejen dle aktuálně probíraného tématu, ale i podle náročnosti jednotlivých operací. Třídění příkladů podle obtížnosti je provedeno podle písemných prací, které byly předloženy vzorku žáků jak ze základní školy, tak i z gymnázia.

Algebra je odvětví matematiky, které se zabývá abstrakcí pojmů a vlastností matematických objektů. Název algebra pochází z arabského slova „al-džabr“. Toto slovo pochází z díla perského matematika Muhamamada al-Chwarizmiho, který je považován za otce algebry. Dílo nese název al-Kitáb al-Džabr wa-I-Muqabala. V tomto díle se poprvé objevily obecné postupy řešení rovnic, jak lineárních, tak kvadratických. Tyto postupy využívaly neznámých a základních operací s nimi.

Algebra se vyvinula na základě aritmetiky. Až do poloviny 19. století se za algebru považovala pouze teorie řešení rovnic a manipulace s výrazy. Dnes se část algebry, která se zabývá zejména onou symbolickou manipulací s výrazy, nazývá elementární algebra. Elementární algebra je základní formou algebraické teorie a navazuje na aritmetiku. Hlavní rozdíl mezi aritmetikou a elementární algebrou je používání proměnných.

Celkově je možné za algebraické výrazy považovat i číselné výrazy a operace s nimi. Tedy by bylo možné do diplomové práce zahrnout i základní operace s číselnými výrazy, jako je např. násobení a dělení číselných výrazů, umocnění číselného výrazu atd. Já se však ve své diplomové práci zabývám pouze algebraickými výrazy, tedy výrazy, ve kterých vystupují čísla i proměnné.

1 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY - ZÁKLADNÍ POJMY, KLASIFIKACE ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ

Algebraickým výrazem rozumíme zápis, ve kterém se vyskytují konstanty, proměnné a operace prováděné s konstantami nebo proměnnými (sčítání, odčítání, násobení dělení, krácení a rozšiřování). Konstanta nemění svou hodnotu a je vyjádřena číslem. Proměnnou rozumíme znak, který značí libovolné číslo z určité množiny, kterou nazýváme definičním oborem výrazu.

Příklad 1.1.

Podíl

$$\frac{x^2+4}{3\sqrt{x}},$$

je algebraický výraz. Je sestaven z konstant 3, 4 a proměnné x pomocí operace sčítání, násobení, dělení, umocňování na druhou a odmocňování. Jeho definičním oborem je kde $x \in \left\{1; \frac{5}{4}; 3; 5\right\}$. V případě, že není definiční obor výrazu určen, budeme považovat za definiční obor množinu všech čísel, která lze do výrazu dosadit, aniž by nějaká z použitých operací ztratila smysl, např. nebude docházet k dělení nulou, odmocnění záporného čísla apod. Říkáme, že pro hodnoty z definičního oboru má výraz smysl.

Určení definičního oboru algebraického výrazu $\frac{x^2+4}{3\sqrt{x}}$:

$$3\sqrt{x} \neq 0 \implies \sqrt{x} \neq 0 \implies x \neq 0$$

Z této podmínky vyplývá, že $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vzhledem k tomu, že proměnná pod odmocninou musí být nezáporná, dostáváme další podmínku: $x > 0$.

Pro správné určení definičního oboru algebraického výrazu musí být splněny obě podmínky zároveň, tedy musíme zjistit jejich průnik. Průnikem předchozích dvou intervalů, a tedy i definičním oborem daného algebraického výrazu, jsou všechna x z intervalu: $x \in (0; \infty)$.

Pokud do výrazu dosadíme za proměnné libovolná čísla, pro která má výraz smysl a provedeme všechny předepsané operace, dostaneme jako výsledek číslo, tzv. hodnotu výrazu.

Příklad 1.2. Urči hodnotu algebraického výrazu z příkladu 1.1 pro hodnotu proměnné $x = 4$:

$$\frac{4^2+4}{3\sqrt{4}} = \frac{16+4}{3.2} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Algebraické výrazy můžeme klasifikovat podle počtu proměnných na:

- Výrazy s jednou proměnnou

$$\frac{x+4}{2x^2}$$

- Výrazy se dvěma proměnnými

$$\frac{x^2+4y}{xy}$$

- Výrazy se třemi proměnnými

$$\frac{x^2+12y+16z^3}{12x+y+13z}$$

atd.

1.1 MNOHOČLENY

Mnohočleny neboli polynomy jsou zvláštním případem algebraických výrazů. Polynom n-tého stupně jedné proměnné je algebraický výraz ve tvaru:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0; \quad a_n \neq 0,$$

kde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ jsou konstanty (koeficienty) polynomu a x je proměnná. Členy polynomu nazýváme výrazy $a_k x^k$; $k = 0,1,\dots,n$.

Mnohočleny dělíme do několika skupin v závislosti na počtu členů:

- Jednočleny: $3x$, $15xy$, $14abcd$, $-15a^3b^5$,…
- Dvojčleny: $x+y$, $47a+6b$, $47x^4+14y^6$,…

- Trojčleny: $x + y + z,\ 15a + 16b + 9c,\ 4\,p^3 + 5q^4 + 8r^2$,…

  atd.

Můžeme říci, že jednotlivé členy jsou sčítance, které od sebe oddělují znaménka $+$ a $-$.

Mnohočleny můžeme také klasifikovat podle stupně, tedy podle toho, v jaké nejvyšší mocnině se v nich vyskytuje proměnná:

- Mnohočlen prvního stupně nazýváme lineárním. Takovým polynomem je např. výraz $3x + 5$.
- Polynom druhého stupně nazýváme kvadratickým a jedná se o např. o výraz $4x^2 + 4x + 3$. Tento mnohočlen někdy bývá nazýván pojmem kvadratický trojčlen.
- Dalším mnohočlenem, který má své pojmenování, je polynom třetího stupně, který je označován jako kubický. Kubickým nazveme např. výraz $5x^3 - x^2 + 6x + 12$.

  atd.

Zvláštním případem mnohočlenů je jednočlen, tedy algebraický výraz, který neobsahuje ani jednu z operací sčítání nebo odčítání. Dá se tedy říci, že polynomy můžeme chápat jako součty několika jednočlenů.

Zápis jednočlenů se řídí určenými pravidly. Zpravidla se snažíme o co nejstručnější zápis.

- Pokud se v jednočlenu vyskytuje součin stejných proměnných, pak zapíšeme tento součin pomocí mocniny:

$$6.a.a.a.a.a.a.b.b.b.b = 6a^6b^2$$

- Dalším pravidlem je řazení konstant a proměnných. Začínáme vždy konstantou a za ní následují proměnné v abecedním pořadí. V případě, že se zde vyskytuje více mocnin jedné proměnné, poté proměnné řadíme podle stupně.

$$y.x^5 15 = 15x^5y$$

- Vzhledem k tomu, že se snažíme o co nejstručnější zápis, budeme mezi proměnnými, resp. jejich mocninami a koeficientem, vynechávat tečky symbolizujíc násobení.

$$31.p^4.q^3.r = 31p^4q^3r$$

Polynomy můžeme zobecnit i na výrazy více proměnných, tam místo mocnin x^n máme součiny mocnin několika proměnných. Takové mnohočleny pak vypadají např. takto $2a^3b^2 + 5a^2b + a^3 - a + 5$, $x^3 + x^2y + xy^2 - y^3$;

1.2 Celistvé výrazy

V některých učebnicích a ŠVP se pracuje s pojmem celistvý výraz. Celistvým výrazem rozumíme algebraický výraz, který neobsahuje ve jmenovateli proměnné. Jedná se tedy o jakýsi přechod mezi mnohočlenem a racionálním lomeným výrazem. Příkladem celistvého výrazu může být např. algebraický výraz

$$\frac{x^2 + 2y + 6}{4}$$

1.3 Racionální lomené výrazy

Pojmem racionální lomený výraz rozumíme výraz, který můžeme zapsat ve tvaru podílu dvou mnohočlenů.

$$\frac{4x^2 + 12xy + 9y^2}{xy^2 - x^2y}$$

V případě racionálních lomených výrazů budeme používat stejné pojmy jako u zlomků, tedy čitatel, jmenovatel, nejmenší společný násobek, nejmenší společný dělitel, společný jmenovatel atd.

Při práci s racionálním lomeným výrazem používáme stejné metody jako u zlomků a racionální lomené výrazy můžeme sčítat, odčítat, násobit, dělit, krátit a rozšiřovat podle stejných pravidel jako zlomky[1]. Racionální lomené výrazy můžeme i umocňovat a odmocňovat, ale tyto operace se na druhém stupni základní školy nevyučují. Toto učivo je možné zařadit do výuky jako rozšiřující, případně na nižším stupni víceletého gymnázia.

[1] Podrobnějším popisem těchto operací se budeme zabývat v kapitole č. 2.

U racionálních lomených výrazů nesmíme zapomenout určit, kdy má výraz smysl. Tedy určit ty hodnoty proměnných, pro které je jmenovatel roven nule, a ty vyloučit z definičního oboru racionálního lomeného výrazu.

2 ÚKONY A OPERACE PROVÁDĚNÉ S VÝRAZY

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat operacemi prováděnými s algebraickými výrazy ve výuce matematiky na základní škole nebo nižším stupni víceletého gymnázia.

2.1 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY A JEJICH ÚPRAVY V RVPZV A ŠVP

Obsah a rozsah učiva na druhém stupni základní školy a nižším stupni víceletého gymnázia je rámcově určen Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávaní (dále jen RVPZV), který vydalo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (dále jen MŠMT). Konkrétní stavba a rozsah učiva je určen školním vzdělávacím plánem (dále jen ŠVP), který si sestavuje konkrétní základní škola, popř. gymnázium, sama. ŠVP je sestaven s ohledem na RVPZV a řídí se očekávanými výstupy a cílovým zaměřením vzdělávací oblasti.

Konkrétní cíle, obsah učiva a očekávané výstupy jsou pro výuku matematiky uvedeny v RVPZV ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, která je celkem rozdělena do čtyř tematických okruhů: *Číslo a početní operace* na prvním stupni, na který navazuje na druhém stupni okruh *Číslo a proměnná*, dále okruh *Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru* a *Nestandardní aplikační úlohy a problémy.*

Nás konkrétně zajímá pouze tematický okruh *Číslo a proměnná*, kde jsou upraveny očekávané výstupy a učivo, které se týká algebraických výrazů. Podle RVPZV…

„ ... si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací.“[2]

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace a očekávané výstupy tematického okruhu Číslo a proměnná, je taktéž vymezen RVPZV. Konkrétní očekávané výstupy týkající se algebraických výrazů:

[2] Výňatek z RVPZV, Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, tematický okruh Číslo a početní operace, resp. Číslo a proměnná.

„M-9-1-07 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním“[3].

Výuka algebraických výrazů na základní škole je učivem 8. a 9. ročníku základní školy a odpovídajících ročníků víceletého gymnázia.

V osmém ročníku základní školy se žáci začínají seznamovat s pojmem číselný výraz a na toto učivo navazují výrazy s proměnnou (v tomto ročníku se teprve seznamují s pojmem číselný výraz, ale jeho hodnotu počítají už od prvního ročníku základní školy). Žáci se na počátku naučí sestavit jednoduchý výraz s proměnnou a určit jeho hodnotu pro danou hodnotu proměnné. Dokáží na konkrétních mnohočlenech s jednou proměnnou aplikovat pojmy člen, koeficient a stupeň polynomu. Dále umí matematizovat jednoduché reálné situace s využitím proměnných. Navazujícím učivem je sčítání, odčítání a násobení mnohočlenů a dělení mnohočlenů jednočlenem. Dalším učivem je umocnění a rozložení dvojčlenů podle vzorců a rozložení mnohočlenu na součin pomocí vzorců nebo vytýkání. Žáci se také učí umocňovat jednočleny libovolným exponentem. Tato operace bývá tematicky zařazena do oddílu práce s mocninami a my se jí v této diplomové práci nebudeme blíže zabývat. Avšak budeme předpokládat, že žáci znají všechna pravidla pro práci s mocninami.

Žáci devátého ročníku na učivo navazují racionálními lomenými výrazy, u kterých se naučí určovat podmínky, za kterých má výraz smysl, krátit, rozšiřovat, sčítat, odčítat, násobit a dělit racionální lomené výrazy.

2.2 HODNOTA ALGEBRAICKÉHO VÝRAZU

Žáci se naučí určit číselnou hodnotu algebraického výrazu dosazením konkrétního čísla za danou proměnnou.

[3] Výňatek z RVPZV, Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace, tematický okruh Číslo a proměnná, očekávané výstupy.

Příklad 2.2.1. Urči hodnotu výrazu $7.(a+b)$ pro hodnoty proměnných $a=6$, $b=-3$.

Řešení:

$$7.[6+(-3)]=7.(6-3)=7.3=21$$

Příklad 2.2.2. Urči hodnotu výrazu $x.(y+3z)$ pro hodnoty proměnných $x=11, y=5, z=-2$.

Řešení:

$$11.[5+3.(-2)]=11.(5-6)=11.(-1)=-11$$

Příklad 2.2.3. Urči hodnotu výrazu $\frac{x^2.(x+y)}{4}$ pro hodnoty proměnných $x=2,\ y=6$.

Řešení:

$$\frac{2^2.(2+6)}{4}=\frac{4.(2+6)}{4}=\frac{4.8}{4}=8$$

2.3 MNOHOČLEN OPAČNÝ K ZADANÉMU MNOHOČLENU

K operaci odčítání mnohočlenů je nutné nejprve definovat pojem opačného mnohočlenu. Pokud tento princip aplikujeme na čísla a budeme chtít číslo opačné k původnímu číslu, budeme postupovat tak, že číslo vynásobíme číslem -1, tedy změníme jeho znaménko.

V případě mnohočlenů budeme postupovat stejným způsobem. Celý mnohočlen vynásobíme číslem -1. Žákům se někdy tento princip zjednoduší tak, že mají u všech členů změnit znaménko.

Příklad 2.3.1. Urči mnohočlen opačný k mnohočlenu $5x^2-2y^3+z^4-2$

Řešení:

$$-(5x^2-2y^3+z^4-2)=-5x^2+2y^3-z^4+2$$

2.4 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ MNOHOČLENŮ

Jednočleny sčítáme a odčítáme tak, že sečteme a odečteme členy, které se shodují v proměnných a jejich mocninách, tedy se liší pouze koeficientem.

Tyto členy sčítáme, popř. odčítáme tak, že proměnné a jejich mocniny necháme nezměněny a sečteme a odečteme jen jejich koeficienty.

Žáci se nejprve učí sčítat a odčítat jednočleny, kde musí rozlišit sobě si odpovídající členy a ty pak sečíst nebo odečíst popsaným způsobem.

Příklad 2.4.1.

$$1 + 2a + 3b - 3 + 5b - 2a = 2a - 2a + 3b + 5b + 1 - 3 =$$
$$0a + 8b - 2 = 8b - 2$$

Sčítáme-li mnohočleny, musíme nejprve odstranit závorky. Při sčítání u obou sčítanců závorky jednoduše odstraníme tak, že je nenapíšeme, výrazy zůstanou beze změny.

Příklad 2.4.2.

$$(x + y + 6) + (3x + 8y + 12) = x + y + 6 + 3x + 8y + 12 = 4x + 9y + 18$$

Pokud od sebe odčítáme dva mnohočleny v závorkách, potom u menšitele nesmíme při odstranění závorek zapomenout změnit znaménka všech členů[4]. Toto pravidlo vychází z poučky, že odečíst číslo znamená přičíst číslo opačné, musíme tedy vytvořit výraz opačný k danému výrazu a pak už postupujeme jako při sčítání mnohočlenů.

Příklad 2.4.3.

$$(2x - 5y + 2) - (x - y + 5) = 2x - 5y + 2 + [-(x - y + 5)] =$$
$$2x - 5y + 2 + (-x + y - 5) = 2x - 5y + 2 - x + y - 5 = x - 4y - 3$$

2.5 NÁSOBENÍ MNOHOČLENŮ

Násobení algebraických výrazů můžeme rozčlenit do tří skupin: násobení jednočlenu jednočlenem, násobení mnohočlenu jednočlenem a násobení mnohočlenu mnohočlenem.

[4] Viz příklad 2.4.3.

Při násobení jednočlenu jednočlenem postupujeme tak, že koeficienty i proměnné libovolně sdružujeme a měníme jejich pořadí tak, abychom konstanty a stejné proměnné (i v různých mocninách) dostali k sobě. Toto můžeme udělat, a to vzhledem k tomu, že násobení je komutativní operací a jednotlivé činitele součinu je tedy možné mezi sebou prohazovat, jak se nám hodí. Při násobení stejných proměnných v různých mocninách využijeme následující vztah:

Pro libovolné číslo a a pro všechna přirozená čísla r, s platí vztah $a^r . a^s = a^{r+s}$.

Příklad 2.5.1 Urči součin jednočlenů:

$$16xy^4 . 51xyz^8 . 8xy^2 = 16.51.8. x. x. x. y^4 . y. y^2 . z^8 = 6528x^3y^7z^8$$

Pokud násobíme mnohočlen jednočlenem, musíme vynásobit zadaným jednočlenem každý člen polynomu. Budeme tedy násobit člen po členu. Takto získané nové členy mezi sebou sečteme. Tento postup se někdy nazývá roznásobení závorky.

Příklad 2.5.2. Urči součin:

$$5a. (4a + 6b - 3) = 5a. 4a + 5a. 6b + 5a. (-3) = 20a^2 + 30ab - 15a$$

V případě násobení mnohočlenu mnohočlenem postupujeme tak, že každým členem prvního mnohočlenu vynásobíme každý člen druhého mnohočlenu. Zjednodušeně tento postup můžeme popsat jako „každý s každým“.

Příklad 2.5.3. Urči součin dvojčlenů:

$$(5a + 3b). (4x + 8y) = 5a. 4x + 5a. 8y + 3b. 4x + 3b. 8y = 20ax +$$
$$+40ay + 12bx + 24by$$

2.6 DĚLENÍ MNOHOČLENŮ

Vzhledem k rozsahu učiva na základní škole se budeme v této podkapitole zabývat pouze dělením mnohočlenu jednočlenem, který je soudělným se zadaným mnohočlenem.

Opět tuto podkapitolu můžeme rozdělit, tentokráte pouze na dva případy, a to dělení jednočlenu jednočlenem a dělení mnohočlenu jednočlenem.

V prvním případě, tedy dělení jednočlenu jednočlenem, je postup analogický k postupu uvedeném u násobení jednočlenů. V tomto případě mezi sebou vydělíme koeficienty a příslušné proměnné. Pro libovolné číslo a z množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a pro všechna přirozená čísla r, s platí vztah $a^r : a^s = a^{r-s}$.

Příklad 2.6.1. Urči podíl jednočlenů, kde $a \neq 0, b \neq 0$

$$24a^3b : 12ab = 2a^2$$

Mnohočlen vydělíme jednočlenem tak, že zadaným jednočlenem vydělíme každý člen mnohočlenu, který je v tomto případě dělencem podobně jako v případě dělení jednočlenu jednočlenem.

Příklad 2.6.2. Urči podíl zadaných mnohočlenů, kde $x \neq 0, y \neq 0$

$$(16x^2y - 12xy) : 2xy = (16x^2y : 2xy) + (-12xy : 2xy) = 8x - 6$$ [5]

2.7 ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ POMOCÍ VZORCŮ

Úpravy algebraických výrazů pomocí vzorců jsou důležitou součástí učiva základní školy. Vzhledem k rozsahu výuky se žáci učí použít pouze tři základní typy algebraických vzorců, kterými jsou druhá mocnina součtu, druhá mocnina rozdílu a rozdíl čtverců.

Úprava pomocí vzorce „druhá mocnina součtu“ upraví druhou mocninu dvojčlenu na trojčlen podle předpisu $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Příklad 2.7.1. Uprav dvojčlen podle vzorce:

$$(3a + 2b)^2 = (3a)^2 + 2.(3a).(2b) + (2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$$

Pomocí druhé mocniny rozdílu získáme opět trojčlen, tentokrát na základě předpisu $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

Příklad 2.6.2. Uprav dvojčlen podle vzorce:

$$(3a - 2b)^2 = (3a)^2 - 2.(3a).(2b) + (2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

[5] V některých případech je vhodnější dívat se na dělení dvou jednočlenů jako na krácení zlomků, více v podkapitole 2.10 Krácení racionálních lomených výrazů.

Oba vzorce, „druhá mocnina součtu“ i „druhá mocnina rozdílu“, je možné využít i ve směru zleva doprava. Toto jeho použití nám umožňuje provést rozklad na součin.

Rozdíl čtverců je roven součinu dvou dvojčlenů: $A^2 - B^2 = (A + B).(A - B)$. Tento vzorec umožňuje ve směru zleva doprava provádět rozklad na součin.

Příklad 2.7.3. Rozlož na součin:

$$9a^2 - 4b^2 = (3a)^2 - (2b)^2 = (3a + 2b).(3a - 2b)$$

Ve směru zprava doleva dokážeme pomocí tohoto vzorce rychle vynásobit dvojčlen dvojčlenem v případě, že se od sebe liší pouze znaménkem u jednoho z jednočlenů.

Příklad 2.7.4. Uprav:

$$(4x - 5y).(4x + 5y) = 16x^2 - 25y^2$$

2.8 ROZKLAD MNOHOČLENŮ NA SOUČIN

Rozložit mnohočlen na součin můžeme třemi způsoby: vytknutím jednočlenu, vytknutím dvojčlenu a mnohočlenu s více členy nebo pomocí algebraických vzorců. Vytýkání je založeno na distributivitě násobení, tedy: $A.C + B.C = C.(A + B)$

Rozklad mnohočlenů na součin vytýkáním provedeme tak, že najdeme největšího společného dělitele všech členů výrazu a zapíšeme (vytkneme) před závorku, členy v původním výrazu jím vydělíme a podíly zapíšeme do nového mnohočlenu.

Příklad 2.8.1. Rozlož na součin:

$$15x^3y^2 - 21x^2y = 3x^2y.(5xy - 7)$$

Postupné vytýkání provádíme stejným postupem jako jednoduché vytýkání postupně v několika krocích. V tomto případě už vidíme, že vytknout se dají nejen jednočleny.

Příklad 2.8.2. Rozlož na součin:

$$k.(x + y) + x + y = k.(x + y) + 1.(x + y) = (x + y).(k + 1)$$

Rozklad v součin pomocí algebraických vzorců provádíme pomocí algebraických vzorců uvedených v předchozí podkapitole.

Příklad 2.8.3. Rozlož na součin:

$$16x^2 + 8xy + y^2 = (4x + y)^2 = (4x + y).(4x + y)$$

Příklad 2.8.4. Rozlož na součin:

$$9y^2 - 25x^2 = (3y + 5x).(3y - 5x)$$

2.9 URČENÍ DEFINIČNÍHO OBORU RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

Jak bylo již popsáno v kapitole 1.3, při výuce racionálních lomených výrazů patří do základů dovednost určit definiční obor racionálního lomeného výrazu, tedy podmínky, za kterých má výraz smysl, neboli tzv. podmínky řešitelnosti nebo tzv. podmínky platnosti.

Určení těchto podmínek je založeno na tom, že nelze sestavit zlomek s nulovým jmenovatelem. Postup je tedy takový, že mnohočlen, případně racionální lomený výraz ve jmenovateli racionálního lomeného výrazu položíme roven nule. Dále postupujeme jako při úpravě rovnice. Pomoci s úpravou si můžeme např. vytýkáním, rozkladem na součin podle vzorců atd. proto, abychom mohli snáze určit definiční obor, tedy pro jaké hodnoty proměnné je mnohočlen roven nule. Hodnoty proměnné, které vyhovují této podmínce, následně z definičního oboru racionálního lomeného výrazu vyloučíme.

Základním předpokladem pro výuku této problematiky je schopnost žáků používat základní úpravy a operace s mnohočleny, jakými např. jsou výše zmíněné vytýkání a úpravy na součin pomocí algebraických vzorců.

Příklad 2.9.1. Urči definiční obor lomeného výrazu:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy}$$

Řešení:

$$x^2 - xy = 0$$

$$x.(x - y) = 0$$

$x = 0, x = y \Longrightarrow$ Definičním oborem racionálního lomeného výrazu jsou všechny hodnoty proměnných, které splňují podmínky: $x \neq 0, x \neq y$.

Určení podmínek řešitelnosti by se mělo provádět vždy, když s racionálními lomenými výrazy budeme pracovat.

2.10 KRÁCENÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

U této úpravy začneme určením definičního oboru racionálního lomeného výrazu. Abychom zadaný výraz mohli krátit, musíme využít stejného postupu jako u krácení zlomků. U zlomků musíme čitatele i jmenovatele rozložit na součin prvočinitelů. Stejně budeme postupovat i u racionálních lomených výrazů. V tomto případě rozložit na součin prvočinitelů znamená, že čitatel i jmenovatel racionálního lomeného výrazu rozložíme na mnohočleny, které dále již nelze rozložit na mnohočleny nižšího stupně.

Díky této úpravě snadněji určíme největšího společného dělitele obou mnohočlenů a tím následně oba mnohočleny vydělíme.

Definiční obor při úpravě racionálních lomených výrazů krácením určujeme ze zadání.

Příklad 2.10.1. Zkrať lomený výraz

$$\frac{9x^2 - 12x + 4}{18x^2 - 8}$$

Řešení:

$$18x^2 - 8 \neq 0$$

$$2.(9x^2 - 4) \neq 0$$

$$(3x - 2).(3x + 2) \neq 0$$

$$3x \neq 2 \ \wedge 3x \neq -2$$

$$x \neq \pm\frac{2}{3}$$

$$\frac{9x^2 - 12x + 4}{18x^2 - 8} = \frac{(3x - 2)^2}{2.(9x^2 - 4)} = \frac{(3x - 2).(3x - 2)}{2.(3x + 2).(3x - 2)} = \frac{3x - 2}{2.(3x + 2)}; x \neq \pm\frac{2}{3}$$

2.11 ROZŠIŘOVÁNÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

U rozšiřování racionálních lomených výrazů postupujeme opět analogicky k rozšiřování zlomků. Tato operace spočívá ve vynásobení čitatele i jmenovatele racionálního lomeného výrazu stejným algebraickým výrazem, podobně jako u rozšiřování zlomků, kde čitatele i jmenovatele násobíme stejným nenulovým číslem, musíme i zde zaručit, že výraz, kterým násobíme, je různý od nuly. Ani v tomto případě nesmíme zapomenout určit podmínky, za kterých má výraz smysl.

Příklad 2.9.1. Rozšiř lomený výraz $\frac{x^2+6}{x^2}$ výrazem $x+y$.

Řešení:

$$x^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$$

$$x + y \neq 0$$

$$x \neq -y$$

$$\frac{x^2+6}{x^2} . \frac{(x+y)}{(x+y)} = \frac{(x^2+6).(x+y)}{x^2.(x+y)}; \; x \neq -y; \; x \neq 0$$ [6]

2.12 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

Při sčítání, resp. odčítání racionálních lomených výrazů opět postupujeme stejným způsobem jako u zlomků. Musíme také nalézt nejmenší společný násobek všech výrazů ve jmenovatelích všech zlomků. Poté jednotlivé sčítance vynásobíme takovým algebraickým výrazem, abychom ve jmenovatelích všech sčítanců získali nejmenší společný násobek všech původních výrazů. Společný jmenovatel opíšeme a získané mnohočleny v čitatelích sečteme, resp. odečteme. Výsledný lomený výraz zkrátíme, pokud je to možné. Nezapomeneme opět uvést podmínky, za kterých má daná úloha smysl, tedy definiční obor všech sčítanců.

[6] Podmínka $x \neq -y$ vyplývá z toho, že výraz nesmíme násobit výrazem, který je roven nule, tedy $x + y \neq 0$.

Příklad 2.12.1. Sečti

$$\frac{y+1}{y-1}+\frac{y-1}{y+1}$$

Řešení:

$$y-1\neq 0$$

$$y\neq 1$$

$$y+1\neq 0$$

$$y\neq -1$$

$$\frac{y+1}{y-1}+\frac{y-1}{y+1}=\frac{(y+1).(y+1)}{(y-1).(y+1)}+\frac{(y-1).(y-1)}{(y+1).(y-1)}=\frac{(y+1)^2}{(y^2-1)}+\frac{(y-1)^2}{(y^2-1)}$$
$$=\frac{(y+1)^2+(y-1)^2}{y^2-1}=\frac{y^2+2y+1+y^2-2y+1}{y^2-1}=\frac{2y^2+2}{y^2-1}$$
$$=\frac{2.(y^2+1)}{y^2-1};y\neq\pm 1$$

2.13 Násobení racionálních lomených výrazů

Násobení racionálních lomených výrazů je opět velmi podobné násobení zlomků. I zde platí, že pokud násobíme lomené výrazy, vynásobíme mezi sebou čitatele s čitatelem a jmenovatele se jmenovatelem. U násobení musíme napřed provést krácení tak, že vykrátíme výraz v čitateli s výrazem v jakémkoliv ze jmenovatelů.

Ani zde nesmíme opomenout určit definiční obory obou výrazů, a to před tím, než zadané výrazy zkrátíme.

Příklad 2.13.1. Vynásob výrazy:

$$\frac{x+y}{y}.\frac{xy}{(x^2-y^2)}$$

Řešení:

$$y\neq 0$$

$$x^2-y^2\neq 0$$

$$(x-y).(x+y)\neq 0$$

$$x \neq y \wedge x \neq -y$$

$$\frac{x+y}{y} \cdot \frac{xy}{(x^2-y^2)} = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{xy}{(x+y).(x-y)} = \frac{x}{x-y}; x \neq \pm y, y \neq 0$$

2.14 DĚLENÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ A SLOŽENÉ LOMENÉ VÝRAZY

Dělení racionálních lomených výrazů provádíme stejným postupem jako dělení zlomků. Převedeme dělení racionálního lomeného výrazu na násobení tak, že z dělitele uděláme převrácený výraz a tím vynásobíme dělence. Obecně můžeme dělení lomeného výrazu přepsat na násobení podle následujícího předpisu:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C},$$

kde A, B, C, D zastupují mnohočleny. Poté už postupujeme stejně jako při násobení racionálních lomených výrazů.

V tomto případě při určování definičního oboru musíme vzít v úvahu všechny mnohočleny, které se při úpravách dostanou do jmenovatele. V našem případě jde o mnohočleny zastoupené písmeny B, C, D.

Příklad 2.14.1. Děl výrazy

$$\frac{x+y}{x^2} : \frac{x^2+2xy+y^2}{xy^2}$$

Řešení:

$$x^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$$

$$xy^2 \neq 0$$

$$x \neq 0 \vee y \neq 0$$

$$x^2+2xy+y^2 \neq 0$$

$$(x+y)^2 \neq 0$$

$$x+y \neq 0$$

$$x \neq -y$$

$$\frac{x+y}{x^2} : \frac{x^2+2xy+y^2}{xy^2} = \frac{x+y}{x^2} . \frac{xy^2}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x+y}{x^2} . \frac{xy^2}{(x+y)^2} = \frac{1}{x} . \frac{y^2}{(x+y)}$$

$$= \frac{y^2}{x.(x+y)} ; x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$$

Dělení racionálních lomených výrazů někdy bývá zapisováno pomocí složeného zlomku, v tomto případě pak hovoříme o tzv. složených racionálních lomených výrazech. Složený racionální lomený výraz a jeho úpravu na dělení, posléze násobení, můžeme tedy obecně zapsat takto:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} . \frac{D}{C} ;\ B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$$

Příklad 2.14.2. Uprav složený lomený výraz:

$$\frac{\frac{x^2.(x-y)}{3y}}{\frac{x^2-2xy+y^2}{6y^2}}$$

Řešení:

$$3y \neq 0$$

$$y = 0$$

$$6y^2 \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \neq 0$$

$$(x-y)^2 \neq 0$$

$$x - y \neq 0$$

$$x \neq y$$

$$\frac{\frac{x^2.(x-y)}{3y}}{\frac{x^2-2xy+y^2}{6y^2}} = \frac{x^2.(x-y)}{3y} : \frac{x^2-2xy+y^2}{6y^2} = \frac{x^2.(x-y)}{3y} . \frac{6y^2}{x^2-2xy+y^2}$$

$$= \frac{x^2.(x-y)}{3y} . \frac{6y^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{1} . \frac{2y}{(x-y)} = \frac{2x^2y}{x-y}; x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$$

3 PŘEDPOKLÁDANÉ CHYBY ŽÁKŮ U OPERACÍ S ALGEBRAICKÝMI VÝRAZY

V této kapitole se budeme zabývat předpokládanými chybami a možností jejich eliminování pomocí vhodných didaktických postupů. Kapitola bude členěna do podkapitol podle jednotlivých operací, které jsou vyučovány na základních školách a víceletých gymnáziích, jak bylo uvedeno v kapitole 2.

V souhrnu by se dalo říci, že učivo operace s algebraickými výrazy patří k jednomu z nejnáročnějších problémů ve výuce matematiky na základní škole. Žáci se musí naučit pracovat se zobecněným tvarem číselného výrazu, který již velmi dobře znají z nižších ročníků.

Operace s algebraickými výrazy zde nejsou ničím jiným, než zobecněním práce s číselnými výrazy, neboť např. postup odčítání mnohočlenů je možné připodobnit k učivu početních operací s racionálními čísly, které je do výuky zařazeno v sedmém ročníku základní školy. Zde se žáci učí např. postup odčítání racionálních čísel tak, že odečíst číslo znamená přičíst číslo opačné. Převedeno na algebraické výrazy, odečíst mnohočlen znamená přičíst mnohočlen opačný atd.

Tyto souvislosti nejsou mnohdy žákům u operací s číselnými výrazy až tak známy. Proto se může stát, že někteří učivo operací s algebraickými výrazy špatně zvládají. A to, podle našeho mínění, hlavně proto, že jsou v krátké době seznámeni s mnoha, pro ně dosud neznámými, pravidly.

3.1 HODNOTA ALGEBRAICKÉHO VÝRAZU

Nejprve se žáci učí počítat hodnotu algebraického výrazu. Dosazením za proměnné je algebraický výraz převeden na číselný, se kterým žáci umí pracovat. V tomto případě bychom nepředpokládali žádné větší problémy s probíranou látkou. Zde se budou vyskytovat hlavně chyby při samotném numerickém výpočtu. Dosazení za neznámou do algebraického výrazu by problémem být nemělo, nejedná se o nijak složitý postup.

Další chybou, která se zde může objevit, je to, že žáci si neuvědomují základní pravidla pro zápis jednočlenů[7], a tedy může dojít k tomu, že žáci zapomenou mezi

[7] Pravidla pro zápis jednočlenů jsou uvedena v kapitole 1.1

jednotlivými hodnotami proměnných zapsat znaménko součinu a tím získat zavádějící tvar číselného výrazu.

Pro omezení tohoto problému bychom měli hlavně při výuce zdůraznit, že znaménko součinu nemusíme psát pouze ve výrazech s proměnnými.

3.2 Mnohočlen opačný k mnohočlenu

Určení mnohočlenu opačného k zadanému mnohočlenu je operací s algebraickými výrazy, která opět není nijak složitá. Je ale velmi důležitá pro další operace s algebraickými výrazy, hlavně pro odčítání mnohočlenů, a lze ji využít i při složitějších příkladech u rozkladů na součin vytýkáním.

Tato látka navazuje na učivo o opačných číslech, které žáci znají z nižšího ročníku. Nepředpokládáme žádný větší problém, či nepochopení úpravy. Chybami žáků, které u této operace budeme předpokládat, je nejspíše to, že žáci nezmění znaménko u prvního členu, zvláště pokud bude kladný (může se jim zdát, že před ním „žádné“ znaménko není), nebo naopak změní znaménko jen u prvního členu a u ostatních členů ponechají znaménka stejná. Pro omezení tohoto problému bychom doporučili hlavně zdůraznit, že pokud se před prvním členem nevyskytuje žádné znaménko, potom je daný člen kladný, a tedy je před ním znaménko plus, i když ho před něj nepíšeme.

3.3 Sčítání a odčítání mnohočlenů

Sčítání a odčítání mnohočlenů patří k nejsložitějším operacím s algebraickými výrazy, které se na základní škole vyučují. Patří ovšem také k těm, které žáci budou nejvíce používat v dalších postupech.

U této operace předpokládáme velký počet chyb. Nejčastější chybou nejspíše bude to, že žáci sčítají, popř. odčítají i členy, které sečíst nejdou. Jak bylo již popsáno v kapitole 2.4, sčítáme jen členy, které se shodují v proměnných a jejich mocninách, a to tak, že sečteme jen jejich koeficienty a proměnné ponecháme nezměněné.

Další chybou, kterou zde předpokládáme, je sečtení všech koeficientů členů ve výrazu a určení mocniny proměnné tak, že vybereme od každé tu nejvyšší, popř. tak, že u jednotlivých proměnných sečteme mocniny, podobně jako bychom je násobili.

U odčítání mnohočlenů bude docházet nejen ke stejným chybám jako u sčítání, ale může zde navíc dojít k chybě při odstranění závorek u menšitele. Chyby při odstranění závorky u menšitele budou nejspíše shodné jako při určování mnohočlenu opačného k zadanému mnohočlenu.[8]

V této situaci bychom při výuce měli hlavně neustále opakovat, za jakých podmínek můžeme členy sčítat, popř. odčítat. Dále bychom při počítání příkladů mohli volit metodu podtrhávání. To znamená, že žáky postupně navykneme na to, aby si všechny členy, které se shodují v proměnných a jejich mocninách, podtrhli stejným stylem, buď stejnou barvou, nebo stejným druhem čáry (např. rovně, vlnovkou, atd.). Tímto bychom mohli docílit toho, že si žáci spíše udělají správnou představu o tom, které členy spolu sčítat mohou a které ne.

3.4 NÁSOBENÍ MNOHOČLENŮ

V tomto případě bychom měli i při popisu předpokládaných chyb zvolit rozčlenění na několik případů.

- Násobení jednočlenu jednočlenem

U násobení jednočlenu jednočlenem nepředpokládáme větší problémy. Tato látka by žákům neměla činit problémy, neboť mezi sebou vynásobí koeficienty i proměnné a jejich mocniny sečtou. Při této úpravě by se mohly opět vyskytovat hlavně chyby numerické.

Při výuce bychom měli klást důraz na to, aby žáci znali pravidla pro počítání s mocninami. Dále bychom měli zdůraznit, že tato pravidla se dají použít pouze při násobení.

- Násobení mnohočlenu jednočlenem

U této látky navazujeme na znalosti žáků o násobení jednočlenu jednočlenem. Každý člen mnohočlenu se vynásobí zadaným jednočlenem, pro toto násobení platí stejná pravidla jako u násobení jednočlenu jednočlenem.

[8] Viz kapitola 3.2

Jako opatření proti případným chybám bychom měli zdůraznit, že se musí vynásobit každý člen mnohočlenu zadaným jednočlenem. Také bychom měli dětem připomínat, aby pamatovaly na znaménka, která se k jednotlivým členům vážou, aby nedocházelo k chybám u určení znaménka výsledného součinu.

- Násobení mnohočlenu mnohočlenem

Toto učivo už patří mezi náročnější. Každý člen jednoho prvního mnohočlenu se musí vynásobit každým členem druhého mnohočlenu a výsledek zjednodušit, tak že sečteme všechny členy, u kterých je to možné. Zatímco násobení jednočlenu jednočlenem by měl zvládat každý žák bez problému, u tohoto učiva už mohou nastat problémy. Mezi problémy by mohlo patřit právě opomenutí pravidla „každý s každým“ a další problémy by mohlo činit následné sčítání jednotlivých členů ve výsledku. Toto učivo dává dohromady znalosti žáků o násobení jednočlenů jednočlenem i znalosti ze sčítání mnohočlenů.

Jako preventivní opatření bychom zde volili opět grafický záznam násobení. To znamená, že budeme žáky vést k tomu, aby si graficky naznačili šipky od každého členu prvního mnohočlenu ke každému členu z mnohočlenu druhého. Opět lze jednotlivé kroky barevně odlišit, aby na žádný ze členů nezapomněli. Tuto metodu není nutné aplikovat pokaždé, ale považovali bychom ji za vhodnou hlavně v začátcích práce s násobením mnohočlenů mnohočlenem. Někteří žáci však tuto metodu mohou využívat i po delší dobu, popř. při násobení složitějších mnohočlenů.

3.5 DĚLENÍ MNOHOČLENŮ

Dělení mnohočlenů je souhrnný název, který v sobě skrývá dvě operace, které se vyučují na základní škole, a to dělení jednočlenu jednočlenem a dělení mnohočlenu jednočlenem. Se složitějším dělením mnohočlenu mnohočlenem se na základní škole již běžně nesetkáme, je zde spíše rozšiřujícím učivem, setkali bychom se s ním spíše na nižším stupni víceletého gymnázia.

- Dělení jednočlenu jednočlenem

Dělení jednočlenu jednočlenem je učivem jednoduchým, se kterým by děti na základní škole neměly mít větší problémy. Jedná se zde o stejné postupy jako u násobení jednočlenů. Ani u této úpravy nepředpokládáme žádné větší problémy, opět bychom očekávali spíše chyby numerické.

I v tomto případě bychom měli klást u žáků důraz na to, že mezi sebou mohou dělit jen koeficienty a jednotlivé proměnné. Proměnné dělíme podle pravidel počítání s mocninami, která jsme uvedli v kapitole 2.6.

- Dělení mnohočlenu jednočlenem

Dělení jednočlenů jednočlenem je opět principem podobné násobení mnohočlenu jednočlenem. Tedy každý člen mnohočlenu vydělíme zadaným jednočlenem.

Nepředpokládáme závažnější chyby. U této látky může dojít k chybnému dělení, nepoužití pravidel pro práci s mocninami a k tomu, že žáci zapomenou vydělit všechny členy mnohočlenu.

K prevenci chyb bychom při výuce měli zdůraznit, že opět musíme vydělit každý člen mnohočlenu, a dbát na dodržování pravidel pro počítání s mocninami. Stejně jako u násobení i tady bychom měli klást důraz na správnost určení znaménka u podílu.

3.6 ÚPRAVA ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ POMOCÍ VZORCŮ

Na základní škole se žáci učí úpravy algebraických výrazů pouze podle tří vzorců: druhá mocnina součtu, druhá mocnina rozdílu a rozdíl druhých mocnin.[9]

Úpravy algebraických výrazů pomocí vzorců patří ke složitějšímu učivu. Zároveň bez jeho znalosti nemohou pokračovat k rozkladům algebraických výrazů na součin.

Předpokládáme, že v této látce se bude vyskytovat velké množství chyb. Jednou ze základních věcí a také tou, se kterou budou mít žáci problém, je správné určení jednotlivých členů včetně jejich znamének a jejich následné umocnění na druhou. U vzorce rozdíl druhých mocnin předpokládáme, že žáci budou mít případně problémy s odmocněním jednotlivých členů rozdílu, jejich správným určením

[9] Tyto algebraické vzorce a práci s nimi jsme popsali v kapitole 2.7

a správným určením znamének. Při výuce bychom možná mohli narazit i na to, že se budou žáci snažit použít „neexistující“[10] vzorec pro součet druhých mocnin.

V tomto učivu je důležité dbát na správné použití vzorců, myslíme tím to, aby žáci uměli rozpoznat, zda je možné na daný výraz uplatnit vzorec, a poté umět správně rozhodnout, který použít. Na začátku výuky práce s algebraickými vzorci bychom měli nejdříve zopakovat umocnění jednočlenů na druhou a výpočet druhé odmocniny jednočlenů. A to proto, aby byly pokud možno téměř eliminovány chyby způsobené neznalostí základních pravidel pro umocňování a odmocňování výrazů s proměnnými.

3.7 ROZKLAD MNOHOČLENŮ NA SOUČIN

Jak jsme již popsali v kapitole 2.8, rozklad na součin můžeme provést třemi způsoby: vytýkáním jednočlenu, vytýkáním mnohočlenu (tzv. postupné vytýkání) a pomocí algebraických vzorců.[11] Toto učivo patří také ke složitějšímu. Zvláště pokud vytýkáme z výrazu mnohočlen, předpokládáme, že žáci budou mít problém určit jeho podobu a také přijít na to, že mnohočlen lze vytknout. Toto učivo je pro žáky velmi důležité, zvláště v další práci s racionálními lomenými výrazy.

Princip postupného vytýkání bude pro žáky složitější na pochopení, zvláště na základní škole, kde, oproti nižšímu stupni víceletého gymnázia, nepracujeme pouze s vybranými žáky, ale i s těmi, kteří mají s matematikou problémy.

- Vytýkání jednočlenu

  U vytýkání jednočlenu budeme předpokládat, že žáci nebudou schopni správně určit největšího společného dělitele jednotlivých členů v mnohočlenu. Poté je nutné, aby opět dbali na správnou práci s proměnnými a jejich mocninami a dbali na správné určení znamének jednotlivých členů mnohočlenů.

  Jako prevenci proti těmto chybám můžeme žákům práci trochu usnadnit tím, že lze vytknout největší společný dělitel koeficientů jednočlenů a z každého členu lze vytknout společnou proměnnou v její nejnižší mocnině.

[10] Rozklad dvojčlenu $a^2 + b^2$ na součin není možný na množině reálných čísel. Pokud bychom uvažovali množinu komplexních čísel, tak v ní už rozkládat na součin můžeme, a to takto: $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

[11] Jednotlivé postupy jsou vysvětleny v kapitole 2.8

- Postupné vytýkání

Postupné vytýkání je pro žáky v začátcích velmi složité na pochopení. Je dobré žáky nechat ze začátku pracovat pouze s jednoduššími příklady. Na těchto příkladech je velmi snadné jim vysvětlit dané postupy a žáci sami pak pomalu přichází na to, jak tento postup aplikovat na příklady složitější. Naučí se v daném mnohočlenu „vidět“, co lze vytknout a jak se k potřebnému tvaru mnohočlenu dostat.

Postupné vytýkání složitějších výrazů, nebo u příkladů, kde žáci musí vytknout mnohočlen, který je nutné ještě upravit (např. vytvořit mnohočlen opačný), bychom na druhém stupni základní školy považovali za učivo spíše rozšiřující. Na nižším stupni víceletých gymnázií bychom ho ale zařadit do běžné výuky měli, vzhledem k předpokládaným vyšším schopnostem žáků na gymnáziu.

Chyby, které předpokládáme, že žáci udělají, by mohly být např. špatné určení mnohočlenu, který lze vytknout, nebo přímo to, že tento mnohočlen žáci ani nedokáží určit.

- Rozklad na součin podle algebraických vzorců

Rozklad na součin pomocí algebraických vzorců bude činit žákům problémy, pokud se bude jednat o složitější výrazy. První problém, s nímž se pravděpodobně setkáme, je neznalost vzorců. V tomto případě se jedná o základní znalost, bez které nemohou žáci v řešení úlohy pokračovat.

Dalším problémem by mohla být i skutečnost, že žáci nedokáží správně rozpoznat, který vzorec na daný mnohočlen použít, případně zda je daný mnohočlen vůbec možné jeho pomocí rozložit.

Další samostatnou kategorií je nutnost umět pracovat s proměnnými a jejich mocninami, na kterou již narážíme po několikáté. Je tedy dobré žákům už v základu, tím v tomto případě máme na mysli dobu, kdy se žáci začínají seznamovat s umocněním proměnné, vysvětlit důležitost této látky a dbát na to, aby ji dobře zvládali. Při rozkládání na součin pomocí algebraických vzorců je nutné, aby se žáci opravdu dobře seznámili nejen se základními vzorci na úpravu mocnin, ale i se vzorcem, který pracuje s umocněním proměnné v dané mocnině.[12] Tímto bychom mohli eliminovat, alespoň částečně, chyby způsobené nesprávným určením jednotlivých členů v algebraických vzorcích, zvláště pak u složitějších příkladů.

3.8 URČENÍ DEFINIČNÍHO OBORU RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

Určení definičního oboru racionálního lomeného výrazu a počítání s racionálními lomenými výrazy vůbec je učivem, které je zařazeno do devátého ročníku základní školy. Předpokládá se, že žáci devátého ročníku již zvládli učivo práce s mnohočleny, které je vyučováno v osmém ročníku.

V tomto učivu je základním předpokladem, že jmenovatel racionálního lomeného výrazu je nenulový. Výraz ve jmenovateli žáci položí rovný nule. Získají tím rovnici, ze které musí určit, pro jaké hodnoty proměnné je výraz roven nule, a ty vyloučit z definičního oboru.

První předpokládanou chybou, kterou by mohli žáci udělat, je to, že neznají pojmy čitatel a jmenovatel. A tedy místo toho, aby zjistili, pro jaké hodnoty proměnné je jmenovatel nulový, tak položí roven nule výraz v čitateli racionálního lomeného výrazu.

U jednoduchých racionálních lomených výrazů, např. ve tvaru $\frac{x+y}{x}, x \neq 0$, kde je ve jmenovateli jednočlen, i s proměnnou ve vyšší mocnině, je určení definičního oboru jednoduché a nepředpokládáme tak, že by nastal u žáků větší problém s jeho určením.

Problémem by mohla být i skutečnost, že žáci nedokáží správně pracovat s proměnnými. Lze předpokládat, že problém nastane v případě, kdy je ve jmenovateli výraz ve více proměnných a definiční obor lomeného výrazu závisí na vztahu mezi těmito proměnnými.[13]

U složitějších výrazů, kde je ve jmenovateli již nějaký mnohočlen s proměnnými i ve vyšších mocninách, může nastat problém při zjednodušování mnohočlenu např. na součin několika jednodušších mnohočlenů. Pokud při výuce narazíme

[12] $(a^r)^s = a^{r.s}$

[13] Jedná se o případ, kdy se ve jmenovateli racionálního lomeného výrazu objeví výraz např. $x + y$. Zde se z definičního oboru musí vyloučit všechny hodnoty x, které splňují podmínku $x = -y$.

na neznalosti žáků z předchozího ročníku, je nutné žákům tyto základní věci připomenout, abychom mohli dále pracovat, neboť v dalším učivu budeme potřebovat všechny znalosti o práci s mnohočleny, které si měli v nižším ročníku osvojit.

Jak bylo již zmíněno v kapitole 2.9, určení definičního oboru racionálního lomeného výrazu bychom měli uvádět vždy, když budeme s racionálním lomeným výrazem pracovat. V následujícím textu budeme uvádět pouze předpokládané chyby týkající se dané operace prováděné s racionálními lomenými výrazy. Budeme tedy předpokládat, že žáci určí správně definiční obor racionálního lomeného výrazu, a chybami prováděnými v této operaci se v následujících podkapitolách nebudeme zabývat.

Dovolíme se tedy ještě uvést, že v operacích s racionálními výrazy může dojít nejen k tomu, že žáci neurčí definiční obor racionálního lomeného výrazu správně, ale i k tomu, že žáci neurčí všechny podmínky platnosti.

Při krácení racionálních lomených výrazů je nutné určit jeho definiční obor již ze zadání, nikoli z výsledného racionálního lomeného výrazu.

V případě, že musíme daný racionální výraz rozšířit algebraickým výrazem, je nutné určit nejen definiční obor racionálního lomeného výrazu samotného, ale je nezbytné, aby i výraz, kterým racionální lomený výraz rozšiřujeme, byl nenulový.[14] Předpokládáme, že právě na tuto podmínku budou žáci zapomínat.

Při dělení racionálních lomených výrazů předpokládáme, že žáci zapomenou určit podmínku vycházející z přepisu dělení na násobení, a to i v případě složeného lomeného výrazu[15], tedy že i čitatel dělitele musí být nenulový.

3.9 KRÁCENÍ A ROZŠIŘOVÁNÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ.

Toto učivo utváří žákům podklad pro další práci s racionálními lomenými výrazy. Je tedy velmi důležité, aby ho dobře zvládli. Zde budeme předpokládat, že žáci budou dělat podobné chyby jako při práci se zlomky.

---

[14] Je to proto, že stejně jako u zlomků můžeme racionální lomené výrazy rozšiřovat pouze nenulovými čísly.

[15] Převedení složeného racionálního lomeného výrazu na dělení provedeme takto: $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$

- Krácení racionálních lomených výrazů

V této úpravě racionálních lomených výrazů budeme předpokládat chybu v tom, že žáci nenajdou správně největšího společného dělitele výrazů v čitateli a ve jmenovateli. U jednoduchých racionálních lomených výrazů, tedy u takových racionálních lomených výrazů, které mají v čitateli i jmenovateli pouze jednočleny, je důležité, aby žáci uměli správně pracovat s proměnnými a jejich mocninami a znali také další pravidlo pro počítání s mocninami, které již pracuje s celočíselným mocnitelem.[16] Všechny chyby, které by žáci mohli při krácení těchto racionálních lomených výrazů udělat, by měly vycházet právě z toho, že tato pravidla dobře neznají. Jiné chyby nepředpokládáme.

Další skupinou jsou racionální lomené výrazy, které v čitateli i jmenovateli mají mnohočleny. Velkým problémem by zde mohlo být to, že u složitějších racionálních lomených výrazů nedokáží správně mnohočleny rozložit na součin. Bude tedy docházet k tomu, že dostanou po této operaci racionální lomený výraz, který je sice zkrácený správně, ale není to výraz v základním tvaru.[17]

U této látky je důležité dbát na to, aby žáci dobře zvládali rozkládání mnohočlenů na součin, a také na to, aby uměli správně pracovat s mocninami a jejich proměnnými. V úvodu tohoto učiva bychom měli žákům zdůraznit, že krátit racionální lomené výrazy můžeme pouze v případě, že čitatele i jmenovatele máme ve tvaru součinu.

- Rozšiřování racionálních lomených výrazů

U rozšiřování racionálních lomených výrazů postupujeme opět stejně jako u rozšiřování zlomků. Toto učivo by mělo být pro žáky jednodušší než krácení racionálních lomených výrazů, protože se jedná o jednoduché násobení čitatele i jmenovatele zadaným výrazem.

Předpokládáme, že žáci budou v tomto dělat chyby právě v chybném roznásobení. Tedy v tom, že nerozšíří čitatele i jmenovatele zároveň, ale že zadaným výrazem vynásobí buď jen čitatele, nebo jenom jmenovatele.

[16] Jedná se o následující pravidlo: $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

[17] Racionálním lomeným výrazem v základním tvaru budeme rozumět výraz, z jehož čitatele i jmenovatele nelze dále vytknout jejich největšího společného dělitele, který je různý od ± 1.

Dalším problémem by pro žáky mohlo být právě chybné roznásobení samo. Tedy že žáci správně nezvládli učivo o násobení mnohočlenů. Předpokládáme tedy, že chyby, které by se v tomto případě mohly vyskytnout, budou stejné jako u násobení mnohočlenů.

Jako prevenci chyb bychom při zahájení výuky tohoto tématu měli žákům připomenout základní pravidla pro násobení mnohočlenů.

3.10 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

Předpokládáme, že podobně jako sčítání a odčítání mnohočlenů bude i sčítání a odčítání racionálních lomených výrazů patřit k nejsložitějšímu učivu, které se racionálních lomených výrazů týká. Žáci musí využít všechny znalosti operací s algebraickými výrazy, které se dosud naučili.

Budeme předpokládat, že první problém u žáků nastane v případě, kdy budou muset racionální lomené výrazy převést na společného jmenovatele. V této operaci se nachází několik úskalí, která budou muset žáci překonat. Prvním je správné určení nejmenšího společného násobku výrazů ve jmenovatelích, kde se musí využít nejen rozklad mnohočlenů na součin, ale i spousta dalších operací, v závislosti na tom, jak složitý mnohočlen se ve jmenovateli nachází.

Dalším problém by pro žáky mohlo být, že budou muset jednotlivé racionální lomené výrazy rozšířit takovým mnohočlenem, aby ve jmenovateli vznikl požadovaný mnohočlen. Chybu mohou udělat například v tom, že mnohočlen špatně určí. Tato chyba pak vede k tomu, že i po správném provedení všech následujících postupů se žáci nedostanou ke správnému výsledku.

V případě, kdy žáci dokáží zlomky správně převést na společný jmenovatel, musí správně sečíst, popř. odečíst, vzniklé mnohočleny v čitatelích. Budeme předpokládat, že se žáci mohou dopustit stejných chyb jako při sčítání a odčítání mnohočlenů.

Dalším krokem této úpravy je zkrácení vzniklého racionálního lomeného výrazu na základní tvar. Zde se mohou opět nacházet chyby, které jsme již popsali v podkapitole krácení racionálních lomených výrazů.

Sčítání a odčítání racionálních výrazů je, podle ŠVP některých základních škol, již rozšiřujícím učivem. Pokud se tedy zaměříme na výuku této problematiky na druhém stupni základní školy, měli bychom dbát na přiměřenou náročnost zadávaných příkladů. Na nižším stupni víceletého gymnázia bychom mohli přistoupit i k příkladům náročnějším, které budou obsahovat i více sčítanců a různé kombinace sčítání a odčítání. [18]

Ve výuce je potřeba věnovat tomuto tématu velký prostor pro procvičení, aby si žáci zažili postupy, které se při sčítání a odčítání racionálních lomených výrazů používají. Pokud žáci nedokáží správně nalézt nejmenší společný násobek výrazů ve jmenovatelích racionálních lomených výrazů, můžeme jim dovolit vynásobení mnohočlenů ve jmenovatelích. Tím získají jejich společný násobek, který ovšem nemusí být nejmenší. Proto je zde nutné zdůraznit důležitost toho, aby převedli výsledný racionální lomený výraz na základní tvar.

3.11 NÁSOBENÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

U násobení racionálních lomených výrazů platí stejná pravidla jako u násobení zlomků. Tedy násobíme čitatele s čitatelem a jmenovatele se jmenovatelem. U tohoto učiva nebudeme předpokládat žádné větší chyby.

Nejdůležitější je zde dodržet pravidla pro násobení zlomků, aby nedocházelo k tomu, že žáci mezi sebou násobí čitatel jednoho racionálního lomeného výrazu a jmenovatel druhého.

Další chybou, která může nastat, je chyba v krácení racionálních lomených výrazů. U násobení racionálních lomených výrazů, je možné krátit tzv. křížovým pravidlem[19], nebo lze krátit až výsledný výraz. Pokud by žáci krátili až výsledný lomený výraz, může docházet k chybám v krácení. A to proto, že výsledný lomený výraz je po vynásobení složitější a snáze pak udělají chybu v určení největšího společného dělitele jednotlivých mnohočlenů.

Je vhodné navyknout žáky hned v počátku na to, aby krátili zadané racionální lomené výrazy ještě před jejich vynásobením.

[18] Tříděním příkladů podle náročnosti se budeme blíže zabývat v kapitole 4.
[19] Pravidlo jsme popsali v kapitole 2.13

I u tohoto učiva platí, že v případě násobení lomených výrazů, které tvoří pouze jednočleny, je pravděpodobný výskyt chyb nižší, než u složitějších příkladů, kde racionální lomené výrazy tvoří i mnohočleny.

Vzhledem k tomu, že se i v poslední části úpravy racionálních lomených výrazů, využívá poznatků o násobení mnohočlenů, budeme předpokládat, že se žáci budou dopouštět stejných chyb jako u násobení mnohočlenů, které jsou popsány v kapitole 3.4.

3.12 DĚLENÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ A SLOŽENÉ LOMENÉ VÝRAZY

Dělení racionálních lomených výrazů se jednoduchým krokem převede na násobení racionálních lomených výrazů. Chyby, které předpokládáme, že by žáci mohli dělat, budou tedy totožné s chybami, které očekáváme, že provedou u jejich násobení. Tyto chyby jsme pospali v předchozí podkapitole 3.11.

Dělení racionálních lomených výrazů a složené racionální lomené výrazy můžeme postupem úprav přirovnat k dělení zlomků a složeným zlomkům, principy této úpravy jsou totožné, a tudíž by je žáci měli mít zažité již z nižších ročníků.

Chyb, které by žáci mohli dělat pouze při dělení racionálních lomených výrazů, nebude tedy mnoho. Budeme předpokládat, že základní chybou by bylo nepřevést dělení racionálních lomených výrazů na násobení. Další chybou, kterou by mohli žáci udělat, je že žáci sice vytvoří převrácenou hodnotu dělitele, ale zapomenou změnit mezi nimi znaménko, a tedy budou výrazy dále dělit.

Samostatnou kapitolou zde jsou složené racionální lomené výrazy, které by se mohly zdát pro žáky složitější než pouhé dělení racionálních lomených výrazů. Mezi složeným racionálním lomeným výrazem a dělením racionálních lomených výrazů je velmi jednoduchý vztah.[20] Přesto bychom u této úpravy mohli předpokládat, že žáci složený lomený výraz mohou nesprávně převést na dělení.

[20] A to vztah: $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D}$

U složených lomených výrazů bychom žákům mohli práci usnadnit například tím, že jim připomeneme možnost využití vztahu, který taktéž znají z nižšího ročníku z počítání se složeným zlomky.[21] Tímto vztahem by se nám mohlo podařit eliminovat počet chyb, které by byly spojené se špatnou úpravou složeného lomeného výrazu, neboť žáci získávají již zjednodušený výraz ve tvaru racionálního lomeného výrazu, bez nutnosti další úpravy.

[21] Máme na mysli vztah „součin členů vnějších lomeno součin členů vnitřních“ : $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A.D}{B.C}$

4 KLASIFIKACE ÚLOH PODLE OBTÍŽNOSTI

V této kapitole nalezneme příklady písemných prací, které je možné předložit žákům základní školy nebo víceletého gymnázia. Kapitola je členěna do podkapitol tak, jak jsme je uvedli v kapitole 3.

V každé podkapitole nalezneme čtyři verze písemných prací zaměřených na jednotlivé operace. Každá verze nese označení obtížnosti – základní, střední, obtížná, velmi obtížná, a také přibližnou dobu, kterou je třeba žákům na vypracování dát.

Základní úroveň obsahuje takové příklady, které by měli zvládnout všichni žáci. Tuto písemnou práci je možné využít buď pro žáky, kteří jsou v matematice slabší, popřípadě trpí nějakou poruchou učení, nebo jako písemnou práci v úvodu výuky daného tématu.

Střední úroveň je koncipována tak, aby ji zvládlo spočítat správně více než 50% žáků. Jedná se o příklady, které by měli zvládnout všichni žáci, kteří z matematiky prospívají dobře, velmi dobře nebo výborně. Na tuto obtížnost je žákům přidělen čas 5-10minut, a to z toho důvodu, že záleží na konkrétní skupině žáků a nelze přesně určit, jak dlouho bude trvat, než příklady vyřeší. Tuto úroveň obtížnosti bychom mohli využít jako běžnou práci pro žáky základní školy.

Obtížná úroveň obsahuje příklady, které jsou již na úpravy složitější a je potřeba v jejich řešení i jiné, již dříve probrané, postupy. Příkladům je třeba věnovat větší čas než v předchozích dvou úrovních. Časová dotace na tuto práci je minimálně 10minut. Správně vyřešit tyto příklady by měli všichni žáci, kteří z matematiky prospívají velmi dobře a výborně.

Velmi obtížná úroveň je připravena tak, aby ji vyřešili pouze žáci, kteří z matematiky prospívají výborně. Na písemné práce této obtížnosti je přidělen žákům čas minimálně 15 minut. Tato úroveň patří mezi opravdu velmi náročné příklady, s jejichž řešením bude mít převážná většina žáků základní školy problémy. Ovšem příklady nejsou vybrány tak, aby byly dětmi neřešitelné. Tuto obtížnost bychom mohli použít na nižším stupni víceletého gymnázia jako běžnou písemnou práci.

4.1 HODNOTA ALGEBRAICKÉHO VÝRAZU

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Vypočti hodnoty algebraických výrazů pro zadané hodnoty proměnných

  $x = 4, y = -2$

  $2x + 3y =$

  $3y + 2x + 4y =$

  $(3x + y).2 =$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Vypočti hodnotu algebraického výrazu pro zadané hodnoty proměnných

  $x = -6, y = 5$:

  $2x^2 + 3y^2 =$

  $3xy - 2x^2 + 2y =$

  $(2xy + 3x^2 - 5).x =$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Vypočti hodnotu algebraického výrazu pro zadané hodnoty proměnných

  $x = 3,\ y = -\frac{1}{2}$:

  $3x^2y + 4xy^2 =$

  $8x^2y - (2x^2y^3 + 5xy) =$

  $\frac{(2x^2y + 4x^2y - 1).3xy}{3} =$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 20 minut

  Vypočti hodnotu výrazu pro zadané hodnoty proměnných $x = \frac{3}{5}, y = \frac{5}{8}, z = -\frac{1}{3}$:

  $(3x^2z + 3xy^2 + z).5 =$

  $$\frac{5xyz - \frac{1}{5}x^2z + 2xy}{15} =$$

  $$\frac{\left(\frac{2}{3}xy + 3x^2z - 5xyz\right).x^2}{\frac{9}{25}} =$$

4.2 MNOHOČLEN OPAČNÝ K MNOHOČLENU

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:

  $2xy$

  $-4x^2y$

  $3x + 2y$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5 minut

  Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:

  $-2xy + 4y$

  $8x - 4x^2y$

  $3xy + 4xy - 5$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:

  $-8x - 2xy + 4y$

  $8x^2 - 4x^2y - 9y$

  $-(-5) + xy - 2x^2y^2$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:

  $\frac{8x + 3xy + 4y}{-5}$

  $-2x^2 - 5x^2y - (-9y)^2$

  $-(-x) + (-xy) - 2x^2y^2$

4.3 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ MNOHOČLENŮ

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Sečti, popř. odečti mnohočleny:

  $x + 2x =$

  $4xy - 2xy =$

  $3x - 2y + 4x + 3y =$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Sečti, popř. odečti mnohočleny:

  $4y^2 - 3xy + 2xy - 3y^2 + 3y =$

  $(2x - xy) - (2xy) =$

  $(2x - 8y + 5x + 1y) + (-4x + 2y) =$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Sečti, popř. odečti mnohočleny:

  $(4y^2 - 3x^2y + 2xy - 3y^2) + (2x^2 + 3y - 4xy) =$

  $(4x^2 - 2x^2y - 8xy) - (-3x^2 - 2xy + y) =$

  $(9x - 8y + 4x + 6y) - (-x + y) =$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Sečti, popř. odečti mnohočleny:

  $[4xy - 2x + (-6)(-x)] - (-12x - 6xy + 8y) =$

  $\frac{(4x^2-2x^2y-8xy)}{4} - \frac{(-3x^2-2xy+y)}{4} =$

  $(9xy^2 - 8y + 4xy + 6y) - [(-2)^2 - 4x + 2xy] =$

4.4 NÁSOBENÍ MNOHOČLENŮ

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Vynásob mnohočleny:

  $4xy.5y =$

  $8x^2y.6xy^3 =$

  $8.(2xy - 9y) =$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Vynásob mnohočleny:

  $4xy.(5y + 4xy) =$

  $8x^2y.(6x + 8y) =$

  $(8 - x).(xy - 9y) =$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 5-10 minut

  Vynásob mnohočleny:

  $4xy.(5y + 4xy) =$

  $8x^2y.(6x + 8y) =$

  $(8 - x).(xy - 9y) =$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Vynásob mnohočleny:

  $(4xy - 20x^2y + y^3).(5y + 4xy) =$

  $(9xy - 8x^2y + 8xy^3).(6x + 8y) =$

  $\frac{(8-x)}{4}.\frac{(xy-9y)}{3} =$

4.5 DĚLENÍ MNOHOČLENŮ

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Vyděl mnohočleny:

  $8xyz : 2xy =$

  $9xy^2 : 3xy =$

  $42x^2yz^4 : 7xyz^4 =$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Vyděl mnohočleny:

  $(8xy + 2xy^2) : (2xy) =$

  $(12xy - 48xy^3) : (6xy) =$

  $(8xy - 10x^2y) : (2x) =$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Vyděl mnohočleny:

  $(4xy - 20x^2y + 8y^3) : (-4y) =$

  $(144xy - 156x^2y + 132xy^3) : (-6xy) =$

  $(-19xy^4z^8 - 11xyz^5 - 13x^5y^6z) : (-xyz) =$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Vyděl mnohočleny:

  $(24xy - 30x^2y + 66y^3) : [-(-6)y] =$

  $-(12xy^8 - 18x^2y + 48xy^3) : [6(-x)y] =$

  $[8x^2y - (-3xy + 8x^2y)] : [3(-x)] =$

4.6 ÚPRAVA ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ POMOCÍ VZORCŮ

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Uprav:

  $(x + y)^2 =$

  $(c - d)^2 =$

  $(a + b).(a - b) =$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Uprav:

  $(3x + 3)^2 =$

  $(5 - 2a)^2 =$

  $(2c + 3).(2c - 3) =$

- Obtížnost: Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Uprav:

  $(4x^2 + 5y)^2 =$

  $(8c^3 - 2d^2)^2 =$

  $(3a - 4b^2)(3a + 4b^2) =$

- Obtížnost: Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Uprav:

  $[(-3x)^2 - 9y]^2 =$

  $[6xy + (-2z)^2]^2 =$

  $[(-2x)^2 + (-2y)].[(-2x)^2 + 2y] =$

4.7 ROZKLAD MNOHOČLENŮ NA SOUČIN

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Rozlož na součin:

  $x^2 - 2xy + y^2 =$

  $3xy + 6x =$

  $8y - 4x =$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Rozlož na součin:

  $9 + 6x + x^2 =$

  $12x^2 + 6x^3 + 15x + 21 =$

  $4 - x^2 =$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Rozlož na součin:

  $144x^2 - 312x + 169 =$

  $12(x + y) - 6(x + y) =$

  $16x^4 - 81y^2 =$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Rozlož na součin:

  $ab + b + 5a + 5 =$

  $x^2 - 3y - 3x - yx =$

  $9 + 6x + x^2 + 6 + 3x =$

4.8 URČENÍ DEFINIČNÍHO OBORU RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Urči definiční obor lomeného výrazu:

  $\frac{x+3}{x}$

  $\frac{3xy+x}{3x}$

  $\frac{2xy+3}{5y}$

- *Obtížnost:* Střední
  Časová dotace: 5-10 minut

  Urči definiční obor lomeného výrazu:

  $\frac{2xy}{x+2} =$

  $\frac{3x+y+z}{3-x} =$

  $\frac{4-x^2}{x-0,5} =$

- *Obtížnost:* Obtížná
  Časová dotace: 10 minut

  Urči definiční obor lomeného výrazu:

  $\frac{24x-y+15z}{x-y} =$

  $\frac{12xyz}{x-3y} =$

  $\frac{19x+2y}{2x-4y} =$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Urči definiční obor lomeného výrazu:

  $\frac{xy+5}{x^2-9} =$

  $\frac{x+y+5}{x.(x^2-16)} =$

  $\frac{8xy+6z}{2.(x^3-81x)} =$

4.9 KRÁCENÍ A ROZŠIŘOVÁNÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Zkrať lomený výraz:

  $$\frac{x^2}{x} =$$

  $$\frac{3x}{3x} =$$

  Rozšiř lomený výraz výrazem xy:

  $$\frac{2x}{5y} =$$

  $$\frac{4y}{2z} =$$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5 -10 minut

  Zkrať lomený výraz:

  $$\frac{4x^2y}{xy} =$$

  $$\frac{3xy}{9xyz} =$$

  Rozšiř lomený výraz výrazem $x + y$ a výsledek uveď ve tvaru podílu mnohočlenů:

  $$\frac{3x}{4y} =$$

  $$\frac{3y}{5z} =$$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Zkrať lomený výraz:

  $\frac{4x^2+5xy}{4x+5y}=$

  $\frac{9+6x+x^2}{3y+xy}=$

  Rozšiř lomený výraz výrazem $xy-5y$ a výsledek uveď ve tvaru podílu mnohočlenů:

  $\frac{3x+2}{4y-1}=$

  $\frac{3y+3}{5x}=$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Zkrať lomený výraz:

  $\frac{9x^2+36xy+36y^2}{3x+6y}=$

  $\frac{81x+18x^2+x^3}{9y+xy}=$

  Rozšiř lomený výraz výrazem $x-5y+3$ a výsledek uveď ve tvaru podílu mnohočlenů:

  $\frac{3y+2}{4x-1}=$

  $\frac{3xy+3}{x-3}=$

4.10 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Sečti, popř. odečti:

$$\frac{x+y}{x}+\frac{y}{x}=$$

$$\frac{2x+2}{xy}-\frac{2x}{y}=$$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Sečti, popř. odečti mnohočleny

$$\frac{2x+y}{x-1}+\frac{3x-2}{x}=$$

$$\frac{3a+2b}{a+3}-\frac{a-b}{3a}=$$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Sečti, popř. odečti mnohočleny

$$\frac{2xy+5}{y^2-x^2}+\frac{3y+2}{y-x}=$$

$$\frac{2a-2}{a^2+2a+1}-\frac{5a+5}{(a-1)}=$$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Sečti, popř. odečti mnohočleny:

$$\frac{3x.(5x+y)}{6(5y+x)} - \frac{3x}{25x^2+10xy+y^2} =$$

$$\frac{x}{(x+y)} + \frac{y+2}{(x-y)} - \frac{3+x}{x^2-y^2} =$$

4.11 NÁSOBENÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Vynásob lomené výrazy a výsledek uveď v základním tvaru:

$$\frac{2x}{xy} . \frac{4y}{x^2} =$$

$$\frac{2.(x+1)}{2x} . \frac{2xy}{x+1} =$$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Vynásob lomené výrazy a výsledek uveď v základním tvaru:

$$\frac{3x+6y}{x-1} . \frac{3xy}{x+2y} =$$

$$\frac{3a+2b}{a+3} . \frac{a-b}{6a+4b} =$$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Vynásob lomené výrazy a výsledek uveď v základním tvaru::

  $$\frac{2xy+5x}{x.(y^2-x^2)} \cdot \frac{(y-x)^2}{6y+15} =$$

  $$\frac{2ab-2b}{5.(a^2+2a+1)} \cdot \frac{5a+5}{2.(a-1)} =$$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Vynásob lomené výrazy a výsledek uveď v základním tvaru::

  $$\frac{3x.(5x+y)}{6(x+y).(x-y)} \cdot \frac{6x^2-6y^2}{25x^2+10xy+y^2} =$$

  $$\frac{x^2+y^2}{(x+y)} \cdot \frac{y+2}{(x-y)} \cdot \frac{x^2-y^2}{6y+12x} =$$

4.12 DĚLENÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ A SLOŽENÉ LOMENÉ VÝRAZY

- *Obtížnost:* Základní

  Časová dotace: 5 minut

  Vyděl lomené výrazy:

  $$\frac{16xy}{xy} : \frac{8y}{x^2y} =$$

  $$\frac{6.(y+1)}{2x} : \frac{y+1}{6xy} =$$

- *Obtížnost:* Střední

  Časová dotace: 5-10 minut

  Vyděl lomené výrazy:

  $$\frac{6x+3y}{x-1} : \frac{2x+y}{2x-2} =$$

  $$\frac{3a+2b}{a+3} : \frac{3a+2b}{6a+18} =$$

- *Obtížnost:* Obtížná

  Časová dotace: 10 minut

  Vyděl lomené výrazy:

  $$\frac{2xy+5x}{x.(y^2-x^2)} : \frac{6xy+15x}{y-x} =$$

  $$\frac{\frac{2ab-2b}{5.(a^2+2a+1)}}{\frac{4b.(a-1)}{(5a+5)^3}} =$$

- *Obtížnost:* Velmi obtížná

  Časová dotace: 15 minut

  Vynásob lomené výrazy:

  $$\frac{3x.(5x+y)}{6(x+y).(x-y)} : \frac{6x.(10x+2y)}{6x^2-6y^2} =$$

  $$\frac{\frac{x-y}{x^2+y^2} \cdot \frac{x+y}{(x-y)}}{\frac{x^2-y^2}{6y+12x}} =$$

5 CHYBY PROVEDENÉ VZORKEM ŽÁKU U JEDNOTLIVÝCH OPERACÍ

V této kapitole se budeme věnovat chybám provedeným vzorkem žáků, jejichž písemné práce jsme měli k dispozici. Jednalo se o žáky osmého a devátého ročníku ZŠ a MŠ Švihov a o žáky odpovídajících ročníků Gymnázia na Mikulášském náměstí v Plzni. Budeme se věnovat hlavně porovnání předpokládaných chyb, které jsme uvedli v kapitole 3, s tím, jaké chyby žáci reálně provedli v jednotlivých písemných pracích. [22]

Žákům byly předloženy písemné práce, ve kterých měli vždy několik příkladů od daného tématu, od nejjednodušších až po ty, podle našich předpokladů, velmi obtížné.

Pokud bychom měli práce zhodnotit celkově, u jednodušších operací si žáci vedli velmi dobře. Avšak se stupňující se obtížností jednotlivých operací začaly chyby být stále častější. Konkrétně u operací s racionálními lomenými výrazy jsou chyby opravdu velmi časté, v některých případech se až i může zdát, že žáci nemají žádné základní znalosti o práci s algebraickými výrazy. U některých žáků bylo i obtížné odhalit a analyzovat postup, kterým příklady řešili.

Zdá se tedy, že učivo operací s algebraickými výrazy je pro žáky opravdu náročné a mají velké problémy řešit zadané příklady. Avšak toto učivo patří k jednomu z nejdůležitějších na základní škole, protože se jedná hlavně o přípravu ke studiu na středních školách, kde se začnou seznamovat se stále náročnějšími úkoly. Je proto velmi důležité klást důraz na to, aby toto učivo zvládli všichni žáci, alespoň na té nejzákladnější úrovni.

5.1 HODNOTA ALGEBRAICKÉHO VÝRAZU

Ve většině případů neměli žáci v písemných pracích, v souladu s tím, co jsme předpokládali, problémy určit číselnou hodnotu algebraického výrazu. Pokud už se zde ve výpočtu objevily chyby, byly hlavně numerického rázu. S dosazením číselné hodnoty za neznámou neměli žáci žádné problémy. Našli se však ve výjimečných případech chyby, které jsme nepředpokládali. Žáci za hodnotu

[22] Příklady písemných prací, které byly využity pro vznik této kapitoly, a vybrané písemné práce žáků je možné nalézt v přílohách.

proměnné dosadili, avšak proměnné již neodstranili. Došli tedy k zaváděјícímu tvaru, kdy správně roznásobili jednotlivé členy, ale ve výsledku jim zůstávaly proměnné.

Jako prevenci proti této chybě je nutné zdůraznit, že pokud počítáme hodnotu algebraického výrazu, dosadíme do výrazu hodnoty proměnných a proměnné, za které jsme dosadili, již z výrazu odstraníme a že tedy řešením zadaných úloh je pouze číslo.

5.2 MNOHOČLEN OPAČNÝ K MNOHOČLENU

Předpokládali jsme, že tato operace nebude pro žáky příliš obtížná. Jak se ukázalo, náš předpoklad byl správný, ovšem našli se i žáci, kteří mnohočlen opačný k mnohočlenu nedokázali určit správně. Ve velké většině případů, pokud již došlo k chybě, jednalo se o chybu, kterou jsme předpokládali. Nejčastější chybou bylo, že žáci změnili znaménko pouze u prvního členu mnohočlenu a na ostatní zapomněli. Také zapomínali změnit znaménko u prvního členu. Velmi často na něj zapomínali, pokud byl kladný, a u ostatních ho již změnili.

V tomto učivu jsme byli překvapeni, jak malý počet chyb žáci udělali oproti předpokladu. Dá se říci, že žáci toto učivo dobře zvládají a nemají s ním žádné větší potíže.

5.3 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ MNOHOČLENŮ

V kapitole číslo 3 jsme vyslovili předpoklad, že toto učivo bude patřit k tomu nejsložitějšímu, které se na základní škole vyučuje. Na základě tohoto předpokladu jsme určili i nejčastější chyby, které žáci budou dělat.

Náš předpoklad se ve většině potvrdil. I žáci, kteří mají z matematiky velmi dobrý prospěch, zde často chybují. Nejčastější chybou v písemných pracích bylo sečtení členů mnohočlenu, které sčítat nelze. U některých žáků lze předpokládat chyby hlavně z nepozornosti, u některých je však z práce patrné, že nesprávně pochopili principy, které jsou u sčítání a odčítání mnohočlenů potřeba.

Potvrdil se i předpoklad, že žáci sečtou koeficienty a proměnné mezi sebou vynásobí. Výsledkem takovéto operace byl potom jednočlen s proměnnými ve vysokých mocninách.

V případě, že v zadání bylo, že máme mnohočleny odečíst, první chybou bylo nesprávné odstranění závorky. Někteří žáci závorku v menšiteli pouze odstranili a nezměnili již znaménka u jednotlivých jednočlenů daného mnohočlenu. Někteří žáci také nejdříve nesprávně sečetli všechny členy v závorkách, i když již sčítání nebylo dle pravidel pro sčítání mnohočlenů možné, a oba výsledky pak mezi sebou odečetli. Výsledkem se tak stal jednočlen.

Z písemných prací žáků bylo patrné, že sčítání a odčítání mnohočlenů je pro ně velmi složité zvládnout. Je velmi těžké i navrhnout nějaké opatření, které by pomohlo eliminovat chyby, které takto vznikají.

5.4 NÁSOBENÍ MNOHOČLENŮ

Souhrnně lze říci, že násobení mnohočlenů je pro žáky daleko snazší než sčítání a odčítání. Pro lepší přehlednost zde výsledky opět rozdělíme, podobně jako v kapitole 3.4.

- Násobení jednočlenu jednočlenem

Násobení jednočlenu jednočlenem zvládli žáci velmi dobře. V rámci písemných prací bylo v tomto okruhu jen velmi málo chyb. Myslíme, že se dá říci, že tuto látku žáci zvládají bez větších problémů. Jediným úskalím se u některých stalo, že neznají pravidla pro násobení proměnných. Někteří si ale zvládli poradit. Použili pravidla pro mocniny, proměnné si rozložili na součin a poté dali dohromady, což jim umožňuje komutativnost násobení.

Celkově tedy můžeme říci, že tato látka byla žáky dobře pochopena a nečiní jim ve většině případů problémy.

- Násobení mnohočlenu jednočlenem

Žáci využívají znalosti násobení jednočlenu jednočlenem. Pokud vezmeme v úvahu, že násobení jednočlenu jednočlenem žáci zvládli v převážné většině dobře, bylo pro nás velkým překvapením, že jim tato operace začala dělat problémy.

Nejčastější chybou se stalo, že žáci mnohočlen v závorce sečetli, přestože to pravidla pro sčítání mnohočlenů nedovolila, opět tak získali jednočlen. Takto získaný jednočlen vynásobili zadaným jednočlenem. Velmi překvapující bylo, že tyto dva jednočleny byly již mezi sebou vynásobeny formálně správně. Je tedy jasné, že největším problémem byla neznalost principu násobení mnohočlenů jednočlenem a dokonce i chyby, které vycházely z neznalosti správného sčítání mnohočlenů.

Většina žáků si s násobením mnohočlenu jednočlenem poradila dobře. I když se chyby vyskytovaly u méně než poloviny žáků, byli jsme jimi do značné míry překvapeni, neboť jsme takovéto chyby nepředpokládali.

- Násobení mnohočlenu mnohočlenem

U této operace jsme předpokládali již větší množství chyb. Tento předpoklad se nám vyplnil.

Žáci zde chybovali v mnoha ohledech. První byl již zmíněn výše u násobení mnohočlenu jednočlenem. Žáci opět sečetli výrazy v závorkách a získali tak dva jednočleny, které mezi sebou vynásobili.

Další chybou, kterou jsme také předpokládali, byla neznalost pravidla pro násobení mnohočlenů mnohočlenem, které žáci znají pod názvem „každý s každým“. Velmi špatně jsou při této operaci mezi sebou rozlišitelné chyby z nepozornosti a chyby, které vznikly neznalostí tohoto pravidla.

U některých prací bylo vidět, že žáci využívají grafické metody. Tedy že pro větší názornost použijí šipky, které naznačují, co mají s čím vynásobit. Z našeho pohledu je zajímavé, nebo lépe řečeno přínosné, že žáci, kteří tuto grafickou pomůcku využili, dospěli pokaždé ke správnému výsledku.

Dalšími chybami, které již nebyly ale tak časté, bylo, že žáci buď úplně zapomněli, nebo nesprávně sečetli mnohočlen, který po násobení vznikl. Pokud žáci výsledný mnohočlen dále nesčítali, jedná se o chybu, ale nikoli tolik závažnou jako nesprávné sečtení výsledného mnohočlenu. Tato chyba se pak dá spíše považovat za chybu z nepozornosti než z neznalosti. Ale i zde je velice složité tyto dvě chyby od sebe odlišit.

5.5 DĚLENÍ MNOHOČLENŮ

U dělení mnohočlenů docházelo prakticky ke stejným chybám, jako při jejich násobení. V jednodušších příkladech, např. dělení jednočlenu jednočlenem, nedocházelo k žádným zásadním chybám.

V případě, kdy žáci dělili jednočlen jednočlenem, nedocházelo k žádným zásadním chybám. V převážné většině případů si žáci s tímto úkolem poradili bez chyb. V několika málo případech se již chyba vyskytla. Jediným problémem byla opět neznalost základních pravidel pro práci s proměnnými a jejich mocninami. Další chyby, které žáci provedli, byly spíše numerického charakteru.

Dělení mnohočlenu jednočlenem bylo většinou žáků také dobře zvládnuto. Avšak i zde byl podíl chyb již větší než při dělení jednočlenu jednočlenem. Docházelo k několika druhům chyb. Nejčastější chybou bylo špatné dělení jednotlivých členů mnohočlenu. Zde bylo možné opět odhalit chyby v neznalosti operací s proměnnými a jejich mocninami. Dalšími častými chybami byly chyby numerické. Podobně jako u násobení mnohočlenů se vyskytly chyby, které plynuly z neznalosti základních pravidel pro sčítání mnohočlenů. Někteří žáci sečetli všechny členy mnohočlenu a získali tím úlohu dělení jednočlenu jednočlenem.

To, že se při dělení jednočlenů vyskytují stejné chyby jako u násobení jednočlenů, nás nepřekvapilo. Vzhledem k faktu, že násobení a dělení mnohočlenů jsou velmi podobnými operacemi, bylo již v začátcích téměř jasné, že i chyby, které se při této úpravě budou vyskytovat, budou principiálně stejné.

5.6 ÚPRAVA ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ POMOCÍ VZORCŮ

Úprava algebraických výrazů pomocí algebraických vzorců patří, tak jak jsme předpokládali, k náročnějšímu učivu. I na základě písemných prací žáků můžeme říci, že žáci mají problém používat vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu a rozdíl druhých mocnin.

Žáci často nedokáží správně rozhodnout, jaký vzorec pro danou úpravu použít. Největší problém nastal v případě, že jsme zadali příklad na rozklad podle vzorce „druhá mocnina rozdílu“. Hlavním a největším problémem bylo to, že žáci se snažili použít vzorec „rozdíl druhých mocnin“. Podle předpokladu docházelo ke stejnému problému v úlohách na použití vzorce „druhá mocnina součtu“. Žáci překvapivě často chybovali při použití vzorce pro rozdíl druhých mocnin, který se snažili použít bez přemýšlení i v případě součtu druhých mocnin.

Pokud už žáci správně poznali, jaký vzorec mají použít, nedokázali ho použít správně. Tedy nedokázali správně určit jednotlivé členy. Do tohoto případu zahrneme i žáky, kteří dokázali správně určit vzorec, který mají použít, i jednotlivé členy nedokáží již správně dosadit do vzorce. Např. u vzorce „druhá mocnina součtu“ se stalo pro některé žáky téměř nemožným správně dosadit do předpisu $a^2 + 2ab + b^2$, i když se jim předtím podařilo správně určit jednotlivé členy a, b. Tyto chyby jsou způsobené neznalostí pravidel pro zápis algebraických výrazů, která jsme uvedli v kapitole 1. Mohlo by se také jednat o problém substituce. V tomto případě musí žáci nahradit jedno „písmenko“ hned několika dalšími proměnnými. Doposud byli zvyklí dosazovat za proměnné jen čísla, jako např. u dosazování do vzorců na výpočet obvodu.

U těchto příkladů také docházelo ke stejným chybám jako u násobení, popř. dělení mnohočlenů. Tedy k takovým chybám, kde žáci sečetli všechny členy dvojčlenu, i když to dle pravidel pro sčítání mnohočlenů nebylo dále možné, a následně umocnili získaný jednočlen na druhou.

Úpravy algebraických výrazů podle vzorců byly pro žáky opravdu velmi náročné. Dá se říci, že přibližně tři čtvrtiny žáků dané úkoly nezvládly zcela bez chyb.

V tomto případě se nedá dobře doporučit nějaký jednoznačný postup, který by byl při výuce dobře použitelný, a jehož užití by pomohlo eliminovat takové chyby na minimum. Pokud žáci nezvládli dobře všechny předchozí operace, můžeme jen stěží očekávat, že bez chyb zvládnou i tuto operaci.

- Rozklad mnohočlenů na součin

U tohoto učiva docházelo k mnoha chybám. Aby byla tato kapitola přehlednější, bude členěna do tří částí.[23] Obecně lze k této operaci říci, že největším problémem bylo již samotné zadání příkladu. Žáci znají velmi dobře operaci vytýkání před závorku. Pokud jim ale byl úkol zadán s popisem „rozložte na součin“, převážná většina žáků netušila, co má s příkladem dělat. Tuto chybu jsme nepředpokládali a byla pro nás velkým překvapením. Je až s podivem jak snadno lze dětem připravit neřešitelný úkol pouze tím, že zadání úkolu trochu pozměníme. Abychom tento případ minimalizovali, doporučili bychom, aby se tyto úkoly žákům zadávaly pod rozdílnými názvy pokud možno co nejčastěji, aby si zvykli na to, že vytknutí před závorku a rozklad na součin je jednou a tou samou operací.

- Vytýkání jednočlenu

U vytýkání jednočlenu se přesně podle našeho předpokladu stalo největším problémem správně určit největšího společného dělitele jednotlivých členů mnohočlenu. Dalším problémem bylo to, že žáci nesprávně pracují se vzorci pro úpravu proměnných a jejich mocnin. Jinak žáci vytýkání jednočlenu zvládli velmi dobře. Více než polovina vyřešila tyto jednoduché příklady správně.

Nejčastějším problémem zde bylo, že žáci nedokázali vytknout největšího společného dělitele. Vytkli pouze společného dělitele, a tím získali jako výsledek algebraický výraz, ze kterého bylo ještě možné dále vytýkat. Velmi častým a taktéž pro nás překvapivým problémem bylo vytknout největšího společného dělitele koeficientů proměnných, nikoli proměnných samotných. Předpokládali bychom, že bude naopak pro žáky problémem správně vytknout největšího společného dělitele proměnných jednotlivých členů.

- Postupné vytýkání

Postupné vytýkání samo o sobě patří k opravdu náročnému tématu. Pro žáky na základní škole se zdálo být i nad jejich síly. Jednoduché příklady zvládli většinou dobře. Pokud jsme jim hned na začátku ukázali mnohočlen, který mají vytknout, dokázali si s tím někteří dobře poradit a příklady zvládli.

[23] Stejně jako tomu bylo i v kapitole 3.7

Pokud jsme u složitějších příkladů nechali žáky, aby sami postupně vytýkali a odhalili tak mnohočlen, který lze ze zadaného mnohočlenu vytknout, začalo docházet k problémům. Tyto typy příkladů zvládlo odhadem jen asi deset procent žáků základní školy. Z tohoto vyplývá, že tato látka činí žákům opravdu velké problémy. U těchto příkladů je opravdu nutné, aby se žáci naučili „vidět“, co mají vytknout, aby došli ke správnému výsledku. Toho lze dosáhnout hlavně tím, že se spočítá značné množství příkladů, aby si žáci dané postupy „zažili“.

Opravdu nejsložitějšími příklady na postupné vytýkání byly ty, kde bylo nutné ještě dané mnohočleny upravit vytknutím -1 před závorku, abychom získali mnohočleny ve stejném tvaru a bylo je možné dále vytýkat. V těchto typech příkladů bylo ještě větší procento chybných úprav než v úlohách předchozích. Tyto úpravy zvládli opravdu jen ti nejlepší žáci z ročníku. V tomto případě bychom doporučili každému pedagogovi druhého stupně základní školy ke zvážení, zda žáci tuto látku zvládnou, a případně ji ve výuce vynechat. Čas, který je určen na probrání tohoto tématu, věnovat jiným problémům, které činí žákům potíže.

- Rozklad na součin pomocí algebraických vzorců

  Nejčastější chybou zde bylo, stejně jako u úprav algebraických výrazů pomocí vzorců, že žáci nedokáží správně určit, jaký vzorec mají použít a zda je vůbec možné některý z daných vzorců využít. Pokud se již rozhodnou, který vzorec užijí, tak nastává problém v tom, aby správně určili jednotlivé členy. Další chyby jsou stejné, které jsme uvedli v kapitole 5.6.

  Zde je velmi důležité, aby žáci dobře znali základní předpisy pro algebraické vzorce a uměli správně pracovat se všemi pravidly pro proměnné a jejich mocniny. Bez těchto znalostí není možné, aby rozklad mnohočlenů na součin pomocí vzorců zvládli.

5.7 URČENÍ DEFINIČNÍHO OBORU RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

Oproti tomu, co jsme předpokládali v kapitole 3.8, žáci znají pojmy čitatel a jmenovatel, a tedy chyby plynoucí z neznalosti těchto pojmů nevznikaly. Určení definičního oboru racionálních lomených výrazů je velmi důležité. Definiční obor totiž musíme uvést pokaždé, když s racionálními lomenými výrazy budeme pracovat. Tedy pokud žáci definiční obor neumí určit správně, nebudou moci správně řešit ani další úkoly, které se k této operaci vážou.[24]

V příkladech, kde je ve jmenovateli lomeného výrazu jednoduchý jednočlen, např. x, žáci správně zvládají určit, že hodnota proměnné nesmí být nula. Velmi překvapující bylo, že pokud jim do jmenovatele výrazu zadáme již o něco složitější jednočlen, např. $4xyz$, žáci již nezvládnou určit správně definiční obor. Toto přisuzujeme neznalosti vlastností součinu, kdy stačí, aby jeden činitel součinu byl roven nule, a výsledná hodnota celého součinu je také nulová.

Pokud se ve jmenovateli nachází jednoduchý dvojčlen, např. $x + 3$, dostáváme až překvapivě často od žáků výsledek, že x má být různé od nuly. Ale i v tomto případě dokáže většina žáků definiční obor určit správně. Problém nastává až v případě, že musí vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé[25], tam máme v převážné většině případů definiční obor určen nesprávně.

Pokud máme ve jmenovateli výraz, který je nutné rozložit na součin, získáváme pro naprostou většinu žáků neřešitelný problém. Již u základní práce s racionálními lomenými výrazy jsme dospěli k názoru, že žáci rychle zapomínají učivo z předchozích ročníků. Je proto nutné před začátkem úprav racionálních lomených výrazů připomenout žáků základní práci s mnohočleny.

Chyby v určení definičního oboru racionálního lomeného výrazu již nebudeme v dalších podkapitolách uvádět, neboť bychom se neustále opakovali.

Dovolíme si ještě zmínit, že v případě krácení, rozšiřování, sčítání, odčítání, násobení a dělení lomených výrazů je nutné určovat podmínky dle pravidel, která jsou uvedena v kapitole 3.8. Tato pravidla většinou žákům nečinila ani zdaleka takové problémy, jako určení definičního oboru samotného.

[24] Momentálně máme na mysli nejen další počítání se samotnými lomenými výrazy, ale i to, že pokud žáci neumí správně určit definiční obor lomeného výrazu, nezvládnou ani správně určit počet řešení rovnice s neznámou ve jmenovateli.

[25] Př. $x + 3y \neq 0$

5.8 KRÁCENÍ A ROZŠIŘOVÁNÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

U krácení a rozšiřování racionálních lomených výrazů žáci využívají znalostí násobení mnohočlenů a o rozkladu mnohočlenu na součin. Dochází zde také ke stejným chybám, jako u těchto operací s mnohočleny.[26]

Pokud se zaměříme nejprve na *krácení lomených výrazů*, prvním a často nepřekonatelným problémem je správný rozklad na součin. Většinou zde bylo, alespoň u našeho vzorku žáků, problémem, že nelze krátit výrazy, které nejsou ve tvaru součinu. Ve většině písemných prací žáci krátili již v mnohočlenech uvedených v zadání příkladů bez toho, aby je nejdříve rozložili na součin. Je tedy zřejmé, že při výuce je potřeba klást důraz na správné provedení této úpravy. U lomených výrazů nelze krátit, pokud nemáme v čitateli i jmenovateli výraz ve tvaru součinu. U jednoduchých racionálních lomených výrazů, kde v čitateli i jmenovateli jsou pouze jednočleny, docházelo také k mnoha chybám. Tyto chyby byly způsobeny hlavně neznalostí pravidel pro počítání s proměnnými a jejich mocninami.

U *rozšiřování lomených výrazů* dělalo žákům problém vynásobit čitatel i jmenovatel lomeného výrazu zadaným výrazem. Chyby, které takto vznikly, většinou pocházely z neznalosti rozšiřování zlomků, neboť rozšiřování lomeného výrazů je jen zobecněným postupem pro rozšiřování zlomků. Další chyby, které se zde objevily, pramenily z neznalosti pravidel pro násobení mnohočlenů.

5.9 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

Sčítání a odčítání racionálních lomených výrazů je operací, která činí žákům největší problémy. V tomto učivu se musí skloubit jejich znalosti z rozšiřování a krácení racionálních lomených výrazů a násobení, sčítání, popř. odčítání a násobení mnohočlenů a jejich rozklad na součin. Jinými slovy, téměř všechny operace, které se dosud s algebraickými výrazy naučili provádět.

Také je zde spousta možností, kde udělat chybu. Potvrdil se i náš předpoklad. Toto učivo bude pro většinu žáků velmi náročné.

---

[26] Tyto chyby jsou uvedeny v kapitolách 5.4 a 5.7

Nejčastějším problém bylo to, že žáci nezvládli lomené výrazy správně převést na společného jmenovatele. Velmi často u této operace dokázali udělat chybu. Zvláště pak pokud bylo nutné výrazy ve jmenovatelích rozložit na součin, abychom dokázali najít nejmenší společný násobek, a tím i nejmenší společný jmenovatel. Pak se dopouštějí stejných chyb, jako u rozkladu mnohočlenů na součin.

Dalším krokem při sčítání a odčítání lomených výrazů je správné rozšíření výrazů v čitatelích. Na základě našich písemných prací bylo pro žáky největším problémem nalézt správný výraz, kterým museli rozšířit jmenovatele racionálního lomeného výrazu, při převodu na společný jmenovatel.

V dalším kroku je třeba výrazy v čitatelích roznásobit a sečíst popř. odečíst. A nastává pro žáky další problém, a to správné roznásobení a sečtení. Žáci se dopouštěli stejných chyb jako u samotného násobení a sčítání mnohočlenů.

Dalším a posledním krokem je převedení získaného lomeného výrazu na základní tvar, tedy na tvar, kdy v čitateli i jmenovateli jsou nesoudělné výrazy. Zde se uplatňuje opět rozklad mnohočlenů na součin a musí se správně krátit. Žáci se opět dopouštějí chyb, které již byly zmíněny v předchozích podkapitolách. Z těch nejzávažnějších si dovolíme připomenout nesprávné krácení, kdy mnohočleny jsou ve tvaru součtu, popř. rozdílu.

Jak bylo již řečeno, toto učivo je zvláště pro žáky základní školy velmi náročné, a většina ŠVP je považuje za učivo rozšiřující. Na druhém stupni základní školy bychom volili přiměřeně náročné příklady s ohledem na schopnosti konkrétní skupiny žáků, se kterou pracujeme. [27] Na nižším stupni víceletého gymnázia bychom mohli už zařadit i příklady obtížnější.

5.10 NÁSOBENÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

Násobení racionálních lomených výrazů je pro žáky výrazně snazší než sčítání a odčítání. Jedná se o zobecnění násobení zlomků. Platí pravidlo, že výraz v čitateli jednoho lomeného výrazu násobíme s výrazem v čitateli druhého lomeného výrazu a stejně tak i jmenovatele.

[27] Rozdělení úloh podle obtížnosti jsme se věnovali v kapitole 4.

U složitějších příkladů je nutné nejprve jednotlivé výrazy rozložit na součin, abychom v nich mohli krátit. Nesprávný rozklad na součin je prvním zdrojem chyb, následuje nesprávné krácení lomeného výrazu. U násobení lomených výrazů platí, stejně jako u zlomků, že lze krátit tzv. křížem.[28] Tomuto postupu se žáci mnohdy brání. Jak se ale potvrdilo v písemných pracích, tak převážná většina chyb v krácení výrazu na základní tvar vznikala právě v případě, kdy žáci tuto operaci prováděli až ve výsledném lomeném výrazu. A to hlavně z důvodu, že po vynásobení dostávají jak v čitateli, tak ve jmenovateli složitější výrazy, než jsou v zadání. S tím pak přichází i větší riziko chyby v následném rozkladu na součin.

U této problematiky bylo překvapující, jak velmi neradi žáci pracují s mnohočleny ve tvaru součinu. Ve většině písemných prací žáci součinový tvar mnohočlenů roznásobili a pak takovéto výrazy násobili mezi sebou. V těchto případech také docházelo k největšímu počtu chyb v nesprávném krácení výsledného lomeného výrazu, či k tomu, že výsledný výraz nebyl zkrácen vůbec.

Další chyby, ke kterým docházelo, plynuly z nesprávného rozkladu na součin, neznalosti pravidel pro násobení a dělení mnohočlenů. Tyto chyby již byly popsány v předchozích podkapitolách týkajících se jednotlivých operací.

5.11 DĚLENÍ RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ A SLOŽENÉ LOMENÉ VÝRAZY

Dělení racionálních lomených výrazů je opět jen zobecněným dělením zlomků. Dokážeme ho tedy jednoduše převést na násobení lomených výrazů a to tak, že vytvoříme převrácenou hodnotu dělitele a tou původního dělence vynásobíme.

Zde také u žáků dochází k prvním chybám. Žáci si myslí, že dělení lomených výrazů je stejné jako jejich násobení, jen s tím rozdílem, že jednotlivé čitatele mezi sebou vydělí. Tato chyba se objevuje velmi často. Je dobré tedy už při výuce zdůraznit, že racionální lomené výrazy dělíme podle stejných pravidel jako zlomky. A že je tedy dělení nutné převést na násobení podle stanovených pravidel.

[28] Viz. kapitola 2.13

U složených lomených výrazů dochází často k tomu, že žáci neumí správně použít vztah pro převod složeného lomeného výrazu na dělení, popř. rovnou na násobení lomených výrazů. [29]

Vzhledem k tomu, že dělení racionálních lomených výrazů je oddělené od jejich násobení pouze jedním jednoduchým krokem, není zde tedy příliš chyb, které by žáci mohli dělat pouze u dělení racionálních lomených výrazů. Ty základní jsme již popsali výše. Další chyby, které zde žáci prováděli, byly totožné jako u násobení racionálních lomených výrazů. Tyto chyby jsme zmínili v předchozí podkapitole 5.11.

[29] Vztahy, které popisují tento převod, jsou uvedeny v kapitole 2.14

ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo podat čtenáři základní informace o rozsahu výuky operací s algebraickými výrazy na druhém stupni základní školy a vytvořit systém příkladů roztříděných do skupin podle obtížnosti.

V teoretické části se čtenář mohl seznámit s tříděním algebraických výrazů podle různých kritérií, rozsahem výuky této problematiky dané RVPZV a postupy úprav algebraických výrazů vyučovaných v rámci základního vzdělávání. Do teoretické části ještě spadá i kapitola 3, kde se čtenář seznámil s předpokládanými chybami žáků.

Praktická část byla zpracována na základě výsledků písemných prací žáků Gymnázia na Mikulášském náměstí v Plzni a Základní školy a mateřské školy ve Švihově. Byla provedena analýza jejich prací a na základě chyb, které v nich žáci provedli, byly sestaveny písemné práce dle stupně obtížnosti. Tyto práce je možné nalézt v kapitole 4.

RESUMÉ

The aim of this thesis is to give the reader basic information about the extent of teaching of the operations with algebraic expressions at the second grade of primary school and to create a system of examples categorized into groups according to their difficulty.

In the theoretical part, the reader could become familiar with categorizing of the algebraic expressions according to various criteria, the extent of teaching of this topic given by RVPZV and with the practice of algebraic expressions' alterations taught within the primary school education. Also the third chapter, where the reader became familiar with presumed mistakes made by the pupils, belongs to the theoretical part.

The practical part was formulated on the basis of tests' results of the pupils at Mikulášské náměstí Grammar School in Pilsen and Primary School in Švihov. An analysis of their work was made and written tests were compiled categorized by difficulty level on the basis of the mistakes the pupils made.

SEZNAM LITERATURY

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009, 2 sv. ISBN 978-80-7238-684-0.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, 3 sv. ISBN 978-80-7238-689-5.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9 pracovní sešit: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, 3 sv. ISBN 978-80-7238-690-1.

BOOTH, Lesley R. *Children's difficulties in beginning algebra* [online]. [cit. 2015-04-12]. Dostupné z: http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf

BUŠEK, Ivan. *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 203 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 8085849453.

BUŠEK, Ivan a Marie KUBÍNOVÁ. *Matematika*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1994, 208 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 8085849585.

CIZLEROVÁ, Michaela a Marie CHADIMOVÁ. *Matematika pro střední školy*. Vyd. 1. Brno: Didaktis, c2013, 3 sv. (136, 136, [392] s.). ISBN 978-80-7358-208-1.

HEJKRLÍK, Pavel. *Matematika: sbírka řešených příkladů*. 1. vyd. Opava: Hejpa, 2010, 2 sv. ISBN 978-80-904403-2-6.

HEJNÝ, Milan a Darina JIROTKOVÁ. *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. 1. vyd. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2010, 111 s. ISBN 978-80-211-0612-3.

HOUSKA, Jan. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. a 8. ročník základních škol*. Vyd. 1. Praha: Fortuna, 1994, 243 s. Učebnice pro základní školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 8071681318.

KRUPKA, Petr. *Sbírka úloh z matematiky pro druhý stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií: aritmetika, algebra, funkce*. 2. vyd. Praha: Global, 1996, 359 s. ISBN 80-85870-12-6.

MOLNÁR, Josef. *Matematika 9: učebnice s komentářem pro učitele*. Ilustrace Oldřich Hyvnar. Olomouc: Prodos, 2001, 127 s. ISBN 80-7230-108-x.

MŠMT. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. 2013 [cit. 2015-04-12]. Dostupné z:http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani

OVÁČIK, Ján a Iveta SCHULZOVÁ. *Řešené příklady z matematiky pro základní školy, pro osmiletá gymnázia: pro základní školy k přijímacím zkouškám na střední školu, pro nižší ročníky osmiletých gymnázií, pro řešitele matematických soutěží*. 2., rozš. vyd. Překlad Jarmila Robová. Praha: ASPI, 2008, 693 s. ISBN 978-80-7357-357-7.

POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách I*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2006, 371 s. ISBN 80-7196-337-2.

ŠAROUNOVÁ, Alena. *Matematika 9*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 134 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-155-8.

TOMÁŠEK, Vladislav. *Výzkum TIMSS 2007*. 1. vyd. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2009, 109 s. ISBN 978-80-211-0591-1.

WILLERS, Michael. *Algebra bez (m)učení: od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice*. 1. vyd. Praha: Grada, 2012, 176 s. ISBN 978-80-247-4123-9.

PŘÍLOHY

A. - 19.2.2014

Upravte na součin vytknutím před závorku:

1.) $4-16a=$

2.) $-kl+3l=$

3.) $m^2-2mn+m^4=$

4.) $-7pq^2-14p^2q^2=$

5.) $21r^3s^2t-18rs^2t^2=$

6.) $a^2bc^2+ab^2c^2-abc^2=$

7.) $-5u^3v^4-15uv^3-24u^2v^2=$

8.) $-xyz^2+11xy^3z^2=$

9.) $2cd^2-4c^2+10d=$

10.) $18f^3g+24fg^2-21f^2g^3=$

Umocněte podle vzorce:

1.) $(3+a)^2=$

2.) $(2b-7)^2=$

3.) $(-4+c)^2=$

4.) $(-2p-3q)^2=$

5.) $(6r+s^2t)^2=$

6.) $(5xy-2yz)^2=$

B. – 19.2.2014

Upravte na součin vytknutím před závorku

1.) $15-3a=$

2.) $-7k+5kl=$

3.) $2m^3-m^2+mn^2=$

4.) $-6p^2q-24pq=$

5.) $28r^2st^3-32r^2s^3t^2=$

6.) $a^2b^2c-a^2bc^2+a^2bc=$

7.) $-3u^4v^2-12uv^3-20u^2v^2=$

8.) $-x^3y^2z+13xy^2z$

9.) $16c^2d+8d^2-12c=$

10.) $21fg^3-56f^2g+49f^3g^2=$

Umocněte podle vzorce:

1.) $(2-a)^2=$

2.) $(3b+5)^2=$

3.) $(-6+c)^2=$

4.) $(-4p-2q)^2=$

5.) $(3r+st^2)^2=$

6.) $(2xy-7yz)^2=$

A. 12.3.2014

Upravte na součin užitím vzorců, případně vytknutím před závorku a užitím vzorců. (Ve výsledku se nesmí objevit odmocniny.)

1.) $4a^2 - 12a + 9 =$

2.) $144 + 24b + b^2 =$

3.) $-4d^2 - c^2 + 4cd =$

4.) $3m^2n + 30mn + 75n =$

5.) $-x^2 + \frac{25}{36} =$

6.) $196 - 49p^2 =$

7.) $-3k^2 + 27l^2 =$

Upravte na součin vytknutím, případně vytknutím a užitím vzorce.

8.) $-r + 2 + (2 - r)t =$

9.) $20u + 4v + v^2 + 5vu =$

10.) $x^2z - 5 - x^2y^2z + 5y^2 =$

B. 12.3.2014

Upravte na součin užitím vzorců, případně vytknutím před závorku a užitím vzorců. (Ve výsledku se nesmí objevit odmocniny.)

1.) $9a^2 - 24a + 16 =$

2.) $121 + 22b + b^2 =$

3.) $-9d^2 - c^2 + 6cd =$

4.) $5mn^2 + 40mn + 80m =$

5.) $\frac{49}{64} - y^2 =$

6.) $289 - 9q^2 =$

7.) $-5r^2 + 20s^2 =$

Upravte na součin vytknutím, případně vytknutím a užitím vzorce.

8.) $3 - u + v(-u + 3) =$

9.) $3t + 2p^2 + 3pt + 2p =$

10.) $4ab - bc^2 + c^2 - 4a =$

A. 3. Čtvrtletní písemná práce 2.4.2015

1. Zapište a určete:

„čtvrtina z rozdílu druhé mocniny čísla 12 a podílu čísel 40 a $\frac{2}{3}$“

2. Zapište výrazem s proměnnými:

„odmocnina z rozdílu čísla x a 60% z čísla y“

Vypočtěte hodnotu sestaveného výrazu pro x = 2,2, y = – 0,6:

3. Jsou dány výrazy: $A = 2a + 3b + 1$, $B = 5a - 4b - 1$, $C = -7a + b + 6$.
Vypočítejte: $A - 2(B - C)$

4. Vynásobte trojčlen dvojčlenem a zjednodušte:
$(2a^2 + 5a - 4)(a + 3)$

5. Proveďte:
$(-2b + 7)^2$

6. Upravte na součin vytknutím:
a) $9pq^2 + 3p^2q - 6pq$
b) $x - xy + y - 1$

7. Užitím vzorců upravte na součin:
a) $25 - \frac{1}{4}s^2$
b) $-4m^2 - 9n^2 + 12mn$

8. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:
$$\frac{2t-1}{3} - \frac{5t-3}{4} = 1$$

9. Na bubnu je navinut drát kruhového průřezu o průměru 4mm. Hmotnost drátu je 5,4kg. Do jaké vzdálenosti je možné drát rozvinout, je-li jeho hustota ρ přibližně 9 g/cm^3? (Počítejte s $\pi \doteq 3$.)

B. – 3. Čtvrtletní písemná práce, 2.4.2015

1. Zapište a určete:

„dvě třetiny ze součinu druhé odmocniny z čísla 225 a rozdílu čísel $\frac{2}{5}$ a 5“

2. Zapište výrazem s proměnnými:

„druhá mocnina součtu čísla *x* a 20% z čísla *y*“

Vypočtěte hodnotu sestaveného výrazu pro $x = 3$, $y = -24$.

3. Jsou dány výrazy: $A = -3a + 2b - 1$, $B = 4a - b + 5$, $C = -5a - 3b - 7$.

Vypočítejte: $A - 2(B - C)$

4. Vynásobte trojčlen dvojčlenem a zjednodušte:

$(a^2 - 2a + 3)(2a - 5)$

5. Proveďte:

$(-5 + 2b)^2$

6. Upravte na součin vytknutím:

a) $-20xy^2 + 5x^2y - 15xy$

b) $pq - p + 1 - q$

7. Užitím vzorců upravte na součin:

a) $\frac{9}{16}s^2 - 36$

b) $12uv - 9u^2 - 4v^2$

8. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{t-4}{6} - \frac{2t-6}{5} = 1$$

9. Kolik metrů drátu kruhového průřezu o průměru 2 mm a hustotě ρ přibližně 8 g/cm^3 je v kotouči o hmotnosti 2,4 kg? (Počítejte s $\pi \doteq 3$.)

Kontrolní písemná práce – 11. 3. 2015

1. Vypočti hodnotu algebraického výrazu pro zadané hodnoty proměnných $x = 4$, $y = 2$:

   $2x + 3y =$
   $2x^2 - 3y^3 =$
   $\frac{x + 4xy - 5y^2}{12} =$
2. Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:
   $x + y$:
   $2x + 3y - 6$:
   $-8x^2 + 6xy - 15z + 12$:

3. Sečti mnohočleny:
   $2xy + 3y + 2x + 5xy + 3y =$

   $2x + 2y + 6 + (3y + 2x + 5) =$

   $(3y + 8x^2 + 2x^2y) + (6y + 2xy + x^2) =$

4. Odečti mnohočleny:
   $3x + 2y - (3y + 2x) =$

   $(2x + 3xy^2) - (2x - 5xy + 2xy^2) =$

   $(x^2 + 3xy + 2x^2y) - (-5x^2 - 6xy + 2x^2y) =$

5. Vynásob mnohočleny:
   $5x^2y . 4xy =$

   $(5x^2y + 12xy) . 2xy^3 =$

   $(6x + 12y) . (-2x + 6y^3) =$

6. Vyděl mnohočlen jednočlenem:
   $16xy^3 : 4xy^2 =$

   $24x^2y^4z^3 : (-4x^2y^4z) =$

   $(16x^2yz + 4xy^3z^2) : (-4xyz) =$

„Desetiminutovka“ 17. 3. 2015

A

1. Uprav výrazy:
   $(c+d)^2 =$

   $(2a+3b)^2 =$

   $[2+(-3)c]^2 =$

2. Rozlož na součin:
   $x^2+2x+1 =$

   $4c^2-12cd+9d^2 =$

   $y^2+4+4y =$

B

1. Rozlož na součin:
   $a^2+2ab+b^2 =$

   $(-6x)+9x^2+4 =$

   $y^2+6y+9 =$

2. Uprav výrazy:
   $(x+y)^2 =$

   $(3a+2b)^2 =$

   $[3-(2x)]^2 =$

B

Jméno: [redacted]
Třída:
datum: 14. 3.

1. Rozlož na součin
   a) $a^2 + 2ab + b^2 = \cancel{2a^3b^3}$
   b) $(-6x) + 9x^2 + 4 = \cancel{26x^3}$
   c) $y^2 + 6y + 9 = \cancel{15y^3}$

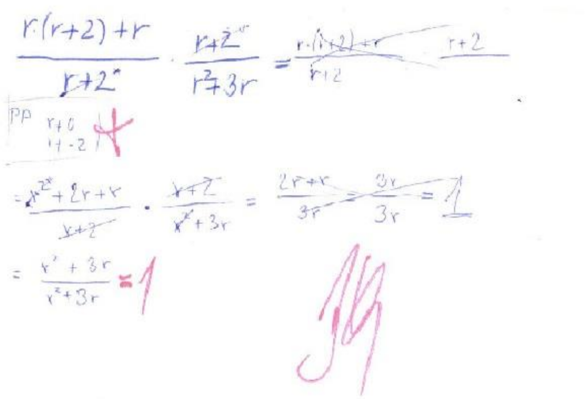
2. Uprav výrazy:
   a) $(x+y)^2 = \cancel{(x^2 + y)}$
   b) $(3a+2b)^2 = \cancel{(6a^2b^2)}$
   c) $[3-(2x)]^2 = \cancel{(6x^4)}$

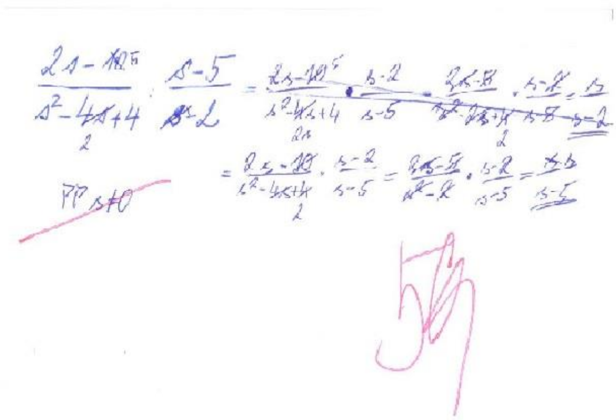
A

Jméno
Třída:
datum: 17. 3.

1. Uprav výrazy:
   a) $(c+d)^2 = c^2 \cancel{+ cd} + d^2$
   b) $(2a+3b)^2 = 2a^2 + \cancel{4ab} + 6b^2$
   c) $[2+(-3)c]^2 =$

2. Rozlož na součin:
   a) $x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x) = \cancel{(x^2+2x)\cdot(x^2+2x)}$
   b) $4c^2 - 12cd + 9d^2 =$
   c) $y^2 + 4 + 4y =$


$\frac{r(r+2)+r}{r+2} \cdot \frac{r+2}{r^2+3r} = \cancel{\frac{r\cdot(r+2)+r}{r+2}} \quad r+2$
PP $r \neq 0$, $r \neq -2$
$= \frac{r^2+2r+r}{r+2} \cdot \frac{r+2}{r^2+3r} = \frac{2r+r}{3r} = \frac{3r}{3r} = 1$
$= \frac{r^2+3r}{r^2+3r} = 1$


$\frac{2s-10}{s^2-4s+4} : \frac{s-5}{s-2} = \frac{2s-10}{s^2-4s+4} \cdot \frac{s-2}{s-5}$
PP $s \neq 0$
$= \frac{2s-10}{s^2-4s+4} \cdot \frac{s-2}{s-5} = \frac{2s-5}{s^2-2} \cdot \frac{s-2}{s-5} = \frac{s\cdot s}{s-5}$

A.

Upravte na součin vytknutím před závorku:

1.) $4-16a =$

2.) $-kl+3l =$

3.) $m^2-2mn+m^4 =$

4.) $-7pq^2-14p^2q^2 =$

5.) $21r^3s^2t-18rs^2t^2 =$

6.) $a^2bc^2+ab^2c^2-abc^2 =$

7.) $-5u^3v^4-15uv^3-24u^2v^2 =$

8.) $-xyz^2+11xy^3z^2 =$

9.) $2cd^2-4c^2+10d =$

10.) $18f^3g+24fg^2-21f^2g^3 =$

Umocněte podle vzorce:

1.) $(3+a)^2 =$

2.) $(2b-7)^2 =$

3.) $(-4+c)^2 =$

4.) $(-2p-3q)^2 =$

5.) $(6r+s^2t)^2 =$

6.) $(5xy-2yz)^2 =$

A 126

1. Upravte tak, aby výraz neobsahoval závorky a zjednodušte: $-[2-(a-3b)-b]-4a =$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu: $2xy^2-[x^2y+y^2(2x-y)]$ pro $x=5$, $y=-2$

3. Odstraňte závorky roznásobením a zjednodušte: $2k+3k(1-2k+3k^2) =$

4. Odstraňte závorky roznásobením a zjednodušte: $(4p-3q)(p-2q) =$

5. Vydělte a **zapište, kdy má dělení smysl**: $(-5r^2st^2):(15st) =$

6. Upravte tak, aby výraz neobsahoval závorky: $(-11c+2)^2 =$

7. Vytkněte všechny společné činitele členů před závorku: $-16x^3y+24x^2y^2-20xy^2 =$

8. Upravte na součin vytknutím: $-a+7+5x(a-7) =$

9. Rozložte na součin činitelů (různých od 1, −1) a užijte vzorce: $8u^2-24u+18 =$

10. Upravte na součin pomocí vzorce: $-4c^2+100 =$

11. V kině je h řad a v každé řadě je m sedadel. Kolik korun utržili při plně vyprodaném kině, jestliže do prvních šesti řad jsou vstupenky po 160 Kč, do ostatních řad po 200 Kč? Výsledek zapište jako výraz v proměnných h a m, výraz zjednodušte.

12. Upravte na součin postupným vytýkáním: $5a-5b+10-a^2b+ab^2-2ab =$

13. Upravte na součin pomocí známých vzorců: $4x^2+4x-8 =$

14. Doplňte tak, aby nastala rovnost: $\left(\frac{2}{5}a+\boxed{}\right)^2 = \boxed{} + \frac{2}{5}ab + \boxed{}$

A.

Upravte na součin vytknutím před závorku:

1.) $4-16a =$

2.) $-kl+3l =$

3.) $m^2-2mn+m^4 =$

4.) $-7pq^2-14p^2q^2 =$

5.) $21r^3s^2t-18rs^2t^2 =$

6.) $a^2bc^2+ab^2c^2-abc^2 =$

7.) $-5u^3v^4-15uv^3-24u^2v^2 =$

8.) $-xyz^2+11xy^3z^2 =$

9.) $2cd^2-4c^2+10d =$

10.) $18f^3g+24fg^2-21f^2g^3 =$

Umocněte podle vzorce:

1.) $(3+a)^2 =$

2.) $(2b-7)^2 =$

3.) $(-4+c)^2 =$

4.) $(-2p-3q)^2 =$

5.) $(6r+s^2t)^2 =$

6.) $(5xy-2yz)^2 =$

A.

Upravte na součin vytknutím před závorku:

1.) $4-16a =$

2.) $-kl+3l =$

3.) $m^2-2mn+m^4 =$

4.) $-7pq^2-14p^2q^2 =$

5.) $21r^3s^2t-18rs^2t^2 =$

6.) $a^2bc^2+ab^2c^2-abc^2 =$

7.) $-5u^3v^4-15uv^3-24u^2v^2 =$

8.) $-xyz^2+11xy^3z^2 =$

9.) $2cd^2-4c^2+10d =$

10.) $18f^3g+24fg^2-21f^2g^3 =$

Umocněte podle vzorce:

1.) $(3+a)^2 =$

2.) $(2b-7)^2 =$

3.) $(-4+c)^2 =$

4.) $(-2p-3q)^2 =$

5.) $(6r+s^2t)^2 =$

6.) $(5xy-2yz)^2 =$

10b

2. $-3(-1)^2\cdot(-4) - [(-1)\cdot(-4)\cdot(-1-2) + (-1)\cdot(-4)^2] = -3\cdot(-4) - [4\cdot(-3) - 16] =$
$= -12 - [-12 + 16] = -12 + 12 - 16 = -16$

3. $4p - 5p(4-8p+p^2) = 4p - 20p + 40p^2 - 5p^3 = -16p + 40p^2 - 5p^3$

4. $(3m-2n)(5n+m) = 15mn + 3m^2 - 10n^2 - 2nm = 13mn + 3m^2 - 10n^2$

5. $(2u^3v^2w):(-4u^2w) = \frac{2u^3v^2w}{-4u^2w} = -\frac{1}{2}uv^2$ $u \neq 0, w \neq 0$

6. $(3-12d)^2 = 9 - 2\cdot 36d + 144d^2 = 9 - 72d + 144d^2$

7. $18a^3bc - 12a^2b^2c^3 + 36abc^2 = 6abc(3a^2 - 2abc^2 + 6c)$

8. $6 - 5a - b(5a-6) = 6 - 5a\ (-b\ 1)$

9. $-3v^2 - 12v - 12 =$

10. $-9r^2 + 64 = 64 - 9r^2 = (8-3r)\cdot(8+3r)$

11. x žáků — kiwi — řezy o pět dražší
m mladších — čokoláda o tři dražší
p cena kiwi — náklady? — 1 KIWI p — 1 řez $= p + 5$
1 čokoláda $= p + 3$
náklady $m(p+3) + (x-m)(p+5)$ — všechny čokolády $m(p+3)$
všechny řezy $(x-m)(p+5)$
$m(p+3) + (x-m)\cdot(p+5) = mp + 3m + xp + 5x - mp - 5m =$ $+ xp$
$= -2m + xp + 5x$

Náklady se dají vyjádřit mnohočlenem $-2m + xp + 5x$

B

1. Upravte tak, aby výraz neobsahoval závorky a zjednodušte:
$-[-(2p-q)+3] - 3q + p = (2p-q) - 3 - 3q + p = 2p - q - 3 - 3q + p$ DOUPRAVIT

2. Vypočtěte hodnotu výrazu:
$-3x^2y - [xy(x-2) + xy^2]$ pro $x = -1$, $y = -4$

3. Odstraňte závorky roznásobením a zjednodušte:
$4p - 5p(4 - 8p + p^2) =$

4. Odstraňte závorky roznásobením a zjednodušte:
$(3m - 2n)(5n + m) =$

5. Vydělte a **zapište, kdy má dělení smysl**:
$(2u^3v^2w):(-4u^2w) =$ $a \neq 0$

6. Upravte tak, aby výraz neobsahoval závorky:
$(3 - 12d)^2 =$

7. Vytkněte všechny společné činitele členů před závorku
$18a^3bc - 12a^2b^2c^3 + 36abc^2 =$

8. Upravte na součin vytknutím: $6 - 5a - b(5a - 6) =$

9. Rozložte na součin činitelů (různých od 1, –1) a užijte vzorce:
$-3v^2 - 12v - 12 =$

10. Upravte na součin pomocí vzorce
$-9r^2 + 64 =$

11. Ve školní jídelně se stravuje x žáků, z toho m je mladších. Ke dni dětí dostanou všichni při obědě kiwi, mladší žáci malou čokoládu a starší žáci řezy. Jaké jsou náklady na dárky, jestliže kiwi je za p Kč, čokoláda je o 3 Kč dražší než kiwi a řezy o 5 Kč dražší? Výsledek zapište jako výraz v proměnných x, m, p výraz zjednodušte.

---

12. Upravte na součin postupným vytýkáním:
$3a^2 - 3 - a^2b + 3a - ab + b =$

13. Upravte na součin:
$x^2 + 8x + 16 - y^2 + 2yz - z^2 =$

14. Doplňte tak, aby nastala rovnost:
$\left(\frac{1}{3}a + \boxed{}\right)^2 = \boxed{} + \frac{1}{3}ab + \boxed{}$

Jméno a příjmení: [redacted]
Třída: [redacted]
Datum: 11. 2

1. Vypočti hodnotu algebraického výrazu pro zadané hodnoty proměnných $x = 4, y = 2$:
4
$2x + 3y =$ $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14$ 1b
$2x^2 - 3y^3 =$ $2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 2^3 = 32 - 24 = 8$ 1b
$\frac{x + 4xy - 5y^2}{12} =$ $4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 4 + 32 - 20 = 16 : 12 = 1,\overline{3}$ 2b

2. Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:
4 $x + y$: $-x - y$ 1b
$2x + 3y - 6$: $-2x - 3y + 6$ 1b
$-8x^2 + 6xy - 15z + 12$: $+8x^2 - 6xy + 15z - 12$ 2b

3. Sečti mnohočleny:
2 $2xy + 3y + 2x + 5xy + 3y =$ $+7xy + 6y + 2x$ 1b
$2x + 2y + 6 + (3y + 2x + 5) =$ $+4x + 5y + 11$ 1b
$(3y + 8x^2 + 2x^2y) + (6y + 2xy + x^2) =$ $+9\cancel{y + 8x^2 + 4x^2y}$ 0b

4. Odečti mnohočleny:
2,5 $3x + 2y - (3y + 2x) =$ $3x + 2y + (-3y - 2x) = +1x - 1y$ 1b
$(2x + 3xy^2) - (2x - 5xy + 2xy^2) =$ $(2x + 3xy) + (-2x + 5xy - 2xy^2) = \cancel{8xy - 2xy^2}$ 0b
$(x^2 + 3xy + 2x^2y) - (-5x^2 - 6xy + 2x^2y) =$ $(x^2 + 3xy + 2x^2y) + (+5x^2 + 6xy - 2x^2y) = 5x^2 + 9xy$ 1+5 $1\frac{1}{2}$b

5. Vynásob mnohočleny:
3 $5x^2y . 4xy =$ $20x^3y^2$ 1b
$(5x^2y + 12xy) . 2xy^3 =$ $10x^3y^4 + 24x^2y^4 = \cancel{34x^3y^4}$ 0b
$(6x + 12y) . (-2x + 6y^3) =$ $-12x^2 - 24xy + 36xy^3 + 72y^4$ 2b

6. Vyděl mnohočlen jednočlenem:
4 $16xy^3 : 4xy^2 =$ $4y$ 1b
$24x^2y^4z^3 : (-4x^2y^4z) =$ $-6z^2$ 1b
$(16x^2yz + 4xy^3z^2) : (-4xyz) =$ $-4x - 1y^2z$ 2b

12
8,5
20,5 b

2-

Jméno a příjmení: ____________
Třída: ____
Datum: 11.3.2015

1. Vypočti hodnotu algebraického výrazu pro zadané hodnoty proměnných $x = 4, y = 2$:

$2x + 3y = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14$ ✓ 1b

$2x^2 - 3y^3 = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 16 - 3 \cdot 8 = 32 - 24 = 8$ ✓ 1b

$\frac{x + 4xy - 5y^2}{12} = \frac{4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2}{12} = \frac{4 + 32 - 20}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ✓ 2b

2. Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:

$x + y$: $-x - y$ ✓ 1b

$2x + 3y - 6$: $-2x - 3y + 6$ ✓ 1b

$-8x^2 + 6xy - 15z + 12$: $+8x^2 - 6xy + 15z - 12$ ✓ 2b

3. Sečti mnohočleny:

$2xy + 3y + 2x + 5xy + 3y = 7xy + 6y + 2x$ ✓ 1b

$2x + 2y + 6 + (3y + 2x + 5) = 4x + 5y + 11$ ✓ 1b

$(3y + 8x^2 + 2x^2y) + (6y + 2xy + 1x^2) = 9y + 9x^2 + 2x^2y + 2xy$ ✓ 2b

4. Odečti mnohočleny:

$3x + 2y - (3y + 2x) = 3x + 2y + (-3y - 2x) = 1x - y$ ½ b

$(2x + 3xy^2) - (2x - 5xy + 2xy^2) = 2x + 3xy^2 + (-2x + 5xy - 2xy^2) = 1xy^2 + 5xy$ ✓ 1b

$(x^2 + 3xy + 2x^2y) - (-5x^2 - 6xy + 2x^2y) = 1x^2 + 3xy + 2x^2y + (5x^2 + 6xy - 2x^2y) = 6x^2 + 9xy$ ✓ 2b

5. Vynásob mnohočleny:

$5x^2y . 4xy = 20x^3y^2$ ✓ 1b

$(5x^2y + 12xy) . 2xy^3 = 10x^3y^4 + 24x^2y^4$ ✓ 1b

$(6x + 12y) . (-2x + 6y^3) = -12x^2 - 24xy + 36xy^3 + 72y^4$ ✓ 2b

6. Vyděl mnohočlen jednočlenem:

$16xy^3 : 4xy^2 = 4y$ ✓ 1b

$24x^2y^4z^3 : (-4x^2y^4z) = -6z^2$ ✓ 1b

$(16x^2yz + 4xy^3z^2) : (-4xyz) = -4x + 1y^2z$ ✓ 2b

23½ b

1

Jméno a příjmení: __________

Třída: __________

Datum: 11.3. 2015

1. Vypočti hodnotu algebraického výrazu pro zadané hodnoty proměnných $x = 4$, $y = 2$:

$2x + 3y =$ 8xy $8x + 6y = 14xy$ 0b

$2x^2 - 3y^3 =$ $8x^2 - 6y^3 = 2xy$ 0b

$\frac{x + 4xy - 5y^2}{12} =$ $8x - 10y^2 \cdot 12$ 0b

2. Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:

$x + y$: $-x - y$ 1b

$2x + 3y - 6$: $-2x - 3y + 6$ 1/2b

$-8x^2 + 6xy - 15z + 12$: $8x^2 - 6xy + 15z - 12$ 2b

3. Sečti mnohočleny:

$2xy + 3y + 2x + 5xy + 3y =$ $7xy + 6y + 2x$ 1b

$2x + 2y + 6 + (3y + 2x + 5) =$ ~~4x + 11~~ $4x + 5y + 11$ 1b

$(3y + 8x^2 + 2x^2y) + (6y + 2xy + x^2) =$ ~~9x + 16 8x²~~ 0b

4. Odečti mnohočleny:

$3x + 2y - (3y + 2x) =$ ~~5x 5y~~ 0b

$(2x + 3xy^2) - (2x - 5xy + 2xy^2) =$ ~~4x - 15xy² (2xy²)~~ 0b

$(x^2 + 3xy + 2x^2y) - (-5x^2 - 6xy + 2x^2y) =$ ~~-5x² - 18xy + 1xy~~ 0b

5. Vynásob mnohočleny:

$5x^2y \cdot 4xy =$ ~~20y³~~ 0b

$(5x^2y + 12xy) \cdot 2xy^3 =$ ~~3 4x³y⁵~~ 0b

$(6x + 12y) \cdot (-2x + 6y^3) =$ ~~-14xy⁴~~ 0b

6. Vyděl mnohočlen jednočlenem:

$16xy^3 : 4xy^2 =$ ~~84xy⁵~~ 0b

$24x^2y^4z^3 : (-4x^2y^4z) =$ ~~-5x⁴y⁸z⁴~~ 0b

~~24 : 4 = 2~~

$(16x^2yz + 4xy^3z^2) : (-4xyz) =$ ~~16x³⁴y⁵z⁴~~ 0b

5,½b

4–6

Jméno a příjmení: ...

Třída: ...

Datum: 16. 3. 2015

1. Vypočti hodnotu algebraického výrazu pro zadané hodnoty proměnných $x = 4, y = 2$:

   $2x + 3y =$ 2·4 + 3·2 = 8 + 6 = 14   1 b

   $2x^2 - 3y^3 =$ 2·4² − 3·6³ = 2·16 − 3·36 = 32 − 108 = −76   0 b

   $\frac{x + 4xy - 5y^2}{12} =$ 4 + 4·4·2 − 5·2² = −20 − 36 + 4 = −52 = −5   0 b

2. Vytvoř opačný mnohočlen k zadanému mnohočlenu:

   $x + y$: = −x − y   1 b

   $2x + 3y - 6$: = −2x − 3y + 6   1 b

   $-8x^2 + 6xy - 15z + 12$: 8x² − 6xy + 15z − 12 = 2 b

3. Sečti mnohočleny:

   $2xy + 3y + 2x + 5xy + 3y =$ 7xy + 6y + 2x   1 b

   $2x + 2y + 6 + (3y + 2x + 5) =$ 4x + 5y + 11   1 b

   $(3y + 8x^2 + 2x^2y) + (6y + 2xy + x^2) =$ 9y + 8x⁴ + 4x²y   0 b

4. Odečti mnohočleny:

   $3x + 2y - (3y + 2x) =$ 3x + 2y + (−3y − 2x) = 1x − 1y   1 b

   $(2x + 3xy^2) - (2x - 5xy + 2xy^2) =$ (2x + 3xy²) + (−2x + 5xy − 2xy²) = 1xy² + 5xy   0

   $(x^2 + 3xy + 2x^2y) - (-5x^2 - 6xy + 2x^2y) =$ (x² + 3xy + 2x²y) + (5x² + 6xy − 2x²y) = 1x² + 9xy + 5x² = 6   1 b

5. Vynásob mnohočleny:

   $5x^2y . 4xy =$ 20x³y²   1 b

   $(5x^2y + 12xy). 2xy^3 =$ 34x⁴y⁵   0 b

   $(6x + 12y). (-2x + 6y^3) =$ 12x²y⁴   0 b

6. Vyděl mnohočlen jednočlenem:

   $16xy^3 : 4xy^2 =$ 4y   1 b

   $24x^2y^4z^3 : (-4x^2y^3z) =$ −6z²   1 b

   $(16x^2yz + 4xy^3z^2) : (-4xyz) =$ −4x   0

12 b   3 ...