

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

DVOJHVĚZDY A VÝVOJ HVĚZD - SBÍRKA ŘEŠENÝCH ÚLOH
DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jiří Knot

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Fy

Vedoucí práce: PhDr. Pavel Masopust, Ph.D.

Plzeň, 2015

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 24. 6. 2015

.....
vlastnoruční podpis

Zde bych chtěl poděkovat všem lidem, kteří pomohli ke vzniku předkládané diplomové práce. Především bych rád poděkoval vedoucímu práce PhDr. Pavlovi Masopustovi, Ph.D. za jeho ochotu, vstřícné jednání, kontrolu, připomínky k práci a čas, který mi věnoval. Dále chci poděkovat Mgr. Pavlovi Knížákovi za pomoc s překladem textů z angličtiny. Také bych chtěl poděkovat rodině a přátelům, kteří mi vytvořili dobré podmínky pro práci

OBSAH

1. Úvod	5
2. Didaktická část	6
3. Slovníček základních pojmů.....	7
4. Dvojhvězdy.....	11
4.1. Teorie dvojhvězd	11
4.2. Základní vztahy teorie dvojhvězd	19
4.3. Příklady k teorii dvojhvězd	22
5. Stadia vývoje hvězd.....	63
5.1. Teorie vývoje hvězd	63
5.2. Základní vztahy teorie vývoje hvězd.....	73
5.3. Příklady k teorii vývoje hvězd – pozdní stadia, novy, supernovy.....	75
5.4. Příklady k teorii vývoje hvězd – závěrečná stadia	96
6. Konstanty.....	115
7. Závěr.....	116
8. Resume	117
9. Použitá literatura.....	118
10. Seznam obrázků.....	122

1. Úvod

Astrofyzika je věda, která se zabývá zkoumáním fyzikálních zákonů v kosmu, popisem vlastností všech vesmírných objektů (např. hmotnosti, teploty, hustoty, rychlosti otáčení, složení a další) a dějů probíhajících ve vesmíru (vznik a vývoj hvězd, výbuchy supernov aj.) pomocí různých fyzikálních veličin a vztahů mezi nimi.

Zajímavostí astrofyziky je, že při jejím studiu narážíme na mnoho různých oblastí fyziky, kterými jsou například mechanika, termodynamika nebo optika a jednotlivé znalosti propojujeme do nových celků a souvislostí. Přesto, že by se astrofyzika dala na základních a středních školách využít jako zajímavý závěr fyzikálního kurzu, kde by se přirozeným způsobem zopakovaly základní fyzikální zákony a ukázalo by se jejich praktické využití, je astrofyzika naopak kapitolou často opomíjenou, nebo vykládanou velmi stroze.

Cílem mé diplomové práce je vytvořit sbírku řešených úloh z astronomie, která by mohla pomoci učitelům, kteří chtějí astronomii učit více podrobně nebo žákům, které astronomie zaujala a chtěli by se jí více věnovat. V dnešní době totiž neexistuje mnoho podobných sbírek. Touto diplomovou prací chci navázat na svou bakalářskou práci, ve které byly příklady na téma struktura a záření hvězd – sbírka řešených úloh

Protože se astrofyzika stále vyvíjí a zpřesňují se různá měření, je mým dalším cílem podat čtenářům co možná nejaktuálnější zjištěné hodnoty různých veličin a hlavně skutečné hodnoty. Všechny příklady se budou týkat reálných objektů a budou obsahovat reálné výsledky. Sbíрка obsahuje jak příklady ze starších sbírek, které jsou podrobně vyřešeny a jsou v nich aktualizovány některé údaje, tak i příklady jejichž zadání jsem vymýšlel sám.

Astrofyzika je velmi rozsáhlý obor a tak se v této práci budu věnovat jen několika částem. V této práci naleznete úlohy týkající se dvojhvězd a stadií vývoje hvězd.

2. Didaktická část

Řešení fyzikálních úloh je aktivita žáka, která přispívá k chápání podstaty fyzikálních jevů a souvislostí mezi nimi. Díky fyzikálním úlohám si žákem lépe osvojí, zpřesní, prohloubí a rozšíří poznatky získané z výkladu. Při vhodné volbě příkladů si žáci více uvědomují důležitost fyziky a její uplatnění v běžném životě. Úlohy slouží k rozvoji fyzikálního myšlení žáků a jejich nazírání na svět.

Při výuce fyziky bychom měli dbát na rozvíjení klíčových kompetencí žáků. Předkládanou sbírku může vyučující použít jako pomůcku ke splnění tohoto cíle.

Před řešením úloh můžeme žákům zadat úkol vyhledat určité údaje na internetu a porovnávat je s vypočtenými hodnotami, žáci si tímto tvoří přehled o tom, jaké vlastnosti mohou vesmírné objekty mít a jaké jsou již nemožné. Chyby při řešení úloh můžeme využít jako prostředek k dalšímu vysvětlení a prohloubení učiva. Řešením složitějších úloh si žáci prohlubují kompetenci k řešení problémů. Před řešením úloh můžeme nechat žáky formulovat hypotézy o výsledku a o postupu řešení, ykoušíme žáky vést ke kritickému hodnocení získaných výsledků. Pokud necháme žáky řešit příklady ve skupinách, přispíváme k rozvoji jejich komunikativních kompetencí. Žáci jsou nuceni se bavit o problému a musí argumentovat.

Astronomie a astrofyzika je jistě nedílnou součástí fyziky a ve školách by se jí měli učitelé se svými žáky věnovat. Touto sbírkou bych rád přispěl k pohodlnější práci vyučujících. Sbíрка obsahuje úlohy týkající se dvojhvězd a stadií vývoje hvězd různých obtížností. Součástí sbírky je samozřejmě i teorie patřící k dané problematice, protože ve středoškolských učebnicích nejsou uvedeny všechny potřebné pojmy a vzorce. Nejjednodušší úlohy lze zařadit do výuky pro celou třídu, kdy vyučující se žáky probere potřebnou teorii a pomocí příkladů ze sbírky ji procvičuje. Náročnější příklady lze použít pro zájemce, které daná problematika zajímá nebo je lze využít jako náplň nějakého volitelného semináře, kde jsou jen žáci se zájmem o fyziku. Pokud má učitel trochu více času, může žákům zadat, aby potřebné údaje k řešení příkladu vyhledávali na internetu nebo v literatuře nebo jim toto vyhledávání může zadat za domácí úkol.

3. Slovníček základních pojmů

Akrece u dvojhvězd V těsných dvojhvězdách přepad plazmatu z normální hvězdy na degenerovanou.

[8]

Apastrum jsou body, v nichž se složky dvojhvězdy nejvíce vzdálí.

[27]

Astronomická jednotka (AU) Jednotka délky. Podle starší definice je to střední vzdálenost Země od Slunce. Přesněji byla definována pomocí třetího Keplerova zákona pro pohyb planet:

$$n^2 a^3 = G^2 (1 + m),$$

kde je n průměrný pohyb v radiánech za den, a je velká poloosa dráhy, G je gravitační konstanta, m je hmotnost planety v jednotkách hmotnosti Slunce. Dnešní přesná hodnota $AU = 149597870700$ m je definována pomocí rychlosti světla a patří mezi konstanty.

Bodový zdroj Zdroj záření na obloze, jehož rozměry jsou pod rozlišovací schopností dalekohledu, nelze je změřit.

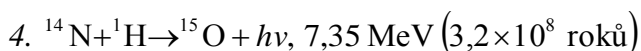
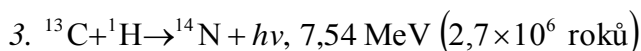
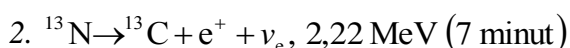
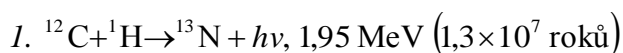
Bolometrická hvězdná velikost (m_{bol}) Vypočtená hvězdná velikost, která by odpovídala celkovému záření hvězdy ve všech vlnových délkách vně zemské atmosféry.

Bolometrická korekce Rozdíl mezi bolometrickou a vizuální hvězdnou velikostí.

Cefeida Periodicky pulzující žlutý obr a veleobr s velkou svítivostí, jejichž perioda je delší než jeden den.

[8]

CNO cyklus Uhlíko–dusíkový cyklus. Jeden ze způsobů hoření vodíku v nitru hvězd. Probíhá především ve hvězdách hlavní posloupnosti o hmotnosti nad $1,7 M_{\text{Sl}}$. Cyklus je sledem šesti termonukleárních reakcí, v nichž je jádro uhlíku jako katalyzátor.



5. $^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$, 2,71 MeV (82 s)
6. $^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He}$, 4,96 MeV ($1,1 \times 10^5$ roků)

[8]

Při srážce protonu ^1H s jádrem uhlíku ^{12}C vznikne jádro radioaktivního izotopu dusíku ^{13}N . Potom je vyslán energetický gama-foton $h\nu$. Za 7 min. se dusík rozpadne na izotop uhlíku ^{13}C , pozitron (e^+) a elektronové neutrino (ν_e). To vzniká, aby se zachovalo *leptonové číslo* (primárně předpokládáno aby se zachovala energie, moment hybnosti). Neutrino uniká do kosmického prostoru. Mezi pozitronem a elektronem dochází k anihilaci a uvolní se dva fotony s energií 0,5 MeV. Při třetí reakci se těžký uhlík sráží s druhým protonem a vznikne jádro dusíku ^{14}N . Při čtvrté reakci se dusík sráží s třetím protonem a vznikne lehký izotop kyslíku ^{15}O . Ten se za 82 s rozpadne na těžký izotop dusíku ^{15}N , pozitron a neutrino. Když se po 110 000 letech sráží čtvrtý proton s dusíkovým jádrem, vytvoří jádro uhlíku ^{12}C a jádro helia ^4He . Obnoví se uhlík a výsledkem šesti reakcí je tedy vznik jádra helia ^4He ze čtyř protonů a uvolnění energie. V méně masivních hvězdách probíhá proton-protonový řetězec za nižších teplot se stejným výsledkem.

Dopplerův posuv Změna vlnové délky záření, způsobená pohybem pozorovatele vzhledem ke zdroji záření. Pokud se zdroj záření od nás vzdaluje, vlnová délka se nám jeví delší, nastává posuv k červenému konci spektra. Pokud se k nám zdroj záření přibližuje, vlnová délka se nám jeví kratší, nastává posuv k modrému konci spektra. Velikost posuvu $\Delta\lambda$ závisí na rychlosti zdroje vzhledem k pozorovateli:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c},$$

[8]

kde λ je vlnová délka záření nehybného zdroje, v je rychlost pohybu zdroje a c je rychlost světla (rychlost je záporná pro přibližování zdroje, tedy $\Delta\lambda$ je také záporné a čára má o $\Delta\lambda$ kratší vlnovou délku λ). Jedná se o nerelativistický vztah, který platí pro rychlosti v mnohem menší než c . Možná bych poznamenal, že se jedná o nerelativistický vztah.

Dynamická paralaxa Paralaxa (vzdálenost) vizuálních dvojhvězd určená z třetího Keplerova zákona (v Newtonově zobecněné formě):

$$(M_1 + M_2)T^2 = a^3,$$

kde M_1 a M_2 jsou hmotnosti složek dvojhvězdy v jednotkách sluneční hmotnosti, T je oběžná doba v rocích, a je velká poloosa vyjádřená astronomickou jednotkou.

[8]

Efektivní teplota Je to teplota černého tělesa, které vyzařuje z 1 m^2 stejné množství energie jako hvězda. Značíme ji T_{ef} . Další definice: E. t. je teplota černého tělesa, které má stejný povrch $4\pi R^2$ a stejnou zářivost L jako hvězda či jiné kosmické těleso.

Fotosféra Nejhlubší a nejhustší oblast hvězdné atmosféry, ze které uniká do vesmíru převážná část záření hvězdy. Je to oblast, ve které hvězda přestává být průhledná. Fotosféra je nejchladnější oblast hvězdy.

Hustota zářivého toku (plošná hustota zářivého toku) je zářivý tok (tok energie záření) procházející plochou 1 m^2 postavenou kolmo k dopadajícímu záření. Jednotkou je Wm^{-2} .

[8]

Konvektivní obálka Vrstva, ve které helium a vodík jsou neionizované. V konvektivní obálce vzroste opacita a efektivní způsob přenosu energie ze stavu konvekce (proudění).

Opacita Míra schopnosti látky pohlcovat záření. Opacita vrstvy je poměr toku záření, které na vrstvu dopadá, k toku záření, které vrstvou projde. Opacita je způsobena absorpcí vázanými elektrony v atomech a absorpcí a rozptylem volnými elektrony.

Paralaxa (roční paralaxa) Úhel, pod kterým bychom od hvězdy viděli poloměr zemské dráhy.

[8]

Parsec (pc) Jednotka vzdálenosti ve vesmíru. Je to vzdálenost, ze které by byla vidět úsečka délky 1AU kolmá ke směru pohledu pod úhlem jedné úhlové vteřiny ($1''$).

$$1 \text{ pc} = 3,26 \text{ ly} = 206265 \text{ AU} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}.$$

Periastrum jsou body, v nichž se složky dvojhvězdy sobě nejvíce přiblíží.

[27]

Radiální rychlost Složka rychlosti v zorném směru. Měří se z posuvu spektrálních čar zdroje vzhledem ke srovnávacímu spektru umělého zdroje.

Rekombinace (volně-vázaný přechod) Zachycení volného elektronu kladným iontem. Opačný proces k ionizaci. Uvolněná energie je buď předána třetí částici (rekombinace

druhého druhu), nebo je vyzářena (zářivá rekombinace). Záření vyslané při rekombinaci se nazývá rekombinační záření.

Rozlišovací schopnost dalekohledu Schopnost rozlišit dva velmi blízké body pozorovaného objektu (např. hvězdy ve dvojhvězdě). V důsledku ohybu světla se bod (hvězda) zobrazí jako ohybový disk obklopený tmavými a světlými kroužky. Jejich intenzita ubývá se vzdáleností od kotoučku. Pro rozlišení dvou blízkých disků, musí střed jednoho padnout do prvního tmavého kroužku. To proto, že oba body (hvězdy) jsou od sebe vzdáleny o úhel η .

[8]

Úhlová velikost Úhlová velikost objektu je úhel měřený pozorovatelem mezi krajními body objektu.

[5]

Vizuální hvězdná velikost (m_v) Hvězdná velikost měřená v té oblasti spektra, kde je lidské oko nejcitlivější Odpovídá vlnové délce kolem 5430 \AA .

Zářivý výkon (zářivost) Výkon hvězdy, tj. celkové množství energie (ve formě elektromagnetického záření), které hvězda vyzáří do mezihvězdného prostoru za sekundu.

Zorný směr Směr spojnice pozorovatele a pozorovaného objektu.

[8]

4. Dvojhvězdy

Kapitola je zaměřena na procvičení pojmů, které jsou spojeny s dvojhvězdami. Hlavně na výpočty hmotnosti složek dvojhvězd, poloos dráhy, oběžné doby, paralaxy, relativních rychlostí složek, poloviční amplitudy radiálních rychlostí a dalších.

4.1. Teorie dvojhvězd

O dvojhvězdy se zajímal již Galileo Galilei a od té doby je pozorujeme a zkoumáme jejich vlastnosti. V roce 1782 vznikl první řádný katalog, který sestavil William Herschel.

Dvojhvězdy jsou dvojice hvězd tvořené hvězdami, které jsou relativně blízké. Proto se jejich vzdálenosti neudávají ve světelných rocích, ale spíše v astronomických jednotkách. Hvězdy mají společné hlavně místo vzniku a obíhají okolo společného těžiště. Dvojhvězdy se navzájem ovlivňují (gravitačně, osvětlování, zahřívání, výměna hmoty).

Vzdálenosti mezi složkami dvojhvězd se pohybují v rozmezích od $3 \cdot 10^6$ km do $3 \cdot 10^{12}$ km. Oběžné periody od 17,5 minuty do 3 000 000 let.

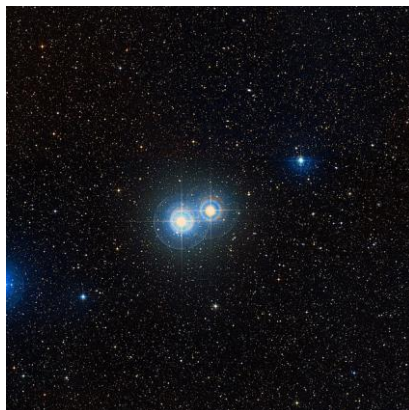
[3]

Většina hvězd, které na obloze pozorujeme, jsou dvojhvězdy. Zda poznáme jestli jde o dvojhvězdu, záleží na přesnosti měřicí metody. O tom, zda se skutečně jedná o dvojhvězdu, svědčí oběžný pohyb. Oběžný pohyb je prokázán pouze u malé části hvězd.

Dvojhvězdy dělíme na dva typy:

a) optické (zdánlivé).

Hvězdy spolu gravitačně nesouvisí, jde jen o náhodnou projekci dvou hvězd, blízké a vzdálené, do jednoho místa na obloze. Dvojice hvězd má rozdílný vlastní pohyb, který se projevuje lineárním posuvem jedné složky vůči druhé. Na obrázku 1 je vidět zdánlivá dvojhvězda Alpha Capricorni.



Obrázek 1: Optická dvojhvězda Alpha Capricorni. Obrázek byl získán z [5]

b) fyzické (skutečné).

Jde o soustavu dvou hvězd, navzájem gravitačně vázaných.

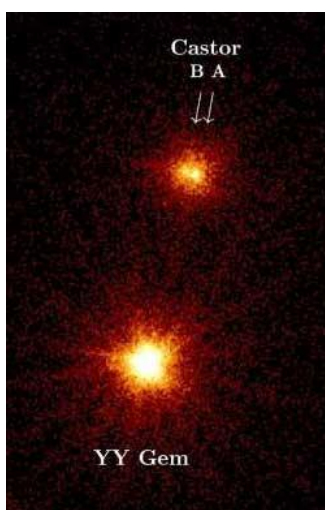
Skutečné dvojhvězdy se dělí na:

vizuální, zákrytové, spektroskopické, astrometrické, rentgenové, těsné.

a) vizuální dvojhvězdy.

Vizuální dvojhvězdy byly objeveny opticky, nejčastěji pomocí dalekohledu (rozdělení obrazu dvojhvězdy na dvě složky závisí na omezené rozlišovací schopnosti dalekohledu).

U vizuálních dvojhvězd jsou hvězdy dostatečně vzdáleny od sebe, lze je snadno rozlišit dalekohledem, případně i pouhým okem. Můžeme u nich měřit, jak se jejich vzájemné polohy mění v čase. Z dostatečného počtu měření je obvykle vidět, že se obě složky dvojhvězdy pohybují po elipsách s ohnisky ve společném těžišti soustavy. Oběžné doby vizuálních dvojhvězd jsou řádově až tisíce let. Na obrázku 2 je vidět vizuální dvojhvězda Castor v souhvězdí Blíženci.



Obrázek 2: Vizuální dvojhvězda Castor. Obrázek byl získán z[14]

Pro hledání dvojhvězd je minimální rozlišovací schopnost dalekohledu η , kterým pozorujeme monochromatický (s vlnovou délkou λ) obraz bodového zdroje, dána vztahem:

$$\eta \cong 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

kde η je rozlišovací schopnost v rad, D je průměr objektivu v mm a λ v mm.

b) zákrytové dvojhvězdy.

Hvězdy jsou blízko u sebe nebo jsou blízko sebe zdánlivě, díky velké vzdálenosti od Země. V dalekohledu vidíme pouze jednu hvězdu. Že se jedná o zákrytovou dvojhvězdu poznáme z periodických změn pozorované hvězdy. Při vzájemném oběhu dvojice hvězd dochází k vzájemným zákrytům, což se při pozorování ze Země projeví periodickými změnami jasnosti. Každá zákrytová dvojhvězda je i spektroskopickou dvojhvězdou. Na obrázku 3 je zachycena zákrytová dvojhvězda eso1046.



Obrázek 3: Zákrytová dvojhvězda s Cefeidou (eso1046). Obrázek byl získán z[31]

Podmínky zákrytů.

K zákrytům složek dochází, když rovina oběžné trajektorie dvojhvězdy prochází blízko pozorovatele: $i \sim 90^\circ$. Hvězdy bereme za koule o poloměrech R_1 a R_2 , pohybující se ve vzájemné vzdálenost r po kruhových drahách. Pro pozorování zákrytu musí být sklon trajektorie $\varphi^\circ > 90^\circ$. Přitom lze φ° vypočítat ze vztahu:

$$\sin \varphi^\circ = \frac{R_1 + R_2}{r}.$$

Z rozboru světelné křivky lze určit:

- a) sklon oběžné trajektorie k pozorovateli i ,
- b) relativní rozměry složek R_1/r , R_2/r ,
- c) okrajové ztemnění (musí být dobré pozorovací podmínky),
- d) relativní svítivosti obou hvězd,
- e) lineární vzdálenost obou hvězd a tím i jejich absolutní rozměry,
- f) efektivní teploty hvězd,
- g) absolutní bolometrické hvězdné velikosti,
- h) vzdálenost dvojhvězdy.

Přechod

Při pozorování z velké vzdálenosti začíná přechod (první kontakt přecházejícího tělesa s tělesem v pozadí), když spojnice ke středu druhé složky bude se směrem k pozorovateli svírat úhel α_1 , pro který platí:

$$\sin \alpha_1 = \frac{R_1 + R_2}{r}, \quad \alpha_1 \sim \frac{R_1 + R_2}{r}.$$

Při přechodu menší hvězdy přes větší bude jasnost dvojhvězdy lineárně klesat do tzv. druhého kontaktu, kdy se na disku centrální hvězdy zobrazí celý kotouč menší hvězdy. Spojnice ke středu druhé složky bude se směrem k pozorovateli svírat úhel α_2 , pro který platí:

$$\sin \alpha_2 = \frac{R_1 - R_2}{r}, \quad \alpha_2 \sim \frac{R_1 - R_2}{r}.$$

Dále přechází menší hvězda do centra kotouče větší hvězdy, kdy nastává střed zákrytu. Kvůli okrajovému zatmění přitom mírně klesá jasnost. Po přechodu centrem, přechod symetricky pokračuje. Při dotyku (zvenitř) okraje hvězdy v pozadí, nastává tzv. třetí kontakt. Po třetím kontaktu se zmenšuje podíl zakrývané plochy, až do čtvrtého kontaktu, kdy končí celý zákryt.

Jde-li položit $\sin \alpha = \alpha$, pak je délka doby mezi prvním a čtvrtým kontaktem, zpravidla značíme D , dána vztahem:

$$\frac{D}{T} = \frac{2a_1}{2\pi} = \frac{R_1 + R_2}{\pi r}.$$

Pro trvání zastávky d v minimu jasnosti dostáváme obdobně:

$$\frac{d}{T} = \frac{2a_2}{2\pi} = \frac{R_1 - R_2}{\pi r}.$$

Pokud jsme schopni ze světelné křivky odhadnout trvání obou fází, dostaneme tak odhad relativních rozměrů obou složek:

$$\frac{R_1}{r} = \frac{D+d}{T}, \quad \frac{R_2}{r} = \frac{D-d}{T}.$$

c) Spektroskopické dvojhvězdy.

Byly nalezeny podle periodických změn polohy spektrálních čar v pořízeném spektru, ke kterým dochází v důsledku Dopplerova jevu.

Pokud rovina oběžné dráhy méně hmotné složky míří přímo k Zemi, nedochází ke vzájemným zákrytům dvojice hvězd, a tedy ani k poklesu jasnosti sledované hvězdy. Dochází k periodickému rozdvajování spektrálních čar. To je způsobeno tzv. Dopplerovým efektem: při pohybu kolem společného těžiště se k nám střídavě jedna složka přibližuje a druhá se od nás vzdaluje.

Je-li spektrum jedné hvězdy v daném oboru světla výraznější tak, že ve spektru dvojhvězdy nenajdeme spektrum druhé hvězdy, potom takovým spektroskopickým dvojhvězdám říkáme *dvojhvězdy jednočárové*. Takovéto pojmy bych zdůrazňoval kurzívou. Je-li výsledné spektrum dvojhvězdy od obou hvězd takové, že nacházíme dva systémy spektrálních čar, potom se jedná o tzv. *dvojhvězdy dvoučárové*.

Spektrální čáry oscilují kolem klidové hodnoty radiální rychlosti, odpovídající radiální rychlosti těžiště soustavy vzhledem k pozorovateli. Je možné uvažovat jen rozdíly rychlostí. Pro vektory rychlostí obou složek V_1 , V_2 vzhledem k těžišti pak platí:

$$V_1 M_1 = -V_2 M_2.$$

Poměr amplitudy změn radiálních rychlostí hvězd je roven převrácené hodnotě poměru jejich hmotností.

U spektroskopických dvojhvězd jsou často jejich trajektorie blízké kružnicím. Jsou-li trajektorie složek dvojhvězdy kruhové, hvězdy se po drahách pohybují rovnoměrně, konstantními rychlostmi V_1 a V_2 , $V = V_1 + V_2$.

$$V_1 = \frac{2\pi a_1}{T} = \frac{M_2}{M} \frac{2\pi a}{T}; \quad V_2 = \frac{2\pi a_2}{T} = \frac{M_1}{M} \frac{2\pi a}{T}; \quad V = \frac{2\pi a}{T}.$$

Velikost velké poloosy lze vyjádřit:

$$a \sin i = V \sin i \frac{T}{2\pi},$$

dosadíme-li tuto pozorovanou veličinu do 3. Keplerova zákona dostaneme:

$$M \sin^3 i = \frac{(V \sin i)^3 T}{2\pi G}.$$

Protože; $\sin i \leq 1$, udává výraz na pravé straně min. možnou hmotnost soustavy. Je-li ve spektru dvojhvězdy viditelná jen jedna složka, pak známe pouze $V_1 \sin i$. Pak ovšem

$$a \sin i = \frac{M}{M_2} \frac{(V_1 \sin i) T}{2\pi}$$

a po dosazení do 3. Keplerova zákona dostaneme:

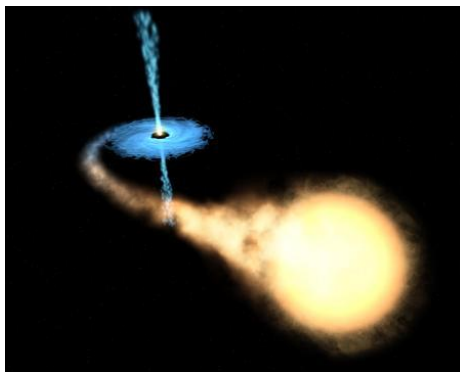
$$\frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{(V_1 \sin i)^3 T}{2\pi G}.$$

d) Astrometrické dvojhvězdy.

Astrometrické dvojhvězdy jsou vizuální dvojhvězdy, u kterých vidíme jen jednu složku. Druhá složka, většinou méně hmotná, září tak málo, že ji nelze v dané chvíli spatřit. Dříve se astronomové domnívali, že hvězdy jsou „stálice“. Ale tak to není. Vykonávají tzv. vlastní pohyby. Pokud je u hvězdy přítomný další objekt nevidíme její pohyb na obloze jako přímkou, ale má tvar vlnovky. Způsobuje to gravitace daného objektu. V současnosti lze odhalit jen dvojice blízkých hvězd, u nichž známe jejich vlastní pohyb s vysokou relativní přesností.

e) Rentgenové dvojhvězdy.

Projevují se periodickými změnami rentgenového záření – např. rentgenové pulsary. Na obrázku 4 je ilustrační obrázek rentgenové dvojhvězdy kde dochází k přenosu hmoty z jedné složky na druhou.



Obrázek 4: Ilustrační obrázek rentgenové dvojhvězdy. Obrázek byl získán z [30]

f) Těsné dvojhvězdy.

Oběžná rovina těchto dvojhvězd prochází Zemí. Hvězdy obíhají kolem společného těžiště, což se projevuje v periodických změnách jasnosti dvojhvězdy.

Vývoj těsných dvojhvězd.

Těsné dvojhvězdy vznikají převážně z jednoho plynného oblaku. Tímto způsobem asi vznikla i dvojhvězda MY Camelopardis viz obrázek 5.



Obrázek 5: Těsná dvojhvězda MY Camelopardis. Obrázek byl získán z [19]

Malá část vzniká po přiblížení dvou osamocených hvězd zachycením nebo výměnou mezi osamocenou hvězdou a dvojhvězdou.

Známe-li vzájemnou oběžnou dobu a velkou poloosu jejich dráhy, můžeme zjistit součet hmotností hvězd podle vzorce

$$(M_1 + M_2)T^2 = a^3,$$

kde M_1 a M_2 jsou hmotnosti hvězd ve dvojhvězdě, T jejich oběžná doba a a velká poloosa jejich dráhy. A z poměru jejich vzdáleností od hmotného středu soustavy nebo poměrů jejich oběžných rychlostí, lze zjistit poměr hmotností jednotlivých hvězd.

Oběžná perioda soustavy T hvězd o hmotnostech M_1 a M_2 vyhovuje 3. Keplerovu zákonu ve tvaru

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}$$

a pro periodu pak platí vztah

$$T = \left(\frac{a}{1AU} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{M_{\text{Sl}}}{M_1 + M_2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ let,}$$

kde a je velká poloosa oběžné elipsy, která je rovna součtu poloos elips jednotlivých hvězd

$$a = a_1 + a_2.$$

Známe-li paralaxu dvojhvězdy π (vzdálenost $r = \frac{1}{\pi}$), můžeme pro velkou poloosu trajektorie a použít vztah

$$\frac{a}{AU} = \frac{\alpha \text{ 1''}}{1'' \pi} = \frac{\alpha r}{1'' pc} = \frac{\alpha'}{1'' \cos i'} \frac{r}{pc};$$

α' úhlová velikost velké poloosy; a' je polovina pozorované úhlové vzdálenosti apastru a periastra, i' je úhel, který svírá přímka apsid (body dráhy nejbližší a nejdále od hmotného středu dvojhvězdy) se směrem k pozorovateli.

4.2. Základní vztahy teorie dvojhvězd

Vztah pro minimální rozlišovací schopnost dalekohledu

$$\eta \cong 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

kde η je rozlišovací schopnost v rad, D je průměr objektivu v mm a λ je vlnová délka obrazu bodového zdroje v mm.

Wienův posunovací zákon

$$\lambda_{\max} T = b,$$

Kde λ_{\max} je vlnová délka, odpovídající záření s největší intenzitou, v mm, T je termodynamická teplota b je Wienova konstanta.

Vztah pro součet hmotností složek dvojhvězdy

$$k(M_1 + M_2) = \frac{a^3}{T^2},$$

kde a je velká poloosa relativní dráhy (tj. střední vzdálenost složek), T oběžná doba, M_1 a M_2 hmotnost složek. Konstanta k závisí na volbě jednotek.

Vztah pro součet hmotností složek dvojhvězdy, dosazujeme-li v základních jednotkách

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2}.$$

Vztah pro hmotnost složek dvojhvězdy je-li a v astronomických jednotkách, T v rocích, M_1 a M_2 v jednotkách hmotnosti Slunce, kdy $k = 1$

$$\frac{a^3}{T^2} = M_1 + M_2.$$

Je-li poloosa a změřena v obloukových vteřinách ["], pak

$$a = \frac{a''}{\pi''},$$

kde π'' je paralaxa hvězdy, $[a] = \text{AU}$.

Vztah pro roční paralaxu

$$\pi'' = \frac{1}{r}, [r] = \text{pc}, [\pi''] = '' ,$$

kde r je vzdálenost hvězdy.

Vztah pro součet hmotností složek dvojhvězdy, je-li poloosa a změřena v obloukových vteřinách

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{\pi^3 T^2} .$$

Vztah pro součet hmotností složek dvojhvězdy u spektroskopických dvojhvězd, jsou-li hodnoty $a_1 \sin i$, $a_2 \sin i$ udány v astronomických jednotkách a oběžná doba v rocích

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i = \frac{(a_1 \sin i + a_2 \sin i)^3}{T^2} ,$$

kde i je sklon dráhy a tedy $a_1 \sin i$, $a_2 \sin i$ jsou průměty velkých poloos obou složek kolem společného těžiště na sféru.

Vztah pro součet hmotností složek dvojhvězdy, jsou-li hodnoty $a_1 \sin i$, $a_2 \sin i$ udány v kilometrech a oběžná doba ve dnech, pak

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i = 4,08 \cdot 10^{-20} \frac{(a_1 \sin i + a_2 \sin i)^3}{T^2} .$$

Vztah pro poměr hmotností složek dvojhvězdy a poměr velkých poloos složek dvojhvězdy

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} .$$

Pro velké poloosy drah, a_1 , a_2 , které opisují složky dvojhvězdy kolem společného těžiště, platí

$$a = a_1 + a_2 .$$

Vztah pro poměr hmotností složek dvojhvězdy a poměr polovičních amplitud jejich radiálních rychlostí

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{K_2}{K_1} ,$$

kde K_1, K_2 jsou poloviční amplitudy radiálních rychlostí složek dvojhvězdy.

Vztah pro hmotnost složek dvojhvězdy jsou-li K_1, K_2 v $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, oběžná doba ve dnech a známe-li excentricitu dráhy (lze je určit z křivek radiálních rychlostí),

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i = 1,036 \cdot 10^{-7} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} (K_1 + K_2)^3 T.$$

Hodnotu $\sin i$ známe, pouze pokud je spektroskopická dvojhvězda současně zákrytovou proměnnou hvězdou a tedy sklon $i \doteq 90^\circ$, $\sin i \doteq 1$. V případě, že $\sin i$ není znám, počítáme se střední hodnotou $\sin^3 i = \frac{2}{3}$.

Vztah pro rychlost pohybujícího se objektu při Dopplerově posuvu

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c.$$

Vztah pro zářivý výkon L , pokud známe absolutní bolometrickou hvězdnou velikost M_{bol}

$$\log L = 0,4 \cdot (4,75 - M_{\text{bol}}).$$

Vztah pro změnu oběžné doby při přenosu hmoty u dvojhvězd

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = 3 \frac{dM_1}{dt} \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2}.$$

4.3. Příklady k teorii dvojhvězd

4.3.1. Příklad

Jaká je rozlišovací schopnost dalekohledu, který má průměr objektivu D 6 cm ? Počítejte pro vlnovou délku světla 500 nm . Výsledek zapište v úhlových vteřinách.

Zápis:

$$D = 6 \text{ cm}, \lambda = 500 \text{ nm}, \eta = ?$$

Řešení:

Pro rozlišovací schopnost dalekohledu platí vztah

$$\eta \cong 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

dosadíme číselně v mm

$$\eta = 1,22 \frac{500 \cdot 10^{-6}}{60},$$

kde

$$1,22 \cdot 500 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,00061 \text{ rad},$$

$$0,00061 \text{ rad} \doteq 120'' ,$$

tedy

$$\eta = \frac{120}{60},$$

$$\underline{\underline{\eta = 2''}} .$$

Odpověď:

Rozlišovací schopnost dalekohledu je 2'' .

vlastní příklad

4.3.2. Příklad

Můžeme pomocí Hubbleova dalekohledu rozlišit dvě hvězdy spektrální třídy O, mezi kterými je úhel 10^{-7} rad, na vlnové délce čáry L_{α} s $\lambda = 121,6$ nm.

převzato z [21]

Zápis:

$$\alpha = 10^{-7} \text{ rad}, \lambda = 121,6 \text{ nm}, \eta = ? \text{ rad}, D = 2,4 \text{ m}$$

Řešení:

Pro rozlišovací schopnost dalekohledu platí vztah

$$\eta \cong 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Dosadíme číselně v mm

$$\eta = 1,22 \cdot \frac{121,6 \cdot 10^{-6}}{2,4 \cdot 10^3},$$

$$\eta = 6,2 \cdot 10^{-8} \text{ rad},$$

$$10^{-7} > 6,2 \cdot 10^{-8},$$

$$\underline{\underline{\alpha > \eta}}.$$

Odpověď:

Hvězdy můžeme pomocí Hubbleova dalekohledu rozlišit, protože jejich úhlová vzdálenost je větší než rozlišovací schopnost dalekohledu.

zpracováno podle [21]

4.3.3. Příklad

Jaký musí být průměr objektivu dalekohledu, abychom v něm rozlišili složky dvojhvězdy, jejichž úhlová vzdálenost je $0,16''$? Za $1,22 \cdot \lambda$ dosazujte $120''$.

převzato z [10]

Zápis:

$$\alpha = 0,16'' , 1,22 \cdot \lambda = 120'' , D = ? \text{ mm}$$

Řešení:

Nejmenší úhlová vzdálenost, kdy lze ještě složky dvojhvězdy rozlišit, je rozlišovací schopnost dalekohledu, pro kterou platí vztah

$$\eta = 1,22 \frac{\lambda}{D} .$$

Musí platit

$$\eta \geq 0,16 ,$$

potom

$$1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \geq 0,16 ,$$

tedy

$$D \leq \frac{1,22 \cdot \lambda}{0,16} ,$$

dosadíme číselně

$$D \leq \frac{120}{0,16} ,$$

$$\underline{\underline{D \leq 750 \text{ mm} .}}$$

Odpověď:

Složky dvojhvězdy rozlišíme dalekohledem s průměrem objektivu 750 mm .

vlastní řešení

4.3.4. Příklad

U dvojhvězdy Alfa Centauri byla v roce 2010 úhlová vzdálenost mezi složkami A a B zjištěna $6,8''$. Jaký je minimální průměr objektivu dalekohledu, při kterém lze ještě složky rozlišit? Počítejte pro vlnovou délku světla 550 nm .

Zápis:

$$\alpha = 6,8'' ; \lambda = 550 \text{ nm} ; D = ? \text{ mm}$$

Řešení:

Nejmenší úhlová vzdálenost kdy lze ještě složky dvojhvězdy rozlišit, je rozlišovací schopnost dalekohledu, pro kterou platí vztah

$$\eta \cong 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Musí platit

$$\eta \geq 6,8,$$

potom

$$1,22 \frac{\lambda}{D} \geq 6,8,$$

tedy

$$D \leq \frac{1,22 \cdot \lambda}{6,8},$$

dosadíme číselně, vlnovou délku v mm

$$D \leq \frac{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-6}}{6,8},$$

$$1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \doteq 138'',$$

tedy

$$D \leq \frac{138}{6,8},$$

$$\underline{\underline{D \leq 20,3 \text{ mm}}}.$$

Odpověď:

Složky dvojhvězdy ještě bude možné rozlišit dalekohledem s objektivem o průměru 20 mm.

vlastní příklad

4.3.5. Příklad

Jaká je nejmenší úhlová vzdálenost středů dvou hvězd, které lze rozlišit v dalekohledu o průměru objektivu 60 cm. Za $1,22 \cdot \lambda$ dosazujte $120''$.

převzato z [10]

Zápis:

$$D = 60 \text{ cm}; 1,22 \cdot \lambda = 120''; \alpha = ?''$$

Řešení:

Hvězdy lze od sebe rozlišit, je-li úhlová vzdálenost jejich středů rovna rozlišovací schopnosti dalekohledu dané vztahem

$$\eta = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

tedy

$$\alpha = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

dosadíme číselně, průměr objektivu v mm

$$\alpha = \frac{120}{600},$$

$$\underline{\underline{\alpha = 0,2''}}.$$

Odpověď:

Nejmenší úhlová vzdálenost středů hvězd je $0,2''$.

vlastní řešení

4.3.6. Příklad

Dvojhvězda má roční paralaxu $\pi'' = 0,06''$. Obě její složky mají efektivní povrchovou teplotu $T = 7000\text{ K}$. Jaká je minimální vzdálenost složek od sebe, aby je bylo možné rozlišit ze Země při pozorování dalekohledem s průměrem objektivu 8 cm?

převzato z [2]

Zápis:

$$\pi'' = 0,06'', T = 7000\text{ K}, D = 8\text{ cm}, d = ?\text{ AU}$$

Řešení:

Pro rozlišovací schopnost dalekohledu platí vztah

$$\eta = \frac{1,22\lambda}{D},$$

kde vlnovou délku zjistíme pomocí Wienova posunovacího zákona

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

tedy

$$\eta = \frac{1,22 \cdot b}{DT}.$$

Dosadíme číselně, průměr objektivu v m

$$\eta = \frac{1,22 \cdot 2,898 \cdot 10^{-3}}{0,08 \cdot 7000},$$

$$\eta = 6,31 \cdot 10^{-6}\text{ rad}.$$

Převedeme na úhlové vteřiny

$$\eta = 1,3''.$$

Protože paralaxa vyjadřuje pod jakým úhlem je vidět 1 AU, tedy pro vzdálenost složek = počet AU platí

$$d = \frac{\eta}{\pi''},$$

dosadíme číselně v úhlových vteřinách

$$d = \frac{1,3}{0,06},$$

$$\underline{\underline{d = 21,7 \text{ AU} .}}$$

Odpověď:

Minimální vzdálenost složek od sebe je 21,7 AU .

zpracováno podle [2]

4.3.7. Příklad

Určete součet hmotností dvojhvězdy Capelly, je-li velká poloosa relativní dráhy $a = 0,85 \text{ AU}$, oběžná doba $T = 0,285$ roku.

převzato z [10]

Zápis:

$$a = 0,85 \text{ AU}, T = 0,285 \text{ roku}, M_1 + M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Protože a je v astronomických jednotkách a T v rocích, lze součet hmotností složek dvojhvězdy vypočítat pomocí vztahu

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2},$$

dosadíme číselně

$$M_1 + M_2 = \frac{0,85^3}{0,285^2},$$

$$\underline{\underline{M_1 + M_2 \doteq 7,561 M_{\text{Sl}} .}}$$

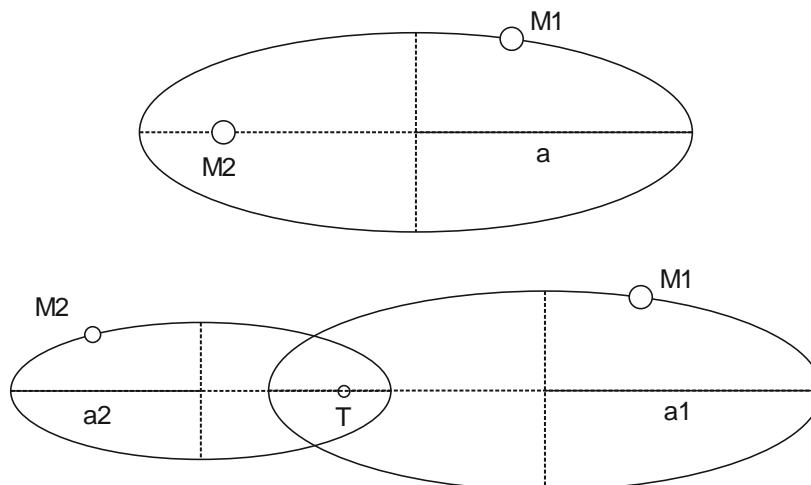
Odpověď:

Součet hmotností složek dvojhvězdy Capelly je přibližně $7,561 M_{\text{Sl}}$.

vlastní řešení

4.3.8. Příklad

Určete hmotnosti složek dvojhvězdy Procyona, která má oběžnou dobu $T = 39$ roků, velkou poloosu relativní dráhy 15 AU a poměr vzdáleností složek od těžiště $\frac{a_1}{a_2} = 3$.



Obrázek 6: Znárodnění velké poloosu relativní dráhy a hlavních poloos jednotlivých složek. Vlastní tvorba.

převzato z [10]

Zápis:

$$a = 15 \text{ AU}, T = 39 \text{ roků}, \frac{a_1}{a_2} = 3, M_1 + M_2 = ? M_{\text{Sl}}, M_1 = ? M_{\text{Sl}}, M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Protože a je v astronomických jednotkách a T v rocích, lze součet hmotností složek dvojhvězdy vypočítat pomocí vztahu

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2},$$

dosadíme číselně

$$M_1 + M_2 = \frac{15^3}{39^2},$$

$$M_1 + M_2 \doteq 2,2 M_{\text{Sl}}.$$

Pro poměr hmotností a poměr vzdáleností složek od těžiště platí:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1},$$

$$\text{tedy } \frac{M_2}{M_1} = 3.$$

Vyjádříme M_2

$$M_2 = 3 M_1,$$

po dosazení do

$$M_1 + M_2 \doteq 2,2,$$

za M_2 dostaneme

$$M_1 + 3 M_1 = 2,2,$$

$$4 M_1 = 2,2,$$

$$\underline{\underline{M_1 \doteq 0,55 M_{\text{Sl}}}}$$

Nyní ještě dopočteme M_2

$$0,55 + M_2 = 2,2,$$

$$\underline{\underline{M_2 \doteq 1,7 M_{\text{Sl}}}}$$

Odpověď:

Hmotnosti složek dvojhvězdy Procyona jsou $0,6 M_{\text{Sl}}$ a $1,6 M_{\text{Sl}}$.

vlastní řešení

4.3.9. Příklad

Vyhledejte paralaxu a úhlovou velikost velké poloosy dvojhvězdy Capella. Pomocí nalezených hodnot určete skutečnou velikost velké poloosy v jednotkách AU.

Zápis:

$$a = ? \text{ AU}$$

Řešení:

Pro velkou poloosu v astronomických jednotkách platí vztah

$$a = \frac{a''}{\pi''} .$$

Dosadíme nalezené hodnoty

$$a = \frac{0,05647}{0,07620} ,$$

$$\underline{\underline{a = 0,74 \text{ AU} .}}$$

Odpověď:

Skutečná velikost velké poloosy je 0,74 AU .

vlastní příklad

4.3.10. Příklad

Velká poloosa dvojhvězdy α Centauri je $17,65''$; kolikrát je skutečná velká poloosa dráhy větší než vzdálenost Země od Slunce? Paralaxa dvojhvězdy $\pi = 0,76''$. Vypočítejte součet hmotností složek, víte-li, že oběžná doba $T = 79$ roků.

převzato z [10]

Zápis:

$$a'' = 17,65'', \pi = 0,76'', T = 79 \text{ roků}, a = ? \text{ AU}, M_1 + M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Kolikrát větší než vzdálenost Země od Slunce znamená, spočítat velikost v astronomických jednotkách.

Platí vztah

$$a = \frac{a''}{\pi''},$$

dosadíme číselně

$$a = \frac{17,65}{0,76},$$

$$\underline{\underline{a = 23,22 \text{ AU}}}.$$

Pro součet hmotností složek platí

$$M_1 + M_2 = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 T^2},$$

dosadíme číselně

$$M_1 + M_2 = \frac{17,65^3}{0,76^3 \cdot 79^2},$$

$$\underline{\underline{M_1 + M_2 = 2,01 M_{\text{Sl}}}}.$$

Odpověď

Velká poloosa je 23,22 krát větší než vzdálenost Země od Slunce a součet hmotností složek dvojhvězdy α Centauri je $2,01 M_{\text{Sl}}$.

vlastní řešení

4.3.11. Příklad

Dvojhvězda ε Hydrae má oběžnou dobu $T = 15,3$ roku, paralaxu $\pi'' = 0,02''$, úhlový rozměr velké poloosy $a'' = 0,23''$. Určete délku velké poloosy v astronomických jednotkách a součet hmotností složek.

převzato z [10]

Zápis:

$$T = 15,3 \text{ roku}, \pi'' = 0,02'', a'' = 0,23'', a = ? \text{ AU}, M_1 + M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Je-li poloosa v obloukových vteřinách, určíme její délku v AU vydělením paralaxou dvojhvězdy.

$$a = \frac{a''}{\pi''},$$

dosadíme číselně

$$a = \frac{0,23}{0,02},$$

$$\underline{\underline{a = 11,5 \text{ AU}}}$$

Pro součet hmotností složek pak platí

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{\pi^3 T^2},$$

dosadíme číselně

$$M_1 + M_2 = \frac{(0,23)^3}{(0,02)^3 \cdot 15,3^2},$$

$$\underline{\underline{M_1 + M_2 = 6,5 M_{\text{Sl}}}}$$

Odpověď:

Délka velké poloosy je 11,5 AU a součet hmotností složek je 6,5 M_{Sl} .

vlastní řešení

4.3.12. Příklad

Dvojhvězda α^2 Eridani má oběžnou dobu $T = 248$ roků, úhlový rozměr velké poloosy $a'' = 6,9''$, poměr vzdáleností složek od těžiště $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$. Paralaxa $\pi'' = 0,2''$. Určete hmotnosti složek.

převzato z [10]

Zápis:

$$T = 248 \text{ roků}, a'' = 6,9'', \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \pi'' = 0,2'', M_1 = ? M_{\text{Sl}}, M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení

Pro součet hmotností složek platí

$$M_1 + M_2 = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 \cdot T^2},$$

dosadíme číselně

$$M_1 + M_2 = \frac{6,9^3}{0,2^3 \cdot 248^2},$$

$$M_1 + M_2 = 0,668.$$

Pro poměr hmotností a poměr vzdáleností složek od těžiště platí

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1},$$

tedy

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{2}.$$

Vyjádříme M_2

$$M_2 = \frac{M_1}{2},$$

po dosazení do

$$M_1 + M_2 = 0,668$$

za M_2 dostaneme

$$M_1 + \frac{M_1}{2} = 0,668,$$

$$\frac{3M_1}{2} = 0,668,$$

$$\underline{\underline{M_1 = 0,445 M_{S1}}}$$

Nyní ještě dopočítáme M_2

$$0,445 + M_2 = 0,668,$$

$$\underline{\underline{M_2 = 0,223 M_{S1}}}$$

Odpověď:

Hmotnosti složek dvojhvězdy α^2 Eridani jsou $0,445 M_{S1}$ a $0,223 M_{S1}$.

vlastní řešení

4.3.13. Příklad

Určete dynamickou paralaxu dvojhvězdy α Centauri ; oběžná doba $T = 79$ roků , velká poloosa dráhy $a'' = 17,65''$. Hmotnost dvojhvězdy považujte rovnu dvěma hmotnostem Slunce.

převzato z [10]

Zápis:

$$T = 79 \text{ roků}, a'' = 17,65'', M_1 + M_2 = 2 M_{\text{Sl}}, \pi'' = ?''$$

Řešení:

Dynamickou paralaxu dvojhvězdy vyjádříme ze vztahu

$$M_1 + M_2 = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 \cdot T^2},$$

$$\pi'' = \sqrt[3]{\frac{(a'')^3}{(M_1 + M_2) \cdot T^2}},$$

$$a'' = \frac{a''}{\sqrt[3]{(M_1 + M_2) \cdot T^2}},$$

dosadíme číselně

$$\pi'' = \frac{17,65}{\sqrt[3]{2 \cdot 79^2}},$$

$$\underline{\underline{\pi'' = 0,76''}}.$$

Odpověď:

Dynamická paralaxa dvojhvězdy α Centauri je $0,76''$.

vlastní řešení

4.3.14. Příklad

Vypočtete dynamickou paralaxu dvojhvězdy β 7642, která má velkou poloosu $a'' = 2,87''$, oběžnou dobu $T = 317,5$ roku. Trigonometricky určená paralaxa této dvojhvězdy je $\pi'' = 0,088''$. Pokládejte součet hmotností složek rovný M_{Sl} .

převzato z [10]

Zápis:

$$a'' = 2,87'', T = 317,5 \text{ roků}, M_1 + M_2 = 2 M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Dynamickou paralaxu dvojhvězdy vyjádříme ze vztahu

$$M_1 + M_2 = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 \cdot T^2},$$

$$\pi'' = \sqrt[3]{\frac{(a'')^3}{(M_1 + M_2) \cdot T^2}},$$

$$\pi'' = \frac{a''}{\sqrt[3]{(M_1 + M_2) \cdot T^2}},$$

dosadíme číselně

$$\pi'' = \frac{2,87}{\sqrt[3]{2 \cdot 317,5^2}},$$

$$\underline{\underline{\pi'' = 0,049''}}.$$

Odpověď:

Dynamická paralaxa dvojhvězdy β 7642 je $0,049''$.

vlastní řešení

4.3.15. Příklad

U dvojhvězdy 70 Ophiuchi byly zjištěny následující hodnoty, oběžná doba 87,85 roku, úhlový rozměr velké poloosy $4,551''$, hmotnosti složek $0,9 M_{\text{Sl}}$, a $0,7 M_{\text{Sl}}$. U dvojhvězdy Epsilon Hydrae byly zjištěny hodnoty, oběžná doba 15,3 roku, úhlový rozměr velké poloosy $0,23''$ a hmotnost dvojhvězdy $6,5 M_{\text{Sl}}$. Porovnejte vzdálenosti dvojhvězd.

Zápis:

$$T_{\text{O}} = 87,85 \text{ roku}, \quad a_{\text{O}}'' = 4,551'', \quad M_{1\text{O}} = 0,9 M_{\text{Sl}}, \quad M_{2\text{O}} = 0,7 M_{\text{Sl}}, \quad r_{\text{O}} = ? \text{ pc};$$
$$T_{\text{E}} = 15,3 \text{ roku}, \quad a_{\text{E}}'' = 0,23'', \quad M_{1\text{E}} + M_{2\text{E}} = 6,5 M_{\text{Sl}}, \quad r_{\text{E}} = ? \text{ pc}$$

Řešení:

Pro vzdálenost dvojhvězdy platí vztah

$$r = \frac{1}{\pi''}.$$

Dynamickou paralaxu dvojhvězdy vyjádříme ze vztahu

$$M_1 + M_2 = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 \cdot T^2},$$

$$\pi'' = \sqrt[3]{\frac{(a'')^3}{(M_1 + M_2) \cdot T^2}},$$

$$\pi'' = \frac{a''}{\sqrt[3]{(M_1 + M_2) \cdot T^2}},$$

dále vyjádříme π'' ve vztahu pro vzdálenost a dostaneme

$$r = \frac{\sqrt[3]{(M_1 + M_2) \cdot T^2}}{a''}.$$

Dosadíme číselně pro dvojhvězdu 70 Opiuchi

$$r_O = \frac{\sqrt[3]{(0,9 + 0,7) \cdot 87,85^2}}{4,551},$$

$$\underline{r_O = 5,1 \text{ pc} .}$$

Dosadíme číselně pro dvojhvězdu Ypsilon Hydrae

$$r_E = \frac{\sqrt[3]{6,5 \cdot 15,3^2}}{0,23},$$

$$\underline{r_E = 50,0 \text{ pc} .}$$

Tedy

$$\frac{r_E}{r_O} = \frac{50,0}{5,1},$$

$$\underline{\underline{\frac{r_E}{r_O} \doteq 10.}}$$

Odpověď:

Dvojhvězda 70 Opiuchi je přibližně 10 krát blíže než dvojhvězda Epsilon Hydrae.

vlastní příklad

4.3.16. Příklad

Určete poměr hmotností složek spektroskopické dvojhvězdy β Scorpii, je-li poloviční amplituda radiálních rychlostí hlavní složky $K_1 = 126 \text{ km s}^{-1}$, průvodce $K_2 = 152 \text{ km s}^{-1}$.

převzato z [10]

Zápis:

$$K_1 = 126 \text{ km}, K_2 = 152 \text{ km}; \frac{M_1}{M_2} = ?$$

Řešení:

Pro poměr hmotností složek dvojhvězdy a radiálních rychlostí platí

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{K_2}{K_1},$$

dosadíme číselně

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{126}{152}.$$

Odpověď:

Poměr hmotností složek spektroskopické dvojhvězdy β Scorpii je $\frac{1}{2}$.

vlastní řešení

4.3.17. Příklad

Určete poloměr relativní dráhy, opisované Spicou (α Vir) jako složkou spektroskopické dvojhvězdy, je-li relativní rychlost po dráze $v = 91 \text{ km s}^{-1}$, oběžná doba $T = 4 \text{ dny } 0 \text{ hodin } 19 \text{ minut}$. Předpokládejte, že dráha je kruhová se sklonem $i = 90^\circ$.

převzato z [10]

Zápis:

$$v = 91 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, T = 4 \text{ dny } 0 \text{ hodin } 19 \text{ minut}, i = 90^\circ, a = r = ?$$

Řešení:

Aby vyšel poloměr relativní dráhy v km, vyjádříme T v sekundách.

$$T = 4 \text{ dny } 0 \text{ h } 19 \text{ min} = (4 \cdot 24 \cdot 3600 + 19 \cdot 60) \text{ s} = 346740.$$

Poloměr vyjádříme ze vztahu pro obvodovou rychlost

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

$$r = \frac{vT}{2\pi},$$

dosadíme číselně

$$r = \frac{91 \cdot 346740}{2\pi},$$

$$\underline{\underline{r = 5,02 \cdot 10^6 \text{ km} .}}$$

Odpověď

Poloměr relativní dráhy opisované Spicou je $5,02 \cdot 10^6 \text{ km}$.

vlastní řešení

4.3.18. Příklad

Určete hmotnost spektroskopické dvojhvězdy je-li poloměr relativní dráhy $a = 26,6 \cdot 10^6$ km, sklon dráhy $i = 90^\circ$, perioda $T = 3$ dny 2 hodiny 46 minut. Dráhu pokládejte za kruhovou.

převzato z [10]

Zápis:

$$a = 26,6 \cdot 10^6 \text{ km}, i = 90^\circ, T = 3 \text{ dny } 2 \text{ hodiny } 46 \text{ minut}, M_1 + M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Protože a je v km a T ve dnech, lze hmotnost dvojhvězdy vyjádřit pomocí vztahu

$$(M_1 + M_2) \sin i = 4,08 \cdot 10^{-20} \frac{a^3}{T^2},$$

dosadíme číselně

$$(M_1 + M_2) \cdot \sin 90^\circ = 4,08 \cdot 10^{-20} \frac{(26,6 \cdot 10^6)^3}{\left(3 + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} \cdot \frac{46}{60}\right)^2},$$

$$\underline{\underline{M_1 + M_2 = 79 M_{\text{Sl}}}}$$

Odpověď:

Hmotnost spektroskopické dvojhvězdy je $79 M_{\text{Sl}}$.

vlastní řešení

4.3.19. Příklad

Zákrytová proměnná dvojhvězda W Ursae Maioris má excentricitu dráhy rovnu nule, sklon dráhy $i = 90^\circ$. Pro průměty poloos drah, které opisují složky kolem společného těžiště, byly naměřeny hodnoty $a_1 \sin i = 0,6 \cdot 10^6$ km, $a_2 \sin i = 0,86 \cdot 10^6$ km, oběžná doba $T = 0,334$ dne. Vypočítejte hmotnosti složek této dvojhvězdy.

převzato z [10]

Zápis:

$e = 0$; $a_1 \sin i = 0,6 \cdot 10^6$ km, $a_2 \sin i = 0,86 \cdot 10^6$ km, $T = 0,334$ dne, $M_1 = ? M_{\text{Sl}}$,
 $M_2 = ? M_{\text{Sl}}$

Řešení:

Protože $a_2 \sin i$ je v km a T ve dnech, lze součet hmotností složek dvojhvězdy vyjádřit pomocí vztahu

$$(M_1 + M_2) \sin i = 4,08 \cdot 10^{-20} \frac{(a_1 \sin i + a_2 \sin i)^3}{T^2},$$

kde

$$\sin i = 1,$$

dosadíme číselně

$$(M_1 + M_2) = 4,08 \cdot 10^{-20} \frac{(0,6 \cdot 10^6 + 0,86 \cdot 10^6)^3}{0,334^2},$$

$$M_1 + M_2 \doteq 1,14 M_{\text{Sl}}.$$

Pro poměr hmotností a poměr průmětů poloos drah složek platí

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1},$$

dosadíme číselně

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{0,6}{0,86}.$$

Vyjádříme M_2

$$M_2 = \frac{0,6}{0,86} M_1.$$

Po dosazení do

$$M_1 + M_2 \doteq 1,14,$$

za M_2 dostaneme

$$M_1 + \frac{0,6}{0,86} M_1 = 1,14,$$

$$1,70 M_1 = 1,14,$$

$$\underline{\underline{M_1 \doteq 0,67 M_{S1} .}}$$

Nyní ještě dopočteme M_2

$$0,67 + M_2 = 1,14,$$

$$\underline{\underline{M_2 \doteq 0,47 M_{S1} .}}$$

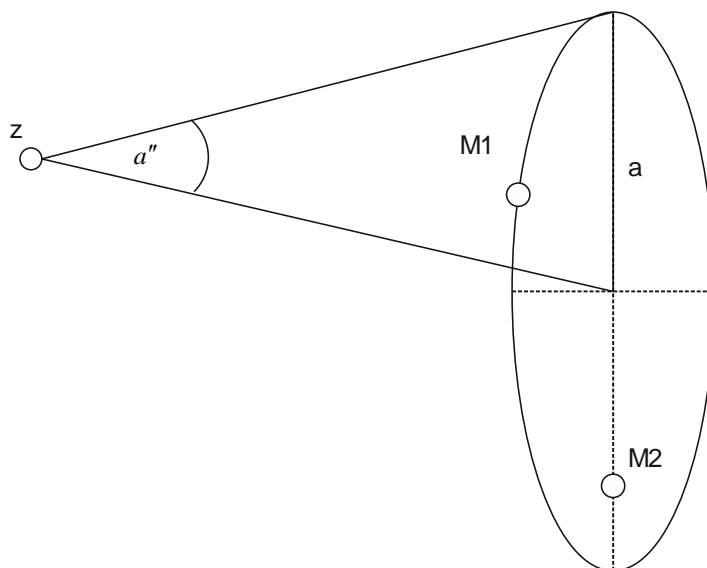
Odpověď:

Hmotnosti složek dvojhvězdy W Ursae Maioris jsou $0,67 M_{S1}$ a $0,47 M_{S1}$.

vlastní řešení

4.3.20. Příklad

Určete vzdálenost dvojhvězdy, známe-li její oběžnou dobu $T = 27$ roků, hmotnosti jednotlivých složek $3M$, $5M$ a velikost hlavní poloosy $a'' = 0,45''$.



Obrázek 7: Znázornění velké poloosy relativní dráhy. Vlastní tvorba.

převzato z [34]

Zápis:

$$T = 27 \text{ roků}, M_1 = 3 M_{\text{Sl}}, M_2 = 5 M_{\text{Sl}}, a'' = 0,45'', r = ?$$

Řešení:

Vzdálenost dvojhvězdy je dána vztahem

$$r = \frac{1}{\pi},$$

π vyjádříme ze vztahu pro součet hmotností složek

$$M_1 + M_2 = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 \cdot T^2},$$

$$\pi'' = \frac{a''}{\sqrt[3]{(M_1 + M_2) \cdot T^2}},$$

dosadíme za π

$$r = \frac{\sqrt[3]{(M_1 + M_2) \cdot T^2}}{a''},$$

dosadíme číselně

$$r = \frac{\sqrt[3]{(3+5) \cdot 27^2}}{0,45},$$

$$\underline{\underline{r = 40 \text{ pc.}}}$$

Odpověď:

Vzdálenost dvojhvězdy je 40 pc.

vlastní řešení

4.3.21. Příklad

Sirius je vizuální dvojhvězda s oběžnou dobou 49,94 roků a roční paralaxou $\pi = 0,379''$. Zjednodušeně předpokládejme, že dráhová rovina je kolmá k zornému paprsku. Velikost velké poloosy je $a'' = 7,62''$. Poměr vzdáleností složek A a B od středu hmotnosti je $\frac{r_A}{r_B} = 0,466$. Nalezněte hmotnosti jednotlivých složek. Určete jejich zářivé výkony, jestliže Sírirus A má $M_{\text{bol}} = 1,36 \text{ mag}$ a Sírirus B $M_{\text{bol}} = 8,9 \text{ mag}$.

převzato z [34]

Zápis:

$$T = 49,94 \text{ roků}, \pi'' = 0,379'', a'' = 7,62'', \frac{r_A}{r_B} = 0,466, M_A = ? M_{\text{Sl}}, M_B = ? M_{\text{Sl}},$$

$$M_{\text{bolA}} = 1,36 \text{ mag}, M_{\text{bolB}} = 8,9 \text{ mag}$$

Řešení:

Pro součet hmotností složek platí

$$M_A + M_B = \frac{a^3}{T^2},$$

kde

$$a = \frac{a''}{\pi''},$$

pak

$$M_A + M_B = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 T^2},$$

dosadíme číselně

$$M_A + M_B = \frac{(7,62)^3}{0,379^3 \cdot 49,94^2}.$$

Pro poměr hmotností a poměr vzdáleností složek od středu hmotností platí

$$\frac{M_B}{M_A} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{a_1}{a_2},$$

tedy

$$\frac{M_B}{M_A} = 0,466,$$

vyjádříme M_B

$$M_B = 0,466 M_A,$$

po dosazení do

$$M_A + M_B = 3,3$$

za M_B dostaneme

$$M_A + 0,466 M_A = 3,3,$$

$$1,466 M_A = 3,3,$$

$$\underline{\underline{M_A \doteq 2,25 M_{SI}}}.$$

Nyní ještě dopočítáme M_B

$$2,25 + M_B = 3,3,$$

$$\underline{\underline{M_B = 1,05 M_{SI}}}.$$

Pro zářivý výkon platí vztah

vyjádříme L

$$\log L = 0,4 (4,75 - M_{bol}),$$

$$L = 10^{0,4(4,75 - M_{bol})},$$

dosadíme číselně

$$L_A = 10^{0,4(4,75 - 1,36)},$$

$$\underline{\underline{L_A \doteq 22,7 L_{SI}}}.$$

$$L_B = 10^{0,4(4,75 - 8,9)},$$

$$\underline{\underline{L_B \doteq 0,022 L_{SI}}}.$$

Odpověď:

Hmotnosti složek jsou $2,25 M_{SI}$ a $1,05 M_{SI}$. Zářivé výkony složek jsou $22,7 L_{SI}$ a $0,022 L_{SI}$.

zpracováno podle [34]

4.3.22. Příklad

Fyzická dvojhvězda 2MASSWJ0746425+2000321, se skládá z červeného a hnědého trpaslíka. Z pozorování byla zjištěna oběžná doba $T = 10$ roků, úhlová velikost velké poloosy $a'' = 0,20''$ a roční paralaxa $\pi'' = 0,08''$. Určete součet hmotností obou složek.

převzato z [34]

Zápis:

$$T = 10 \text{ roků}, a'' = 0,20'', \pi'' = 0,08'', M_1 + M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Pro součet hmotností složek platí

$$M_1 + M_2 = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 \cdot T},$$

dosadíme číselně

$$M_1 + M_2 = \frac{0,20^3}{0,08^3 \cdot 10^3},$$

$$\underline{\underline{M_1 + M_2 = 0,16 M_{\text{Sl}}}}$$

Odpověď:

Součet hmotností obou složek je roven $0,16 M_{\text{Sl}}$.

zpracováno podle [34]

4.3.23. Příklad:

Spektroskopická dvojhvězda má oběžnou dobu $T = 1,67$ dne . U první složky byla zjištěna poloviční amplituda rychlosti $K_A = 131,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ a u druhé složky $K_B = 201,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Excentricita dráhy je rovna nule, sklon dráhy nelze určit. Proto při výpočtu statisticky volíme $\sin^3 i = \frac{2}{3}$. Odhadněte hmotnosti jednotlivých složek.

převzato z [34]

Zápis:

$$T = 1,67 \text{ dne} ; K_A = 131,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} ; K_B = 201,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} , e = 0 , \sin^3 i = \frac{2}{3} , M_A = ? M_{\text{Sl}} ,$$

$$M_B = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Známe-li poloviční amplitudy rychlostí složek v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ a oběžnou dobu ve dnech, platí pro součet hmotností složek vztah

$$(M_A + M_B) = \frac{1,036 \cdot 10^{-7} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} (K_A + K_B) \cdot T}{\sin^3 i} ,$$

dosadíme číselně

$$M_A + M_B = \frac{1,036 \cdot 10^{-7} (1 - 0^2)^{\frac{3}{2}} (131 + 201,8) \cdot 1,67}{\frac{2}{3}} ,$$

$$M_A + M_B = 9,6 M_{\text{Sl}} .$$

Pro poměr hmotností složek dvojhvězdy platí

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{K_B}{K_A} ,$$

dosadíme číselně

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{201,8}{131,0},$$

$$\frac{M_A}{M_B} \doteq 1,5.$$

Vyjádříme M_A

$$M_A = 1,5 M_B.$$

Po dosazení do

$$M_A + M_B = 9,6,$$

za M_A dostaneme

$$1,5 M_B + M_B = 9,6,$$

$$2,5 M_B = 9,6,$$

$$\underline{\underline{M_B \doteq 3,8 M_{Sl}}}.$$

Nyní dopočítáme

$$M_A + 3,84 = 9,6,$$

$$\underline{\underline{M_A \doteq 5,86 M_{Sl}}}.$$

Odpověď:

Hmotnosti složek dvojhvězdy jsou $5,8 M_{Sl}$ a $3,8 M_{Sl}$.

vlastní řešení

4.3.24. Příklad

Ze studia čárového spektra spektroskopické zákrytové dvojhvězdy byla zjištěna oběžná doba 8,6 roků. Maximální hodnota Dopplerova posuvu čáry H_α o vlnové délce $\lambda = 656,273 \text{ nm}$ pro první složku je $\Delta\lambda_1 = 0,026 \text{ nm}$, pro druhou složku $\Delta\lambda_2 = 0,052 \text{ nm}$. Ze sinusového charakteru křivky radiálních rychlostí vyplývá, že dráhy jsou blízké kruhovým. Předpokládáme sklon dráhy 90° . Určete hmotnosti jednotlivých složek dvojhvězdy.

převzato z [34]

Zápis:

$$T = 8,6 \text{ roků} = 271 \cdot 10^6 \text{ s}, \quad \lambda = 656,273 \text{ nm}, \quad \Delta\lambda_1 = 0,026 \text{ nm}, \quad \Delta\lambda_2 = 0,052 \text{ nm}, \quad i = 90^\circ,$$

$$M_1 = ? M_{\text{Sl}}, \quad M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

K výpočtu hmotností složek potřebujeme součet jejich hmotností a poměr složek.

Pro součet hmotností složek dvojhvězdy platí

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2},$$

kde

$$a = a_1 + a_2,$$

tedy

$$M_1 + M_2 = \frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2}.$$

Poloměry drah získáme ze vztahu pro výpočet obvodové rychlosti

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

kde

$$r = a,$$

tedy

$$a_1 = \frac{v_1 T}{2\pi},$$

$$a_2 = \frac{v_2 T}{2\pi}.$$

Pro radiální rychlosti při Dopplerově posuvu platí

$$v_1 = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} c, \quad v_2 = \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} c,$$

dosadíme číselně

$$v_1 = \frac{0,026 \cdot 10^{-9}}{656,273 \cdot 10^{-9}} \cdot 3 \cdot 10^8, \quad v_2 = \frac{0,052 \cdot 10^{-9}}{656,273 \cdot 10^{-9}} \cdot 3 \cdot 10^8,$$
$$v_1 \doteq 1,2 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_2 \doteq 2,4 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dosadíme číselně do vztahů pro poloměry drah složek

$$a_1 = \frac{1,2 \cdot 10^4 \cdot 271 \cdot 10^6}{2\pi}, \quad a_2 = \frac{2,4 \cdot 10^4 \cdot 271 \cdot 10^6}{2\pi},$$
$$a_1 = 5,18 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad a_2 = 10,36 \cdot 10^{11} \text{ m},$$
$$a_1 = 3,5 \text{ AU}, \quad a_2 = 6,9 \text{ AU}.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro součet hmotností

$$M_1 + M_2 = \frac{(3,5 + 6,9)^3}{8,6^2},$$
$$M_1 + M_2 = 15,21 M_{\text{Sl}}.$$

Pro poměr hmotnosti složek dvojhvězdy platí

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1},$$

dosadíme číselně

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{6,9}{3,5},$$
$$\frac{M_1}{M_2} \doteq 2.$$

Vyjádříme M_1

$$M_1 = 2 M_2,$$

po dosazení do

$$M_1 + M_2 = 15,21,$$

za M_1 dostaneme

$$M_2 + 2M_2 = 15,21,$$

$$3M_2 = 15,21,$$

$$\underline{\underline{M_2 = 5,07 M_{\text{Sl}} .}}$$

Nyní dopočítáme M_1

$$M_1 + 5,07 = 15,21,$$

$$\underline{\underline{M_1 = 10,14 M_{\text{Sl}} .}}$$

Odpověď:

Hmotnosti složek dvojhvězdy jsou $10,14 M_{\text{Sl}}$ a $5,07 M_{\text{Sl}}$.

zpracováno podle [34]

4.3.25. Příklad

Ve spektru zákrytové dvojhvězdy, jejíž jasnost se mění s periodou 3,953 dne, se spektrální čáry posouvají na opačné strany o hodnoty $(\Delta\lambda/\lambda)_1 = 1,9 \cdot 10^{-4}$ a $(\Delta\lambda/\lambda)_2 = 2,9 \cdot 10^{-4}$ od normální vlnové délky. Určete hmotnosti jednotlivých složek dvojhvězdy.

převzato z [34]

Zápis:

$$T = 3,953 \text{ dne} \doteq 342 \cdot 10^3 \text{ s}, \quad \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 = 1,9 \cdot 10^{-4}, \quad \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 = 2,9 \cdot 10^{-4}, \quad M_1 = ? M_{\text{Sl}},$$

$$M_2 = ? M_{\text{Sl}}$$

Řešení:

K výpočtu hmotností složek potřebujeme součet jejich hmotností a poměr složek.

Vztah pro součet hmotností složek dvojhvězdy je-li a v km a T ve dnech

$$M_1 + M_2 = 4,08 \cdot 10^{-20} \frac{a^3}{T^2},$$

kde

$$a = a_1 + a_2,$$

tedy

$$M_1 + M_2 = 4,08 \cdot 10^{-20} \frac{(a_1 + a_2)^3}{T}.$$

Poloměry drah získáme ze vztahu pro výpočet obvodové rychlosti

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

kde

$$r = a,$$

kdy

$$a_1 = \frac{v_1 T}{2\pi}, \quad a_2 = \frac{v_2 T}{2\pi}.$$

Pro rychlosti složek platí

$$v_1 = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 c, \quad v_2 = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 c,$$

dosadíme číselně

$$v_1 = 1,9 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^8, \quad v_2 = 2,9 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^8,$$
$$v_1 = 57000 \text{ m}, \quad v_2 = 87000 \text{ m}.$$

Dosadíme číselně do vztahů pro poloměry drah složek

$$a_1 = \frac{57000 \cdot 342 \cdot 10^3}{2\pi}, \quad a_2 = \frac{87000 \cdot 342 \cdot 10^3}{2\pi},$$
$$a_1 \doteq 3,1 \cdot 10^9 \text{ m}, \quad a_2 \doteq 4,7 \cdot 10^9 \text{ m},$$
$$a_1 = 3,1 \cdot 10^6 \text{ km}, \quad a_2 = 4,7 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro součet hmotností

$$M_1 + M_2 = \frac{(3,1 \cdot 10^6 + 4,7 \cdot 10^6)^3}{3,953},$$
$$M_1 + M_2 = 1,2 M_{\text{Sl}}.$$

Pro poměr hmotností složek platí

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1},$$

dosadíme číselně

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{4,7 \cdot 10^9}{3,1 \cdot 10^9},$$
$$\frac{M_1}{M_2} \doteq 1,5.$$

Vyjádříme M_1

$$M_1 = 1,5 M_2,$$

po dosazení do

$$M_1 + M_2 = 1,2,$$

za M_1 dostaneme

$$1,5 M_2 + M_2 = 1,2,$$
$$2,5 M_2 = 1,2,$$
$$\underline{\underline{M_2 = 0,48 M_{\text{Sl}}}}.$$

Nyní dopočítáme M_1

$$M_1 + 0,48 = 1,2,$$

$$\underline{\underline{M_1 = 0,72 M_{\text{Sl}} .}}$$

Odpověď:

Hmotnosti složek dvojhvězdy jsou $0,72 M_{\text{Sl}}$ a $0,48 M_{\text{Sl}}$.

zpracováno podle [34]

4.3.26. Příklad

U dvojhvězdné soustavy s hmotnostmi jednotlivých složek $M_1 = 4,9 M_{\text{Sl}}$ a $M_2 = 4,1 M_{\text{Sl}}$ byla zjištěna rychlost přenosu hmoty $\frac{dM_1}{dt} = 10^{-5} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1}$. Je-li oběžná doba $T = 1,94$ dne, určete její nárůst.

převzato z [34]

Zápis:

$$M_1 = 4,9 M_{\text{Sl}}, M_2 = 4,1 M_{\text{Sl}}, \frac{dM_1}{dt} = 10^{-5} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1}, T = 1,94 \text{ dne}, \frac{dT}{dt} = ?$$

Řešení:

Nárůst (změnu) oběžné doby vyjádříme ze vztahu

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = 3 \frac{dM_1}{dt} \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2},$$

tedy

$$\frac{dT}{dt} = 3T \frac{dM_1}{dt} \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2}.$$

Přenos hmoty je za rok, proto oběžnou dobu převedeme na roky

$$T = 1,94 \text{ dne} = \frac{1,94}{365} \text{ roku}.$$

Dosadíme číselně

$$\frac{dT}{dt} = 3 \cdot \frac{1,94}{365} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{4,9 - 4,1}{4,9 \cdot 4,1},$$

$$\frac{dT}{dt} \doteq \underline{\underline{6,3 \cdot 10^{-9}}}.$$

Odpověď:

Nárůst oběžné doby je $6,3 \cdot 10^{-9}$.

vlastní řešení

4.3.27. Příklad

Zkoumejme fyzický dvojhvězdný systém HZHer+HerX1 s celkovou hmotností soustavy přibližně $4 M_{\text{Sl}}$. Hmotnost první složky HZHer je odhadována na $2,5 M_{\text{Sl}}$. Předpokládáme, že při dalším vývoji se z této hvězdy po explozi obálky o hmotnosti asi $1 M_{\text{Sl}}$ stane neutronová hvězda s hmotností $1,5 M_{\text{Sl}}$. Druhou složkou soustavy je neutronová hvězda HerX1 o hmotnosti $1,5 M_{\text{Sl}}$. Zůstane dvojhvězdný systém zachován?

převzato z [34]

Zápis:

$$M = 4 M_{\text{Sl}}, M_1 = 2,5 M_{\text{Sl}}, M_Z = 1,5 M_{\text{Sl}}, M_2 = 1,5 M_{\text{Sl}}, \text{zachování dvojhvězdy} = V ?$$

Řešení:

Pro zachování dvojhvězdy musí platit podmínka

$$M_1 - M_2 < 2 M_Z,$$

dosadíme číselně

$$2,5 - 1,5 < 2 \cdot 1,5,$$

$$\underline{\underline{1 < 3.}}$$

Odpověď:

Dvojhvězda zůstane zachována.

zpracováno podle [34]

4.3.28. Příklad

Neutronovou hvězdu – Pulsar s hmotností $2 M_{\text{Sl}}$, poloměrem 20 km a periodě 0,15 s obklopuje akreční disk, vznikající přetokem hmoty z druhé hvězdy s tempem akrece přibližně $10^{-8} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1}$. Odhadněte dT/dt pro tento pulsar.

převzato z [34]

Zápis:

$$M_1 = 2 M_{\text{Sl}}, R = 20 \text{ km} = 20 \cdot 10^3 \text{ m}, T = 0,5 \text{ s},$$

$$\frac{dM}{dt} = 10^{-8} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1} = 10^{-8} \cdot \frac{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}, \frac{dT}{dt} ?$$

Řešení:

Pro zářivý výkon při akreci hmoty platí

$$L \doteq G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt},$$

a pro zářivý výkon pulsaru

$$L \doteq \frac{8}{5} \pi^2 MR^2 T^{-3} \frac{dT}{dt},$$

tedy

$$G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt} = \frac{8}{5} \pi^2 MR^2 T^{-3} \frac{dT}{dt}.$$

Vyjádríme změnu periody pulsaru

$$\frac{dT}{dt} = \frac{5}{8} \frac{GT^3}{\pi^2 R^3} \frac{dM}{dt},$$

dosadíme číselně

$$\frac{dT}{dt} = \frac{5}{8} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,15^3}{\pi^2 \cdot (20 \cdot 10^3)^3} \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{365 \cdot 24 \cdot 3600},$$

$$\frac{dT}{dt} \doteq \underline{\underline{1,1 \cdot 10^{-12}}}.$$

Odpověď:

Změna periody pulsaru je přibližně $1,1 \cdot 10^{-12}$.

zpracováno podle [34]

5. Stadia vývoje hvězd

5.1. Teorie vývoje hvězd

Vznik hvězdy

Nejprve je obří chladné, molekulové mračno. Tedy část mezihvězdného prostředí, které vyplňují drobné částice plynu a prachu. Z většiny jde o atomární vodík a 1 %-10 % prach. Rozměry mračen se pohybují v rozmezích 10 pc – 50 pc.

Vlivem vnějšího působení dochází ke změně podmínek, v mračnu převládne vliv gravitace a začíná kolaps.

Mračna obsahují shluky asi 0,1 pc a hmotnosti řádově M_{SI} . Shluky jsou hustší a méně stabilní než zbylé části mračna, kolabují dříve a rychleji. Postupně se celé mračno rozdělí na hustá jádra, tzv. globule, která se již dále nedělí, ale jejich smršťování se nezastaví.

Vývojové období mezi globulí a hvězdou se nazývá *protohvězda*. Centrální teplota 10^4 K, hustota ve středu 10^{18} částic/m³.

Před příchodem na hlavní posloupnost přichází tzv. Hayashiho vývojová cesta. Skončilo rychlé smršťování jádra. Hlavní část energie pochází z jádra, ale teplota ještě nestačí k zapálení termojaderných reakcí. Energie je přenášena prouděním. V H - R diagramu se pohybuje u Hayashiho hranice. Centrální teplota postupně narůstá, až k zapálení termojaderné reakce. Protohvězda se nachází ve stadiu T Taury. Dochází ke zrození nové hvězdy.

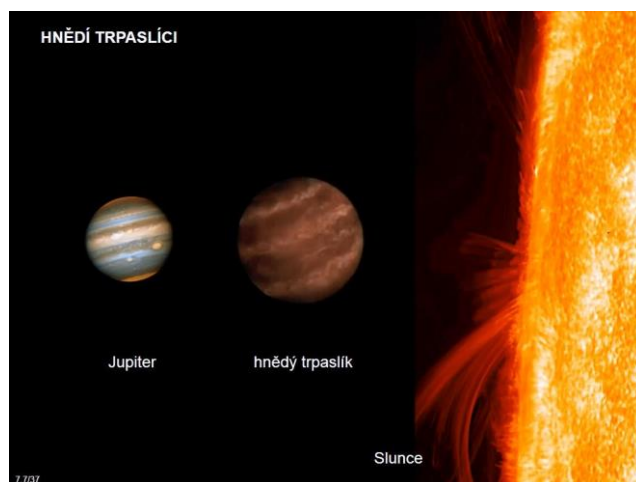
Když energie z termonukleárních reakcí převáží produkci z gravitačního smršťování, říkáme, že hvězda dosáhla *hlavní posloupnosti nulového stáří*. Hvězdy jsou ve stadiu hlavní posloupnosti 80 – 90% aktivního života.

U protohvězd s velkou hmotností probíhá gravitační kolaps velmi rychle. Při hmotnosti $30 M_{\text{SI}}$ je kratší než 10 000 let. Centrální teplota je od 10^7 K.

Hnědý trpaslík

Protohvězda s malou hmotností je tzv. Hnědý trpaslík. Je to hvězda s hmotností $(0,07 - 0,013) M_{\text{SI}}$, u které centrální teplota nedosáhne teplot $8 \cdot 10^6$ K, nutných pro vzplnutí termonukleárních reakcí. Gravitační smršťování protohvězdy o malé hmotnosti skončí vlivem elektronové degenerace. Pouze několik milionů roků probíhá hoření deuteria. Povr-

chová teplota hnědého trpaslíka nepřesáhne 2800 K. Na obrázku 8 je srovnání velikosti hnědého trpaslíka s planetou a hvězdou.

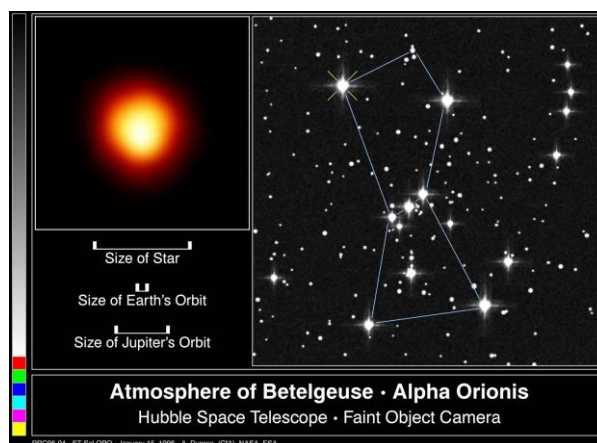


Obrázek 8: Hnědý trpaslík. Obrázek převzat z [29]

Od hvězd hlavní posloupnosti po konec stadia veleobrů

Hvězda hlavní posloupnosti v průběhu vývoje zvyšuje zářivý výkon. Mění se chemické složení ve hvězdě. Nejdříve se v jádře spaluje vodík na hélium. Hvězdy hlavní posloupnosti jsou stabilní. Charakteristiky hvězd se v této fázi vývoje mění jen málo. Doba života hvězdy na hlavní posloupnosti se pohybuje řádově miliony až stovky miliard let. U nehmotnějších nejkratší dobu.

Postupně se zapalují další reakce, jádro se zmenšuje, začíná vyrábět více energie. Obal dostává více energie, dochází ke zvětšování obálky a hvězda se posouvá až do oblasti červených obrů. Na obrázku 9 je znázorněna poloha a velikost rudého obra Betelgeuse v souhvězdí Orion.



Obrázek 9: Rudý obr Betelgeuse. Obrázek převzat z [17]

Hvězdy s hmotností pod $0,5 M_{\text{Sl}}$ do oblasti obrů nepřejdou. Kvůli elektronové degeneraci se nezvýší teplota tak, aby došlo k zapálení héliových reakcí. Z hvězdy se pravděpodobně stane héliový černý trpaslík.

Hvězdy hlavní posloupnosti s hmotností v rozmezí $(0,08 - 0,3) M_{\text{Sl}}$ jsou nejpočetnějším typem hvězd. Jsou to červení trpaslíci. Na hlavní posloupnosti jsou více než $10 \cdot 10^{10}$ roků. Na obrázku 10 je znázorněný úsporný červený trpaslík s názvem Barnardova hvězda.



Obrázek 10: Barnardova hvězda. Obrázek převzat z [18]

Červení trpaslíci malé hmotnosti po ukončení pohybu na hlavní posloupnosti se místo stadia červených obrů stanou modrými trpaslíky.

Po přechodu do oblasti červených obrů se zvyšuje hmotnost jádra a teplota v jádře vzroste až na několik set milionů stupňů. V jádře probíhají héliové reakce a hvězda se dostává mezi hvězdy nejvyšší teploty. Přitom se může postupně střídavě zvyšovat a snižovat zářivý výkon.

Ke konci stadia obrů, případně veleobrů, hvězda přichází o velké množství hmoty z obalu.

Hvězdný vítr

Hvězdný vítr je proud částic unikajících z hvězdy. Velký únik látky je hlavně u velmi hmotných hvězd s velkým zářivým výkonem. Hmotnost hvězdy se hvězdným větrem, tedy únikem hmoty, může značně snížit.

Silný hvězdný vítr nastává u rozměrných červených obrů, veleobrů nebo ve stadiu hvězdy tzv. asymptotické větve obrů s nízkým povrchovým gravitačním zrychlením.

Hvězdy mohou ztratit v extrémním případě až $10^{-6} M_{\odot}$ ročně. Velmi silný hvězdný vítr vytvářejí například Wolf-Rayetovy hvězdy. Na obrázku 11 je znázorněna hvězda WR124.



Obrázek 11: Hvězda WR124. Obrázek převzat z [27]

Pro rychlost ztráty hmoty hvězdným větrem odvodil Dietr Reimers tzv. Reimersův vztah

$$\frac{dM}{dt} = \eta_w \cdot 4 \cdot 10^{-13} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1} \frac{R}{R_{\text{Sl}}} \cdot \frac{L}{L_{\text{Sl}}} \left(\frac{M}{M_{\text{Sl}}} \right)^{-1},$$

kde η_w lze považovat za volný parametr. Vztah ale nelze použít pro všechny typy hvězd v každém stadiu. $\frac{dM}{dt}$ je úbytek hmotnosti hvězdy, $\frac{L}{L_{\text{Sl}}}$ je zářivý výkon hvězdy v jednotkách L_{Sl} , $\frac{M}{M_{\text{Sl}}}$ je hmotnost hvězdy v jednotkách M_{Sl} a $\frac{R}{R_{\text{Sl}}}$ je poloměr hvězdy v jednotkách R_{Sl} .

Hmotné hvězdy s hmotností v rozmezí $(0,5 - 11) M_{\text{Sl}}$ po zapálení uhlíku a kyslíku pomocí hvězdného větru přijdou o svoji obálku dříve, než jádro projde úplným vývojem.

Jádro, jehož hmotnost je do $1,4 M_{\text{Sl}}$ degeneruje a hvězda se stává ultrafialovým bílým trpaslíkem. Hvězda nakonec skončí jako černý degenerovaný trpaslík.

U hvězd nad $11 M_{\text{Sl}}$ není obálka odnesena jako hvězdný vítr. V jádru hvězdy dochází také k přeměně na železo. Hmotnost v jádru stále přibývá, jádro se zmenšuje. Toto období trvá krátce, jen dny. Podle hmotnosti a původního složení projde hvězda výbuchem jako nova, supernova nebo skončí některým ze závěrečných stadií, bílý trpaslík, neutronová hvězda, černá díra.

Stadium nova, supernova

Nova

Nova je stadium, které se vyznačuje opakujícím se zvyšováním jasnosti hvězdy, způsobeném výbuchem. Toto stadium nastává, když je složka dvojhvězdy ve stadiu bílého trpaslíka a jejím průvodcem je červený obr. Jasnost při výbuchu vzroste stokrát až tisíckrát. Zvýšení jasnosti trvá až několik měsíců.

Nejprve dochází k přenosu hmoty bohaté na vodík z červeného obra. Přitom je stlačován, elektrony ve spodní části vrstvy degenerují a dochází k nárůstu teploty obálky. Po překročení teploty $2 \cdot 10^7$ K začne probíhat CNO cyklus. Po překročení 10^8 K se začne obálka rozpínat. Jasnost trpaslíka postupně roste, pokud nedosáhne Eddingtonovy kritické světelnosti

$$L_{\text{ed}} = \frac{4\pi cGM}{\kappa},$$

kde M je hmotnost hvězdy (centrálního tělesa), κ je opacita hvězdy. Rozpínání obálky je konstantní a hmota je zářením vytlačována v opticky hustém větru. Při fotosférickém poloměru $100 R_{\text{sl}}$ nastává optické maximum.

Po odvržení většiny obálky dochází k ochlazování. Po přeměně většiny vodíku na hélium se trpaslík několik let vrací do stavu před výbuchem. Při dalším přenosu hmoty se vše opakuje.

Supernova

Supernova je hvězdné stadium, kdy hvězda podobně jako ve stadiu novy exploduje. Exploduje a tedy i jasnost hvězdy je zde větší. Jasnost se zvyšuje miliardkrát. Na obrázku 12 je zachycena hvězda před výbuchem a po něm.



Obrázek 12: Supernova 1987A. Obrázek převzat z [23]

U supernovy dochází k výbuchu, když hmotnost degenerovaného jádra překročí tzv. Chandrasekharovu mez $M_{\text{Ch}} \cong 1,44 M_{\text{Sl}}$, počáteční poloměr je $R_{\text{WD}} \cong 4000 \text{ km}$, konečný poloměr $R_{\text{NS}} \cong 10 \text{ km}$.

Pro uvolněnou energii platí

$$\Delta E \cong E_{\text{WD}} - E_{\text{NS}} = -\frac{3}{10} G \left(\frac{M_{\text{Ch}}^2}{R_{\text{WD}}} - \frac{M_{\text{Ch}}^2}{R_{\text{NS}}} \right) \cong 10^{46} \text{ J}.$$

K překročení Chandrasekharovy meze dochází dvěma způsoby.

První způsob vzniku supernovy je z bílého trpaslíka ve dvojhvězdě.

Mluvíme o supernově typu I. Jako ve stadiu novy dochází k přenosu hmoty na trpaslíka. Roste hmotnost trpaslíka a zmenšují se jeho rozměry. Přitom se stále více zahřívá, začnou probíhat termonukleární reakce a teplota ještě více roste až nad teplotu degenerace. Hmota se změní v plyn, prudce expandující do prostoru. Polovina uhlíku a kyslíku se změní na železo. Nakonec je při explozi většina, nebo všechen materiál hvězdy rozhozen do prostoru rychlostí až $10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Druhý způsob vzniku supernovy je u masivní hvězdy, která ve svém jádru vyčerpala palivo a působením gravitace se začala hroutit. Při kolapsu roste teplota a hustota, postupně se zapalují termonukleární zdroje. Po překročení kritické hmotnosti dochází ke kolapsu a spojování volných elektronů s protony a postupně tak vzniká neutronová hvězda.

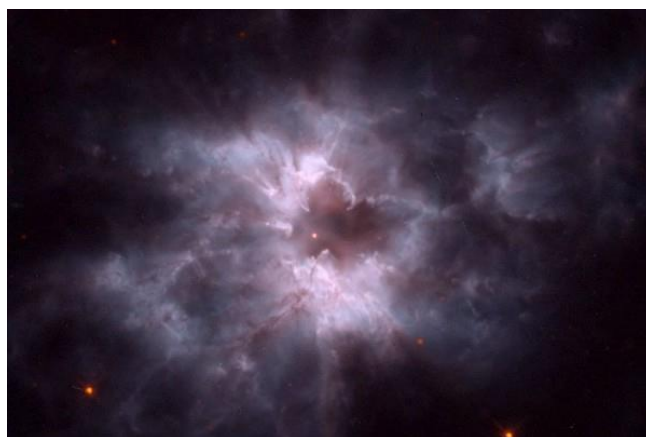
Hmota hvězdy získá energii od neutrin, zahřeje se na vysokou teplotu. Vzniká rázová vlna šířící se na povrch, kde způsobí explozi vnějších částí hvězdy do prostoru. Přitom dochází k velkému zjasnění. Po výbuchu supernovy zůstává rotující neutronová hvězda.

Stadium bílý trpaslík, neutronová hvězda, černá díra

Záření hvězd, jako je Slunce, je výsledkem termonukleární reakce v jejich jádrech. Termonukleární reakce udržuje teplotu a doplňuje energii ztracenou při záření. Po vyčerpání jaderného paliva dojde ke kolapsu hvězdy, nebo implozi v důsledku vlastní gravitace. Potom podle hmotnosti, v uvedeném pořadí, skončí hvězda jako bílý trpaslík, neutronová hvězda, nebo černá díra.

Bílý trpaslík

Pokud hmotnost jádra nepřekročí $1,4 M_{\text{Sl}}$, zůstane jako bílý trpaslík. Rozměry trpaslíků jsou srovnatelné se Zemí, hmotnost je srovnatelná s hmotností Slunce. Průměrná hustota bílého trpaslíka se pohybuje kolem $10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Tlak degenerovaného plynu brání, aby trpaslík trvale kolaboval působením gravitační síly. Na obrázku 13 je zachycena planetární mlhovina NGC 2440 v jejímž středu je bílý trpaslík.



Obrázek 13: Bílý trpaslík HD62166. Obrázek převzat z [28]

Neutronová hvězda

U hvězdy došlo k překročení Chandrasekharovy meze a v jádru s převahou ^{56}Fe , nastala reakce $p + e \rightarrow n + \nu$. Při hustotě $10^{15} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ tvoří jádro převážně neutrony a hvězda je ve stadiu, kdy ji nazýváme neutronová hvězda. Maximální hmotnost neutronových hvězd je 1 až $3 M_{\text{Sl}}$. Neutronové hvězdy mají pevné jádro krystalické struktury, kolem něhož může být látka v supratekutém stavu. Může být s pevným povrchem. Při zachování rotačního momentu může být doba jedné otáčky neutronové hvězdy menší než tisícina sekundy. Neutronové hvězdy pak nazýváme *pulsary*. Na obrázku 14 je zachycen pulsar v krabí mlhovině.



Obrázek 14: Pulsar uprostřed krabí mlhoviny. Obrázek převzat z [24]

Pulsar má silné magnetické pole, které může dosahovat řádově $B \sim 10^8$ T . Pulsar vyzařuje světlo v úzkém kuželu, pro pozorovatele jako světlo u majáku. Magnetické pole přenáší energii nabitým částicím, které magnetická síla urychluje. Tím se snižuje kinetická rotační energie pulsaru E_{rot} , dána vztahem

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} MR^2 \frac{8}{5} \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 .$$

Při konstantním poloměru je změna energie dána vztahem

$$\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -\frac{8}{5} \pi^2 MR^2 T^{-3} \frac{dT}{dt} ,$$

kde $\frac{dT}{dt}$ je změna periody rotace pulsaru. Pokud vyjádříme rotační energii pomocí momentu setrvačnosti J hvězdy, platí

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{2\pi^2 J}{T^2}$$

a úbytek rotační energie je tedy dán vztahem

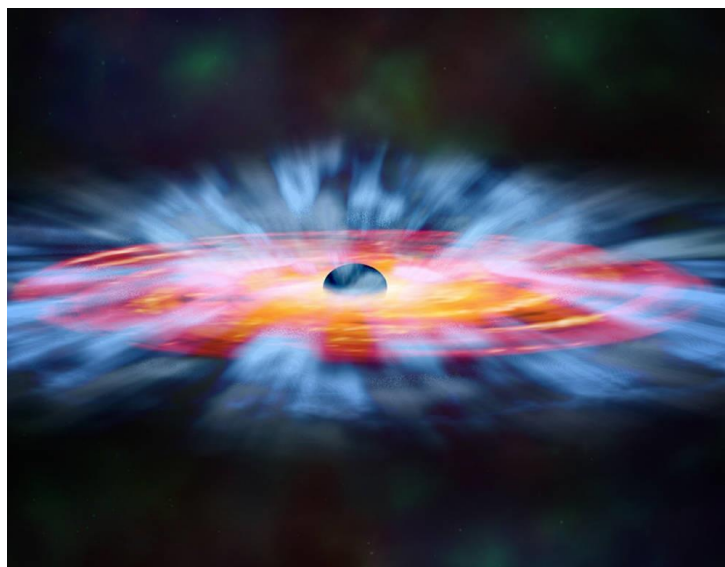
$$\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -4\pi^2 J T^{-3} \frac{dT}{dt} .$$

Černá díra

Pokud hvězdě s počáteční hmotností od $25 M_{\text{sl}}$ ke konci života zůstane většina hmoty, nebo se rychle gravitačně zhroutlí, zvládne gravitační síla překonat tlakové síly degenerovaných neutronů, hroucení se nezastaví. Hustota vzroste nad $10^{14} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a poloměr se zmenší pod tzv. Schwarzschildův poloměr r_s , daný vztahem

$$r_s = \frac{2MG}{c^2},$$

kde M je hmotnost tělesa a c rychlost světla. Žádný foton se nedostane mimo oblast o poloměru r_s . Proto nazýváme toto stadium černá díra. Černé díry nelze pozorovat přímo, ale můžeme je zjistit z jejich gravitačního působení na okolní tělesa. Na obrázku 14 je umělecká ilustrace akrečního disku kolem černé díry.



Obrázek 15: Akreční disk kolem černé díry. Obrázek převzat z [22]

5.2. Základní vztahy teorie vývoje hvězd

Vztah pro absolutní hvězdnou velikost

$$M = m + 5 - 5 \log r ,$$

kde m je zdánlivá hvězdná velikost, r vzdálenost hvězdy v parsecích.

Vztah pro kinetickou a potenciální energii gravitačně vázaných soustav (tzv. viriálová věta),

$$3(\gamma - 1)E_k + E_p = 0 ,$$

kde u plazmatu hvězd $\gamma = \frac{5}{3}$, E_k je celková kinetická energie tepelného pohybu částic tvořících hvězdu.

Vztah pro gravitační potenciální energii,

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{R} .$$

Reimersův vztah pro ztrátu hmoty větrem

$$\frac{dM}{dt} = \eta_w \cdot 4 \cdot 10^{-13} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1} \frac{R}{R_{\text{Sl}}} \frac{L}{L_{\text{Sl}}} \left(\frac{M_*}{M_{\text{Sl}}} \right)^{-1} ,$$

kde R je poloměr hvězdy, L zářivý výkon hvězdy, M_* hmotnost hvězdy, η_w je účinnost.

Vztah pro Eddingtonovu limitu zářivého výkonu,

$$L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi c G M}{\kappa} ,$$

kde M je hmotnost centrálního tělesa.

Vztah pro gravitační potenciální energii hvězdy sférického tvaru při konstantní hustotě,

$$E_p = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} .$$

Vztah pro výpočet poloměru hvězdy v jednotkách poloměru Slunce R_{Sl} pomocí absolutní bolometrické hvězdné velikosti M_{bol} a termodynamické teploty T v kelvinech,

$$\log \frac{R}{R_{\text{Sl}}} = 8,5 - 0,2 M_{\text{bol}} - 2 \log \{T\} .$$

Vztah pro počet rozpadů za 1s v 1kg vzorku,

$$A = N\lambda = \frac{\ln 2}{\tau},$$

kde N je počet atomů a λ je rozpadová konstanta, τ je poločas rozpadu.

Vztah pro zářivý výkon kosmického tělesa při akreci hmoty,

$$L \cong G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt},$$

kde $\frac{dM}{dt}$ je rychlost akrece, množství dopadající hmoty za 1s na povrch hvězdy, M je hmotnost, R je poloměr hvězdy.

Vztah pro maximální hodnotu teploty disku při akreci hmoty,

$$T_{\max} = 0,488 \left(\frac{3GM \frac{dM}{dt}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Vztah pro zářivý výkon hvězdy

$$L = 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\text{ef}}^4 = 4\pi \cdot r^2 \cdot F_{\text{bol}},$$

kde R je poloměr hvězdy, σ Stefanova–Boltzmannova konstanta, T_{ef} je efektivní (povrchová) teplota, r vzdálenost hvězdy, F_{bol} hustota zářivého toku.

Vztah pro moment hybnosti

$$L = m\omega r^2.$$

Vztah pro moment hybnosti černé díry

$$L_{\max} = \frac{GM^2}{c}.$$

Vztah vyjadřující 3. Keplerův zákon

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}.$$

5.3. Příklady k teorii vývoje hvězd – pozdní stadia, novy, supernovy

5.3.1. Příklad

24. února 1987 explodovala supernova SN 1987 A ve vzdálenosti 51,474 kPa a dosáhla absolutní hvězdné velikosti $-15,5$ magnitudy . Bylo možné ji pozorovat bez dalekohledu.

Zápis:

$$r = 51,474 \text{ kPa}, \quad M = -15,5^m, \quad m = ?^m$$

Řešení:

Bez dalekohledu lze pozorovat hvězdy se zdánlivou hvězdnou velikostí do 6^m .

Musí platit

$$m \leq 6 .$$

Platí vztah

$$M = m + 5 - 5 \log r ,$$

tedy

$$m = M - 5 + 5 \log r ,$$

dosadíme číselně, vzdálenost v parsecích

$$m = -15,5 + 5 \log 51,474 \cdot 10^3 ,$$

$$\underline{\underline{m = 3 .}}$$

Odpověď:

Zdánlivá hvězdná velikost supernovy byla menší než 6, proto byla viditelná i bez dalekohledu.

vlastní příklad

5.3.2. Příklad

Určete gravitační potenciální energii vnější konvektivní obálky červeného obra Arktura, u kterého je hmotnost jádra $M_J = 0,8 M_{S1}$ a vnější obálky $M_{ob} = 0,3 M_{S1}$, poloměr dosahuje $30 R_{S1}$. Stanovte celkovou energii hvězdy.

převzato z [34]

Zápis:

$$M_J = 0,8 M_{S1}, M_{ob} = 0,3 M_{S1}, R = 30 R_{S1}, E = ? J$$

Řešení:

Pro celkovou energii platí

$$E = E_k + E_p.$$

Gravitační potenciální energii dostaneme ze vztahu

$$E_p = -G \frac{M_J M_{ob}}{R}.$$

Protože obálka a jádro jsou gravitačně vázané, platí pro kinetickou a potenciální energii viriálová věta

$$3(\gamma - 1) E_k + E_p = 0,$$

kde je pro plazma

$$\gamma = \frac{5}{3},$$

tedy

$$2 E_k + E_p = 0,$$

vyjádříme E_k

$$E_k = -\frac{E_p}{2}.$$

Po dosazení do vztahu pro celkovou energii dostaneme

$$E = \frac{-E_p}{2} + E_p,$$

$$E = \frac{E_p}{2},$$

tedy

$$E = -G \frac{M_J M_{ob}}{2 R},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg a poloměr v m

$$E = 6,670 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,8 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot 0,3 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 30 \cdot 6,963 \cdot 10^8},$$

$$\underline{\underline{E \doteq -1,5 \cdot 10^{39}}}$$

Odpověď:

Celková energie hvězdy je $-1,5 \cdot 10^{39}$ J.

zpracováno podle [34]

5.3.3. Příklad

Modelový červený obr má poloměr $20 R_{S1}$. Kompaktní jádro o hmotnosti $M_J = 0,6 M_{S1}$ je obklopeno rozsáhlou vnější konvektivní obálkou o hmotnosti $M_{ob} = 0,2 M_{S1}$. Určete gravitační potenciální energii obálky! Aplikací viriálové věty, za předpokladu $\gamma = \frac{5}{3}$ stanovte tepelnou energii E_k plynu. Za zjednodušujícího předpokladu, že obálka je složena z plně ionizovaného vodíku, určete velikost energie, která by se uvolnila při ochlazování a rekombinaci na neutrální vodík. Rekombinační energie je 13,6 eV.

převzato z [34]

Zápis:

$$R = 20 R_{S1}, M_J = 0,6 M_{S1}, M_{ob} = 0,2 M_{S1}, \gamma = \frac{5}{3}, E_{rek} = 13,6 \text{ eV}, E_p = ? \text{ J}, E_k = ? \text{ J},$$

$$E_{ob,rek} = ? \text{ J}$$

Řešení:

Protože obálka a jádro jsou gravitačně vázané, platí pro kinetickou a potenciální energii viriálová věta

$$3(\gamma - 1) E_k + E_p = 0,$$

kde je pro plazmu

$$\gamma = \frac{5}{3},$$

tedy

$$2E_k + E_p = 0,$$

vyjádříme E_k

$$E_k = \frac{-E_p}{2}.$$

Gravitační potenciální energii dostaneme ze vztahu

$$E_p = -G \frac{M_J M_{ob}}{R},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg a poloměr v m

$$E_p = -6,670 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,6 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot 0,2 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{20 \cdot 6,963 \cdot 10^8},$$

$$\underline{\underline{E_p \doteq -2,3 \cdot 10^{39}}},$$

$$E_k \doteq -\frac{-2,3 \cdot 10^{39}}{2},$$

$$\underline{\underline{E_k \doteq 1,15 \cdot 10^{39}}}.$$

Celková rekombinační energie je součin rekombinačních energií všech iontů vodíku.

$$E_{\text{ob,rek}} = \frac{M_{\text{ob}}}{m_M} \cdot E_{\text{rek}},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg, energii v J

$$E_{\text{ob,rek}} = \frac{0,2 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{1,674 \cdot 10^{-27}} \cdot 13,6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19},$$

$$\underline{\underline{E_{\text{ob,rek}} \doteq 5,2 \cdot 10^{38} \text{ J}}}.$$

Odpověď:

Gravitační potenciální energie obálky je $-2,3 \cdot 10^{39}$, tepelná energie plynu je $1,15 \cdot 10^{39}$ a celková rekombinační energie obálky je $5,2 \cdot 10^{38} \text{ J}$.

zpracováno podle [34]

5.3.4. Příklad

Hmotnost jádra atomu uhlíku ${}^{12}_6\text{C}$ je $m_c = 1,99 \cdot 10^{-26}$ kg, hořčíku ${}^{24}_{12}\text{Mg}$ je $m_{\text{Mg}} = 3,96 \cdot 10^{-26}$ kg. Předpokládejte, že hvězda o hmotnosti $M = 10 M_{\text{Sl}}$ a zářivém výkonu $L = 10^7 L_{\text{Sl}}$ v nitru přemění 10% hmotnosti uhlíku na hořčík v průběhu svého vývoje. Jaká je doba života hvězdy v tomto vývojovém stadiu?

převzato z [34]

Zápis:

$m_c = 1,99 \cdot 10^{-26}$ kg, $m_{\text{Mg}} = 3,96 \cdot 10^{-26}$ kg, $M = 10 M_{\text{Sl}}$, $L = 10^7 L_{\text{Sl}}$, $M_p = 0,1 M$,
 $t = ?$ roků

Řešení:

Předpoklad: zářivý výkon je konstantní a odpovídá energii, která se ve hvězdě uvolní

$$L = \frac{E}{t}.$$

Vyjádříme t

$$t = \frac{E}{L}.$$

Uvolněnou energii spočteme ze vztahu

$$E = mc^2,$$

kde m je rozdíl hmotností všech prvků, které se přemění a které vzniknou

$$m = \left(Nm_c - \frac{N}{2} m_{\text{Mg}} \right),$$

tedy

$$E = \left(Nm_c - \frac{N}{2} m_{\text{Mg}} \right) \cdot c^2,$$

N je počet atomů uhlíku

$$N = \frac{0,1 M}{m_c},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg

$$N = \frac{0,1 \cdot 10 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{1,99 \cdot 10^{-26}},$$

$$N \doteq 10^{56}.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro E

$$E = \left(10^{56} \cdot 1,99 \cdot 10^{-26} - \frac{10^{56}}{2} \cdot 3,96 \cdot 10^{-26} \right) \cdot (299,8 \cdot 10^6)^2,$$

$$E \doteq 9 \cdot 10^{44}.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro t , zářivý výkon v W

$$t = \frac{9 \cdot 10^{44}}{10^7 \cdot 3,86 \cdot 10^{26}},$$

$$\underline{\underline{t \doteq 2,3 \cdot 10^{11} \text{ s} \doteq 7,4 \cdot 10^4 \text{ roků.}}}$$

Odpověď:

V tomto vývojovém stadiu je doba života hvězdy $7,4 \cdot 10^4$ roků.

zpracováno podle [34]

5.3.5. Příklad

Zářivý výkon hvězdného větru je dán jeho kinetickou energií $L_v = \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} v^2$ za sekundu. Odhadněte zářivý výkon hvězdného větru o rychlosti $v \cong 25 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ u velebobra Betelgeuze $15 M_{\text{Sl}}, 1160 R_{\text{Sl}}, 2 \cdot 10^5 L_{\text{Sl}}$.

převzato z [34]

Zápis:

$$v \cong 25 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, M = 15 M_{\text{Sl}}, R = 1160 R_{\text{Sl}}, L = 2 \cdot 10^5 L_{\text{Sl}}$$

Řešení:

Pro ztrátu hmoty větrem platí Reimerův vztah

$$\frac{dM}{dt} \cong \eta_w \cdot 4 \cdot 10^{-13} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1} \cdot \frac{R}{R_{\text{Sl}}} \cdot \frac{L}{L_{\text{Sl}}} \left(\frac{M}{M_{\text{Sl}}} \right)^{-1},$$

dosadíme číselně, η_w volíme jedna, hodnoty jsou v jednotkách Slunce

$$\frac{dM}{dt} = 4 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{2 \cdot 10^{15} \cdot 1160}{15},$$

$$\frac{dM}{dt} = 6 \cdot 10^{-6} M_{\text{Sl}}.$$

Zářivý výkon

$$L_v = \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} v^2,$$

dosadíme číselně

$$L_v = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot (25 \cdot 10^3)^2,$$

$$\underline{\underline{L_v \cong 3,7 \cdot 10^{33} \text{ W}}}$$

Odpověď:

Zářivý výkon hvězdného větru je $3,7 \cdot 10^{33} \text{ W}$.

zpracováno podle [34]

5.3.6. Příklad

Uvažujme vrstvu vodíku o hmotnosti $10^{-6} M_{\text{Sl}}$ na povrchu bílého trpaslíka a hmotnost bílého trpaslíka $1 M_{\text{Sl}}$. Vodík se při termonukleárních reakcích přemění na hélium. Jak dlouhou dobu bude nova zářit, jestliže předpokládáme, že její zářivý výkon je roven eddingtonovskému? V chemickém složení uvažujeme pouze vodík, pro opacitu platí $\kappa \cong (1 + X)0,02 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$, při $X = 1$ dostaneme $\kappa \cong 0,04 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$.

převzato z [34]

Zápis:

$$M_{\text{H}} = 10^{-6} M_{\text{Sl}}, M = M_{\text{Sl}}, \kappa \cong 0,04 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}, t = ? \text{ roků}$$

Řešení:

Předpokládáme, že zářivý výkon odpovídá uvolněné energii

$$L_{\text{ED}} = \frac{E}{t}.$$

Vyjádríme t

$$t = \frac{E}{L_{\text{ED}}}.$$

Uvolněnou energii spočteme ze vztahu

$$E = mc^2,$$

kde m je rozdíl hmotností všech prvků, které se přemění a které vzniknou

$$m = Nm_{\text{H}} - \frac{N}{4}m_{\text{He}},$$

tedy

$$E = N \left(m_{\text{H}} - \frac{m_{\text{He}}}{4} \right) c^2,$$

N je počet atomů vodíku

$$N = \frac{M_{\text{H}}}{m_{\text{H}}},$$

pak

$$E = \frac{M_{\text{H}}}{m_{\text{H}}} \left(m_{\text{H}} - \frac{m_{\text{He}}}{4} \right) \cdot c^2,$$

dosadíme číselně, za hmotnosti m_{H} a m_{He} jejich relativní atomové hmotnosti násobené m_{u} .

$$E = \frac{10^{-6} \cdot 1,989 \cdot 10^3}{1,0079 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27}} \left(1,0079 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27} - \frac{4,0026 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27}}{4} \right) \cdot (299,8 \cdot 10^6)^2,$$

$$E \doteq 1,3 \cdot 10^{39}.$$

Zářivý výkon spočteme pomocí vztahu

$$L_{\text{ED}} = \frac{4\pi GcM}{\kappa},$$

dosadíme číselně

$$L_{\text{ED}} = \frac{4\pi \cdot 6,670 \cdot 10^{-11} \cdot 299,8 \cdot 10^6 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{0,04},$$

$$L_{\text{ED}} \doteq 1,2 \cdot 10^{31}.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro t

$$t = \frac{1,3 \cdot 10^{39}}{1,2 \cdot 10^{31}},$$

$$\underline{\underline{t \doteq 1,1 \cdot 10^8 \text{ let} \doteq 3 \text{ roky.}}}$$

Odpověď:

Nova bude zářit 3 roky.

zpracováno podle [34]

5.3.7. Příklad

Po výbuchu bílého trpaslíka o hmotnosti $1 M_{\text{Sl}}$ a poloměru $10^{-2} R_{\text{Sl}}$ se vzdaluje 10 % pokud je % jako podstatné jméno, je před ním mezera. Pokud je to přídavné jméno, jako např. 20% vodíkové vrstvy o hmotnosti $10^{-5} M_{\text{Sl}}$ rychlostí $1 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Kolikrát je absolutní hodnota gravitační potenciální energie trpaslíka větší než kinetická energie vzdalující se části vrstvy?

Zápis:

$$M = 1 M_{\text{Sl}}, R = 10^{-2} R_{\text{Sl}}, M_{\text{H}} = 10^{-5} M_{\text{Sl}}, v = 1 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, M_{\text{ex}} = 0,1 M_{\text{H}}, \frac{|E_{\text{p}}|}{E_{\text{k}}} = ?$$

Řešení:

Pro tělesa sférického tvaru, za předpokladu konstantní hustoty platí pro E_{p} vztah

$$E_{\text{p}} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}.$$

Kinetickou energii vzdalující se části vodíkové vrstvy spočteme ze vztahu

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2} M_{\text{ex}} v^2,$$

tedy

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2} \cdot 0,1 M_{\text{H}} v^2.$$

Dosadíme za energie v podílu

$$\frac{|E_{\text{p}}|}{E_{\text{k}}} = \frac{\left| -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} \right|}{\frac{1}{2} 0,1 M_{\text{H}} v^2},$$

dosadíme číselně

$$\frac{|E_{\text{p}}|}{E_{\text{k}}} = \frac{\left| -\frac{3}{5} \cdot 6,670 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1,989 \cdot 10^{30})^2}{10^{-2} \cdot 6,963 \cdot 10^8} \right|}{\frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 10^{-5} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot (10^6)^2},$$

$$\frac{|E_{\text{p}}|}{E_{\text{k}}} \doteq 10^6.$$

Odpověď:

Potenciální energie bílého trpaslíka je řádově 10^6 krát větší než kinetická energie vzdalující se části vodíkové vrstvy.

vlastní příklad

5.3.8. Příklad

Při výbuchu novy platí zákon zachování hybnosti pro expandující obálku ve tvaru $\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho + M_0\right)v = M_0 v_0$, kde r je vzdálenost obálky od hvězdy, ρ je hustota mezihvězdného prostředí, M_0 je hmotnost obálky, v je rychlost obálky ve vzdálenosti r a v_0

počáteční rychlost expanze obálky. Dosazením $v = \frac{dr}{dt}$ a následnou integrací obdržíme

$\frac{1}{3}\pi r^4 \rho + M_0 v_0 t$, což je vztah určující poloměr obálky v závislosti na čase. Určete, za jaký

čas se rychlost expandující obálky zmenší na polovinu. Jsou zadány $\rho = 3 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $v_0 = 1000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $M_0 = 10^{-4} M_{\text{Sl}}$.

převzato z [34]

Zápis:

$$\rho = 3 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, v_0 = 1 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, M_0 = 10^{-4} M_{\text{Sl}}, t = ? \text{ roků}$$

Řešení:

Ze vztahu pro integraci vyjádříme t

$$t = \frac{\frac{1}{3}\pi r^4 \rho + M_0 r}{M_0 v_0},$$

kde r dostaneme ze zákona zachování hybnosti

$$\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho + M_0\right)v = M_0 v_0,$$

kde počáteční rychlost v_0 se zmenší na polovinu

$$v = \frac{1}{2}v_0,$$

dosadíme za v

$$\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho + M_0\right) \frac{1}{2} v_0 = M_0 v_0,$$

vyjádříme r

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 M_0}{4 \pi \rho}},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{4 \pi \cdot 3 \cdot 10^{-21}}},$$
$$r = 2,5 \cdot 10^{15}.$$

Dosadíme do vztahu pro čas

$$t = \frac{\frac{1}{3} \pi \cdot (2,5 \cdot 10^{15})^4 \cdot 3 \cdot 10^{21} + 10^{-4} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot 2,5 \cdot 10^{15}}{10^{-4} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot 10^6},$$
$$\underline{\underline{t \doteq 3 \cdot 10^9 = 100 \text{ roků}}}$$

Odpověď:

Rychlost expandující obálky se zmenší na polovinu za 100 roků .

zpracováno podle [34]

5.3.9. Příklad

Maxima jasnosti ve vizuálním oboru dosahuje supernova v okamžiku, kdy se expandující fotosféra ochladí na teplotu asi 7 000 K. Právě teploty (5 500–7 500) K jsou optimální pro produkci světelných kvant ve vizuálním oboru. Hvězd hlavní posloupnosti odpovídá tento teplotní rozsah spektrálním třídám mezi G 5 – F 0, u kterých je bolometrická korekce blízká k nule. Typické supernovy dosahují absolutních hvězdných velikostí $M_{\text{bol}} = (-16,0 \text{ až } -19,0) \text{ mag}$ v maximu své jasnosti. Určete poloměr fotosféry odpovídající každé z těchto hodnot.

převzato z [34]

Zápis:

$T = 7000 \text{ K}$, $T \in (5500 - 7500) \text{ K}$, $M_{\text{bol}} = (-16,0 \text{ až } -19,0) \text{ mag}$, $R_{16} = ? \text{ AU}$,
 $R_{19} = ? \text{ AU}$

Řešení:

Použijeme vztah pro výpočet poloměru hvězdy pomocí M_{bol} a T

$$\log \frac{R}{R_{\text{Sl}}} = 8,5 - 0,2 M_{\text{bol}} - 2 \log \{T\},$$

dosadíme číselně pro -16 mag a -19 mag

$$\log \frac{R_{16}}{R_{\text{Sl}}} = 8,5 - 0,2 (-16) - 2 \log 7000,$$

$$\underline{\underline{R_{16} \doteq 10228 R_{\text{Sl}} = 47,6 \text{ AU} .}}$$

$$\log \frac{R_{19}}{R_{\text{Sl}}} = 8,5 - 0,2 (-19) - 2 \log 7000,$$

$$\underline{\underline{R_{19} \doteq 40720 R_{\text{Sl}} = 189 \text{ AU} .}}$$

Odpověď:

Poloměr fotosféry pro absolutní hvězdnou velikost $-16,0 \text{ mag}$ je $47,6 \text{ AU}$ a pro $-19,0 \text{ mag}$ je 189 AU .

zpracováno podle [34]

5.3.10. Příklad

U supernov I . typu je pravděpodobným zdrojem energie v maximu jasnosti rozpad ${}^{56}_{28}\text{Ni} \rightarrow {}^{56}_{27}\text{Co} + e^+ + \nu_e + \gamma$, probíhající při explozi radioaktivního izotopu ${}^{56}_{28}\text{Ni}$. Jak velká hmotnost látky obsahující izotop ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ je nezbytná pro objasnění zářivých výkonů $\cong 3 \cdot 10^{36}$ W supernov v maximu? Poločas rozpadu ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ je $\tau_{1/2} = 6,1$ dne a energie uvolňovaná při rozpadu je 1,78 MeV.

převzato z [34]

Zápis:

$$L = 3 \cdot 10^{36} \text{ W}, \tau_{\text{Ni}} = 6,1 \text{ dne}, E = 1,78 \text{ MeV}, m = ? \text{ kg}$$

Řešení:

Hledanou hmotnost získáme vydělíme-li počet atomů, které se mají rozpadnout N_1 , počtem rozpadů za 1 s v 1 kg niklu A (aktivita)

$$m = \frac{N_1}{A}.$$

Počet atomů, které se mají rozpadnout N_1 je energie zářivých výkonů L dělená energií, která se uvolní při rozpadu 1 atomu E .

$$N_1 = \frac{L}{E},$$

dosadíme číselně, E dosadíme v J

$$N_1 = \frac{3 \cdot 10^{36}}{1,78 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{19}},$$

$$N_1 \doteq 10^{49}.$$

Aktivita A je dána počtem atomů ve vzorku N a rozpadovou konstantou

$$A = N \lambda,$$

kde

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{\text{Ni}}},$$

tedy

$$A = N \frac{\ln 2}{\tau_{\text{Ni}}}.$$

Počet atomů v 1 kg niklu v čase $t = 0$

$$N = \frac{1}{A_r \cdot m_u},$$

dosadíme číselně

$$N = \frac{1}{58,69 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27}},$$
$$N \doteq 10,25.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro aktivitu, poločas rozpadu v sekundách

$$A = 10,25 \cdot \frac{\ln 2}{6,1 \cdot 24 \cdot 3600},$$
$$A \doteq 1,3 \cdot 10^{19}.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro m

$$m = \frac{10^{49}}{1,3 \cdot 10^{19}},$$
$$\underline{\underline{m \doteq 7,7 \cdot 10^{29} \text{ kg} \doteq 0,4 M_{\text{SI}}.}}$$

Odpověď:

Nezbytná hmotnost látky s izotopem ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ je $0,4 M_{\text{SI}}$.

zpracováno podle [34]

5.3.11. Příklad

V další fázi vývoje supernov po dosažení maxima jasnosti je možným zdrojem energie rozpad ${}_{27}^{56}\text{Co} \rightarrow {}_{26}^{56}\text{Fe} + e^+ + \nu e + \gamma$ s uvolňovanou energií 3,72 MeV. Poločas rozpadu ${}_{27}^{56}\text{Co}$ je $\tau_{1/2} = 77,7$ dne. Určete předpokládané množství látky obsahující tento izotop, které je nezbytné k tomu, aby objasňovalo zářivé výkony supernov po několika stovkách dnů po dosažení maxima jasnosti $\cong 10^{35}$ W. Údaje odpovídají supernově 1987 A.

převzato z [34]

Zápis:

$$L = 10^{35} \text{ W}, \tau_{\text{Co}} = 77,7 \text{ dne}, E = 3,72 \text{ MeV}, m = ? \text{ kg}$$

Řešení:

Hledanou hmotnost získáme, vydělíme-li počet atomů, které se mají rozpadnout N_1 , počtem rozpadů za 1 s v 1 kg kobaltu A (aktivita)

$$m = \frac{N_1}{A}.$$

Počet atomů, které se mají rozpadnout N_1 je energie zářivých výkonů L dělená energií, která se uvolní při rozpadu 1 atomu E .

$$N_1 = \frac{L}{E},$$

dosadíme číselně, E dosadíme v J

$$N_1 = \frac{10^{35}}{3,72 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}},$$

$$N_1 \doteq 1,7 \cdot 10^{47}.$$

Aktivita A je dána počtem atomů ve vzorku N a rozpadovou konstantou

$$A = N\lambda,$$

kde

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{\text{Co}}},$$

tedy

$$A = N \frac{\ln 2}{\tau_{\text{Co}}}.$$

Počet atomů v 1 kg kobaltu v čase $t = 0$

$$N = \frac{1}{A_r \cdot m_u},$$

dosadíme číselně

$$N = \frac{1}{58,9332 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27}},$$

$$N \doteq 10^{25}.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro aktivitu, poločas rozpadu v s

$$A = 10^{25} \cdot \frac{\ln 2}{77,7 \cdot 25 \cdot 3600},$$

$$A \doteq 10^{18}.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro m

$$m = \frac{1,7 \cdot 10^{47}}{10^{18}} \doteq 1,7 \cdot 10^{29} \doteq 0,05 M_{\text{SI}}.$$

Odpověď:

Předpokládané množství látky s izotopem ${}_{27}^{56}\text{Co}$ je $0,05 M_{\text{SI}}$

zpracováno podle [34]

5.3.12. Příklad

Porovnejte maximální teploty disku T_{\max} a zářivé výkony disku při akreci u bílého trpaslíka a neutronové hvězdy. Je zadáno:

a) bílý trpaslík $0,85 M_{\text{Sl}}$, $0,0095 R_{\text{Sl}}$, $\frac{dM}{dt} = 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-10} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1}$,

b) neutronová hvězda $1,4 M_{\text{Sl}}$, $R = 10 \text{ km}$, $\frac{dM}{dt} = 10^{14} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-9} M_{\text{Sl}} \cdot \text{rok}^{-1}$.

převzato z [34]

Zápis:

a) $M = 0,85 M_{\text{Sl}}$, $R = 0,0095 R_{\text{Sl}}$, $\frac{dM}{dt} = 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

b) $M = 1,4 M_{\text{Sl}}$, $R = 10 \text{ km}$, $\frac{dM}{dt} = 10^{14} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\frac{T_{1\max}}{T_{2\max}}; \frac{L_1}{L_2} = ?$$

Řešení:

Maximální teploty disků vyjádříme pomocí vztahu

$$T_{\max} = 0,488 \left(\frac{3GM \frac{dM}{dt}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{\frac{1}{4}},$$

dosadíme do

$$\frac{T_{1\max}}{T_{2\max}} = \frac{0,488 \left(\frac{3 \cdot G \cdot 0,85 M_{\text{Sl}} \cdot 10^{13}}{8\pi \cdot \sigma \cdot (0,0095 \cdot R_{\text{Sl}})^3} \right)^{\frac{1}{4}}}{0,488 \left(\frac{3 \cdot G \cdot 1,4 M_{\text{Sl}} \cdot 10^{14}}{8\pi \sigma \cdot (10^4)^3} \right)^{\frac{1}{4}}},$$

$$\frac{T_{1\max}}{T_{2\max}} = \left(\frac{0,85 \cdot 10^{12}}{1,4 \cdot 10 \cdot (0,0095 \cdot 6,963 \cdot 10^8)} \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\frac{T_{1\max}}{T_{2\max}} = 0,0038,$$

$$\underline{\underline{T_2 \doteq 263 T_1 .}}$$

Zářivé výkony disků vyjádříme pomocí vztahu

$$L \doteq G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt},$$

dosadíme do

$$\frac{L_1}{L_2},$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{G \frac{0,85 M_{\text{Sl}}}{0,0095 R_{\text{Sl}}} \cdot 10^{13}}{G \frac{1,4 M_{\text{Sl}}}{10^4} \cdot 10^{14}},$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{0,85 \cdot 10^4}{1,4 \cdot 0,0095 \cdot 6,963 \cdot 10^8 \cdot 10},$$

$$\frac{L_1}{L_2} \doteq 9,2 \cdot 10^{-5},$$

$$\underline{\underline{L_2 \doteq 10^4 .}}$$

Odpověď:

Maximální teplota disku u neutronové hvězdy je 263 krát větší než u disku bílého trpaslíka a zářivý výkon je 10^4 krát větší.

zpracováno podle [34]

5.4. Příklady k teorii vývoje hvězd – závěrečná stadia

5.4.1. Příklad

Rozhodněte, zda dané gravitační potenciální energie $1,86 \cdot 10^{43}$ J, $-6,87 \cdot 10^{42}$, $-9,57 \cdot 10^{43}$, patří některé z uvedených hvězd. Neutronová hvězda RX J185635-3754 o hmotnosti $0,9 M_{\text{Sl}}$, poloměru $3 R_{\text{Sl}}$. Bílý trpaslík Van Maanen o hmotnosti $0,68 M_{\text{Sl}}$, poloměru $0,011 R_{\text{Sl}}$. Trpaslík Procyon B o hmotnosti $0,602 M_{\text{Sl}}$, poloměru $0,012 R_{\text{Sl}}$.

Zápis:

$$M_1 = 0,9 M_{\text{Sl}}, \quad R_1 = 3 R_{\text{Sl}}, \quad E_{\text{P1}} = ? \text{ J}; \quad M_2 = 0,68 M_{\text{Sl}}, \quad R_2 = 0,011 R_{\text{Sl}}, \quad E_{\text{P2}} = ? \text{ J}; \\ M_3 = 0,602 M_{\text{Sl}}, \quad R_3 = 0,012 R_{\text{Sl}}, \quad E_{\text{P3}} = ? \text{ J}, \quad E'_{\text{1P}} = 1,86 \cdot 10^{43}, \quad E'_{\text{2P}} = -6,87 \cdot 10^{43}, \\ E'_{\text{3P}} = -9,57 \cdot 10^{43}.$$

Řešení:

Gravitační potenciální energie je dána vztahem

$$E_{\text{P}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

Dosadíme číselně pro jednotlivé hvězdy, hmotnost v kg a poloměr v m

$$E_{\text{P1}} = -\frac{3}{5} \frac{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot (0,9 \cdot 1,99 \cdot 10^{30})^2}{0,011 \cdot 6,963 \cdot 10^8},$$

$$\underline{\underline{E_{\text{P1}} = -1,86 \cdot 10^{43} \text{ J},}}$$

$$E_{\text{P2}} = -\frac{3}{5} \frac{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot (0,68 \cdot 1,99 \cdot 10^{30})^2}{0,011 \cdot 6,963 \cdot 10^8},$$

$$\underline{\underline{E_{\text{P2}} = -9,57 \cdot 10^{42} \text{ J},}}$$

$$E_{\text{P3}} = -\frac{3}{5} \frac{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot (0,602 \cdot 1,99 \cdot 10^{30})^2}{0,012 \cdot 6,963 \cdot 10^8},$$

$$\underline{\underline{E_{\text{P3}} = -6,87 \cdot 10^{42} \text{ J}.}}$$

Odpověď:

E'_{1p} nepatří žádné, protože spočtené energie jsou záporné.

E'_{2p} se shoduje potenciální energií trpaslíka Procyon B.

E'_{3p} nepatří žádné, od nejbližší energie E_{p_2} se liší o jeden řád.

vlastní příklad

5.4.2. Příklad

Určete rudý posuv bílého trpaslíka Van Maanen 2. Hmotnost trpaslíka je $0,68 M_{\text{Sl}}$; a poloměr $0,011 R_{\text{Sl}}$.

Zápis:

$$M = 0,68 M_{\text{Sl}}; R = 0,011 R_{\text{Sl}}; z = ?$$

Řešení:

Gravitační rudý posuv určíme pomocí vztahu

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg a poloměr v m

$$z = \frac{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot 0,68 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{(299,8 \cdot 10^6)^2 \cdot 0,011 \cdot 6,963 \cdot 10^8},$$
$$\underline{\underline{z = 1,3 \cdot 10^{-4}}}$$

Odpověď:

Rudý posuv bílého trpaslíka je $1,3 \cdot 10^{-4}$.

vlastní příklad

5.4.3. Příklad

Určete rudý posuv bílého trpaslíka Procyon B. Hmotnost trpaslíka je $0,602 M_{\text{Sl}}$, teplota 7740 K a zářivý výkon $0,00049 L_{\text{Sl}}$.

Zápis:

$$M = 0,602 M_{\text{Sl}}; T = T_{\text{ef}} = 7740 \text{ K}, L = 0,00049 L_{\text{Sl}}, z = ?$$

Řešení:

Gravitační rudý posuv určíme pomocí vztahu

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R},$$

kde poloměr vyjádříme ze vztahu pro zářivý výkon

$$L = 4\pi R^2 \delta T_{\text{ef}}^4,$$

tedy

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}.$$

Po dosazení do vztahu pro rudý posuv dostaneme

$$z = \frac{GM}{c^2 \sqrt{\frac{L}{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}},$$

$$z = \frac{GM \sqrt{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}{c^2 \sqrt{L}},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg a zářivý výkon v W.

$$z = \frac{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot 0,602 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \sqrt{4\pi \cdot 5,671 \cdot 10^{-8} \cdot 7740^4}}{(299,8 \cdot 10^6)^2 \sqrt{0,00049 \cdot 3,86 \cdot 10^{26}}},$$

$$\underline{\underline{z = 1,0 \cdot 10^{-4}}}$$

Odpověď:

Rudý posuv bílého trpaslíka Procyon B je $1,0 \cdot 10^{-4}$.

vlastní příklad

5.4.4. Příklad

Určete rudý posuv bílého trpaslíka Sirius B a kolikrát je jeho rudý posuv větší než rudý posuv trpaslíka 40 Eri B. Hmotnost Siria B je $0,978 M_{SI}$ a poloměr $0,0084 R_{SI}$. Hmotnost 40 Eri B je $0,50 M_{SI}$ a poloměr $0,014 R_{SI}$.

Zápis:

$$M_s = 0,978 M_{SI}, R_s = 0,0084 R_{SI}, M_E = 0,50 M_{SI}, R_E = 0,014 R_{SI}, z_s = ? \frac{z_s}{z_E} = ?$$

Řešení:

Gravitační rudý posuv určíme pomocí vztahu

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg a poloměr v m

$$z_s = \frac{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot 0,978 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{(299,8 \cdot 10^6)^2 \cdot 0,0084 \cdot 6,963 \cdot 10^8},$$
$$\underline{\underline{z_s = 2,5 \cdot 10^{-4}}}$$

Poměr posuvů

$$\frac{z_s}{z_E} = \frac{\frac{GM_s}{c^2 R_s}}{\frac{GM_E}{c^2 R_E}},$$
$$\frac{z_s}{z_E} = \frac{M_s}{R_s} \cdot \frac{R_E}{M_E},$$

dosadíme číselně

$$\frac{z_s}{z_E} = \frac{0,978}{0,0084} \cdot \frac{0,014}{0,50},$$
$$\underline{\underline{\frac{z_s}{z_E} = 3,26}}$$

Odpověď:

Rudý posuv bílého trpaslíka Sírius B je $2,5 \cdot 10^{-4}$ a je 3,26 krát větší než posuv trpaslíka 40 Eri B.

vlastní příklad

5.4.5. Příklad

Efektivní teplota bílého trpaslíka 40 Eri B je 16500 K , hmotnost $0,50 M_{\text{Sl}}$ a hodnota gravitačního rudého posuvu $7 \cdot 10^{-5}$. Určete zářivý výkon trpaslíka.

Zápis:

$$T = T_{\text{ef}} = 16600 \text{ K} , M = 0,50 M_{\text{Sl}} , z = 7 \cdot 10^{-5}$$

Řešení:

Zářivý výkon určíme pomocí vztahu

$$L = 4\pi R^2 \delta T_{\text{ef}}^4 ,$$

kde R vyjádříme ze vztahu pro rudý posuv

$$z = \frac{GM}{c^2 R} ,$$

tedy

$$R = \frac{GM}{c^2 z} .$$

Po dosazení do vztahu pro zářivý výkon dostaneme

$$L = \frac{4\pi G^2 M^2 T_{\text{ef}}^4}{c^4 z^2} ,$$

dosadíme číselně v kg

$$L = \frac{4\pi \cdot (6,670 \cdot 10^{-11})^2 \cdot (0,50 \cdot 9,989 \cdot 10^{30})^2 \cdot 5,671 \cdot 10^{-8} \cdot 16500^4}{(299,8 \cdot 10^6)^4 \cdot (7 \cdot 10^{-5})^2} ,$$

$$\underline{\underline{L = 5,87 \cdot 10^{24} \text{ W} = 0,015 L_{\text{Sl}} .}}$$

Odpověď:

Zářivý výkon bílého trpaslíka 40 Eri B je $0,015 L_{\text{Sl}}$.

vlastní příklad

5.4.6. Příklad

Zářivý výkon bílého trpaslíka 40 Eri B je $0,013 L_{\text{Sl}}$, teplota 16500 K a hmotnost $0,50 M_{\text{Sl}}$. Zářivý výkon bílého trpaslíka 40 Eri C je $0,008 L_{\text{Sl}}$, teplota 3100 K . Určete rudý posuv trpaslíka 40 Eri B a kolikrát je jeho poloměr menší než poloměr trpaslíka 40 Eri C.

Zápis:

$$L_{\text{B}} = 0,013 L_{\text{Sl}}, \quad T_{\text{B}} = T_{\text{Bef}} = 16500 \text{ K}, \quad M_{\text{B}} = 0,50 M_{\text{Sl}}, \quad L_{\text{C}} = 0,008 L_{\text{Sl}},$$
$$T_{\text{C}} = T_{\text{Cef}} = 3100 \text{ K}, \quad z_{\text{B}} = ?, \quad \frac{R_{\text{B}}}{R_{\text{C}}} = ?$$

Řešení:

Gravitační rudý posuv určíme pomocí vztahu

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R},$$

kde poloměr vyjádříme ze vztahu pro zářivý výkon

$$L = 4\pi R^2 \delta T_{\text{ef}}^4,$$

tedy

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}.$$

Po dosazení do vztahu pro rudý posuv dostaneme

$$z = \frac{GM}{c^2 \sqrt{\frac{L}{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}},$$
$$z = \frac{GM \sqrt{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}{c^2 \sqrt{L}},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg a zářivý výkon v W

$$z = \frac{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot 0,50 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \sqrt{4\pi \cdot 5,671 \cdot 10^{-8} \cdot 16500^4}}{(299,8 \cdot 10^6)^2 \sqrt{0,013 \cdot 3,86 \cdot 10^{26}}},$$

$$\underline{\underline{z = 7,6 \cdot 10^{-5}}}$$

Poměr poloměru

$$\frac{R_C}{R_B} = \frac{\sqrt{\frac{L_C}{4\pi\delta T_C^4}}}{\sqrt{\frac{L_B}{4\pi\delta T_B^4}}},$$

$$\frac{R_C}{R_B} = \sqrt{\frac{L_C T_B^4}{L_B T_C^4}},$$

$$\frac{R_B}{R_C} = \sqrt{\frac{0,008 \cdot 16500^4}{0,013 \cdot 3100^4}},$$

$$\underline{\underline{\frac{R_B}{R_C} \doteq 22}}$$

Odpověď:

Rudý posuv trpaslíka 40 Eri B je $7,6 \cdot 10^{-5}$ a jeho poloměr je přibližně 22 krát menší než poloměr trpaslíka 40 Eri C.

vlastní příklad

5.4.7. Příklad

Porovnejte rudý posuv bílých trpaslíků 40 Eri B a 40 Eri C. Zářivý výkon trpaslíka 40 Eri B je $0,013 L_{\text{Sl}}$, teplota je 16500 K a hmotnost $0,50 M_{\text{Sl}}$. Zářivý výkon trpaslíka 40 Eri C je $0,008 L_{\text{Sl}}$, teplota 3100 K a hmotnost $0,20 M_{\text{Sl}}$.

Zápis:

$$L_{\text{B}} = 0,013 L_{\text{Sl}}, \quad T_{\text{B}} = T_{\text{Bef}} = 16500 \text{ K}, \quad M_{\text{B}} = 0,50 M_{\text{Sl}}, \quad L_{\text{C}} = 0,008 L_{\text{Sl}},$$

$$T_{\text{C}} = T_{\text{Cef}} = 3100 \text{ K}, \quad M_{\text{C}} = 0,20 M_{\text{Sl}}, \quad \frac{z_{\text{B}}}{z_{\text{C}}} = ?$$

Řešení:

Gravitační rudý posuv určíme pomocí vztahu

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R},$$

kde poloměr vyjádříme ze vztahu pro zářivý výkon

$$L = 4\pi R^2 \delta T_{\text{ef}}^4,$$

tedy

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}.$$

Po dosazení do vztahu pro rudý posuv dostaneme

$$z = \frac{GM}{c^2 \sqrt{\frac{L}{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}},$$
$$z = \frac{GM \sqrt{4\pi\delta T_{\text{ef}}^4}}{c^2 \sqrt{L}}.$$

Podíl $\frac{z_B}{z_C}$ je tedy

$$\frac{z_B}{z_C} = \frac{\frac{GM_B \sqrt{4\pi\delta T_B^4}}{c^2 \sqrt{L_B}}}{\frac{GM_C \sqrt{4\pi\delta T_C^4}}{c^2 \sqrt{L_C}}},$$

$$\frac{z_B}{z_C} = \sqrt{\frac{T_B^4}{T_C^4} \cdot \frac{L_C}{L_B}},$$

$$\frac{z_B}{z_C} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^2 \cdot \frac{L_C}{L_B},$$

dosadíme číselně

$$\frac{z_B}{z_C} = \left(\frac{16500}{3100}\right)^2 \cdot \frac{0,008}{0,013},$$

$$\frac{z_B}{z_C} = \underline{\underline{17,4}}.$$

Odpověď:

Rudý posuv trpaslíka 40 Eri B je 17,4 krát větší než u trpaslíka 40 Eri C.

vlastní příklad

5.4.8. Příklad

Stanovte horní hranici poloměru pulsaru – neutronové hvězdy o hmotnosti $1,4 M_{\text{Sl}}$, s periodou rotace $1,5 \cdot 10^{-3}$ s. Řešte v newtonovském přiblížení.

převzato z [34]

Zápis:

$$M = 1,4 M_{\text{Sl}}, T = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}, R = ? \text{ m}$$

Řešení:

Gravitační síla musí udržet hmotný bod. Musí platit

$$F_g > F_o.$$

Využijeme vztah pro gravitační sílu

$$F_g = G \frac{mM}{R^2}$$

a odstředivou sílu

$$F_o = m\omega^2 R,$$

dosadíme do nerovnice

$$G \frac{mM}{R^2} > m\omega^2 R,$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

a tedy

$$G \frac{mM}{R^2} > m \frac{4\pi}{T^2} R.$$

Vyjádříme poloměr

$$\frac{GMT^2}{4\pi} > R^3,$$

$$R < \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi}},$$

dosadíme číselně

$$R < \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-19} \cdot 1,4 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2}},$$

$$\underline{\underline{R < 22 \cdot 10^3 \text{ m.}}}$$

Odpověď:

Horní hranice poloměru pulsaru je $22 \cdot 10^3 \text{ m.}$

zpracováno podle [34]

5.4.9. Příklad

Pulsar v Krabí mlhovině má zářivý výkon $5 \cdot 10^{31}$ W, jeho perioda rotace $T = 0,033$ s, hmotnost $1,4 M_{\text{Sl}}$, $R = 10$ km. Určete nárůst periody rotace a odhadněte stáří pulsaru.

převzato z [34]

Zápis:

$$L = 5 \cdot 10^{31} \text{ W}, T = 0,033 \text{ s}, M = 1,4 M_{\text{Sl}}, R = 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m}, \frac{dT}{dt} = ?, t = ? \text{ s}$$

Řešení:

Nárůst periody rotace vyjádříme ze vztahu pro zářivý výkon

$$L = \frac{8}{5} \pi^2 MR^2 T^{-3} \frac{dT}{dt},$$

tedy

$$\frac{dT}{dt} = \frac{5}{8} \frac{LT^3}{\pi^2 MR^2},$$

dosadíme číselně

$$\frac{dT}{dt} = \frac{5}{8} \frac{5 \cdot 10^{31} \cdot 0,033^3}{\pi^2 \cdot 1,4 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot (10^4)^2},$$

$$\frac{dT}{dt} = 4,08 \cdot 10^{-13}.$$

Stáří pulsaru odhadneme ze změny periody rotace a periody rotace

$$t \doteq \frac{T}{\frac{dT}{dt}},$$

dosadíme číselně

$$t \doteq \frac{0,033}{4,08 \cdot 10^{-13}},$$

$$\underline{\underline{t \doteq 8 \cdot 10^{10} \text{ s} \doteq 2500 \text{ roků (skutečně } 10^3 \text{ roků)}}}.$$

Odpověď:

Nárůst periody rotace je $4,08 \cdot 10^{-13}$ a odhadované stáří pulsaru je 2500 roků.

zpracováno podle [34]

5.4.10. Příklad

Pulsar o zářivém výkonu $7,8 \cdot 10^{29}$ W, hmotnosti $1,4 M_{\text{Sl}}$ a poloměru $R = 10$ km má periodu rotace $T = 0,089$ s. Určete nárůst periody rotace a jeho přibližné stáří.

převzato z [34]

Zápis:

$$L = 7,8 \cdot 10^{29} \text{ W}, T = 0,089 \text{ s}, M = 1,4 M_{\text{Sl}}, R = 10 \text{ km}, \frac{dT}{dt} = ?, t = ? \text{ s}$$

Řešení:

Nárůst periody rotace vyjádříme ze vztahu pro zářivý výkon

$$L = \frac{8}{5} \pi^2 MR^2 T^{-3} \frac{dT}{dt},$$

tedy

$$\frac{dT}{dt} = \frac{5}{8} \frac{LT^3}{\pi^2 MR^2},$$

dosadíme číselně

$$\frac{dT}{dt} = \frac{5}{8} \frac{7,8 \cdot 10^{29} \cdot 0,089^3}{\pi^2 \cdot 1,4 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot (10^4)^2},$$

$$\frac{dT}{dt} \doteq 1,3 \cdot 10^{-13}.$$

Stáří pulsaru odhadneme ze změny periody rotace a periody rotace

$$t \doteq \frac{T}{\frac{dT}{dt}},$$

dosadíme číselně

$$t \doteq \frac{0,089}{1,3 \cdot 10^{-13}},$$

$$\underline{\underline{t \doteq 6,8 \cdot 10^{11} \text{ s} \doteq 2 \cdot 10^4 \text{ roků.}}}$$

Odpověď:

Nárůst periody rotace je $1,3 \cdot 10^{-13}$ a přibližné stáří pulsaru je $2 \cdot 10^4$ roků.

vlastní řešení

5.4.11. Příklad

Určete zářivý výkon neutronové hvězdy RX J185635-3754 a porovnejte ho se zářivým výkonem bílého trpaslíka Van Maanen 2. Poloměr neutronové hvězdy je kolem 10 km a povrchová teplota $700 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{C}$. Poloměr trpaslíka je $0,011 R_{\text{Sl}}$ a teplota 6220 K.

Zápis:

$$R_{\text{N}} = 10 \text{ km}, T_{\text{N}} = T_{\text{ef}} = 700 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{C}; R_{\text{T}} = 0,011 R_{\text{Sl}}, T_{\text{T}} = T_{\text{ef}} = 6220 \text{ K}, L_{\text{N}} = ? L_{\text{Sl}},$$

$$\frac{L_{\text{N}}}{L_{\text{T}}} = ?$$

Řešení:

Zářivý výkon určíme pomocí vztahu

$$L = 4\pi R^2 \delta T_{\text{ef}}^4,$$

dosadíme číselně, teplotu v K a poloměr v m

$$L_{\text{N}} = 4\pi \cdot (10^3)^2 \cdot 5,671 \cdot 10^{-8} \cdot (700 \cdot 10^3 + 273,15)^4,$$

$$\underline{\underline{L_{\text{N}} = 1,7 \cdot 10^{25} \text{ W} = 4,4 \cdot 10^{-2} L_{\text{Sl}}.}}$$

Podíl

$$\frac{L_{\text{N}}}{L_{\text{T}}} = \frac{4\pi R_{\text{N}}^2 \delta T_{\text{N}}^4}{4\pi R_{\text{T}}^2 \delta T_{\text{T}}^4},$$

$$\frac{L_{\text{N}}}{L_{\text{T}}} = \left(\frac{R_{\text{N}}}{R_{\text{T}}} \right)^2 \cdot \left(\frac{T_{\text{N}}}{T_{\text{T}}} \right)^4,$$

$$\frac{L_{\text{N}}}{L_{\text{T}}} = \left(\frac{1,4 \cdot 10^{-5}}{0,011} \right)^2 \cdot \left(\frac{700 \cdot 10^3 + 273,15}{6220} \right)^4,$$

$$\underline{\underline{\frac{L_{\text{N}}}{L_{\text{T}}} = 260.}}$$

Odpověď:

Zářivý výkon neutronové hvězdy je $4,4 \cdot 10^{-4} L_{\text{Sl}}$ a je 260 krát větší než zářivý výkon trpaslíka.

vlastní příklad

5.4.12. Příklad

Spočítejte přibližnou hmotnost černé díry, víte-li, že oběžná doba hvězdy, která obíhá ve vzdálenosti 280 AU, je 3 roky.

Zápis:

$$a = 280 \text{ AU}, T = 3 \text{ roky}$$

Řešení:

K výpočtu použijeme vztah vyjadřující 3. Keplerův zákon

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Je-li hmotnost obíhajícího tělesa m_2 zanedbatelná, můžeme počítat jen s hmotností m_1 .

Vyjádříme hmotnost černé díry

$$M_1 = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2},$$

dosadíme číselně, oběžnou dobu v s a vzdálenost v m

$$M_1 = \frac{4\pi^2 \cdot (280 \cdot 1,496 \cdot 10^{11})^3}{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot (3 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600)^2},$$

$$\underline{\underline{M_1 = 4,85 \cdot 10^{36} \text{ kg} = 2,4 M_{\text{Sl}}}}$$

Odpověď:

Přibližná hmotnost černé díry je $2,4 M_{\text{Sl}}$.

vlastní příklad

5.4.13. Příklad

Porovnejte velikosti momentu hybnosti pulsaru PSR J0348+0432 o hmotnosti $2,01 M_{\text{Sl}}$, poloměru $1,87 \cdot 10^{-5} R_{\text{Sl}}$, periodou $T = 0,039 \text{ s}$, hvězdy spektrální třídy F Procyon A o hmotnosti $1,42 M_{\text{Sl}}$, poloměru $2,05 R_{\text{Sl}}$, periodou 23 dnů s velikostí maximálního momentu hybnosti černé díry o hmotnosti $7 M_{\text{Sl}}$.

Zápis:

$$M_1 = 2,01 M_{\text{Sl}}, \quad R_1 = 1,87 \cdot 10^{-5} R_{\text{Sl}}, \quad T_1 = 0,039 \text{ s}, \quad L_1 = ? \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad M_2 = 1,42 M_{\text{Sl}}, \\ R_2 = 2,05 R_{\text{Sl}}, \quad T_2 = 23 \text{ dnů}, \quad L_2 = ? \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad M_3 = 7 M_{\text{Sl}}, \quad L_{\text{max}} = ? \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Řešení:

U hvězdy a pulsaru platí pro moment hybnosti vztah

$$L = m\omega r^2,$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

tedy

$$L = \frac{m \cdot 2\pi \cdot r^2}{T},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg, poloměr v m a periodu v s

$$L_1 = \frac{2,01 \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 2\pi \cdot (1,87 \cdot 10^{-5} \cdot 6,963 \cdot 10^8)^2}{0,039},$$

$$L_1 = 1,1 \cdot 10^{41} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$L_2 = \frac{1,42 \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 2\pi \cdot (2,05 \cdot 6,963 \cdot 10^8)^2}{23 \cdot 24 \cdot 3600},$$

$$L_2 = 1,8 \cdot 10^{43}.$$

Pro moment hybnosti černé díry platí vztah

$$L_{\max} = \frac{GM^2}{c},$$

dosadíme číselně, hmotnost v kg

$$L_{\max} = \frac{6,670 \cdot 10^{-11} \cdot (7 \cdot 1,99 \cdot 10^{30})^2}{299,8 \cdot 10^6},$$

$$L_{\max} = 4,3 \cdot 10^{43}.$$

Porovnáme velikosti

$$\frac{L_{\max}}{L_1} = \frac{4,3 \cdot 10^{43}}{1,1 \cdot 10^{41}},$$

$$\frac{L_{\max}}{L_1} = 391,$$

$$\frac{L_{\max}}{L_2} = \frac{4,3 \cdot 10^{43}}{1,8 \cdot 10^{43}},$$

$$\frac{L_{\max}}{L_2} = 2,4.$$

Odpověď:

Moment hybnosti dané černé díry je 391 krát větší, než moment hybnosti pulsaru PSR J0348+0432 a 2,4 krát větší, než hvězdy Procyona A.

vlastní příklad

6. Konstanty

Použité konstanty:

Poloměr Slunce $R_{\text{Sl}} = 6,963 \cdot 10^8 \text{ m}$

Hmotnost Slunce $M_{\text{Sl}} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Zářivý výkon Slunce $L_{\text{Sl}} = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}$

Rychlost světla $c = 299,8 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Gravitační konstanta $G = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Parsek $\text{pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$

Atomová hmotnostní konstanta $m_{\text{u}} = 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Stefanova–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5,671 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Hmotnost vodíku $m_{\text{H}} = 1,0078 m_{\text{u}}$

Hmotnost protonu $m_{\text{p}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Wienova konstanta $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

7. Závěr

Tato diplomová práce obsahuje 53 řešených úloh z astrofyziky týkajících se vlastností dvojhvězd a stadií života hvězd. Všechny úlohy obsahují podrobné a srozumitelné řešení a k výpočtům byly převážně použity hodnoty z aktuálních měření. Úlohy mají různou obtížnost, takže lze sbírku využít jak pro celou třídu, tak i pro jednotlivce, kteří se danému tématu chtějí věnovat podrobněji.

V práci jsem také použil několik zcela originálních příkladů, kterými jsem obohatil některé kapitoly.

U příkladů 4.3.2, 4.3.6, 4.3.21 – 22, 4.3.24 – 25, 4.3.27 – 28, 5.3.2 – 6, 5.3.8 – 12, 5.4.8 – 9 jsem převzal zadání, ale řešení jsem doplnil nebo upravil.

U příkladů 4.3.3, 4.3.5, 4.3.7 – 8, 4.3.10 – 14, 4.3.16 – 20, 4.3.23, 4.3.26, 5.4.10 jsem převzal zadání, ale řešení jsem vytvořil.

Příklady 4.3.1, 4.3.4, 4.3.9, 4.3.15, 5.3.1, 5.3.7, 5.4.1 – 7, 5.4.11 – 13 jsem vytvořil celé.

Sbírka dále obsahuje stručnou teorii k dané problematice, seznam potřebných vzorců a slovníček základních používaných pojmů.

Přestože cíle vytyčené v úvodu byly splněny, je možné tuto práci dále vylepšovat a rozvíjet. Mou diplomovou práci lze stále doplňovat dalšími zajímavými úlohami nebo lze přidat další kapitoly z astrofyziky, např. Sluneční soustava, Kosmická mechanika, Hvězdné atmosféry, Proměnné hvězdy, Mezihvězdná látka, Úlohy pro počítač.

8. Resume

This diploma thesis includes solved problems from the field of astrophysics. This thesis has two main parts Binary stars and Life of a star. Each part includes a short introduction into the topic, important formulas and after that practical solving of particular problems. In the introduction of this thesis there is short didactic part and a list of basic concepts. At the end of this paper there is a list of physical constants that were used to solve all the problems.

9. Použitá literatura

1. *ATNF Pulsar Catalogue: Glitch Parameters* [online]. [cit. 2015-04-03]. Dostupný na WWW: <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/glitchTbl.html>
2. *ČESKÁ ASTRONOMICKÁ SPOLEČNOST. Astronomická olympiáda* [online]. [cit. 2015-06-19]. Dostupné z: <http://olympiada.astro.cz/>
3. *Hvězdárna Valašské Meziříčí* [online]. [cit. 2015-01-24]. Dostupný na WWW: <http://www.astrovm.cz/cz/program/projekty/realizovane-projekty/pres-hvezdy-ke-spolupraci-a-poznani/phsp-pozorovani-vizualnich-dvojhvezd.html>
4. *Nasa* [online]. [cit. 2015-03-08]. Dostupný na WWW: <https://www.nasa.gov/>
5. *Wikipedia - The Free Encyclopedia* [online]. [cit. 2015-03-04.]. Dostupný na WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
6. FUKA, Josef a Bedřich HAVELKA. *Optika a atomová fyzika*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1961, 845 s., 4 bar. obr. příl. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství).
7. HARMANEC, Petr a Miroslav BROŽ. *Stavba a vývoj hvězd*. Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2011, 312 s. ISBN 978-80-7378-165-1 [online]. Dostupné z: http://www.mff.cuni.cz/fakulta/mfp/download/books/harmanec-broz_-_stavba_a_vyvoj_hvezd.pdf
8. KLECZEK, Josip. *Velká encyklopedie vesmíru*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2002 s., 48 s. barev. obr. příl., 582 s. ISBN 80-200-0906-x.
9. MÉSURES, Bureau International des Poids et. *Le systeme international d'unités (SI) = The international system of units (SI)*. 8. éd. Sevres: BIPM, 2006. ISBN 9282222136.
10. ŠIROKÝ, Jaromír a Miroslava ŠIROKÁ. *Základy astronomie v příkladech*. 2. vyd. Praha: SPN, 1973, 158 s.
11. ŠOLC, Martin, Jiří ŠVESTKA a Vladimír VANÝSEK. *Fyzika hvězd a vesmíru: učebnice pro volitelný předmět seminář a cvičení z fyziky ve 4. roč. gymnázia*. 3., upravené vyd. Praha: SPN, 1991, 277 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-04-24965-5.

12. ŠTEFL, Vladimír a Jiří KRTIČKA. *Úlohy z astrofyziky*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2000, 75 s. ISBN 80-210-2364-3.
13. VANÝSEK, Vladimír. *Základy astronomie a astrofyziky*. 1. vyd. Praha: Academia, 1980, 541 s., obr. příl. ISBN 21-011-80.
14. BOMBELLI, Luca. Binary Star Systems [online]. 08.10.2013 [cit. 2015-06-20]. Dostupné z: <http://www.phy.olemiss.edu/~luca/astr/Topics-Extrasolar/Binaries-N.html>
15. KULHÁNEK, Petr a kol. *Astronomia - Astrofyzika, komplex html stránek* [online]. [cit. 2015-05-19]. Dostupný na <http://www.aldebaran.cz/astrofyzika/>.
16. KULHÁNEK, Petr a Milan ČERVENKA. *Astrofyzika semináře, skripta, pdf, 1 MB* [online]. Praha: České vysoké učení technické, Fakulta elektrotechnická, 2012 [cit. 2015-06-04]. Dostupné z: <http://www.aldebaran.cz/studium/astrofyzika.pdf>
17. MARTINEK, František. Betelgeuze: Do nitra rudého superobra v souhvězdí Oriona [online]. [cit. 2015-06-21]. Dostupné z: <http://vesmir.stoplusjednicka.cz/do-nitra-rudeho-superobra>
18. MIHULKA, Stanislav. Jak nakopnout umírající hvězdu? Osel [online]. 2014 [cit. 2015-06-20]. Dostupné z: <http://www.osel.cz/7530-jak-nakopnout-umirajici-hvezdu.html>
19. MIHULKA, Stanislav. Dvojhvězda MY Camelopardis splývá do gigantické hvězdy Osel [online]. 2014 [cit. 2015-06-20]. Dostupné z: <http://www.osel.cz/7935-dvojhvezda-my-camelopardis-splyva-do-giganticke-hvezdy.html>
20. MIKULÁŠEK, Zdeněk. *Fyzika horkých hvězd I* [online]. Brno, 2011 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: http://astro.physics.muni.cz/download/documents/skripta/F7601_1.pdf
21. MIKULÁŠEK, Zdeněk. *Úvod do fyziky hvězd a hvězdných soustav* [online]. Brno, 2000 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: http://astro.sci.muni.cz/variables/meduza/skripta/ufh_s_obr.pdf
22. NASA, M. WEISS. Black Hole Friday [online]. 2014, 20 červen 2015 [cit. 2015-06-20]. Dostupné z: <https://www.nasa.gov/content/black-hole-friday>

23. NASA. What Is a Supernova? [online]. 2013 [cit. 2015-06-23]. Dostupné z: <http://www.nasa.gov/audience/forstudents/5-8/what-is-a-supernova.html#.VYksjfntlBd>
24. NEMIROFF, Robert. Astronomy Picture of the Day: The Crab Nebula Pulsar Shrugs [online]. In: . 2002 [cit. 2015-06-20]. Dostupné z: <http://apod.nasa.gov/apod/ap020920.html>
25. NEMIROFF, Robert. Astronomy Picture of the Day: Wolf-Rayet Star 124: Stellar Wind Machine [online]. 2014 [cit. 2015-06-21]. Dostupné z: <http://apod.nasa.gov/apod/ap140701.html>
26. PÁRAL, Jan. *Astrofyzika pulsarů*. Brno, 2014. Dostupné také z: http://is.muni.cz/th/323893/prif_m/DIPLOMOVA_PRACE.pdf. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav teoretické fyziky a astrofyziky Vedoucí práce Mgr. Filip Hroch, Ph.D.
27. RANDA, Miroslav a kol. *Astronomia - astronomický server fakulty pedagogické ZČU v Plzni* [online]. [cit. 2014-12-25]. Dostupný na WWW: <http://astronomia.zcu.cz/>
28. REICHMAN, Martin. Nejžhavější bílý trpaslík září tisíckrát víc než naše Slunce. Tajemství vesmíru [online]. 2015 [cit. 2015-06-21]. Dostupné z: <http://vesmir.stoplusjednicka.cz/nejzhavejsi-bily-trpaslik-zari-tisickrat-vic-nez-nase-slunce>
29. Scimani. Encyklopedie vesmíru: hnědí trpaslíci. Nevšední svět [online]. 2015 [cit. 2015-06-21]. Dostupné z: <http://nevsedni-svet.cz/encyklopedie-vesmiru-hnedi-trpaslici/>
30. SOBOTKA, Petr. Rozhovor: Vojtěch Šimon - Rentgenové dvojhvězdy [online]. 2009 [cit. 2015-06-20]. Dostupné z: http://web.asu.cas.cz/news/73_rozhovor-vojtech-simon-rentgenove-dvojhvezdy/
31. SRBA, Jiří. ČESKÁ ASTRONOMICKÁ SPOLEČNOST. Záhada pulsujících hvězd vyřešena [online]. 2010 [cit. 2015-06-20]. Dostupné z: <http://www.astro.cz/clanky/hvezdy/zahada-pulsujicich-hvezd-vyresena.html>
32. ŠTEFL, Vladimír. *Fyzika chladných hvězd* [online]. Brno, 2010 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: <http://astro.physics.muni.cz/download/documents/skripta/F8670.pdf>

33. ŠTEFL, Vladimír a Jiří KRTIČKA. *Didaktika Astrofyziky* [online]. Brno, 2003 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: <http://astro.physics.muni.cz/download/documents/skripta/FA090.pdf>
34. ŠTEFL, V.; KORČÁKOVÁ, D.; KRTIČKA, J.. *Úlohy z astrofyziky* [online]. [cit. 2013-02-25]. Dostupný na WWW: <http://www.physics.muni.cz/astroulohy/>
35. ZEJDA, Miloslav. *Základy astronomie* [online]. Brno, 2013 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z:<http://astro.physics.muni.cz/download/documents/skripta/F2252.pdf>

10. Seznam obrázků

Obrázek 1: Optická dvojhvězda Alpha Capricorni.....	12
Obrázek 2: Vizuální dvojhvězda Castor.....	12
Obrázek 3: Zákrytová dvojhvězda s Cefeidou (eso1046).	13
Obrázek 4: Ilustrační obrázek rentgenové dvojhvězdy.	17
Obrázek 5: Těsná dvojhvězda MY Camelopardis.....	17
Obrázek 6: Znázornění velké poloosy relativní dráhy a hlavních poloos jednotlivých složek.....	31
Obrázek 7: Znázornění velké poloosy relativní dráhy.....	47
Obrázek 8: Hnědý trpaslík.....	64
Obrázek 9: Rudý obr Betelgeuse.....	64
Obrázek 10: Barnardova hvězda.....	65
Obrázek 11: Hvězda WR124.....	66
Obrázek 12: Supernova 1987A.....	68
Obrázek 13: Bílý trpaslík HD62166.....	70
Obrázek 14: Pulsar uprostřed krabí mlhoviny.....	71
Obrázek 15: Akreční disk kolem černé díry.....	72