Západočeská univerzita v Plzni
Filozofická fakulta

Markýz de l'Hospital
a
Analýza nekonečně malých

Disertační práce

Jan Makovský

Plzeň 2014

Západočeská univerzita v Plzni
Filozofická fakulta
Katedra filozofie
Studijní program: Humanitní studia
Studijní obor: Teorie a dějiny vědy a techniky

Paris IV - Sorbonne
Ecole doctorale - V «Concepts et Langages»
Histoire de la philosophie moderne - Métaphysique

Markýz de l'Hospital
a
Analýza nekonečně malých

Disertační práce

Jan Makovský

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Petr Vopěnka, DrSc.
Katedra filozofie
Filozofická fakulta
Západočeská Univerzita v Plzni

Co-directeur de la thèse: Prof. Michel Fichant
Professeur émérite d'histoire de la Philosophie moderne
Université de Paris IV - Sorbonne

Plzeň 2014

Tuto disertační práci jsem zpracoval samostatně a vyznačil jsem použité prameny tak, jak je to ve vědecké práci obvyklé.

Věnováno dr. Jitce Machalové

Poděkování.

Zásluhu *sine qua non* na této práci mají: Paul Richard Blum, Nikolaj Demjančuk a Jana Slezáková.

Děkuji vládě Francouzské republiky a Fulbrightově komisi,
Petru Vopěnkovi, jehož jméno mi všude otevíralo dveře a rodičům za láskyplnou a bezpodmínečnou podporu.

OBSAH.

Seznam použitých zkratek:

A: LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von der preussischen (Deutschen) Akademie der Wissenschaften, Reihe 1-7, Darmstadt (Leipzig, Berlin): Akademie Verlag, 1923- .

AE: *Acta eruditorum anno MDCLXXXII. [-MDCCXXXI] publicata…* . Mencke, Johann Burchard (ed.); Jöcher, Christian Gottlieb (ed.). Lipsiæ: prostant apud J. Grossii Hæredes & J. F. Gleditschii, 1682-1731.

AT: DESCARTES, René; ADAM, Charles; TANNERY, Paul. *Oeuvres de Descartes publiées par Charles Adam & Paul Tannery.* Vol. I-XII. Paris: L. Cerf, 1897-1910.

E: DIDEROT, Denis; D' ALEMBERT, Jean Le Rond. *Encyclopédie, Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une Société de Gens de lettres*. Tome 1-28. Paris: Briasson, 1751-1772.

FO: FERMAT, Pierre de; TANNERY, Paul (ed., trans.); HENRY, Charles (ed.). *Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry*, vol. I-V. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1891-1922.

HAS: *Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique.* Tome X. Paris: Par la compagnie des libraires, 1730.

HOC: HUYGENS, Christiaan; VOLLGRAFF, Johan Adriaan. *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. Vol. I-XXII. La Haye: M. Nijhoff, 1888-1950.

HOS: BEAUVAL, Henri Basnage de. *Histoire des ouvrages des sçavans*. Rotterdam: Chez Reinier Leers, 1692.

HOV: HUYGENS, Christiaan. *Opera varia*. Lugduni Batavorum: Apud Janssonios Vander Aa, 1724.

JABO: BERNOULLI, Jakob. *Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera*. Genevæ: sumptibus hæredum Cramer & fratrum Philibert, 1744.

JBB: BERNOULLI, Johann; SPIESS, Otto (hg. Bd. I); COSTABEL, Pierre; PEIFFER, Jeanne (hgs. Bd. II-III); SPEISER, David (ed. Bd. II-III). *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*. Basel: Birkhäuse, 1955 (Bd. I). Basel: Springer, 1988-1992 (Bd. II-III).

JBO: BERNOULLI, Johann. *Johannis Bernoulli ... Opera Omnia Tam Antea Sparsim Edita, quam hactenus inedita.* Tom. I-IV. Lausannae; Genevae: Bousquet, 1742.

JS: *Journal des sçavans*. Paris: Chez Jean Cusson, 1691; 1692; 1693.

JWO: WALLIS, John. *Opera mathematica*. Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1695.

KOM: KEPLER, Johannes. *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur.* Fancofurti: Apud Claudium Marnium et & Haeredes Ioannis Aubrii, 1604.

LBC: LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; GERHARDT, Carl Immanuel (hg.). *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*. Berlin: Mayer & Müller, 1899.

MCV: CANTOR, Moritz (hg.). *Vorlesungen über geschichte der mathematik*, vol. 1-4. Leipzig: B. G. Teubner, 1880-1924.

MS: LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; GERHARDT, Karl Immanuel (hg.). *Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. I. GERHARDT.* 7 vols., Berlin (vol. 1-2); Halle (vol. 3-7), 1849-1863. Reprinted: Hildesheim: Georg Olms., 1962.

NMP: WHITESIDE, Derek. *The Mathematical Principles underlying Newton's Principia Mathematica*. University of Glasgow: 1970. SBN 85261 014 9.

OCI: BESSOT, Didier; Cercle d'histoire des sciences (eds.). *Aux origines du calcul infinitésimal.* Paris: Ellipses, 1999. IBSN 2-7298-6818-6.

POC: PASCAL, Blaise. *Oeuvres de Blaise Pascal*, Tome V. Paris: chez Lefèvre, 1819.

PS: LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; GERHARDT, Karl Immanuel (hg.). *Die philosophischen Schriften*. 7 Bände. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung, 1875-1890.

PSR: *Nouveau siècle de Louis XIV*, Tome 4. Paris: Chez F. Buisson, 1793.

PT: *The philosophical transactions 1700-1701*, vol. XXII. London: Printed by M. Mathews for R. Knaplock, R. Wilkin, and H. Clements, 1700. Stable URL: http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/22/260-276.toc.

UB: BERNOULLI, Johann. *Brief an Pierre Rémond de Montmort von Johann I Bernoulli*. BS UB, Handschriften. SIGN: L Ia 665, Nr.15. Stable URL: http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/1719-07-13_Bernoulli_Johann_I-Montmort_Pierre_Remond_de.

VOM: VIÈTE, François; SCHOOTEN, Frans van. *Francisci Vietæ Opera mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita*. Lugduni Batavorum: Ex Officina Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum, 1646.

Ю: L'HOSPITAL, Guillaume François Antoine de; YOUSCHKEVITCH, Adolf P. (ed.). *Analiz beskonechno malykh : perevod s frantsuzskogo, N.V. Levi, pod redaktsiei i so vstupitelnoi statéi A.P. Yushkevicha*. Moskva: Gos. Tekh.-Teor. Izd., 1935.

Markýz de l'Hospital a analýza nekonečně malých

UPOZORNĚNÍ.

Stará matematika.

Matematická díla mají tu zvláštní povahu, že nakolik jsou matematická, podílejí se na bezesporné pravdě, nikdy nemohou ztratit svoji platnost a zastarat. Avšak nakolik jsou díly, vždy jsou psána, vyjadřují se a přistupují k oné pravdě v jistých symbolech. Matematické symboly otevírají cestu nahlédnutí a pochopení. Jsou prostředníky, průvodci, nositeli matematické skutečnosti: lze s nimi počítat. Avšak jako takové se touto skutečností také stávají; a nutně předurčují další cesty pochopení a nahlédnutí a vlastní tvořivou mocí vyjevují nový pořádek matematických souvztahů a skutečností. Takto matematická řeč do *značné* míry symbolizuje sama sebe, a právě z toho důvodu matematická díla naopak nikdy nemohou nezastarat, neboť tvořivá *dynamis* matematických symbolismů je soupodstatná s matematikou jako takovou stejně tak, jako ideál dokonale platné, důvodné a bezesporné vědy.

Od kupeckých kalkulů, vyměřování vlastnických vztahů, odhalování řádu božského universa či vstupní brány do říše idejí matematika v přesném smyslu vždy odrážela duchovní aspirace doby; a jestliže pak matematické symbolismy v sobě vynikavě soustřeďují symbolismy předešlé, a tedy povstávání matematické skutečnosti vůbec, pak také v nejčistším ohledu ztělesňují samotný filosofický obzor daného období myšlení.[1] A pokud je tomu tak, pak se rozumí samo sebou, že vskutku nové a objevné proměny matematických symbolů svědčí o hlubokých rozšířeních obzorů myšlení; naopak, že průlomy myšlení nesou s sebou význačná prohloubení symbolismů. Jestliže tedy matematické symbolismy vyjadřují a dokonce, do značné míry, znázorňují jakousi čistou kvintesenci myšlení, jež stojí za nimi a v nich; pak představují výsadní a nepříliš hledanou cestu do porozumění a proniknutí myšlení doby, dějin myšlení, a tedy i myšlení vůbec; právě tak, jako na druhé straně je co možná celkové uchopení vlastností, hranic a tíhnutí myšlení a jeho dějin královskou, a ještě méně hledanou, cestou do hlubokého proniknutí povahy matematických symbolismů. Myšlení se takto skrze symboly vztahuje samo k sobě a vyznačuje si cestu; platí to sice pro veškeré symboly, avšak pro matematické symboly pro jejich stálost, určenost a přesnost toto platí *význačnou měrou*. Jak jinak se však filosofické myšlení má vztahovat ke světu, než právě takto?

Má tedy pro matematika či filosofa nějaký smysl zabývat se starou matematikou? Odpověď lze nalézt v předešlých odstavcích.

---

1 Už jen v tom je totiž veliký rozdíl, když některá epocha myšlení ještě dovoluje jedním duchem obsáhnout všechno dostupné vědění, zakládat jeho řád a *ukládat mu symboly*, zatímco jiná tyto symboly univerzálních vztahů jejich vlastní silou rozvíjí, podkládá, prohlubuje.

Infinitesimální počet.

Bylo by jistě zbytečné zde sáhodlouze vykládat o významu počtu nekonečna pro utváření současného myšlení i současného člověka; představuje základní kámen vrcholné stavby vědy a techniky posledních staletí, neviditelný symbol, nástroj průmyslové civilizace a ekonomického myšlení. Infinitesimální počet, dnes pevně ustavená, plně začleněná matematická disciplína se, i kdyby jen silou zvyku a výchovy, může jevit samozřejmě. Jakožto přesně určený soubor pojmů, vět a postupů obvykle ze strany matematiků nevyvolává otázky, zatímco pro většinu filosofů je ve své řeči natolik odloučený, vzdálený a nepřístupný, že k němu sotva mohou nalézt cestu.[2] Jestliže takový je daný stav, pak lze nicméně ukázat, že infinitesimální počet v novosti své první ražby byl oproti dnešku co do založení radikálně odlišnou teorií. Výrazem myšlení spojitosti, do níž vstupuje vždy úvaha nekonečna; vycházející z *přirozenosti symbolů*, pojednávající *charakteristickým* způsobem o kvalitativně jiném předmětu, totiž *přirozenosti křivých čar* coby stop zákona vesmírné přírody. Totiž způsobem, který (*ad philosophos*) lze z geometrie, při jistém porozumění dvojznačnosti symbolů, také vskutku *nahlédnout.* Nicméně cesta k jeho soudobé podobě byla poznamenána důležitými kroky a rozhodnutími filosofické povahy, jež právě (*ad mathematicos*) tvoří skrytý obsah dnes samozřejmé teorie funkcí a jejich formulí; a že i na této cestě se výsledné výnosy váží průběžnými ztrátami, které nikdy nebude možno docenit bez znalosti cesty samé, a tedy, tím méně, bez poznání jejího počátku. Počátek cesty infinitesimálního počtu coby svébytné matematické disciplíny pak zajisté neleží nikde jinde než v *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, prvním systematickém pojednání diferenciálního počtu na Leibnizových základech, z pera neznámého autora *alias* Guillauma-Françoise-Antoina, markýze de l'Hospitala.

Jestliže renesance byla dobou oplývající moudrostí, pak Velké století se vyznačovalo radikální objevností *in universum*. Že renesanci matematici nerozumí nikoho nevzrušuje. S odplývajícími léty je ovšem, z pochopitelných důvodů, stále obtížnější odkrýt dokonce i kořeny objevů Velkého století; neboť půda, z níž vyrůstaly, byla překryta dalšími nánosy času, novými formalizacemi starých symbolů, anachronismy, disciplínou a únavou: vlákny systémů, abychom si vypůjčili slova milovaného anarcho-spinozisty Alaina, která si člověk ovíjí kolem sebe, jež z počátku září, avšak brzy se stávají suchá, tuhá a neprostupná a věci zahalují. Hledat kořeny značí, „připravit se, chopit se každé otázky tak, jak je, pojednat každou otázku, jako by byla jediná, jako by byla první, jako by

2 Že to pak u některých horlivějších jedinců vede až k vylučování matematiky z filosofické rozpravy vůbec a k zásadovému ponižování matematického myšlení *de iure* coby „neživotného“, „suchého“ či „neplodného“, je pak otázkou spíše pro psychology.

se svět zrodil včera.“[3] Pochopitelně, co více může odhalit kořeny než hledání kořenů? Obecným míněním kořeny naší doby sahají hluboko do Velkého století, kdy matematika a filosofie byly jediným společným kmenem myšlení, jehož kořeny se prostupovaly; plodem tohoto charakteristického období je mimo jiné jeho význačný vzorek, infinitesimální počet. Coby příspěvek k jeho pochopení se vším, co k tomu bylo shora řečeno, se tedy české vzdělané veřejnosti předkládá i toto vydání *Analýzy nekonečně malých.*

Cíl práce a metoda.

Svým postupem se pokusím propojit oba dva zmíněné přístupy, tedy humanistickou metodu i metodickou neznalost, jak ještě rozvedu. Cíl práce, tj. překladu, komentáře a úvodu k předkládanému dílu, musí být sám o sobě zřejmý každému, ještě před tím, než je vůbec otevře. Nemůže to být nic jiného než: *představit a zpřístupnit Analýzu nekonečně malých v její jedinečnosti i univerzálnosti*, tj. v její konkrétnosti. Za tímto účelem je zajisté zapotřebí, aby autor byl co možná neviditelný. Přesto však k tomu připojím několik poznámek.

Práce spočívá, řeklo by se, ve třech výkladových vrstvách; v jejich jednotlivých částech jsou každá přítomna různou měrou, ale lze říci, že tak či onak jsou patrné ve všech. Ostatně domnívám se, že čtenář je navzájem snadno rozezná. Nejvyšším teoretickým principem, regulativní ideou, hlediskem rozvrhu a, dalo by se snad i říci, metodologií[4] odvislou od požadavku univerzálního náhledu na *Analýzu nekonečně malých* je jisté pojetí analogické, symbolické přírody, jíž lze vystopovat hluboko v renesanci; nicméně jejíž racionálně založený tvar podal, nakolik znám, nejhlouběji Leibniz skrze princip kontinuity založený v pojmu univerzální harmonie a v posledku v otázce teodicey. Z principu kontinuity jsou položeny podmínky pro symbolické *vyjádření* nekonečna a jeho uzavření v pravidlech počtu. V jistém detailu jsem o tom pojednal jinde[5] a co do dějinného vývoje jistě ještě pojednám. Bylo by zbytečné to tu opakovat; a také by to narušovalo soustředění této práce kolem *Analýzy nekonečně malých*. Nicméně, jak se snažím dokládat v různých ohledech infinitesimálního počtu, zakládajících i tvořivých, přímo na rozborech přístupů ke konkrétním matematickým úlohám tohoto období; duch analogií a symbolického prostupování geometrie a přírody a především vrcholný předpoklad dokonalosti přírody je u tvůrců raného infinitesimálního počtu všudypřítomný. Konečně a snad právě proto, stále tu byl jen jeden člověk, který diferenciální počet *objevil*, a jmenoval se Gottfried Wilhelm Leibniz.

3 Alain (1985, 12).
4 Neboť nauka o cestě nelze od pojmu perspektivy oddělit.
5 Makovský (2012 a 2013).

Druhou vrstvu, kterou lze nahlížet také jako důsledek zákona kontinuity a tvořivosti symbolů výše, zakládá pojetí dějin matematických metod 17. století vlastní této práci. Řeč je o postupném přechodu od vnější, názorné, syntetické geometrie přes oproštění přirozenosti křivek od podmínek jejich konstrukcí vstříc k čistému abstraktnímu tvaru; až do nitra principů čar: a to prostřednictvím algebraických symbolů a operací, čili na základě postupné algebraizace geometrie. Nejvrcholnějším výkonem tohoto dějinného spádu vstříc obecnosti je samozřejmě Leibnizův infinitesimální počet. Nejedná se však o nikterak výjimečnou teorii; aspoň co do své povšechné podoby představuje v zásadě *locus communis* naprosté většiny prací z dějin matematiky. Dokládán a potvrzován je tento symbolický postup na mnoha příkladech především v komentáři k *Analýze nekonečně malých.*

Třetí a přirozeně základní vrstvu mého výkladu matematického 17. století zaujímají řeklo by se vnější dějinné okolnosti matematických metod a objevů. Osobní, společenské, institucionální pohnutky a pnutí, spory, výzvy, porážky a úspěchy. Tato vrstva základní samozřejmě je. Jak známo, bez pýchy, závisti a marnivosti by v duchu Leibnizovy teodiceje mnoho dobrých myšlenek možná ani nevzniklo, neboť matematické ideje se nerodí bez matematiků a matematici bez údělů, které jejich ideje nutně určují právě tak, jako tyto ideje jejich životy; a to, jak se často stávalo, *usque ad pulverem mortis*. Nicméně při výkladu je těmto okolnostem věnováno jen přiměřené místo; prací, které nespočívají v ničem jiném, je více než dost.

Obecně lze říci, že tyto vrstvy – ostatně právě tak, jako samy dějiny – uměle nerozděluji. Svým přechodem od jedinečnosti k metafyzické obecnosti tvoří právě konkrétnost dějin matematických idejí; a všemi těmito vrstvami nutně prostupuje požadavek věrnosti duchu, tvaru i výrazu metod. Všechno shora uvedené by nepomáhalo vůbec ničemu, kdyby se dějinné postupy, metody, výsledky převáděly (jakým právem?) na soudobé matematické pojmy, třebaže je na ně někdo zvyklý; přednost dávám pojmům původním i s jejich případnými slepými uličkami, neboť i ty vyrůstají z jejich kořenů. Porozumět *myšlence* v jejím původním výrazu nemůže být o nic náročnější, než ji odcizit a násilím vtlačit byť třeba do sebeúhlednější formy. Až na pohledy k vzdálenému horizontu budoucnosti, v této práci matematika končí dnem úmrtí markýze de L'Hospitala. Metoda obludné neznalosti pozdější matematiky totiž působí jako svého druhu sebeobrana právě před lehkostí, s níž by bylo lze je vytrhat z kořenů a vynést jejich *základy* na úroveň případků nějakého sublimovaného, nadosobního, dějinného zákona, železným (po)krokem směřujícího – jak se přihodilo v pracích některých historiků matematiky – například k pojmu limity. Lidé obecně svá díla netvoří coby (nedokonalé) články schématu sestaveného nějakým badatelem, kritikem či ideologem z odstupu více méně vzdálené budoucnosti.

Skladba práce.

Úvodní studie nese jeden hlavní cíl, totiž přiblížit jedinečné okolnosti vzniku *Analýzy nekonečně malých* a přirozeně život, dílo a osobnost jejího autora, markýze de l'Hospitala. Poněkud obsáhlejší, metavrstevnatý výklad se sám sebou ospravedlňuje jednak dokonalou prázdnotou stran markýzovy osoby v českém písemnictví;[6] jednak mimořádným příběhem jeho samého i jeho vlastního příběhu. Základ je vynesen v první části práce, jež poskytne základní uvedení do děje, kulturně duchovních souvislostí a nutné předporozumění k dalším výkladům. Akademický portrét, jak se tato část nazývá, vyjadřuje tvář markýze de l'Hospitala tak, jak si ji zapamatovali jeho nejbližší současníci a po nich i dlouhá staletí, až do postupného odkrytí podstatných skutečností, jež tento portrét staví do ostřejšího světla. To je pak účelem druhé části studie, která představuje zrod markýzových největších matematických úspěchů v úzkém sepětí s jeho učitelem a služebníkem Johannem Bernoullim. Na tento vztah, v duchu výše uvedeného, kladu stejný teoretický důraz jako na samy výsledky, jimž dal povstat; vzájemná dopisová výměna, z níž se zvolna vynořuje skrytý portrét Guillauma de l'Hospitala (ale též Johanna Bernoulliho). A věru není důvod,[7] proč z těchto kořenů *Analýzu nekonečně malých* vytrhávat, obzvláště, když by se v dějinách těžko hledal podobný případ, kde by se takto vznešeně a výjimečně proplétaly výsostné ambice, vášně lidské i geometrické, nerovnosti rodu, majetku i nadání. Ostatně právě v době průmyslové velkoprodukce filosofie, *bodového* ohodnocení myšlení, kde libovolná výrobní jednotka je nahraditelná jakoukoli další dle svrchovaného zákona trojčlenky, mohou mít tyto příběhy až titánský nádech zvýrazňující jedinečnou povahu *Analýzy* a ostatně každého skutečně duchovního díla; a netřeba si nalhávat, že nic takového do vědy nepatří. Kromě nedohledné propasti vzájemných vztahů obou vrcholných geometrů představují dopisy L'Hospitala a Bernoulliho jedinečnou laboratoř zrodu matematických idejí a poskytnou nám vhled do geometrie ducha markýze de l'Hospitala a jeho podílu na svých úspěších. Konečně ve třetí části se na pozadí sporů, které vyvolával – také díky *Analýze nekonečně malých* – nezadržitelný postup „vnitřní geometrie“ blíže porozhlédneme po povaze tajemného znaku *dx* a otevřených možnostech založení nekonečně malého. Závěr studie bude věnován pokusu o zhodnocení otázky *Analýzy nekonečně malých*.

V překladu knihy vycházím ze samozřejmé skutečnosti, že byla psána nikoli latinsky, nýbrž francouzsky,[8] tedy jazykem světa vzdělaných, „počestných lidí“ (*honnêtes gens*) Velkého století, a tedy nikoli řečí školských učenců. Pokud jde o překlad do češtiny, rozumí se obecným pravidlem, aby byl vskutku český; a nakolik je to možné, i v citlivém případě řeči matematické a jejího

6 A jak se zdá, také v obecném povědomí českých vzdělanců.
7 K těmto ohledům vědeckého myšlení se mimo to zejména v angličtině v současnosti píší celé monografie.
8 Dokonce „elegantní prózou“, jak uvádí René Taton (1964, 232).

názvosloví. Vedou mě k tomu následující důvody: cizí slova, tj. latinsko-řecké internacionalismy, jimiž se plynně vyjadřuje současná česká matematika, obecné francouzštině většinou nejsou cizí a často jsou přirozenou součástí běžné, nematematické mluvy. Vedle toho je řeč o práci ze 17. století, kde matematika zpravidla povolovala větší volnost a rozmanitost ve vyjadřování, než by bylo přípustné v dnešní době. A proto všude tam, kde se nabízí – a nehrozí při tom zmatení, násilnost nebo pád do směšnosti (brusičem nejsem) –, dávám přednost názvosloví českému, a tak místo *exponent* píši *mocnitel*, místo *konvexní* píši *vypouklý*, místo *konvergující* (paprsek) píši *sbíhavý*, na místo *termíny* pak *členy* a podobně.[9] Přínos zvoleného postupu lze spatřovat nejen ve věrnějším postihnutí L'Hospitalovy řeči a přiblížení klasické matematiky v jejím stylu – ale především v jejím (prvotně geometrickém, názorném a až poté formálně definičním) *obsahu*; a sice na způsob pojistky proti pojmovým posunům, anachronickému vnímání tam, kde *jméno* zůstalo nezměněno, přičemž *definiendum* se od kořene liší. Jistěže předešlé je z větší části stále jen otázkou vkusu, nyní přicházejí na řadu rozhodnutí závažnějšího charakteru. V jistých podstatných ohledech se totiž nynější české názvosloví s uchopením pojmů *Analýzy* míjí zcela; a pak je nutně zapotřebí volit – a citlivě vážit – mezi pokřivením originálu, anebo překladu. Týká se to bohužel, logicky, těch nejzákladnějších pojmů jako *droite* (přímá čára), *valeur* (hodnota) a konec konců i *différence* (rozdíl, diferenciál). Nemá smysl podávat zde úplný výčet překladových obtíží a definic, ostatně by ani nebylo rozumné jej během překladu bez dalšího strojově sledovat. Rozhodnutí činím vždy hlavně s ohledem na dané místo *Analýzy*; na případné diskrepance se upozorní v komentáři. Obecně lze tedy říci, že překlad přes snahu o co největší plynulost dnes neobvyklé názvy zachovává či razí všude tam, kde lze zdůvodnit jejich závažnost pro vývoj matematiky, a tím i tvar *Analýzy nekonečně malých* tak, jak jsem jej nahlédl v napětí mezi hranicemi přirozenosti geometrického názoru a postupným dobýváním symbolického, algebraického prostoru svobody, čili v plném souladu s celkovým pojetím mé práce.

V komentáři k překladu *Analýzy*, jenž se týká jazykových, pojmoslovných, historicko-matematických i filosofických určení textu, vycházím přirozeně z vynikající práce tehdy třicetiletého ruského matematika a historika matematiky A. P. Juškeviče.[10] A proto, jako markýz de l'Hospital, s klidným svědomím prohlašuji: *Поэтому я не имею ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить*. Nicméně nikoli výhradně a nikoli bezvýhradně. Juškevičovy

9 Někdy také pro menší rušivost využívám obou možností *promiscue.* Pokud je například řeč jak o bodech inflexních (*points d'infléxion*), tak o bodech vratu (*points de rebroussement*) obecně, překládám souslovím *body přehybu a vratu*; jestliže se naopak mluví pouze o *point d'infléxion*, převádím běžným způsobem: *inflexní bod.*

10 ЮО (1935, 368-429). Dlužno dodat, že v těžko rozhodnutelných případech názvoslovné povahy, viz výše, mi byl nedocenitelným pomocníkem též ruský překlad N. V. Leviho. Bez objevení této práce si z dnešního pohledu tu svoji těžko dovedu představit.

komentáře rozvíjím jednak o poznatky současné literatury z dějin matematiky, jednak, a to především, je doplňuji o důležité citace, odkazy, analýzy a shrnutí, nakolik bylo možné je dohledat, přímo z pramenů. Čtenář si snad povšimne, že komentář zahrnuje poměrně objemný výběr z významných matematických textů 17. století, ať přímo řešení úloh, anebo obecnějších filosofických poznatků stran metody, geometrie a přírody – zaměřené především k Descartovi, Huygensovi a přirozeně ke kolosální postavě Leibnize, okolo níž se točí takřka vše. Důvod toho lze spatřovat jednak ve skutečnosti, že by bylo dokonale absurdní předkládat český překlad *Analýzy* a na vysvětlenou ji zavalit hromadou zejména latinských a francouzských citací; jednak v souladu s výše vyslovenými principy správné odpovědi, jsou-li vůbec nějaké, neposkytuji a ponechávám čtenáři radost z nahlédnutí. Komentář se samozřejmě odvíjí od řádu a pořádku tvrzení *Analýzy nekonečně malých*, který sám o sobě stačí na to, aby se přenesl i do komentáře. Počátky kapitoly obvykle doprovázím syntetickou mikro-studií; další vysvětlivky lze nahlížet jako kamínky do mozaiky dějinného obrazu matematické doby. Konečně slouží komentář zejména k vyjasnění otázky zásluhy o *Analýzu nekonečně malých*, a to na základě srovnání příslušných článků *Analýzy* a jejích zdrojů v Bernoulliho *Lectiones* nebo vzájemné korespondenci.

Prameny.

Jak už bylo řečeno, tato práce spočívá především v práci s primární literaturou, pochopitelně s podstatnou oporou v pracích vydavatelů těchto spisů. Z nich stojí na prvních místech z povahy věci Otto Spiess a Pierre Costabel. Pokud jde o Leibnizovu filosofii a matematiku, vycházím z Leibnize. K chápání Leibnize jsem si však notně vypomáhal pracemi význačné řady francouzských leibnizovců, již by se dali označit jako Pařížská škola, a dalších významných badatelů v pořadí chronologickém: vévoda Foucher de Careil, Louis Couturat, Yvon Belaval, Pierre Costabel, Enrico Giusti, Henk Bos, Michel Serfati, Michel Fichant, Michel Blay, Marco Panza a další.[11] Pro tuto práci je však bezesporu nejvýznamnější Marc Parmentier a jeho *Naissance du calcul différenciel*. Zatímco prací o Leibnizově počtu jsou tisíce, co se týče bratrů Bernoulliů, tento počet závratně klesá, zde např. Jeanne Peiffer; přičemž u L'Hospitala – kromě Spiesse – je tato veličina „nesrovnatelně menší“. Základní poznatky a srovnání lze nalézt v přehledné, byť katalánsky psané, disertaci Moniky Abéllan-Blanco. Lze tuto práci tedy považovat za jednu z mála na světě a jedinou v českém jazyce.

11 Omlouvám se všem, které jsem neuvedl. Nicméně si myslím, že si z toho těžkou hlavu dělat nebudou.

Omluva.

Hloubavý čtenář se jistě již táže, proč tímto vším zdržuji od vstupu do vzrušujících událostí okolo vzniku epochální práce o novém počtu, od nového počtu vůbec a samozřejmě: především od samotné *Analýzy nekonečně malých*. Vždyť na tom není žádná věda! Odpovědí budiž „norma ISO 690: 2011 zakoupená firmou ZČU“ (*sic!*). Ježto jsem člověk spořivý a nesnáším mrhání veřejnými prostředky, s hlubokou pokorou jsem se pokoušel dostát všem jejím požadavkům. Avšak z vlastní povahy práce. Jsem dalek toho názoru, že poznámky pod čarou by se neměly psát; naopak se s prof. Jarníkem domnívám, že by se měly číst. Poněvadž, jak bylo řečeno, tento spis z podstatné části stojí na práci s prameny, jistá míra poznámek pod čarou je nevyhnutelná. Poznámky pod čarou umožňují vnitřnější pojednání dokladu, hodnocení jejich důvěryhodnosti, kladení souvislostí a spousty dalších věcí, pro něž v hlavní stati není místo, aby se alespoň částečně zachoval *literární* charakter práce. Jedná se navíc o vynikající nástroj přípravy porozumění, očekávání a předání stavby myšlenky. V tomto případě pak navíc zrcadlí i polyfonii vzniku infinitesimálního počtu, jenž se rodil především právě na stránkách dopisů.[12]

Pokud jde o geometrické obrazce, všechny pocházejí z volně přístupných nejblížeji citovaných děl; v rámci *Analýzy nekonečně malých* pak z Juškevičovy a Levyho vydání z roku 1935. Podobizna markýze de l'Hospitala (Obr i) je převzata ze Spiessovy edice Bernoulliho a L'Hospitalových dopisů.[13]

Občasný metaforický jazyk a obrazná řeč je plně v souladu s principem první teoretické vrstvy této práce. A rád bych zdůraznil, že znak *dx* je v hloubce nahlédnutí právě té samé povahy. Metafory postihují význačné rysy věci i bez rozlišené znalosti jejího základu; a je tedy vynikajícím výkladovým nástrojem; a kromě toho tací logici jako Leibniz si právě proto tuto řeč v „dobře založených případech“ nijak nezakazovali. Tak jako Policie ČR vlastně splnila Leibnizův sen v podobě *číselníku všech věcí*, tak i řečenou normu pokládám za malý zázrak, neboť *formální pravidla tvoří řád*. Každý leibnizovec nicméně ví, že dokonalost formy je nevyčerpatelná, a proto chápu řečenou normu spíše jako vynikajícího pomocníka a odrazový můstek k vyšší syntéze a formální dokonalosti, neboť z vlastní povahy práce: nejen rozsahem, ale i obsahem jde tu o práce tři, které však musejí tvořit vyšší jednotu.

12 Nejvhodnější formou tudíž shledávám psaní ve dvou sloupcích, jak se ukazuje v vynikajících pracích Petra Hory *Toulky českou minulostí* anebo v neméně skvělých *Dějinách římské literatury* Jiřího Šubrta.

13 JBB (I, 128)

ŽIVOT A DÍLO GUILLAUMA DE L'HOSPITALA.

Akademický portrét.

Guillaume-François-Antoine de l'Hospital,[14] markýz ze Sainte-Mesme, vévoda z Entremontu, pán z Oucques, la Chaise, le Bréau *et cetera*, se narodil roku 1661 z věhlasného šlechtického rodu, který svůj původ a urozenost odvozoval ze starého neapolského rodu Galluccio.[15] Jeho otcem byl Anne-Alexandre de L'Hospital, generálporučík královské armády, vévoda ze Saint-Mesme atd., matkou Elizabeth Gobelin, dvorní dáma velkovévodkyně z Orleans. A protože po staletí byli všichni L'Hospitalové oddáni vojenské službě, byl i mladý Guillaume předurčen ke zbraním, neboť „to je přirozené povolání šlechticů“.[16]

Raná léta studií se u Guillauma de l'Hospitala nesetkala s velikým nadšením. Latinu, pro niž patrně neměl ani pochopení, ani nadání, učil se z donucení a těžko by v něm někdo tehdy stopoval dráhu význačného vědce. Sotva však u svého učitele, jenž se ve volném čase chtěl vzdělat v matematice, spatřil na stránkách knih kruhy a trojúhelníky, jeho přirozená náklonnost „ohlašující téměř vždy velké talenty“[17] se začala projevovat naplno. Od učitele se mu dostalo svolení věnovat odměnou za splnění všech povinností pár hodin týdně geometrii a nadále „již nebylo třeba jej postrkovat: bylo třeba jej zadržovat“.[18] V písemnictví si nyní vedl snad veskrze uspokojivě – avšak jeho pokroky matematické vzbuzovaly úžas. Svého učitele brzy nechal za sebou a ani jeho nástupce při veškerém úsilí a nadání nemohl žákovi dlouho stačit, poněvadž, velice pravdivě poznamenává Fontenelle, „to, co získáváme pouze prací, se sotva vyrovnává bezplatné přízni přírody“.[19]

---

14 Ačkoli řeč je o nejvýznamnějším francouzském matematikovi konce 17. století, o běhu života a osobnosti markýze de l'Hospitala není příliš známo. Po celá staletí zde hlavními a vlastně jedinými doklady zůstávaly chvalořeči jeho pařížských přátel z roku L'Hospitalovy smrti 1704, Bernarda de Fontenella, „Éloge de Monsieur le Marquis de L'Hospital“. In: *Éloges des Academiciens. Avec l'Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, T. 1, La Haye: Isaac van der Kloot, 1715, s. 47-63 (Fontenelle 1715, 47-63) a Josepha Saurina, „Éloge de M. le Marquis de L'Hospital“. In *Journal de Sçavans*, 17. mars 1704, s. 188-192 (Saurin 1704, 188-192). Z těchto pramenů přirozeně bude čerpat i tato drobná životopisná črta. Poněkud hlubší vhled do L'Hospitalova příběhu, okolností vzniku jeho prací a snad i povahy přineslo až vydání korespondence s jeho mladším učitelem, chráněncem a vrcholným matematikem Johannem Bernoullim, *Der Briefwechsel von Johann I. Bernoulli*, Bd. 1 (Hg. O. Spiess), Basel: Birkhäuse, 1955; neboť zajisté tato korespondence v celé rozporuplnosti vztahu obou geometrů nese niternější stopu než třeba L'Hospitalovo dopisování s Leibnizem či Huygensem, s nimiž se osobně nestýkal. Spolu s úvodní prací toho nejpovolanějšího, jejího vydavatele, Otto Spiesse, „Einleitung“ (tamt., 123-157), konečně bude východiskem pro další pokračování tohoto pojednání, kde se představí povaha L'Hospitalových matematických „objevů“ a pochopitelně geneze *Analýzy nekonečně malých*.

15 Což značí „kohoutek“ a vysvětluje vyobrazení kohouta ve středu L'Hospitalova rodového erbu (Obr i). Saurin (1704, 188-189), následuje L'Hospitalův rodokmen jen k Adrienu de L'Hospitalovi, jenž vedl předvoj vítězné královské armády v bitvě u Saint Aubin du Cormier roku 1488; aby, jak říká, nepřipravil další autory„o tak krásnou genealogii“, která sahá až do neapolského království roku 1161, do Francie se přesouvá roku 1349 (Anselme VII, 432-438).

16 Saurin 1704, 189.

17 Fontenelle 1715, 48.

18 Saurin 1704, 189.

19 Fontenelle 1715, 48


Foucher pinx.
Edelinck Eques sculp.
Guillaume François Marquis de l'Hospital, et du Montellier, Comte de Saintemesme, et d'Antremonts, Seigneur d'Ouques, et autres lieux.

Obr i

Jednoho dne, když se ve věku 15 let ocitl Guillaume de L'Hospital svědkem rozpravy u vévody de Roannez[20], při níž byli přítomni význační učenci a geometři včetně velkého Arnaulda, přišla řeč na Pascalovu úlohu o cykloidě, a ta se všem zdála obtížná. Mladý matematik prohlásil, že ji snad bez obav vyřeší, což bylo zmíněnými pány pokládáno za opovážlivost, jíž by vzhledem k mladému věku pochopitelně bylo možno odpustit. Avšak již za dva dny přispěchal Guillaume s několika pozoruhodnými řešeními, která více než výmluvně svědčila o jeho velkém nadání i netušených příslibech do budoucna.[21]

Geometrii L'Hospital neopustil ani, když, jak se od mladého šlechtice slušelo a očekávalo, vstoupil do vojenské služby. Věnoval se jí usilovně, „dokonce i ve stanu, kam se uchyloval nejen kvůli studiu, ale také aby svou píli skryl“;[22] a byl natolik zběhlý v umění skrývat své nadání a předstírat nevědomost *par bienséance*, že ani ty nejpodezíravější kamarády by bylo vůbec nenapadlo hledat v něm jednoho z budoucích vůdčích matematiků Evropy. Dosáhl hodnosti kapitána jízdy; avšak jeho krátkozrakost, vlivem níž sotva viděl na deset kroků, působila mu v plnění služby ustavičné potíže, které nebyl schopen překonat. Vadou či nedostatkem tělesného zraku[23] musel tedy řemeslo svých předků opustit, aby se nicméně mohl nyní s plným nasazením oddat pohledu vnitřnímu; mezi ním a jeho vášní pro matematiku již nestálo vůbec nic.

Jak praví Platón ve svém VII. Listu, i pro ten největší talent je k úplnému zažehnutí zapotřebí nechat přeskočit jiskru, což lze jedině v kruhu sobě rovných a blízkých. Nebylo tomu tehdy dávno, co se objevila brzy proslulá kniha *De la Recherche de la Vérité*[24]. Z její četby záhy markýz de

---

20 Arthus Gouffier, vévoda de Roannez (1627-1696), královský místodržící v Poitou za doby Frondy, vášnivý podporovatel věd a řemesel, *honnête homme* a blízký přítel Blaise Pascala, pod jehož vlivem se obrací k jansenismu. Po Pascalově smrti se podílel na sebrání jeho rukopisů, pozdějších *Pensées* (1670), vzdal se titulů, majetku i milionové svatby a zbytek života strávil v náboženském ústraní.

21 Příhodu s drobnými rozdíly uvádí jak Saurin, tak Fontenelle a nikterak ji nezpochybňuje ani Spiess; nic dalšího se v jejím případě nedochovalo, a tak pochopitelně nelze určit přesné zadání úlohy, natož pak ocenit zmíněná L'Hospitalova řešení. Pascalovými úlohami z *Histoire de la Roulette* (1658) byly kvadratura libovolného úseku pod obloukem cykloidy, nalezení jeho těžiště a dále těžiště příslušného rotačního tělesa. Řešení byla podána jen dvě, Wallisovo a Lalouvièrovo, přičemž, pro Pascala, uspokojivé nebylo žádné (v. 48). Každopádně studium cykloidy vyžadovalo jasné pochopení a nemalou zručnost v tehdejší metodě nedělitelných, a jednalo by se tedy, ať už L'Hospital v 15 letech znal z posledního vývoje geometrie cokoli, o věc vskutku mimořádnou.

22 A Fontenelle (1715, 49), se svou neúprosnou duchaplností pokračuje: „Neboť je třeba přiznat, že francouzský národ při veškeré své uhlazenosti, jíž žádný jiný nedosahuje, nachází se stále v onom stavu barbarství, že pochybuje, zdali by si vědou dovedenou k jistému stupni dokonalosti nezadal a zdali potom není ušlechtilejší nevědět vůbec nic.“ Naproti tomu klade Saurin L'Hospitalova stanová studia spíše do souvislosti se svědomitým plněním vojenských povinností.

23 Saurin (1704, 190), zesiluje krátkozrakost markýze de L'Hospitala dokonce až na úroveň dvou kroků tak, že náš jízdní kapitán „sotva viděl i ty, kdo mu salutovali“. Což je skutečně výjev královské armády hodný dobrácké tváře, všeobjímajícího pohledu Josefa Švejka; a rovněž by to vysvětlovalo průběh četných válečných dobrodružství Krále Slunce. Bylo by však chybou se domnívat, že s L'Hospitalem byla krátkozrakost z francouzské armády vymýcena. Naopak. Jak po Tainovi poněkud lehkovážně vypráví Coolidge (1990), 147), právě krátkozrakost stojí za rozhodujícím vítězstvím *Grand Armée* u Auerstädtu roku 1804, kdy maršál Davout stále si nemoha nepřítele dobře prohlédnout byl nucen postupovat blíž a blíž, až konečně spatřil poražená vojska ustupující od Jeny a zavelel k poslednímu odpoledni slavné pruské armády.

24 *De la recherche de la vérité, où l'on traitte de la nature de l'esprit de l'homme, et de l'usage qu'il en doit faire pour éviter l'erreur dans les sciences* („O hledání pravdy, kde se pojednává o povaze lidského ducha a způsobu jeho

L'Hospital usoudil, že autor *Recherche*, sám ostatně velice schopný matematik a fyzik, „musí být vynikajícím průvodcem po vědách“[25]; a tak přirozeně pojal záměr se – po odchodu Huygense roku 1681 – s největší vědeckou osobností Paříže seznámit. Bez meškání se tedy připojil k Malebranchovu učenému spolku při *Congrégation de l'Oratoire*[26] a stal se nejen blízkým přítelem a vděčným učedníkem slavného filosofa, ale také, jak bude později vyprávět Johann Bernoulli, jedním z nejpřičinlivějších členů jeho kruhu.

Pod vedením otce Malebranche tedy mohl tehdy ani ne třicetiletý Guillaume de L'Hospital „završit zdokonalení svého ducha“[27] a začít výstup na hlavní jeviště evropské geometrie. Nicolas Malebranche nicméně přes veškerou svoji velikost, na rozdíl od L'Hospitala, nebyl skutečným matematikem. Naproti tomu třebaže Christiaan Huygens po patnácti letech budování nově založené Akademie věd v Paříži nadále nepobýval, nevyhnutelně zde působil jeho duch a věhlas; a především z jeho prací čerpal nyní markýz de l'Hospital své další matematické vzdělání. A právě dílo nepřítomného učitele mu konečně poskytlo první příležitost uplatnit bystrost svého ducha. Ve věci sporu o jeden z nejvýznamnějších Huygensových výsledků, nalezení středu kyvu (*centre d'oscillation*) matematického kyvadla, z *Horologium oscillatorium*,[28] tehdy ještě zcela neznámý L'Hospital zasílá Huygensovi dopisem řešení[29] otázky, jímž proti námitkám Abbé Catelana i Jakoba Bernoulliho z roku 1686 prokazuje správnost původního Huygensova výsledku. Huygens, byť z

používání tak, aby se vyvaroval omylů ve vědách“) je hlavním dílem Nicolase Malebranche o šesti knihách, vydaným v Paříži v letech 1674-1675, jež v duchu augustinovsko-novoplatonské filosofie, z karteziánských principů vyúsťuje ve známý metafyzický systém „zření v Bohu“ (*Vision en Dieu*) a fyzikální pojetí přírody coby systému relací. Kniha se stala předmětem jedné z největších filosofických polemik 17. století, kdy proti Malebranchově nauce o poznání, především kvůli jejím teologickým důsledkům, vystupuje s *Des vraies et des fausses idées* (1683) a dalšími díly Antoine Arnauld.

25 Fontenelle 1715, 50.

26 *Congrégation de l'Oratoire de Jésus-Christ* byla založena roku 1611 kardinálem de Bérullem a představovala již od svého počátku mimořádnou vzdělávací instituci proslulou duchem svobody a tolerance a náklonností k historickým studiím i novým vědám, a to vzdor četným útokům ze strany jezuitů. Matematika a fyzika se v Oratoři pod vlivem Descartovy filosofie i k její obraně a oslavě rozvíjela především ve druhé polovině 17. století. Bernard Lamy (1640-1715), autor nových *Élements de Géométrie* (1685) v duchu algebry, matematik, fyzik a jedna z nejvýznamnějších osobností *Congrégation* dokonce píše: „pokud je kartezianismus mor […], pak je nás tu víc než sto, kdo jsme jím nakaženi“. Ke slávě Oratoře a šíření karteziánských idejí na její půdě pak samozřejmě přispělo i vydání *Recherche de la Vérité* otce Malebranche, který zde právě od roku vydání 1674 zastával místo profesora matematiky; a třebaže matematiku přímo neobohatil o nové věty či objevy, jeho zásluhy o její rozvoj nelze v žádném případě pominout. Okolo sebe soustředil hlavní francouzské geometry a vědce doby, jako byli Prestet, Reyneau, Catelan, Molières, Rohault, L'Hospital, Varignon, Saurin, Fontenelle a konec konců i Johann Bernoulli. Právě Malebranche hrál hlavní úlohu v usměrnění „ducha vanoucího z Hannoveru“, čili uvedení a prosazení infinitesimálního počtu ve Francii; a skrze Fontenella stál konečně i u reforem francouzské Akademie věd na konci 17. století. K „Malebranchovu kruhu“ viz například Fontenelle (1715); Robinet (1960); Costabel (1965).

27 Saurin (1704, 190); a „jeho vědění brzy dospělo do bodu, kdy už nebylo možné je skrývat“ (Fontenelle 1715, 50).

28 *Horologium oscillatorium: sive, De motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae* („O kyvadlových hodinách, aneb geometrické důkazy o pohybu kyvadel uzpůsobených pro hodinové stroje“) z roku 1673 je vrcholným dílem nejen Christiaana Huygense a s ním i veškeré mechaniky 17. století mezi Galileem, Descartem a Newtonem, ale také největším z výkonů geometrie na antický způsob, bez podstatného využívání algebry a jen s archimedovsko-cavalierovským základem infinitních metod. O středu kyvu se pojednává ve čtvrté části, *De centro oscillationis* (HOC XVIII, 243-360).

29 18. dubna 1690, N° 2580 (HOC IX, 403-406), kde také lze nalézt odkazy na místa příslušných Bernoulliho a Catellanových polemik stejně tak, jako Huygensovy odpovědi.

počátku ne zcela bez výhrad, L'Hospitalův postup uznal a přivítal a markýzovu novou odpověď spolu s vlastními poznámkami zařadil do svého učeného žurnálu *Histoire des Ouvrages des Sçavans*.[30] Tímto smělým počinem se tak nejen začíná pravidelná dopisová výměna mezi oběma geometry, v níž, jak dosvědčí Fontenelle, bude téměř z poloviny tak starý Guillaume de l'Hospital „vyučovat“ samotného p. Huygense novým infinitesimálním metodám;[31] ale samozřejmě také L'Hospital sám vstupuje do orbitu takových jmen jako Leibniz či Bernoulli, coby nový občan *République des Lettres*, se kterým lze takříkajíc počítat.

Kdyby nyní zůstalo jen u obrysů příběhu, který vyprávějí Fontenelle se Saurinem, pak po následujících a bohužel také posledních asi deset let života bude hvězda markýze de l'Hospitala, jediného vyslance Francie v „Zemi Nekonečna“, už jen strmě a nezadržitelně stoupat. Se zřejmou lehkostí a přesto vytrvale a systematicky bude vrcholné poznatky soudobých matematických metod převlékat do nového, transcendentního hávu Leibnizovy „vnitřní geometrie“ a dosud nejobtížnějším zahlédnutím dodávat ráz jednoduchosti, obecnosti a elegance.[32] Bude vstupovat do polemik s přesvědčenými odpůrci infinitesimální analýzy, prokazovat nedostatečnost převládající karteziánské vědy o přírodě, otevírat nové otázky nekonečna,[33] odpovídat na výzvy předních matematiků své doby a přinášet řešení otázek a úloh dosud nepředstavitelných a nedostupných. Neboť bude jedním z mála těch, kteří drželi ve svých rukou onen „zvláštní klíč“[34] k tajemstvím geometrického nekonečna.

30 19. červenec 1690, N°2605 (tamt., 460). Huygensovy poznámky, N° 2606 (tamt., 461-463), se otevírají slovy: „Vždy jsem měl za to, že najít střed kyvu jiným než mnou použitým způsobem je obtížné. Také jsem nikdy neviděl nikoho, kdo by se o to s úspěchem pokusil, ať už vzhledem k obecnému řešení, nebo pro případ složených kyvadel, jejichž závaží leží v přímé čáře s bodem zavěšení. Právě tento případ si p. markýz de l'Hospital uložil a mohu říci, že po několikerých pokusech jiných je prvním, komu se podařilo jej vyřešit.“

31 „Slavný p. Huygens, který nebyl objevitelem diferenciálního počtu jako p. Leibniz; který jej neuplatňoval ve všech svých geometrických zkoumáních jako p. de l'Hospital a pánové Bernoulliové; který bez [jeho] pomoci dospěl k vrcholným teoriím a vybudoval si nejskvělejší pověst; který mohl po způsobu ostatních lidí a snad i větším právem opovrhovat tím, co sám neznal, a pokládat za zbytečné to, co ke svým velikým dílům nijak nepotřeboval; nicméně podle ceny těch, kdo tuto metodu používali, a vzhledem k úžasným výsledkům, k nimž s její pomocí dospěli, usoudil, že je hodna jeho úsilí. Natolik byl velikým člověkem, aby uznal, že se ještě v geometrii může něco naučit; a obrátil se na p. de l'Hospitala, jenž byl skoro z poloviny tak mladý jako on, aby se od něj v diferenciálním počtu poučil; a bez pochyby za tento rys života p. de l'Hospitala náleží více slávy p. Huygensovi než jemu samému.“ (Fontenelle 1715, 54-55). Zasvětit dlouho nedůvěřivého Huygense do své nové metody a získat pro ni sílu jeho ducha se pochopitelně snažil i Huygensův nejvýznamnější žák pařížských let, G. W. Leibniz. Srv. například Leibnizův dopis L'Hospitalovi z června 1695 (A III, 6, 417-418).

32 Příkladem budiž L'Hospitalovy „reformní“ práce z roku 1693 budované na pozadí Huygensovy teorie evolut a výsledků Jakoba Bernoulliho stran kaustik, *Méthode facile pour déterminer les points de caustiques par réfraction avec une manière nouvelle de trouver les développées* (HAS X, 380-384). Pohledem do seznamu markýzových děl z této doby (JBB I, 494-499) se věru zdá, že by si s podobnou kadencí článků dokázal zajistit snad i zkrácený úvazek na průměrné české univerzitě – pokud by ovšem vzhledem k revolučním metodám nového počtu a prvotního odporu vůči jeho pojmům vůbec byly označeny za „vědecké“ a prošly recenzním řízením; a pochopitelně pokud by o něco takového, coby *homme de condition*, Guillaume de l'Hospital vůbec stál.

33 Například *Nouvelles remarques sur les développées, sur les points d'inflexion et sur les plus grandes et les plus petites quantitez* (HAS X, 397-399) zpochybňující obecnou platnost Leibnizových pravidel pro nalezení inflexního bodu a extrémních hodnot.

34 Fontenelle 1715, 54.

Všechny jeho úspěchy by bylo únavné jmenovat. Tedy jen z těch nejzářnějších. Již roku 1692, v článku vycházejícím v *Journal des Sçavans*, vyřeší Guillaume de l'Hospital pod pseudonymem G*** na ploše jedné stránky – „jediným úderem průkopníka mladého infinitesimální počtu“[35] – přes padesát let starou a stále otevřenou otázku Florimonda de Beaunea,[36] kterou sám veliký Descartes považoval za obtížnou. Roku příštího přichází s řešením jiné obrácené úlohy tečen,[37] kterou evropským matematikům na stránkách *Acta Eruditorum* předložil Johann Bernoulli. Spočívala v nalezení křivky takové, že každá z jejích tečen se k úseku mezi počátkem abscis a průnikem tečny s osou má v nějakém daném poměru p ku q.[38] Tuto úlohu se mezi všemi podařilo vyřešit již jen bratru Jakobovi, Leibnizovi a Huygensovi;[39] a není než přirozeným během věcí, že jako jediný francouzský geometr účastný na velkolepém představení vzniku nového počtu je markýz de l'Hospital ještě téhož roku 1693 uveden do královské Akademie věd v Paříži – coby zřejmý důkaz, že urozenost se může snoubit s „vědou dovedenou k jistému stupni dokonalosti“, a rovněž k pozvednutí dignity věd a geometrie zvláště coby první významné narušení „onoho stavu barbarství“, o němž mluví Fontenelle.[40] Zde se stane vůdčí postavou a spolu s Varignonem hlavním tvůrcem a obráncem francouzské matematické reformy. O šest let později bude králem jmenován jejím *membre honoraire* a zaujme místo viceprezidenta.

35 Spiess 1955, 125.

36 *Solution du problème que M. de Beaune proposa autrefois à M. Descartes et que l'on trouve dans la 79. de ses lettres, tome 3. Par Mr. G****. (JS 1692, 401-403). Řešení L'Hospital zasílá Huygensovi 12. dubna 1693, N° 2787 (HOC X, 390-394).

37 *Problematis a Joh. Bernoullio in hisce Actis mense Majo pag. 235 propositi solutio, a Dn. Marchione Hospitalio in literis ad Dn. Bernoullium d. 27. Junii exhibita. Conferantur Acta Erud. mensis Jun. Pag. 255* (AE 1693, 174-181). Jak je zřejmé ze samotného názvu článku, L'Hospital své řešení zasílá nejprve Johannu Bernoullimu dopisem z 27. června 1693, N°11 (JBB I, 173-177), s žádostí o překlad do latiny a narýsování přesných obrazců, neboť „víte dostatečně, že pro úspěch v těchto věcech zrovna nemám nadání“. Zobecněná řešení stejné úlohy zasílá L'Hospital Huygensovi 17. září 1693, N° 2825 (HOC X, 519-524).

38 Výsledkem je *Bernoulliho křivka*, jak se nyní obvykle nazývá, vedoucí k diferenciální rovnici (HOC X, 523)

$$y\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{p}{q}\,x\,dy-y\,dx.$$

Jedná se o zobecnění křivky *traktrix* („tažnice“), kterou lze definovat jako traktorii přímky, čili křivku, pro níž platí, že délka úsečky ohraničené tečným bodem a průnikem tečny s osou je konstantní. Snadno si ji lze představit coby odpověď na otázku, jakou křivku budou opisovat hodinky upevněné k řetízku, pokud se jím bude posouvat podél hrany stolu; což ostatně je také původní příklad a snad zdroj první úvahy o ní pařížského lékaře a architekta, Clauda Perraulta (1613-1688), který s křivkou obeznámil Leibnize. Její povaha se snadno nahlédne diferenciální rovnicí

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

kde a je konstantní délkou řetězu. Z hlediska zrodu diferenciálního počtu spočívá důležitost traktrix především v tom, že její evolutou je řetězová křivka, což ji spojuje s otázkami kvadratury hyperboly a logaritmů. Srv. Leibnizovo *Supplementum geometrie dimensoriae* (MS V, 294-301) a dále.

39 Po zkušenosti s řešením Bernoulliho úlohy přichází Huygens, *De problemate Bernoulliano* (AE 1693), s prvními slovy uznání diferenciálního počtu a jeho teoretické síly: „Kromě toho se na této úloze ukázalo, že je třeba vážně počítat s ojedinělou a dosud neužívanou cestou analýzy, jež spolu s mnohým dalším otevírá bránu (*Tangentium doctrina aditum apperit*) nauky o tečnách tak znamenitě, jak již poukázal muž nejvěhlasnější, objevitel diferenciálního počtu, bez nějž bychom do takovýchto hlubin geometrie byli sotva vpuštěni.“ (HOV II, 253).

40 Viz p. 22; srv. Fontenelle (1715, 406-407); a Sturdy (1995, 244-245).

Příští ze skvělých úspěchů zastihl Guillauma de l'Hospitala na jedné z mnoha cest po jeho rozlehlých panstvích,[41] byť, jak si tu a tam posteskl kolegům geometrům, právě jejich správa jej často na dlouhé měsíce nuceně odstavovala od matematické práce. Jednalo se o otázku nalezení křivky rovnovážného stavu (*courbe d'équilibration*) padacího mostu, tj. křivky, po níž je třeba při zdvihání mostu posouvat závažím spojeným přes kladku s jeho pohyblivým koncem tak, aby „při libovolné poloze závaží na křivce bylo toto závaží s mostem vždy v rovnováze";[42] přičemž z pravidel mechaniky je známo, že čím níže je most, tím větší je jeho tíha. Úlohu, která „může nalézt své uplatnění ve vojenské architektuře", tehdy markýzi de l'Hospitalovi předložil jeden význačný karteziánký učenec („*Geometra quidam eruditus*"), Joseph Sauveur;[43] a L'Hospital dodává, že i když tento veliký znalec karteziánské analýzy nakonec cestu k řešení objevil, potřeboval k tomu položit dvacet sedm rozličných rovnic a pak se i přes veškerou rozvleklost výpočtu musel spokojit pouze s přibližným určením bodů křivky, což pro praktické účely pokládal za dostatečné. Zatímco za pomoci *Methodus Leibnitiana* – po té co je třeba „z úlohy odstranit vše mechanické tak, aby byla uvedena na čistou geometrii" – lze dospět ke konstrukci, z níž „je dostatečně patrné, že opsat tuto křivku není o nic obtížnější, než kteroukoli z kuželoseček."[44]

41 Což sám sděluje Huygensovi dopisem z 14. března 1695, N° 2892 (HOC X, 712), kde mu dále předkládá k úvaze důležité rozšíření markýzovy křivky provedené Johannem Bernoullim v dodatku k *Excerpta ex Literis Illustris D. Marchionis Hospitalii ad Joh. Bernoulli* (AE Suppl. II, 289-291) poukazující na její spojitost s isochronou „*tam Hugeniana quam Leibnitiana*."

42 *Illustris Marchionis Hospitalii Solutio Problematis Physico-Mathematici ab erudito quodam Geometra propositi* (AE 1695, 56). L'Hospitalův článek následují zobecnění otázky v *Animadversio in praecedentem Solutionem Illustris D. Marchionis Hospitalii* (AE 1695, 59-65), kde Johann Bernoulli nahrazuje padací most (čili vlastně závaží pohybující se po čtvrtkruhu) závažím opisujícím libovolnou křivku, přičemž dokazuje, že křivka padacího mostu (*curva aequilibrationis*) představuje část epicykloidy, kde pohyblivý a pevný kruh jsou si rovny (viz kardioida, v. 101); a pokračuje řešení Jakoba Bernoulliho *Solutiones superioris problematis* (AE 1695, 65-66) a L'Hospitalovo vlastní zjednodušení a zobecnění otázky, *Excerpta ex Literis Illustris D. Marchionis Hospitalii ad Joh. Bernoulli* (AE Suppl. II, 289-291), jež však Bernoulli nechal zařadit do *Akt* až roku 1696 (srv. MS II, 285). A konečně příspěvek Leibnizův *Notatiancula ad constructiones lineae in qua sacoma…* z *Akt* toho samého roku, k němuž jej na konci *Animadversio* vyzval Johann Bernoulli – žádostí o radu ohledně vztahu přírody a geometrie v jejích konstrukcích. Konečně k této pozoruhodné výměně, kterou lze v úplnosti nalézt v JBO I, 129-142, ještě přijde řeč.

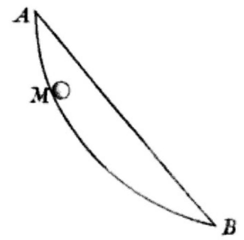
43 Joseph Sauveur (1653-1716), význačný fyzik a matematik, žák Jacquese Rohaulta (1618-1672), později profesor matematiky na Collège Royal a od roku 1696 člen pařížské Akademie věd, kde se stal zakladatelem *akustiky* coby vědy o zvuku obecně. Fontenelle (1715, 408-414) jej v *Éloge* pro jeho obtíže s řečí popisuje jako „geometra cele uzavřeného ve své geometrii" a přesto vynikajícího učitele oblíbeného především u vysoké šlechty, jenž však neměl příliš pochopení pro „geometry nekonečna", které nazýval „*Infinitaires*". Proslavil se výpočty formulí pro některé z hazardních her, zejména *Supputation des avantages du Banquier dans le jeu de la Bassette* (1679); ovšem zdaleka nejvýznamnějšími jsou ve stopách Mersenna a dalších jeho výzkumy v oblasti hudby, harmonie a zvuku obecně. Fontenelle dosvědčuje, že Sauveur vskutku pracoval na pojednání o opevnění; a že ve snaze získat praktické zkušenosti dokonce nasazoval vlastní život při obléhání Mons roku 1691 jen proto, „aby nezanedbal žádné z ponaučení, a tak se v něm láska k vědě proměnila v odvahu válečníka" (tamt., 410).

44 AE 1695, 57-58. Což bude oproti Sauveurovým klopotným aproximacím zajisté pravda, nicméně původní L'Hospitalovo řešení vedlo k sestavení poměrně obtížné diferenciální rovnice, která po integraci dává hledanou křivku,

$$\frac{b\,dx + x\,dx - ax\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ay\,dy}{\sqrt{x^2+y^2} - y\,dy}.$$

Rok poté, L. P. 1696, konečně vychází *Analýza nekonečně malých za účelem pochopení křivých čar*; kniha, jež byla bez velkého přehánění pro transcendentní geometrii tím, čím Eukleidovy *Základy* pro geometrii konečnou. Vychází sice anonymně,[45] ale podle všeho a z důvodů shora uvedených nemohlo být dlouho pochyb, kdo byl autorem díla psaného jasnou a elegantní francouzštinou, „v němž byla odhalena všechna tajemství geometrického nekonečna; a nekonečna nekonečna; zkrátka všech těchto rozličných řádů nekonečen, jež se rozprostírají jeden nad druhým a tvoří nejúžasnější a nejsmělejší stavbu, na niž by se lidský duch byl kdy odvážil pomyslet“.[46] Pohledem z vnějšku by se tedy mohlo zdát, že s touto knihou, která se od nynějška po řadu desetiletí „obracela v rukou všech“[47], jako by veličina markýze de l'Hospitala už neměla kam pokračovat. Nicméně svět matematické dokonalosti je vnitřní a postupný a těžko může narazit na jakousi nejzazší, křišťálovou sféru právě tak, jako sama transcendentní příroda počtu nekonečna.[48]

Neuplynul tak ani další rok a Guillaume de l'Hospital přišel s výsledkem, kterým se tentokrát s konečnou platností uvedl v nejvyšším patře geometrického Hradu Štěstěny. A poněkud protismyslně by bylo možno říci, že do těchto míst – opět jako jediný matematik Francie a jeden z pěti vůbec – vystoupal po *křivce nejrychlejšího spádu* jinak zvané *brachystochrona*.[49] Jak snad dostatečně vynikne předběžnou črtou, řekněme, kulturně dějinných souvislostí celé události, tento úspěch se jevil nutně tím památnější a trvalejší, že úloha nalezení brachystochrony v sobě nejenže, řeklo by se dnes, soustřeďovala



Obr ii

45 Šťastná to doba myšlení, kdy objevy znamenaly více, než (jejich) citace! Anebo naopak, kdy ještě myšlení znamenalo tolik, že bylo třeba se před ním krýt. L'Hospitalovy důvody ovšem byly nejspíše jiné, jak ještě uvidíme. Za zmínku však v této souvislosti určitě stojí případ jistého hannoverského knihovníka, který za celý svůj život publikoval vlastně jen jedinou monografii, *Essais de Théodicée* (1710), nadto též anonymně.

46 Fontenelle (1715, 57-58).

47 „[...] Analyse des infiniment petits*, qui in omnium manibus versatur*“, jak o nějakých patnáct let později se smutnou ironií napíše Johann Bernoulli na okraj první věty svých *Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium* (JBO III, 387), tj. pokračování přednášek o diferenciálním počtu pro markýze de l'Hospitala.

48 Ve filosoficky navýsost bohaté *Úvodní řeči o užitečnosti matematiky* ke svým chvalořečem na akademiky, předkládá Fontenelle zajímavou variaci na Leibnizovu ideu *ars inveniendi* (například, PS VII, 184), právě ohledně, řečeno opět s Leibnizem, „horizontu lidské nauky“. Konec geometrie (*le bout de la Geometrie*) klade do možnosti (*peut-être*) jejího vnitřního či kvalitativního završení skrze excelenci metod. Svým způsobem se tedy jedná o sjednocení jejího předmětu a metody (látky a formy?) v podobě jakési sebevýznačnosti „geometrie, tj. umění konat objevy v geometrii, což je vše“ (Fontenelle 1715, XXIII). Fyzika naproti tomu pojímá předmět, jehož „rozmanitost a plodnost nezná mezí“, a, jak přímo Fontenelle říká, má tu *výhodu*, že nikdy nebude vědou úplnou (*science complette*).

49 Z řeckého *brachystos*, „nejkratší“, *chronos*, „čas“. Tímto jménem křivku obdařil její objevitel či vyzyvatel Johann Bernoulli; bratr Jakob ji nazýval *courbe oligochrone*, „křivka o malém čase“; zatímco Leibniz navrhoval název *tachystoptota* – od *tachystos*, „nejrychlejší“, a *piptein*, „padat“ – odpovídající obvyklému českému názvu. Bernoulliho návrh později Leibniz přejímá, neboť uznává jeho vyšší obecnost: „Pojmenování *brachystochrona* se mi líbí více kvůli jeho obecnému významu: název *tachystoptota* je možné připojit zvláštnímu případu, kdy se jedná o sestup či pád hmotného tělesa (*gravis descensu seu casu*)“ (MS III, 312); a to přes to, že Johann Bernoulli v předchozím dopise (p. 53) Leibnizovi nabízí přijetí jeho názvu: „Dal bych jí jméno *Brachystochrona* z důvodu, který ti tu ukážu; ale jestli se více bude líbit jméno *Tachystoptota*, svoluji, abychom je na všech místech tímto nahradili (tamt., 298)“.

řadu podstatných rysů, výzev a křižovatek budování infinitesimálního počtu konce 17. století (ať už povahy matematické, institucionální, nebo metafyzické); ale také a snad právě proto, že vzbuzovala tehdy takřka všeobecnou senzaci,[50] údiv a pocit paradoxu. Ostatně jak by mohlo někomu s vážnou tváří, zdravým rozumem a při smyslech, tedy kromě Johanna Bernoulliho[51] a geometrů obecně, přijít na mysl, že onou drahou *AMB* (Obr ii) mezi „dvěma ve vertikální rovině danými body *A* a *B*, po které těleso *M* spuštěné v *A* a padající vlastní vahou dospěje do bodu *B* v nejkratším čase“,[52] nebude samozřejmě také nejkratší spojnice mezi oběma body neboli přímá čára? V tomto smyslu – a ve smyslu ještě hlubším a skrytějším – se brachystochrona řadila mezi objevy takového filosofického dopadu, jako byly Galileův důkaz rovnomocnosti přirozených čísel a jejich čtverců, Torricelliho Gabrielův roh či Pascalova dvojí nekonečna. V těchto případech jakoby totiž samotná přirozenost věcí vyzývala na souboj samozřejmost „přirozeného pocitu“ (*sentiment naturel*) a důkazní řeč usvědčovala ze lži nic neříkající (a právě tak umlčující) „zdravý rozum“. Otázkou brachystochrony zůstávali i ti největší z geometrů doslova uhranuti[53] – podobně, jako o desítky let dříve jinou osudovou křivkou, „Helenou geometrů“ a „jablkem sváru“, totiž cykloidou. A ovšem není divu, protože brachystochrona *je* cykloidou. Což právě je na celé věci to nejpodivuhodnější a představuje vrchol paradoxu, že odpovědí, kterou příroda pro tuto hádanku připravila, byla křivka všem důvěrně známá, která „všem ležela na očích“.

Je nasnadě, že k nalezení křivky, ostatně jako už vícekrát, nemohl přední evropské geometry pozvat nikdo jiný než profesor matematiky v Gröningenu, Johann Bernoulli. Výzva se objevuje na konci článku *Supplementum Defectus Geometriae Cartesianae circa Inventionem Locorum* a, jak sám titul napovídá, účelem úlohy bylo dokázat zásadní omezenost Descartovy metody v hledání

50 Fontenelle (1715, 51).

51 Počátek otázky křivky nejrychlejšího spádu nicméně sahá hlouběji; zamýšlí se nad ní, neúspěšně, již Galileo v *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), kde ve scholiu k úloze XXXVI, tvrzení XXII vepsáním mnohoúhelníku kruhovému oblouku dovozuje, že sestupný pohyb je vždy rychlejší po více stranách mnohoúhelníku (spojených strunách), nežli po těchto stranách a následné struně do cílového bodu; odkud uzavírá, že pohyb mezi dvěma zvolenými body je vykonán tím rychleji, čím více se přiblížíme obvodu kruhu prostřednictvím vepsaných mnohoúhelníků“ (Galilei 1638 VIII, 231-232), a tudíž křivkou nejrychlejšího spádu může být jedině kruhový oblouk. Úsudek je to zajisté nesprávný, neboť jediný závěr, který odtud lze vyvodit, je, že *nejrychlejší* pohyb se neděje po přímé dráze, nýbrž po nějaké křivce. A ta, jak známo, byla metodám doby Galileovy nedostupná. Nic to ovšem nemění na skutečnosti, že, pokud vím, právě Galileovi náleží ona bláznovská čapka za první pokus o řešení; a naopak nasvědčuje mnohé o prestiži a lesku úlohy, ve které se zmýlil i sám velký Galilei.

52 *Supplementum Defectus Geometriae Cartesianae circa Inventionem Locorum* (AE 1696, 269).

53 Lze na půl žertem připomenout (Parmentier 1990, 345), jaké nesnáze uchystala úloha Leibnizovi, který jako obvykle na geometrii vůbec neměl čas a nadto ho tížilo chatrné zdraví, avšak od řešení se nemohl odtrhnout. Johannovi Bernoullimu píše: „Konečně se dostáváme k Tvé úloze nalezení křivky, kterou bychom, domnívám se, mohli nazvat *Tachystoptotou*, čili nejrychlejšího spádu. Ta úloha je naprosto nádherná a musím říci, že mě svou krásou, ač proti mé vůli, přitáhla k sobě jako jablko Evu.“ (MS III, 288). Zadání dostává Leibniz dopisem ještě před zveřejněním výzvy v *Akta Eruditorum* a hned v této odpovědi následuje Leibnizovo řešení (tamt., 290-295), k němuž ještě přijde řeč. Bernoulli pak mimo jiné odpovídá vtipnou narážkou, že „on by v tom případě měl být oním zlovolným hadem (*serpente illo maligno*), který mu toto jablko podal“ (MS III, 298).

„přirozenosti křivek“[54] – a přirozeně také nadřazenost počtu Leibnizova. Jak se ovšem dosti jasně ukázalo z obnovené výzvy „nejbystřejším geometrům světa“ z počátku příštího roku,[55] s tímto po výtce propagandistickým cílem se neblaze snoubila vrcholící nevraživost mezi Johannem a Jakobem;[56] a vzhledem k publicitě, jakou své úloze Johann Bernoulli šikovně po celé Evropě obstaral, je vcelku zřejmé, že měla stejně tak za cíl posloužit coby jedovatý šíp přímo do hrudi bratra Jakoba a triumfální prostředek jeho ponížení.[57] Všechny tyto více méně vnější cíle a pohnutky však jen o to větší silou dokazují, že Johann Bernoulli si zřetelně uvědomoval nejen mimořádnou obtížnost řešení, ale také a zejména, že alespoň zahlížel s touto těžkostí spojenou vyšší teoretickou úroveň úlohy, ve smyslu oné nevyčerpatelné, hluboké postupnosti matematických zkoumání, jak o tom byla řeč výše. Na rozdíl od dosud běžných otázek *de maximis et minimis* se totiž v případě brachystochrony nejednalo o nalezení *extrema* ordináty nějaké dané křivky, ale mnohem obecněji, jak později napíše Leibniz, přímo o nalezení povahy křivky, která je sama tímto extremem.[58] A netřeba dlouze vysvětlovat, že Johann Bernoulli úlohu představuje s plným vědomím onoho působivého paradoxu, kdy se krajně jednoduchá přirozenost skrývá za zatemňující složitostí podmíněností a projevů; a zejména s očekáváním všeobecného prozření, že toto tajemství nelze

54 „Dokonce není nouze o ty, kteří nepoučeni v hodnotnějších věcech prohlašují nanejvýš směle, že v celé vědě (*tota mathesi*) není nic, nač by nestačila geometrie převzatá od Descarta a jiných. Ostatní jsou o něco soudnější a pouze z vědy vylučují úvahy o *nekonečnu*, čímž ochotně doznávají svoji nemohoucnost (*imbecillitatem*), když zároveň bez rozpaků připouštějí vše, co se týká běžných, konečných veličin. Ale co když ukážu, že i v této oblasti zůstává mnohé co požadovat, co běžné, a je s podivem nakolik nedokonalé, geometrii uniká?“ (AE 1696, 264). Cestou nekonečna dospět k vnitřnímu poznání konečného – takto Johann Bernoulli vyjadřuje v téměř čisté formě v podstatě hlavní myšlenku Leibnizova infinitesimálního počtu. Srv. například v. 13, 47.

55 „*Acutissimis qui toto Orbe florent Mathematicis*“ (JBO I, 166). Poněvadž kromě Leibnizova žádné další řešení Johann Bernoulli do konce roku 1696 neobdržel, napodobuje těmito slovy z manifestu *Programma Editum Groningae* (1. ledna, 1697) slavné příklady Mersennův, Fermatův a Pascalův (v. 48) a prodlužuje geometrům, *quasi lapide Lydio*, lhůtu pro odeslání řešení do dalších Velikonoc.

56 Především kvůli zásluhám o určení tvaru plachet vzdutých větrem (řetězová křivka), který oba řešili již roku 1691. Viz *Curvatura velli* (AE 1692) Jakoba Bernoulliho; Johannovo *Solution du probleme de la courbure* (JS 1692) a pochopitelně *Streitschriften* bratrů Bernoulliů. Krátký souhrn pak lze nalézt v Peiffer (2006, 11-14).

57 V čemž se ostatně bratr Jakob nikterak nezmýlil, když si nejprve Leibnizovi stěžuje: „Zrovna mi do rukou připadl výtisk jakéhosi programu, kterým bratr slovy plnými vychloubání a jízlivostí (*jactantia et felle plenis*) již potřetí vyzývá geometry celého světa k řešení svého problému. Přiznávám svoji slabost a nevěřím ani tak, že jsem úlohu vyřešil já sám, jako spíše Bůh skrze mne, aby srazil tu jeho nezměrnou pýchu (*fastum ejus immodicum*).“ (A III, 7, 198); a dále úvodem vlastního řešení brachystochrony, *Solutio Problematum Fraternorum* (AE 1697, 211): „Byť jsem usoudil, že se touto provokací svého bratra nebudu zaobírat, nicméně když přišla hluboce zdvořilá výzva slav. p. Leibnize, z práce na řešení jsem se nadále nemohl nijak vyvléci.“ (AE 1697, 211).

58 V článku z *Akta Eruditorum* (AE 1697, 201-205; MS V, 331-336): „Avšak v tomto případě je tím, co hledáme, křivka sama, která musí *optimálně* splňovat nějakou přednost; a její povaha je často natolik temná, že se z daných podmínek nevyjeví dokonce ani vlastnost jejích tečen, a je tudíž nesnadné otázku převést na vyšší, čili obrácenou metodu tečen.“ (MS V, 334-335). Dále pak Leibniz představuje řešení své a komentuje postupy bratrů Bernoulliů a markýze de l'Hospitala. Jakkoli však bylo Johanna Bernoulliho (nepřímé) řešení, zveřejněné v tom samém čísle *Acta Eruditorum*, geniální, mimořádně elegantní a pro tehdejší matematické myšlení svým způsobem ikonické, je třeba říci, že mu co do matematické hloubky bratr Jakob ohledně jeho plánů jaksi vypálil rybník – srv. Parmentier (1995, 346), a níže v této studii. Bernoulliho přímý postup (MS III, 306-308) založený na teorii *isoperimetrů* vydán nebyl (vychází až roku 1706), a to na téměř až ezoterickou radu Leibnizovu: „doporučoval bych onu, jak říkáš, přímou cestu nevydávat, neboť první k důkazu (*demonstrationem*) postačuje, zatímco druhá předčasně otevírá cestu ostatním více, než je nutné“ (tamt., 310).

přírodě vytrhnout jinak, než s pomocí nové metody diferenciálů. Ostatně své první zadání úlohy brachystochrony doprovází Johann Bernoulli následující poznámkou:

> „Pro povzbuzení milovníků těchto otázek, aby se přičinlivěji pustili do řešení, nechť jsou obeznámeni, že tato úloha nespočívá jen v holé spekulaci (*nuda speculatione*) bez jakéhokoli užitku, jak by se zajisté mohlo zdát; avšak že je nanejvýš užitečná i v jiných vědách, než je mechanika, čemuž by sotva kdo uvěřil. Prozatím (abych případně u někoho předešel jistým unáhleným závěrům), třebaže úsečka *AB* je mezi krajnostmi *A* a *B* nejkratší, přesto není tou, která bude proběhnuta v nejkratším čase. Křivka *AMB* je nicméně geometrům důvěrně známa a její jméno prozradím, pokud tak do konce tohoto roku neučiní nikdo další.“ (AE 1696, 296)

Řešení, jak už víme, po uplynutí pár týdnů zaslal Leibniz, který je sice nalezl prý ještě ten den, kdy se mu Bernoulliho dopis s úlohou dostal do rukou; nicméně si nepovšiml, že pod výslednou rovnicí je ukryta právě cykloida.[59] Po dohodě s Johannem se nicméně usoudilo, že vydání do konce roku odloží, aby ostatní nebyli připraveni o radost z řešení.[60] Byl to pak ten samý Leibniz, který ještě před tím, než bylo vše sečteno a podtrženo, pozoruhodně prorokoval, že jediní, kdo jsou na výši úkolu, byli ti, kteří „správně porozuměli tajemstvím jeho diferenciálního počtu“, totiž kromě autora úlohy a jeho p. bratra, pak už jen „markýz de l'Hospital ve Francii; p. Huygens, pokud by byl naživu; p. Hudde, kdyby tato studia neopustil; a konečně p. Newton, pokud by byl ochoten se úlohou zabývat“.[61] Nakolik to bylo možné, věštba se Leibnizovi naplnila bezchybně a zajisté více, než sám doufal. Vedle všech úspěšných řešitelů, kteří již byli zmíněni, se totiž provokacím z novoročního *Programma*[62] dostalo též dosti brzké, anonymní odpovědi z Ostrovů, která na sobě

59 „Ačkoli kdybych byl viděl zadání tvé úlohy, které si nechal vložit do červnových *Akt*, sotva bych byl postupoval dále, nežli bych jméno, které mi posíláš, snad také byl odhalil. Dostal jsem tu samou diferenciální rovnici, jakou kladeš i ty, a tu jsem mohl převést na rovnici, kterou jsem kdysi v Aktech obdržel právě pro cykloidu.“ (MS III, 319). Třebaže Leibniz nebyl upozorněn, že má hledat jméno nějaké důvěrně známé (*notissima*) křivky, přesto je jeho přehlédnutí přirozenosti cykloidy pod výrazem diferenciální rovnice pozoruhodným dokladem výše uvedeného paradoxu (Parmentier 1995, 348). Srv. JBB (III, 108).

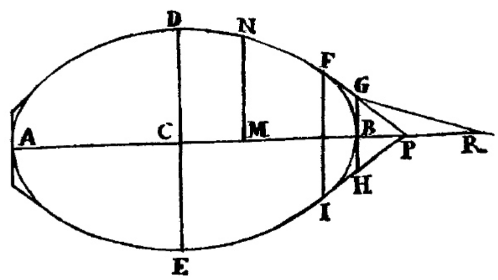
60 MS III, 310 a 313. Srv. slova z *Programma*: „Slav. Leibniz, který se znamenitě zasloužil o hlubší geometrii (*profundiore Geometria*), mě dopisem ubezpečil, že již šťastně rozmotal překrásný uzel tohoto, jak prohlásil, doposud neslýchaného problému; a zároveň mne přátelsky požádal, abych stanovenou lhůtu ráčil prodloužit do příštích Velikonoc.“ (JBO I, 167).

61 MS V, 334. Viz p. 58.

62 „... až geometři prohlédnou naše řešení, která jako by byla čerpána z nějakého hlubšího pramene, uznají omezenost běžné geometrie a nijak nepochybujeme, že tím spíše budou provozovat námi objevenou geometrii, čím méně bude těch, kteří naší znamenitou úlohu vyřeší; a to dokonce i mezi těmi, kdo skrze jednotlivé metody, které jsou jimi tolik doporučovány, důvěrně pronikli nejen do zákrytů vnitřní geometrie, ale též do jejího obhradbí (*pomoeria*); a vychloubají se, že svými zlatými teorémy, které, jak se domnívají, nikdo nepoznal, třebaže jiní je vydali již dávno, div jak nerozšířili její hranice“. Toto pak nechal Johann Bernoulli, v době klíčící tahanice o infinitesimální počet, zaslat Wallisovi a Newtonovi zvláště (MS III, 379)! Narážka na „zlaté teorémy“ (*Theorematis suis aureis*) zjevně míří i na bratra Jakoba, který takto pojmenoval svoji formuli pro poloměr křivosti (v. 89), na niž byl velice hrdý a kterou L'Hospital v zásadě přebírá v § 78. Srv. p. 57 a dopis N°36 Johanna Bernoulliho L'Hospitalovi z 12. ledna 1695: „což zcela odpovídá Vaší formuli, kromě toho, že v mé jsou čáry obojznačné (*ambigus*), neboť + a $-ds$ jsou $=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Tak tedy máme odhaleno ono veliké zlaté tajemství (*mystere*) mého bratra, o němž se domníval, že jen on sám je objevil.“ (JBB I, 256). Nadání Johanna Bernoulliho urazit v jedné větě dva z největších matematiků Evropy (včetně vlastního bratra) bylo mimořádné, nicméně v pozdějších pokusech zjednat si spravedlnost ve věci *Analýzy nekonečně malých* mu, jak víme a ještě uvidíme, příliš neprospělo. Pro úplnost lze dodat, že obhradbí označuje prostor mezi vnějším a vnitřním okruhem městských hradeb.

přesto nesla jasnou pečeť a celé šarádě s brachystochronou učinila rázný konec. V očích Johanna Bernoulliho ostatně ani žádný podpis nést nemusela, protože, jak známo už od Feidia: *ex ungue Leonem*.[63]

Konceptuální výhonky brachystochrony právě tak, jako Newtonovo tajemné učení se jakoby z vrcholů doby přirozeně promítly i do příštích prací markýze de l'Hospitala, které stále nesly punc objevnosti. Zajímavým přínosem tohoto období jistě bylo nalezení „snadné a pohodlné metody určení rotačního tělesa, které při pohybu podél své osy v tekutině klade menší odpor než jakékoli jiné těleso o stejné délce a šířce“.[64] Tvrzení ohledně tvaru takového tělesa, „které, soudím, přinese nemalý užitek v konstruování lodí“,[65] předložil bez důkazu, jako by bylo samo sebou zřejmé, Newton v jednom ze scholií svých *Principů*. Jeho utajenou metodu se zanedlouho, neboť



Obr iii

63 Newtonova odpověď vychází anonymně ve *Philosophical Transactions* 1696/1697. Podle životopisce Conduitta ji Newton po celodenní práci sestavil během noci, a to v době, kdy se již matematice delší čas nevěnoval. Je pravděpodobné, že Johann Bernoulli si byl od prvního okamžiku, co se mu dostala do rukou, veskrze jist, že autorem je právě Newton. Leibnizovi sděluje: „Mezitím, abych se vrátil k Tvé metodě, ze spisu onoho Angličana (jsem pevně přesvědčen, ze je to Newton) nahlédneš, že Tvá je docela podobná, ne-li zcela totožná, jen s tím rozdílem, že on velice elegantním trikem (*artificio non ineleganti*) zahrnul všech Tvých pět rovnic do jediné […]“ (MS III, 390). Tedy *Newtonum firmiter credo* – bude to až v *Lettre de Mr. Jean Bernoulli à Monsieur Basnage* (*Histoire des Ouvrages de Savans*, červen 1697), kdy Johann Bernoulli ve vylíčení – na způsob Pascalovy *Histoire de la Roulette* (1658) – událostí kolem své úlohy napíše: „A takto, vážený pane, zůstala má úloha nevyřešena i po té, co v Holandsku prošla několikerýma rukama. Odtud se tedy přesunula do Anglie, kde, jak jsem doufal, ji stihne příznivější osud, poněvadž v této zemi je několik vynikajících geometrů, kteří umějí dovedně používat naše metody, anebo jinou, jež je té naší naprosto podobná (*tout-à-fait semblable à la nôtre* /!/). A vskutku jsem pohledem do lednových, v Londýně vytištěných *Transactions Philosophiques*, jež jste mi laskavě zaslal, seznal, že jsem se vůbec nemýlil, neboť jsem zde našel konstrukci *Křivky nejrychlejšího spádu*, která je s naší v dokonalém souladu. Třebaže autor této konstrukce přemírou skromnosti nezmínil své jméno; přesto víme bez jakékoli pochybnosti, že se jedná o slavného p. Newtona: a i kdybychom to nijak jinak nevěděli, už jen z tohoto vzorku (*échantillon*) by se to poznalo dostatečně, jako *ex unque leonem.*“ (JBO I, 195-196). Zde tedy budiž jádro pomýlené legendy (kterou mnohé zdroje uvádějí obratem „traduje se“), jako by Johann Bernoulli při pohledu do čerstvě obdrženého Newtonova řešení div nevykřikl: „*ex unque Leonem!*“ Řecko-latinské rčení „podle drápů (se pozná) lev“, které nadto stejné zdroje připisují přímo Bernoullimu, je známo z Erasma, *Adagia*, I, ix, 34: *Leonem ex unguibus aestimare*. Erasmus je spojuje s Plutarchovým a Lúkiánovým vyprávěním o schopnosti velkého sochaře Feidia odhadnout podle velikosti drápu rozměry celého lva (*ex indicio unguis effinxit*); a výklad adagia ukončuje: „takto lékaři z jediného úderu tepny posoudí zdraví člověka, takto z vlasu, zubního krčku (*cingulum*) nebo pohybu očí lze usuzovat na celý lidský život. Takto z jediného dopisu posoudíme veškeré vědění (*doctrinam*), z jediné odpovědi zvážíme celou moudrost člověka“ (Erasmus 2010, 727-728). Stručnou anatomii povídačky podává Derek Whiteside (NMP VIII, 9-10).

64 *Domini Marchionis Hospitalii facilis et expedita methodus inveniendi solidi rotundi*, *in quod secundum axem motum*, *minor fiat a reside fluido resistentia*, *quam in quodvis aliud ejusdem longitudinis et latitudinis* (AE 1999, 354-359); francouzský originál vychází v ročníku 1699 *Histoire de L'Academie Royale des Sciences*, byť s tříletým zpožděním, až roku 1702 (HAS 1699, 107-112).

65 A rovnou přistupuje k odhalení povahy křivky (Obr iii): „Jestliže *DNFB* je křivkou takovou, že z libovolného jejího bodu *N* spustíme kolmici *NM* na osu *AB* a z daného bodu *G* povedeme přímou čáru *GR* rovnoběžnou s úsečnou dotýkající se křivky (*figuram*) v *N* a protínající prodlouženou osu v *R*; pak bude *MN* ku *GR* jako krychle *GR* ku 4 *GR* krát čtverec *GB*: nuže těleso opsané rotací této křivky kolem osy *AB* bude pohybem řídkým a elastickým mediem od *A* směrem k *B* klást menší odpor, než jakékoli další rotační (*circulare*) těleso opsané o stejné délce a šířce.“ (Newton 1687, 327).

taková „nepřináší žádné světlo" a ničemu nepomáhá, pokusil proniknout švýcarský matematik Nicolas Fatio de Duillier, toho času člen Královské akademie v Londýně a blízký spolupracovník Newtonův. Budiž řečeno jen tak mimochodem, že Fatio de Duillier, přímo na stránkách toho samého spisu,[66] které tento důkaz obsahovaly, nechvalně proslul rozdmýcháním jistého sporu, o který nestáli snad ani Newton, ani Leibniz. Odvození křivky se Fatiovi sice zdařilo, nicméně jeho důkaz zabíral pět a půl stránky *in 4°*, což nebylo nic pro L'Hospitala. Postup, jak sám přiznává, zdál se mu „natolik spletitý (*embarrassé*), že se nedokázal přimět sledovat jej krok za krokem a raději se jal hledat řešení jednodušší a přirozenější"[67]. Markýz de l'Hospital takové řešení vskutku našel[68] a na rozdíl od Duilliera, který došel k definici křivky prostřednictvím poloměru evoluty neboli na základě druhých diferenciálů a ještě k tomu byl přesvědčen, že takový znak je jednodušší než popis Newtonův; L'Hospital křivku nachází právě skrze vlastnost jejích tečen, tedy diferenciální rovnicí prvního řádu, a následnou kvadraturou hyperboly – což „je to nejjednodušší, co se dá v této otázce nalézt".[69]

---

66 A to ještě v dodatku s názvem *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quo minima fiat resistentia* k úžasnému zahradnicko-meteorologicko-astronomicko-geometricko... přírodně filosofickému dílu jménem *Fruit-walls Improved by Inclining them to the Horizon* (1699), jež by mohlo stát vzorem všem dnešním mezioborovým studiím. Zajisté každý pochopí, jak znamenitý užitek s sebou nese pojednání o uzpůsobení zdí a zahrad tak, aby se plodům dostalo *maximum* slunečního svitu; méně pak již otrávené jablko, které Fatio vhodil mezi otce rodícího se infinitesimálního počtu slovy, která plynula snad (MS V, 343) z Fatiovy ukřivděnosti za to, že jej Leibniz nezahrnul mezi matematiky *schopné* vyřešit otázku brachystochrony (p. 61). Budiž zde uvedena; více se již nešťastným sporem zabývat nebudeme, neboť *in principiis obstare*: „Zajímalo by snad sl. Leibnize, odkud je mi znám tento počet, který používám? Jeho obecné základy (*Fundamenta universa*) stejně tak, jako mnohá jeho pravidla jsem ovšem objevil vlastními silami okolo dubna 1687 a v dalších měsících a letech; a měl jsem za to, že v té době nikdo kromě mne tohoto druhu počtu neužíval. A vůbec jsem ani nevěděl, že by se kdy byl Leibniz narodil. Ať se vychloubá jinými žáky, mnou určitě nemůže, což by více vyšlo najevo, kdyby se zveřejnila korespondence, která kdysi proběhla mezi mnou a p. Huygensem. Uznávám nicméně a nemohu jinak, poněvadž věc se má zcela jasně, že prvním a po mnoho let nejstarším objevitelem tohoto počtu je Newton: ať už si od něj druhý objevitel Leibniz něco vypůjčil, ba co hůř, což je mé mínění, nahlédl do Newtonových listů a ostatních rukopisů. Ani mlčení skromnějšího Newtona, ani sehnutá úslužnost (*prona sedulitas*) Leibnizova, který si objev tohoto počtu tu a tam připisuje, neošálí nikoho, kdo si tyto nástroje, které jsem sám rozvinul, probádal." (Leibniz 1848, IX-X). Těžko tomu rozumět a toto Leibniz také nechápe (MS V, 344; v. 69), když Fatio tvrdí, že počet objevil roku 1687, zatímco *Nova Methodus* byla zveřejněna již roku 1684, o Newtonovi ani nemluvě; ale jistě si lze představit, jak asi takové blasfémie zapůsobily na nejmladšího ze zealotů diferenciálního počtu, Johanna Bernoulliho.

67 Který nadto „může sloužit k řešení mnoha dalších podobných otázek" (HAS 1699, 107).

68 Dokonce, říká Fontenelle, za pouhé dva dny a dále uvádí, že markýz de l'Hospital byl z Fatiova řešení přímo „vyděšen" (Fontenelle 1715, 53).

69 HAS 1699, 110. Míru význačnosti a přirozenosti obou řešení – a konec konců i obou matematiků – stručně ohodnotí Leibniz v odpovědi na Fatiova nařčení z krádeže diferenciálního počtu *Responsio ad Dn. Nic. Fatii Duillerii imputationes*, kde mimo jiné také pokládá teorii *fiktivních čísel*, předzvěst budoucích determinantů (Parmentier 1995, 363): „zatímco se ona konstrukce /L'Hospitalova/ snadno provede kvadraturou hyperboly, čili logaritmy, tato /Fatiova/ závisí na diferencio-diferenciálech, které jsou, jak máme ve zvyku říkat, transcendentní veličiny druhého stupně: což je totéž, jako bychom rovinnou úlohu převáděli na kuželosečky anebo dokonce křivky ještě vyšší" (AE 1700, 201; MS V, 343). Zcela podobné L'Hospitalovu i Leibnizovu bylo též mínění Johanna Bernoulliho, který úlohu tělesa nejmenšího odporu vyřešil chvíli po L'Hospitalovi v *Excerpta ex litteris* ze 7. srpna 1699: „Opravdu se podivuji, jak Duillier mohl prohlásit, že jeho vlastnost je jednodušší než Newtonova […], totiž není snadné dospět od vlastnosti oskulačního poloměru k vlastnosti tečny, zatímco naopak nedá velkou práci zjistit z vlastnosti tečen vlastnost oskulačního poloměru (JBO I, 309-310). Dalšími matematiky, kteří se otázkou zabývali, byli John Craig (PT 1700, 545) a Pierre Bouguer (1698-1758) v *Traité du navire* (1746).

Logický sled věcí by v nastávajícím období skvostného, leč běda, krátkého života Guillama de l'Hospitala velel, jakmile „vysvětlil vše, co se týče diferenciálního počtu“,[70] pokusit se o podobné dílo v obrácené metodě tečen neboli počtu integrálním. L'Hospital to skutečně zamýšlel, avšak na přání Leibnize, jenž pojal záměr sepsat svoji nedosažitelnou *Scientia Infiniti*, od této cesty bohužel – byť s radostnou nadějí, že konečně spatří Leibnizovo matematické *opus magnum* – musel upustit.[71] Přesto však to byl opět především Leibniz, kdo markýzi l'Hospitalovi určil další směr. Již od počátku společné korespondence, které si, jak je zřejmé z dopisů markýzovi i mnoha dalším pisatelům, Leibniz nesmírně cenil[72] (o L'Hospitalovi pak ani nemluvě), v mladém markýzovi spatřoval velkou naději ku vyšší dokonalosti analýzy stejně tak, jako pronikavého pomocníka v uskutečňování svých nekonečných plánů;[73] a poněvadž velice správně pochopil, s kým má tu čest, v duchu takřka všenápravném umně a, zdá se, nenápadně usměrňoval jeho geometrickou horlivost podle svých představ a cílů.

V zájmu obecného dobra se tedy markýz de l'Hospital, „zcela povznesen nad marnou slávou, po níž tolik lační většina vědců“,[74] pustil do prací, které již nebyly natolik výsostné a objevné, jako *Analýza nekonečně malých* a ostatní z výprav do hlubin nekonečna. Na druhé straně je třeba říci, že byly veskrze záslužné a – to právě byl jejich pravý účel – podstatné pro položení pevnějších základů

70 Oznamuje Huygensovi s tím, že už je tomu „několik let“, co svoji práci napsal, 14. března 1695, N° 2892 (HOC X, 713). Připomeňme, že *Analýza* vychází až příštího roku.

71 Leibnizův dopis se nedochoval; v odpovědi na něj L'Hospital píše: „Jsem nadšen, že jste se rozhodl obdarovat nás prací o naší nové analýze, kterou si již dlouho přeji; nicméně když jsem viděl, že Vaše zaneprázdněnost Vám toto podle všeho neumožňovala, napsal jsem v této věci několik sešitů a zde je pár slov k jejich původu. Asi před šesti lety mi do rukou padla lipská Akta, kde jsem našel Vaši metodu tečen, která se mi líbila natolik, že jsem od té doby složil pár spisů, kde jsem dokázal všechna Vaše pravidla.“ (A III, 6, 232-233). Srv. dopis Huygensovi, p. 70, v. 17 a předmluvu *Analýzy nekonečně malých* i pro Leibnizovu v odpověď, v níž dává svolení s vydáním oněch „sešitů“, neboť přes svůj záměr sestavit něco „o našem novém kalkulu a s tím souvisejících věcech (*matieres connexes*), pod názvem *Science de l'infini*“, příliš daleko nepostoupil (tamt., 250). K dokreslení markýzovy životní křižovatky se Fontenelle (1715, 61) staví za svědka, že L'Hospital „integrálního počtu nemohl přestat litovat“.

72 Započal ji L'Hospital 14. prosince 1692 (A III, 5, 449-450) s dotazem ohledně Leibnizových rozvrhů teorie obalových křivek z *De Linea ex lineis* (v. 122). Záběr korespondence se brzy rozšířil na celou oblast dobových zápasů analýzy, matematiky, fyziky atd. a vpravdě univerzum projektů, které Leibniz při své zaneprázdněnosti svěřoval L'Hospitalovi (ostatně tak, jako všem ostatním) k uvážení. Poslední vydaný dopis, pokud vím, pochází pochází z 26. září 1701 (A III, 8, 725-729).

73 Leibnizův optimismus stran „ustavení pravdivé a pevné hypotézy o přirozenosti věcí“ (A VI, 3, 554) byl, jak známo, nezdolný a stál nejhlubším základem veškeré jeho vědy i politiky. Odtud neúnavné zakladatelské a reformní počiny ve věcech učených společností; neboť na pozadí marnivosti a samojedinosti tehdejších filosofických „sekt“ měl za to, že když několik málo lidí bude na správných základech pracovat ve společném souladu (*travailler de concert*), zmohou více než úsilí jednotlivců mnoha staletí: „Připojil jsem zároveň projekt nové filosofie /*Demonstrationum catholicum conspectus* (A VI, 1, 494-501)/, jež by naprosto odstranila (*effacé*) tu Descartovu, která velice škodí Školám (*Escoles*). Descartova filosofie je totiž stále dosti chimérická, třebaže je na ní něco krásného. Avšak v řádu, jako je ten jejich /Jesuitů/, čítajícím tolik velikých lidí, kteří vynikají ve všech druzích věd, kdyby jim bylo určeno pracovat společně, mohli by položit tvrzení právě tak jistá, jako jsou Eukleidovy *Základy* […]“ (A II, 1, 808). Odtud pak také jeho nářky, že je těžko takové osoby nacházet, a to zejména v německém ústraní, jak píše právě L'Hospitalovi: „Rozvrhl jsem několik obecných metod, ale bylo by třeba se odhodlat a provést jednou provždy jisté, dosti obsáhlé výpočty. A já nejsem ve stavu, kdy bych to mohl vykonat. V této zemi nejsou lidi, kteří by o tom měli sebemenší ponětí. A to o tom jen tak nemluvím. Je to požehnáním velkých měst, že tam naleznete mnoho osob, které si můžou navzájem vypomoci.“ (A III, 5, 481).

74 Fontenelle (1715, 60).

nové matematické vzdělanosti. Šlo především o analytické pojednání kuželoseček, geometrických míst, teorii rovnic a mechanických křivek, „což byl vlastně plán geometrie p. Descarta, jen rozsáhlejší a úplnější“.[75] Leč markýzovo poslední nasazení ve prospěch geometrie, a mladých geometrů zvláště, přerušila náhlá mrtvice, v niž se v 1. února 1704 po pár týdnech nečekaně zvrátila běžná horečka, na kterou však běžné léky nepomáhaly. Smrt následovala na druhý den večer.[76] Pochopitelně, co stálo za tímto brzkým koncem jednoho oslnivého života, těžko říci; pracovní vypětí, množství povinností plynoucích z šlechtického postavení a snad také značná duševní námaha, na niž během krátké doby markýzovi vyměřené zbývalo času ještě méně. Souhlasným míněním mnohých, včetně samotné markýzy,[77] tedy na stejnou vášeň pro geometrii, ze které Guilllaume de l'Hospital žil, jak už tomu bývá, také umřel. Nutno však dodat, že L'Hospital plody svých nyní již opravdu posledních let práce nakonec v žádném případě smrti nedaroval a v posledku byly stejně trvalé a právě tak hodné pověsti jejich autora, jako sama *Analýza nekonečně malých*. V té době již totiž mezi dalšími markýzovými dopisy a rukopisy čekalo několik sešitů, které, až na předmluvu, byly téměř připraveny k tisku; a řeč bude samozřejmě o mnohými očekávaném a brzy věhlasném *Analytickém pojednání o kuželosečkách a jejich použití k řešení rovnic*. Díky markýze, Varignonovi a Malebranchovi, kteří se podíleli na jeho vydání, vychází konečně roku 1707 a stává se uznávanou, základní učebnicí v této oblasti analýzy po celé následující století.[78]

75 Fontenelle (1715, 61).

76 Svědkem smutných událostí se náhodou stal Pierre Varignon, který toho dne přispěchal k L'Hospitalovi sdělit mu radostnou novinu, že Johann Bernoulli obdržel nabídku profesury řečtiny na universitě v Basileji: „Přátelství a úcta, jež k Vám choval p. markýz de l'Hospital byly takové, že by byl také velmi potěšen, kdyby byl schopen ji vnímat, onoho 2. tohoto měsíce, co jsem mu ji přišel oznámit; ale když jsem přicházel, byl v posledním tažení a nic už neviděl ani neslyšel. Při pohledu na to smutné představení jsem se nemohl ubránit slzám a vzlykání a skoro hned jsem musel odejít: dozvěděl jsem, že dvě hodiny po té zemřel.“ (JBB III, 109).

77 Se zvoláním markýzy „*Malheureuses Mathematiques qui m'ont fait perdre ce que j'avais de plus cher au monde!*“ svěřuje se po návratu z lázní Varignon Johannu Bernoullimu, a to v nevídané (adiktologické?) pasáži o zničujícím vlivu matematiky: „Nemohl jsem číst Vaši práci, i kdyby k tomu mé zdraví bylo dostatečné: a doufám, že brzy tomu tak bude. Podle toho, že Vás též přepadla potřeba odjet do lázní, je mi zřejmé, že Vás matematika také začíná podlamovat (*miner*): *Nešťastná matematika* – (napsala mi před dvěma dny paní markýza de l'Hospital, když mě zvala, abych s ní tento podzim přijel strávit pár dní na venkov), *která mě připravila o to nejdražší, co jsem na světě měla!* Po pravdě, je v tom jistá zaslepenost, mrhat životem na takovéto kratochvíle (*amusement*), oč marnější, když bez života nám nemohou být k ničemu dobré. Ale jak je obtížné vzdorovat jejich svůdným půvabům!“ (JBB III, 193).

78 Myšlenka na *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations* sahá až do roku 1694. Kromě možného návodu Leibnizova – přímý vliv na vznik díla měli Malebranche, který se dokonce postaral o narýsování obrazců, a oratoriáni obecně. Vydavatel knihy ve svém *Avertissement* lituje, že předmluvu by nedokázal správně sepsat nikdo jiný než markýz de l'Hospital; nicméně vzhledem k pověsti autora se jal hledat nějakého zkušeného geometra, který by dohlédl na tisk, a vydal rukopis tak, jak je: „A také díky vážnosti, jíž se autor u učenců těší, a úctě k dílu, jež mnozí již viděli v rukopisu, jsem šťastně nalezl. Úctě již natolik rozšířené, že horlivost velkého množství matematiků, kteří za mnou během tisku přicházeli s jistou nedočkavostí, aby je viděli; a zejména mladých geometrů, kteří se podle toho, co o tom slyšeli, domnívali, že by jim měla usnadnit vstup do autorovy skvostné (*sublime*) *Analýzy nekonečně malých*. Tito všichni mě přiměli vydat dílo bez předmluvy, již jsem měl v úmyslu nechat připojit, neboť, jak říkali, by se raději obešli bez ní, než aby museli dále čekat […]“. Dva geometři, kteří se vydání chopili, byli právě Varignon a Malebranche, jak se ukazuje z jednoho Varignonova dopisu Bernoullimu z téhož roku (JBB III, 226), kde lze k jeho průběhu nalézt více.

Akademický portrét Guillauma de l'Hospitala, jehož obrysy zde byly lehce dotaženy a opatřeny živějšími odstíny, nám, jak vidno, představuje výjimečně nadaného a pracovitého vědce, celou duší, až do zničení těla oddaného geometrii; konajícího s plným nasazením ku vyšší slávě a plnému vítězství počtu nekonečna; zajisté cílevědomého a ctižádostivého, ovšem nikoli bez jisté šlechetné velkorysosti a vždy jen, nakolik šlo o věc; beze stopy po marnivosti, zpupnosti a hašteřivosti, které se bohužel nevyhýbaly ani těm největším z matematiků a otců zakladatelů geometrické přírodní vědy raného novověku. Dle svorného svědectví obou pařížských přátel, Fontenella[79] i Saurina,[80] jako by snad ani za svůj mimořádný dar nemusel splácet daň v podobě obvyklých neřestí a odpudivých vlastností význačných učenců. Zkrátka vynikající osobnost, v níž se jedinečným způsobem snoubily nezištné zaujetí, pronikavost náhledu i schopnost a obratnost uskutečnit předsevzaté dílo – a je zjevné, že v žádném případě nebylo, abych se tak řeklo, „nekonečně malé“, uváží-li se krátký čas, který mu pro ně byl přidělen. Tragicky pak a zbytečně brzy – s nádechem mučedníka geometrie a jako pravý křesťan dosvědčující, že „nic není tak provázáno jako rozum a náboženství“[81] – odchází tedy Guillaume de l'Hospital: na vrcholu života a duševních sil, kdy stále matematice mohl poskytnout velké služby a pro *République des Lettres* vykonat mnoho dobrého.

Kromě svých znalých knih nicméně zanechal po sobě markýz de l'Hospital, jak už bylo zmíněno, též bolestí dlouho zdrcenou, milující manželku, o níž se na závěr musí vždy pojednat. Marie-Charlotte, markýza de l'Hospital, jak se zdá, byla velice okouzlující a duchaplnou dámou a bez pochyby se u manželových učených přátel, které přijímala ve svém pařížském salonu, těšila značné úctě a oblibě.[82] S manželem však také do jisté míry sdílela jeho vášeň pro geometrii. Kromě toho, že to byla markýza, jejíž rukou byla psána (přepisována) většina L'Hospitalových dopisů, až

79 „V nejběžnějších hovorech jste pociťovali přesnost, pevnost, zkrátka Geometrii jeho ducha; snadno se s ním jednalo, byl nanejvýš čestný, otevřený a upřímný, v souladu s tím, čím byl, protože tím byl, aniž by odtud čerpal nějaké výhody, pravou skromností velikého člověka; připraven okamžitě přiznat svoji neznalost a nechat se poučit, dokonce i ve věci geometrie, pokud se nějaké poučení naskýtalo; nebyl nikterak žárlivý, ne však vědomím své převahy, ale svou přirozenou spravedlivostí; neboť bez této spravedlivosti ti, kdo se považují za ostatním nadřazené, a dokonce jsou nad nimi těmi nejvyššími, žárlivými stále jsou.“ (Fontenelle 1715, 63).

80 „S tak vzácným věděním a přitom na výši těch nejznamenitějších – nikdy nikdo neměl tolik skromnosti a dobroty jako p. markýz de L'Hospital. Mezi vědci laskavý, nenucený, vlídných způsobů; v běžných hovorech vystupoval prostě, každému naslouchal a vždy byl ochoten se poučit; sebe si cenil málo, mnoho si cenil ostatních a jak jen mohl, vyzdvihoval jejich zásluhy; byl netečný k malicherné řevnivosti (*petites jalousies*), která všude vládne, a zcela byl povznesen nad prázdnou slávou, po níž tolik baží většina učenců.“ (Saurin 1704, 191-192).

81 *Dispositions chrétiennes* markýzovy smrti i jeho duchovní smíření popisuje Saurin (1704, 192).

82 Což je patrné z jejich dopisů (nejen L'Hospitalovi). Johann Bernoulli oceňoval její krásný literární styl omlouvaje předem psaní své vlastní ženy markýze, které mu ona raději nedala přečíst, „neboť bylo by třeba být paní markýzou de L'Hospital, aby člověk psal s takovou čistotou, a bylo by třeba mít její nadání (*génie*), aby si s ní mohl vůbec začít psát; pokud je však tento duch tak vzácný mezi francouzskými dámami, co pak bychom mohli najít u švýcarských žen, až na náramně vybavený hrudní koš (*si ce n'est le sein bien fourni*)“ (JBB I, 244). Roku 1719, tedy celých tři a dvacet let po té, když se stále marně pokoušel „pro veřejné blaho“ dát vynést na světlo „papíry zesnulého pana L'Hospitala“, zmiňuje v dopise Montmortovi markýzu coby „dámu, jež má tolik ducha a moudrosti“ (UB 1719.07.13); Montmort o ní v předešlém dopise mluví jako o *femme extraordinaire* (tamt., 1719.06.28); srv. Spiess (1955, 127-128).

se prý naučila jeho rukopis téměř k nerozeznání;[83] vychází dokonce pod jejím jménem či akronymem, M. la M. de L***, roku 1691 „článek“ v *Journal des Sçavans.*[84] Na markýziny matematické schopnosti z toho sice usuzovat nelze (ostatně tato otázka nikam nevede), ale je jasné, že paní de L'Hospital z uvedených důvodů znala důvěrně všechny manželovy dopisy a spisy, a tedy věděla přesně, které je třeba poskytnout Varignonovi ku zdárnému vydání *Traité analytique des sections coniques*, či Fontenellovi v podobě podkladů k sepsání *Éloge*.[85] Ozvuky dalšího markýzina života – v roce manželovy smrti jí bylo třicet tři let – se postupně ztrácejí; zprávy hovoří o tom, že asi po deseti letech si markýza našla novou známost, chtěla se znovu vdát a snad z důvodu cti a úcty k manželově památce odvrhla všechny společné přátele, věrného Varignona nevyjímaje.[86] Až do její smrti roku 1737 pak veškeré zmínky o Marie Charlotte de Romilley de la Chesnelaye, markýze de l'Hospital, zcela utichají.

De mortuis nil nisi bene, a tak se tento, jak jsme jej nazvali, akademický[87] či výstavní portrét života markýze de l'Hospitala stal tím, jenž pro dějiny matematiky zůstal do značné míry oficiálním. A to i přes jisté, v duchu *nil nisi vere* postupem času až umanuté námitky jednoho notorického stěžovatele. Sudiči se občas v soukromí dalo za pravdu a pak se přešel veřejným pomlčením, v horších případech byl odbyt prostým mávnutím ruky; a jak se pozvolna, během staletí

83 Jak uvádí vydavatel dopisů Otto Spiess.

84 *Remarques de M. La M de L*** sur la pretenduë demonstration de la quarante-septiéme proposition du premier livre des Elemens d'Euclide...*(JS 1691, 320-321). Jedná se o vyvrácení domnělého důkazu Pythagorovy věty z pera jistého geometra jménem La Montre. Vyskytly se názory (Montucla II, 398), že L'Hospital vydal článek pod markýziným jménem, neboť se mu zdálo pod úroveň vyvracet takto pošetilý důkaz sám za sebe. Ale vskutku se nejedná o nic světoborného, a nelze tedy usuzovat, že by markýza autorkou bývala být nemohla. Nicméně v době markýzovy vážné nemoci píše 1. února 1696 Marie Charlotte Johannu Bernoullimu: „Pokud jde o mě, nyní jsem pohněvána (*fachée*), že jsem nepěstovala matematiku, teď bych možná byla dostatečně způsobilá položit Vám nějakou otázku; vše co tedy mohu dělat je, pane, ujistit Vás, že nemáte opravdovější přítelkyně nežli mne.“ (JBB I, 312). A jak dodává Otto Spiess: „nakonec musíme jí to věřit“.

85 Poněvadž Fontenelle L'Hospitala dobře znal, jednalo se jen o Huygensovy dopisy, jak píše Varignon, který je pro Fontenella u markýzy měl vypůjčit. Od L'Hospitala totiž zaslechl, že p. Huygens si jej cenil a měl se od něj naučit diferenciálnímu počtu: „mysleli jsme na to, p. de Fontenelle a já, ke cti tohoto počtu, který byl tehdy napadán p. Rollem. P. de Fontenelle mi ohledně toho uložil navštívit paní markýzu de l'Hospital; řekla mi, že je najde; a když jsem se pro ně vrátil, nechala mě v sálu, sama šla nahoru, odkud mi jich přinesla asi 7 nebo 8, aniž by mi ukázala cokoli dalšího […]“ (JBB III, 225-226), vysvětluje Varignon Johannovi Bernoullimu, který již všechny podezíral ze spiknutí, 12. března 1707. Přestože Fontenelle tento poněkud svérázný výklad – zřejmě účelově ve světle tehdejších bojů o kalkul – zachoval (p. 31); lze s Pierrem Costabelem (tamt.) doplnit, že přes zjevnou úctu k jeho znalostem a četným dotazům se Huygens nikde ve svých dopisech za L'Hospitalova žáka neprohlašoval.

86 Přičemž k zamýšlenému manželství nakonec nedošlo (Spiess 1955, 128). Určité neúplné zmínky o těchto událostech markýzina života lze spatřit rovněž ve výše citovaných dopisech mezi Johannem Bernoullim a Pierrem Rémondem de Montmort (v. 82). Ježto řeč probíhá – lhostejno, že po smrti obou objevitelů – především o dalším kole hádek o infinitesimální počet, tentokrát po výpadech Brooka Taylora, Montmort se zmiňuje jen mimochodem, že: „Od jeho smrti nikdo nic z papírů p. markýze de l'Hospitala neviděl, jeho vdova je výjimečná, duchaplná žena, která však opustila přátele svého manžela, velice špatně vychovala svého syna a zachovala se způsobem, který jí na cti nepřidal (*tenu une conduite qui ne luy a pas fait honneur*)“. Johann Bernoulli v odpovědi vyzvídá podrobnosti, neboť „měl tu čest poznat velice speciálně povahu i ducha jak paní, tak pana de l'Hospital a zajímá ho, co se přihází jedné po smrti druhého.“ (UB 1719.07.13). Montmortovo vysvětlení však již Univerzitní knihovna v Basileji nenabízí a snad ani nebylo napsáno, neboť 7. října 1719 Pierre Rémond de Montmort umírá.

87 Třebaže Joseph Saurin do Královské akademie věd v Paříži – nicméně v přímé, vnitřní souvislosti se zde podávanými událostmi – vstupuje až roku 1707.

objevovaly nové okolnosti tohoto vlastně neznámého případu, povstala odtud tradiční kratochvíle historiků matematiky[88] spočívající v posledku, snad ve jménu druhého z hesel, v zaujetí postoje – neboť *věřilo se za národ*. Přirozeně však existovaly i další portréty markýze de l'Hospitala; a kromě těch dávno ztracených, které nenávratně zašly časem, lze objevit či restaurovat alespoň ještě jeden vnitřní, udržovaný v tajnosti a před akademiky skrytý. Byť tedy akademický portrét v tomto smyslu nebyl zcela nevinný, poněvadž, jak už bylo řečeno, vznikal na pozadí tehdejších bojů o kalkul, pokud jde o jeho věrnost podobizně markýze de l'Hospitala tak, jak ji mohli znát a z blízka znali, není Fontenellovi se Saurinem mnoho co vytýkat. Na jejich chvalořečech bude jistě veliký kus pravdy; kromě toho jakékoli přibarvovaní by bylo v případě Guillauma de L'Hospitala v podstatě zbytečnou prací, která je akademiků nehodná.

88 Otto Spiess mluví dokonce o *Zankapfel*, čili opět „jablku sváru“.

MARKÝZ DE L'HOSPITAL A JOHANN BERNOULLI.

Setkání v Paříži a poloměr křivosti.

Jednu věc však pařížští přátelé nevěděli a jistou směrodatnou událost přeci jen opomněli a snad ani nemohli zmínit.[89] Sahá až do roku 1691, tedy na samý počátek L'Hospitalovy hvězdné geometrické dráhy; její důsledky jsou dalekosáhlé a nebýt jí, nebylo by s největší pravděpodobností žádné *Analýzy nekonečně malých* tak, jak ji čtenář zde bude moci nahlédnout, a samo sebou ani těchto řádků. Na podzim toho roku se totiž po ročním putování po švýcarských a francouzských krajích zastavil v Paříži, hlavním městě všech učenců, tehdy čtyři a dvacetiletý doktor filosofie, licenciát lékařské vědy, ale především mimořádný matematik, Johann Bernoulli.[90] V mošničce si přinášel navštívenku v podobě obecné formule poloměru křivosti[91] a jeho kroky sotva mohly mířit někam jinam než za otcem Malebranchem. Stačilo pak jen jeho jméno zvýrazněné nedávno zveřejněnou konstrukcí řetězové křivky,[92] aby se mu od zasvěceného geometra dostalo vřelého přijetí a pozvání na některé z pravidelných setkání jeho kruhu význačných vědců celé Paříže.

Markýz de l'Hospital jej patrně již očekával, neboť se mu před tím od otce Malebranche do rukou dostalo Bernoulliho pojednání o řetězové křivce; a těžko pak mohl věřit, že by „někdo v

89 Kromě pronikavé, přehledné a přesvědčivé studie Otto Spiesse (p. 14), která si – až na ve všech směrech nepravděpodobný případ nalezení nějakých nových, převratných pramenů – zřejmě podrží rozhodující platnost, bude tato kapitola čerpat především z vlastního, francouzsky psaného životopisu Johanna Bernoulliho ze sklonku života. Bernoulliho *Autobiographie* objevil a vydal významný švýcarský astronom, badatel a historik vědy Johann Rudolf Wolf (1816-1893), *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz*, Bd. 2 (Hg. R. Wolf), Zürich: Orel Füssli, 1859, s. 71-104. Postava profesora Wolfa je pro veškeré bádání o vztahu L'Hospitala a Bernoulliho, a tedy i pro tuto práci, principiální, neboť to byl právě on, kdo mimo jiné kolem roku 1800 nalezl společnou korespondenci obou matematiků (Spiess 1955, 35). A právě ta přirozeně představuje hlavní zdroj a nejpevnější základ našeho pojednání. Vedle ní se bude vycházet také z již uvedených dopisů Bernoulliho s Montmortem (p. 82, 86) z okolí roku 1718, které jsou obzvláště důležité pro nahlédnutí Bernoulliho duševní a společenské kalvárie stran nekonečně malých. V té době byl totiž Montmortem osloven za účelem pomoci se zamýšlenými dějinami geometrie, jež „by si posvítily na loupeže (*larcins*) a každému navrátily, co mu bylo odejmuto“ (UB 1718.04.03); a jistěže tuto příležitost nepřešel mlčením. Jako další dokreslení zde poslouží dopisy Johanna Bernoulliho s Pierrem Varignonem. Jedná se o druhý a třetí svazek korespondence Johanna Bernoulliho, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Bd. 2: Band 2, Der Briefwechsel mit Pierre Varignon - Erster Teil: 1692-1702 (Hg. D. Speisser), Basel: Springer, 1988; respektive Bd. 3: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon. Zweiter Teil, 1702-1714 (Hg. D. Speisser), Basel: Springer, 1992; a to spolu s komentáři P. Costabela a J. Peifferové.

90 Je příznačné pro Johanna Bernoulliho stejně tak, jako pro jeho dobu, že i pozdější Bernoulliho doktorská práce v oboru medicíny *De motu musculorum* (1694) vlastně spočívala, jak sám v *Autobiographie* říká, v oné „krásné a božské vědě“ (Wolf 1859, 72), v níž od roku 1685 pod vedením svého o třináct let staršího bratra dělal tak zázračné pokroky, že se „za měsíc či dva obeznámil skoro se všemi antickými autory, kteří psali o matematice; ale též s moderními, jako byla Descartova geometrie a jeho algebra s komentáři“ (tamt.). Ze své cesty zmiňuje zvláště osm měsíců v Ženevě, kde vyučoval „nové analýze“ Jean-Christopha Fatio de Duilliera (1656-1720), bratra známějšího Nicolase (p. 66).

91 Jakobův *theorema aureum* (p. 62, v. 89), což později v době svárů neváhal Jakob sdělit všem v *Acta Eruditorum*: „Znali jsme jej již tehdy, když jsme se věnovali úvahám nad lany /řetězová křivka/, a za nedlouho se s ním *bratr* na svých putováních nezřídka svěřoval.“ (AE 1694, 263; JABO I, 577).

92 *Solutio problematis funicularii* (AE 1691, 274-276; JBO I, 48-51).

pouhých čtyři a dvaceti letech mohl mít tolik znalostí výsostné (*sublime*) geometrie, aby dokázal vyřešit úlohu, na níž ztroskotal samotný Galileo“.[93] Své dojmy z prvního setkání Johann Bernoulli líčí těmito slovy:

> „Nevím, jestli měl p. markýz za to, že ho chci šálit a vydávám se za autora tohoto řešení, které se ke mně nehodilo, a jal se mě tedy vyslýchat o všem možném. Ale pochopil brzy, že nejsem nějaký dobrodruh ani šarlatán, na nějž jsem si podle něj měl hrát. Řeč se konečně stočila na poloměr evoluty či oskulačního kruhu. Pochlubil se, že má zcela výjimečné pravidlo odvozené z metody *de max. et min.* p. Fermata; na zkoušku jsem mu tedy dal příklad nějaké algebraické křivky (neboť toto domněle obecné pravidlo pasovalo jen na algebraické křivky a jen pro poloměr od hlavního vrcholu). P. de l'Hospital si nechal přinést papír a tužku a pustil se do počítání; a když už to trvalo skoro hodinu a počmáral při tom několik listů, našel nakonec správnou hodnotu poloměru při vrcholu této křivky. Ale správně si povšiml, že se usmívám nad příšernou délkou toho pravidla, nemluvě o jeho omezenosti; a tak mu říkám, že celá záležitost určení poloměru evoluty u všech druhů křivek, ať algebraických, nebo transcendentních, ať při vrcholu, nebo v jiných bodech, je pro nás jen dětskou hrou a že máme obecnou formuli, s jejíž pomocí najdeme tento poloměr za tolik minut, kolik on spotřeboval čtvrt hodin.“ (UB 1718.05.21)

Není divu při tom všem, že tohle L'Hospitala zaujalo, čímž se začíná rýsovat spodní proud, temná linka příběhu *Analýzy nekonečně malých*. Stačilo sotva pár hovorů u Malebranche a markýz de l'Hospital kouzlu nekonečně malých naprosto propadl. Od pozoruhodného hosta, který „nechtěl dělat tajemného, rád souhlasil a nenechal se dlouho přemlouvat“, si okamžitě vyzískal pravidelné hodiny nových metod čtyřikrát do týdne; a nevyhnutelným následkem jeho geometrické přirozenosti, čím více se od svého mladého učitele o nich dovídal, tím více o nich vědět chtěl. Snad z obavy ze ztráty paměti si markýz brzy vyžádal lekce podávat písemně, a tak Johann Bernoulli začal na každé setkání nosit „list o čtyřech stránkách *in 4*°“[94] s novými výklady, které latinsky, „vždy předchozí večer sepsal u sebe doma“.[95] Lekce základů diferenciálního a integrálního počtu takto probíhaly od konce roku 1691 až do poloviny léta roku příštího, když byl Johann poctěn nabídkou[96] svého o sedm let staršího žáka odjet, pochopitelně markýzovým kočárem, na jeho panství v Oucques a strávit zde ještě s paní markýzou zbylou část roku. Návštěva se protáhla do vinobraní a není těžké uhodnout, co tu bylo Bernoulliho hlavní náplní: „nemeškal jsem p. markýzovi předávat stále nové práce, vždy psané mou rukou, pokud jsem pro ně našel nějakou látku, k čemuž mi ostatně on sám poskytoval příležitost všemožnými otázkami.“

---

93 L'Hospitalovy prvotní znalosti geometrie popisuje Bernoulli: „Z rozhovoru, co jsem vedl s p. markýzem jsem brzy pochopil, že co se týče běžné geometrie je dobrým geometrem, ale neví nic o diferenciálním počtu ani podle jména, a tím méně o počtu integrálním, který se tehdy teprve rodil.“ (UB 1718.05.21). Podobně též v *Autobiographie*: „byl zvláštním způsobem překvapen lehkostí, s níž jsem jsem hravě (*comme en jouant*), na místě řešil úlohy, které mi předkládal doznávaje, že jsou prostředky běžné algebry neřešitelné“ (Wolf 1859, 74).

94 „Laskavě jsem se jeho přání uvolil, aniž bych tušil, že má v úmyslu to jednoho dne publikovat.“ (Wolf 1859, 75).

95 UB 1718.05.21.

96 Tamt. Podle vyjádření z *Autobrigraphie* naopak byl „nucen dělat mu společnost a učinil tak s jistým odporem“ (Wolf 1859, 76).

V Oucques pobýval Johann Bernoulli s markýzem de l'Hospitalem a jeho paní až na výjimku sám, takřka ve věži ze slonoviny. Co je však důležitější, pokud šlo o přednášky pařížské, jeden z jeho přátel z Basileje, který u Johanna bydlel, byl „tak laskav pořizovat jejich kopie, nežli je odnášel k p. markýzi de l'Hospitalovi, a tak se zachovaly všechny“.[97] A tedy na rozdíl od těch, které byly sepsány a probrány v Oucques – neboť, jak Johann Bernoulli přiznává Montmortovi,[98] byl vždy příliš líný na to, aby si přepisoval své vlastní spisy. Po asi čtyřech měsících, po dobu kterých měl být markýz de l'Hospital „upevněn v používání nových počtů za účelem řešení všech druhů fyzikálně matematických otázek“,[99] pobyt končí. L'Hospital odjíždí v naléhavé obchodní záležitosti do Paříže a Johann Bernoulli se po pár týdnech taktéž v městě nad Seinou – tehdy poznává Pierra Varignona – vrací do Basileje.

Zákulisní dohoda.

I kdyby L'Hospitalovy znalosti metod nekonečna nebyly tak zábavně žalostné, jak je ze svého pohledu a s odstupem let živě vylíčil Johann Bernoulli,[100] je přinejmenším zarážející to ticho, které se nad takto výjimečnou, vpravdě zasvěcující událostí rozprostírá na stránkách markýzových dopisů, které tou dobou začínal zasílat nejlepším hlavám konce století. Huygensovi děkuje, že mu v těchto druzích otázek velmi pomohla jeho práce o řetězové křivce.[101] Leibnizovi se, jak víme,

97 UB (1718.05.21). Neboť, jak píše v *Autobiographie*: „Nicméně před tím, než jsem originály odnesl k p. L'Hospitalovi, byl jsem tak prozíravý, že jsem je dával opsat příteli, který se mnou bydlel.“ (Wolf 1859, 72). Přítelem z Basileje byl, jak uvádí Spiess (1955, 137) Johann Heinrich Stähelin (1668-1721), pozdější profesor anatomie a botaniky a Bernoulliho kolega na universitě v Basileji. Na základě jeho kopií vznikl druhý díl přednášek *ad usum Marchionis Hospitalii*, o počtu integrálním (p. 47, v. 17). Z L'Hospitalových dopisů je patrné, že Stähelina znal.

98 Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), francouzský matematik, Malebranchův žák, od roku 1715 člen Royal Society v Londýně, o rok později také Královské akademie věd v Paříži. Do dějin matematiky se nejvýznamněji zapsal výzkumy tehdy ještě mladé pravděpodobnosti a teorie hazardních her, odtud pak jeho spolupráce s Nikolasem Bernoullim i vlivná práce *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (1708).

99 Wolf (1859, 76). Tamt. Bernoulli dodává, že v Oucques L'Hospitala vyučoval i exponenciálnímu kalkulu, jehož základy publikoval v lipských *Aktech* 1967 – jedná se zjevně o *Principia calculi exponentialium seu percurrentium* (AE 1697, 125-137): *percurrentium*, neboť „zde veličiny probíhají všechny rozměry“. Což je však v rozporu s pozdějšími dopisy markýze de l'Hospitala, v nichž Bernoulliho o exponenciální, či, jak on říká „logaritmický“ (JBB I, 304) počet, opakovaně žádá. Pochopitelně: mezi vlastními událostmi 1691/1692, jejich vylíčením Montmortovi 1718 a *Autobiographie* 1741 uplynulo mnoho vody a paměť selhává i těm největším. V dalších ohledech se oba prameny liší více méně jen v nepatrných drobnostech.

100 To, že markýz de l'Hospital z nové analýzy něco znát musel, dosvědčuje hned jeho první dopis Malebranchovi, N°5, 13. října 1690, kde oznamuje přijetí dopisů od Christiaana Huygense a nadějné zprávy, že snad jeho dopisy budou Huygensem zveřejněny, jak ostatně již víme (p. 30); a pokračuje: „Se spiskem, který jsem Vám vložil do rukou, nebudu spokojen dříve, než k tomu dáte své svolení. Mým záměrem je zcela změnit aritmetiku nekonečna. Zdá se mi, že znám obecnější a jednodušší způsob, jak dokázat všechna tato tvrzení a jsem si jist, že Vás nezklame.“ (JBB I, 158). Malebranchova odpověď (nalezena P. Costabelem roku 1948) byla, jak doplňuje Spiess (tamt.), jen plna chvály o „nejryzejší (*fin*) matematice, velice srozumitelně a stručně vyložené (*expliqué avec beaucoup de netteté et en peu de paroles*)“.

101 26. června 1692, N°2760 (HOC X, 305). Jednalo se o Huygensův článek *Solutio ejusdem problematis* (AE 1691, 281-282) navazující na Leibnizovu *Linea in quam flexile* (tamt., 277-281) a právě na již zmíněnou práci Johanna Bernoulliho *Solutio problematis funicularii* (p. 92)! Srv. HOC (X, 95-98).

svěřuje, že „již před šesti léty“, tedy roku 1688, se mu dostala do rukou jeho metoda tečen a natolik se mu zalíbila, že dokázal všechna její pravidla. Což údajně měl být původ jeho „několika sešitů“[102] – jako by jen *Nova Methodus* byla jeho učitelem a jako by ji on sám pronikl pouze svými silami. O rok později se v tomto smyslu, v jinak překrásném vyznání, vyjádřil již zcela výslovně:

> „Pokud jde o mě, pane, uznávám, že Vám plně vděčím za drobné pokroky, které jsem ve vnitřní geometrii vykonal, a oprávněně na Vás pohlížím jako na mistra nás všech (*nôtre maistre à tous*).“ (A III, 6, 377)

Huygens, Leibniz – po Bernoullim ticho po pěšině. Na druhé straně však přes veškerou živost, přesvědčivost, naléhavost Johannova vyprávění tu také bylo něco, s čím se před Montmortem, Leibnizem, blízkými přáteli ani dějinami nijak nešířil. Když Montmortovi vzpomínal návštěvu otce Reyneaua[103] v Oucques, jak mu o novém počtu málo co mohl sdělit, a nadto jen ústně;[104] jak ho markýz prosil, ať o tom, co spolu probírají, nikomu nic neříká; pak jen velice cudně zmiňuje: „a to tím spíše, že úzké vazby (*l'étroite liason*), jež jsem měl s p. de l'Hospitalem, mi nedovolovaly předávat komukoli jinému věci, co jsem psal pro jeho použití“.[105] Co měly ony „úzké vazby“ znamenat, si lze domýšlet. Počátkem roku 1693, kdy ještě o nové známosti mluvil velice hezky, pasoval jej „vzhledem k jeho solidní erudici na bez obtíží Prvního (*facile Princeps*) z pařížských matematiků“ a přitom si plánoval, že své *Lectiones* nechá vydat společně s Leibnizovou *Scientia*

102 Viz p. 71. Že by se L'Hospitalovi roku 1688 dostala do rukou *Nova Methodus* (1684) je samozřejmě možné vzdor Bernoulliho prohlášením, že diferenciální počet neznal ani podle jména (p. 93); pak by ji ovšem býval těžko mohl proniknout natolik, jak sám uvádí. Spiess upozorňuje, že z dopisu N° 59 Johanna Bernoulliho je zřejmé, že ještě na začátku společného pobytu v Paříži nechápal, „k čemu je dobré charakteristické písmeno *d* a jestli bychom nemohli použít *a* nebo *e* tak, jako Barow (*sic*) namísto *dx* a *dy*“ (JBB I, 311). Toto by potvrzovalo zmíněné L'Hospitalovo „zcela výjimečné pravidlo“ na způsob Fermata, ale rozhodně ne to, co sám tvrdí; nicméně pochopit smysl charakteristického znaménka *d* měla za těžko drtivá většina současníků; a v Anglii dokonce ještě sto let po té. Oněch „několik sešitů“ značí s největší pravděpodobností stejný předmět jako v p. 100; byť jejich smysl a denotát se, jak vidno, postupem času poněkud proměňoval.

103 Charles René Reyneau (1656-1728), profesor matematiky v Angers, posléze člen pařížské Oratoře. Pod vlivem Malebranche, který od něj požadoval sepsání nových *éléments*, se obeznámil s myšlenkami nového počtu, odtud povstalo jeho slavné pedagogické dílo *Analyse démnotrée* (1708), druhá práce o infinitesimálním počtu (tentokrát i se základy metody integrálů), z níž se mu učil D'Alembert a dokonce i Rousseau. Svoji úlohu Reyneau sehrál také v soubojích o nové metody mezi Varignonem a Rollem při Akademii věd mezi; z nich pro své užití pořídil záznam a shrnutí, k nahlédnutí v JBB (II, 359-378). Z dopisu Montmorta Bernoullimu (UB 1718.06.26) je zřejmé, že otec Reyneau měl přístup a viděl (právě tak jako Montmort) aspoň části *Lectiones*: „Není nic podivnějšího než to, co jste mi, pane, sdělil o vašich stycích s p. de l'Hospitalem. Částečně jsem ten příběh znal, dozvěděl jsem se o tom od otce Reyneaua a p. Varignona […] Trápí mne to, neboť jsem pana a paní de l'Hospital velice miloval a rovněž on mě velmi ctil svou náklonností. Nyní jsem tedy sám za sebe dostatečně poučen Vaším posledním dopisem a ještě více četbou sešitů z před třinácti nebo čtrnácti let, které jste předal p. L'Hospitalovi; otec Reyneau měl dosit úplný rukopis, který mi půjčil. Naneštěstí jsem mu jej ztratil, byl kvůli tomu dost naštvaný (*bien faché*).“ Bernoulli se dosti diví, jak se k Reyneauovi mohl nějaký opis dostat, neboť ohledně těchto věcí byl markýz vždy „mimořádně záhadný“ (UB 1718.09.29). Kopie slavných sešitů kromě Stähelina a výše uvedených viděl přes Reyneaua zřejmě ještě otec Byzance (UB 1718.05.21).

104 V *Autobiographie* si odtud Johann Bernoulli činí zásluhu na i druhý díl *Analyse démontrée* (počet integrální) a stěžuje si, že ho Reyneau zmiňuje jen mimochodem a jako by se nikdy nesetkali (Wolf 1859, 76-77).

105 UB (1718.05.21).

Infiniti,[106] byl Johann Bernoulli toho názoru, že by markýz měl být pokládán za „Mecenáše celé matematické obce". O měsíc později žertuje, již poněkud rozčarovaně, že se nemůže vynadivit „obratnosti Francouzů v páchání krádeží", což, jak říká, jistě mohl plným právem vynést na světlo, kdyby „neušetřil Hospitalovu pověst svého kdysi dobrodince" (*Hospitalii mei quondam benefactoris famae parcerem*). Za další čas, když se věci přeci jen trochu vyjasnily, Johann Bernoulli k markýzovi konečně prohlašuje, že „si z jistých důvodů hledí jeho přízeň zachovat (*favorem certam ob causam conservare studeo*)".[107]

Ona podstatná *étroite liaison* zůstala tedy před zraky soudobého obecenstva skryta v zákulisí a co do úplnosti vlastně jen ona. Výsadu dozvědět se o ní měli kromě paní markýzy už jen budoucí členové vědecké rodiny Bernoulliů,[108] kteří však odkaz velkého Johanna I. rozvíjeli hodnotnějším způsobem. Z dopisů obou pánů lze usuzovat, že v Paříži se jednalo kromě zasloužené odměny za Bernoulliho práci o jistou gentlemanskou dohodu, která se nadále snad předpokládala, ať už z jakýchkoli pohnutek. Uplyne pak více než rok čilé výměny o všem, co L'Hospitala zajímalo, od řetězové křivky po diakaustiky a mnohé další, kdy 17. března 1694 markýz blahopřeje Johannu Bernoullimu k jeho krásným zásnubám, neboť je jisté, že Johann má vkus; a zve jej na svůj zámek St. André-de-Briord, kde mají nejlepší víno z celého kraje dodávaje: „paní de Lhospital[109] se obává, aby jste si nezvykl popíjet čisté víno (*à boire son vin pur*), jako když jste se z Oucques vracel do Paříže". Nicméně markýz pokračuje:

> „Dám Vám s radostí tři sta liver výslužného (*pension*) počínaje prvním lednem tohoto roku a pošlu dvě stě liver za první půlrok vzhledem k časopisům, co jste mi zaslal; a další půlrok to bude sto padesát a tak i v budoucnu. Slibuji Vám, že brzy tuto rentu zvýším; vím dobře, že je dosti skrovná. Bude to hned, co se mé záležitosti poněkud urovnají a kdy se budu konečně moci těšit z dědictví, neboť doposud jsem ještě na nic nesáhl. Nejsem tak pošetilý, abych za tohle žádal všechen Váš čas, ale poprosím vás, abyste mi z něj občasně věnoval pár hodin práce na tom, oč Vás požádám, a také mi zasílal své objevy; přičemž Vás prosím,

106 Zde také pravděpodobně hledat příčinu, proč Johann Bernoulli své *Lectiones* sepisoval latinsky, byť markýz de l'Hospital dával na každý pád přednost francouzštině. V době, kdy je psal a pronášel jistě netušil, že přijde čas, kdy nebudou *jeho* a geometrickou obec s nimi již neseznámí.

107 Z dopisů lipskému filosofovi a zakladateli *Acta Eruditorum* Otto Menckemu (1644-1707), N° 93, 94, 95 z rozmezí března až srpna (JBB I, 390-393).

108 Což nebylo věru nikterak zanedbatelné publikum. Johann Bernoulli se o dohodě s markýzem de l'Hospitalem (jinde než ve společných dopisech) zmiňuje jen v německy psané *Autobiographie* určené toliko na památku rodinným příslušníkům. Tento spisek byl však objeven až roku 1907 a vydán až roku 1922. Johann zde vypráví o důkazech vděku a uspokojení markýze de l'Hospitala s jeho službami (*Information*) a jmenuje zajisté výlet kočárem do Oucques, léto tam strávené vedle paní L'Hospitalové a „dokonce roční penzi 400 liver". Je tedy možné, že za čas v Paříži dostal Johann Bernoulli právě tuto částku; byť, jak dále uvádí, markýz mu ji měl vyplácet až do své smrti; což je nicméně v rozporu s jejich dopisy. Coby vysvětlení se tedy nabízí nevědomé či vědomé přikrášlení vzpomínek (Spiess 1955, 156); jestliže kráva kolem roku 1700 stála asi 15 liver, jednalo se tedy o poměrně štědrou „přízeň". Otázky statků a kupní síly konce 17. století jsou nicméně složité a zabíhat do nich nebudeme; zboží, které prodával Johann Bernoulli, bylo rozdílné povahy.

109 V různosti verzí markýzova jména používaných jeho současníky (L'Hospital, l'Hospital, l'Hôpital), právě takto, bez odsuvníku, se podepisoval Lhospital sám. Usus zavedený v této práci je dostatečně zřejmý; vychází především z potřeb češtiny s ohledem k vlastnímu mluvnickému významu spojky *de* i k výskytu jména v pozdější literatuře.

abyste z nich nesděloval nic dalším lidem. Dokonce Vás prosím, abyste neposílal sem panu Varignonovi ani nikomu jinému kopie spisů, které jste mi přenechal; jakmile by byly na veřejnosti, neměl bych z toho už pražádnou radost. Čekám na Vaši odpověď stran všeho tohoto a věřte mi, pane, jsem celý Váš.“ (JBB I, 202)[110]

Nuže, markýz se rozhodl. Jestliže se Johann doposud jeho záhadným přáním podvoloval nerad, ať silou markýzovy autority, nebo kouzlem jeho osobnosti; a patrně vidinou výhodné přízně „prince a mecenáše pařížských matematiků“ a dobrého místa, které se mu zde (aby si jej udržel na blízku) snažil zařídit,[111] nakonec přešel i drobné „nedorozumění“, o němž přijde řeč vzápětí – nyní ovšem byl úpis zhotoven a stačilo jen podepsat. Ba co víc, jakkoli se nedochoval Bernoulliho dopis, jenž této smlouvě předcházel, z jejího vyznění je zjevné, že si Johann o příspěvek za své služby řekl sám; a byť ani znění jeho odpovědi bohužel neznáme a těžko říci, co všechno si za svou „penzí“ představoval, Johann Bernoulli se rozhodl také. Není se co divit, důvod je nasnadě a je takříkajíc z vyšší moci. Podmínky jeho úlohy byly zadány.

De Beaunova křivka.

Rozumí se samo sebou, že právě odkryté skutečnosti mohou i výstavní obraz Guillauma de l'Hospitala jako matematika postavit do poněkud ostřejšího světla. Jistě tedy nebude od věci podívat se zpětně a podrobněji, zdali a nakolik vrhly nějaký stín na jeho zářné matematické úspěchy; a při té příležitosti, nakolik to bude možné, nahlédnout poněkud na „geometrii L'Hospitalova ducha“ i jeho souputníků na cestě k nekonečnu. A odtud tak *in concreto* pokusit se poukázat na některé povahové rysy objevitelského umění, jak se vynořily s prvním infinitesimálním počtem z jeho hlubokých kořenů v geometrické přírodě konce 17. století.

Prvním slavně vedeným „úderem“ *Mr. G**** bylo, jak už víme, řešení obrácené úlohy tečen Florimonda de Beaunea; a lze pochopit, že dějinnou příležitost k jeho vynesení si L'Hospital prostě nemohl nechat ujít. Tou dobou totiž již hrdinným odporem proti Huygensově principu kyvadla i

110 Pokud jde o zmíněné dědictví, řeč je o pozůstalosti zesnulého markýze z Antremonts, strýce markýzy de l'Hospital, který zanechal mnoho majetku, ale (podle téhož dopisu N° 20): „jak se ukázalo, ještě více dluhů, než jsme mysleli, neboť je jich na dvě stě tisíc liver a nadto v závěti odkázal obdobnou částku dvou set tisíc liver ženám (*à des femmes*); a poněvadž tyto úpisy zpochybňujeme, zavleklo nás to do obřího procesu […]“ (JBB I, 202).

111 Jak plyne z dopisů N° 17 a N° 19, mezi nimiž se Johann Bernoulli na delší dobou odmlčel. V prvním z nich, 7. října 1693, sděluje Bernoullimu, ve snaze zajistit mu důstojnou subsistenci, úmysl posadit jej na křeslo profesora matematiky po Varignonovi, který právě odcházel do slavné pařížské *Observatoire* s těmito slovy: „A jakkoli bych pociťoval značný zármutek, kdybyste se ubíral kamkoli daleko od této země, musel bych si vyčítat, kdybych Vás sytil planými nadějemi a připravil Vás o nějakou dobrou příležitost, neboť mi není neznámo, že přátele je třeba milovat pro lásku k nim samým a sama sebe v těchto ohledech nepočítat za nic.“ (JBB I, 191). Konec druhého dopisu L'Hospitala Bernoullimu se nese těmito slovy: „Rozpomeňte se, pane, prosím, zodpovědět mi vše, nač jsem se Vás ptal, raději si počkám, bude-li odpověď obsáhlejší“ (tamt., 201) a uzavírá krásným, výmluvným pozdravem „*essentielement à vous*“.

Leibnizově reformě dynamiky „proslavený“ Abbé de Catelan,[112] nejhorlivější z odpůrců všeho nekarteziánského, který se vždy nejraději pletl do toho, čemu nerozuměl, vydal anonymně drobnou práci s velkolepým názvem *Science générale des lignes courbes*, v níž se domníval vylepšit diferenciální počet[113]. Na základě těchto stránek pak povstalo svérázné kolečko výměn s jistými, až cirkusovými výstupy; a po Huygensovi a Leibnizovi tedy na řadu přichází markýz de l'Hospital. Pod pseudonymem pana G*** zakročuje dvěma otevřenými dopisy (druhý pak vychází v *Journal des Sçavans*[114]), v nichž abbé Catelana upozornil na nejkřiklavější omyly jeho domnělé metody, ve skutečnosti neumělého plagiátu postupů Isaaca Barrow z *Lectiones geometricae.* Abbé Catelan po zásazích pana G*** knihu pokaždé stáhl,[115] nesmysly opravil, na vrub je připsal tiskovým chybám a knihu znovu uvedl prohlašuje, že s pomocí své metody dokáže vyřešit všechny otázky tohoto počtu.[116] Nu, a tak markýz de l'Hospital *alias* Mr. G*** abbému – „aby veřejnosti ukázal, že [abbé] není tak schopný, jak by jí chtěl namluvit“[117] – předložil De Beaunovu úlohu, následkem čehož Catelan svoji knihu z trhu stáhl již nadobro.

Řešení De Beaunovy úlohy podal markýz de l'Hospital ze zřejmých i nezřejmých důvodů bez důkazu; neboť „ti, co těmto věcem rozumí, jej snadno najdou, a bylo by zapotřebí příliš mnoha řečí (*discours*) vysvětlit ji ostatním“;[118] a vskutku s pomocí nové metody integrálů úloha není zvláště obtížná. V posledku spočívá v řešení diferenciální rovnice $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{y-x}$, integrovatelné přes substituci $z=y-x$. Nicméně z povahy věci – a to je přirozeně důvod, proč s ní L'Hospital Catelanovi, jak říká, „zavřel ústa“ – prostředky konečné karteziánské (a jiné dosavadní) geometrie je nedostupná.[119]

112 Životopisné údaje Otce Catelana neboli D. C., jak se podepisoval pod své práce, se mi nepodařilo dohledat vzdor skutečnosti, že se toho času jednalo o dosti známou osobu, již L'Hospital zmiňuje jako společného přítele jeho a Malebranche (A III, 6, 233). Což se později v případě L'Hospitala poněkud změnilo (JBB II, 73); stýkal se s ním také Varignon, který se snad na začátku sporu klonil dokonce na jeho stranu, a zřejmě mnozí jiní. Abbé nechvalně proslul především svou karteziánskou devotností – „kartezián zanícený až na hranu uctívání“ (Montucla II, 399) – odmítáním nových metod, případně jejich vědomým zatemňováním a v posledku nedůstojnými kontroverzemi s vrcholnými geometry své doby, založenými především na nepochopení jejich pojmů a důkazů – jeho „vědeckou způsobilostí bylo jedno obrovské nedorozumění“ (Robinet 1958, 289). Ježto však, ať zaujaté, nebo pomýlené útoky zvedaly odpovědi, v nichž byli takový Leibniz či Huygens nuceni vysvětlovat a rozvíjet své pojmy a názory, stojí tak vlastně Catelanova činnost přímo za vznikem prvořadých výtvorů ducha (srv. v. 42), odkud pak Robinetovo zhodnocení: „omyl ve službě pravdy“ (tamt.).

113 Plným názvem *Logistique pour la Science generale des lignes courbes, ou maniere universelle & infinie d'exprimer & de comparer les puissances des grandeurs* (1691), v níž vzpomíná roku 1694 L'Hospital Leibnizovi: „dalek toho, aby uznal Vaše zásluhy, zastřel Vaši metodu a aniž by Vás kdekoli citoval, předložil jinou, jakoby jeho vlastní, a tvářil se, že je pouhým důsledkem metody p. Descarta“ (A III, 6, 233). Ze stejného L'Hospitalova dopisu sporu se, nakolik se ještě nepromítly do tištěných dokladů, dovídáme též o prvních podrobnostech následné kontroverze. Zde také L'Hospital výslovně zdůrazňuje, že je nepsal pod svým jménem, nýbrž pod uvedeným pseudonymem.

114 *Remaques sur un livre nouveau intitulé Principe de la science generale des lignes courbes* (JS 1692, 174-176).

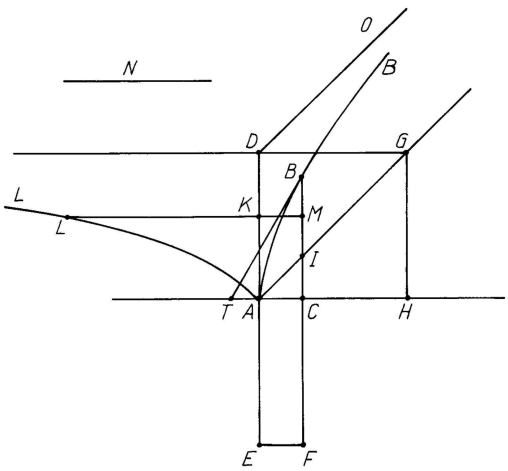
115 L'Hospital zmiňuje mimochodem, že jí bylo sotva 10 nebo 12 exemplářů.

116 Johann Bernoulli tlumočí z Oucques 24. září 1692 Varignonovi obdobné pocity z odpovědí abbé Catelana panu G***: čirá kamufláž, umanuté popírání sebe sama (JBB II, 24).

117 A (III, 6, 234).

118 JS (1692, 403).

119 Přestože není jisté, zdali odpověď samotného Descarta De Beaunovi byla úspěchem či nezdarem, jeho řešení se zkrátka jeví plně na výši jeho matematické velikosti. Na srovnání obou postupů doslova nekonečný přínos



Obr iv

Zadání.

„Budiž nějaká čára *N* /Obr iv/; a veďme dvě polopřímky (*lignes indéfinies*) čáry *AC*, *AI* tak, že úhel *CAI* bude 45 stupňů. Hledáme způsob, jakým opsat křivku *ABB* povahy takové, že když z libovolného jejího bodu *B* povedeme ordinátu *BC* a tečnu *BT*; pak poměr *BC* ku *CT* bude vždy stejný jako poměr dané *N* ku *BI*.

Řešení.

Jestliže utvoříme čtverec *AG*, jehož stranou bude úsečka *AH* rovná dané čáře *N*; veďme bodem *A* mezi asymptotami *GD*, *GH* hyperbolu *ALL*. Pokud nyní prodloužíme *DA* do *E* tak, že *AE* bude rovno *AH*, vezměme pravoúhelník *EC* rovný hyperbolické ploše *AKL*. Prodloužíme čáry *LK*, *FC* až do jejich průniku v bodě *M* a vezmeme konečně *IB* rovnou *CM*; pak tvrdím, že bod *B* bude ležet na křivce kterou hledáme.“ (JS 1692, 401-402)[120]

Bien joué! Mr. G*** připojuje ještě několik poznámek stran asymptot, obsahu *ABC* a jeho těžiště, přičemž rektifikaci nabízí geometrům k uvážení. A chtělo by se dodat: důkaz lze nalézt v Lekci XI, *Lectiones de methodo integralium* Johanna Bernoulliho.[121]

Nelze však říci, že by Johann proti markýzově vstupu do sporu, včetně jeho „konečného řešení“ (vyšlo v *Journal des Sçavans*, 1. září 1692), cokoli namítal. Ukázalo se výše, že spolu s Varignonem jeho průběh sledoval; s L'Hospitalem se tento čas v Paříži a v Oucques stýkal téměř každý den a stěží tomu bylo pár měsíců, co mu začal dávat lekce z nového počtu. Je tudíž dosti pravděpodobné, že Mr. G*** konal s jeho plným souhlasem; a že mu Johann *své* řešení sám poskytl. Rozčarování na sebe ovšem nedalo dlouho čekat. Asi o půl roku později se Johann Bernoulli dovídá,[122] že markýz

symbolické metody transcendentní geometrie vysvitne okamžitě (v. 63).

120 Obecné pojetí logaritmu jako logaritmické *funkce* nebylo v době vzniku *Analýzy nekonečně malých* přítomno. Přirozeným způsobem bylo k řešení přistoupit právě přes obsah pod hyperbolou. Sestrojení bodů De Beaunovy křivky tedy předpokládá kvadraturu hyperboly; a ta je tudíž, upozorňuje L'Hospital, mechanická ve smyslu Descartově.

121 JBO (III, 423-424). Shoda, až na analýzu, je zde téměř doslovná, včetně korolárů stran mechanické povahy křivky, asymptoty a kvadratury.

122 Podle již uvedeného psaní Menckemu N° 94, 12. dubna 1693 (p. 107), to bylo „*ex relatione D. Hugenii*“ (JBB I, 392). Leibnizovi Huygens zasílá 12. ledna 1693 dopis plný chvály na markýze de L'Hospitala, kde zmiňuje, že nemá metodu nalezení De Beaunovy křivky a píše mimo jiné: „pokud jde o mne, nechci se tím namáhat, neboť se domnívám, že veškerá obtíž je již překonána, ať p. markýzem, nebo panem Newtonem […], nebo Vámi, pane, neboť vy jste tuto látku nesmírně prohloubili a já v ní jsem pouhým novicem“ (HOC X, 377-378). Ze strany Leibnize pak v dubnovém psaní L'Hospitalovi zní opět jen uznání jeho pronikavosti: „neboť dosud jsem ve Francii neznal nikoho, kdo by měl vhled (*de l'entrée*) do toho, co je zde zapotřebí“ (A III, 5, 545). A první dochovaný dopis mezi Johannem Bernoullim a Leibnizem pochází až z 30. prosince 1693 (A III, 5, 675). Spoušť (událostí) nuže byla mnohem horší, jak se brzy ukáže. Avšak jediná Leibnizova slova Bernoullimu k dané věci budou, jak jinak, než smířlivá, 21. března 1694: „Tvoji drobnou rozmíšku (*liticula*) s věhlasným mužem p. markýzem de L'Hospitalem považuji za urovnanou. Čím méně je těch, kdo pěstují dobrou vědu, tím příhodnější je, aby si byli navzájem přáteli. Je tolik dalších, jež nazývám námezdními pracovníky vzdělanosti (*mercenarios in litteris*), kteří konají jen, když musí, anebo jsou hnáni zvrácenými choutkami (*pravis cupiditatibus*). Tyto nechme, ať se mezi sebou srážejí.“ (A III, 6, 38).

de l'Hospital pokoutně, „vychloubačně" zaslal řešení de Beaunovy úlohy Huygensovi, aniž by „zmínil jméno pravého autora". Ba co hůř, markýzova slova z dřívějšího dopisu Huygensovi, která Bernoulli téměř jistě neznal, říkají v přesném znění ještě něco navíc:

> „Před nedávnem jsem nalezl řešení otázky, kterou p. De Beaune kdysi předložil Descartovi, a kterou najdeme v dopise 79. třetího svazku těmito slovy *data qualibet linea &c.* Zašlu Vám ji, pokud míníte, že to stojí za námahu..." N° 2765, 10. září 1692 (HOC X, 312-313)[123]

To se také vskutku stalo; a řešení, mezi další záplavou L'Hospitalových podnětů a otázek, přichází na Huygensův stůl v dopise z 12. ledna 1693, uvozena těmito slovy:

> „Posílám Vám řešení úlohy, kterou p. De Beaune kdysi předložil Descartovi, a kterou najdeme v dopise 79. třetího svazku, tak, jak je nechal zařadit (*faite inserer*) do 34. žurnálu minulého roku." N°2787 (HOC X, 391)[124]

Jenže při pohledu na elegantní řešení prastaré úlohy i další markýzovy skvělé výsledky, jimiž jej zásobil, Huygens učinil bohužel to, co by na jeho místě učinil každý znalý matematik, a v *Histoire des Ouvrages des Sçavans* po právu neopomněl zmínit krásu a význačnost jeho prací i pronikavost jejich původce:[125]

> „Byla mi zaslána panem markýzem de L'Hospitalem, jenž této vědě dělá čest a na základě této ukázky a několika dalších, co jsem od něj viděl, mě přivádí k mínění, že si v ničem nezadá s nejučenějšími geometry této doby." (HOC X, 407)

Člověk nemusí zrovna oplývat velikostí Bernoulliho ducha, aby mu v tomto za jistých podmínek něco nehrálo. Johann tak věci přirozeně nechat nemohl a pravděpodobně počátkem května (dopis bohužel opět chybí) se tedy na markýze obrátil s prosbou o vysvětlení, jehož se mu vskutku dostalo. Markýze de l'Hospitala dle svých vlastních slov zpráva o panu Huygensovi a jeho dopise o De Beaunově křivce naprosto překvapila a Johanna Bernoulliho ujišťuje, že Huygens tak učinil bez jeho vědomí:

> „Vzpomínáte si zřejmě dobře, že jsem Vám právě tuto úlohu předložil, když jste byl v Paříži, a že jsem znal její řešení na základě postupu, jenž byl velice odlišný od toho, který jste našel Vy. Psal jsem mu také, že dle mého mínění bude snadné nahlédnout konstrukci křivky, jež byla zařazena do 34. *Journal des sçavans*, aniž bych mu jmenoval, kdo ji nalezl a zřejmě kvůli tomu se vyjádřil tak, jak píšete. Nechtěl jsem mu říkat Vaše jméno, poněvadž když jste byl v Paříži, vydal jsem ji pod jménem p. G., což je to samé, které psalo proti p. abbému C. Přišlo mi, že byste si nepřál, aby Vás brali za tohoto p. G. Víte, že mé důvody

123 Věc se zdá tím pochmurnější, že Bernoulliho psaní Varignovi (p. 44) potvrzuje, že toho času byli společně v Oucques.

124 Téměř stejnou větou pak L'Hospital uvádí řešení de Beaunovy úlohy, když je 23. března 1693 posílá Leibnizovi (A III, 5, 531). Leibnizova pochvalná odpověď přichází dalšího měsíce, viz p. 122.

125 Je však třeba říci, že se jedná o rektifikaci úseku „logaritmiky", co Huygens těmito slovy uvádí; a co spolu se svými poznámkami a jinými úvahami na dané téma zahrnul do otevřeného dopisu redaktoru zmíněného časopisu a v únorovém čísle nechal vydat coby *Lettre de Mr. Huygens à l'auteur* (HOS 1693, 244-257; HOC X, 407-417). Stran konstrukce De Beaunovy křivky pouze s uznáním odkazuje do *Journal de Sçavans* (tamt., 417). Je však zřejmé, že slova o „nejučenějších geometrech" nemohla Johanna Bernoulliho nechávat klidným.

nebýt za něj pokládán, jsou ještě silnější, neboť je tu od něho jeden dopis, který byl adresován mě; a začíná to být takový galimatyáš, že z toho vůbec nemám radost.“ (JBB I, 169-170)

Věru, markýzovy důvody jsou velice rozumné a z povahy věci je nutné mu věřit, že řešení objevil také. A je pravda pravdoucí, že Huygensovi jako objevitele vůbec nikoho nejmenoval, a tedy ani sebe. Ale jak si Huygens na základě oněch slov vůbec mohl myslet něco jiného?[126] Nicméně L'Hospital, kromě pečlivější volby svých výrazů, navrhuje Bernoullimu coby řešení vydat prohlášení v *Acta Eruditorum*, kde bude objasněno, že řešení nalezli oba; ale že ve smyslu shora řečeném nemohlo v *Histoire* být uvedeno autorovo jméno.

Dohry se na stránkách *Akt* aféra opravdu dočkala, ale asi trochu jinak, než si markýz de l'Hospital představoval.[127] Na svůj smírčí návrh dlouho od Johanna Bernoulliho nedostal odpověď, až se mu konečně asi po dvou měsících do roku dostal květnový výtisk lipských *Akt*, z nějž patrně žádnou radost neměl.[128] Místo konkordantní doložky a rozumného urovnání sporu totiž nečekaně přišlo jeho veřejné vyhrocení a otevřený útok. Johann Bernoulli si bez dalšího, jmen i důkazů, připsal řešení úlohy z únorového *Histoire des ouvrages des Sçavans*; a odtud plynul jen jediný přirozený důsledek. Svůj článek zahrnující zdokonalenou konstrukci De Beaunovy křivky a její důležité rozšíření začíná se slovy: „*Mé první řešení této úlohy, jež se nachází ve francouzském žurnálu 34 minulého roku* právě tak, jako bratrovo, jež mi zaslal, když jsem toho času pobýval v Paříži, předpokládá kvadraturu hyperbolické plochy, což její sestrojení činí v praxi nemožnou.“[129]

Vnitřní bouře mezi oběma geometry v dalších měsících postupně utichala, neboť především markýz de l'Hospital velmi stál o smíření s přítelem, jehož si nesmírně cenil, za pomoci svého vlivu pro něj neváhal činit, co bylo v jeho silách, a tak i jeho tichou denunciaci obrátil v dobrý smysl.[130] Těžko pak říct, jaké hnutí vedlo Johanna Bernoulliho raději k otevřené konfrontaci a možné ztrátě

126 Ani nemluvě o dopisu N° 2765 psaného přímo z Oucques, pokud ovšem L'Hospital neměl na mysli *své* řešení De Beaunovy křivky. Je pak otázkou, proč by Huygensovi nebo Leibnizovi zasílal jiné.

127 V dopise Menckemu N°95, 12. srpna 1693, Johann Bernoulli tlumočí l'Hospitalem navrhované vysvětlení a doplňuje, že „těmito několika slovy L'Hospitalova pověst bude napravena a jeho nebude poškozena“ (JBB I, 393). Není zřejmé, proč se v *Aktech* vysvětlení nakonec neobjevilo.

128 Což se, *mimo jiné*, jasně ukazuje z markýzova psaní Huygensovi N° 2815 z 10. srpna 1693: „Tento časopis jsem obdržel před nedávnem a některé věci související s úlohou p. de Beaunea mě překvapily. Jsem tedy nucen Vám k tomu říci něco bližšího. Když p. Bernoulli pobýval v Paříži, přišel mě navštívit; a protože říkal, že spolu s bratrem velice pracovali na obrácené otázce tečen, předložil jsem mu úlohu p. de Beaunea. Je pravda, že o pár dní později mi přinesl její řešení, a to se příliš nelišilo od mého, jež jsem po té nechal zařadit do 34. *Journal des Sçavans* pod jménem p. G***, což je první písmeno mého křestního jména […] Zdá se, jako by si p. Bernoulli při pohledu na Váš dopis /p. 125/, v němž mi tento objev přisuzujete, chtěl uzmout trochu slávy, která mi přijde dosti nepatrná, a přispěchal s článkem do lispkých *Akt* s tím, co tam uvidíte[…] Od nynějška již budu co se týče některých lidí trochu opatrnější (*circonspect*)“ (HOC X, 484-485). *Sic!* Zvýrazňovaní případných nesrovnalostí by tu bylo poněkud namáhavé a zbytečné. Rozumí se pak samo sebou, že i Huygens nad podivnou situací pociťoval jisté rozpaky. Leibnizovi vyjadřuje podiv, že si pan Bernoulli nárokuje řešení De Beaunovy křivky, zdá se mu, že markýz má pravdu, ale neodvažuje se nic rozhodovat *inaudita parte altera* (HOC X, 510-511).

129 *Solutio problematis Cartesio propositi a Dn De Beaune* (AE 1693, 234; JBO I, 65). Zvýraznění je překladatele.

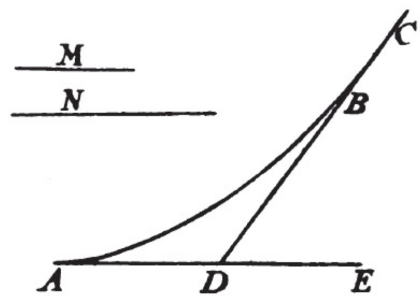
130 N° 14, 11. srpna 1693 (JBB I, 183).

markýzovy přízně, když si mohl zvolit a přímo uvažoval jemnější, „rozumnější“ řešení; avšak již v září se markýz raduje, že se nedorozumění vysvětlilo a „věc je ukončena“.[131] Ať tomu bylo jakkoli, my na rozdíl od současníků konečné vyústění již známe: po vzedmutí snad nezdolné hrdosti, slepé spravedlnosti, pravdivé touhy po nápravě věci anebo po pomstě, či cokoli to mohlo být, tedy šťastně zasnoubený zralý nezaměstnaný mladý matematik s vděčností stvrzuje tajné ujednání a za své objevy dostane na každý pád, čeho je mu zapotřebí. Roztržka byla elegantně a s konečnou platností uhlazena a nastává období míru a „spolupráce“ dvou vrcholných geometrů, jejíž epochální plody bude moci čtenář okusit již za několik málo stran.

Bernoulliho křivka.

Vrcholnou provázaností všech věcí, jak by řekl Leibniz, se však na základě zákroku pana G***[132] neděly divy jen ve skrytosti vztahů obou pánů, ale i na otevřeném matematickém nebi věčných pravd. Když Huygens k něčemu vydával své poznámky a úvahy, obvykle to totiž nebývalo do vzduchu; a kromě nového takřka vzdořešení De Beaunovy křivky, odtud vzešla dále již zmíněná podstatná transpozice, zobecnění či nová perspektiva obrácené úvahy tečen v podobě Bernoulliho *Otázky určené k řešení učencům*:

> „Hledáme povahu křivky *ABC* /Obr v/ s vlastností takovou, že když k ní v libovolném bodě povedeme tečnu ohraničenou osou *AE*; úsek její abscisy *AD* se bude mít k tečně *BD* v konstantním poměru *M* ku *N*.
>
> Tato úloha stojí za řešení a pozornost matematiků si snadno zaslouží. Ať je totiž poměr *M* ku *N* jakýkoli, křivku *ABC* je možno vždy se stejnou lehkostí opsat spojitým pohybem bez ohledu na to, že křivka v závislosti na poměru *M* ku *N* bude vycházet více či méně složitá (*composita*); a vskutku v případě vztahu rovnosti je zřejmé, že křivka *ABC* bude představovat kruh: v ostatních případech, pokud se *M* ku *N* k sobě mají jako číslo k číslu, křivka bude geometrická; jinak však bude transcendentní. Hledáme obecné určení bodů na křivce.“ (JBO I, 66)



Obr v

Otázka Florimonda de Beauna, první obrácená úloha tečen v dějinách a její následné vynoření se v pracích Leibnize, Huygense, bratrů Bernoulli a l'Hospitala přirozeně nás vrhá přímo *in medias res* infinitesimálních úvah konce klasického věku, a zde konkrétně do srdce samotné otázky geometrické povahy či utvořitelnosti křivek. Bylo tomu již dávno, co myšlení opustilo oficiální

131 Shrnuje L'Hospital v dopise z 2. září 1693, N° 15 (JBB I, 184) vyznění předchozího Bernoulliho dopisu, který se nedochoval.

132 A tedy opět nevyhnutelný Catelan (p. 112)!

odkaz řecké geometrie věčné, nepohnuté, vymezené pravdy ukryté v měrných ohledech jejích obrazců; a nejpozději od Descartovy geometrické reformy a jeho ideálních geometrických strojů se pohyb a mechanické úvahy stávají přímo *definiční*, tvůrčí, bytostnou součástí geometrické říše. Na rozdíl od zvyklostí panujících v řecké obci *čisté* geometrie tato postižení či znaky v žádném případě její obyvatele *ipso facto* nevyhošťují, nýbrž naopak – udělují domovské právo přesného, geometrického uchopení nekonečnému množství do té doby cizích, roztodivných členů i způsobů konání, tj. geometrických entit a operací.[133] Huygensova úchvatná objevitelská fuga čistě geometrických a čistě mechanických hlasů jeho *Horologium oscillatorium*, kde v kontrapunktu obou teoretických úrovní společně zaznívají takové fanfáry ducha, jako vynález kyvadlových hodin na jedné straně, na straně druhé pak „ryze" abstraktní, matematická teorie evolut; i Bernoulliho výše citovaná poznámka o utvořitelnosti celého nekonečného řádu geometrických i transcendentních De Beaunových křivek, každé jedním, rovnomocným spojitým pohybem konečně dávají tušit, že v takovéto konstelaci tvůrčích přístupů otevírala úloha v myslích geometrů hluboký zdroj nových geometrických uchopení.

Jak se ostatně ukazuje i z Johannovy poznámky výše,[134] zřejmě právě předpoklad *kvadratury hyperboly* (v té době spíše již ustálený obrat pro vztah *logaritmu* bez přednostního geometrického významu), na kterém závisela markýzova rektifikace úseku „logaritmiky", a tím spíše nalezení *všech* bodů neboli konstrukce samotné De Beaunovy křivky,[135] byl hlavním praktickým zádrhelem plného teoretického uskutečnění křivky. Christiaan Huygens si této skutečnosti byl pochopitelně vědom a v duchu svého kyvadla právě v *Dopise autorovi* přichází s pozoruhodným mechanicko-geometrickým způsobem utvoření křivek, jež jsou dány na základě vlastnosti své tečny. Kvadratura hyperboly, a tedy sestrojení logaritmiky, je sice pohybem ideálních strojů antické i karteziánské geometrie nedostupná; avšak není žádný důvod, proč do geometrie nepřipustit i další mechanicky *přesně* řízené spojité pohyby než jen kruhový a přímočarý a všechny, jež lze získat na základě jejich

133 I přes do značné míry posvátné založení řecké geometrie, její prostředkující úlohu mezí čistými inteligibiliemi na straně Jedna a látkou, *pohybem*, nicotou na straně mnohého, se nicméně jednalo do značné míry o omezení ideologické, které s objevitelským uměním nemělo tolik společného. Byli geometři, kteří je právě v samotném postupu *objevování* běžně porušovali, aby pak výsledky dosažené s pomocí heuristiky mechanických, statických (baryocentrických), sumačních úvah převáděli a vlastně zastírali dlouhými řetězy úsudků *ad absurdum*. Odtud pak v 17. století vznikl mýtus, především Descartův, že „staří" měli tajnou *metodu analýzy*, kterou před budoucím pokolením skryli a ponechali jen dlouhé syntetické důkazy; a že právě na tuto metodu je třeba navázat. Výše byla pochopitelně řeč o Pascalově „Princi řádu ducha", Archimédovi (Gardies 1984), který „ze starých došel nejdál"; a nikoli o Eukleidovi. Nelze vyloučit, že se leckteří geometři při objevování puristickými požadavky řídili. Nicméně o nich nic nevíme a ani tato práce o tom nepojednává. Pokud jde o Descartovu geometrickou reformu, na její hlubší výklady v této, jak se dnes říká, intelektuálně biografické skice s prvky ideomalby, není místo. Dopodrobna rozvedeno lze vše nalézt v komentáři k překladu, v. 92.

134 Bylo to i v reakci na Huygensův článek, jak vznikla Bernoulliho „druhá" konstrukce De Beaunovy křivky i *Otázka určená k řešení učencům*, byť L'Hospitalovi tvrdil opak, viz dopis N° 14, 1. srpna 1693 (JBB I, 182).

135 P. 125. Míní se samozřejmě exponenciální křivka, kde jednou z jejích nejvýznačnějších vlastností je právě konstantní délka subtangenty. Jestliže křivku zapíšeme jako $y=a^x$, pak tato délka bude = $1/\ln a$, odtud pak i její, až do Leibnize, užívaný název.

kombinací a reiterací.[136] Jestliže tedy zpětně budeme s to podat přesnou konstrukci logaritmiky, pak bude možno přiznat v geometrii plné domovské právo i kvadratuře hyperboly a všem výsledkům, které na ní závisí. Podat takový přesný mechanismus, jenž by otevřel (a tím pádem, řekl by Leibniz, geometricky „završil") celý nový řád křivek a úkonů, bylo cílem Huygensových *traktorií*, kde tažné vlákno vlastně představuje tečnu o konstantní délce. Sestrojit zařízení (čili nabídnout geometrům jeho projekt) na „převádění hyperbol na čtverce" pak bylo hlavním účelem jeho *Dopisu autorovi*:

> „Konstrukce stroje je založena na řečené vlastnosti tečny a na principu či zákonu pohybu, jenž praví, že když na horizontální rovině vyneseme bod, jenž svojí vahou nebo jinak koná nějaký odpor; a spojíme jej s koncem nějakého vlákna či neohebného prutu, jehož druhým koncem budeme jednoduše posouvat; pak tento bod opíše křivku, kde vlákno či prut bude vždy tečnou." (HOC X, 409)[137]

Nad *ideou fyzicky uskutečněného geometrického stroje* může leckdo kroutit hlavou;[138] nicméně to, co je zde hluboce podstatné, je přesnost nikoli praktická, nýbrž přesnost *en droit*, z hlediska *zákona* mechaniky, jemuž všechny uvažované, teoretické pokusy o praktické uskutečnění slouží jen coby prostředek svého naplnění. Ostatně myšlenka geometrické *konstrukce* je přesně té samé mezní povahy; pouze se do ní vstupuje z opačné strany zákona. Zde však jakousi zkratkou přes důvěru v dokonalost veškerého nekonečného geometrického řádu vesmírné přírody. Huygens vzápětí (na rozdíl od zcela radikálního diplomata Leibnize) diplomaticky dodává:

> „Pokud tento popis, který ze zákonů mechaniky musí být přesný, může platit za geometrický stejně tak, jako popisy kuželoseček, které se dějí na základě přístrojů; pak bychom s jeho pomocí, spolu s kvadraturou hyperboly, měli dokonalou konstrukci úloh, které lze na tuto kvadraturu převést;[139] jako jsou mimo jiné určení bodů *Catenaria* neboli řetězové křivky a logaritmy." (HOC X, 411-412)

---

136 Panza (2005, 31), p. 11. Pohyby pravítkem a kružítkem totiž nejsou ničím jiným než *mechanicky* řízenými pohyby. Nejpravděpodobnější příčinou, proč řecká geometrie všechny ostatní ze svého středu vylučovala, se mi opět jeví jistá sakrálně-kosmologická výsada, jež byla Aristotelem, Proklem a dalšími udělena právě těmto dvěma druhům pohybu.

137 Výzkumy traktorií a přístrojů uzpůsobených k jejich opisování se Huygens zabýval od konce roku 1692, kdy se mu podařilo přesně podat svoji *Tractoria* neboli kvadratrix hyperboly. Jeho úvahy obsahují návrhy tří důmyslných přístrojů, kde se v jednom z nich za účelem omezení rušivých vlivů Huygens pokusil pro přítlak opisujícího bodce využít dokonce i atmosférického tlaku. Více viz vysvětlivky vydavatelů HOC (X, 412).

138 Asi tak, jako by Huygens nebo Leibniz kroutili hlavou nad představami lidí, kteří sami sebe rádi nazývají *empiriky* a kteří by jim přišli namítat v duchu „žádná čára přece není rovná". Takové případy se v dějinách opravdu vyskytly. Nicméně v dané souvislosti vůbec není jisté, zdali by si na myšlenkovou úroveň například Leibnizova *integrafu* nebo jiných v praxi neuskutečnitelných (a ani to v praxi není zapotřebí) teoretických strojů sami na základě ideové čistoty – také sporný pojem (pokud samotný sporný pojem také není sporný pojem?)? – dovolili vystoupat, a tedy zdali by vůbec něco namítali.

139 V poznámce 15 k tomuto místu stojí Huygensovy rukopisné úvahy význačné hodnoty: „Nikdy neříkáme, že konstrukce sestrojené podle pravítka a kružítka jsou nepřesné (*imparfaites*), neboť zde předpokládáme dokonalou rovinu, dokonalé pravítko, že z jednoho bodu do druhého můžeme vést přímou čáru, třebaže dosáhnout nejzazší přesnosti v těchto věcech je pro lidi nemožné. Stačí nám však vědět, že pokud je pokládáme za dokonalé, správnosti (*justesse*) konstrukce nic neschází; a že se můžeme přibližovat ke zhotovení pravítka, které bude dokonale rovné, a právě takové roviny, abychom dosáhli užitku, který od této práce očekáváme. Stejně tak je tomu i s mojí konstrukcí kvadratury hyperboly […]" (HOC X, 411). Plné teoretické přitakání zákonu kontinuity coby výrazu dokonalosti řádu a odtud plynoucí možnost *kalkulu* nekonečna, přirozeně nalézáme u Leibnize.

Lze se nyní ptát, jak mohou teoretické stroje pomoci hlubšímu nahlédnutí základních pojmů infinitesimálního počtu? A jak s nimi souvisí Bernoulliho křivka? Jednu z možných odpovědí nalézáme v podobě *integrafu* z Leibnizova *Supplementum geometriae dimensoriae*,[140] jenž se jistě z dnešního pohledu řadí mezi nejfantastičtější útvary *matematického* myšlení klasického věku. Již bylo zmíněno, a zdá se, že tomu tak bylo snad se vším, že nad pojmem traktorie uvažoval Leibniz za účelem rozšíření geometrických hranic již dávno před tím;[141] a jak sám tvrdí, Huygensova „fyziko-matematická“ kvadratura hyperboly a od ní bratry Bernoulliovými „překrásně přenesený“[142] opisující pohyb křivek ho „přiměly vydat své staré práce k těmto věcem“.[143]

Hluboká význačnost Bernoulliho křivky, ve světle shora uvedených souvislostí, tedy zjevně spočívá v tom, že propojuje – v rámci infinitesimálního počtu – analytický[144] znak vlastnosti tečen s obecnou povahou spojitého opisujícího pohybu křivky.[145] A, „jakmile se jednou uchopí vztah mezi pohybem a tečnami“, Leibniz okamžitě zahlíží nekonečná rozvinutí a zobecnění této plodné, v posledku fyzikálně charakteristické myšlenky, svými možnostmi přirozeně ukazující cestu všemožným druhům kalkulu (Obr v):

> „Ba co víc, i kdyby se během tažení délka vlákna *AB* zvětšovala, nebo zmenšovala, stále by zůstávalo tečným. A tudíž nezávisle na poměru mezi *CA* a *AB* (například kdyby *AB* představovaly siny a *CA* odpovídající tečny), bychom mohli všelijak důmyslně (*variis machinationibus*) upravovat pohyb vlákna, aby se při svém pohybu zkracovalo podle nějakého daného zákona. Tímto způsobem bychom mohli konstruovat nekonečno čar splňujících řešení nějaké dané úlohy, procházejících například nějakým daným bodem. Kdyby byl opisující bod tažen zároveň několika vlákny, bylo by možno skládat jeho směr (*composita directio adhiberi*).[146] Ale i když zde bude pouze jedno vlákno, bylo by možno proměňovat jeho délku, kdybychom k závaží *B* připevnili kolo nebo útvar otáčející se tak, aby v rovině opisoval cykloidu. Můžeme také k *B* připojit pevnou úsečku, jež bude vždy kolmá (*normalis*) na vlákno, anebo bude měnit svůj úhel podle nějakého daného zákona, a uvažovat nějaký pohyblivý opisující bod na této úsečce [...]“ (MS V, 288-289)

---

140 *Supplementum geometriae dimensoriae seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione* (AE 1693, 385-392; MS V, 294-301). Plný název článku – „Dodatek ke geometrii míry, čili nanejvýš obecný způsob provedení všech kvadratur za pomoci pohybu, a spolu s tím rozličné postupy sestrojení křivky na základě vlastnosti jejích tečen“ – sám poskytuje předběžnou odpověď.

141 Bylo to již v pařížských letech, kdy na popud Clauda Perraulta studoval „hodinkovou křivku“, již tehdy nazýval *tractrix*, p. 38.

142 O níž však věděl jen z letmých Huygensových dopisů v rámci korespondence, N° 2822 (HOC X, 510).

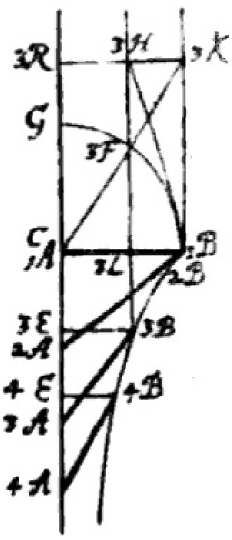
143 MS V, 297.

144 Ostatně v podobném duchu se vyjadřuje Leibniz v kratičkém komentáři k Bernoulliho úloze *Ad problema...* „[...] dokonce ani ti, kdo učinili první kroky v naší diferenciální metodě, nedosáhnou řešení hned. Je možno jej podat nikoli jen na základě pohybu, ale také analytickým kalkulem, jestliže je dán poměr mezi součinem těchto dvou úseček /*BD*, *AD*; Obr v/ nebo jejich mocnin (tečna *t*, vytyčená část *r* osy) a mocninou struny *AB* položenou homogenní tomuto součinu […] Stejná otázka se klade pro bezpočet dalších poměrů, například kdyby byl dán poměry mezi řečeným vytyčeným úsekem *AD* a ordinátou *BE*.“ (MS V, 288).

145 Svým způsobem se tak jedná o podobný myšlenkový tah, jaký provedl Descartes v *Géométrie*, byť užšího rozsahu, za to však o teoretickou úroveň výš. Zatímco Descartes postuluje ekvivalenci mezi „spojitým vnitřně seřízeným pohybem“ a určením každého bodu křivky za pomoci poměru dvou přímých čar (algebraické rovnice); zde dochází k propojení obrácené úlohy tečen a jí příslušného tažného pohybu.

146 K tomu Leibniz přistupuje v *Règle générale pour la composition des mouvements* (MS VI, 231).

Zákon a *stopa* – a nekonečné kombinace, konfigurace, variace, obměny: počtu rovin, závaží, pohybu rovin, pohybu pohybů, geometrických a fyzikálních pojmů... příval nápadů a návrhů nezastavitelně pokračuje, Leibnizova matematická imaginace nezná mezí. Kromě mimořádné obecnosti a zobecnitelnosti tažných pohybů na nich Leibnize přitahoval však ještě jeden rys, který činil takřka hmatatelným jeho základní, „velký“ princip měření křivých čar, a sice ekvivalenci mezi křivkou a mnohoúhelníkem o nekonečnu stran,[147] vyplývající zde z „klíče k celé otázce, že totiž vlákno je vždy tečnou ke křivce“:[148]


Obr vi

„Opišme od středu ${}_3B$ /Obr vi/[149] o poloměru libovolně malý (*utcunque parvus*) kruhový oblouk ${}_3AF$, jehož poloměrem bude vlákno ${}_3A_3B$; nyní táhněme vláknem ${}_3BF$ chyceným v F přímým směrem, tj. jeho vlastní stopou (*per sua propria vestigia*) do ${}_4A$ tak, se z ${}_3BF$ posune do ${}_4B_4A$. Jestliže si představíme, že stejně tak, jako s bodem ${}_3B$ jsme postupovali i v případě bodů ${}_1B$ a ${}_2B$, bod B opíše mnohoúhelník ${}_1B_2B_3B$ atd., jehož strany vždy spadají v jedno s vláknem; a tedy když budeme neomezeně (*indefinite*) zmenšovat oblouk ${}_3AF$ a nakonec jej necháme vymizet; což nastane, když tažný pohyb bude spojitý (*in motu tractionis continuae*). To odpovídá našemu opisu křivky, pokud postranní pohyb vlákna bude spojitý, avšak vždy *nevykazatelný* (inassignabilis); pak je zřejmé, že mnohoúhelník přejde ve křivku, jejíž tečnou je vlákno.“ (MS V, 296)

Obdobně i Leibnizův *integraf* (či spíše jeho popis), hlavní teoretický cíl *Supplementum geometriae*, byl určen k teoretickému naplnění „geometrie míry“; ve stejnému duchu, jako tomu u aritmetiky byla Leibnizova, tentokrát již vskutku sestrojená a prakticky uskutečněná *machina arithmetica.* Lze nyní odhlédnout od zevrubného popisu kladek, válců, závaží a veškerého důmyslného zařízení teoretického stroje na integraci všech diferenciálních rovnic.[150] Jeho podstatnou myšlenku, duch ve stroji – kromě toho, že ztělesňuje a uvádí v pohyb základní pojem diferenciálního počtu, *charakteristický trojúhelník* – představuje fyzikální znázornění skutečné povahy obrácené úlohy tečen, a tedy i kvadratur:

„*Obecná otázka kvadratur se redukuje na nalezení čáry, jejíž sklony odpovídají nějakému danému zákonu* neboli kde strany jejího vykazatelného (*assignabilis*) charakteristického

147 Druhý *postulát* L'Hospitalovy *Analýzy nekonečně malých*, § 3. Srv. Parmentier (1995, 251-258).

148 Odkud již snadno vyplývá i souvislost *tractrix* s kvadraturou hyperboly a především je zde přímo *znázorněna* povaha obrácené úlohy tečen, neboť, jak říká Marc Parmentier, obyčejně je to křivka, která je viditelná, a tečny, jež je třeba hledat, zatímco zde vyznačují postupné polohy vlákna tečny a třeba je hledat křivku.

149 Bod *F*, který se na obrázku z *Acta Eruditorum* bohužel nevyskytuje, je třeba si představit v příslušné poloze mezi body ${}_4B$ a ${}_4A$, což je sice zřejmé, ale z počátku by mohlo působit zmatení. Bod *B* je samozřejmě jediný reálně uvažovaný bod, přičemž body ${}_1B$, ${}_2B$, ${}_3B$ atd. jsou jeho infinitesimální momenty či podoby. Ukazuje se na tomto nákresu i na řadě dalších, jež se v průběhu *Analýzy nekonečně malých* naskytnou, že dvojznačnost výrazů a symbolů představuje bytostnou, nutnou podmínku Leibnizova *ars inveniendi* a jeho nejskvostnějšího vzorku (*échantillon*), infinitesimálního symbolismu a infinitesimálního počtu vůbec.

150 U nějž podobně jako v případě Huygensově stačí, aby byl teoreticky přesný a teoreticky uskutečnitelný. Může někdo ještě pochybovat, že skutečným a právoplatným zakladatelem kybernetiky jakožto vědy byl právě Leibniz?

trojúhelníku stojí v takové daném poměru; posléze ukáži, že *takovou křivku lze konstruovat pohybem, který jsem zde vymyslel*." (MS V, 298)

Když Leibniz chválil bratry Bernoulliovy, mínil tím Johannovo nastolení otázky a Jakobovo řešení, které na sebe dlouho nedalo čekat.[151] Nedlouho po té přichází řešení Huygensovo, který při svém stáří a rozumu chtěl od úlohy dát ruce pryč, ale „nemohl se ubránit, aby se mu stále nepřevalovala v hlavě, dokud konečně nebyl spokojen".[152] Markýzovo řešení se poprvé, v onom rozjitřeném ovzduší, objevuje 27. června 1693; a, jak zmiňuje, nalezl je přímo během psaní dopisu. Vzácně se tedy mýlil Leibniz, když pravil, že „ani pokročilí v jeho počtu jej na místě nenaleznou".[153] L'Hospitalův postup, jak ostatně bylo jeho přirozeností, byl výsostně a *čistě* geometrický, aniž by se jakkoli ubíral cestou konstruujícího pohybu nebo bral v potaz něco z toho, co výše bylo otevřeno z truhlic geometrické přírody. S žádostí o překlad do latiny – jak známo, s tou si už od dětství příliš nerozuměl –, přerýsováním obrazců, „neboť víte, že nemám nadání, abych v tomto uspěl" a zařazení do lipských *Akt* řešení zasílá Johannu Bernoullimu. Coby odpověď však přicházejí námitky, že „konstrukce je dosti rozvleklá a zamotaná (*prolixe et embarassée*), zatímco moje je mnohem snazší"; a po výčtu dalších shledaných omylů ukončuje až téměř povýšeneckým, profesorským tónem: „už jen pro tento poslední argument byste si měl dát tu námahu znovu projít všechny výpočty a zjistit, kde je chyba; až ji najdete, můžete mi poslat opravu a pak bude dost času odeslat Vaše řešení do Lipska. Stále bude mezi prvními, po bratrově a mém."[154] Dalším dopisem nicméně L'Hospital všechny námitky dosti obsáhle vyvrací, aniž by se od Bernoulliho dočkal odpovědí; a jeho řešení konečně vychází v zářijových *Acta Eruditorum.*[155] Je při tom zajímavé, že řešení Johanna Bernoulliho, samotného objevitele úlohy, nikdy v *Aktech* ani jinde nevyšlo a pokud vím, ani se jinak neobjevilo.

Křivka padacího mostu.

Od čistě geometrické De Beaunovy obrácené úlohy tečen, přes hluboký definiční otisk pohybu, přesné stopy zákonů mechaniky a nové možnosti geometrie proražené teoretickými stroji nyní vstupujeme na, zajisté poněkud paradoxně řečeno, ryzí půdu *mathematicae mixtae.* Nemůže tomu

151 Vychází hned červnových *Aktech*, měsíc po bratrově řešení De Beaunovy křivky a *Otázkou učenců*, a to pod názvem *Solutio problematis Fraterni* (AE 1693, 255-256); bez důkazu „abych ostatním neodebral to samé potěšení z jejího nalezení". Jakobovo řešení, jak už vyplynulo z Leibnizových poznámek výše (p. 144), bylo vedeno fyziko-matematicky, na základě vlákna s připevněným závažím v *C*.

152 Z již citovaného dopisu Leibnizovi N° 2822, 17. září 1693 (HOC X, 510). Huygens zasílá své komentáře a šifrované řešení do říjnových *Akt* (AE 1693, 475-476). K Leibnizovu komentáři viz MS (V, 290-292).

153 N° 11 (JBB I, 174). Což může být sice poněkud přehnané, ale, nakolik plyne z dalších L'Hospitalových dopisů (p. 128), od obdržení květnových *Akt* sotva mohl mít na řešení více času, než pár jen dní.

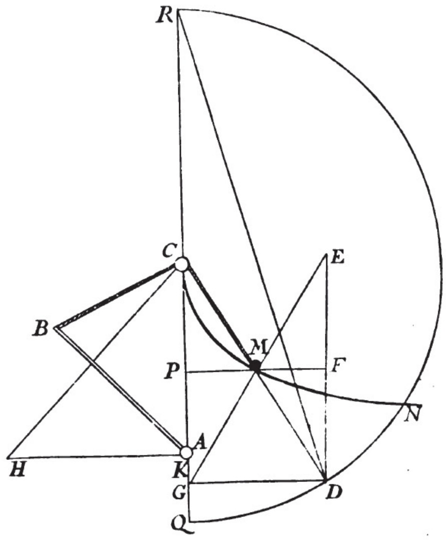
154 N° 12, 8. června 1693 (JBB I, 178).

155 AE (1693, 398-399).

být jinak, má-li být řeč o křivce rovnováhy padacího mostu; a zbytečně bychom hledali příkladnější ukázku[156] růstu a povstávání matematických idejí tak říkajíc odspoda, z otázek rodu „fysiko-matematického". Vskutku, po způsobu padacího mostu pevně ukotvena v zemi a přitom nad zemí zavěšená, především tato hraniční, překlenující oblast mezi přírodou konkrétních jednotlivin a abstraktní, ideální čistou geometrií se stává živnou půdou matematického rozvoje konce 17. století. Sotva by však k tomu došlo, či přinejmenším s takovou silou, kdyby pro to již sama půda nebyla připravena; a to právě vzestupem symbolických geometrických metod, zejména pak těch, do nichž „vstupuje jisté uvážení nekonečna". Nikoli náhodou nejvýznačnější z nich, Leibnizův infinitesimální počet, se v této době stává klíčem k tajemstvím přírody. Ze stejného důvodu, totiž zákona kontinuity, se pak její hlubiny zpětně promítají do stavby matematické teorie samé, a tak se v tomto vzájemném potencování stávají *mathematicae mixtae* nejvnitřnějším, nejryzejším zdrojem teoretických zahlédnutí, uchopení, hledisek i rozcestí jak geometrie samotné, tak i geometrického zkoumání přírody, neboť tato „nechává vstupovat nekonečno do všeho, co činí".[157]

Vnější okolnosti úlohy křivky rovnovážnosti již známe; na tomto místě lze snad doplnit, že byla jedinou, v jejímž řešení žák svého mladšího učitele předběhl. Avšak podstatným se v našem ohledu jeví nikoli samo, bezpochyby skvostné markýzovo řešení[158], ale zejména následný vývoj otázky, na kterém měl Johann Bernoulli svůj hlavní díl. Není proto nutné uvádět zde celé markýzovo první řešení včetně konstrukce, které je ve své obecnosti poměrně rozsáhlé; lze se spokojit s L'Hospitalovým převodem úlohy do čistě geometrických pojmů a plně pak poukázat na skryté souvislosti s věcmi budoucími. Nuže

> „*Budiž kolový most* AB /Obr vii, viii, ix/ *otočný kolem osy* A *a budiž kladka* C *obtočena řetězem BCM, kde jeden z jeho konců drží most a druhý závaží či protiváhu* M. *Hledáme, jaká musí být křivka* CMN *nebo* LMN *tak, aby nezávisle na poloze závaží* M *na křivce bylo vždy v rovnováze s mostem* AB." (AE 1695, 56)



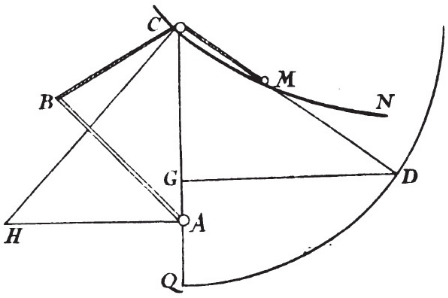
Obr vii

156 Je známou pravdou, že potřeby války nejpozději od Tartaglii měly na matematické divinizaci univerza přinejmenším stejný podíl, jako posvátná úcta k jeho Stvořiteli.

157 Je nanejvýš příznačné, že hned v prvním dopise L'Hospitalovi mu Leibniz klade na srdce svá nadále proslulá slova: „Zdokonalení transcendentní analýzy (*Analyse des Transcendentes*) či geometrie, která uvažuje něco z nekonečna, by byla bezpochyby nejdůležitější kvůli tomu, že bychom ji mohli uplatnit na operace přírody, která nechává vstoupit nekonečno do všeho, co činí." (A III, 5, 480-481).

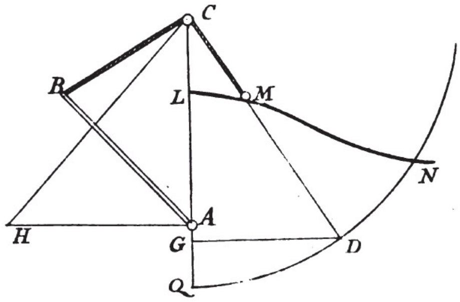
158 O němž se Leibniz v jistém teoretickém shrnutí a rozlišení otázky padacího mostu *Notatiuncula ad constructiones lineae, in qua sacoma...* (AE 1695, 184-185; MS V, 318-320) vyjadřuje: „Byl jsem naprosto uchvácen četbou brilantního řešení této elegantní a užitečné úlohy, jež podal p. markýz de l'Hospital, stejně tak, jako velice duchaplnými dodatky p. Johanna Bernoulliho, jehož řešení činí konstrukci univerzálnější a snazší […]" (MS V, 318).

Řešení za předpokladu, že je veškerá tíha mostu soustředěna do bodu *B* a vyjadřuje ji úsečka *AB*, člení markýz de l'Hospital do tří případů podle toho, zdali délka křivky závaží $M = b$, která je



Obr viii

položena rovna poloměru $CQ = a$ kruhu *QD*, se rovná, je menší nebo větší řetězu *BCM*. Jestliže tedy bude abscisa $CG = z$ a přepona $CH = c$; L'Hospital z poznané (položené), obecné povahy křivky $CM = 2a - 2bz : a$ snadnými úkony karteziánské geometrie konstruuje význačné vlastnosti a rozlišující rysy pro její různé případy: velikost abscisy, tečny v některých bodech, tvar křivky, kvadraturu a rektifikaci, inflexní bod a poloměr oskulačního kruhu (v *L*) atd.; aby konečně přistoupil k odhalení vlastní metody určení bodů křivky, jež k samotnému objevu vedla a z níž byly všechny uvedené vlastnosti odvozeny, čili „metody *Leibnizovy*, s jejíž oporou byly tak šťastně proraženy brány z matematiky do fyziky (*cujus beneficio fores ex Mathesi in Physicam tam feliciter effregit*)“:[159]



Obr ix

„Předně je třeba odstranit to, co je v úloze mechanické, tak, aby byla převedena na čistou geometrii; což učiním následovně. Tíhu mostu *AB* uvažuji jako závaží upevněné v *B*, jež se může pohybovat podél čtvrtkruhu o středu v *A* a poloměru *AB*. Jestliže pak budeme předpokládat, že tíha tohoto závaží je vyjádřena svislicí *AC*; z pravidel statiky je jisté, že čára *BC* bude vyjadřovat závaží, jehož je třeba k udržení mostu v daném stavu. A pokud tedy křivka *CMN* nebo *LMN* bude požadované vlastnosti; a jestliže se závaží, které most drží v rovnováze, bude nalézat v *M*; pak je třeba vést *MK* kolmou na křivku v bodě *M*; a pokud se vezme, aby se *CK* mělo ku *CM* tak, jako závaží *M* (které vyjadřuji *b*) k nějaké čtvrté úměrné, pak tato čtvrtá čára bude rovna *BC*. Pročež když opíšeme kruh o středu *C* a poloměru *CQ* rovném délce řetězu *BCM*, protínající *CM* v *D*; a dále povedeme *DE* rovnoběžnou *AC* a rovnou *b*; pak úsečka *EM* musí připadat kolmo (*normaliter*) na křivku *CMN* v bodě *M*: anebo, což je v posledku to samé, prodloužená kolmice *KM* musí protínat rovnoběžnou *DE* v bodě *E* takovém, že vytyčená *DE* bude vždy rovna té samé čáře *b*; neboť z podobných trojúhelníků *CMK*, *DME* budeme mít $CK . CM :: DE . DM$; a ježto poloměr *CD* je roven *BCM*, pak tato čtvrtá úměrná *DM* vyjadřující sílu (*potentiam*), kterou závaží *M* táhne most *AB*, bude rovna úsečce *BC* vyjadřující sílu, jíž most *AB* odporuje závaží *M*: tedy tak, aby při tomto stavu věcí, vždy nastávala rovnováha mezi mostem *AB* a závažím *M*. Jedná se tedy o jediné, a sice nalézt křivku, jejíž normály (*perpendiculares*) mají právě uvedenou vlastnost.“ (AE 1696, 58-59)

Takřka není co dodat. Tedy kromě stručného výpočtu, jenž je veden přes kolmici *PMF*, $CP = x$, $PM = y$ tak, že $CM = \sqrt{x^2 + y^2}$; a z podobných trojúhelníků *CMP* a *CDG* $DG = PF = ay / \sqrt{x^2 + y^2}$ atd. a dochází k výše zmíněné diferenciální rovnici[160] a konečně k povaze hledané křivky

159 AE (1695, 58).
160 Viz p. 44.

$$a\sqrt{x^2+y^2}=bx+\frac{1}{2}x^2+y^2.$$[161]

Až na jednu drobnou výhradu[162] neměl k řešení *problema aequilibrii* co dodat ani Johann Bernoulli, jemuž je koncem listopadu 1695 markýz zaslal k přehlédnutí s obvyklou prosbou o latinský překlad, přerýsování „čmáranic“ a předání článku Menckemu. Úlohu shledal jednou z nekrásnějších, co kdy byla nastolena, markýzovo řešení této „fysiko-matematické či spíše mechaniko-matematické otázky“ pochválil coby velmi důmyslné a také rád by věděl, co asi si o něm myslí „onen karteziánský analysta“ se svými dvaceti sedmi rovnicemi a o tom, jak nová analýza přečnívá nad karteziánskou.[163]

Johann Bernoulli sice k L'Hospitalově řešení neměl co dodat, ale přeci něco dodal; a to, jak víme, i když *neměl*. Příští zprávu o splnění úkolu totiž doplňuje o jisté *additio*, jehož povahu pak markýzovi objasňuje těmito slovy:

> „Mezitím jsem Vaše řešení přeložil do latiny a po té, co jsem narýsoval krásně čisté obrazce, odeslal jsem je do Lipska spolu s několika poznámkami, co jsem k němu učinil. Spočívají zejména ve dvou věcech. První je, že jsem nalezl, že Vaše křivka, již nazývám *curvam aequilibrationis*, je druhem cykloidy utvořené od kruhu kotálejícího se na obvodu druhého kruhu, který je tvořícímu roven; což je velice znamenitá vlastnost ukazující, že křivku rovnovážnosti lze opsat zcela prostým spojitým pohybem, jenž je velice vhodný k jejímu uvedení do praxe. Druhá pak, že podávám metodu, jak za pomoci běžné geometrie vyřešit ten samý problém, avšak zadaný ve své obecnosti; tj. jestliže je na místo čtvrtkruhu, po kterém se pohybuje závaží *B* představující most *AB*, dána libovolná křivka, pak body křivky rovnovážnosti nalezneme vždy na základě jediné rovnice (*analogie*). Tedy onen karteziánský analysta nemá zrovna co se honosit, že se nemohl dobrat konce s 27 rovnicemi tam, kde kam já jsem dospěl s jednou jedinou a ještě mnohem dále. Napište mi, prosím, pane, jestli Vám mám poslat kopii, anebo jestli si počkáte, než to bude vytištěno.“ 12. ledna 1695 (JBB I, 253-254)

Takto hluboce překvapivý a významný zvrat v otázce křivky, kterou mu Johann Bernoulli sám od sebe výše dokonce pojmenoval,[164] samozřejmě nemohl markýze nechat klidným; a hned den po obdržení Johannova psaní – pouhá zmínka jeho ostrovtripu[165] stačila – nachází nové, jednodušší a obecné řešení, jež vzápětí odesílá jednak se stejnou prosbou jako naposledy, a kromě toho s žádostí

161 Pro úplnost dodejme, že křivky rovnováhy padacího mostu jsou „užitečnou částí“ význačných křivek zvaných Descartovy ovály. Srv v. 105, 107, 120.

162 Kterou později, N° 36, 12. ledna 1695, bere zpět omlouvaje svou unáhlenost: „Když na mne spěcháte s odpovědí na Váš předvčerejší dopis, nejsem ve stavu udělat to tak, jak byste si přál, neboť mi ukládáte věci, které už nemám v hlavě a na místě si na ně nedokážu vzpomenout a jsem zvyklý nechat látku odplynout, když mám pocit, že jsem ji dostatečně promyslel.“ (JBB I, 254).

163 N° 34, konec prosince 1694 (tamt., 246-247).

164 Dále, N° 40 (tamt., 260) již běžně, francouzsky mluví o „*courbe de balancement*“.

165 *Sagacité* (bystrost, ostrovtip) je vlastnost, kterou Johann Bernoulli markýzovi po právu, na rozdíl od jiných věcí, neupíral ani v dobách největší lítosti nad *Analýzou nekonečně malých*. Montmortovi na námitku, že markýz přeci dokázal řešit obtížné úlohy, psal toto vysvětlení: „Jakmile ode mne získal principy nových počtů a to, co je v práci o *Analýze*, využil toho díky ostrosti svého génia, tyto věci posunul kupředu a získal schopnosti řešit obtížnější problémy než ty, co jsou v *Analýze*, a tedy tato *Analýza* není moje; co je to za důsledek!“ (UB 1718.05.21).

o potlačení předchozího řešení a zařazení tohoto nového právě na jeho místo. Avšak to nebylo všechno. Dalším markýzovým přáním bylo, aby Johann na konec sice klidně zařadil poznámku stran nalezení cykloidy: „což je jedině správné, neboť Vám náleží úplně celá, ale pokud jde o ostatní, prokážete mi laskavost, když to vynecháte, neboť sám jsem to také nalezl a s tím, co Vám nyní posílám, by to už nebylo na pořadu dne“.[166] Konečně markýz vyjadřuje starost ohledně pana Sauveura. Svým prvním řešením by jej totiž bezpochyby zesměšnil a urazil, což je jen další důvod, aby se raději vůbec neobjevilo; vždyť v Paříži by jistě všichni věděli, o kterém karteziáském analystovi je řeč, protože „svoji úlohu patrně předložil i jiným.“

Věci se však ubíraly jiným směrem i přes to, že markýzovi na přesném provedení jeho pokynů nesmírně záleželo.[167] Tentokrát měl Johann markýze ve svých rukou, i když s tím dle svých slov vlastně nemohl nic moc dělat. A byť se již vydával na venkov za účelem nějakého zeměměřičství:[168]

> „Budete překvapen, že se zaplétám s tímto mrzkým řemeslem, které je vhodné leda tak pro nějaké nevědomé vyměřovače; ale poněvadž jsem kvůli matematice opustil lékařství, musím dělat vše, abych si zajistil živobytí; nicméně jakmile jsem se dozvěděl o Vaší vůli, odložil jsem povinnost (*besoigne*) na jindy, abych co nejrychleji vykonal Vaše příkazy. Mám radost, že jste, byť na jiných základech nežli já, nalezl obecné řešení křivky rovnovážnosti, které se moc neliší od mého; přesto bych si přál, abyste je býval nalezl hned na začátku […]“ (JBB I, 259-260)

Ať vlivem pomalosti pošťáků, nebo naopak přílišné rychlosti vydavatele *Acta Eruditorum* – už se nedalo nic dělat. Únorový výtisk černé na bílém obsahoval přesně to, co si markýz tak zoufale nepřál. Ve spěchu, jak dále líčí, sice Johann zhotovil výtah z L'Hospitalova dopisu, doprovodil slovy naznačujícími jeho vznik i povahu nového řešení a ještě ten samý den odeslal do Lipska s prosbou o zařazení, kdyby došlo k nejhoršímu. K tomu zajisté došlo; ale to ještě nebylo to nejhorší, protože, jak už víme, *Excerpta ex Literis Illustris D. Marchionis Hospitalii ad Joh. Bernoulli* i s novým, zjednodušeným a na místě nalezeným řešením křivky padacího mostu z nějakého důvodu spatřila světlo světa až o celý dlouhý rok později,[169] tedy naprosto *hors saison*, v době, kdy už pochopitelně nikoho nezajímalo.

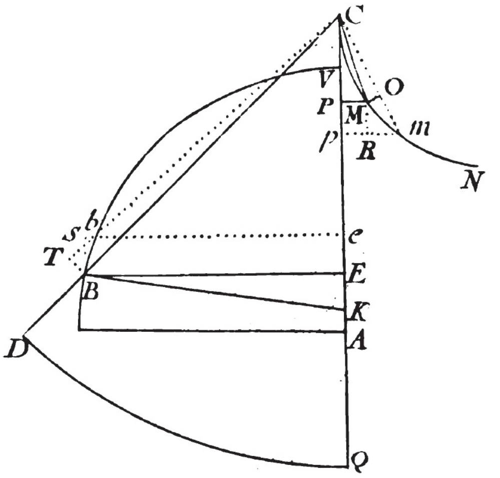
166 N° 37, 23. ledna 1695 (JBB I, 257-258).

167 Je to zcela zjevné z dalšího dopisu, jenž psal pouhé dva dny po právě zmiňovaném na cestě do St. André-de-Briord: „Psal jsem Vám, pane, předevčírem cestou z Lyonu s prosbou o okamžitou zprávu p. Menckemu, aby nezařazoval do akt můj první spis a místo toho jej nahradil druhým, který jsem Vám poslal. Nyní Vám píši cestou z Chambéry, abych Vám zopakoval stejnou prosbu; neboť by mě krajně štvalo (*extremement faché*), kdyby se můj první spis objevil, především kvůli tomu, co jsem zde napsal o onom karteziánském analystovi […]“ (tamt., 258). Zřejmě to musela být velice sžíravá cesta sem a tam podél Rhôny nádhernou alpskou krajinou a těžko říci, jestli děsivější bylo ztratit Sauveurovu „stálost“, anebo pomyšlení na Bernoulliho veřejné poznámky hned po svém prvním, unáhleném řešení. Markýz pokračuje pokyny pro celou škálu možností: pokud by Johann nestihl druhý spis přeložit a dokonce: „Kdyby se první již začal tisknout a přesto ještě celé měsíční číslo nestačilo vyjít, bylo by třeba jej prosit, aby toto místo vynechal a zařadil na jeho místo práci, kterou mu pošlete a dal byste mu na srozuměnou, že v tomto případě se postaráte o nahrazení nákladů a že ty peníze bych Vám poslal.“ (tamt., 259). Nicméně tento dopis Johann Bernoulli obdržel až koncem nastávajícího února 1695.

168 Neboť v té době zastával místo *Geometra publicus*, městského inženýra Basileje.

169 AE Suppl. (II, 289-291).

Na rozdíl od nás, samozřejmě; neboť markýzův postup je podivuhodný hned v několika směrech. Přes Bernoulliův úvod, v němž výslovně zmiňuje, že následující řešení spadá do „běžné geometrie“, se nade vší pochybnost ukazuje, že svůj původ čerpá z geometrie, do níž „vstupuje něco z nekonečna“. Na rozdíl od prvého řešení, jež využívalo veškerou algoritmickou mašinérii diferenciálního a integrálního počtu, toto alespoň ve svém předvedení je ze zákona kontinuity, metaforicky řečeno, *čistě názorné*.[170] O propagaci Leibnizovy metody zde již není řeč. Tomu také odpovídá, snad z důvodů srozumitelnosti a právě názornosti, použití rétoriky „minimálních“ pohybů či délek vlákna.[171]



Obr x

„*Budiž ve vertikální rovině dána nějaká křivka* VBH /Obr x/ *taková, že pokud jsou dána dvě závaží* B, M *spojená společným vláknem* BCM *obepínajícím kladku upevněnou v* C, *pro libovolné místo křivky bude nastolena rovnováha.*

Konstr. Od středu *C* o poloměru *CQ* rovném vláknu *BCM* opíšeme kruh *QD* a libovolným bodem *B* křivky povedeme ordinátu *BE* a poloměr *CBD*. Budiž nyní závaží *M* ku závaží *B* tak, jako abscisa *AE* k abscise *CP* a veďme *PM* rovnoběžnou s ordinátou *BE*. Nyní jestliže opíšeme od středu *C* o poloměru *BD* kruhový oblouk, pak *PM* protne v bodě *M*, jenž bude ležet na hledané křivce.

Důkaz. Uvažujme, že se závaží *B*, *M* pohnou po minimálních drahách (*per minimum moveri*) tak, že vlákno zaujme místo *bCm*; veďme ordináty *BE*, *be* a *MP*, *mp* a od středu *C* opišme minimální kruhové oblouky *BT*, *MO*; utvořme minimální rovnoběžné přímé osy *BS*, *MR* a veďme kolmici *BK* na křivku. Na základě konstrukce se závaží *M* bude mít k závaží *B* tak, jako *AE* ku *CP*, *Ae* ku *Cp* a $Ae-AE$ neboli *Ee* nebo *BS* ku $Cp-CP$ neboli *Pp* anebo *MR*; a tudíž $B\times BS=M\times MR$: poněvadž však $BCM=bCm$; plyne odtud, že $Tb=Om$, pročež $B\times BS:Tb=M\times MR:Om$. Avšak když od pravých úhlů *CBT*, *KBb* odebereme stejný úhel *CBb*, zbývají stejné úhly *TBb*, *CBK*. A tak také úhel *SbB* neboli $EBb=CKB$, ježto oba dva spolu s úhlem *EBK* dávají pravý úhel. Tudíž *Tb* se má k *BS* jako sinus úhlu *CBK* k sinu úhlu *CKB*: odkud podle pravidel mechaniky vyplývá, že $B\times BS:Tb$ vyjadřuje puzení (*conatus*), jímž závaží *B* působí na závaží *M* a naopak se dokáže, že $M\times MR:Om$ je puzením, kterým toto působí na ono. A ježto se pak tato puzení sobě rovnají, nastává rovnováha. *Q. E. D.*“ (AE Suppl. II, 289-291)

170 Srv. Needham (1997), který se domnívá, že tento rys, dalo by se říci, nevědomé, názorné infinitesimální analýzy náleží jen oblasti okolo Newtonových *Principů*. Jedná se nicméně o přímý důsledek založení Leibnizova počtu ze zákona kontinuity, *požadavku rozumu*, jenž zajišťuje, že stejné poměry, jaké platí v oblasti konečného, budou platit i v nekonečně malém; v tom samém smyslu je z oblasti konečného extrapolován i diferenciální algoritmus umožněný užitím *bytostně dvojznačných symbolů*. Ze zákona kontinuity se totiž řetěz pravidel nikde „za obzorem“ viditelného nepřeruší, poměry z podobnosti trojúhelníků budou platit i, jak říká l'Hospital „na minimálních drahách závaží“, a tudíž je možno je „rétoricko filosoficky“ znázornit, byť samy z povahy věci znázornit nejdou.

171 K rétorice nedělitelných se zřejmě též ze strategických důvodů uchyloval v některých případech i Leibniz, viz například *De geometria recondita* nebo již zmiňované *Supplementum geometriae dimensoriae*. Mezi obdobím Cavalieriho metody nedělitelných a nástupem diferenciálních veličin se obecně mluvilo o veličinách „neomezeně malých (*indefinite parvus*)“; viz například Barrowovu metodu tečen (v. 9).

Při pohledu na zmarněný klenot těžko se divit, že nešťastný spád událostí, nadto hořce okořeněný téměř neskrývaně pobaveným tónem Bernoulliho odpovědí, markýze uvedl do značného rozezlení; a to se projevilo velice brzy, neboť, je třeba si vzpomenout: Johann *prodal svoji duši*[172], upsal se k věčnému mlčení, souhlasil, že bez markýzova svolení nezveřejní žádný objev a že mu je všechny vydá (byť zřejmě netušil, že již brzy mu je naopak vydá markýz). Když už bylo po všem, trochu smutně, ale s obvyklou vlídností sděluje Johannu Bernoullimu své rozpaky:

> „Při svém příjezdu jsem, pane, obdržel Váš dopis z 5. tohoto měsíce; jsem velice spokojen s tím, jak jste se s tím vypořádal; bylo to to nejlepší, co se dalo dělat. Dovolte však, abych Vám ještě jednou připomněl Váš slib, že nikomu nebudete sdělovat případné poznámky a poznatky, které byste mohl učinit a objevit ohledně toho, co Vám předkládám. Avšak ptám se, co jiného než sdělit je všem, je to, že je necháte vytisknout? Navíc, aniž byste mi o tom vůbec cokoli řekl. Totiž abych k Vám byl upřímný, tolik jsem se na to spoléhal, že jsem ani pečlivě neprocházel úlohu, již jsem Vám zaslal; vůbec jsem totiž nepomyslel, že byste se se mnou nepodělil o to, co Vás k tomu napadne, a to i vzhledem k tomu, že jsem Vás o to dokonce prosil. Ostatně nesmíte to brát tak, že bych se chtěl honosit Vašimi objevy, na kterých nemám vůbec žádný podíl. Jsem dalek takové myšlenky a pokud mi je laskavě sdělíte, budu je úzkostlivě držet v tajnosti; avšak to, co bych si přál, je, abyste mé možné poznatky a věci, které Vám posílám, promýšlel a ušetřil mne námahy zkoumat je do hloubky, neboť na to nemám čas, kvůli mnoha záležitostem, jimiž se musím zabývat a kromě toho se zrovna netěším pevnému zdraví [...]“ N° 42, 19. února (JBB I, 262-263)

Z příštích dopisů je patrné, že se opět vše dalo do pořádku a o celé záležitosti bude lépe nemluvit. L'Hospital ujišťuje Bernoulliho, že „od něj nechce žádat nic, co by mu působilo sebemenší bolest“[173]; Bernoulli L'Hospitala:

> „Abychom to vzali zkrátka, stačí mi oznámit Vaše konečné rozhodnutí (*volonté decisive*), zdali již nesmím v životě nic publikovat, a splním to do poslední tečky a už ode mne nikdo nic neuvidí ani v *Aktech*, ani nikde jinde; nicméně jestli Vám leží mé štěstí na srdci, nežádejte to do té míry bezpodmínečně, neboť jedině tímto způsobem, tedy když občas někde zveřejním něco lhostejného, co se Vás nijak nebude týkat, jedině tak se můžu, až bude mír, doporučit na nějaké slušné místo na nějaké akademii […]“ N° 46, 5. března 1695 (tamt., 266-267)

Člověk se maně ptá, komu že se to vlastně Johann upsal, když to netrvalo ani týden a už měl od markýze na stole nabídku místa profesora matematiky v Groningenu s platem 1440 liver.[174]

---

172 Tuto nevyhnutelnou metaforu plně v pozadí celé matematické pohádky odhalil nutně již Otto Spiess (1955, 145).

173 N° 44, 26. února 1695 (JBB I, 265).

174 Idea nicméně vzešla od Huygense, který se ve ztraceném dopise L'Hospitalovi ptá na jeho názor v celé věci. Ten dostává dopis kolem 21. února, právě, když se ze St. André vrací do Paříže, a odpovídá, N° 2889, že sice neví, zdali, když dokončil studia medicíny a oženil se v Basileji, bude Johann Bernoulli chtít do Holandska, ale vše zjistí. Pak ovšem, aspoň v dané souvislosti, přichází cosi velice temného. L'Hospital se vyjadřuje k právě probíhající, svého času slavné vědecké při mezi Huygensem a Renauem kolem principů navigace lodí a skládání sil; a zmiňuje se, že pan Renau má stále ve Francii mnoho zastánců a „dokonce p. lékař Bernoulli mi psal, že s ním souhlasí a podal mi k tomu důvody, které Vám sdělím, pokud budete chtít, nicméně Vás prosím, abyste o tom nikde nemluvil.“ (HOC X, 705-706). Věru, co jiného je tohle než – všichni vědí, jak se to slovo řekne řecky – *našeptávání*? Nehodláme se zde v žádném případě, po způsobu nestydatých „nevědoucích vyměřovačů“ lidských duší, pídit po „plausibilním“ vysvětlení; jistý řád možných, pravděpodobných pohnutek, jak každý vidí, vysvítá ze

Markýzovo řešení, jež se čistou geometrií vlamuje do bran mechanické přírody; i Bernoulliho *Animadverio* postupující zcela naopak, anebo tak, jako by přirozeně žádné takové brány nebylo, však kromě další peripetie vnitřního dramatu obou geometrů představují také, jak už bylo zmíněno, další význačný podnět k hlubšímu, filosofickému prozkoumání vztahu mezi vnitřní, transcendentní geometrií a konkrétními otázkami, které klade sama příroda. Své tedy takřka pokoutní *Animadversio* začíná Johann Bernoulli vyznáním, že „význačnost nějaké otázky je zapotřebí poměřovat nikoli její obtížností, nýbrž jejím užitkem“.[175] K pochvale markýzova řešení úlohy, která ze zjevných důvodů nachází tolikeré využití v architektuře nejen vojenské, ale i civilní, však připojuje následující poznámku:

> „Avšak pokud řešíme nějakou úlohu, je naším výsostným cílem, jakmile již projdeme vším, co se týká teorie, najít snadnou cestu, která nás přivede k co nejjednodušší konstrukci. Soudím, že takový nejpříhodnější způsob, jak konstrukci v praxi provést, představuje plynutí bodu (*fluxionem puncti*) nebo leibnizovská trakce. Popis křivky skrze určení jejích bodů (*per inventionem punctorum in curva*) totiž je třeba připsat spíše oblasti teorie než praxe; avšak lze z něj, když jej vezmeme jako pravidlo (*tanquam ex regula*), vyvodit podmínky spojitého pohybu.“ (JBB I, 132-133)

Takto Johann Bernoulli vzápětí dokazuje, což je nanejvýš pozoruhodné,[176] že křivky rovnovážnosti náleží mezi cykloidy – přesněji, představují epicykloidu prostou, zkrácenou a prodlouženou. Pročež „je lze opsat velice jednoduchým a pro praxi vhodným pohybem“ a všechny jejich význačné vlastnosti tak, jak je ukázalo předchozí, L'Hospitalovo první, řešení, které by se jinak bez rozsáhlejších (*prolixiori*) výpočtů těžko hledaly, vyplývají samy od sebe (*sponte fluunt*), a to čistě na základě způsobu utvoření cykloidy. Podstatné nicméně je, že Johann Bernoulli se při určení povahy křivky rovnovážnosti obešel zcela bez počtu diferenciálů; na rozdíl od markýzovy konstrukce křivky na základě vlastnosti tečen anebo analystových – Sauveura si Bernoulli dobírá ještě nelítostněji než markýz – sedm a dvaceti rovnic vychází z jediného, proslulého „axiomu“ statiky, že totiž *při libovolném pohybu rovnovážných těles jejich společné těžiště ani nestoupá, ani neklesá, nýbrž vždy zůstává v té samé horizontální výšce*.[177] Navzdory délce i odlišnosti cest však:

---

souběhu událostí, jak se popisují v datovaných dopisech. Konečně je známo, že „nízká věc, pokud je přizpůsobena jiné nízké věci, často může vést k něčemu lepšímu než spojení dvou jiných věcí, z nichž každá sama o sobě je ušlechtilejší než kterákoli z prvých dvou“ (Leibniz 2012, 88); a tak Johann s krajní vděčností přijímá a místo profesora matematiky v Groningen bude zastávat následujících deset let.

175 JBO (I, 132).

176 Lze ponechat čtenáři k rozjímání, jakou souvislost vložila příroda mezi křivku rovnovážnosti padacího mostu a kaustiku odrazem od kruhového profilu zrcadla, jejíž cykloidální povahu ukazuje Huygens v *Traité de la Lumière*, VI (HOC XIX, 537); a pochopitelně, nejen mezi tyto dvě.

177 V řešení vychází Bernoulli ze zásady, že obě závaží *M*, *B* (Obr xi) musejí mít v libovolné poloze vždy stejnou horizontální osu rovnováhy; a ordinátu *KIE* vedenou z těžiště pak chápe za osu vertikální. Z axiomu tedy vyvozuje $M:IP=B:IH$, kde *IH* je opět „*distantia brevissima*“ daná křivkou *AB* (představující zobecněný případ padacího mostu) a *IP* pak vzatá na opačné straně.

> „Z našeho obecného řešení nacházíme analytickou rovnici křivky hluboce souznící (*apprime conspirare*) s rovnicí věhlasného markýze, jenž ji však objevil na základě zcela odlišných východisek postupů; což jako by nám dávalo do hloubky nahlédnout, že *Příroda*, pamětliva vždy svých zákonů, sama se sebou nikdy není v nesouhlasu.“ (JBB I, 135)

Už jen právě shora ve dvou tazích vyřčený vrcholný princip harmonie je dostatečným důvodem a oporou k dalekosáhlým zobecněním, která tak jako tak zvláštní podmínky architektonické praxe samy sebou vyžadují: ať už se objeví větší počet řetězů, kladek a závaží, různé vzdálenosti mezi nimi, páky a zabržďovací součástky a jakákoli další zařízení, jež architekti vymyslí:

> „Budeme moci schopni sestrojit křivky rovnovážnosti se stejnou lehkostí a takřka hravostí (*quasi ludendo*); zatímco jinak bychom upadli do nepřekonatelně zdlouhavých výpočtů, kdybychom po způsobu předešlého z řešení chtěli odstranit to, co je mechanické, a proměnit tyto otázky na čistou geometrii.“ (tamt., 135)

Námitka Johanna Bernoulliho nemůže být závažnější: nový kalkul vede k neúnosně dlouhým a tíživým výpočtům; sám od sebe nedokáže odhalit či dokonce zakrývá tu nejprostší povahu křivky rovnovážnosti, tj. že je epicykloidou, a tím pádem nedává příležitost k očividným cestám zobecnění – a přitom sama zde příroda přivádí k prakticky nejjednoduššímu řešení. Je nový kalkul vůbec *přirozený*? Námitka se pochopitelně plně vztahuje na první markýzovo řešení; na druhé pak co do sestrojení křivky bod po bodu a jejího využití takříkajíc přímo na stavbě. Zároveň však je Johannovo řešení cestou spojitého pohybu, na které v tomto případě platí pouhá „běžná geometrie“, přinejmenším založeno na markýzově analýze „očištěné o vše mechanické“. Kudy z toho ven? Johann Bernoulli se o radu neobrací k nikomu menšímu nežli samotnému objeviteli:

> „Chtěl bych se proto zeptat na radu ve vnitřní (*penitioris*) geometrii nejznalejšího Leibnize, zdali by se nedala nalézt přesná pravidla pro tento druh otázek, které nakolik je klademe v jejich abstraktnosti nás od běžné geometrie vzdalují, avšak jakožto konkrétní ji samy připouštějí tak, že není nutno utíkat se k diferenciálnímu a integrálnímu počtu. Naše křivky rovnovážnosti jsou pak toho jasným dokladem.“ (tamt.)

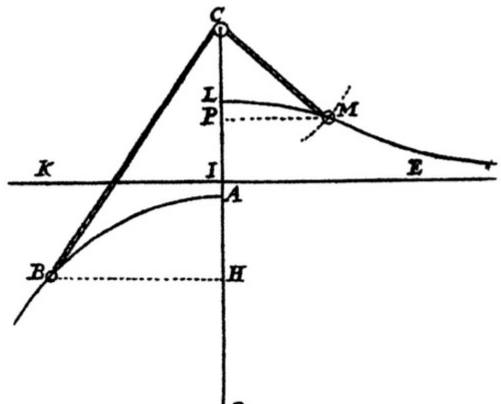
Těžko mohl metafyzik Leibniz nechat oslyšenu prosbu takového kalibru, která navíc, vedle všeho výše uvedeného, zaváněla provokací. Johann Bernoulli, spolu s bratrem první, kdo Leibnizovu metodu vůbec pochopil a tolik prosazoval, se patrně nemohl vážně domnívat, že by infinitesimální počet[178] v otázkách fyziky byl zdlouhavý a zbytečný, zatímco „běžná“, konečná geometrie jako by si s přírodou podávala ruce. Ale ať tomu bylo jakkoli, od Leibnize se nám díky tomu dostává několik cenných a podivuhodných ponaučení stran založení počtu nekonečna a jeho pojmů v lůně na každý způsob nekonečné, božské přírody.

178 Zejména po svých pracích na řetězové křivce, otázce tvaru plachet, úloze nejkratšího soumraku, v nichž mu byla nová metoda nejvěrnějším pomocníkem.

Už jen z pohybů integrafu se jasně rýsuje, že s mechanickými, technickými, inženýrskými průzory do říše geometrie se Leibniz nemohl než hluboce ztotožnit; avšak byla tu ještě druhá, radikálnější strana odpovědi, která tyto průzory v Leibnizových očích teprve otevírá. Kratičký článek *Notiancula ad constructiones*, čili drobné poznámky k oběma konstrukcím, zahajuje Leibniz (kromě pochvaly jich obou) dokonale ironickým obratem Bernoulliho domnělé zásluhy nalezení křivky bez pomoci diferenciálů: jestliže totiž Johann vycházel z „proslulého axiomu“ těžiště, pak ovšem již s diferenciály nevědomky počítal, neboť těžiště samo o sobě předpokládá jejich sumaci; „a není proto žádný div, že umožňuje si diferenciály zase odebrat (*resumentur*)“.[179]

Jistěže, význačné vztahy se, po způsobu *výrazů*, samy sebou, jasněji a jednodušeji zračí spíše na konkrétních případech, nežli v abstraktních symbolických sítích; avšak právě tyto vyjadřují základnější a v pravém smyslu jednodušší skutečnosti a vztahy, a umožňují tak pohlédnout hlouběji. Proto je pojem těžiště přirozeným výrazovým průnikem abstraktních vztahů, jež se pod ním skrývají; a proto zahrnutí těžiště do konstrukce *eo ipso* značí diferenciální úkon. S touto obecně charakteristickou myšlenkou v pozadí ovšem Leibniz představuje vlastní konstrukci křivky rovnováhy, která tak řečeno odspodu prorůstá Bernoulliho řešení a dokonává ironický obrat zdánlivé jednoduchosti v konečnou složitost a naopak:

> „Aby se to vyjevilo jasněji, ukážu, jakým způsobem ona kratičká konstrukce přímo a okamžitě povstává z diferenciálů, aniž by do ní vstupovala úvaha těžiště. Totiž z povahy rovnovážnosti, o níž předpokládáme, že stále trvá, musí být zřejmé, že /Obr xi/ součin závaží *M* a prvku (*elementum*)[180] *IP* se rovná součinu závaží *B* a prvku *IH*; takto pak pokles nebude větší než vzestup,[181] čili prvky poklesu i výstupu budou vzhledem k závažím opačné. Ježto pak $M\times dIP=B\times dIH$, sumací dostáváme $M\times IP=B\times IH$, neboli $M.B::IH.IP$, a tím pádem dostáváme Bernoulliho konstrukci.“ (MS V, 319)



Obr xi

Přesných pravidel pro tento druh otázek se tedy Johann Bernoulli nedočkal. Těžko se tomu divit. Taková pravidla by takřka spadala v jedno s Leibnizovým celoživotním snem univerzální charakteristiky neboli *ars inveniendi*. Leibnizova konstrukce však, ať už zdařile či nikoli, poukázala na mínění objevitele diferenciálů stran jejich vnitřní všudypřítomnosti v přírodě a veškerém jejím

179 MS (V, 319).

180 Míní se samozřejmě (diferenciální) částečka úsečky *IP* v podobném smyslu jako L'Hospitalovo „minimum“ (p. 171), avšak je zřejmé, že takováto „minima“ nutně musejí být různě velká .

181 Marc Parmentier (1995, 312) podotýká, že byť se Leibniz snaží vyřadit ze své konstrukce pojem těžiště, co jiného by se mělo pohybovat vzhůru či dolů, než právě Bernoulliho těžiště? Od takto průhledného *petitio principii* by snad Leibnize bylo možno na chvíli uchránit tím, že při stavu rovnováhy výrazem „*ascendetur*“ se míní „množství vzestupného pohybu“, ve smyslu mechanické práce.

konání. Příroda sama *jakoby* skrytě prováděla sumace pod závojem význačných rysů a stop, jež se vědomému pohledu snáze nabízejí. Všudypřítomnosti však nikoli reálné, to Leibniz vždy odmítal, jak ještě uvidíme; nýbrž co do *určení* a *vyjádření* hlubokých souvztahů věcí – mimo veškeré *concretum* a přeci hluboce v něm: plynoucí totiž z jeho metafyzického *založení*.“[182]

Křivka nejrychlejšího spádu.

Rok 1696 přinesl kromě vydání *Analýzy nekonečně malých* z pera neznámého autora,[183] s níž se mnoho věcí vyjasnilo a která L'Hospitala proslavila přinejmenším na celé další století, také „jednu z nejpodivnějších a nejhezčích úloh, co kdy byla předložena“, jak se vyjádřil sám markýz; a je dosti příznačné,[184] že hned první věc, kterou po jejím předkladateli požadoval, aby se jí mohl věnovat, bylo, ať mu ji převede na čistou matematiku – „neboť fyzika mě obtěžuje (*embarasse*)“.[185] Pohnutý a vzrušující příběh brachystochrony byl co do svých obecně duchovních a vnějších dějinných rysů vylíčen v rámci markýzova akademického portrétu. Nyní je tedy třeba přistoupit stejně, jako tomu bylo u předchozích křivek, ke skryté genezi a povaze markýzova řešení; a konečně se uzavře opět několika drobnými poznámkami stran významu této nejsvrchovanější úlohy z hlediska objevitelských cest nového počtu mezi geometrií a přírodou.

Slavná úloha „nejpronikavějším matematikům světa“, jež spadá ve vyšším a netušeném smyslu, jak již bylo řečeno, do řádu otázek *de maximis et minimis*, zanechala, až na pár vyvolených, tehdejší

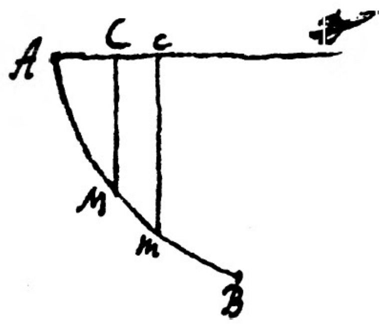
182 „Lze také říci, že nekonečna a nekonečně malé jsou natolik založené (*fondés*), že vše v geometrii a dokonce i v přírodě se děje, jako by byly dokonalými skutečnostmi; svědčí tak nejen o naší geometrické transcendentní analýze, ale též mém zákonu kontinuity, na jehož základě je dovoleno uvažovat klid jako nekonečně malý pohyb (tj. jako ekvivalentní druhu svého protikladu) a koincidenci jako nekonečně malou vzdálenost a rovnost jako poslední z nerovností etc.“ (MS IV, 93). Založené, neboli oprávněné a zdůvodněné.

183 První zmínka o „malém pojednání o diferenciálním počtu“ padá ze strany L'Hospitala mezi radostnými událostmi příprav Johannova usídlení v Holandsku a nijak radostné zprávy o skonu Christiaana Huygense, který se tak již *Analýzy* bohužel nedočkal. V dopise N° 56 z 22. srpna 1695 píše: „Své pojednání o kuželosečkách jsem uvedl do stavu, že již půjde do tisku, neboť mě s tím pronásledují (*persecuté*) otec Malebranche a pár jeho přátel. Připojím k němu drobné pojednání o diferenciálním počtu, kde Vám spravedlivě učiním za dost ve všem, co zasluhujete. O integrálním počtu se tam vůbec zmiňovat nebudu; přenechávám to p. Leibnizovi, který, jak víte, zamýšlí vydat práci pod názvem *de scientia infiniti*, takže toto bude vlastně jen úvodem k jeho dílu.“ (JBB I, 304). Zmínky o přípravě *Kuželoseček*, které jak víme vyšly až posmrtně, sloužily L'Hospitalovi za skvělou zástěrku, jak před Bernoullim skrýt pokračující práce na *Analýze nekonečně malých*.

184 Tento motiv markýzovy čistě geometrické duchovní podstaty se vine všemi jeho pracemi jako červená nit; jasně se ukazuje výše a zcela zjevně vyvstává ze stránek dopisů, kde se probírala otázka „odstředivé křivky (*courbe de centrifuge*)“ (v. 133). Úlohu Bernoulli odvozuje a zadává v *Additio* (p. 41) k L'Hospitalovu druhému řešení křivky rovnovážnosti; nicméně šířeji se jí zde zabývat nebudeme. Zajímavá je v této souvislosti opět právě výměna stran její smíšené mechanicko-geometrické povahy: markýz se táže (N° 42), jak je možné se v úloze zbavit fyziky; Johann namítá (N° 48), že pak už otázka není nijak obtížná, neboť veškerá obtíž spočívá v tom, jak správně rozplést (*demeler*) odstředivou sílu od tíhy tělesa (Spiess 1955, 147).

185 Takto L'Hospital popsal Bernoullimu své první dojmy z úlohy nalezení brachystochrony – v dopise N° 63, 15. června 1696 (tamt., 319), prvním z mnoha, v nichž se tato otázka mezi oběma geometry probírala –, o níž se krátce před tím dozvěděl od Varignona; neboť byl právě nemocen a Johann Bernoulli jistě věděl, že není radno jej v tomto stavu pokoušet (p. 53, 77). Nicméně markýz se přihlásil sám.

geometrickou obec v naprosté bezradnosti. Netřeba nadále opakovat, že jinou cestou nežli skrze vnitřní geometrii do určení této křivky vstoupit nelze (tedy alespoň ne tak, nakolik je její přirozenost zapletena a vyjádřena vnějším výrazem, projevem vztahů coby křivky *nejkratšího času*, čili z perspektivy Bernoulliho otázky);[186] nicméně i takový znalec a obhájce nového počtu, jakým byl Pierre Varignon, tváří v tvář otázce brachystochrony dosvědčuje, že její obtížnost jej „odstrašila (*rebuté*)“.[187] O karteziánských analystech samozřejmě ani nemluvě; ostatně právě tam dolů, přímo do jejich institucionálních zákopů ukazoval Johann se svou brachystochronou dlouhý nos.[188] Vrcholné obtížnosti úlohy si byl Johann pochopitelně vědom; a s ohledem na markýzovo zvolna se zotavující zdraví – a novou směnku na 300 liver[189] v kapse – ochotně a rychle markýzovu přání vyhovuje:



Obr xii

„Není vůbec obtížné převést tuto úlohu na čistou matematiku tak, že v ní z fyziky nezbude nic víc než běžný Galileův princip, který jsme předpokládali také u isochronních křivek, tj. že rychlosti padajících těles jsou vzhledem k jejich kolmo proběhnutým výškám v poměru subduplikovaném.[190] Za těchto podmínek *budiž dány dva body* A *a* B *a je třeba najít povahu křivky* AMB /Obr xii/*, po níž padající těleso počínajíc bodem A v nejkratším čase dospěje do bodu* B. Pokud horizontální abscisu *AC* označíme jako *x* a vertikální ordinátu *CM* jako *y*; rychlost tělesa *M* bude tedy vyjádřena jako $\sqrt{y}$. Avšak pokud dráhu *Mm* proběhnutou tělesem vydělíme rychlostí, dostáváme čas, jehož je zapotřebí pro proběhnutí *Mm*; a tím pádem

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$$

bude vyjadřovat tento čas. A jestliže tedy vezmeme všechny

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$$

od *A* do *B*, vychází čas, který těleso vynaloží, aby se dostalo z *A* do *B*. Nuže tedy tímto způsobem se úloha převede na čistou matematiku: *Ze všech čar* AMB *spojujících dané dva body* A *a* B *hledáme povahu té, u níž*

$$\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$$

bude nejmenší.“ (JBB I, 321)[191]

186 Víme totiž, že se jedná o „pouhou“ obyčejnou, huygensovskou cykloidu.

187 Z těch, kterým jsem oznámil Vaší úlohu, ještě nevím o nikom, kdo by ji vyřešil; sám jsem se o to pokoušel, ale její obtížnost mě okamžitě […]“ (JBB II, 103).

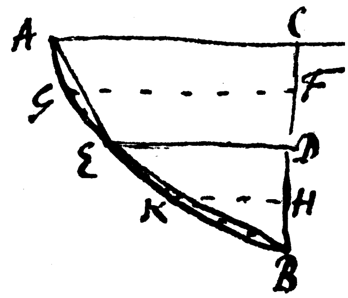
188 Viz p. 54.

189 N° 64, 30. června 1696: „Pokud jde o mne, nenechám si uniknout žádnou příležitost, jak bych Vám projevil svůj oprávněný vděk za vše, co dlužím tak štědrému dobrodinci.“ (JBB I, 320).

190 *Soudoublé*, čili, jak je z Galileova zákona zřejmé, rychlosti jsou dvakrát obsaženy ve čtvercích výšek.

Z Johannova vyzdvižení čistě matematické podstaty úlohy je zřejmé, že odpovídá nikoli geometrické úvaze na úrovni diferenciace či integrace, nýbrž rozboru či určení podmínek diferenciální rovnice samé; a tedy zasahuje do obecného *řádu* řešení, oblasti, která již názornému, geometrickému základu prvního infinitesimálního počtu uniká.[192] Nejedná se totiž o nalezení význačné ordináty nějaké dané křivky, nýbrž o nalezení křivky samotné v nekonečném množství dalších, které s ní sdílejí krajní body *A*, *B*. Je tudíž nutno uvažovat vnitřní spojitost celé družiny, společný zákon, vyjádřený *parametrem*; a k nalezení jediné význačné křivky podřídit hodnoty tohoto parametru algoritmu diferenciálního počtu, tedy uvažovat jej jako *diferencovatelnou* veličinu, třebaže mimo veškerý geometrický názor.[193] L'Hospital na radikální obtíž naráží velice záhy; výsledkem je kromě opětovného vpádu choroby i idea cesty k řešení: jednak přes základní princip diferenciálního počtu v podobě analogie křivky a mnohoúhelníku; jednak skrze zajímavou analogii s řetězovou křivkou:

> „Jsou dány body *A* a *B* (Obr xiii) a rovněž čáry *AB*, *BC*; vedu středem *BC* rovnoběžku *DE* a hledám na této úsečce bod *E* takový, že těleso probíhající úsečky *AE*, *EB* dospěje do *B* v kratším čase, než přes jakýkoli jiný bod úsečky *DE*. Vedu následně další dvě rovnoběžky *FG*, *HK* středy *CD*, *DB* a hledám pak body *G*, *K* tak, že těleso probíhající mnohoúhelník *AGEKB* dospěje do *B* v kratším čase, než přes jakýkoli další mnohoúhelník o stejném počtu stran.“ N° 67 (JBB I, 325)



Obr xiii

Zjevně za předpokladu, že stran bude nekonečno, výsledný mnohoúhelník bude odpovídat křivce nejrychlejšího spádu. Z počátku snadná a přirozená cesta při vyšším počtu dělení L'Hospitala vyčerpává a obává se dokonce, že „z pohledu čisté matematiky je tento problém neřešitelný“. Přichází proto s úvahou řetězové křivky, kde mezi *jakýmikoli* dvěma body sestupuje těžiště co možná nejníže, byť přechod od diferenciální rovnice k požadované krajní hodnotě vlastnosti je markýzovi též nedostupný. Johanna Bernoulliho prosí o případnou metodu, avšak až po uplynutí dané lhůty příštích Velikonoc. Svou prosbu pak za nějaký čas zopakuje, aby se nepřipravil o radost z promýšlení problému, jejž „shledává čím dál zajímavější.“[194]

Stejnou cestou, přiznává v odpovědi Johann Bernoulli,[195] se z počátku vydával i on; nežli nejprve nalezl nepřímou cestu k řešení, ukrývající „podivuhodnou blízkost či propojení s otázkou

191 Psaní L'Hospital neobdržel, jak se ukazuje z další korespondence; pravděpodobně 22. září 1696 Bernoulli (dopis se nedochoval) čistě matematické zadání zasílá opětovně. V tu dobu byla lhůta pro odevzdání výsledků prodloužena až do dalších Velikonoc (p. 55) a L'Hospital se okamžitě pouští do řešení.

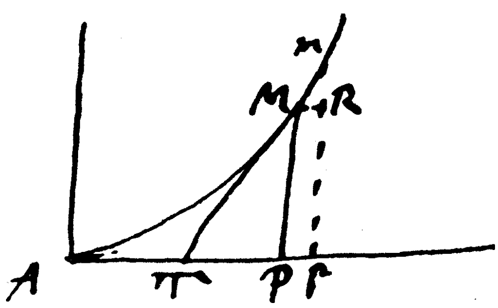
192 Srv. *Nova calculi differentialis Applicatio* z roku 1694 (v. 121), kde Leibniz v obdobném zobecňujícím smyslu podřizuje algoritmům svého počtu nikoli pouze proměnné *geometrické* veličiny vyjadřující křivky, nýbrž i *parametr* zajišťující spojitý přechod na základě společného zákona mezi nekonečnem křivek jednoho druhu, čili v rámci družiny křivek.

193 Viz Peiffer (1989, 63).

194 N° 71, polovina února 1697 (JBB I, 339).

195 N° 68, 21. prosinec 1696 (tamt., 327).

neméně znamenitou, jež náleží do úplně jiné části matematiky“; vedle toho snad ještě ten samý den objevuje řešení přímé „tisíckrát obecnější“ atd.[196] Ale kromě tajnosnubných náznaků a triumfálních vyhlášení neříká nic, co by markýze mohlo kamkoli posunout ani jinak varovat. S vlastním řešením, které se ukázalo jako vadné, brzy přichází Joseph Sauveur, „který velice dobře pochopil analýzu nekonečně malých“;[197] Snad z rozboru jeho omylů, které z počátku nerozpoznal a později je objevil až na Bernoulliho upozornění, mohl markýz získat dojem, že jeho původně opuštěná cesta by mohla vést k cíli a již příštím dopisem zasílá Johannovi své vlastní řešení, které je coby markýzův výboj do říše *mathematicae mixtae* mimořádné; a to především tím, že ke správnému výsledku dochází vzájemným vyrovnáním fatálně chybných předpokladů,[198] ale nejen tím, jak se ještě ukáže.



Obr xiv

„Najít povahu křivky *AM* /Obr xiv/ takovou, že suma $y^n ds$ je co možná nejmenší ($AP=x$, $PM=y$, křivka $AM=s$ a n značí libovolnou mocninu y). Za účelem řešení úlohy uvažuji polohu křivky *AM* tak, že úsečka *AP* je horizontální a v každém jejím bodě *M* leží závaží vyjádřené jako $y^{n-1} ds$; nuže je zřejmé, že takto zatížená křivka musí zaujmout polohu takovou, že její těžiště bude co možná nejblíže horizontále *AP*, tj. suma všech $y^n ds$ musí být co možná nejmenší. Nyní povedu tečnu *MT* a uvažuji veškerá závaží rozmístěna na křivce *AM* jako by byla soustředěna do bodu *T* a zřejmě

$$MP\,.\,PT \text{ neboli } dy\,.\,dx :: \int \overline{y^{n-1} ds}\,.\,a,$$

a tudíž

$$\int \overline{y^{n-1} ds} = \frac{a\,dx}{dx}$$

a diferenciací (při dx konstantním)

$$y^{n-1} ds = \frac{a\,ddy}{dx}.$$

Tedy

$$\frac{a\,dy\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = dx\,y^{n-1}\,dy,$$

jejíž integrál je

196 Jedná se o elegantní analogii s cestou světelného paprsku konstantně se měnícím prostředím, kterou níže uvedeme. Bernoulliho přímé řešení vychází až roku 1718; ač jistě geniální, náleží poněkud odlišnému řádu úvah a z důvodů stručnosti se rozebírat nebude, neboť nemusí být řečeno vše. Z hlediska srozumitelnosti je možno podotknout, že Bernoulliho zahrnutím optických postupů do *matematiky* se míní pochopitelně oblast *mathematicae mixtae* se vším, co k tomu bylo shora řečeno.

197 L'Hospital je připojuje jako dodatek k dopisu N° 69, 31. prosince 1696.

198 Otto Spiess (1955, 149) používá výrazů jako *salto mortale*, *phantastischer Glücksfall*. Důkladný rozbor L'Hospitalových chyb i způsob, jakým upravit podmínky úlohy tak, aby jinak duchaplné L'Hospitalovo řešení mohlo platit, lze nalézt ve Spiessově komentáři k dopisu (JBB I, 343-345).

$$a\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{y^n dx}{n};$$

odkud dostaneme diferenciální rovnici

$$dx=\pm\frac{an\,dy}{\sqrt{y^{2n}-aann}}$$

vyjadřující povahu hledané křivky. Mějme nyní $n=-\frac{1}{2}$, což je případ zadání, pak budeme mít

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{4ay-yy}},$$

odkud je zřejmé, že křivka se sestrojí následujícím způsobem [...]“ N° 72, 25. února 1697 (JBB I, 342-343)

Z konstrukce se pak ukazuje, že křivkou je „běžná cykloida“, a markýz tak nakonec výzvě Johanna Bernoulliho, téměř na poslední chvíli, dostává. Křivku nejrychlejšího spádu tedy markýz připodobňuje k lanu či řetězu ve stavu rovnováhy; pro ordinátu těžiště, jež přirozeně, analogicky vyjadřuje požadovanou vlastnost minima, tedy získává výraz, v jehož čitateli stojí hledaný integrál, jenž má být minimální. Rychlost pádu tělesa nyní L'Hospital staví úměrnou $\sqrt{y}$ (jako by snad těleso mělo stoupat) – třebaže chybně, právě proto, že tato proporce vyjadřuje případ Galileova zákonu pádu těles. Odtud pak ona druhá podstatná skutečnost: L'Hospitalovo řešení, jakkoli pomýlené, je pojato *zcela* obecně, coby platné pro jakoukoli možnou úměru zákona pádu těles, „pro všechny možné případy“[199] tak řečeno, pro každý z možných světů.

Johann Bernoulli v odpovědi, jež se ztratila, patrně nemohl netlumočit jisté rozpaky;[200] avšak po další výměně vysvětlení markýz tak jako tak zasílá – nicméně bez metody – své řešení Leibnizovi, aby je nechal zařadit do *Akt* k ostatním.[201] Času již příliš nezbývalo a poněvadž Leibniz dal své požehnání, tedy právě tak, jak bylo odesláno, zazáří v květnových *Acta Eruditorum* coby součást hvězdné plejády: Leibniz, Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli.

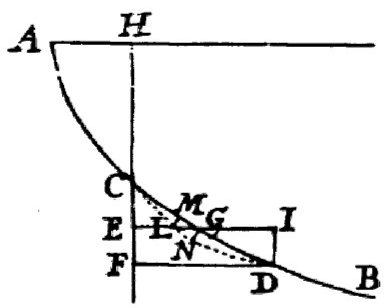
199 N° 73, 18. března 1697: „Z čeho mám radost, je, že moje metoda dává obecné řešení pro všechny možné případy, a zdá se mi proto, že pokud byla náhodou úspěšná ve zvláštním případě, je téměř nemožné, aby neplatila právě tak ve všech případech.“ (JBB I, 345-346).

200 Šlo zřejmě o smysluplnosti zlomku vyjadřujícího ordinátu těžiště, jak se ukazuje z N° 74, 30. března 1697, kde se Bernoulli stále nedokáže zbavit jistých pochybností. Ježto však se datum odhalení blížilo, markýzovo řešení nakonec připouští: „nepopírám, že by Vaše řešení nebylo pravdivé (*véritable*), vždyť se s mými shoduje ve všech případech; ani nepopírám, že by Váš postup nebyl oprávněný, avšak stále nevidím dokonalou a demonstrativní evidenci, jakou uvidíte v mých řešeních. Tedy jsem přesvědčen o správnosti vašeho řešení jen proto, že dává vždy stejné křivky jako mé“ (tamt., 347). *Konečně Johann markýzovi zasílá svá vlastní řešení.*

201 „Metodu, kterou jsem použil tuto úlohu a z níž jsem získal, jak uvidíte, obecné řešení pro všechny možné hypotézy pádu hmotných těles, bych Vám zaslal, pokud bych věděl, že Vám ji nezdělil p. Bernoulli.“ (A III, 7 248). V dopise Leibnizovi ze stejných dnů se pak Bernoulli skutečně zmiňuje o pochybnostech nad L'Hospitalovým řešením a táže se, zdali se s ním Leibniz může spokojit. Prozrazuje také, že ho markýz žádal o převod úlohy (p. 184) do čistě matematických forem, čímž „mu vstup do úlohy mnohem více vyjasnil“ (tamt., 254). Leibnizova sdělení L'Hospitalovi ohledně Bernoulliho pochybností (tamt., 257).

Leibnizův úvodní článek sice ve zkrácené podobě[202] obsahuje jeho vlastní řešení, ale příliš je nerozvádí; věnován je především úvodu do řešení ostatních, historickému i metodologickému. Od užitečnosti veřejných výzev geometrům,[203] které jednak stály za pokroky infinitesimální metody, jednak ukázaly jejich nadřazenost dosavadním metodám, přes stručné shrnutí úspěchů, jichž dosáhli geometři s jeho metodou obeznámení po připomenutí oné osudné věštby,[204] že právě a jedině tito byli na výši otázky brachystochrony, jak se ostatně ukázalo. Nic to ovšem neznamená, že by Leibniz – stejně jako Jakob Bernoulli a svým způsobem i markýz, avšak překvapivě na rozdíl Johanna – nerozpletl uzel a neodkryl cestu vnitřního určení přirozenosti brachystochrony. Totiž jestliže má křivka jako taková představovat nějakou krajní vlastnost, krajní *determinaci*; pak ovšem každá její část až do nekonečna musí vyjadřovat a být určena právě takovou vlastností, a tedy každý infinitesimální oblouk brachystochrony musí sám o sobě být také brachystochronou. Ostatně tento princip Leibnizovi nemohl být nijak cizí: determinace je tím dokonalejší, čím menším počtem jednoduchých pravidel čím větší řídí bohatství svých projevů; a dokonalá je, když jediné pravidlo platí pro celé jejich veškerenstvo; avšak právě proto musí takový jediný zákon platit i zvláště pro *všechny* jeho části, jinak by bylo určujících pravidel zapotřebí víc, a tedy se z univerzální úrovně přenášet na všechny úrovně místní. Řeč samozřejmě není o ničem jiném, než o morálním nároku rozumu vůbec, vnitřním zákonu svobody Nejvyššího geometra, principu dokonalosti stvoření, totiž o *univerzální harmonii*, jíž brachystochrona – po způsobu vyjevení sebe sama – nemůže být než nejvýznačnějším příkladem.

Řešení Jakoba Bernoulliho,[205] který, jak řečeno, nahlédl zmíněný princip určení křivky, se začíná přesným vystižením výsostné povahy úlohy a jejího poměru k metodám *de maximis et minimis*, „kde z nekonečného množství neznámých křivek se požaduje jedna, jíž připadá nějaké maximum či minimum“. Jakobova metoda je složitá a zdlouhavá, ale tím podivuhodnější a objevnější, že neměl v držení ani pojem družiny křivek či parametru, ani algoritmická rozšíření počtu vhodná pro tento typ úloh. Jak už bylo zmíněno, do řešení se pouští na výzvu Leibnize a v žádném případě svého bratra, přičemž variace křivky samé



Obr xv

202 Připomeňme, že je jako první poslal Bernoullimu dopisem (p. 59), aniž by si povšiml, že povaha výsledné křivky se nazývá cykloida. V *Communicatio* vlastně jen dotahuje své první řešení, ve kterém ukázal, že křivka spadá v jedno s kvadratrix, kterou použil v *De vera proportione circuli* (MS V, 118-122) dávno, roku 1682, při nalezení kvadratury kruhu (Parmentier 1995, 347-350).

203 „Často se stává, že učenci zběhlí v právě užívané analýze, nesnaží se o cokoli dalšího, příliš důvěřují tomu, v čem byli vyučeni a nakonec v bezpečí běžné nauky (*vulgari doctrinae*) usínají, a to k velké škodě na vědění (*scientiae*); neboť ti, kdo jsou přesvědčeni, že jim žádná otázka neodolá, kdyby se jí náležitě věnovali, nemají již schopnost hledat nic nového a vše obětují stejně tak své lenosti, jako marnivosti.“ (MS V, 331).

204 Viz p. 66.

205 *Solutio problematum fraternorum* (AE 1697, 211-217; JABO II, 768-779). Srv. p. 57, 62.

napodobuje úvahou nějaké druhé libovolně zvolené křivky a základní princip nalezení *oligochrony* pak představuje v předběžném lemmatu, které Jakobovi umožňuje namísto proměn křivky uvažovat změny jejích nekonečně malých prvků:

> „Jestliže křivka *ACEDB* /Obr xv/ je taková, jakou požadujeme, tj. kterou padající hmotné těleso dospěje z bodu *A* do bodu *B* v nejkratším čase, a na křivce vezmeme dva libovolně blízké body *C*, *D*; pak tvrdím, že část křivky *CED* je ze všech ostatních křivek ohraničených body *C* a *D* tou, kterou těleso po vypuštění v *A* též proběhne v nejkratším čase.“ (AE 1697, 212)

Zde se nadále spokojme se stručným nástinem Jakobova dosti obsáhlého řešení.[206] Jestliže *CLD* je prvkem kruhového oblouku nekonečně blízkého prvku *CDG* hledané křivky a *E* je středem *CF*, pak na spojnici *EI* určíme bod *G* takový, že za uvedených podmínek čas proběhnutý podél *CG* přičtený k času proběhnutém podle *GD* bude nejmenší. Za tímto účelem pak geometricky znázorňuje druhý diferenciál *GL* abscis dvou bodů ležících na těchto dvou rozdílných křivkách a provádí diferenciaci z křivky na křivku[207] dodávaje mimochodem, což nám již zvolna otevírá dveře k další kapitole:

> „Zde předkládáme k úvaze věhlasnému p. Nieuwentiitovi užití diferencio-diferenciálů (které neprávem vyhostil) v tom, že jsme byli nuceni vzít částečku /diferenciál/ *GL* samotné *EG*, která byla dosud nekonečně krát menší než *GI*. Jinak si ostatně nedovedu představit, jakým způsobem bychom otevřeli cestu k řešení úlohy. Neboť *EG*, *GI* jsou prvky abscis *AH*; právě tak, jako jsou *CG*, *GD* prvky křivky samé a *HC*, *HE* jejích ordinát a prvky těchto pak *CE*, *EF* [...]“ (AE 1697, 213)

Je zvláštní, že na rozdíl od bratra, sám objevitel otázky, Johann Bernoulli, její nejvnitřnější logickou stavbu neodhalil; a je to jen dalším dokladem leibnizovské charakteristické myšlenky nekonečně jednoduché přirozenosti oděné v nekonečně složitých a rozmanitých symbolických projevech. Důsledkem té samé myšlenky s přihlédnutím k univerzální harmonii a z ní plynoucího zákona kontinuity ovšem také je, že tyto projevy spolu *symbolizují*, podobají se a vyjadřují, a tudíž představují základ *analogie* na všech a napříč všemi stupni přírody. Právě Johannovo řešení otázky brachystochrony,[208] nakolik znám, je snad nejúžasnějším dokladem objevitelské hloubky Leibnizovy nekonečné geometrické přírody, která vždy koná nikoli po nejkratších, nýbrž po *nejdeterminovanějších* drahách.[209]

---

206 S přihlédnutí k Jakobovu článku především podle Peiffer (1989, 66-67).

207 Viz tamt., 67.

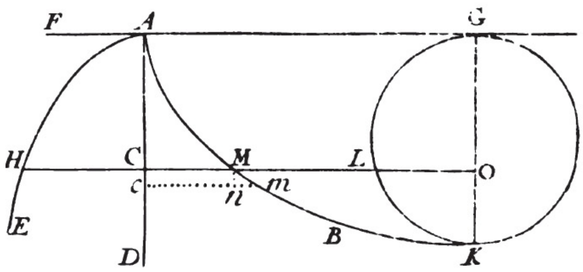
208 Markýzovo původní ovšem též, nejen kvůli analogii a vyjádření determinace pohybu v podobě úvahy těžiště, ale i tím, že souhrou hluboce chybných předpokladů a projevů lze vyzískat pravdivé určení; tento důsledek má nicméně blíže k povaze harmonie z hlediska teodicey. Srv. 174.

209 Aneb, jak se v tomto duchu později, roku 1744, vyjádří Euler: „Poněvadž stavba světa je dokonalá a náleží nekonečně moudrému Stvořiteli, ve světě se nepřihází nic, co by nepředstavovalo nějakou vlastnost maxima nebo minima.“ (Parmentier 1995, 146).

Johann Bernoulli tak, jako Leibniz, začíná svůj článek chválou ducha velikých lidí, jako byli Descartes a Fermat, kteří se kdysi zasazovali *pro focis et aris* o své metody, aby následně vyplísnil lidi zcela odlišné duchovní podstaty, totiž jejich přívržence (*sectatores*), kteří v jejich vědění „váznou jak ve vodě“. Zmiňuje dále Fermatovy, Huygensovy a Leibnizovy práce[210] stran šíření a lomu světla a konečně pokládá základ své analogie, takřka fantastickou fyzikální úvahu látky rozdělené v nekonečno nekonečně tenkých vrstev o *spojité*, dle nějakého poměru se měnící hustotě; a světelného paprsku coby míčku (*globulum*), jehož rychlost se proměňuje právě na základě stupňů hustoty látky tak, že od bodu k bodu dospěje v nejkratším čase.

> „Také je zřejmé, že pokud jsou siny lomu v jednotlivých bodech nepřímo úměrné hustotám prostředí nebo přímo úměrné rychlostem míčku, křivka bude mít tu vlastnost, že siny jejích náklonů k vertikální linii budou stát vždy ve stejném poměru jako rychlosti. Z těchto předpokladů okamžitě vysvítá, že právě brachystochrona bude tou křivkou, již by utvořil paprsek procházející prostředím, jehož hustoty jsou úměrné rychlostem padajícího tělesa. Ať totiž uvažujeme tak, že zrychlení závisí na větším či menším odporu prostředí, anebo od prostředí odhlédneme a představíme si, že zrychlení vychází z jiné příčiny, nicméně řídí se podle stejného zákona, jako u tíže; v obou případech bude křivka proběhnuta v nejkratším čase – a co nám pak brání dosadit jednu za druhou?“ (JBO I, 190)

Obdobně jako markýz de l'Hospital, usiluje Johann Bernoulli o *obecné* řešení nezávisle na daném zákonu pádu těles, pro všechny *hypotézy.* V podmínkách analogie se světelným paprskem se pak tento požadavek přirozeně odráží v možnosti různých zákonů změny hustoty prostředí.



Obr xvi

„Budiž tedy medium *FGD* /Obr xvi/ ohraničené horizontální linií *FG* a v něm světelný bod (*punctum radians*) *A*, vertikální osa *AD* dané křivky *AHE*, jejíž ordináty *HC* určují hustoty prostředí ve výškách *AC* neboli rychlosti paprsku či míčku v bodech *M*; zakřivený paprsek, který hledáme, budiž *AMB*. Označíme *AC* jako *x*; *CH* jako *t*; *CM* jako *y*; diferenciál *Cc* jako *dx*; dif. *nm* jako *dy*; dif. *Nm* jako *dz*; a dle libosti vezmeme nějakou konstantní úsečku *a*.[211] Uvažujme *Mm*

210 Fermat svůj slavný princip časově nejkratších drah šíření světla a důkaz zákonu jeho lomu podává ve dvou krátkých pracích zaslaných De la Chambreovi roku 1662 (FO I, 170-179). Jak známo, vysloven byl na základě analogie s míčkem již v Descartově *Dioptrice* (AT VI, 93-105) a za účelem přesného broušení čoček rozpracován v *Geometrii* (tamt., 424-440) do teorie Descartových oválů. Huygens uvažuje o zakřivení paprsků v *Traité de la lumière*, III : „Z toho, co bylo shora vyloženo, se ukazuje, že postup či šíření světelné vlny je právě to, co nazývám paprskem. Avšak tyto paprsky, zatímco jsou v homogenních prostředích (*diaphane*) přímé, v prostředí o nestejné prostupnosti musejí být křivkami; neboť nutně následují čáru, která od předmětu až k oku protíná všechny vlny pod pravým úhlem […]“ (HOC XIX, 493). Zmiňovanou prací Leibnizovou je slavný a Leibnizem často připomínaný *Unicum opticae, catoptricae et dioptricae principium* (AE 1682, 185-191), kde Leibniz brání účelové příčiny ve fyzice, že optické zákony dokazuje právě ze zásady úspornosti přírody (*que la nature agit toujours par les voies les plus faciles*).

211 Konstanta *a* se bere kvůli zachování antického geometrického zákona homogenity, jehož požadavky byly sice poněkud otupeny Descartovou algebraizací geometrie (za pomoci jednotkové úsečky, v. 4), nicméně geometři konce 17. století do svých *výpočtů* stále konstantu *a* zahrnovali, zřejmě nejen ze zvyku; stále totiž šlo o výpočty nad geometrickými proměnnými veličinami, totiž *křivkami*. Této praxi nevymyká ani *Analýza nekonečně malých*.

za úplný sinus,[212] *mn* za sinus úhlu lomu neboli náklonu křivky vzhledem k vertikále; pročež z toho, co jsme řekli, *mn* se má k *HC* v nějakém konstantním poměru, tj.

$$dy : t = dz : a;$$

což dává povstat rovnici

$$a\,dy = t\,dz, \text{ čili } aa\,dy^2 = tt\,dz^2 = tt\,dy^2 + tt\,dy^2,$$

která po úpravě dává diferenciální rovnici

$$dy = \frac{t\,dx}{\sqrt{aa - tt}}$$

hledané křivky *AMB*. A tím jsem jedním dílem vyřešil dvě význačné otázky, jednu optickou a druhou mechanickou, o něž jsem nad jiné usiloval; a ukázal jsem, že byť vycházejí z naprosto odlišných částí matematiky, přesto jsou jedné přirozenosti.“ (JBO I, 190-191)

Dalším tahem Johann Bernoulli uplatňuje své obecné řešení na zvláštní případ, „obvyklou hypotézu“ tohoto světa, Galileův zákon a ukazuje, že brachystochrona je za těchto podmínek běžnou cykloidou a z výše uvedené rovnice dovozuje její konstrukci; přičemž se v posledku nemůže ubránit údivu nad dokonalostí přírody, která se sama stává známkou a pečetí pravdy:

„Dříve než skončím, nemohu se ubránit a opět musím vyjádřit obdiv, který pociťuji nad onou neočekávávanou shodou Huygensovy tautochrony a naší brachystochrony. Co tu krom jiného pokládám za význačné (*notabile*), je, že tato shoda nastává jedině pod podmínkou Galileovy hypotézy tak, že odtud dokonce lze usuzovat na její souhlas přírodou; neboť příroda vždy koná tím nejjednodušším způsobem, přičemž zde užívá jediné křivky pro obstarání dvou různých činností (*officia*), zatímco při jakékoli jiné hypotéze by k tomuto dílu potřebovala křivky dvě, totiž jednu pro stejně trvající oscilace a druhou pro nejrychlejší spád. Takto kdyby například rychlosti padajících těles se k výškám měly nikoli v subduplikovaném, nýbrž subtriplikovaném[213] poměru, brachystochrona by byla algebraická, avšak tautochrona transcendentní; kdyby pak se rychlosti měly jako samotné výšky, algebraické by byly obě dvě, totiž první by byla kruhem, druhá přímou čarou.“ (tamt., 192)

Markýzova holá konstrukce křivky, bez důkazu, analýzy, metody, po boku právě vztyčených monumentů věru připomíná dům chudého příbuzného. Správně sice vyslovuje, že kdyby výšky byly přímo úměrné rychlostem, představovala by brachystochrona kruhový oblouk, „odkud je patrné, že pravdivá Galileova domněnka vychází za tohoto předpokladu zcela odlišně“[214], ale pak přichází už jen diferenciální rovnice křivky a nic víc. Víme však, že markýz svoji metodu potlačil dočasně a Leibnizovi výsledek zaslal z nedostatku času a „aby měl volnou chvíli uvést ji k světu (*de la mettre dans son jour*)“.[215] Mezi markýzem a Johannem již na to sice řeč nepřišla, nicméně L'Hospital své

212 Viz v. 69.

213 Předložka „*sub*“ značí, že číslo označující počet opakování poměrů není celé, nýbrž lomené, zde „podtrojnásobný“ ve smyslu $y = x^{1/3}$, čili na způsob, že by se rychlosti pádu těles k výškám pádu neměly jako čtverce, nýbrž jako krychle.

214 AE (1697, 218).

215 N° 73, 18. března (JBB I, 346).

plné a tentokrát *čistě geometrické* řešení objevil a zanedlouho, 20. dubna 1697, podal. Poprvé se o něm dozvídáme na stránkách dopisů Varignona a Bernoulliho a jeho příběh lze následně vystopovat ze zápisů jednání pařížské Akademie.[216]

Stručností L'Hospitalova řešení, svěřuje se Bernoullimu, byl poněkud zaskočen i Pierre Varignon, a to tím spíše, že markýz de L'Hospital, „jediný, kdo otázku v této zemi vyřešil“, mu spolu s ním později k úloze podal i geometrický klíč: „*najít křivku, u které siny úhlů mezi tečnami a vertikálami se k sobě mají jako dosažené rychlosti a body dotyku*“.[217] Varignon ve snaze o řešení dospěl do stejného bodu, ve kterém díky Bernoulliho geometrizaci úlohy L'Hospital začínal.[218] K tomu mu Johann Bernoulli podotýká, že je to sice správně, ale:

> „Jak nalézt tento integrál? V tom je ten problém. Říkáte, že jste se dlouho po té dozvěděl od p. markýze de l'Hospitala, že geometrická podstata (*le geometrique*) této úlohy spočívá v *nalezení křivky, u které siny úhlů mezi tečnami a vertikálami se k sobě mají jako dosažené rychlosti k bodům dotyku*: nedivím se, že jste se to od něj dozvěděl až dlouho po té, protože to spíše sám vůbec nevěděl; ale divím se, že Vám neřekl, že jsem to byl já, kdo mu to sdělil, neboť právě to je moje řešení, jak uvidíte v lipských *Aktech* z měsíce května [...]“ (JBB II, 116)

Ačkoli si Bernoulli, zjevně neprávem, nárokuje i markýzovo řešení založené na řetězové křivce;[219] na tomto jeho úsudku může být leccos pravdy, neboť ukazuje se, že 16. března markýz předstupuje před pařížskou Akademii a představuje Bernoulliho výzvu; zároveň oznamuje, že otázku vyřešil a do rukou sekretáře vkládá zapečetěnou obálku, jež bude otevřena po uplynutí velikonoční lhůty. Což tedy nastává 13. dubna a L'Hospital vyhlašuje, že hledanou křivkou je cykloida; a to bez důkazu, jenž je Akademii přislíben k příštímu setkání.[220] O týden později konečně markýz de l'Hospital seznamuje akademiky se svým důkazem, ve kterém však po řetězové křivce není ani památky a který naopak stojí na matematické vlastnosti sinů, jak byla uvedena výše.[221]

---

216 Objevil je Pierre Costabel, jenž dovozuje nutné okolnosti jeho vzniku v komentářích k dopisům N° 23, 24, 15. května 1697 a 27. července 1697 (JBB II, 109-121), totiž, že Varignon musel získat L'Hospitalovo řešení od něj osobně, neboť z další diskuze úlohy jasně vyplývá, že květnové vydání *Acta Eruditorom* vidět nemohl. L'Hospitalova analýza brachystochrony byla zveřejněna a představena až roku 1989 Jeanne Peifferovou tamtéž, v Annexe I k JBB (II, 329-335). Odtud pochopitelně vycházím při pojednání následujících událostí kolem druhého řešení markýze de l'Hospitala.

217 N° 23 (tamt., 110).

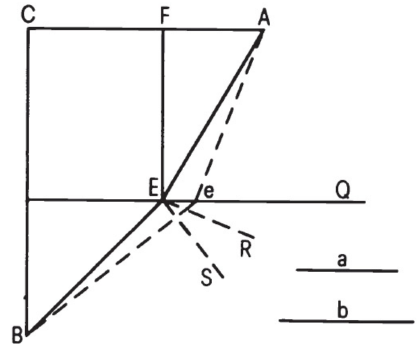
218 Leibniz v jednom z dopisů Bernoullimu, které předcházely vydání květnových *Akt*, toto komentoval: „Vidím, že jsi p. markýzovi L'Hospitalovi poskytl značné světlo, když jsi mu uložil hledat, aby $\int \overline{y^n}\, ds$ bylo nejmenším; a pokud jsi mu, jak říkáš, zapálil ještě jasnější pochodeň, divím se již méně, že uspěl.“ (A III, 7, 263). Srv. p. 201.

219 S tím, že mu je sdělil v Oucques. Nesvědčí pro to ani jedna známka z výše probírané výměny ohledně této analogie pro případ, že by Johann markýzovi tyto principy vskutku v Oucques sdělil; ani nic takového neobsahují stránky jeho *Lectiones*. Na rozdíl od Bernoulliho vlastní analogie s šířením paprsku světla, viz Lekce XLVI, *De curvitate radii solaris per atmospheram transeuntis* z *Lectiones de methodo integralium* (JBO III, 516-519).

220 L'Hospitalovo představené řešení zde odpovídá tomu, které vychází v květnových *Aktech*. Jak víme (p. 200), mezi 5. a 30. březnem probíhá diskuze původní analogické metody s řetězovou křivkou, a tedy se zřejmě L'Hospital neodvažoval zveřejnit svoji metodu šťastlivce.

221 L'Hospitalův důkaz je dosti rozsáhlý, proto jej zde uvedeme jen v hlavních obrysech podle originálního znění (JBB II, 239-335) a analýzy Jeanne Peiffer (1989, 77-80).

L'Hospitalovo řešení, i kdyby se k němu inspiroval Bernoulliho vlastností z analogie šíření světla a bylo tedy do jisté míry geometrickou syntézou, je mimořádné jednoduchostí a hloubkou vhledu, do níž vstupují *avant la lettre* všechna podstatná určení řešení předešlých. Markýz se zde plně vrací do stop svých prvotních intuicí; od počátku vychází z Leibnizova „velkého principu měření křivých čar“,[222] rovnomocnosti křivky a mnohoúhelníku a v prvním lemmatu vyslovuje v geometrické podobě nejzákladnější podmínku minima:



Obr xvii

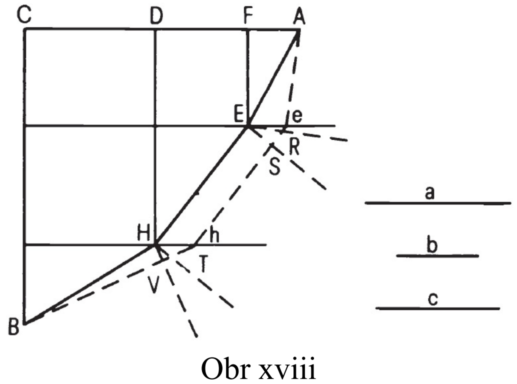
„V rovině budiž dány přímka (*droite indéfinie*) *Ee* a dva body *A*, *B* /Obr xvii/ se svojí polohou; je třeba najít polohu dvou úseček *AE*, *EB* spojených v bodě *E* přímky *Ee* tak, že těleso probíhající čáru *AE* o nějaké dané rychlosti *a* a čáru *EB* o nějaké dané rychlosti *b* dospěje z *A* do *B* v kratším čase, než při libovolné jiné poloze čar *AE*, *EB*. Ježto dráha (*espace*) dělená rychlostí vyjadřuje čas, plyne odtud, že $\frac{AE}{a}+\frac{EB}{b}$ vyjadřuje čas, jež těleso potřebuje k cestě z *A* do *B*. Avšak tento čas musí být nejkratším, z principů položených v 3. odd. knihy nekonečně malých[223] pokud vezmeme bod *e* nekonečně blízko bodu *E*, čas *AE*, *EB* se musí rovnat času *Ae*, *eB*. Tedy budeme mít

$$\frac{AE}{a}+\frac{EB}{b}=\frac{Ae}{a}+\frac{eB}{b}, \text{ a tudíž } \frac{AE-Ae}{a}+\frac{EB-eB}{b}=0.$$

A tedy (pokud na *Ae*, *eB* povedeme kolmice *ER*, *ES*) $\frac{eR}{a}-\frac{eS}{b}=0$. Odkud je zřejmé, že když povedeme kolmice *EF*, *BC* na *Ee* a vezmeme malou úsečku *Ee* za úplný sinus, pak poloha úseček *AE*, *EB* musí být taková, že sinus *eR* úhlu *REe* nebo *FEA* se k sinu *eS* úhlu *SEe* nebo *CBE* bude mít tak, jako rychlost *a* k rychlosti *b*.“ (JBB II, 331-332)

Další lemma na základě dvojího užití předešlého lemmatu dovoluje určit vrcholy mnohoúhelníku o třech stranách. L'Hospital ukazuje, že když *c* bude rychlost, s níž těleso proběhne *HB* (Obr xviii), pak

$$\frac{\sin FEA}{a}=\frac{\sin DHE}{b} \text{ a } \frac{DHE}{b}=\frac{\sin CBH}{c}.$$



Obr xviii

Zřejmě ježto z principu měření čar, tedy ze zákona kontinuity, bude lemma platit vždy, pro libovolné množství vrcholů a pro libovolně malou, a tedy nekonečně malou velikost stran; pak vlastně toto lemma výslovně a analyticky postihuje nejvnitřnější určení povahy křivky, jak je zachytili Leibniz a Jakob Bernoulli a jak je Johannovi poskytla sama analogická příroda, tedy že obecná minimální vlastnost křivky se musí přenést do všech jejích, třeba nekonečně malých částí. Což L'Hospital přímo vyslovuje v následném koroláru lemmatu 2.

222 Druhého postulátu *Analýzy nekonečně malých*, § 3.

223 § 46: „[...] diferenciál veličiny, která něčeho vyjadřuje nejvíce, nebo nejméně, se musí rovnat nule, nebo nekonečnu (s. 142).“ Srv. v. 66.

Vlastnost řečených sinů u hledané křivky je zde ovšem dovozena coby čistě geometrické určení – z diferenciálního výrazu krajní hodnoty – a s optikou nemá co do teorie žádnou spojitost. Ve své podstatě je řešení vyneseno, a markýz de l'Hospital nyní přistupuje pouze ke konstrukci křivky a důkazu, že cykloida splňuje dovozenou vlastnost sinů tečných úhlů s vertikálami, a to opět na základě úvahy cykloidy coby mnohoúhelníků a známé vlastnosti jejích tečen.[224]

S možnou výhradou, opět, k poněkud nepřesnému uvádění zdrojů svých objevů, už jen na základě této význačné cesty jeho geometrického ducha je nad slunce jasnější, že Guillaume de l'Hospital v žádném případě nebyl druhořadým matematikem. Snad jedině jeho láska k čisté geometrii a s ní do jisté míry spojená nechuť k fyzice[225] mu v této objevitelské době zabránily, aby se i pro dějiny stal geometrem skutečně prvořadým. A snad ani to není pravda. O jeho posledním výsledku, důkazu tvaru tělesa o nejmenším odporu, totiž na stránkách dopisů s jeho učitelem a služebníkem Johannem Bernoullim nepadá ani slovo; a zřejmě tedy markýz de l'Hospital svojí pronikavostí transcendentní analýzu geometrie i přírody veskrze obsáhl. Jeho skrytý portrét tedy lze tak, jako portrét akademický, dotáhnout vcelku nicotnými slovy, že totiž smrt Guillauma-Françoise-Antoina, markýze de l'Hospitala, přišla v ten nejblbější možný okamžik.

---

224 Rovnoběžnosti tečny a struny jejího tvořícího kruhu, viz například Descartovu konstrukci tečny k cykloidě (v. 47, Obr. XII).

225 A zajisté také, jak se ukázalo z jeho dopisů, jistá nestálost plynoucí z množství jeho světských povinností, která ovšem s neochotou promýšlet matematiku *in universum* patrně souvisí.

BOJE O KALKUL.

Bernard de Nieuwentijt.[226]

Ohromující úspěchy, kterých během pouhého desetiletí nová metoda rukou nemnoha zasvěcených dosáhla na poli geometrie a fyziky spolu s její temnou a drtivé většině geometrů nesrozumitelnou povahou, nutně musely vyvolávat otázky nejen po příčinách tak zarážející plodnosti, ale především ohledně přípustnosti a oprávněnosti jejích pojmů a operací. Až na opodstatněnou kritiku, ježto z nezvyku a nepochopení plyne odpor a odmítání, nutně též následovaly první spory o kalkul a zejména jeho založení. Z našeho pohledu lze říci: a to tím spíše, že tajemné znaménko *d* neslo v sobě radikální proměnu náhledu na základní matematické, filosofické i duchovní pojmy, jež se usazovaly po tisíciletí. Vždyť co může být více než nekonečno? A může být vůbec větší a šťastnější opovážlivost, nežli spoutat nekonečno do pravidel slepého počtu; a nadto se z toho nikomu nezodpovídat?

Doposud jsme na význačných případech z oblasti *mathematicae mixtae* poukazovali na objevitelskou moc počtu nekonečna: na smělé manévry jeho tvůrců na pomezí ideálního řádu čisté geometrie a mechanických zákonů konkrétní, dokonale uspořádané přírody i vzájemné pronikání a téměř dialektické obohacování obou sfér. Ukázalo se, že právě předpoklad univerzální harmonie a důvěra v ni umožňovaly na jedné straně získávat od přírody konkrétní odpovědi a ty pak pro všechny možné případy pořádat a zobecňovat díky pravidlům matematických symbolismů; na straně druhé nacházet za pomoci fyzikálních definic význačnější a plodnější cesty ke známým geometrickým skutečnostem, případně objevovat skutečnosti a pojmy nové a odhalovat jejich vnitřní řád. Konečně oba tyto přístupy jsou jen důsledkem možnosti analogických způsobů vyjádření zákonitých vztahů a určení veškeré přirozenosti[227] na základě harmonie. U příležitosti Leibnizových výměn s Bernardem de Nieuwentijtem ohledně povahy diferenciálů se nyní pokusíme nastoupit opačnou cestu, tj. k základům k počtu, jeho ukotvení v Leibnizově filosofickém universu, uplatnitelnosti v přírodě a jeho možnosti vůbec díky charakteristice dvojznačných symbolů. V říši,

226 Bernard de Nieuwentijt (1654-1718), nizozemský lékař a matematik, následovník Descartův. Přání rodičů, kteří jej chtěli poslat na dráhu duchovního, nedostál a namísto toho si vybral studia matematiky a přírodní vědy. Do dějin se zapsal především rozpravou či sporem s Leibnizem o základech infinitesimální analýzy, o kterém právě bude řeč. Své více méně empirické náhledy na nové počty, z nichž nutně vyplývalo nepochopení jejich pojmů, podal v knize *Analysis infinitorum* (1695). Ve své době poměrně významná byla jeho objemná holandsky psaná práce dokazující přítomnost Boží z účelnosti přírody *Het regt gebruik der wereltbeschouwingen ter overtuiginge van ongodisten en ongelovigen, aangetoont door* (1714), později do francouzštiny přeloženo jako *L'existence de Dieu démontrée par les merveilles de la nature* (1725), kde osvědčil podobnou empirickou filosofii, neboť, jak se obával, příliš mnoho rozumu vede k bezbožnosti a spinozismu.

227 Zde lze, při zvýraznění slov, která toto vystihují, připomenout Johannovu řečnickou otázku: „Ať totiž uvažujeme tak, že zrychlení závisí na větším či menším odporu prostředí, anebo od prostředí odhlédneme a představíme si, že zrychlení vychází z jiné příčiny, nicméně *řídí se podle stejného zákona*, jako u tíže; v obou případech bude křivka proběhnuta v nejkratším čase – a co nám pak brání dosadit jednu za druhou?“

jak by řekl Leibniz,[228] mezi morální dokonalostí přírody a všeobecným řádem věčných pravd Božího rozumu však pochopitelně zůstaneme; neboť dál jít a zdůvodňovat nelze a právě odtud povstává morální právo rozumu na nekonečno v jeho matematickém určení.

Po pravdě je třeba říci, že Leibniz svým současníkům vstup do základů počtu v ničem příliš neusnadnil; byť k tomu měl, jak u něj bylo obvyklé, jistý dostatečný důvod. Co si však mohl pomyslet matematik vychovaný ve výpočetních konstrukcích karteziánské geometrie ani nemluvě o názorných konstrukcích geometrie řecké? Jak je možné, aby nějaká veličina byla zároveň rovna něčemu a ničemu, chvíli veličinou byla a pak, v dalším řádku již nebyla, aby *vymizela*?[229] Veličina je přeci vždy veličinou a chyba vždy chybou, ať jsou jakkoli malé. Připustíme-li, že lze uvažovat nějakou veličinu „neomezeně malou“, neboť každá přeci může být dělena potenciálně až do nekonečna, co si pak počít s neomezeně či nekonečně malou částí této poslední? Pohybujeme se ještě vůbec na pevné půdě dokonale přesné a přede všemi obhajitelné matematiky, anebo jde o jakousi „mystickou kabalu“? Otázky jsou to samozřejmě stejně tak oprávněné, jako palčivé, a tím znepokojivější, oč větší úspěchy takto podivně založená metoda slavila. Zřetelně vyvstávají coby hlavní pasti a kameny úrazu, které budou matematiky strašit ještě následující dvě stolezí; a právě ony zapříčiní hluboké změny Leibnizova a Newtonova počtu co do výrazu, základu i uchopení, neboť víme, že v matematice tyto věci oddělit nelze.

Na rozdíl od otevřeně nepřátelského tónu anglických matematiků v době, kdy naopak kalkul žádali takřka všichni a již jen pro sebe, byly námitky a otázky Bernarda de Nieuwentijta vedeny v uctivém (*humanissime*) a vstřícném duchu. Oproti útokům karteziánů druhu abbé Catelana pak co možná na základě znalosti věci, a nebylo tedy, proč by se Leibniz měl „zpronevěřit svým povinnostem vůči *République des Lettres*“[230] a proč by z jeho strany měly zůstat oslyšeny. Jistý řád a porozumění se Nieuwentijt pokusil ve shluku tehdejších více či méně symbolických a infinitesimálních metod nalézt již svou první, krátkou prací[231] o nových matematikách, kde jednak vynáší ohromné pokroky, jichž se za poslední dobu dosáhlo díky Barrowovi, Newtonovi, Leibnizovi a Bernoulliům; jednak volá po přesnějším zdůvodnění a důkazu těchto metod a sám

228 Lze samozřejmě namítnout, že matematiku, či infinitesimální počet zvláště, na přírodu uplatňovali a mohli uplatňovat i jiní než Leibniz, a není proto přiměřené si k výkladu vypůjčovat pojmy odvozené z jeho systému světa. Nicméně z podmínky *harmonie* přírody či dokonalosti Stvoření vycházeli tak či onak všichni otcové matematické přírodovědy (snad s výjimkou Pascala, pro nějž byla alespoň možná) a i ti, kteří se vydávali zcela jinou cestou poznání, jako třeba Jungius, museli zásadu úspornosti přírody přijmout aspoň v podobě tzv. Ockhamovy břitvy, neboť bez ní není možnost vědy. Ať už zavěšeno přímo v pravdách Božího rozumu, nebo jen v jasném a rozlišeném nahlédnutí duše, matematické, harmonické universum bylo nutnou – a ostatně vzhledem k povaze jeho Stvořitele více méně přirozeně a samozřejmě přijímanou – podmínkou matematizace přírody. A Leibniz byl *bel et bien* tím, kdo v promýšlení harmonie dospěl nejhlouběji, a tudíž v racionalizaci světa nejdále – jak známo, až ke *zdůvodnění* Boží spravedlnosti a uchopení nekonečna.

229 *Evanescere*, *évanouir* – doslova „vypařit se“.

230 MS (V, 321).

231 *Considerationes circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae Principia, & calculi differentialis usum in resolvendis problematibus Geometricis* (1694).

nabízí vlastní možnost založení.[232] Obdobné námitky vyslovuje Nieuwentijt i ve své druhé, obsáhlejší knize *Analysis infinitorum* z roku 1695, přičemž také sám podniká pokus o založení nekonečně malého. Povahu Nieuwentijtových námitek shrnuje sám Leibniz v dopise Johannovi Bernoullimu těmito slovy:

> „Málem jsem zapomněl říci, že Bernard Nieuwentijt, holanský matematik, sepsal dvě knihy proti našemu kalkulu, které mi zaslal. Protože však se o nás zmiňuje uctivě (*honorificam nostri mentionem faciat*), odpovím mu v *Aktech* a oplatím mu stejně tak. Domnívá se, že *dx* něco je, avšak že *dxdx* stejně tak, jako *ddx* není nic, a nedokáže pochopit opakované (*iteratas*) diferenciace. Místo *dx*, *dy* používá písmena *a*, *e* atd., a tím se pokouší převést naše [diferenciály] prvního stupně jen za pomoci jiných znaků na svou věc. Ale užitek, jaký plyne z našich znaků, se krásně ukazuje už jen v tom, co jsme po několik měsíců spolu probírali v dopisech. Domnívá se také, že náš počet se nevztahuje na $z=y^x$, kde x, y, z jsou proměnné (*indeterminatae*). Tento, jak věří, nedostatek chce zaplnit pozoruhodnou rovnicí, kterou bych zapsal jako $y^{x+dx}+x\times y^{x+dx-1}-y^x=dz$; avšak z této rovnice nemůže sestrojit nic, pokud by nepoužil zákona trancendentální homogenity.“ (A III, 6, 430-431)

Hlavní body Nieuwentijtovy kritiky Leibniz vskutku vystihl přesně. Jsou jimi možnost nakládat s infinitesimálními veličinami, jako by byly nulou; odmítnutí diferenciálů vyšších řádů; a konečně použití počtu na zmíněné exponenciální funkce. Jaké jsou tedy Nieuwentijtovy důvody? Svoji *Analysis infinitorum* začíná definicemi základních pojmů na způsob Eukleidův:

> „1. Každou danou veličinou nazývám takovou, která je určitelná, jejíž velikost nepřesahuje hranice lidské představivosti.
>
> 2. Odtud je už jen ze samotného názvu jasné, že co se rozumí veličinou menší než jakoukoli danou; nebo větší než jakoukoli danou.
>
> 3. Pro stručnost pak můžeme veličinou menší jakékoli dané nazývat *infinitesimální*[233]; veličinu větší než jakoukoli danou pak *nekonečnou*.“ (Nieuwentijt 1695, 1)

Z axiomů a lemmat, které přicházejí vzápětí, plyne základní rozvrstvení Nieuwentijtovy teorie veličin. Axiomy v zásadě kopírují běžné archimédovské vymezení veličin: 1. jestliže se cokoli násobí libovolně krát a přesto se nemůže rovnat nějaké dané, jakkoli malé veličině, není veličinou a „ve smyslu geometrickém je pouhým *nic*“; 2. každou veličinu lze dělit na libovolný počet částí menších než nějaká daná veličina. Lemmata rozlišují říši veličin na dané, nekonečně malé a konečné a „ poněvadž každé číslo je veličinou, pak totéž platí i pro čísla“.[234] Následují pravidla

232 Výmluvné je i motto celého spisu převzaté z úvodního dopisu Archimedových *De spiralibus*: „Vždyť kolik geometrických myšlenek, jež se na první pohled zdají málo přístupné (*tractabiles*), postupem času nabude dokonalosti“ (Nieuwentijt 1694, 2), které vskutku svědčí spíše o starosti o lepší rozvoj nové geometrie, nežli jejím bezhlavém odmítání.

233 *Infinitesimam* – odvozeno od tvaru latinských řadových číslovek užívaných pro vyjádření podílu, kolik-áté části tedy ve smyslu $1/\infty$.

234 Lemma 2 (Nieuwentijt 1695, 2).

utvoření infinitesimálních čísel dělením dané veličiny veličinou větší nejž jakoukoli danou. Hlavním pro Nieuwentijtovo pojetí nekonečně malého je však především 10. lemma:

> „Jestliže část menší než jakoukoli danou $\frac{b}{m}$ vynásobíme sebou samou nebo jinou menší než danou $\frac{c}{m}$, součin $\frac{bb}{mm}$ nebo $\frac{bc}{mm}$ se nebude rovnat ničemu, čili nebude veličinou. *Důkaz.* Vynásobme tedy tento součin kolikrát chceme a třeba číslem m větším než každé dané; dostáváme $\frac{bb}{m}$ nebo $\frac{bc}{m}$, které jsou obě menší než jakákoli daná veličina, a tudíž se nemohou rovnat žádné třeba sebemenší dané veličině, a proto jsou podle Axiomu I. $\frac{bb}{mm}$ nebo $\frac{bc}{mm}$ rovna ničemu.“ (tamt., 4)[235]

Jinými slovy, jestliže veličinu menší než jakoukoli danou vydělíme veličinou větší než jakoukoli danou, stane se ničím, neboť již se žádným, ani nekonečným počtem m násobení nemůže rovnat nějaké dané veličině. Další lemmata až do počtu 53 se věnují všemožným důkazům vlastností infinitesimálních geometrických čar, úhlů a trojúhelníků za účelem přísného ztotožnění křivky s mnohoúhelníkem,[236] jež poněkud lépe objasňují úvod výše citovaných Leibnizových slov, třebaže v mnoha případech byl Nieuwentijt o svých základech vskutku schopen z infinitesimálních úvah vydat počet.[237] Nicméně ještě před samotnými odpověďmi bude vhodné upozornit na jisté podstatné rozdíly v pojetí nekonečna a nekonečně malého u obou autorů. Především Leibniz nejpozději od dob *Pacidia*[238] popírá coby logicky sporný jakýkoli pojem nekonečného čísla, jež by bylo zároveň celkem; nekonečno pouze *označuje* to, co je vždy větší než jakékoli konečné (a obdobně s nekonečně malým). Nieuwentijt naproti tomu výslovně klade *největší* číslo jako prostředek k určení nekonečně malého, které nadto pojímá jako aktuální a konstantní; zatímco pro Leibnize je dx vždy jednak *proměnnou* veličinou, jednak postižením (*affection*) proměnné geometrické veličiny x, výsledkem operace na ní. Odtud se otevírá nekonečno řádů nekonečně malého a zrcadlově i nekonečně velkého relačního (synkategorematického) nekonečna. Proto také v rámci Leibnizova kalkulu neplyne žádná logická obtíž z druhých a vyšších diferenciálů, neboť se stále jedná o proměnnou veličinu, tentokrát dx, a pouze opakování té samé operace nad ní; což v rámci Nieuwentijtových pravidel nad aktuálními prvky jednoduše nedává smysl a výše bylo

235 Tedy jedná se o cosi jako archimedovské pole obohacené o infinitesimální prvek e coby podíl konečného a nekonečného čísla takový, že $e^2=0$, který však do něho do jisté míry vstupuje neboť Nieuwentijtovy infinitesimální veličiny násobeny nekonečným číslem dávají veličiny dané.

236 Odtud pak celý název Nieuwentijtovy práce *Analysis infinitorum, seu Curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae*.

237 Kniha se skládá z dvanácti kapitol od určování tečen, těžišť po obracenou metodu; z Leibnizovy recenze si nicméně lze udělat obrázek, kam až sahají její teoretické hranice. Srv. Mancosu (1996, 159-160).

238 *Pacidius Philalethi* (A VI, 3, 528-571) z roku 1676, dialog o pohybu a kontinuu, zamítá infinitesimální, tj. poslední prvek nekonečné řady a veškeré úvahy aktuálně existující (ať v geometrii, nebo ve fyzice, v oblastni ideální, nebo konkrétního) nekonečně malé veličiny stejně tak, jako, aspoň v očích Leibnizových, dokazuje logickou spornost nekonečného čísla či čísla všech čísel (*numerus omnium numerum*). Odtud pak Leibnizovo potenciální *matematické* nekonečno (kdy například body na přímce jsou vždy dány jen coby mez nějakého dělení); pravidlo součtu řad po způsobu limity řady podsoučtů; rozlišení kardinálních a ordinálních čísel *avant la lettre* a veškerá teorie diferenciálních, nekonečně malých veličin coby *dobře založené fikce*.

„dokázáno“ za nemožné. Z povahy své proměnnosti Leibnizovy diferenciály položené vedle členů, které jsou ve srovnání s nimi nekonečně větší, nepadají na váhu, a tudíž je lze v konečném zúčtování nechat vymizet; avšak nikoli z nějaké jejich povahy jakožto veličin, nýbrž právě ve vztahu k ostatním členům vyššího řádu; zatímco konečně Nieuwentijtovy b/m jsou aktuální nenulové veličiny a jako takové je z výpočtu nelze nijak odstranit.[239] Jako důsledek a doklad nepřípustnosti zanedbání nesrovnatelně menších veličin slouží pak i poslední Nieuwentijtova námitka stran nedostatečnosti diferenciálního počtu v pojednávání exponenciálních funkcí. Jestliže totiž výraz $z=y^x$ podřídíme pravidlům *Nova Methodus*, získáváme rovnici $dz=(y+dy)^{x+dx}-y^x=y^{x+dx}+xy^{x+dx-1}dy-y^x$; a když dále necháme řádně vymizet všechny nekonečně či nesrovnatelně menší členy, vychází sice pravdivá rovnice $0=y^x-y^x$, ale v žádném případě odtud nelze určit diferenciální poměr;[240] a tento nedostatek se Bernard de Nieuwentijt snaží napravit následovně:

> „Budiž $y^x=z$; položíme $x+e$ na místo x, $y+a$ na místo y a $z+u$ na místo z a pak $y+a$ umocněna na $x+e$ bude $= z+u$; odkud roznásobením a po odstranění toho, co má být podle lemm. 10 odstraněno, dostáváme $y^{x+e}+xy^{x+e-1}a=z+u$; a když za z dosadíme y^x konečně nastává $y^{x+e}+xy^{x+e-1}a-y^x=u$; avšak když místo a a e položíme dx a dy, získáme hledaný diferenciál v Leibnizově značení.“ (Nieuwentijt 1695, 280-281)

Leibnizovo vyrozumění vychází v červencových *Aktech*[241] a bez dlouhých řečí jde radikálně *k věci*. První námitku proti diferenciálnímu počtu „a ostatním metodám“,[242] totiž, jak je možné odstranit (*abjiciantur*) nekonečně malé veličiny jako by byly ničím, vyvrací napadením vyšší premisy, základního principu, který Nieuwentijt – a třeba říci, že přirozeně také většina filosofické tradice – má za nejjasněji pravdivý: „*Dvě veličiny jsou si rovny jedině, když je jejich rozdíl nulový neboli rovný ničemu*“.[243] A to na základě rozšíření samotného pojmu rovnosti:

> „Ostatně soudím, že veličiny jsou si rovny nejen, když je jejich rozdíl naprosto nulový, ale i pokud je nesrovnatelně malý; a byť nelze říci, že je zhola ničím, přesto není porovnatelnou veličinou s tou, jíž je rozdílem. Jako když se přičte k úsečce bod jiné úsečky, nebo úsečka k ploše, veličina se nezvětší. Stejně tak je tomu, když se přičte úsečka k úsečce, avšak nesrovnatelně menší. Považuji totiž, po způsobu Eukleida kn. V, def. V, za porovnatelné pouze homogenní veličiny,[244] u kterých jedna vynásobena nějaký číslem, totiž konečným číslem, může přesáhnout druhou. A ty, které se o takovou veličinu neliší, kladu za sobě

239 Srv. Mancosu (1996, 160).
240 MS (V, 323); Srv. Nagel (2008, 202).
241 *Responsio ad nonnullas difficulatates a Dn Bernardo Niewentiit circa methodum differnetialem seu infinitesimalem motas* (AE 1695, 310-316; MS V, 320-328).
242 Míní se metody Barrowa a Newtona.
243 MS (V, 321).
244 Viz v. 3. Pojem homogenity je nesmírně důležitý, a již to naznačil sám Leibniz; zde v podobě zákona transcendentální homogenity (*lex homogeneorum transcendentalis*), který přenáší algebraicko-geometrické podmínky porovnatelnosti veličin do řádů nekonečně malého. V diferenciální rovnici pak musí každý člen spadat do stejného řádu infinitesimálních veličin, jako je v geometrii přípustné srovnávat jen veličiny téhož rozměru.

rovné; což připouštěl i Archimédes a všichni po něm. Archimédovým postupem toto lze potvrdit skrze dovození sporu. Poněvadž však přímou metodu lze rychleji pochopit a je užitečnější pro objevování, jakmile jednou porozumíme regresivní metodě, stačí pak používat už jen metodu přímou spočívající v zanedbání nesrovnatelně menších veličin, *jež si sama v sobě nese svůj důkaz* [...]“[245] (MS V, 322)

První z cest ospravedlnění a obrany metody diferenciálů ji tedy představuje coby *zkratku* (*compendium*) řeči zavedenou obvyklým odkazem na Archimédovu autoritu;[246] avšak na rozdíl od zdlouhavých postupů dvojí redukce *ad absurdum* coby cestu přímou a výtečnou pro objevitelské umění, která se ospravedlňuje sama s poukazem na přesné výsledky. Toto archimedovsko-nearchimedovské odůvodnění poukazuje jak do hloubky principů, tak i směrem k určení bohatství jejich projevů. Vede jednak k metafyzickému založení možnosti řeči o nové rovnosti[247] a dynamiky diferenciálů coby metaforických zkratek řeči, racionálních fikcí. Dále pak právě od těchto principů k dynamice objevování, snadnosti a použitelnosti nových pravidel při dosahování správných výsledků. Základy totiž mohou být ukryty nekonečně hluboko; avšak k určení jejich projevů není nutně zapotřebí jejich přesná, rozlišená, dokonalá znalost,[248] třebaže, ze stejné charakteristické logiky, nic nerozvíjí vědu více nežli právě důkazy prvních principů, jak ostatně Leibniz prokazoval a naplňoval veškerým svým myšlením. Naopak pokud diferenciální metoda dává správné výsledky, není důvod „zdržovat objevitelské umění přílišnou úzkostlivostí, pod touto záminkou odmítat nejkrásnější objevy a připravovat se o jejich plody“.[249] Jestliže metoda diferenciálů a její symboly, byť „pouhé“ metafory, zkratky řeči, fikce,[250] vyjadřují podstatné vztahy, jsou *dobře založené*,

245 S odkazem na „lemmata z roku 1689“, řeč je o *Tentamen de motuum coelestium causis*, kalkul jistým způsobem sám přiměje nechat vymizet jisté veličiny: „Pokud by někdo odmítal použít veličiny nekonečně malé, může použít veličiny tak malé, jak uzná za dost, aby byly nesrovnatelné a chyba, kterou by způsobily neměla žádný dopad, a dokonce byla menší než chyba daná. Tímto způsobem můžeme Zemi považovat za bod nebo poloměr země za nekonečně malou úsečku vzhledem k celému nebi […] (MS V, 151)“. Zde, v nebeských pohybech, je tedy původ názorného Leibnizova přirovnání, které všichni vzali doslova, nekonečně (nesrovnatelně) malé začali uvažovat za konečně malé a diferenciální metodu za metodu aproximací.Viz Parmentier (1995, 318-328).

246 Což byla samozřejmě již od dob metody nedělitelných nejsnazší obrana matematiků proti všemožným filosofům a teologům, kteří se rýpali v základech jejich úspěšných a plodných metod; ve smyslu „pokud je libo, vždy to lze dokázat dvojí redukcí *ad absurdum*“. Z celkem rozumných důvodů po ní sáhl John Wallis ve sporu s Hobbesem (Beeley 2008, 42-44) a využívali jí i další tvůrci infinitesimálních metod.

247 Nikoli však po způsobu definice a kalkulu nearchimedovských veličin, viz Juškevič (1968, 164).

248 Aneb jak říká Philaléthés: „[…] upozorním, že běžně je náš pojem *vztahu* stejně jasný nebo jasnější než pojem jeho *základu*. Kdybych věřil, že Sempronia dostala Tita v zelí, jak se obyčejně říká malým dětem [a tím se stala jeho matkou], a že na to stejným způsobem narodil se jí i Caius, byl by mi pojem o *poměru* bratrství mezi Titem a Caiem stejně jasný, jako kdybych věděl všechno o porodních babičkách.“ (A VI, 6, 252).

249 MS (V, 322).

250 Právě v tomto smyslu přirovnával Leibniz *dx* k imaginárním kořenům, které byly z hlediska čísel – *až do objevení základů* – v podstatě nesmyslné a vlastně jen pouhé fikce. Avšak fikce užitečné, které i bez svého zdůvodnění nesmírně rozšiřovaly a zobecňovaly teorie rovnic, a tudíž nebylo důvodu se jejich pomoci zříct: „[...] matematikům proto, aby jejich důkazy byly rigorózní, stačí namísto *veličin malých nekonečně* chápat je tak malé, jak je třeba, aby se ukázalo, že chyba je menší, než ta, kterou by chtěl stanovit (*assigner*) jejich protivník; a tím pádem, že nepůjde stanovit vůbec žádnou. Takto, kdyby nekonečně malé veličiny *přesné*, které ukončují zmenšování stanovených chyb, nebyly než co imaginární kořeny, v ničem by to neuškodilo *infinitesimálnímu* kalkulu čili kalkulu diferencí a sum, který jsem představil a který vynikající matematikové zvelebili tak prospěšně, že se v něm nemůžeme zmýlit, leda bychom si nerozuměli nebo jej špatně aplikovali, neboť svůj důkaz si nese v sobě.“

rozšiřují objevitelské umění, a pak je třeba toho využít. Neboť z logiky symbolických vyjádření: určení základů může přijít zpětně. *Ars inveniendi* je teorie metafyzická a spadá v jedno s principy univerzální charakteristiky. Proto Leibniz říká, že odmítnutí takové definice rovnosti je pouhé „slovíčkaření (*de nomine disputat*)“; jestliže poskytuje se stejnou přesností všechny výsledky, jako jiná, na pohled (*in speciem*) rigoróznější metoda, pak toto stačí, aby byla myslitelná a uchopitelná (*intelligibilem*) a užitečná ke konání objevů.[251] Odtud tedy hlubší zdůvodnění obrany Archimédem; ve stejné linii se již na tomto místě naznačuje i obrana druhých a vyšších diferenciálů.[252]

Druhá námitka Bernarda de Nieuwentijta je vskutku platná, pokud se vychází jen z pravidel *Nova Methodus.* Leibniz představí celý postup vedoucí až k neblahé tautologii a napůl ironicky na příkladu $b^x = y$, kde b je konstantou, přiznává, že do podobných slepých uliček již sám nejednou zavítal; a při této příležitosti představuje svá nová[253] rozšíření diferenciálních algoritmů i na exponenciální (název je jeho) výrazy:

„Mějme tedy $x^v = y$; dostaneme $v \log x = \log y$; avšak

$$\log x = \int \frac{dx}{x} \text{ a } \log y = \int \frac{dy}{y}, \text{ a tudíž } v \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}.$$

Diferenciací dostaneme

$$v \frac{dx}{dy} + dv \log x = \frac{dy}{y}.$$

Avšak v je třeba vyjádřit skrze x a y, a to oběma dohromady, anebo zvlášť; můžeme tedy zapsat $dv = m\,dx + n\,dy$, kde potom m a n budou dány přes x a y, odkud pak

$$v \frac{dx}{x} + \log x\, m\, dx = \frac{dy}{y} - \log x\, n\, dy;$$

a poměr dx ku dy (tedy subtangenty k ordinátě) bude stejný jako

$$\frac{1}{y} - n \log x \text{ ku } \frac{v}{x} + m \log y.$$[254]

(Parmentier 1995, 35).

251 MS (V, 322).

252 Srv. slova Jakoba Bernoulliho k jejich užití k určení brachystochrony výše. V dopise Huygensovi roku 1693, který přiznával, že mu druhé diferenciály dokonale unikají a neví, k čemu by byly dobré, Leibniz píše: „Co se týče *ddx*, potřeboval jsem je často, mají se k d*x* jako konatus tíhy nebo odstředivé popudy vzhledem k rychlosti. Pan Bernoulli dokonce poznamenal minulý rok v lipských Aktech, s. 202, že je použil pro určení křivky plachet. A já už je využil k pohybům hvězd také v *Aktech*.“ (A III, 5, 650). Jedná se o *Curvatura veli* (AE 1692, 202-207) Jakoba Bernoulliho a *Tentamen de motuum coelestium* (AE 1689, 82-96), p. 245.

253 A připomíná též výsledky Johanna Bernoulliho, jeho *calculus percurrentium*, o němž jsme se zmiňovali výše. Tento svůj objev markýzovi i přes opakovaná upomínání nikdy nezaslal. Vlastní pojednání o exponenciálním kalkulu konečně sepsal i Pierre Varignon a lze je nalézt coby dodatek k jeho poznámkám k *Analýze nekonečně malých* vydaných coby *Éclaircissemens* roku 1725.

254 Zde se držím Parmentierovy (1995, 332) opravy oproti *Aktům* i Gerhardtově MS (V, 325).

Můžeme tedy nyní vést tečnu k takovéto křivce na základě kvadratury hyperboly neboli logaritmů. Abychom obecně mohli diferencovat exponenciální [výrazy] postačí připsat mému algoritmu připsat následující pravidlo (*canonem*):

$$d\,x^v = x^v\left(\frac{v}{x} + dv \log x\right).$$

A tedy jestliže v je konstantním číslem e, vychází

$$d\,x^e = x^e \frac{e}{x}\,dx, \text{ čili } e\,x^{e-1},$$

což je teorém našeho algoritmu pro diferenciaci mocnin a kořenů, který jsem kdysi podal.“ (MS V, 324-325)

V tomto úsudku lze již zahlédnout postupné směřování k pojmu derivace *avant la lettre*, a sice skrze vyjádření diferenciálního poměru přes n ku m. Nejdůležitější krok tímto směrem učiní Leibniz o měsíc později v nové odpovědi na Niewentijtovu reakci k tomuto. Přistupme však ještě ke třetí námitce, povaze vyšších diferenciálů (diferencio-diferenciálů), která ovšem se zmíněnými úvahami hluboce souvisí. Zde Leibniz podává nejprve argument odzbrojující svojí přirozenou jednoduchostí, jež plyne – na rozdíl od Nieuwentijtových e – z dynamického, tedy vskutku *diferenciálního* pojetí nekonečně malých, totiž: *kdykoli termíny nerostou stejnoměrně, pak také jejich přírůstky nutně musejí mít diference, a ty tedy jsou diferencemi diferencí.* K tomu Leibniz připojuje duchaplný, byť ne zcela obecný úsudek:

„Věhlasný autor připouští, že dx je veličinou; avšak třetí úměrná od dvou veličin je také veličina; což však je případ ddx ve vztahu k x a dx. Ukáži to takto. Budiž x v geometrické posloupnosti a y v posloupnosti aritmetické; poměr dx ke konstantě dy bude jako dx ku a:

$$dx = x\frac{dy}{a}, \text{ tedy } ddx = dx\frac{dy}{a}.$$

Odkud, dosazením na základě první rovnice, vychází $x\,ddx = dx\,dx$; a odtud vidíme, že x se má k dx ve stejném poměru, jako dx k ddx.“ (MS V, 325)

Je zřejmé, že za stejných podmínek lze úvahu opakovat až do nekonečna; a je také zřejmé, že v tomto smyslu 1. řád nekonečně malého oproti ostatním nemá žádnou zvláštní výsadu; na obranu diferencio-diferenciálů se konečně snáší jejich užitek v dynamice, analogie tečen a oskulačních kruhů atd.

K první odpovědi se tedy lze ptát: odkud se tedy v myšlení, geometrii a přírodě bere možnost uvažovat rovnost jako nekonečně malou nerovnost *salva quantitate*? To je základní otázka, na níž stojí samotný Leibnizův infinitesimální počet. Náznaky odpovědi se prolínaly téměř celým předešlým výkladem.[255] Již bylo řečeno, že dx představuje dvojznačný znak veličiny i jejího

255 K důkladnějšímu rozboru z pohledu filosofického, náboženského, racionálně-mystického opět jen odkazuji na své dřívější práce (Makovský 2012; 2013).

postižení; že jeho počátek je v oblasti konečného, kde v řadě nějakých prvků zkrátka označuje jejich vzájemné rozdíly, a tím dává novou řadu, diferenciální řadu prvků základních; že v geometrii označuje elementární přírůstek, diferenci nějaké geometrické veličiny. Jde tedy o to, jak je možné, aby v sobě ztělesňoval tytéž vztahy v nesrovnatelně malém, a tedy je bylo lze *vyjádřit*. Totiž aby bylo možno věřit, že stejné pravidlo platí vždy v jakýchkoli poměrech, tedy zkrátka, že *platí* a lze s ním počítat; aby bylo možno spolehnout se na *analogii*.[256] Slíbenou odpovědí je *zákon kontinuity*: možnost míry mezi konečným a nekonečným, skrze obrazné dosažení konce nekonečné řady na základě vnitřního pravidla, dosazováním symbolů za věci a věcí za symboly, důvěrou v písmo „slepých symbolů“ a stálou čitelnost atd. Zákon kontinuity coby první a základní výraz harmonie coby určení nejlepšího z možných světů.

Leibniz sám úsudek na základě kontinuity[257] nazývá *paradoxa quadam ratione* neboli *figura philosophico-rhetorica*[258] z toho důvodu, že paradoxně umožňuje zahrnout v jedinou úvahu, pod jediný zákon, nekonečnou řadu proměn prvků nějaké společné přirozenosti a coby jakýsi „kvazi druh“ i její krajní člen, který je přísně vzato nedosažitelný a přirozenosti protikladné:

> „Třebaže však v přísném smyslu není pravdou, že klid je druhem pohybu nebo rovnost druhem nerovnosti tak, jako není pravdou, že kruh je druhem pravidelného mnohoúhelníku; přesto můžeme říci, že klid, pohyb, rovnost a kruh ukončují (*terminent*) pohyby, nerovnosti a pravidelné mnohoúhelníky, které do nich spojitou změnou dospějí tím, že vymizí (*en evanouissant*). A jakkoli jsou tyto hranice výlučné, tj. nejsou zahrnuty v přísném smyslu v proměnlivostech, které ohraničují, mají nicméně jejich vlastnosti, jako kdyby v nich zahrnuty byly, *na základě řeči nekonečen a nekonečně malých*, jež chápou například kruh jako pravidelný mnohoúhelník o nekonečném množství stran. *Jinak by byl porušen zákon kontinuity, tj. ježto přecházíme od mnohoúhelníku spojitou změnou ke kruhu beze skoku, je také zapotřebí, aby nedošlo k žádnému skoku v přechodu mezi vlastnostmi* (*affections*) *mnohoúhelníku a kruhu*.“ (MS IV, 106)

V průzračné podobě zde před námi stojí Leibnizův „velký princip měření křivých čar“ postulovaný ze zákona kontinuity. Jistěže mnohoúhelník se kruhem *nikdy* nestane; avšak *spojitou, pravidelnou proměnou* se k němu blíží tak, že chyba bude vždy menší než libovolná daná; a podle zákona kontinuity i vše, co lze říci o pravidelném mnohoúhelníku, lze *metaforicky* – s racionální tolerancí, s chybou nesrovnatelně menšího, zanedbatelného, a v posledku nicotného řádu – říci i o kruhu. Přepona charakteristického trojúhelníku nikdy nebude nekonečně malá, jeho strany diferenciální; nicméně lze znázornit, neboť lze říci, že spojitým, pravidelným přechodem „v posledku“ s vnitřním, infinitesimálním „čarobodem“[259] spadne v jedno; přičemž *po celou dobu bude*

256 Analogie původně značí logos logu, poměr nad poměrem, řád řádu atd.

257 Nejhlubší teoretické propracování se zákonu kontinuity dostalo samozřejmě v systému Leibnizově; ve velmi čisté podobě jej lze nalézt již u Keplera, a to nikterak překvapivě, v souvislosti s kuželosečkami coby *perspektivami* jedné spojité, analogické přírody.

258 MS (V, 385).

259 Za tento výraz vděčím Vojtěchu Kovářovi; prý mu, „otevřel všechny infinitesimální úvahy“.

zachovávat poměry svých stran, a ze zákona kontinuity tedy i pro velikosti nesrovnatelně menší, než je sebemenší daná. Ze stejného zákona je dovoleno a dokonce nutno[260] uvažovat z hlediska konečné veličiny tento čarobod jako bod jediný, neboť jeho délka je ve srovnání s ní nesrovnatelně menší (je součástí řady proměnlivostí, jež tento ohraničuje); a tudíž je dovoleno a také přikázáno *dx* (neboť právě *tento čarobod a cestu k němu dx původně označuje*) v jedné linii s konečnou veličinou zanedbat, neboť bod k úsečce nic nepřidává; a ze zákona kontinuity toto platí stejně tak pro *ddx* vzhledem k *dx* atd., nakolik splňují zákon transcedentální homogenity: rovnomocnosti rozměrů v nekonečně, nesrovnatelně malém. Je příznačné a význačné, že tuto spojnici, prodloužení ze zákona kontinuity mezi konečnou, vnější algebrou či geometrií a říší vnitřní geometrie na základě téměř nepředstavitelné analogie Leibnizovi ukázaly, jak jinak, slepé kombinatorické symboly, *Symbolismus memorabilis*:[261]

> „Odtud je díky novému způsobu zápisu zřejmá analogie mezi mocninami a diferenciály, jež se v běžném (*vulgato*) nevyjevuje; a tato analogie jde až tak daleko (což je podivuhodné), že na základě tohoto zápisu si odpovídají také $p^0(x+y+z)$ a $d^0(xyz)$ a dávají pravdivé hodnoty, totiž
>
> $$p^0(x+y+z)=1=p^0x\,p^0y\,p^0z \text{ a } d^0(xyz)=xyz=d^0x\,d^0y\,d^0z.$$
>
> Zároveň pak vysvítá, v čem spočívá *Zákon transcendentální homogenity*, jež se z běžného zápisu diferenciálů nedá tak dobře rozeznat. Jestliže použijeme tento nový druh *Charakteristiky*, ukáže se například, že $a\,ddx$ a $dx\,dx$ jsou homogenní nejen algebraicky (neboť v obou případech jsou veličiny vztaženy na sebe sama), ale též transcendentálně a že jsou mezi sebou srovnatelné, neboť první člen zapíšeme $d^0a\,d^2x$, druhý pak $d^1x\,d^1x$; a u obou je součet diferenciálních exponentů týž, totiž $0+2=1+1$. Ostatně zákon transcendentální homogenity předpokládá zákon běžné homogenity, tj. algebraické.“ (MS V, 381-382)

Znak *dx* tak v sobě zahrnuje cosi obrazného, fiktivního[262]; systém relací vyjadřující onu cestu na nedosažitelném poli, kterou však je morálně přípustné zkrátit si s oporou v dokonalosti důvodů světa; a to analogií, která nepřestává platit, ať se operace diferenciace vztahuje na konečné soubory, nebo na jejich výlučné, hraniční členy. Je to tedy právě operace diferenciace, která definuje diferenciál a nikoli naopak. Bytnost diferenciálů spočívá v pravidle, zákonu, relaci; nelze je chápat jako aktuální, determinované veličiny; a jako takové by, paradoxně řečeno, představovaly fikci nad fikcí, tedy čistý omyl. Náleží do sféry ideálního, možného, spojitého, čili kontinua, kde je prvotní

260 Viz. p. 245.

261 *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potenciarum, et de lege homogeneorum transcendentali* (MS V, 377-382). Jedná se o známý Leibnizův vzorec analogie mezi rozvojem mnohočlenu o nějakém stupni a diferenciálním výrazem o tom samém stupni. Dokonale nezbytným pro vyjevení analogie je neobvyklý a na první pohled zbytečný, lineární způsob zápisu mocniny jako *operace* p (*potentia*). Takto se x^2 zapisuje jako p^2x, odkud povstává pozoruhodný kombinatorický řád analogií.

262 „Třebaže po mém soudu zahrnují něco fiktivního a imaginárního, což se nicméně převedením na běžné výrazy snadno opraví (*rectifiatur*) tak, že žádná chyba nemůže nastat: ostatně Příroda vždy postupuje po pořádku (*ordinatim*) a beze skoků a porušení zákona kontinuity.“ (MS V, 385).

celek a části či veličiny vznikají až na základě nějaké operace, determinace, dělení. Zatímco ve sféře existencí, stvoření je každá veličina zcela determinována svými diskrétními, aktuálně existujícími částmi, každá je konečná a přitom aktuálně dělena až do nekonečna.[263] A přesto ze zákona kontinuity, dokonalé pravidelnosti a determinace vesmíru dané Boží volbou toho nejlepšího tak, jako harmonie celku prostupuje do každé z částí, oba řády si odpovídají. V přísném smyslu příroda vlastně činí pouze skoky, ale přesto ve svém celku i v každé z částí vždy klade mezi dva stavy pohybu stav přechodný tak, že se v přírodě neděje nic, co by nebylo plně v souladu s pravidly spojitosti, neboť, ze zákona kontinuity, *chyba bude menší, než jakákoli daná*:

> „[...] prostor a čas vzaty dohromady tvoří řád možností celého jednoho vesmíru (*de tout un Univers*) v tom smyslu, že tyto řády (to jest prostor a čas) rámují nejen to, co aktuálně je, ale navíc vše, co by místo toho mohlo být kladeno, podobně jako čísla jsou lhostejná všemu tomu, co by mohlo být *res numerata*. A toto ovíjení (*enveloppement*) možného s existujícím tvoří kontinuitu uniformní a indiferentní vůči veškerému dělení. A třebaže v přírodě se nikdy nevyskytují proměny dokonale uniformní, tak jak by si je vyžadoval pojem, jejž nám o pohybu dává matematika, a ovšem ani aktuální figury, které by přísně vzato (*à la rigueur*) byly takové povahy, jaké učí geometrie, neboť aktuální svět vůbec nespočívá toliko v indiferenci možností, nýbrž je dělen na skutečná množství (*effectives*): nicméně aktuální fenomény přírody jsou a musí být uspořádány tak, že se nikdy nepřihází nic, co by porušilo zákon kontinuity… a další naprosto přesná pravidla matematiky. Ba co víc, věci by se jinak nemohly dát poznat než právě jen díky těmto pravidlům, které jediné nám, spolu s pravidly Harmonie či dokonalosti, jež nám poskytuje pravá metafyzika, umožňují vstoupit do důvodů a vhledů Tvůrce věcí.“ (PS IV, 568-569)

Pokusy přímo matematicky dokázat a založit kalkul na základě zákona kontinuity podnikl Leibniz kolem roku 1701;[264] na další dějiny infinitesimálního počtu nicméně neměly žádný vliv. Ukazují však, že pokusy o oprávnění počtu vedou celkem přirozeně k pojmu diferenciálních podílů a odtud k derivacím.[265] Zde je třeba se vrátit k Leibnizově odpovědi Nieuwentijtovi stran oprávněnosti diferenciálů vyššího řádu, neboť tak jako tak k pojmu derivace se Leibniz přibližuje již v dodatku ke své *Responsio* ze srpnových *Akt* toho samého roku:[266]

263 Na způsob nekonečné řady, ve které nevystupuje žádný nekonečně malý člen, všechny jsou konečné a přitom stále děleny. Jak bylo řečeno, tuto teorii kontinua od doby sepsání *Pacidius Philalethi* držel po zbytek života: „Dělení kontinua bychom tudíž neměli pojímat jako u písku na jeho zrnka, nýbrž na způsob záhybů listu papíru či tuniky: takto se sice až do nekonečna objevují stále menší a menší záhyby, avšak těleso se nikdy nerozpadne na body či minima. Každá tekutina se naopak vyznačuje určitou vnitřní soudržností: přestože se rozprskne na části, ne všechny části těchto částí se rozprsknou jakbysmet, nýbrž se v daný čas pouze nějak uzpůsobí a přetvoří; a tudíž zde nedochází k rozdělení na body, jakkoli se každý bod co do pohybu liší od libovolného dalšího. Je to jako bychom tuniku skládali do nekonečna záhybů, a to tím způsobem, že by žádný záhyb nebyl tak malý, aby se nerozkládal na další: takto nelze postihnout žádný bod tuniky, aniž by byl poháněn pohybem odlišným od svých sousedů: a přeci to neznamená, že by od nich byl odtržen. O tunice pak nebude možno říci, že je rozdělena až na body: jakkoli její záhyby jeden menší než druhý postupují až do nekonečna, stále se jedná o tělesa rozlehlá: a body se nikdy nestávají jejich částmi, nýbrž zůstávají vždy toliko mezemi.“ (A VI, 3, 550).

264 Jejich rozbor i zhodnocení lze nalézt v Bos (1974, 54-62).

265 Tamt., 59.

266 *Additio ad hoc schediasma* (MS V, 327-328).

> „Rád bych připojil ještě jedno, abych zamezil veškerým sporům o realitě diferencí (*differenciarum*)[267] jakéhokoli stupně; a sice, že je můžeme vždy vyjádřit prostřednictvím běžných úseček, které jsou jim úměrné. Totiž mějme libovolnou křivku, jejíž ordináty rostou nebo klesají; pak můžeme přiřadit (*applicari*) na stejnou osu v příslušných bodech druhé ordináty, které vymezují novou křivku, a jsou úměrné diferencím prvního stupně neboli prvkům ordinát první křivky. Když toto budeme opakovat pro druhé ordináty, budeme mít ordináty třetí křivky, jež budou úměrné diferencio-diferenciálům neboli druhým diferencím prvních […].“ (MS V, 327)

Z Leibnizových prací založení infinitesimálního počtu[268] se ukazuje, že původní počet zahrnoval různé cesty budoucího vývoje, *včetně* té, která byla vskutku nastoupena. Nicméně bez dalšího je důležité upozornit, že také jeho symbolický algoritmus, snad díky metafyzické hloubce a charakteristickému myšlení jeho tvůrce, všechny tyto cesty umožňoval. Je to zřejmé už jen z toho, že od nové metody byla řeč o konečných diferenciálech; další Leibnizova vysvětlení jejich povahy se pohybovaly mezi zkratkami řeči, neporovnatelnými veličinami (včetně metafor zrnka písku a celého glóbu), užitečnými fikcemi i více méně limitními postupy, zatímco prakticky všichni jeho žáci, včetně markýze de l'Hospitala, diferenciály chápali jako skutečné, nekonečně malé platónské entity. Všechny tyto výklady jeho počet umožňoval. Proč tedy Leibniz nezaložil počet tak, jak by si přáli a jak se snažili pro své účely vykládat jeho různí tvůrci a zakladatelé v následujících stoletích? Protože k tomu neměl důvod. Výše zmíněná cesta k derivaci mohla snad sloužit jako jisté vyjádření zdravých základů řádů nekonečného a nekonečně malého, ale v jakém smyslu by charakteristicky vyjadřovala cokoli jiného? Leibnizův počet nebyl teorií matematických formulí, čímž se později stal; svým šťastným výrazem symbolické první ražby jako by se sám nabízel ke studiu dynamiky a síly přírody,[269] neboť, což se snad dostatečně ukázalo výše: *jak co do svého užití, tak ve svém založení byl infinitesimální počet stejnou měrou teorií matematickou jako fyzikální*, poněvadž vyrůstal z hlubin harmonie mezi oběma, a proto se ukázal tak plodným nástrojem ke studiu obou dvou. Sám Leibniz jej nicméně v žádném případě nepokládal za konečné slovo; jednalo se toliko o význačný vzorek univerzální charakteristiky určený ku zdokonalení, nástroj objevitelského umění a nakolik podával přesné a význačné objevy, vše, co bylo opravdu důležité, bylo postupovat vpřed.

267 Zde Leibniz využívá své první definice diferenciálů (diferencí) z *Nova Methodus* (1684), kde byly brány jako libovolně malé *konečné* veličiny.
268 Viz například *Cum prodiissent* (Leibniz 1846, 39-49).
269 Diferenciál odpovídá popudu (*conatus*) síly, viz 252.

Michel Rolle.[270]

Bernarda de Nieuwentijta nakonec, po několikeré výměně,[271] zdá se, odpovědi uspokojily. Bylo tomu již pár let, co se *Analýza nekonečně malých* „obracela v rukou všech“, a Leibnizův počet se dočkal dalšího útoku na své základy, tentokrát takříkajíc z vyšších míst, totiž od akademika Michela Rollea. Tomu se není se co divit, námitky proti obojaké, neurčité, tajemné povaze diferenciálů se ve stejném duchu opakovaly až do Berkeleyova *Analysty*, třicet let po té, kdy se infinitesimální počet již zcela prosadil. Berkeley ostatně většinu Rolleových námitek, byť spíše z důvodů teologických, ve svém pamfletu přebírá.[272] Oproti Niewentijtovým pokusům o položení pevnějších základů počtu, jenž se chápal jako žádoucí a účinné zdokonalení dřívějších metod, zde nicméně došlo k jistému posunu. Rolle proti počtu namítá nejen vratkost základů, ale také *nepřesnost*, neschopnost přinést nové pravdy a na různých příkladech se pokouší dokazovat, že kalkul vede přímo k chybným výsledkům. Cílem a východiskem pak nebylo rozumnější zdůvodnění základů počtu, ale jeho pusté odmítnutí, a to ve prospěch dřívějších algebraických metod Descarta, Hudda.[273] Může se tedy zdát, že v pařížské roztržce příběh počtu ztrácí něco na své zakladatelské hloubce; a přeci se jeho význačná určení projevují zápletkou, která je neméně důležitá. Svědčí o institucionálních pnutích a otřesech, jež ve stavbě věd každé prohlubování základů vyvolává; a to navíc v instituci, jež v odporu proti utlačitelským univerzitám byla zakládána za účelem rozvoje *nových* věd. Nicméně ani tak nelze říci, že by rozprava při Akademii věd byla pro teoretický rozvoj infinitesimálního počtu povrchní a bezvýznamná. Svým průběhem a vyústěním totiž předznamenává konečné pohlcení logicko-teologických základů leibnizovské *scientia infiniti* Newtonovým názornějším a přirozeně přístupnějším spojitým plynutím času coby skryté nezávislé proměnné.

---

270 Michel Rolle (1652-1719), francouzský matematik, algebraik samouk, který se brzy proslavil a získal podporu v nejvyšších kruzích francouzského státu, kde matematice vyučoval syna ministra Louvoise. Jako úředník na ministerstvu války se nicméně příliš neosvědčil. Do Akademie vstoupil již roku 1685. Hlavní oblastí jeho matematického zájmu byla teorie rovnic, nejznámějším dílem *Traité d'alèbre* (1690). Nicméně do dějin se Michel Rolle zapsal především jen roztržkou stran nového počtu, kterou roku 1700 na Akademii rozpoutal. Jejími účastníky byli dále abbé Jean Gallois, Pierre Varignon, markýz de l'Hopsital a později Joseph Saurin.

271 Zapojili se do ní i Johann Bernoulli, *Demonstratio analytica et synthetica suae Constructionis curvae Beaunianae* (AE 1696, 82-85) i žák Jakoba Bernoulliho a Johannův spolupracovník Jakob Hermann (1678-1733), *Resposio ad clarissimi viri Bernh. Nieuwentiit considerationes secundas* (1700). Mimochodem si zde povšimněme přivlastňovacího zájmena „*suae*“ v názvu Bernoulliho práce: *jeho Beaunovy křivky.*

272 Blay (1986, 227).

273 Základním pramen stran rozepře Rolle-Varignon představují zápisy z jednání Akademie věd *Registres des Procès-Verbaux des séances de l'Académie royale des Sciences,* k nimž jsem bohužel v jejich úplnosti nezískal přístup. Její podstatné části jsou obsaženy a shrnuty v následujících zdrojích. Pochopitelně jde především o korespondenci jejího hlavního účastníka Pierra Varignona s Johannem Bernoullim *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, svazky 2 a 3 (p. 89), zde jednak Varignonem samotným, jednak coby dodatky vydavatelů korespondence. Dalším pramenem je Reyneaův vlastnoručně pořízený zápis (v. 103) mapující logickou stavbu obou argumentací. Dále vycházím z krátké úvodní statě o pařížské kontroverzi a komentáře k dopisům v JBB (III) Pierra Costabela a dalších prací Blay (1986), Mancosu (1996). V případě zahájení sporu zápisy chybějí a veškerý komentář se v těchto případech opírá o podání Pierra Varignona.

Hlavním obhájcem nového počtu v těchto pařížských událostech při Královské akademii věd 1700-1702 se stal, jak sám svědčí Johannu Bernoullimu, více méně proti své vůli Pierre Varignon; markýz de l'Hospital se tou dobou zdržoval mimo Paříž.[274] Tehdejší situace byla čím dál výbušnější, neboť tichá fraktura francouzských matematiků na stranu odpůrců a přívrženců nových počtu se následkem reformy Akademie roku 1699 promítla i do složení jejích členů. Ustavila se zde revoluční klika „infinitesimalistů“ okolo otce Malebranche, v čele s Varignonem a L'Hospitalem; a proti nim „stará garda“ Rolle, La Hire a Gallois. Dělící linii pochopitelně představovalo připuštění nekonečně malých do matematické obce, potažmo otázka přesnosti Leibnizova počtu tak, jak se začal šířit s *Analýzou nekonečně malých*. K otevřenému útoku na diferenciální počet zavelel jeden ze tří *pensionnaires géomètres*, Michel Rolle,[275] přednesením řeči *Du nouveau systѐme de l'Infini*,[276] v níž ve jménu přesnosti napadá základní předpoklady (*suppositions*) *Analýzy* a představuje paradoxy s nimi spojené:

> „Geometrii jsme vždy uvažovali za přesnou vědu, dokonce za zdroj přesnosti, která se rozprostírá do všech ostatních částí matematik. Mezi jejími principy jsme vídali jen opravdové axiomy; všechny teorémy, všechny úlohy byly vždy spolehlivě dokázány nebo bylo možno je takto dokázat a jakmile do geometrie pronikla nepravdivá nebo nejistá tvrzení, okamžitě byla z této vědy vykázána. Zdá se však, že od té doby, co se do ní vmísil nový systém nekonečně malých, tento znak přesnosti v geometrii nadále neplatí.“ (HAS 1703, 312)

Rolleův výpad byl veden tak, jako u Nieuwentijta, proti třem „nesnázím“ diferenciálního počtu, nakolik: 1. je v geometrii nekonečně velké nekonečně větší jedno druhého a nekonečně malé nekonečně menší jedno druhého; 2. veličina zvětšená a zmenšená o svůj diferenciál může být brána rovna té samé veličině; 3. diferenciály jsou absolutními nulami.[277] Varignonovo pochopení pro Rolleovy vývody a náznak odpovědí je dán již jejich shrnutím pro Johanna Bernoulliho:

> „Jeho spis spočíval 1° silou deklamace bez jakéhokoli důkazu proti nekonečně velkým a nekonečně malým různých druhů; 2°. diferenciály chápal jednou jako pevné a určité části, jednou jako absolutní nuly; 3° tvrdil, že znamená pokládat celek rovný části, brát veličinu plus nebo mínus její diferenciál jako rovnou té samé veličině; 4° říkal, že v tomto počtu

274 Jak píše v P.S. Johannu Bernoullimu 4. září 1700: „Zapomněl jsem Vám říct, že přes krajní odpor, který pociťuji vůči všemu, co se nazývá rozepří (*dispute*), jsem v jedné už dva měsíce hluboce zapleten po té, co se p. Rolle jal přečíst v Akademii spis proti diferenciálnímu počtu. Markýz de l'Hospital nebyl přítomen a protože vše, co jsem tam předložil náleží tomuto počtu, obecné mínění (*la voix publique*) určilo, že bych měl odpovědět já; a muselo se mu vyhovět.“ (JBB II, 254)

275 Dalšími dvěma byli abbé Gallois, zastánce řecké geometrie a právě Varignon. V odpovědi na Varignonův dopis (p. 274) zaznívá Bernoulliho nepříliš příznivé hodnocení Rolleových kvalit osobních i geometrických: „Štve mne, že jste tak mírný, když už jste spadl do mrzuté (*facheux*) hádky se jmenovaným p. Rollem, který chce potírat diferenciální počet, z něhož zná leda tak jméno; neboť co může být nepříjemnějšího než se hádat s ignorantem? Abych byl upřímný, nikdy jsem o p. Rolleovi neměl dobré mínění; zajisté kdyby se celá Akademie skládala z jen z Rolleů, moc bych tam patřit nechtěl. Vše, co zná, je, myslím, řešení několika algebraických rovnic; a co nenadělal z těch svých kakád (tedy chtěl jsem říct) kaskád: je mimořádně nafoukaný [...]“ (JBB II, 263) *Sic!*

276 HAS (1703, 312-336).

277 Blay (1986, 231).

nechávají oživnout a umírat diferenciály podle libosti a nezajímal se při tom o víc, než je třeba k řešení nějakých úloh; a spousty dalších podobných slaboduchostí (*pauvretés*).“ (JBB II, 263)

Z Rolleových námitek tedy celkem zřejmě vysvítá, že coby *quantités réelles* nepřipouštěl jiné veličiny než ty, které splňují Archimédův axiom. Jeho výklad supozic *Analýzy* se pak celkem nutně zastavuje na „doslovném“ čtení geometrických nárysů bez vnitřního vhledu do jejich dynamické, konečně nekonečné dvojznačnosti.[278] Takto ve své první *difficulté* píše, že nakolik jsou nekonečně malé reálnými veličinami, „ordináta *mp* /Obr. 46/ bude reálně rozlišena od ordináty *MP*“;[279] avšak na příkladu paraboly, za předpokladu, že bod $x+dx$ na ní leží, postupně běžnými algebraickými operacemi dovozuje, že $dy=0$; a dosazením do rovnice $a\,dx=2y\,dy$, dostává $dx=0$. Odtud vyvozuje první „důkaz“ proti nekonečně malým, že jsou nesmyslné, neboť nejsou reálnými veličinami, nýbrž nulami, a tedy vůbec nemá smysl o nich mluvit. Rolleův úsudek tedy odpovídá běžné algebraické operaci, kdy z obou stran rovnice $x+dx=x$ odečteme x a získáme $dx=0$.[280] Konečně tedy na dlouhé řadě příkladů stejného ražení Rolle vyvozuje, že nekonečné řády diferenciálů „nejsou než nic, o nichž se předpokládá, že jsou nekonečně obsaženy v dalších nic.“[281] Z předmluvy *Analýzy nekonečně malých* a blazeovaného vyhlášení jejího autora, že existenci nekonečně malých lze dokázat na způsob starých (metodou vyčerpání) tedy Rolle vyvodil jejich reálnou existenci; a odtud po svém dokázal, že nakolik jsou nekonečně malé reálnými veličina, natolik jsou „reálnými kontradikcemi“.

Odpovědi Pierra Varignona[282] se jednak docela překvapivě opírají o první knihu Newtonových *Principů* a hojně a doslovně citují jeho metodu prvních a posledních poměrů; jednak o „praxi geometrů“ jako Cavalieri, Pascal, Barrow, Huygens a dalších:

„P. Rolle uchopil diferenciály jako pevné a určité veličiny, a nadto jako absolutní nuly; kvůli tomu nachází protimluvy, které se rozplynou hned, co se uváží, že dotyčný počet nic takového nepředpokládá. Přirozenost diferenciálů naopak spočívá v tom, že na nich není nic stálého (*fixe*) a ustavičně ubývají až k nule, *Influxu continuo*; přičemž je uvažujeme dokonce jen na pokraji (řeklo by se) jejich vymizení; *evanscentia divisibilia*.“ (Blay 1986, 231)

Taková odpověď stěží mohla Rollea uspokojit, neboť se vlastně dozvěděl, že diferenciály nejsou ani určité, ani nulové; a k tomu mu bylo sděleno mystérium, že je třeba je myslet v „okamžiku vymizení“. Důkaz, který Varignon nejprve předkládá k jejich existenci se opět utíká k Newtonovi:

278 Viz. p. 170.
279 HAS (1703, 318).
280 Mancosu (1996, 167).
281 HAS (1703, 324).
282 Jak o nich svědčí otec Reyneau (JBB II, 352-353) a Michel Blay (1986, 231).

> „Dělitelnost libovolného trvání nebo času je nevyčerpatelná; tento čas musí být dělitelný do nekonečna, tj. v části neomezeně malé či nekonečně krát menší (*infinitème*), jež nazveme okamžiky či momenty. Představme si bod nebo těleso *A* pohybující se stejnoměrnou rychlostí v nějakém čase *T.* Je zřejmé, že dráhy či úseky čáry takto opsané se k sobě mají jako časy vynaložené k jejich proběhnutí; a tak to, co *A* každý okamžik opíše, se má k tomu, co opíše v čase *T*, jako tento okamžik k samotnému času *A*, což znamená toliko nekonečný podíl konečné úsečky, jíž v tomto čase opíše, a zde tedy máme nekonečnou malou část (*infiniteme*) či diferenciál této konečné čáry.“ (JBB II, 353-354)

K Varignonově důkazu druhých a dalších diferenciálu pak stačí jen uvážit jiný bod, který se zároveň pohybuje jinou rychlostí, a to v libovolném poměru. Zde rovněž není těžké nahlédnout, že důkaz diferenciálů s odkazem na okamžiky plynoucího času nemohly přesvědčit Rollea, pro nějž byla každá veličina buďto konečná, nebo nebyla, ani nikoho z dalších, kteří během následujících století proti diferenciálům namítali v témže duchu. Důkaz „na způsob starých“, který měl ospravedlnit zanedbání diferencí v rámci výpočtů nového kalkulu:

> „Ježto povaha diferenciálů spočívá v tom, že jsou nekonečně malé nekonečně proměnlivé až k nule, v tom, že jsou pouhými *quantitates evanescentes, evanescentia divisibilia*, budou vždy menší, než libovolná, ať už jakákoli daná veličina. Ať je tedy diference, kterou můžeme vytyčit (*assigner*) mezi dvěma veličinami, které se navzájem liší jen o diferenciál, jakákoli, spojitá a neurčitá proměnlivost tohoto nekonečně malého diferenciálu, a jakoby v předvečer, než nastane nulou (*à la veille d'estre zero*), umožní vždy nalézt menší, než je udaný diferenciál. Což na způsob Starých dokazuje, že vzdor diferenciálu mohou být tyto veličiny vzaty jako sobě rovné.“ (tamt., 357)

Spíše než exhaustivní důkaz toto připomíná slovní hříčku; avšak její sdělení je zřejmé: veličiny jsou si rovny, neboť diferenciál se nachází „v předvečer vymizení“. Na pomoc byl později povolán Leibniz, avšak jeho vysvětlení o užitečných, dobře založených fikcích věřící francouzské infinitesimalisty zklamalo; a jeho přirovnání nesrovnatelných veličin k zrnku písku v doslovném čtení pouze poskytlo munici odpůrcům, neboť pochopitelně bylo vzato doslova.[283] Další pokračování kontroverze – jež se začínala protahovat, a proto jí byli ustaveni soudci, a protože šlo o moc, nadále nebylo možno ji udržet za zavřenými dveřmi Akademie a zvrhávala se do čistě osobních a politických manévrů, kde šlo již jen o vítězství – týkalo se, jak víme, nepřesností počtu. Domnělé omyly Rolle dokládal na příkladech určení krajních hodnot křivek, jako kdyby toto mělo být vše, co geometrie nabízela; a Varignon je postupně vyvracel s poukazem na Rolleovu neznalost počtu. Jednotlivými příklady se nemá příliš smysl zabývat; jak už tomu bývá, jejich přínosem bylo hlubší prozkoumání podmínek určování maxim a minim a náraz, řeklo by se později, na body nespojitosti.[284] Jeden příklad si nicméně zmínit zaslouží.

---

283 V dopise Varignonovi, který byl částečně publikován v *Journal des Sçavans* (JS 1702, 183-186; MS IV, 91-95).

284 Na toto téma si markýz de l'Hospital a Johann Bernoulli vyměnili četné úvahy a nejistota ohledně podmínek extrémních hodnot například v hrotech a dalších význačných bodech se projevuje i na stránkách *Analýzy nekonečně malých*. Pojednáno je o tom v jejím komentáři.

Roku 1702, kdy na půdě Akademie rozepře pomalu utichá, Michel Rolle znovu zasahuje, tentokrát zcela veřejně, článkem *Règle et Remarques pour le problème générale des tangentes.*[285] Jeho posláním bylo dokázat, že diferenciální počet není s to určit tečny ke všem geometrickým křivkám, k čemuž mu posloužil příklad křivek o dvojím bodu. Jednalo se vlastně o útok na L'Hospitalovo pravidlo, neboť při určení tečny dával známý postup coby výsledek opět neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, což Rolle vyhodnotil jako slepou uličku diferenciálního počtu.[286] Odpovědi, opakovat diferenciaci, se tehdy ujal právě z politických důvodů nový účastník sporu, L'Hospitalův chráněnec a pozdější akademik Joseph Saurin, kde mimo jiné s jistou horlivostí napsal:

> „Věhlasný autor knihy [*Analýzy nekonečně malých*] vyřešil tento problém s obratností a lehkostí, která je mu vlastní. A to způsobem, jenž je zcela podivuhodný; jak lze spatřit v knize samotné. P. markýz de l'Hospital tedy shledává, že když budeme diferencovat čitatel a jmenovatel zlomku [...]“ (JS 1702, 526)

285 Zabírá celé dubnové číslo *Journal des Sçavans* 1702.
286 JBB (III, 6).

Analýza nekonečně malých.

Netřeba se domýšlet, co asi tato věta udělala s objevitelem L'Hospitalova pravidla, jímž byl *Johann Bernoulli.*[287] Třebaže za tato slova markýz přímo nemohl, to, že je, byť asi ne s lehkým srdcem, nechal být, mu Johann odpustit nemohl. Svého pravidla mu na celé *Analýze* bylo líto snad nejvíce. Zřejmě i s touto neshlazenou útržkou na duši a nespravedlností Fontenellovy *Chvalořeči* okamžitě po markýzově smrti vydává článek s nanejvýš výmluvným názvem *Johanna Bernoulliho zdokonalení svého pravidla vydaného ve franc. knize Analýza nekonečně malých, článek 163 atd.*[288] Tímto se začíná dlouhý Johannův smutný zápas o uznání pravdivého stavu věcí, jehož ozvuky se linuly celým předešlým výkladem, a který ještě zesílí roku 1716, kdy podruhé vychází *Analýza nekonečně malých*, tentokrát pod jménem Guillaume de l'Hospital. V tomto zápase Johann Bernoulli však vždy tahal za kratší konec: markýzova památka byla výsostná, vzpomínka na jeho okouzlující osobnost živá, geometrické nadání pověstné a ve Francii jedinečné – a jeho sešity bezpečně ukryty. Johannovo rozhořčení muselo být tím zoufalejší, že netušil, že právě tyto sešity nikdo kromě madame de l'Hospital neviděl – ani Varignon a Malebranche při vydávání kuželoseček, ani Fontenelle při sepisování *Éloge*, ani nikdo další.[289] A tak nutně musel podezírat všechny z obludného spolčení. Naproti tomu sám Johann byl, mimo jiné, pověstný svými výpady, sváry, obviněními kde koho, včetně vlastního bratra. Těžko se divit, že mu až na Leibnize, Varignona a pár přátel nikdo nevěřil a vůbec nikdo veřejně nedal za pravdu. Zejména také z toho důvodu, že za života markýze de l'Hospitala nedal žádné znamení o tvůrci a skutečném živiteli *Analýzy nekonečně malých*; a zajisté také z toho důvodu, že tato temná tíseň a hněv jej samého často vedly k

287 Viz *celý* dopis Varignonovi z 18. července 1705, kde Johann pokládá jeden výtažek z markýzových dopisů za druhým, jež týkaly jeho pravidla a prosí, ať je Saurinovi ukáže a pak: „uvidí, že ona *obratnost* a ona *lehkost* nebyly jeho, komu je přisuzuje býti *vlastními*; uvidí, že to nebyl on, kdo shledává, že *diferenciací* atd.; a konečně uvidí, že mě zbavuje toho, co mi právem náleží, aby to věnoval druhému, který na to neměl žádný nárok a přeci to velmi nevlídně přijímá; protože abych Vám řekl po pravdě, nesmírně mě pohoršilo vidět, že p. markýz de l'Hospital ke mně má tak málo ohledů, aby nechal vytisknout nebo alespoň dovolil vytisknout věci, které natolik odporují pravdě; nemohl se spokojit s tím, že jsem mu přenechal tu čest vydat *Analýzu nekonečně malých*, aniž bych veřejnosti sdělil, že jsem mu k tomu poskytl látku [...]"(JBB III, 167-174). I přes výhrůžky zveřejněním dopisů, přesto trvalo velice dlouho, než Bernoulli tyto výtažky Varignonovi, a pouze jemu, poskytl. Viz Costebelův úvod (JBB III, 12).

288 *Johannis Bernoulli perfectio regulae suae editae in libro gall. Analyse des infiniment petits, art. 163 etc* (AE 1704, 375-380).

289 26. února 1707, N° 95 „namlouvá se, že p. de l'Hospital musel mít zvláštní klíč k řešení těchto výsostných otázek, ale už nestojí za to zmínit, že pouze mně samému byl dlužen tento klíč a že beze mne by nikdy nic nenašel, vzhledem k tomu, že před mým příjezdem do Paříže o něm nic nevěděl. Str. 127 správně chce poctít otce Malebranche jako průvodce p. markýze de l'Hospitala vědami obecně, ale míní se, že by to bylo pohanou zesnulého přiznat, že jsem mu sloužil jako průvodce vědou nekonečna, když jsem ho vedl nejen písmem, ale i hlasem, neboť jaká hanebnost (pomyslí si nepochybně můj závistivý neznámý), jaká hanebnost říci, že věhlasný markýz věkem 31 let se v nejvýsostnější geometrii nechal vést za ruku mladým, čtyřiadvacetiletým Švýcarem." (tamt., 214) atd.

nepravdivému líčení onoho pravdivého stavu věcí, až na hranici pomluvy. Když například neváhal – poprvé veřejně – ve své inaugurační řeči na universitě v Basileji prohlásit, že celá *Analýza nekonečně malých* je jen francouzským překladem jeho *Lectiones*.[290] Není divu, že Varignon mu na toto řekl, asi jako si řekli všichni ostatní: *je suis tombé des nues*.[291] Neboť to prostě není pravda, jak čtenář bude moci nahlédnout z komentáře na konci této knihy.

Zde nebudeme soudit, úsudek z *míry závislosti* si každý, jak už bylo řečeno, může udělat sám. Ostatně se stejně tak předchozím výkladem proplétaly markýzovy výroky či spíše mlčení o *svých* sešitech s diferenciálním počtem; vyznání *svým* učitelům; zprávy o *Kuželosečkách* a nakonec ujištění Johannovi Bernoullimu, že „mu dá po právu vše, co mu náleží“[292] (a mimo to také markýzovy směnky na „důstojnou subsistenci“). Místo toho se Johann mezi duchovními otci *Analýzy nekonečně malých* ocitl, byť jistě na výsadnějším místě, v jedné řadě se svým bratrem: „prokázal jste mi mnoho příliš úcty, když o mě v předmluvě mluvíte tak příznivě“.[293] A přeci tato strašlivá slova neznamenala konec přátelství; v tomto vzájemném zaklínění se už nedalo nic dělat. O věci promluvit by patrně znamenalo vyzradit, že za markýzovu „přízeň“ jeden z nejvrcholnějších geometrů doby před ostatními skrýval své úžasné objevy ku vyšší slávě a dokonalosti analýzy;[294] a po markýzově smrti už bylo pozdě. Zahráno to bylo mistrně.

Avšak tyto úvahy by bylo lze vršit *ad libitum* do nekonečna. Obraťme se tedy konečně k tomu, co povětšinou z markýzových otázek a návrhů a Johannových řešení povstalo, totiž k *Analýze nekonečně malých*, neboť ta je zde tím podstatným. Pro svoji dobu, což může být první hledisko vyjádření, byla *Analýza* takřka výbuchem supernovy, zázrakem, kterým jako by byla snesena ze země nekonečna nauka vyhrazená do té doby jen pár vyvoleným. „Mystická kabala“ byla náhle v nevídaně obecném a řádném podání představena všem k nahlédnutí. Byť se tedy Fontenellova chvalořeč markýze de l'Hospitala mohla v některých směrech ukázat jako zavádějící, v popisu *Analýzy nekonečně malých* je jeho očité svědectví zcela výstižné: staré pravdy jako by se na jejích stránkách ztrácely v zástupu nových a vznikaly s takovou lehkostí, až bylo líto námahy jejich dřívějších objevitelů; vše zde vycházelo s lehkostí až podezřelou, všechna pravidla byla obecná a

290 Totéž je zopakováno zcela drsně v právě citovaném dopise: „p. de l'Hospital na vytvoření této knihy neměl větší podíl, než že ji přeložil do francouzštiny, na základě látky, co jsem mu dal“. (tamt., 215).

291 (Tamt., 224) a stále v „posledním překvapení“ již nikterak překvapivě pokračuje úsudkem, proč se o tom za markýzova života nezmínil atd.

292 N° 64, 30. června 1696 (JBB I, 320).

293 „Dostal jsem exemplář Vaší knihy, velice poníženě Vám za ni děkuji. Prokázal jste mi příliš mnoho úcty, když o mě v předmluvě mluvíte tak příznivě; až také něco sepíšu, nezapomenu se Vám odvděčit. Vysvětlujete věci velice srozumitelně; nacházím v tom také krásný řád a pěkně uspořádaná tvrzení; vše je tam obdivuhodně dobře provedeno a tisíckrát lépe, než bych sám svedl. Konečně bych si přál jedině, abyste na čelo knihy býval připojil své jméno, což by jí dalo větší lesk a více autority naší nové metodě. Musím Vám však s dovolením říci ještě jedno, připadá mi, že jste příliš štědrý, když vzdáváte díky mému bratru, jako byste použil jeho objevy a přesto, ve Vaší knize jsem doposud nezaznamenal nic, co by si můj bratr mohl po právu připsat.“

294 Otázkou je, jak navrhuje Spiess, co by na toto asi řekl Leibniz, který dlel ve městě, jež se dokonce v současné němčině používá za synonymum nudy.

stačilo nechat se unášet „poklidným proudem důsledků".[295] Vskutku až s jistou nenápadnou, rafinovanou krutostí bere markýz jeden slavný výsledek dějin za druhým, křivky, otázky, objevy; a vykazuje je nezúčastněně coby důsledky a zvláštní případy svých pravidel; a samo sebou, se stejnou samozřejmostí otevírá cesty nové. O nadšení, jež kniha vzbudila především u mladých geometrů, cosi málo padlo výše.[296] Díky *Analýze* nyní mohl téměř každý žák hravě překonávat staré a zasloužilé, pod nimiž se jejich židle začínaly povážlivě kymácet: kniha tedy byla *revoluční*. Její úspěch byl tak obrovský, že se o ní dokonce mezi „frivolním lidem pařížským" zpívaly písně a psaly vaudevilly;[297] její význam pro budoucnost, čímž se dostáváme k druhému hledisku *Analýzy*, a stopa v následujícím století – kdy se dočkala překladů, komentářů, včetně brzkého přepisu do fluxionálního značení – spočívá v tom, že nastoupila cestu prosazení infinitesimálních metod se všemi důsledky, jež to mělo pro matematiku, fyziku, vědu techniku, zrod průmyslové civilizace i lidský úděl obecně. A konečně dnes, což je třetí hledisko významu *Analýzy nekonečně malých*, může přispět[298] jednak filosofické a obecně vzdělané veřejnosti v pozvednutí matematického myšlení, neboť, ze zákona kontinuity, základní infinitesimální vztahy tu lze jednoduše, *geometricky nahlédnout*; jednak matematické veřejnosti proniknout do hlubších myšlenkových počátků a kořenů matematické analýzy vyrůstajících z úvah filosofických, fyzikálních i teologických, a tím lépe pochopit její současnou podobu i možné budoucí cesty.

Snad se z výše uvedeného jasně ukazuje, že opravdu není zapotřebí zdůvodňovat, proč překládat *Analýzu nekonečně malých*.

---

295 Fontenelle (1715, 57-59).

296 Viz p. 78.

297 Montucla II, 398. Inkriminovaný vaudeville se údajně nazýval *Infiniment-petits* a žertovně pojednával o markýzově vratkém zdraví a nevelké náklonnosti markýzy, Marie-Charlotte de Romillé, vstříc nové geometrii. Bohužel ani Montuclovi se již koncem 18. století nepodařilo dohledat jeho slova a bohužel také neuvádí, odkud zmíněný příběh čerpá. Nelze tedy ověřit, zda-li markýzino rozčarování vskutku platilo právě geometrii nekonečně-malého. Nicméně nakolik autor těchto řádků již od Rabelaise zná rozverný lid pařížský, je vcelku patrné, co vše tu může znamenat *infiniment petits* – a bezpochyby se zde nabízí místo pro vědeckou hypotézu. Budiž to však přenecháno mladším, neboť, jak říká tentokrát Montaigne, v našem případě již pomalu přichází věk, kdy se těžiště života přesouvá jaksi o patro výš, tj. do břicha. Přesto však se jistá stopa v této souvislosti rýsuje na stránkách dopisů Madame de Sévigné, XI, Lettre MCDIV, 408, kde Madame de Coulanges píše roku 1704 Madame de Grignan: „P. de l'Hôpital je mrtev; to byl jeden z Vašich výbojů (*conquête*): jeho žena tu zůstává s čtyřiceti tisíci tolarů renty; což dosti mění její postavení; vždyť dosud ji nechávali žít jen z *nekonečně malých*." Následkem narážky Paní de Coulanges pak pravděpodobně vznikl i jeden z mnoha kupletů věnovaných poměru Madame de l'Hospital se slavným kazatelem Congrégation de l'Oratoire (v. 26), Jean-Babtiste Massillonem. Čili pro milovníky vaudevillu, včetně pokusu o překlad, na nápěv *De tous les Capucins du monde*:

Dans le cours de mon hyménée,	(Během svého manželství,
Avec mon époux renfermée,	S chotěm v jeho hájemství,
J'admirais ses doctes écrits:	Diva z jeho knih znalých:
Mais par Massillon dirigée	Však v rukou Massillona
Sur les infiniment petits	Jsem z nekonečně malých
Je suis enfin désabusée.	Konečně vyléčena.)

K Massillonovi, jemuž kdosi řekl: „Můj otče, Vaše morálka mě děsí; ale Váš život mě uklidňuje.", viz PSR IV, 251-253.

298 S drobnou oporou v tom, co dosud bylo touto prací řečeno.

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.

Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.

SECONDE EDITION.

A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du
Quay des Auguſtins du côté du Pont S. Michel.

MDCCXVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

GUILLAUME-FRANÇOIS-ANTOINE
DE
L'HOSPITAL

A N A L Ý Z A

NEKONEČNĚ MALÝCH

ZA ÚČELEM POCHOPENÍ KŘIVÝCH ČAR

PŘELOŽIL JAN MAKOVSKÝ

PŘEDMLUVA.

Analýza vyložená v této práci vychází z běžné analýzy a přeci se od ní velice liší. Obyčejná analýza se zabývá pouze konečnými veličinami, tato proniká až do samého nekonečna. Srovnává nekonečně malé rozdíly konečných veličin; odhaluje poměry mezi nimi, a umožňuje tak stanovit poměry konečných veličin, které ve srovnání s nekonečně malými vystupují jako nekonečné. Můžeme dokonce říci, že tato analýza nekonečno přesahuje. Neomezuje se totiž jen na nekonečně malé diference, nýbrž nachází poměry i mezi rozdíly těchto diferencí a dále mezi diferencemi třetími, čtvrtými a tak dále. Nikde nenachází mez, která by ji mohla zastavit, a takto nezahrnuje vlastně jen nekonečno, ale i nekonečno nekonečna či nekonečnost nekonečen.

Jedině analýza tohoto druhu nás mohla dovést k pravým principům křivých čar. Jelikož totiž křivky nejsou ničím víc než mnohoúhelníky o nekonečnu stran a vzájemně se liší jen co do úhlů, které tyto nekonečně malé strany mezi sebou svírají; pak tedy jedině analýze nekonečně malých přísluší určovat polohu těchto stran, a odtud i jimi tvořené zakřivení, tj. tečny křivek, kolmice k nim,[1] body přehybu nebo vratu, paprsky odražené, lomené, atd.

Vepsané či opsané mnohoúhelníky, které při nekonečném zmnožení svých stran s křivkami nakonec splývají, pokládali matematici odjakživa za křivky samotné. U toho však zůstalo a teprve až objev zde pojednávané analýzy dal plně pocítit dosahu a plodnosti této myšlenky.

Co nám v těchto věcech zanechali staří, a *Archimédes* zvláště, je zajisté obdivuhodné. Ale kromě toho, že se dotkli jen nemnoha křivek a to ještě jen zlehka, jedná se téměř pokaždé o jednotlivosti a neuspořádaná tvrzení, která nesvědčí o žádné přesné a důsledné metodě. Bylo by však nespravedlivé jim to jakkoli vyčítat, neboť potřebovali výjimečné síly ducha,[a, 2] aby pronikli tolika temnými místy a vkročili jako první na zcela neprobádaná území. A jestliže nepostoupili daleko, jestliže kráčeli dlouhými oklikami, pak alespoň nezabloudili, třebaže *Viette*[b, 3] je jiného názoru. Oč pak byly jejich cesty obtížnější a trnitější, o to je obdivuhodnější, že se nedostali na scestí. Nezdá se zkrátka, že by staří bývali ve své době mohli vykonat víc: vykonali tolik, co by duchové naší doby vykonali na jejich místě; a kdyby zas oni byli na našem, jistě by docházeli ke stejným náhledům jako my. Toto vše vyplývá z přirozené rovnosti lidských myslí a nezbytné následnosti objevů.

Není tedy nijak překvapující, že staří nedošli dále. Těžko se ovšem vynadivit tomu, že velcí lidé, a bez pochyby stejně tak velcí jako ti starověcí, tak dlouho přešlapovali na místě; a že se takřka v pověrčivé úctě k jejich dílům spokojili s četbou a komentáři, a to aniž by si dovolili využít jejich poznatků jinak než jen, aby se jich mohli držet; aniž by se odvážili toho zločinu občas samostatně

a Archimedis de lineis spiralibus tractatum cum bis terque legissem, totasque animi vires intendissem, ut subtilissimarum demonstrationum de spiralium tangentibus artificium adsequerer; nusquam tamen, ingenue fatebor, ab earum contemplatione ita certus recessi, quin scrupulus animo semper haereret, vim illius demonstrationis me non percepisse totam, etc. Bullialdus, *Praef. de lineis spiralibus.*

b Si verè Archimedes, fallaciter conclusit Euclides, etc. *Supl. Geom.*

myslet a upřít svůj pohled za hranice toho, co objevil starověk. Tak mnozí pracovali, psali, počet knih narůstal a přesto nic nepokročilo. Veškerá práce řady staletí vedla jen k tomu, že se svět zaplnil uctivými komentáři a stále se opakujícími a často dost žalostnými překlady originálů.

V takovém stavu se nacházela matematika, a hlavně filosofie, až do časů p. *Descarta*. Tento veliký člověk, poháněn svým géniem a vědomím převahy, zanechal starých, aby následoval jen právě ten rozum, jímž se řídili oni. A tato šťastná opovážlivost, jež byla považována za vzpouru, se vyplatila bezpočtem nových a užitečných myšlenek zejména ve fyzice a geometrii. Tehdy lidé otevřeli oči a připadlo jim myslet.

Pokud se omezíme na matematiku, která jediná nás tu zajímá, je možno říci, že p. *Descartes* začal tam, kde staří skončili, totiž vystoupil s řešením otázky, na níž, jak praví *Pappus*,[a] všichni staří ztroskotali.[4] Je známo, jak daleko p. *Descartes* posunul analýzu a geometrii; i to, kterak jím provedené propojení analýzy a geometrie usnadňuje řešení bezpočtu otázek, jež se do jeho doby jevily neuchopitelné. Jelikož se však věnoval především řešení rovnic, studoval křivky jen do té míry, nakolik mu mohly pomoci při nacházení jejich kořenů; a jelikož si v tomto směru vystačil s obyčejnou analýzou, nijak se nepokoušel hledat nějakou další. Běžnou analýzu nicméně zdařile používal k hledání tečen a k tomu objevenou metodu shledal natolik krásnou, že se nezdráhal prohlásit[b] *tuto otázku za nejužitečnější a nejobecnější nejen ze všech, co znal*, *ale i těch, které si kdy v geometrii přál znát*.[5]

Protože se konstrukce úloh za pomoci řešení rovnic dostala díky Descartově geometrii, která sama k tomu otevřela široké pole možností, značně do módy, začala se jí věnovat většina geometrů. Také oni učinili řadu nových objevů, jež narůstají a zdokonalují se s každým dnem.

Co se týče p. *Pascala*, podíval se na věc z jiné stránky: zkoumal křivky jako takové, a to po způsobu mnohoúhelníků. Vyšetřil délky některých křivek, plochy jimi ohraničené, tělesa opsaná těmito plochami a jejich objemy, těžiště těchto ploch a těles atd. A jen na základě úvah s jejich prvky, tj. nekonečně malými, objevil metody obecné, a tím pozoruhodnější, že k nim, jak se zdá, dospěl jedině silou ducha a bez analýzy.

Nedlouho po té, co byla zveřejněna Descartova metoda nalézání tečen, objevil p. *de Fermat* jinou metodu,[6] kterou samotný p. *Descartes* nakonec uznal[c] v mnoha směrech jednodušší.[7] Je však pravda, že stále nedosahovala takové jednoduchosti, k jaké ji později přivedl p. *Barrow*, když přesněji uvážil povahu mnohoúhelníků. Ta totiž přirozeně nabízí ke zvážení malý trojúhelník tvořený částicí křivky obsaženou mezi dvěma nekonečně blízkými ordinátami, diferencí těchto dvou ordinát a diferencí odpovídajících abscis.[8] Tento trojúhelník je podobný trojúhelníku, který je

a *Collect. Mathem*., Lib, 7, initio.
b *Geomet*., Liv. 2.
c *Lett. 71. Tom* 3.

třeba utvořit z tečny, ordináty a subtangenty; pročež nás tato metoda díky prosté podobnosti ušetří provádění veškerých výpočtů, jež vyžadovaly metoda p. *Descarta* a původně i tato, Fermatova metoda samotná.

Tím však p. *Barrow*[a] neskončil a okolo této metody rozvinul vlastní druh počtu.[9] Aby bylo možno jej využít tu nicméně, stejně jako u metody p. *Descarta*, scházel způsob, jak se zbavit zlomků a odstranit všechna odmocnítka.

Mezery tohoto počtu zaplnil až věhlasný[b, 10] p. *Leibniz*. Tento učený geometr začal tam, kde p. *Barrow* a ostatní skončili. Jeho počet ho přivedl do míst doposud neznámých, kde vykonal objevy vzbuzující úžas u nejzdatnějších matematiků celé Evropy. Byli to páni *Bernoulliové*, kdo první zahlédli krásu tohoto počtu a pozvedli jej natolik, že byli s to zdolávat překážky, na které by si byl dříve nikdo ani netroufal.

Záběr tohoto počtu nezná mezí: hodí se stejně na mechanické křivky, jako na křivky geometrické;[11] nezatěžují jej znaky odmocnin a často dokonce přicházejí vhod; lze jej rozšířit na libovolný počet proměnných; srovnávání nekonečně malých všech řádů se v něm provádí se stejnou lehkostí. Odtud pak pramení bezpočet překvapivých objevů ohledně přímých i křivých tečen, otázek *De maximis et minimis*, inflexních bodů a bodů vratu, evolut, kaustik odrazem i lomem atd., jak ještě v této práci uvidíme.

Dělím ji na deset oddílů. První oddíl zahrnuje principy počtu diferenciálů. Ve druhém se ukazuje, jak jej využít pro nacházení tečen ke křivkám všech druhů nezávisle na tom, kolik neurčených veličin[12] obsahují rovnice tyto křivky vyjadřující – třebaže p. *Craige*[c] se nedomníval, že by bylo možno tento počet vztáhnout i ke křivkám mechanickým nebo transcendentním.[13] Třetí oddíl ukazuje, jak tohoto počtu využít k řešení veškerých otázek *De maximis et minimis.* Ve čtvrtém pak, jak se v tomto počtu určují inflexní body a body vratu. Pátý ukazuje jeho užití pro nacházení evolut p. Huygense u všech druhů křivek. Šestý a sedmý oddíl ukazují, jak s jeho pomocí nacházet kaustiky odrazem i lomem, jejichž objevitelem je znamenitý p. *Tschirnhaus*[14] – a to opět u všech druhů křivek. Osmý ukazuje použití tohoto počtu pro nalézání bodů křivých čar, které se dotýkají nekonečna čar daných polohou, přímých nebo křivých. Devátý oddíl obsahuje řešení několika úloh, jež se odvíjejí od předchozích poznatků. A desátý oddíl představuje nový způsob užití diferenciálního počtu u geometrických křivek, odkud se vyvozuje metoda p. *Descarta* a *Hudda*,[15] která se hodí právě jedině pro tento druh křivek.

Je třeba poznamenat, že v oddílech 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8 je tvrzení jen velmi poskrovnu. Nicméně všechna jsou obecné povahy a představují jakoby metody, které lze vztáhnout na libovolný počet

a *Lect. Geomet.* p. 80.
b *Acta Erud. Lips. an* 1684. p. 467.
c *De figurarum curvilinearum quadraturis*, *part* 2.

zvláštních tvrzení. Já tak činím jen na několika vybraných příkladech, neboť jsem přesvědčen, že v matematice jsou ku prospěchu jedině metody a že knihy, které spočívají jen v podrobnostech a jednotlivých tvrzeních, jsou dobré leda k tomu, aby připravily o čas ty, kteří je píší, i ty, kdo je čtou. Úlohy devátého oddílu jsem také zařadil jen z toho důvodu, že platí za zajímavé a že jsou obecného dosahu. V desátém oddíle jde opět jen o metody, které diferenciální počet podává na způsob metod p. *Descarta* a *Hudda*. A jestli jsou tak omezené, pak je ze všeho předešlého zřejmé, že to není nedostatkem tohoto počtu, nýbrž Descartovy metody, jíž jsme tu počet diferenciálů podřídili. Ba právě naopak. Nic nedokazuje lépe mimořádnou platnost tohoto počtu, než ona celá rozmanitost metod. Při troše pozornosti totiž uvidíme, že nabízí vše, co lze vytěžit z metody pánů *Descarta* a *Hudda*; a že díky obecnému důkazu, jejž diferenciální počet podává k použití aritmetických posloupností v této metodě, nezbývá dále, co víc si ve smyslu její bezchybnosti přát.

Zamýšlel jsem připojit ještě jeden oddíl, který by napověděl něco o úžasných možnostech tohoto počtu ve fyzice. Ukázat, k jakému stupni přesnosti ji může dovést a jaký užitek skýtá pro mechaniku. V tom mi však zabránila nemoc. Veřejnost na tom ovšem nebude tratit nic a jednoho dne to dostane i s úroky.

Toto vše je nicméně stále pouze první část počtu p. *Leibnize* spočívající v sestupu od celků veličin k jejich nekonečně malým diferencím neboli diferenciálům;[16] a ve vzájemném srovnávání nekonečně malých veličin libovolného řádu: říkáme jí *počet diferenciální*. Druhá část nazývající se *počet integrální* spočívá ve výstupu od nekonečně malých ke konečným veličinám neboli celkům, které se z nich skládají, tj. v nacházení sum těchto diferenciálů. Zamýšlel jsem vydat i tuto část, avšak p. *Leibniz* mi napsal, že na věci pracuje v rámci pojednání, jež nazývá *De scientia infiniti*.[17] Nikdy bych se neodvažoval připravit veřejnost o tak krásné dílo, které jistě musí obsahovat to nejpodivuhodnější z obrácené metody tečen, rektifikace křivek, kvadratur jimi uzavřených ploch, povrchů jimi opsaných těles, jejich objemech, odhalování těžišť atd. Dokonce i tuto zde přítomnou práci uveřejňuji jen proto, že mne o to prosil ve svých dopisech; a také to považuji za nezbytné k tomu, aby duchové byly připraveni pochopit vše, co v těchto věcech dále bude moci být objeveno.

Přiznávám ostatně, že za mnohé vděčím poznatkům p. *Bernoulliů*, a to zejména toho mladšího, který v současnosti zastává místo profesora v Grönningenu. Jejich objevů i objevů p. *Leibnize* jsem využíval neomezeně, a nebudu tedy mít nic proti tomu, když si budou činit nárok na vše, co uznají za vhodné. Sám se spokojuji s tím, co mi laskavě ponechají.

Po právu je třeba uznat, což učinil[a, 18] i samotný p. *Leibniz*, že učený p. *Newton* také nalezl něco jako diferenciální počet, jak je zjevné z vynikající knihy nazvané *Philosophiæ naturalis principia mathematica* vydané roku 1687, která na tento počet skoro celá ukazuje.[19] Nicméně značení[20] p.

a *Journal des Sçavans du 30 Août* 1694.

Leibnize činí jeho počet mnohem lehčím a obratnějším nemluvě o tom, jak úžasným pomocníkem v mnohých případech je.

Když se tiskla poslední stránka tohoto pojednání, padla mi do rukou kniha p. *Nieuwentiita*. Její název, *Analysis infinitorum*, mě zaujal, a tak jsem si ji prošel. Zjistil jsem však, že se od této velice liší: kromě toho, že její autor nepoužívá značení p. *Leibnize*, rovněž odmítá druhé, třetí atd. diferenciály. Jelikož jsem na tomto základě vystavěl nejlepší část tohoto díla, cítil jsem povinnost na jeho námitky odpovědět a ukázat, jak jsou vratké, kdyby tomu již plně neučinil za dost p. *Leibniz* v *Aktech* lipských.[a] Ostatně oba postuláty či předpoklady uvedené na začátku tohoto pojednání, z nichž celé toto dílo vychází, jeví se mi natolik zřejmé, že si nemyslím, že by mohly mysl pozorného čtenáře nechat na pochybách. Mohl jsem je dokonce snadno dokázat po způsobu starověkých matematiků, kdybych si byl neuložil být stručný ve věcech, které jsou již známy, a přidržet se především těch, které jsou nové.

a *Acta Erud. an. 1693, pag. 310 & 369*

ANALÝZA

NEKONEČNĚ MALÝCH

PRVNÍ ČÁST[21]

O POČTU DIFERENCIÁLNÍM

ODDÍL PRVNÍ.

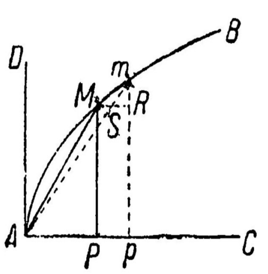
Kde jsou uvedena pravidla tohoto počtu.

DEFINICE I.

Nazýváme *proměnnými* veličiny, které spojitě rostou nebo klesají; veličiny *konstantní* jsou naopak ty, které zůstávají těmi samými, zatímco se ostatní mění. Takto u paraboly představují ordináty a abscisy proměnné veličiny, zatímco parametr[22] je veličinou konstantní.

DEFINICE II.

Nekonečně malou část, o kterou spojitě roste nebo klesá proměnná veličina, nazveme jejím *diferenciálem*. Budiž například nějaká libovolná křivá čára *AMB* (Obr 1), jejíž osou neboli průměrem je *AC* a jednou z jejích ordinát úsečka *PM*;[23] a budiž druhá ordináta *pm*, která je *PM* nekonečně blízká. Nyní jestliže povedeme úsečku *MR* rovnoběžnou s *AC*, tětivy *AM*, *Am*; a ze středu *A* o poloměru *AM* opíšeme malý kruhový oblouk *MS*: pak *Pp* bude diferenciálem *AP*, *Rm* diferenciálem *PM*, *Sm* diferenciálem *AM* a *Mm*



Obr. 1

diferenciálem oblouku *AM*. A stejně tak bude malý trojúhelník *MAm* o základně v oblouku *Mm* diferenciálem výseče *AM*; a malá plocha *MPpm* diferenciálem plochy mezi úsečkami *AP*, *PM* a obloukem *AM*.

DŮSLEDEK.

1. JE zjevné, že diferenciál konstantní veličiny není nic, čili že je nulový: neboli (což je totéž), že konstantní veličiny žádný diferenciál nemají.

UPOZORNĚNÍ.

Nadále budeme k označování diferenciálu proměnné veličiny, kterou samotnou vyjadřujeme jediným písmenem, používat znaku či symbolu d*; a aby nedocházelo k záměnám, v jiném smyslu znak* d *v rámci tohoto počtu již používat nebudeme. Jestliže například označíme proměnnou* AP *jako* x*;* PM *jako* y*;* AM *jako* z*; oblouk* AM *jako* u*; plochu* APM *ohraničenou přímými a křivými čarami jako* s *a výseč* AM *jako* t*: pak* dx *bude vyjadřovat hodnotu* Pp*;* dy *hodnotu* Rm*;* dz *hodnotu* Sm*;* du *hodnotu malého oblouku* Mm*;* ds *hodnotu roviny* MPmp *a konečně* dt *bude označovat diferenciál malého trojúhelníku* MAm *ohraničeného přímými a křivými čarami.*

I. POŽADAVEK NEBOLI PŘEDPOKLAD.

2. POŽADUJEME, aby bylo možno brát zaměnitelně jednu jako druhou dvě veličiny, které se od sebe liší jen o veličinu nekonečně malou; anebo (což je totéž), abychom mohli veličinu, která se ve srovnání se sebou samou zvětší nebo zmenší jen o veličinu nekonečně menší, pokládat za veličinu původní. Požadujeme například, abychom *Ap* mohli brát za *AP*, *pm* za *PM*, plochu *Apm* za plochu *APM*, malou plochu *MPpm* za malý obdélník *MPpR*, malou výseč *AMm* za malý trojúhelník *AMS*, úhel *pAm* za úhel *PAM*, atd.[24]

II. POŽADAVEK NEBOLI PŘEDPOKLAD.

3. POŽADUJEME, aby křivou čáru bylo možno pokládat za seskupení nekonečně mnoha nekonečně malých čar; anebo (což je totéž) za mnohoúhelník o nekonečném počtu nekonečně malých stran, které prostřednictvím úhlů svíraných vespolek určují křivost čáry. Požadujeme například, abychom úsek *Mm* křivky a kruhový oblouk *MS* mohli coby nekonečně malé pokládat za úsečky tak, aby bylo možno malý trojúhelník *mSM* počítat za přímočarý.[25]

UPOZORNĚNÍ.

Nadále běžně předpokládáme, že poslední písmena abecedy z, y, x, *atd. označují proměnné veličiny*; *a naopak první* a, b, c *atd. veličiny konstantní tak, že když se* x *stává* $x+dx$, *pak se* y, z, *atd. stávají* $y+dy$, $z+dz$ *atd.* (§ 1), *zatímco* a, b, c, *atd. zůstanou těmi samými* a, b, c *atd.*

TVRZENÍ I.

Zadání.

4. NAJÍT *diferenciál několika mezi sebou sečtených, anebo od sebe odečtených veličin.*

Nechť je třeba najít diferenciál $a+x+y-z$. Za předpokladu, že x vzroste o nekonečně malou část, tj. stane se $x+dx$; pak y přejde v $y+dy$ a z v $z+dz$; a pokud jde o konstantu a, zůstává (§ 1) tou samou a. Takto se daná veličina $a+x+y-z$ stane $a+x+dx+y+dy-z-dz$ a její diferenciál, který získáme odečtením zadané veličiny od této poslední, tedy bude činit $dx+dy-dz$. Stejně tak je tomu i v ostatních případech. Což dává následující pravidlo.

PRAVIDLO I.

Pro veličiny mezi sebou sečtené, nebo odečtené.

Vezměme diferenciál každého členu zadané veličiny a při zachování původních znamének z nich sestavme novou veličinu, která pak bude hledaným diferenciálem.[26]

TVRZENÍ II.

Zadání.

5. NAJÍT *diferenciál součinu několika mezi sebou vynásobených veličin.*

1°. Diferenciál xy je $y\,dx+x\,dy$. Neboť když se x stane $x+dx$, y se stane $y+dy$; a tudíž se xy stane $xy+y\,dx+x\,dy+dx\,dy$, což představuje součin $x+dx$ krát $y+dy$. Jeho diferenciál tedy bude činit $y\,dx+x\,dy+dx\,dy$, tj. (§ 2) $y\,dx+x\,dy$, jelikož $dx\,dy$ je ve srovnání se zbylými členy $y\,dx$ a $x\,dy$ nekonečně malou veličinou. Jestliže totiž například $y\,dx$ a $dx\,dy$ vydělíme dx, dostáváme jednak y, jednak dy, což je diferenciál y, a je tedy nekonečně menší. Odtud plyne, že diferenciál součinu dvou veličin se rovná součinu diferenciálu první z veličin krát druhá veličina plus součinu diferenciálu druhé veličiny krát veličina první.

2°. Diferenciál xyz je $yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$. Neboť když položíme součin xy jako jedinou veličinu, bude zapotřebí, jak jsme výše ukázali, vzít součin diferenciálu první veličiny $y\,dx+x\,dy$ krát druhá veličina z (což dává $yz\,dx+xz\,dy$) plus součin diferenciálu dz druhé veličiny z krát první xy (což dává $xy\,dz$); a tudíž diferenciál xyz bude činit $yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$.

3°. Diferenciál $xyzu$ je $uyz\,dx + uxz\,dy + uxy\,dz + xyz\,du$. Což se obdobně jako v předchozím případě dokáže tak, že součin xyz budeme pokládat za jednu jedinou veličinu. A stejně je tomu i ve všech ostatních případech až do nekonečna. Odtud utvoříme následující pravidlo.

PRAVIDLO II.

Pro veličiny násobené.

Diferenciál součinu několika mezi sebou vynásobených veličin je roven součtu součinů diferenciálu každé z těchto veličin krát součin ostatních veličin.

Takto diferenciál ax je $x0 + a\,dx$, tj. $a\,dx$. Diferenciál $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ pak bude činit $b\,dx - y\,dx - a\,dy - x\,dy$.[27]

TVRZENÍ III.

Zadání.

6. NAJÍT *diferenciál libovolného zlomku.*

Diferenciál $\frac{x}{y}$ je $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$. Neboť za předpokladu $\frac{x}{y} = z$ budeme mít $x = yz$;[28] a poněvadž se tyto dvě proměnné veličiny x a yz musejí navzájem vždy rovnat nezávisle na tom, zdali rostou, či klesají; plyne odsud, že jejich diferenciály, tj. jejich přírůstky nebo úbytky se též budou rovnat; a tím pádem (§ 5), když za z dosadíme jeho hodnotu $\frac{x}{y}$, dostaneme

$$dx = y\,dz + z\,dy \text{ a } dz = \frac{dx - z\,dy}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}.$$[29]

Což bylo třeba atd., odkud sestavíme následující pravidlo.

PRAVIDLO III.

Pro veličiny dělené neboli pro zlomky.

Diferenciál libovolného zlomku je roven součinu diferenciálu čitatele krát jmenovatel minus součin diferenciálu jmenovatele krát čitatel, to celé děleno čtvercem jmenovatele.

Takto diferenciál $\frac{a}{x}$ bude činit $\frac{-a\,dx}{xx}$; diferenciál $\frac{x}{a+x}$ bude $\frac{a\,dx}{aa + 2ax + xx}$.

TVRZENÍ IV.

Zadání.

7. NAJÍT *diferenciál libovolné úplné nebo neúplné mocniny nějaké proměnné veličiny.*[30]

Před tím, než vyložíme obecné pravidlo platné jak pro úplné, tak pro neúplné mocniny, je nutno nejprve vysvětlit analogii, která nastává mezi jejich mocniteli.

Je-li dána geometrická posloupnost, jejímž prvním členem je jednička, druhým pak libovolná veličina *x*; položme po řadě pod každý člen posloupnosti jeho mocnitel: zřejmě pak tito mocnitelé utvoří aritmetickou posloupnost.

Geom. posloupnost:	1,	x,	xx,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	atd.
Arit. posloupnost:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	atd.

Nyní jestliže geometrickou posloupnost prodloužíme za jedničku a aritmetickou pod nulu; pak členy aritmetické posloupnosti budou mocniteli odpovídajících členů posloupnosti geometrické. A takto -1 bude mocnitelem $\frac{1}{x}$, -2 mocnitelem $\frac{1}{xx}$ atd.

Geom. posloupnost:	x,	1,	$\frac{1}{x}$,	$\frac{1}{xx}$,	$\frac{1}{x^3}$,	$\frac{1}{x^4}$	atd.
Arit. posloupnost:	1,	0,	-1,	-2,	-3,	-4,	atd.

Jestliže však do geometrické posloupnosti zavedeme nějaký nový člen, k získání jeho mocnitele bude zapotřebí přidat patřičný člen i do posloupnosti aritmetické.

Takto $\sqrt{x}$ bude mít za mocnitele $\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$; $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $\frac{-2}{3}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $\frac{-5}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $\frac{-7}{2}$ atd. Takže výrazy $\sqrt{x}$ a $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ a $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ a $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ a $x^{-\frac{3}{2}}$ atd., budou označovat toliko jednu a tu samou věc.

Geom. posloupnost:	1,	$\sqrt{x}$,	$x\cdot 1$,	$\sqrt[3]{x}$,	$\sqrt[3]{xx}$,	$x\cdot 1$,	$\sqrt[5]{x}$,	$\sqrt[5]{xx}$,	$\sqrt[5]{x^3}$,	$\sqrt[5]{x^4}$,	x.
Arit. posloupnost:	0,	$\frac{1}{2}$,	$1\cdot 0$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{2}{3}$,	$1\cdot 0$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{2}{5}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{4}{5}$,	1.

Geom. posloupnost:	$\frac{1}{x}$,	$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$,	$\frac{1}{xx}\cdot\frac{1}{x}$,	$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$,	$\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$,	$\frac{1}{xx}\cdot\frac{1}{x^3}$,	$\frac{1}{\sqrt{x^7}}$,	$\frac{1}{x^4}$.
Arit. posloupnost:	-1,	$-\frac{3}{2}$,	$-2\cdot -1$,	$-\frac{4}{3}$,	$-\frac{3}{5}$,	$-2\cdot -3$,	$-\frac{7}{2}$,	-4.

Odtud je zjevné, že právě tak jako je $\sqrt{x}$ geometrickým průměrem mezi 1 a *x*, bude i $\frac{1}{2}$ aritmetickým průměrem jejich mocnitelů 0 a 1; a zrovna tak jako je $\sqrt[3]{x}$ první ze dvou středních geometrických úměrných mezi 1 a *x*, také $\frac{1}{3}$ bude první ze dvou středních aritmetických úměrných mezi jejich mocniteli 0 a 1.[31] A je tomu tak i v ostatních případech. Avšak z povahy těchto dvou posloupností plyne:

1°. Že součet mocnitelů libovolných dvou členů geometrické posloupnosti bude mocnitelem členu, který je jejich součinem. Takto x^{4+3}, čili x^7 je součinem x^3 krát x^4; a $x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$ neboli $x^{\frac{5}{6}}$ součinem $x^{\frac{1}{2}}$ krát $x^{\frac{2}{3}}$; a $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ neboli $x^{-\frac{2}{15}}$ součinem $x^{-\frac{1}{3}}$ krát $x^{\frac{1}{5}}$ atd. Podobně $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ neboli $x^{\frac{2}{3}}$ je součinem $x^{\frac{1}{3}}$ se sebou samou, tj. jeho čtvercem; a x^{2+2+2}, čili x^6 součinem x^2 krát x^2 krát x^2, tj. jeho krychlí; $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ neboli $x^{-\frac{4}{3}}$ zas čtvrtou mocninou $x^{-\frac{1}{3}}$. A stejně je tomu i u ostatních mocnin. Odtud je patrné, že dvojnásobek, trojnásobek atd. mocnitele libovolného členu geometrické řady je mocnitelem čtverce, krychle atd. tohoto členu; a tudíž, že polovina, třetina atd. mocnitele libovolného členu geometrické řady bude mocnitelem čtvercového, kubického atd. kořenu tohoto členu.

2°. Že rozdíl mocnitelů libovolných dvou členů geometrické posloupnosti bude mocnitelem podílu těchto členů. Takto $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}}$ bude mocnitelem podílu $x^{\frac{1}{2}}$ děleno $x^{\frac{1}{3}}$; a $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=x^{-\frac{7}{12}}$ mocnitelem podílu $x^{-\frac{1}{3}}$ děleno $x^{\frac{1}{4}}$. Přičemž je zřejmé, že násobit $x^{-\frac{1}{3}}$ krát $x^{-\frac{1}{4}}$ je to samé, jako dělit $x^{-\frac{1}{3}}$ děleno $x^{\frac{1}{4}}$. A je tomu tak i u ostatních veličin. Nuže mohou nastat dva různé případy.

První, kdy je mocnina úplná, tj. jejím mocnitelem je celé číslo. Diferenciálem xx je $2\,x\,dx$, diferenciálem x^3 je $3\,xx\,dx$, diferenciálem x^4 je $4\,x^3\,dx$ atd. Ježto totiž čtverec x není nic jiného než součin x krát x, jeho diferenciál bude (§ 5) $x\,dx+x\,dx$, tj. $2\,x\,dx$. Zrovna tak poněvadž krychle x není nic víc než součin x krát x krát x, její diferenciál (§ 5) bude $xx\,dx+xx\,dx+xx\,dx$, tj. $3\,xx\,dx$. A protože to samé platí pro všechny mocniny až do nekonečna, za předpokladu, že m označuje nějaké libovolné celé číslo, diferenciál x^m bude $m\,x^{m-1}\,dx$.

Jestliže je mocnitel záporný; ukáže se, že diferenciál x^{-m} neboli $\frac{1}{x^m}$ bude

$$\frac{-m\,x^{m-1}dx}{x^{2m}}=-m\,x^{-m-1}\,dx.$$

A druhý případ, kdy je mocnina neúplná, tj. jejím mocnitelem je číslo lomené. Nechť je třeba najít diferenciál $\sqrt[n]{x^m}$ neboli $x^{\frac{m}{n}}$ (kde $\frac{m}{n}$ vyjadřuje nějaké libovolné lomené číslo); položíme $x^{\frac{m}{n}}=z$. Jestliže veškeré členy umocníme na n-tou, budeme mít $x^m=z^n$; a pokud nyní vezmeme diferenciály tak, jak jsme ukázali prvním případě, dostáváme

$$mx^{m-1}\,dx = n\,z^{n-1}\,dz \text{ a } dz = \frac{m\,x^{m-1}\,dx}{n\,z^{n-1}} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}\,dx,$$

čili

$$\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}},$$

když za nz^{n-1} dosadíme jeho hodnotu $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Pokud je mocnitel záporný, pak zjistíme, že diferenciál $x^{-\frac{m}{n}}$ čili $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ bude

$$\frac{-\frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}\,dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}\,x^{-\frac{m}{n}-1}\,dx.$$

Což dává následující obecné pravidlo.

PRAVIDLO IV.

Pro úplné nebo neúplně mocniny.

Diferenciál libovolné úplné nebo neúplné mocniny nějaké proměnné veličiny se rovná součinu mocnitele této mocniny krát sama tato veličina umocněná na stupeň o jednotku nižší a vynásobená svým diferenciálem.

Takto za předpokladu, že *m* vyjadřuje nějaké libovolné celé nebo lomené, kladné či záporné číslo; a *x* libovolnou proměnnou veličinu: pak diferenciál x^m bude vždy $mx^{m-1}\,dx$.[32]

PŘÍKLADY.

Diferenciál krychle $ay-xx$, tj. $\overline{ay-xx}^3$ je roven

$3\times\overline{ay-xx}^2\times\overline{a\,dy-2\,x\,dx} = 3\,a^3\,yy\,dy - 6\,aaxxy\,dy + 3\,ax^4\,dy - 6\,aay\,yx\,dx + 12\,ayx^3\,dx - 6\,x^5\,dx.$

Diferenciál $\sqrt{xy+yy}$ neboli $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$ je roven

$$\frac{1}{2}\times\overline{xy+y^2}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{y\,dx+x\,dy+2\,y\,dy},$$

čili

$$\frac{y\,dx+x\,dy+2\,y\,dy}{2\sqrt{xy+yy}}.$$

Diferenciál $\sqrt{a^4+axyy}$ neboli $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$ se rovná

$$\frac{1}{2}\times\overline{a^4+axyy}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{ayy\,dx+2\,axy\,dy},$$

čili

$$\frac{ayy\,dx+2\,axy\,dy}{2\sqrt{a^4+axyy}}.$$

Diferenciál $\sqrt[3]{ax+xx}$ neboli $\overline{x+xx}^{\frac{1}{3}}$ je roven

$$\frac{1}{3}\times\overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}}\times\overline{a\,dx+2\,x\,dx},$$

čili

$$\frac{a\,dx+2\,x\,dx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}.$$

Diferenciál $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ neboli $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$ je roven

$$\frac{1}{2}\times\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{a\,dx+2\,x\,dx+\frac{ayy\,dx+2\,axy\,dx}{2\sqrt{a^4+axyy}}}$$

neboli

$$\frac{a\,dx+2\,x\,dx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}+\frac{ayy\,dx+2\,axy\,dy}{2\sqrt{a^4+axyy}\times2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}.$$

Diferenciál $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ bude podle tohoto pravidla (§ 7, 6) a podle pravidel pro zacházení se zlomky

$$\frac{\frac{a\,dx+2\,x\,dx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}\times\sqrt{xy+yy}\;\frac{-y\,dx-x\,dy-2\,y\,dy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}.$$ [33]

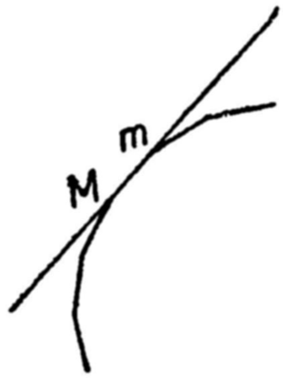
POZNÁMKA.

8. ZDE je na místě poznamenat, že jsme při diferencování v případě růstu jedné z proměnných x vždy předpokládali rostoucí i ostatní y, z atd.; tj. když se x stala $x+dx$, stala se y, z atd. $y+dy$, $z+dz$ atd. Jestliže proto dojde k tomu, že některé veličiny klesají, zatímco ostatní rostou; pak je třeba diferenciály klesajících veličin ve srovnání s diferenciály těch, které máme za rostoucí, pokládat za záporné. A je tedy zapotřebí změnit znaménka u členů, v nichž diferenciály klesajících veličin vystupují. Jestliže například předpokládáme, že pokud x roste, y a z klesají, tj. když se x stává $x+dx$, y a z se stávají $y-dy$ a $z-dz$; a je třeba určit diferenciál součinu xyz; pak bude nutné v nalezeném (§ 5) diferenciálu $xy\,dz+xz\,dy+xz\,dy$ změnit znaménka u členů obsahujících dy a dz; odkud pak hledaný diferenciál $yz\,dx-xy\,dz-xz\,dy$.

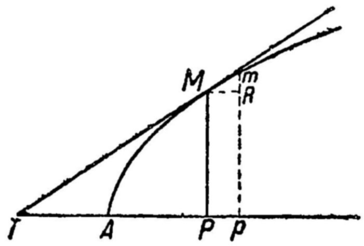
ODDÍL DRUHÝ.
Použití diferenciálního počtu k nacházení tečen křivek všech druhů.

DEFINICE.

Jestliže prodloužíme jednu z malých stran *Mm* (Obr. 2) mnohoúhelníku, z něhož se skládá křivá čára (§ 3), pak se takto prodloužená malá strana bude nazývat *tečnou* v bodě *M* neboli *m*.[34]



Obr. 2



Obr. 3

TVRZENÍ I.
Zadání.

9. NECHŤ AM (Obr. 3) *je křivou čarou takovou, že poměr abscisy* AP *k ordinátě* PM *je vyjádřen nějakou libovolnou rovnicí*; *a nechť je třeba z daného bodu* M *této křivky vést tečnu* MT.

Veďme ordinátu *MP* a předpokládejme, že úsečka *MT* protínající průměr v bodě *T* je hledanou tečnou; představme si druhou ordinátu *mp* prvé nekonečně blízkou a malou úsečku *MR* rovnoběžnou s *AP*. Nyní jestliže *AP* označíme jako *x*; *PM* jako *y* (a tedy *Pp* neboli $MR = dx$ a $Rm = dy$); z podobnosti trojúhelníků *mRM* a *MPT* dostáváme

$$mR(dy).RM(dx)::MP(y).PT=\frac{y\,dx}{dy}.$$ [35]

Avšak s pomocí diferenciálu dané rovnice najdeme hodnotu *dx* vyjádřenou skrze členy, které všechny zahrnují *dy*.[36] Když pak tuto hodnotu vynásobíme *y* a vydělíme *dy*, dostaneme hodnotu subtangenty *PT*, jejíž členy jsou vespolek známé a nadále žádné diferenciály neobsahují.[37] Od ní pak můžeme vést hledanou tečnu *MT*.

POZNÁMKA.

10. POKUD bod *T* (Obr. 4) připadá na opačnou stranu od bodu *A*, počátku *x*-ů; pak zřejmě s rostoucím *x* bude *y* klesat; a tím pádem (§ 8) bude třeba v diferenciálu dané rovnice změnit znaménka u všech členů, v nichž se vyskytuje *dy*; jinak by hodnota *dx* vyjádřená skrze *dy* byla

záporná, a tím pádem (§ 8) i hodnota $PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$. Ušetříme si nicméně starost, pokud budeme diferenciál dané rovnice raději vždy brát bez dalších změn podle uvedených (Odd. 1) pravidel. Neboť když na konci operace dojdeme ke kladné hodnotě *PT*; plyne odtud, že bod *T* je třeba vzít na stejné straně jako bod *A*, počátek *x*-ů, jak jsme předpokládali během výpočtu: a naopak, jestliže bude záporná, pak je třeba jej brát na straně opačné. Což se objasní na následujících příkladech.

PŘÍKLAD I.

11. 1°. JESTLIŽE $ax = yy$ vyjadřuje poměr *AP* k *PM* (Obr. 3); křivka *AM* bude parabolou a jejím parametrem daná úsečka *a*; diferencováním obou stran rovnice pak budeme mít

$$a\,dx = 2\,y\,dy \text{ a } dx = \frac{2\,y\,dy}{a}$$

a konečně

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = \frac{2\,yy}{a} = 2\,x,$$

pokud za yy dosadíme jeho hodnotu ax. Odtud plyne, že když *PT* vezmeme rovnou dvojnásobku *AP*; a povedeme úsečku *MT*; pak tato bude tečnou v bodě *M*. Což také bylo zadáno.[38]

2°. BUDIŽ rovnice $aa = xy$, která vyjadřuje povahu hyperboly ve vztahu k asymptotám (Obr. 4)[39]. Jestliže vezmeme diferenciál dané rovnice, budeme mít

$$x\,dy + y\,dx = 0,$$

a tím pádem

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = -x.$$

Odtud plyne, že když na opačné straně bodu *A* vezmeme $PT = PA$; a povedeme úsečku *MT*; pak tato bude tečnou v bodě *M*.

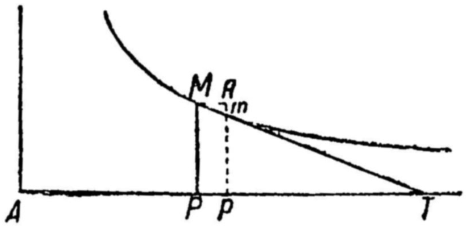
3°. BUDIŽ obecná rovnice $y^m = x$ vyjadřující povahu každé z nekonečna parabol,[40] když mocnitel *m* označuje kladné celé nebo lomené číslo; a všech hyperbol, když označuje číslo záporné. Jestliže vezmeme diferenciály, dostaneme

$$my^{m-1}\,dy = dx\,,$$

a tudíž

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = my^m = m\,x\,,$$

když za y^m dosadíme jeho hodnotu *x*.



Obr. 4

Je-li $m=\frac{3}{2}$, dostáváme rovnici $y^3=axx$, která vyjadřuje povahu jedné z kubických parabol;[41] a subtangentu

$$PT=\frac{3}{2}x.$$

Při $m=-2$ dostáváme rovnici $a^3=xyy$ vyjadřující povahu jedné z kubických hyperbol; a subtangentu

$$PT=-2x.$$

A tak je tomu i v ostatních případech.

Pokud jde o to, vést k parabolám tečnu v bodě A, počátku x-ů; pak je třeba v tomto bodě určit poměr dx ku dy; neboť je zjevné, že když známe tento poměr, bude tím určen i úhel, který tečna svírá s osou neboli průměrem. V tomto příkladě máme

$$dx.dy::my^{m-1}.1\ .$$

A zřejmě ježto y je v bodě A rovno nule; poměr dy ku dx bude v tomto bodě nekonečně velký, když m je větší než 1; a nekonečně malý, pokud je menší, tj. tečna v A musí být v prvním případě rovnoběžná s ordinátami a v případě druhém spadat v jedno s průměrem.

PŘÍKLAD II.

12. NECHŤ *AMB* (Obr. 5) je křivkou takovou, že $AP\times PB(x\times\overline{a-x}).\overline{PM}^2(yy)::AB(a).AD(b)$.

Obr. 5

Tedy

$$\frac{ayy}{b}=ax-xx;$$[42]

a když vezmeme diferenciály

$$\frac{2ay\,dy}{b}=a\,dx-2x\,dx,$$

odkud

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)=\frac{2ayy}{ab-2bx}=\frac{2ax-xx}{a-2x},$$

když za $\frac{ayy}{b}$ dosadíme jeho hodnotu $ax - xx$; a konečně

$$PT - AP, \text{ čili } AT = \frac{ax}{a - 2x}.$$

Nyní za předpokladu, že $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2 (x^3 \times \overline{a-x}^2) \cdot \overline{PM}^5 (y^5) :: AB(a) \cdot AD(b)$; budeme mít

$$\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2;$$

odkud diferenciál činí

$$\frac{5ay^4dy}{b} = 3xx\,dx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a\,dx + 2x\,dx} \times x^3,$$

což dává

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^3}{3xx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a+2x} \times x^3} = \frac{5x \times \overline{a-x}}{3a - 3x - 2x},$$

čili

$$\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x} \text{ a } AT = \frac{2ax}{3a - 5x}.$$

A obecně jestliže m označuje mocnitele mocniny AP a n mocnitele mocniny PB; budeme mít obecnou rovnici nekonečna všech elips

$$\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n,$$[43]

čehož diferenciál činí

$$\frac{\overline{m+n}\,ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\,\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m.$$

Odtud (když za $\frac{ay^{m+n}}{b}$ dosadíme jeho hodnotu $x^m \times \overline{a-n}^n$) dostaneme

$$PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+nx}^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n \times n\,\overline{a-x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+n}\,x \times \overline{a-x}}{m\,\overline{a-x} - nx},$$

čili

$$PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma - \overline{m-n}\,x} \text{ a } AT = \frac{nax}{ma - \overline{m-n}\,x}.$$

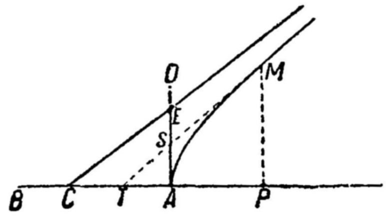
PŘÍKLAD III.

13. MÁME stejné zadání jako v předchozím příkladě; avšak nyní budeme předpokládat, že body B a P (Obr. 6) připadají vzhledem k bodu A na opačné strany. Dostáváme rovnici

$$\frac{ay^{m+n}}{b}=x^m\times\overline{a+x}^n,$$

jež vyjadřuje povahu všech hyperbol uvažovaných z hlediska svého průměru. Odtud stejně tak, jako výše, vyvodíme

$$PT=\frac{\overline{m+n}\times\overline{ax+xx}}{ma+\overline{m+n}\,x} \text{ a } AT=\frac{nax}{ma+\overline{m+n}\,x}.$$



Obr. 6

Nyní jestliže budeme předpokládat, že *AP* je nekonečně velká; tečna *TM* se s křivkou bude protínat až v nekonečnu, tj. stane se její asymptotou *CE*;[44] a v tom případě budeme mít

$$AT\left(\frac{nax}{ma+\overline{m+n}\,x}\right)=\frac{n}{m+n}a=AC,$$

neboť jestliže a je nekonečně menší než x, člen ma bude ve srovnání s $\overline{m+n}\,x$ nulový. Z téhož důvodu se rovnice křivky v tomto případě stává

$$ay^{m+n}=bx^{m+n}.$$

Když pak pro stručnost položíme $m+n=p$ a z obou stran rovnice odmocníme kořen p, dostaneme

$$y\sqrt[p]{a}=x\sqrt[p]{b},$$

a odtud diferenciál

$$dy\sqrt[p]{a}=dx\sqrt[p]{b},$$

takže když povedeme *AE* rovnoběžnou s ordinátami; a představíme si malý trojúhelníček v bodě, kde asymptota *CE* protíná křivku; vzniká úměra

$$dx.dy \text{ , čili } \sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b}::AC\left(\frac{n}{p}a\right).AE=\frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}.$$

Ježto však tímto způsobem určíme hodnoty *CA* a *AE*; můžeme nyní vést polopřímku *CE*, a ta pak bude hledanou asymptotou.

Jestliže $m=1$ a $n=1$, křivka bude obecnou hyperbolou; a pak

$$AC=\frac{1}{2}a \text{ a } AE=\frac{1}{2}\sqrt{ab},$$

tj. *AE* bude rovna polovině sdruženého průměru, což, jak ostatně víme, odpovídá skutečnosti.[45]

PŘÍKLAD IV.

14. NECHŤ rovnice $y^3-x^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, a je nějaká daná úsečka) vyjadřuje povahu křivky *AM* (Obr. 6.); její diferenciál pak činí

$$3\,yy\,dy-3\,xx\,dx=ax\,dy+ay\,dx.$$

Tedy

$$\frac{y\,dx}{dy}=\frac{3\,y^3-axy}{3\,xx+ay} \text{ a } AT\left(\frac{y\,dx}{dy}-x\right)=\frac{3\,y^3-x^3-2\,axy}{3\,xx+ay}=\frac{axy}{3\,xx+ay},$$

když se za $3\,y^3-3\,x^3$ dosadí jeho hodnota $3\,axy$.

Nyní za předpokladu, že *AP* a *PM* jsou každá nekonečně velká; tečna *TM* se stane asymptotou *CE* a úsečky *AT*, *AS* se stanou úsečkami *AC*, *AE*, jež určují polohu asymptoty. Avšak *AT*, kterou označuji $t=\frac{axy}{3\,xx+ay}$; pak tedy

$$y=\frac{3\,txx}{ax-at}=\frac{3\,tx}{a},$$

když se *AT* stává *AC*; neboť at pak bude ve srovnání s ax nulovým. A tedy jestliže do $y^3-x^3=axy$ dosadíme na místo y hodnotu $\frac{3\,tx}{a}$, budeme mít

$$27\,t^3x^3-a^3x^3=3\,a^3\,txx\,;$$

odkud po odstranění členu $3\,a^3txx$ (neboť když x je nekonečné, tento bude ve srovnání se zbylými dvěma členy $27\,t^3x^3$ a a^3x^3 nulový) dostaneme

$$AC(t)=\frac{1}{3}a\,.$$

Stejně tak $AS\left(y-\frac{x\,dy}{ax}\right)$, jež označuji $s=\frac{axy}{3\,yy-ax}$, odkud

$$x=\frac{3\,syy}{ay+as}=\frac{3\,sy}{a},$$

neboť pokud y je ve srovnání s s nekonečné, bude člen as ve srovnání s členem ay nulový. Jestliže pak tuto hodnotu dosadíme do rovnice křivky, nalézáme

$$AE(s)=\frac{1}{3}a\,.$$

Odtud plyne, že když úsečky *AC* a *AE* položíme každou rovnou $\frac{1}{3}a$; a povedeme přímku *CE*; bude právě ona asymptotou *AM*.

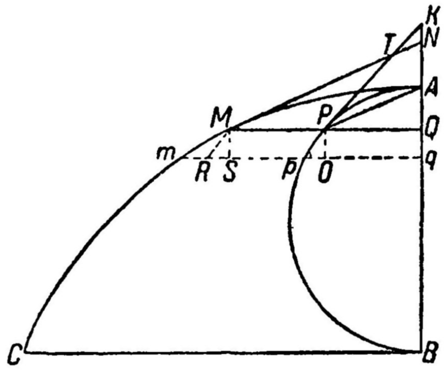
Podle posledních dvou příkladů se budeme řídit i při nacházení asymptot ostatních křivek.

TVRZENÍ II.

Zadání.

15. ZA *předpokladu, že abscisy* AP (Obr. 7) *z předcházejícího tvrzení jsou úseky nějaké křivky, k níž známe vést tečny* PT; *je třeba vést z daného bodu* M *na křivku* AM *tečnu* MT.

Veďme ordinátu *MP* a tečnu *PT* a předpokládejme, že úsečka *MT*, jež ji protíná v *T*, je hledanou



Obr. 7

tečnou. Představíme si druhou ordinátu *mp* prvé nekonečně blízkou a malou úsečku *MR* rovnoběžnou s *PT*: jestliže nyní označíme danou *AP* jako *x*; *PM* jako *y*; budeme mít tak jako shora

$$Pp \text{ neboli } MR = dx,\ Rm = dy;$$

a z podobnosti trojúhelníků *mRM* a *MPT*

$$mR(dy) \cdot RM\,(dx) :: MP\,(y) \cdot PT = \frac{y\,dx}{dy}.$$

Zbytek dokončíme pomocí rovnice vyjádřující poměr abscis $AP(x)$ k ordinátám $PM\,(y)$ tak, jak jsme viděli v předchozích příkladech a jak ještě uvidíme v příkladech následujících.[46]

PŘÍKLAD I.

16. NECHŤ $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, odkud diferenciál

$$\frac{2\,xy\,dy - yy\,dx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xy\,dy}{a\sqrt{aa+yy}}.$$

Po úpravě této rovnice na úměru dostáváme

$$dy.dx\,(MP.PT) :: \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx} . \frac{2\,xy}{xx} - \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}.$$

A tím pádem bude poměr dané *MP* k hledané subtangentě *PT* vyjádřen členy, které jsou zcela známé a prosté všech diferenciálů. Což také bylo zadáno.

PŘÍKLAD II.

17. NECHŤ $x = \frac{ay}{b}$, odkud diferenciál bude $dx = \frac{a\,dy}{b}$; pak budeme mít

$$PT\,(\frac{y\,dx}{dy}) = \frac{ay}{b} = x.$$

Za předpokladu, že křivka *APB* bude půlkruhem a ordináty *MP* prodloužené do Q budou kolmé na průměr *AB*; křivka *AMC* bude představovat poloruletu či cykloidu: a sice prostou, když $a = b$; prodlouženou, když *a* bude větší než *b*; a zkrácenou, když bude menší.[47]

DŮSLEDEK.

18. JESTLIŽE se jedná o cykloidu prostou; a natáhneme tětivu *AP*; pak tvrdím, že tato tětiva bude rovnoběžná s tečnou *MT*. Ježto totiž je trojúhelník *MPT* rovnoramenný, vnější úhel *TPQ* je roven dvojnásobku protilehlého vnitřního úhlu *TMQ*. Avšak úhel *APQ* je roven úhlu *APT*, poněvadž oba dva měří polovina oblouku *AP*; a tím pádem je roven polovině úhlu *TPQ*. Úhly *TMQ* a *APQ* si tedy budou navzájem rovny; a tudíž *MT*, *AP* budou rovnoběžné.

TVRZENÍ III.

Zadání.

19. NECHŤ AP *je nějakou libovolnou křivkou*, *jejímž průměrem je* (Obr. 7.) *úsečka* KNAQ *a ke které známe vést tečny* PK*; kromě toho mějme další křivku* AM *takovou*, *že jakkoli povedeme ordinátu* MQ *protínající první křivku* AP *v bodě* P*, poměr oblouku* AP *k ordinátě* MQ *bude vyjádřen nějakou libovolnou rovnicí. Nyní je třeba vést z daného bodu* M *tečnu* MN.

Označme známé veličiny *PK* jako *t*; *KQ* jako *s*; oblouk *AP* jako *x*; *MQ* jako *y* (přičemž uvažujeme druhou ordinátu *mq* nekonečně blízkou *MQ* a vedeme *PO* a *MS* rovnoběžné s *AQ*); budeme mít $Pp=dx$, $mS=dy$ a z podobnosti trojúhelníků *KPQ* a *PpO*, *mSM* a *MQN*, dostáváme

$$PK(t).KQ(s)::Pp(dx).PO \text{ , čili } MS=\frac{s\,dx}{t} \text{ .}$$

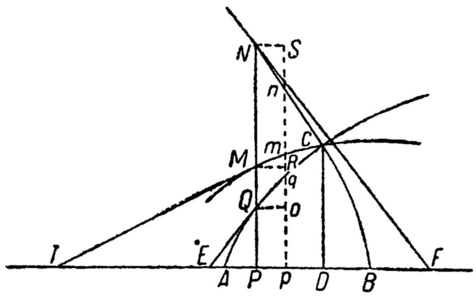
$$\text{A } mS(dy).SM\left(\frac{s\,dx}{t}\right)::MQ(y).QN=\frac{sy\,dx}{s\,dy} \text{ .}$$

Avšak diferencováním dané rovnice najdeme hodnotu *dx* vyjádřenou prostřednictvím členů, kde každý zahrnuje činitele *dy*; a tedy když tuto hodnotu dosadíme do $\frac{sy\,dx}{t\,dy}$ na místo *dx*, všechna *dy* se pokrátí a konečně obdržíme hodnotu hledané subtangenty vyjádřenou vesměs známými členy. Což také bylo třeba nalézt.

TVRZENÍ IV.

Zadání.

20. BUDIŽ *dvě křivé čáry* AQC, BCN (Obr. 8)*, jejichž průměrem je úsečka* TABF *a ke kterým známe vést tečny* QE, NF*; kromě toho mějme další křivku* MC *takovou, že poměr ordinát* MP, QP *a* NP *bude vyjádřen nějakou libovolnou rovnicí. Nyní je třeba z daného bodu* M *vést k této křivce tečnu* MT.



Obr. 8

Představme si v bodech Q, M, N malé trojúhelníky Qoq, MRm, NSn a označme známé veličiny PE jako s; PF jako t; PQ jako x; PM jako y; PN jako z; budeme mít

$$oq = dx\ ,\ \ Rm = dy\ ,\ \ Sn = -dz\ ,$$

poněvadž (§ 8) když x a y rostou, bude z klesat. Z podobnosti trojúhelníků QPE a qoQ, NPF a nSN, MPT a mRM dostaneme

$$QP(x).\,PE(s)::qO(dx).\,OQ\ , \text{ neboli } MR \text{ neboli } SN = \frac{s\,dx}{x}\ .$$

$$\text{A}\ \ NP(z).\,PF(t)::nS(-dz).\,SN = \frac{-t\,dz}{z} = \frac{s\,dx}{x}$$

(odtud pak $dz = \frac{-sz\,dx}{tx}$).

$$\text{A}\ \ mR(dy).\,RM\left(\frac{s\,dx}{x}\right)::MP(y).\,PT = \frac{sy\,dx}{x\,dy}\ .$$

Nyní jestliže v diferenciálu dané rovnice dosadíme na místo dz jeho hodnotu $-\frac{sz\,dx}{tx}$, najdeme hodnotu dx vyjádřenou skrze dy; kterou když dosadíme do $\frac{sy\,dx}{x\,dy}$, dy se pokrátí a hodnota subtangenty PT bude vyjádřena skrze členy, jež jsou vesměs známé.

PŘÍKLAD.

21. NECHŤ $yy = xz$, odkud diferenciál bude

$$2\,y\,dy = z\,dx + x\,dz = \frac{tz\,dx - sz\,dx}{t}\ ,$$

když za dz dosadíme jeho zápornou hodnotu $-\frac{sz\,dx}{tx}$. Odtud dostáváme

$$dx = \frac{2\,ty\,dy}{tz - sz}\ ,$$

a tím pádem

$$PT\left(\frac{sy\,dx}{x\,dy}\right) = \frac{2\,styy}{txz - sxz} = \frac{2\,st}{t - s}\ ,$$

když za yy dosadíme jeho hodnotu xz.

Budiž nyní obecná rovnice $y^{m+n} = x^m z^n$, jejíž diferenciál je

$$\overline{m+n}\,y^{m+n-1}\,dy = mz^n x^{m-1}\,dx + nx^m z^{n-1}\,dz = \frac{mtz^n x^{m-1}\,dx - nsz^n x^{m-1}\,dx}{t}\ ,$$

když za dz dosadíme jeho hodnotu $-\frac{sz\,dx}{tx}$. Odkud

$$PT\left(\frac{sy\,dx}{x\,dy}\right)=\frac{\overline{mst+nst}\,y^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m}=\frac{mst+nst}{mt-ns}\,,$$

pokud za y^{m+n} dosadíme jeho hodnotu $x^m z^n$.

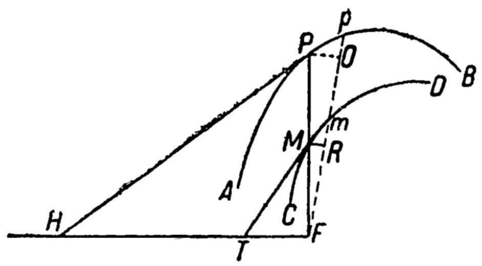
Můžeme poznamenat, že pokud se křivky *AQC* a *BCN* stanou přímými čarami, křivka *MC* se stane jednou z nekonečného množství kuželoseček. Totiž elipsou, jestliže ordináta *CD* vycházející z bodu průniku *C* připadne mezi krajnosti *A*, *B*; hyperbolou, jestliže připadne na jednu, nebo druhou stranu od nich; a konečně parabolou, když bude jedna z krajností *A*, nebo *B* od druhé nekonečně vzdálena, tj. pokud bude jedna z přímých čar *CA*, nebo *CB* rovnoběžná s průměrem *AB*.[48]

TVRZENÍ V.

Zadání.

22. BUDIŽ *křivka* APB (Obr. 9) *o pevném a neměnném počátku v bodě* A*, k níž známe vést tečny* PH. *Budiž dále mimo tuto křivku druhý pevný bod* F *a druhá křivka* CMD *taková, že když povedeme libovolnou úsečku* FMP*, pak poměr její části* FM *k části křivky* AP *bude vyjádřen nějakou libovolnou rovnicí. Zadáno je vést z daného bodu* M *tečnu* MT.

Veďme na *FP* kolmici *FH* protínající danou tečnu *PH* v bodě *H* a hledanou *MT* v bodě *T*; představme si přímku *FRmOp*, která s *FP* svírá nekonečně malý úhel; a ze středu *F* opišme malé kruhové oblouky *PO* a *MR*; malý trojúhelník *pOP* pak bude podobný pravoúhlému trojúhelníku *PFH*, ježto úhly *HPF* a *HpF* se (§ 2) rovnají, neboť se navzájem liší jen o úhel *PFp*, jenž je podle předpokladu nekonečně malý. Kromě toho úhel *pOP* je pravý; poněvadž tečna v *O* (která není ničím jiným než prodloužením malého oblouku *PO* pokládaného za přímou čáru) je kolmá na poloměr *FO*. Z toho samého důvodu pak jsou podobné i trojúhelníky *mRM*, *MFT*. Avšak je zřejmé, že podobné jsou i malé trojúhelníky či výseče *FPO* a *FMR*. Jestliže tedy označíme známé *PH* jako *t*; *HF* jako *s*; *FM* jako *y*; *FP* jako *z*; a oblouk *AP* jako *x*; budeme mít



Obr. 9

$$Ph(t).HF(s)::Pp(dx).PO=\frac{sdx}{t}\,.$$

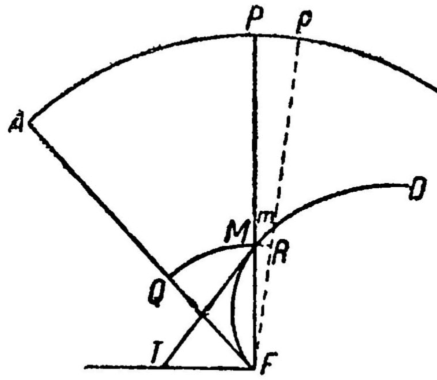
$$\text{A}\ \ FP(z).FM(y)::PO\left(\frac{s\,dx}{t}\right).MR=\frac{ys\,dx}{tz}\,.$$

$$\text{A}\ \ mR(dy).RM\left(\frac{sy\,dx}{tz}\right)::FM(y).FT=\frac{syy\,dx}{tz\,dy}\,.$$

A zbytek dokončíme prostřednictvím diferenciálu dané rovnice.

PŘÍKLAD.

23. JESTLIŽE křivkou *APB* (Obr. 10) má být kruh o středu v pevném bodě *F*; pak zřejmě tečna *PH* se stane rovnoběžnou a rovnou subtangentě *FH*, neboť *HP* pak bude kolmá na *PF.* V tom případě tedy budeme mít



Obr. 10

$$FM=\frac{yy\,dx}{z\,dy}=\frac{yy\,dx}{a\,dy},$$

a sice když úsečku $FP(z)$ označíme jako *a*; neboť tato se z proměnné změnila v konstantu. Nuže, jestliže nyní označíme celkový obvod kruhu, anebo nějakou jeho určenou část jako *b*; a položíme $b.x::a.y$; pak křivka *AMD*, jež je v tomto případě *FMD*, bude Archimédovou spirálou; a dostáváme

$$y=\frac{ax}{b},$$

čehož diferenciál je

$$dy=\frac{a\,dx}{b};$$

odkud pak

$$y\,dx=\frac{by\,dy}{a}=x\,dy,$$

když za *y* dosadíme jeho hodnotu $\frac{ax}{b}$; a tudíž

$$FT\left(\frac{yy\,dx}{a\,dy}\right)=\frac{xy}{a}.$$

Což dává následující konstrukci.

Od středu *F* opišme o poloměru *FM* kruhový oblouk *MQ* ohraničený v *Q* poloměrem *FA*, jež spojuje pevné body *A* a *F*; vezměme *FT* rovnou oblouku *MQ*: tvrdím, že úsečka *MT* bude tečnou v *M*. Neboť z podobnosti výsečí *FPA* a *FMQ* budeme mít

$$FP(a).FM(y)::AP(x).MQ=\frac{yx}{a}=FT.$$

Jestliže vezmeme obecně $b.x::a^m.y^m$ (mocnitel *m* označuje nějaké libovolné celé nebo lomené číslo); křivka *FMD* bude jednou z nekonečna spirál a dostáváme

$$y^m = \frac{a^m x}{b},$$

čehož diferenciál je

$$my^m - 1\, dy = \frac{a^m dx}{b};$$

odkud

$$ydx = \frac{mby^m dy}{a^m} = mx\, dy,$$

když za y^m dosadíme jeho hodnotu $\frac{a^m x}{b}$; a tím pádem

$$FT\left(\frac{yy\,dx}{a\,dy}\right) = \frac{mxy}{a} = m \times MQ.$$ [49]

TVRZENÍ VI.

Zadání.

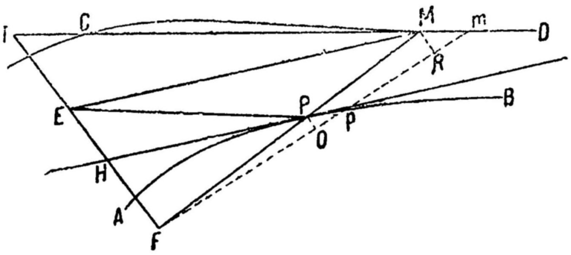
24. BUDIŽ *křivka* APB (Obr. 11)*, ke které známe vést tečny* PH*, a pevný bod* F *ležící mimo ni; a budiž další křivka* CMD *taková, že když povedeme libovolnou úsečku* FPM*, pak poměr* FP *ku* FM *bude vyjádřen nějakou rovnicí. Nyní je třeba z bodu* M *vést tečnu* MT.

Veďme *FHT* kolmou na *FM* a představme si, tak jako v předchozím tvrzení, malé trojúhelníky *POp* a *MRm* podobné trojúhelníkům *HFP* a *TFM*; označíme známé *FH* jako *s*; *FP* jako *x*; *FM* jako *y*; a budeme mít

$$PF(x).FH(s)::pO(dx).OP = \frac{s\,dx}{x}.$$

$$\text{A } FP(x).FM(y)::OP\left(\frac{s\,dx}{x}\right).RM = \frac{sy\,dx}{xx}$$

$$\text{A } mR(dy).RM\left(\frac{sy\,dx}{xx}\right)::FM(x).Ft = \frac{syy\,dx}{xx\,dy}$$



Obr. 11

Zbytek pak dokončíme prostřednictvím diferenciálu dané rovnice.

PŘÍKLAD.

25. JESTLIŽE za křivku *APB* položíme přímou čáru *PH*; a rovnice vyjadřující poměr *FP* ku *FM* budiž $y - x = a$, tj. *PM* bude vždy rovna dané úsečce *a*; diferenciál rovnice bude $dy = dx$. Což dává následující konstrukci.

Veďme *ME* rovnoběžnou s *PH* a *MT* rovnoběžnou s *PE*; tvrdím, že *MT* bude tečnou v *M*.

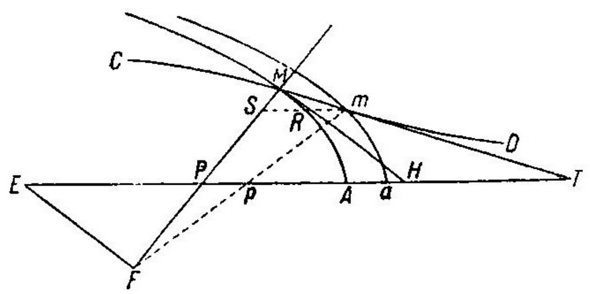
Neboť $FP(x).FH(s)::FM(y).EE=\frac{sy}{x}$. A $FP(x).FE(\frac{sy}{x})::FM(y).FT=\frac{syy}{xx}$.

Je zřejmé, že křivka *CMD* je Nikomédovou konchoidou s asymptotou *PM* a pólem v pevném bodě *F*.

TVRZENÍ VII.

Zadání.

26. NECHŤ ARM (Obr. 12) *je nějakou křivou čarou, ke které známe vést tečny* MH *a jejímž průměrem je úsečka* EPAHT*; budiž nějaký pevný bod* F *mimo tento průměr, z nějž vystupuje neomezená přímka* FPSM, *která průměr protíná v* P *a křivku v* M. *Jestliže si nyní představíme, že přímka* FPM *rotujíc kolem bodu* F *ustavičně posouvá plochu* PAM *podél nehybné a neomezené přímky* ET *tak, že rozdíl* PA *zůstává neměnný; pak zřejmě soustavný průnik* M *čar* FM *a* AM *tímto pohybem opíše křivku* CMD. *Zadáno je vést z daného bodu* M *k této křivce tečnu* MT.



Obr. 12

Představme si, že plocha *PAM* dospěla do nekonečně blízké situace *pam*, a veďme úsečku *mRS* rovnoběžnou s *AP*. Z ustrojení je jasné, že $Pp=Aa=Rm$, a tudíž $RS=Sm-Pp$. Jestliže však označíme známé *FP* neboli *Fp* jako *x*; *FM* neboli *Fm* jako *y*; *PH* jako *s*; *MH* jako *t*; a diferenciál *Pp* jako *dz*; z podobnosti trojúhelníků *FPp* a *FSm*, *MPH* a *MSR*, *MHT* a *MRm* dostaneme

$$Fp(x).Fm(y)::Pp(dz).Sm=\frac{y\,dz}{x} \text{ (a tedy } SR=\frac{y\,dz-x\,dz}{x}\text{)}.$$

$$\text{A } PH(s).HM(t)::SR(\frac{y\,dz-x\,dz}{x}).RM=\frac{ty\,dz-tx\,dz}{sx}.$$

$$\text{A } MR(\frac{ty\,dz-tx\,dz}{sx}).Rm(dz)::MH(t).HT=\frac{sx}{y-x}.$$

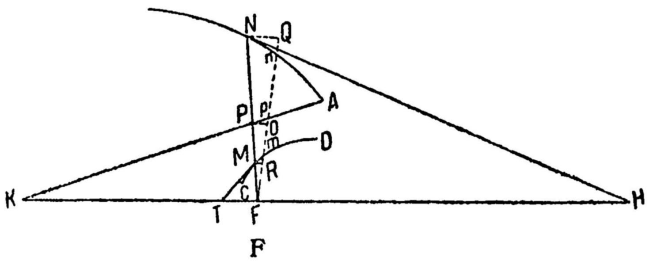
Jestliže tedy povedeme *FE* rovnoběžnou s *MH* a vezmeme $HT=PE$, bude přímka *MT* hledanou tečnou.

Kdyby *AM* byla přímou čarou, křivka *CMD* by se stala hyperbolou a přímka *ET* jednou z jejích asymptot. Pokud by byla kruhem se středem v bodě *P*, křivka *CMD* by se změnila v Nikomédovu konchoidu[50] s pólem v bodě *F* a asymptotou *ET*. Kdyby však byla parabolou, křivka *CMD* by se stala doprovodnou křivkou Descartovy paraboly[51] (*Geom*. kn. 3), přičemž by byla opsána zároveň pod přímkou *ET* průnikem *FP* s druhým ramenem paraboly.

TVRZENÍ VIII.

Zadání.

27. BUDIŽ *křivá čára* AN (Obr. 13)*, jejímž průměrem je úsečka* AP*, a někde mimo ně pevný bod* F*; a budiž další křivka* CMD *taková, že když povedeme dle libosti úsečku* FMPN*, poměr mezi jejími částmi* FN, FP, FM *bude vyjádřen nějakou rovnicí. Jedná se o to, vést z daného bodu* M *tečnu* MT.



Obr. 13

Veďme bodem *F* úsečku *HK* kolmou na *FN*, která v *K* protíná průměr *AP* a v *H* danou tečnu *NH*. Opišme dále ze středu *F* o poloměrech *FN*, *FP* a *FM* malé oblouky *NQ*, *PO* a *MR* ohraničené úsečkou *Fn*. Uvažujeme, že *Fn* a *FN* svírají nekonečně malý úhel.

Nuže pokud nyní označíme známé *FK* jako *s*; *FH* jako *t*; *FH* jako *x*, *Fm* jako *y*; *FN* jako *z*; z podobnosti trojúhelníků *PFK* a *pOP*, *FMR* a *FPO* a *FNQ*, *HFN* a *MQn*, *mRM* a *MFT* dostaneme

$$PF(x).FK(s)::pO(dx).OP=\frac{s\,dx}{x}.$$

$$\text{A }FP(x).FM(y)::PO\left(\frac{s\,dx}{x}\right).MR=\frac{sy\,dx}{xx}.$$

$$\text{A }FP(x).FN(z)::PO\left(\frac{s\,dx}{x}\right).NQ=\frac{sz\,dx}{xx}.$$

$$\text{A }HF(t).FN(z)::NQ\left(\frac{sz\,dx}{xx}\right).Qn(-dz)=\frac{szz\,dx}{txx}.$$

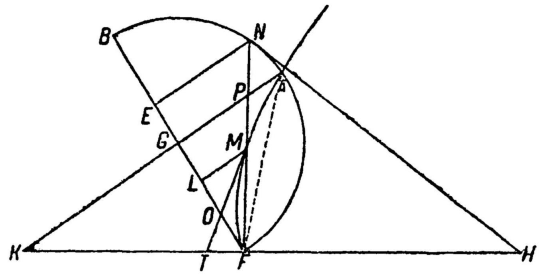
$$\text{A }mR(dy).RM\left(\frac{sy\,dx}{xx}\right)::FM(y).FT=\frac{syy\,dx}{xx\,dy}.$$

Avšak prostřednictvím diferenciálu dané rovnice vyjádříme hodnotu *dy* skrze *dx* a *dz*; a jestliže pak za *dx* dosadíme jeho zápornou hodnotu $\frac{-szz\,dx}{txx}$ (neboť když *x* roste, *z* klesá), vyjádříme *dy* za pomoci členů, které všechny zahrnují činitele *dx* tak, že když tuto hodnotu dosadíme do $\frac{syy\,dx}{xx\,dy}$, *dx* se pokrátí. A tím pádem získáme hodnotu *FT* vyjádřenou prostřednictvím členů, jež jsou vespolek známé a oproštěné od diferenciálů.

Za předpokladu, že by přímá čára *AP* byla nějakou křivou čarou; a vedli bychom tečnu *PK*; hodnota *FT* by se nezměnila a nalezli bychom ji stejným postupem.

PŘÍKLAD.

28. PŘEDPOKLÁDEJME, že křivka *AN* (Obr. 14) je kruhem, který prochází bodem *F* (položeným vůči průměru *AP* tak, že na něj kolmá úsečka *FB* prochází středem kruhu *G*); a že *PM* je vždy rovna *PN*. Křivka *CMD*, jež v tomto případě spadá v jedno s *FMA*, zřejmě bude Diokléova cisoida a budeme mít rovnici $z+y=2x$, odkud diferenciál



Obr. 14

$$dy=2\,dx=-dz=\frac{2\,txx\,dx+szz\,dx}{txx},$$

když za *dz* dosadíme jeho hodnotu $-\frac{szz\,dx}{txx}$ (§ 27). A tím pádem

$$FT\left(\frac{syy\,dx}{xx\,dy}\right)=\frac{styy}{2\,txx+szz}.$$

Kdyby daný bod *M* připadl do bodu *A*, každá z čar *FM*, *FN*, *FP* by byla rovna *FA* a stejně tak i úsečky *FK*, *FH*; a tudíž

$$FT=\frac{x^4}{3x^3}=\frac{1}{3}x.$$

Což znamená, že když vezmeme $FT=\frac{1}{3}AF$ a povedeme úsečku *AT*, bude tato tečnou v *A*.

Tečny k cisoidě lze nalézt též způsobem vyloženým v prvním tvrzení, a sice spuštěním kolmic *NE*, *ML* na průměr *FB* a nalezením rovnice vyjádřující poměr abscisy *FL* k ordinátě *LM*. Což provedeme následovně. Když si označíme známé *FB* jako *2a*; *FL* neboli *BE* jako *x*; *LM* jako *y*; pak z podobnosti trojúhelníků *FEN*, *FLM* a povahy kruhu dostaneme

$$FL(x).\,LM(y)::FE.\,EN::EN(\sqrt{2ax-xx}).\,EB(x).$$

Odtud získáme

$$yy=\frac{x^3}{2a-x},$$

čehož diferenciál je

$$2\,y\,dy=\frac{6a\,xx\,dx-2x^3\,dx}{\overline{2a-x}^2},$$

a tím pádem (§ 9)

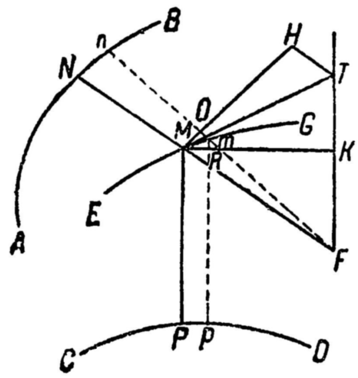
$$LO\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)=\frac{yy\times\overline{2a-x}^2}{3\,axx-x^3}=\frac{2\,ax-xx}{3\,a-x},$$

když za yy dosadíme jeho hodnotu $\frac{x^3}{2a-x}$.[52]

TVRZENÍ IX.

Zadání.

29. BUDIŽ *dvě křivky* ANB, CPD *a jednu přímkou čáru* FKT, *na nichž jsou vyznačeny pevné body* A, C, F (Obr. 15)*; a budiž kromě toho další křivka* EMG *taková, že když libovolným jejím bodem* M *povedeme úsečku* FMN a MP *rovnoběžnou s FK; poměr oblouku* AN *vůči oblouku* CP *bude vyjádřen nějakou rovnicí. Nyní je třeba z daného bodu* M *vést na křivku* EG *tečnu* MT.



Obr. 15

Hledaným bodem *T* veďme úsečku *TH* rovnoběžnou s *FM* a daným bodem *M* úsečky *MRK* a *MOH* rovnoběžné s tečnami v *P* a *N*; vynesme *FmOn* nekonečně blízkou *FMN* a *mRp* rovnoběžnou se *MP*.

Nuže pokud nyní označíme známé *FM* jako *s*; *FN* jako *t*; *MK* jako *u*; *CP* jako *x*; *AN* jako *y* (a tedy *Pp*, čili $MR=dx$, $Nn=dy$), z podobnosti trojúhelníků *FNn* a *FMO*, *MOm* a *MHT*, *MRm* a *MKT* dostáváme

$$FN(t).FM(s)::Nn(dy).MO=\frac{s\,dy}{t}.$$

$$\text{A}\ MR(dx).MO\left(\frac{s\,dy}{t}\right)::MK(u).MH=\frac{su\,dy}{tdx}.$$

Avšak za pomoci diferenciálu dané rovnice vyjádříme hodnotu *dy* prostřednictvím členů, z nichž každý zahrnuje činitele *dx*; jejím dosazením do $\frac{su\,dy}{t\,dx}$ se však *dx* pokrátí, a tudíž se hodnota *MH* vyjádří prostřednictvím členů, jež jsou vespolek známé a oproštěné od diferenciálů. Což dává následující konstrukci.[53]

Veďme *MH* rovnoběžnou s tečnou v *N* a rovnou právě nalezené hodnotě; vynesme *HT* rovnoběžnou s *FM* a protínající přímku *FK* v bodě *T*: tímto průsečíkem a daným bodem *M* konečně veďme hledanou tečnu *MT*.

PŘÍKLAD.

30. JESTLIŽE křivka *ANB* (Obr. 16) bude čtvrtkruhem se středem v pevném bodě *F*; křivka *CPD* pak jeho poloměrem *APF* kolmým na úsečku *FKGQTB*; a oblouk $AN(y)$ se bude mít k úsečce $AP(x)$ vždy jako čtvrtkruh $ANB(b)$ k poloměru $AF(a)$; pak křivka *EMG* bude tvořit Dinostratovu kvadratrix *AMG*. A dostaneme

$$MH\left(\frac{su\,dy}{t\,dx}\right)=\frac{as\,dy-sx\,dy}{a\,dx}\ ,$$

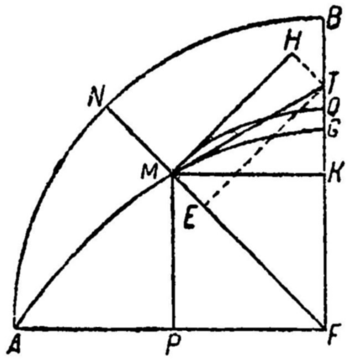
poněvadž

$$FP \text{ neboli } MK(u)=a-x \text{ a } FN(t)=a\ .$$

Avšak z předpokládané úměry vyplývá

$$ay=bx \text{ a } a\,dy=b\,dy\ .$$

Jestliže tedy dosadíme do výrazu *MH* na místo *x* a *dy* jejich hodnoty



Obr. 16

$\frac{ay}{b}$ a $\frac{b\,dx}{a}$, nalezneme

$$MH=\frac{bs-ys}{a}\ .$$

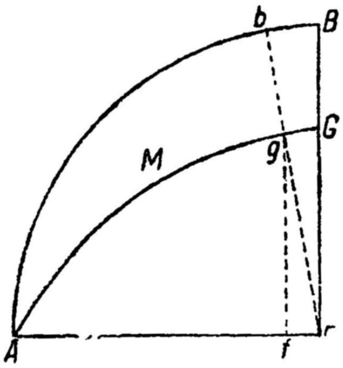
Což dává následující konstrukci.

Veďme *MH* kolmou na *FM* a rovnou oblouku *MQ* o středu *F*; veďme dále *HT* rovnoběžnou s *FM*. Tvrdím, že úsečka *MT* bude tečnou v *M*, neboť z podobnosti výsečí *FNB* a *FMQ* budeme mít

$$FN(a).FM(s)::NB(b-y).MQ=\frac{bs-sy}{a}\ .$$[54]

DŮSLEDEK.

31. POKUD jde o to, určit bod *G*, ve kterém kvadratrix *AMG* protíná poloměr *FB* (Obr. 17); představme si druhý poloměr *Fgb* nekonečně blízký *FGB*; a když pak povedeme *gf* rovnoběžnou s *FB*, z povahy kvadratrix a podobnosti trojúhelníků *FBb* a *gfF* pravoúhlých při *B* a *f* dostaneme $AB.AF::Bb.Ff::FB$ neboli $AF.gf$, čili *FG*. Odtud je zřejmé, že pokud vezmeme třetí úměrnou k čtvrtkruhu *AB* a poloměru *AF*, bude rovna *FG*, tj. $FG=\frac{aa}{b}$. Což dovoluje zjednodušit konstrukci tečen.



Obr. 17

Neboť jestliže povedeme *TE* rovnoběžnou s *MH* (Obr. 16), z podobnosti trojúhelníků *FMK* a *FMT* dostaneme

$$MK(a-x).MF(s)::ET \text{ neboli } MH\left(\frac{bs-sy}{a}\right).FT=\frac{bss=yss}{aa-ax}=\frac{bss}{aa}\ ,$$

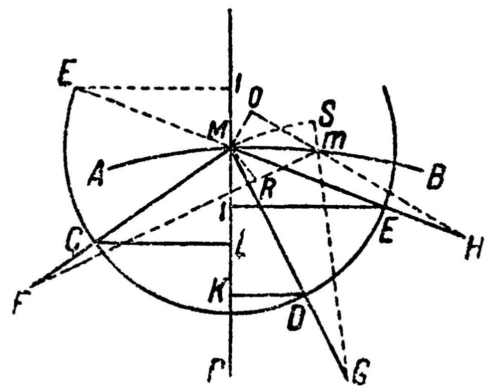
když za *x* dosadíme jeho hodnotu $\frac{ay}{b}$ a vše následně vydělíme $b-y$. Odtud je zřejmé, že čára *FT* je třetí úměrnou k *FG* a *FM*.[55]

TVRZENÍ X.

Zadání.

32. BUDIŽ *křivka* AMB (Obr. 18) *taková, že když z libovolného jejího bodu* M *povedeme do ohnisek* F, G, H *atd. úsečky* MF, MG, MH *atd.; jejich poměr bude vyjádřen nějakou rovnicí. Budiž zadáno vést z daného bodu* M *na tečnu v tomto bodě kolmici* MP.

Vezměme na křivce *AB* nekonečně malý oblouk *Mm* a veďme úsečky *FRm*, *GmS*, *HmO*; a ze středů *F*, *G*, *H* opišme malé kruhové oblouky *MR*, *MS*, *MO*. Ze středu *M* následně opíšeme kruh *CDE* o libovolném poloměru protínající úsečky *MF*, *MG*, *MH* v bodech *C*, *D*, *E*; z těchto bodů spustíme na *MP* kolmice *CL*, *DK*, *EI*. Nyní, jakmile máme tuto přípravu za sebou, podotýkám, že:



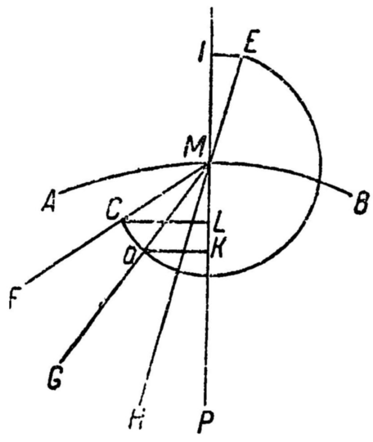
Obr. 18

1°. Pravoúhlé trojúhelníky *MRm* a *MLC* jsou podobné; neboť když od pravých úhlů *LMm*, *RMC* shodně odebereme úhel *LMR*, zbylé úhly *RMm*, *LMC* se budou rovnat; a mimo to úhly při *R* a *L* jsou pravé. Stejným způsobem dokážeme, že podobné jsou i pravoúhlé trojúhelníky *MSm* a *MKD*, *MOm* a *MIE*. A poněvadž přepona *Mm* je společná malým trojúhelníkům *MRm*, *MSm*, *MOm* a přepony *MC*, *MD*, *ME* trojúhelníků *MLC*, *MKD*, *MIE* jsou si navzájem rovny; kolmice *CL*, *DK*, *EI* tím pádem mezi sebou stojí ve stejném poměru jako diferenciály *Rm*, *Sm*, *Om*.

2°. Čáry vycházející z ohnisek, jež leží na té samé straně kolmice *MP*, rostou, zatímco ostatní klesají anebo naopak. Takto *FM* na Obr. 18 roste o svůj diferenciál *Rm*, zatímco zbylé *GM*, *HM* se zmenšují o své diferenciály *Sm*, *Om*.

Jestliže nyní pro představu předpokládáme, že rovnice vyjadřující poměr úseček $FM(x)$, $GM(y)$, $HM(z)$ je $ax+xy-zz=0$, a její diferenciál tedy $a\,dx+y\,dx+x\,dy-2\,z\,dz=0$; pak je zjevné, že tečna v *M* (která není ničím jiným než prodloužením malé strany *Mm* mnohoúhelníku skládajícího podle původního předpokladu (§ 3) křivku *AMB*) se musí nacházet v takové poloze, že když z libovolného jejího bodu *m* povedeme *mR*, *mS*, *mO* rovnoběžné s úsečkami *FM*, *GM*, *HM* a ohraničené v *R*, *S* a *O* jejich kolmicemi *MR*, *MS* a *MO*; pak vždy bude platit rovnice $\overline{a+y}\times Rm+x\times Sm-2\mathrm{z}\times Om=0$, čili (což vede ke stejnému výsledku, pokud na místo *Rm*, *Sm*, *Om* položíme jejich úměrné veličiny *CL*, *DK*, *EI*) že kolmice *MP* na křivku musí být položena tak, aby $a+y\times CL+x\times DK-2\,z\times EI=0$. Což dává následující konstrukci.

Uvažujme, že bod *C* (Obr. 18, 19) je zatížen vahou $a+y$ násobící diferenciál *dx* úsečky *FM*, na níž se nachází; a obdobně bod *D* vahou *x* a bod *E*, který vezmeme vzhledem k ohnisku *H* na opačné straně od *M* (neboť člen $-2zdz$ je záporný), vahou $2z$. Tvrdím, že úsečka *MP* procházející společným těžištěm vah položených na *C*, *D*, *E* bude požadovanou kolmicí. Z principů mechaniky je totiž zřejmé, že jakákoli přímá čára procházející těžištěm různých vah je rozdělí tak, že váhy na jedné straně násobeny každá svou vzdáleností od přímky jsou právě rovny vahám na straně druhé, pokud rovněž každou vynásobíme jejich vzdáleností od dané přímé čáry. Tedy za předpokladu, že při růstu *x* porostou i *y* a *z*, a tedy že se ohniska *F*, *G*, *H* (Obr. 19) nacházejí vzhledem k *MP* na stejné straně (jak ostatně předpokládáme vždy, když diferencujeme zadanou rovnici podle předepsaných pravidel); pak odtud plyne, že přímá čára *MP* rozloží váhy na jedné straně do *C* a *D* a na druhé do *E*. Tedy budeme mít $\overline{a+y}\times CL+x\times DK-2z\times EI=0$, což je rovnice, již bylo třeba sestrojit.



Obr. 19

Avšak nyní tvrdím, že správnost konstrukce v daném případě zaručuje, že bude platit i ve všech případech ostatních. Jestliže totiž předpokládáme například, že bod *M* změní svou polohu na křivce tak, že při nárůstu *x* budou *x* a *y* klesat, a tedy že ohniska *G* a *H* (Obr. 18) přejdou na druhou stranu *MP*, pak odtud vyplývá:

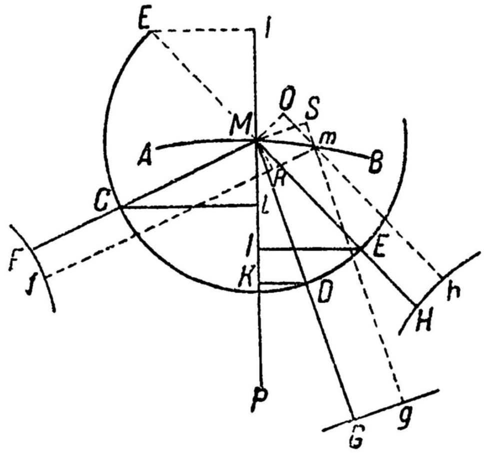
1° Že v diferenciálu dané rovnice je třeba (§ 8) změnit znaménka u členů, ve kterých vystupují činitelé *dy* a *dz* anebo k nim úměrné veličiny *DK* a *EI* tak, že rovnice, kterou je třeba sestrojit, v tomto případě bude $\overline{a+y}\times CL-x\times DK+2z\times EI=0$.

2°. Že váhy v *D* a *E* se vzhledem k *MP* přemístí na druhou stranu, a že tedy z řečené vlastnosti těžiště získáme $\overline{a+y}\times CL-x\times DK+2z\times EI=0$, což je rovnice, již bylo třeba sestrojit. A jelikož to samé nastává ve všech možných případech, plyne odtud *atd.*

Je zřejmé, že tento úsudek bude platit vždy nezávisle na počtu ohnisek a povaze zadané rovnice, a tak můžeme podat následující obecnou konstrukci.

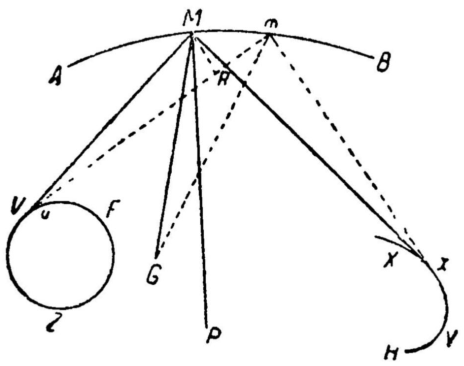
Vezměme diferenciál dané rovnice, u které předpokládám, že jeden z jejích členů je nulový.[56] Opišme ze středu *M* o libovolném poloměru kružnici *CDE* protínající úsečky *MF*, *MG*, *MH* v bodech *C*, *D*, *E*; a v těchto bodech pak uvažujme váhy, a sice ve stejných vzájemných poměrech jako veličiny násobící diferenciály čar, na nichž se nacházejí. Tvrdím, že přímka *MP* procházející jejich společným těžištěm bude požadovanou kolmicí. Je však třeba mít na paměti: pokud je v diferenciálu dané rovnice některá z vah záporná, je třeba ji vzhledem k ohnisku uvažovat na opačné straně bodu *M*.

Jestliže se požaduje, aby ohniska *F*, *G*, *H* (Obr. 20) byla nějakými přímými nebo křivými čárami, na něž úsečky *MF*, *MG*, *MH* padají pod pravým úhlem; na uvedené konstrukci to nic nemění. Jestliže totiž z bodu *m* vzatého nekonečně blízko *M* na ohniska spustíme kolmice *mf*, *mg*, *mh* a na tyto pak z bodu *M* malé kolmice *MR*, *MS*, *MO*; pak zřejmě *Rm* bude diferenciálem *MF*, neboť úsečky *MR* a *Rf* jsou si (coby kolmice mezi rovnoběžkami *Ff* a *MR*) rovny; a zrovna tak *Sm* bude diferenciálem *OG* a *Om* diferenciálem *MH*. Zbytek pak dokážeme výše uvedeným způsobem.



Obr. 20

Můžeme dále uvažovat, že ohniska *F*, *G*, *H* jsou vesměs anebo z části křivými čarami o pevném a neměnném počátku v bodech *F*, *G*, *H* (Obr. 21); a předpokládejme křivku *AMB* takovou, že když například z libovolného jejího bodu *M* povedeme tečny *MV*, *MX* a úsečku *MG*, poměr mezi obojakými[57] čarami *FVM*, *HXM* a úsečkou *MG* bude vyjádřen nějakou rovnicí. Neboť jestliže z bodu *m* vzatého nekonečně blízko *M* povedeme tečnu *mu*; pak je zřejmé, že druhou tečnu protne v bodě *V* (neboť není ničím jiným než prodloužením malého oblouku *Vu* pokládaného za malou úsečku); a tím pádem když ze středu *V* opíšeme malý kruhový oblouk *MR*; pak *Rm* bude diferenciálem obojaké čáry *FVM*, jež se stane *FVuRm*. A ostatní dokážeme tak jako shora.



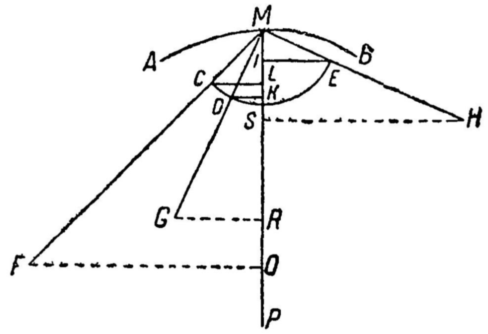
Obr. 21

První představu o této úloze poskytl p. Tschirnhaus *ve své* Livre de la Medecine de l'Esprit *a p.* Fatio *pro ni nalezl velmi důmyslné řešení, jež uveřejnil v Journoux d'Hollande: nicméně způsob, jakým ji uchopili, je jen zvláštním případem obecné konstrukce, kterou jsem zde právě vyložil.*[58]

PŘÍKLAD I.

33. NECHŤ $axx+byy+czz-f^3=0$ (úsečky *a*, *b*, *c*, *f* jsou dány), odkud diferenciál je $ax\,dx+by\,dy+cz\,dz=0$. Jestliže tedy budeme v *C* (Obr. 22) uvažovat závaží *ax*, v *D* závaží *by* a v *E* závaží *cz*, čili ve stejných poměrech vah, jaké mezi sebou mají tyto pravoúhelníky;[59] pak úsečka *MP* procházející jejich společným těžištěm bude kolmá ke křivce v bodě *M*.

Jestliže však povedeme FO rovnoběžnou s CL a vezmeme poloměr MC za jednotku; z podobnosti trojúhelníků MCL, MFO dostaneme $FO = x \times CL$; a stejně tak když povedeme GR rovnoběžnou s DK a HS rovnoběžnou s EI, obdržíme $GR = y \times DK$ a $HS = z \times EI$ tak, že když si v ohniskách F, G, H představíme váhy a, b, c; úsečka MP, která prochází těžištěm vah ax, by, cz položených v C, D, E, projde též těžištěm těchto nových vah. Avšak tento střed je pevným bodem, neboť váhy v F, G, H (totiž a, b, c) jsou konstantními úsečkami a zůstávají beze změny bez ohledu na polohu bodu M. Odtud plyne, že křivka AMB musí být taková, že všechny kolmice na ni se protínají v jediném bodě, tj. bude kruhem se středem v tomto bodě. Máme zde tedy velmi význačnou vlastnost kruhu, kterou lze vyjádřit následovně.

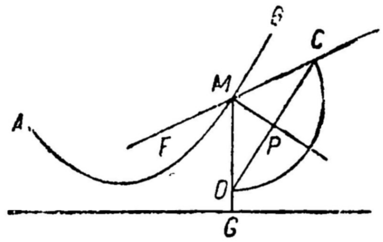


Obr. 22

Jestliže se v té samé rovině nachází libovolný počet vah a, b, c atd. ležících v bodech F, G, H atd.; a z jejich společného těžiště opíšeme kružnici AMB; pak tvrdím, že když z nějakého jejího libovolného bodu M povedeme úsečky MF, MG, MH atd., bude se součet jejich čtverců každý vynásobený příslušnou vahou rovnat vždy jedné a té samé veličině.

PŘÍKLAD II.

34. BUDIŽ křivka AMB (Obr 23.) taková, že když z nějakého jejího libovolného bodu M povedeme do ohniska F, které je pevným bodem, úsečku MF a do ohniska G, které je přímou čarou, kolmici MG; pak poměr MF ku MG bude vždy roven poměru dané a ku dané b.



Obr. 23

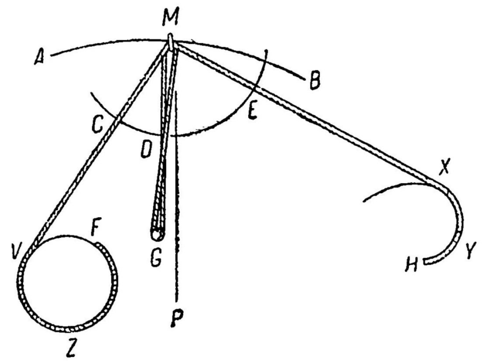
Označme FM jako x; MG jako y; a budeme mít $x.y :: a.b$, odkud $ay = bx$, čehož diferenciál je $a\,dy - b\,dx = 0$. A tedy když v C, které vzhledem k F bereme za M, uvážíme váhu b a v D (od M stejně vzdáleném) váhu a; a jejich společným těžištěm povedeme přímku MP; bude tato požadovanou kolmicí.

Z principu pákových vah je zřejmé, že když strunu CD rozdělíme v bodě P tak, že $CP.DP :: a.b$; pak bod P bude společným těžištěm vah položených do C a D.

Křivka AMB je kuželosečkou, a sice parabolou, když $a = b$; hyperbolou, když a je větší b; a konečně elipsou, když je menší.[60]

PŘÍKLAD III.

35. Připněme konce provazu *FZVMGMXYH* (Obr. 24) k *F* a *H*, do *G* připevněme hrot a provaz napněme pomocí kolíku umístěného v *M* tak, že části *FZV* a *HYX* ovíjejí křivky s počátkem v *F* a *H*. A nechť je část *MG* dvojitá, tj. přeložena tak, že se provaz obtočí okolo *G*; nyní v tomto uspořádání nechme posouvat kolíkem *M*; nuže je zřejmé, že opíše křivku *AMB*. Ptáme se, jak vést z daného bodu *M* na tuto křivku kolmici *MP*, přičemž poloha provazu, jenž tuto křivku opisuje, je v tomto bodě dána.



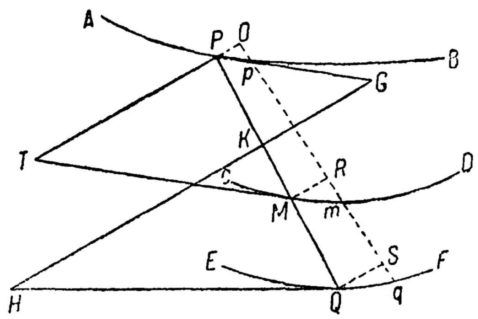
Obr. 24

Podotýkám, že přímé části provazu *MV* a *MX* jsou ve *V* a *X* vždy tečné; a že když nyní označíme smíšené čáry *FZVM* jako *x*; *HYXM* jako *z*; úsečku *MG* jako *y*; a přímkou čáru rovnou délce provazu jako *a*; pak vždy budeme mít $x+2y+z=a$: odkud poznávám, že křivka *AMB* spadá pod obecnou konstrukci. Jestliže tedy vezmeme diferenciál $dx+2dy+dz=0$ a budeme v *C* uvažovat váhu 1, v *D* váhu 2 a v *E* váhu 1; pak tvrdím, že úsečka *MP* procházející společným těžištěm těchto vah bude požadovanou kolmicí.

TVRZENÍ XI.

Zadání.

36. BUDIŽ *dvě libovolné čáry* APB, EQF (Obr. 25)*, ke kterým známe vést tečny* PG, QH*; a budiž přímá čára* PQ *a na ní vyznačený bod* M*. Jestliže předpokládáme, že krajnosti* P, Q *této úsečky kloužou podél čar* AB, EF*; zřejmě bod* M *tímto pohybem opíše křivku* CD*. Jde o to vést z daného bodu* M *na tuto křivku tečnu* MT.



Obr. 25

Představme si, že se pohyblivá úsečka *PMQ* dostane do nekonečně blízkého postavení *pmq*; povedeme malé úsečky *PO*, *MR*, *QS* kolmé na *PQ*, což dává vzniknout malým pravoúhlým trojúhelníkům *pOP*, *mRM*, *qSQ*. Vezměme *PK* rovnou *MQ* a povedeme úsečku *HKG* kolmou na *PQ*; a konečně prodloužíme *OP* do *T*, kde se podle předpokladu protne s hledanou tečnou *MT*. Nuže je zřejmé, že malé úsečky *Op*, *Rm*, *Sq* si budou navzájem rovny, poněvadž z této konstrukce jsou *PK* a *MQ* všude stejné.[61]

Označme dané *PK*, čili *KQ* jako *a*; *MQ*, čili *PK* jako *b*; *KG* jako *f*; *KH* jako *g*; a malou úsečku *Op* neboli *Rm*, čili *Sq* jako *dy*: z podobnosti trojúhelníků *PKG* a *pOP*, *QKH* a *qSQ* dostaneme

$$PK(b).KG(f)::pO(dy).OP=\frac{f\,dy}{b}.$$

$$\text{A}\ \ QK(a).KH(g)::qS(dy).SQ=\frac{g\,dy}{a}.$$

A z obecné geometrie je známo, že

$$MR=\frac{OP\times NQ+QS\times PM}{PQ}=\frac{f\,dy+g\,dy}{a+b}.$$

Takto z podobnosti trojúhelníků získáme

$$mR(dy).RM\left(\frac{f\,dy+g\,dy}{a+b}\right)::MP(a).PT=\frac{af+ag}{a+b}.$$

Což také bylo třeba nalézt.

TVRZENÍ XII.

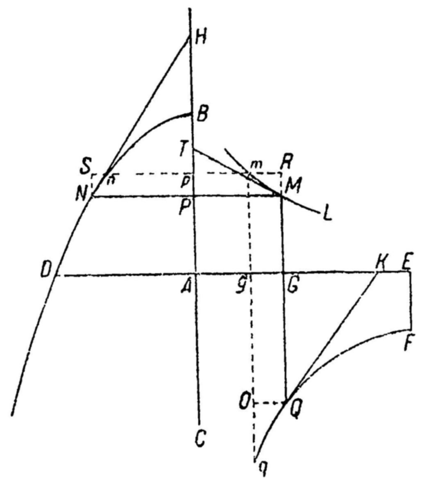
Zadání.

37. BUDIŽ *nějaké dvě libovolné čáry* BN, FQ (Obr. 26), *jejichž osami jsou úsečky* BC, ED *protínající jedna druhou pod pravým úhlem v bodě* A*; a mějme dále křivku* LM *takovou, že když z nějakého jejího bodu* M *povedeme úsečky* MGQ, MPN *rovnoběžné s* AB, AE; *poměr ploch* EGQF *(bod* E *je pevným bodem daným na úsečce* AE *a úsečka* EF *je rovnoběžná s* AC*) a* APND *a úseček* AP, PM, PN, GQ *bude vyjádřen nějakou rovnicí. Nyní je třeba z daného bodu* M *vést na křivku* LM *tečnu* MT.

Označme dané a proměnné *AP*, čili *GM* jako *x*; *PM*, čili *AG* jako *y*; *PN* jako *u*; *GQ* jako *z*; plochu *EGQS* jako *s*; plochu *APND* jako *t*; a dané subtangenty *PH* jako *a*; *GK* jako *b*: budeme mít *Pp* neboli *NS* neboli $MR=dx$, *Gg* neboli *Rm* neboli $OQ=-dy$; a pak z podobnosti trojúhelníků *HPN a NSn* dostaneme

$$Sn=-du=\frac{udx}{a},\quad Oq=dz=-\frac{zdy}{b},\quad NPpn=dt=u\,dx\quad \text{a}$$

$QGgq=ds=-z\,dy$; přičemž je třeba mít na paměti, že



Obr. 26

hodnoty *Rm* a *Sn* jsou záporné, neboť když $AP(x)$ roste, $PM(y)$ a $PN(u)$ klesají. Nuže vezměme diferenciál dané rovnice, kde na místa *dt*, *ds*, *du*, *dz* dosadíme jejich hodnoty $u\,dx$,

$-z\,dy$, $-\frac{u\,dx}{a}$, $-\frac{z\,dy}{b}$, což vydá novou rovnici, jež vyjadřuje hledaný poměr *dy* ku *dx* neboli *MP* ku *PT*.

PŘÍKLAD I.

38. NECHŤ $s+zz=t+ux$; když odtud vezmeme diferenciál, pak $ds+2\,z\,dz=dt+u\,dx+x\,du$ a dosazením původních hodnot na místa *ds*, *dt*, *dz*, *du* budeme mít

$$-z\,dy-\frac{2\,zz\,dy}{b}=2\,u\,dx-\frac{u\,x\,dx}{a},$$

odkud

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)=\frac{2\,a\,y\,zz+a\,y\,bz}{b\,u\,x-2\,a\,b\,u}.$$

PŘÍKLAD II.

39. NECHŤ $s=t$, a tedy $ds=dt$, tj. $-z\,dy=u\,dx$; a tím pádem $PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)=-\frac{yz}{u}$. Ježto však se jedná o zápornou veličinu; plyne odtud, že bod *T* je třeba brát (§ 10) na opačné straně bodu *A*, počátku *x*-ů. Jestliže předpokládáme, že čára *FQ* je hyperbolou s asymptotami *AC*, *AE* tak, že $GQ(z)=\frac{cc}{y}$; a že *BND* je přímou čarou rovnoběžnou s *AB* tak, že $PN(u)$ je vždy rovna dané úsečce *c*; pak zřejmě křivka *LM* má jako asymptotu přímou čáru *AB* a její subtangenta $PT\left(-\frac{yz}{u}\right)=-c$, tj. zůstává neměnnou.

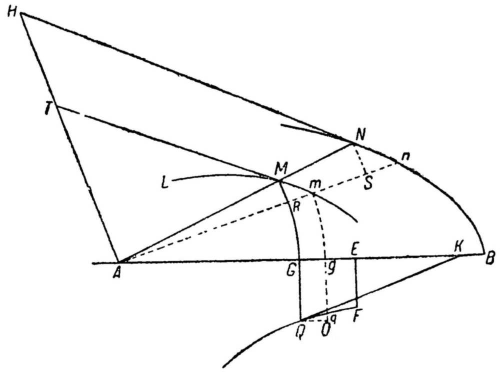
Křivka *LM* se v tomto případě nazývá *logaritmickou*.[62]

TVRZENÍ XIII.

Zadání.

40. BUDIŽ *libovolné dvě čáry* BN *a* FQ (Obr. 27) *a úsečka* BA *coby jejich společná osa, na níž jsou vyznačeny dva pevné body* A, E*; a budiž třetí křivka* LM *taková, že když libovolným jejím bodem* M *povedeme úsečku* AN*; ze středu* A *opíšeme kruhový oblouk* MG*; a konečně vyneseme* GQ *rovnoběžnou s* EF *a kolmou na* AB*; pak poměr mezi plochami* EGQF(s) *a* ANB(t) *a mezi úsečkami* AM*, čili* AG (s)*,* AN(z) *a* GQ(u) *bude vyjádřen nějakou rovnicí. Nyní je třeba z daného bodu* M *vést na křivku* LM *tečnu* MT.

Veďme úsečku *ATH* kolmou na *AMN*; a představme si úsečku *Amn* nekonečně blízkou *AMN*, druhý kruh *mg* a druhou kolmici *gq*; a ze středu *A* opišme malý kruhový oblouk *NS*. Nyní si označíme dané subtangenty *AH* jako *a*; *GK* jako *b*; a dostáváme *Rm* neboli $Gg=dy$ a $Sn=dz$. Z podobnosti trojúhelníků *HAN* a *NSn*, *KGQ* a *QOq* dostaneme



Obr. 27

$$SN=\frac{adz}{z}\,,\quad Oq=-du=\frac{u\,dy}{b}\,,\quad GQqg=-ds=u\,dy\,,$$

$$ANn\text{ , čili } AN\times\frac{1}{2}NS=-dt=\frac{1}{2}a\,dz\;.$$

Všechny tyto hodnoty dosadíme do diferenciálu dané rovnice a sestavíme novou rovnici, odkud vyjádříme hodnotu *dz* skrze *dy*. Avšak na základě podobných výsečí a trojúhelníků *ANS* a *AMR*, *mRM* a *MAT* nacházíme

$$AN(z).AM(y)::NS\left(\frac{a\,dz}{z}\right).MR=\frac{ay\,dz}{zz}\;.$$

$$\text{A } mR(dy).RM\left(\frac{ay\,dz}{zz}\right)::AM(y).AT=\frac{a\,yy\,dz}{zz\,dy}\;.$$

Jestliže tedy do této formule dosadíme na místo *dz* jeho hodnotu vyjádřenou prostřednictvím *dy*, všechny diferenciály se pokrátí a hodnota hledané subtangenty *AT* se vyjádří za pomoci členů, které jsou zcela známé. Což také bylo třeba nalézt.

PŘÍKLAD I.

41. NECHŤ $uy-s=zz-t$, odkud diferenciál je $u\,dy+y\,du-ds=2z\,dz-dt$, což (po dosazení) dává $dz=\dfrac{4bu\,dy-2uy\,dy}{4bz+ab}$; a když tuto hodnotu dosadíme do $\dfrac{a\,yy\,dz}{zz\,dy}$, nacházíme

$$AT=\frac{4abzyy-2auy^3}{4bz^3+abzz}\;.$$

PŘÍKLAD II.

42. NECHŤ $s=2t$, tedy $ds=2dt$, tj. $-u\,dy=-a\,dz$, čili $dz=\dfrac{u\,dy}{a}$; a tím pádem

$$AT\left(\frac{a\,yy\,dz}{zz\,dy}\right)=\frac{u\,yy}{zz}\;.$$

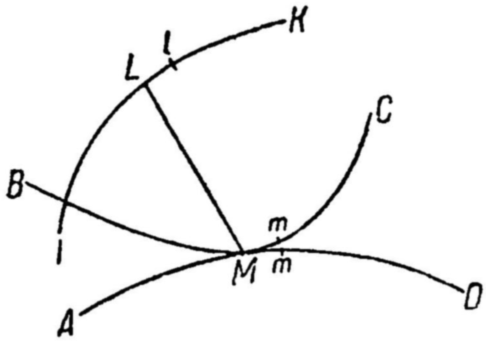
Pokud je čára *BN* kruhem se středem v bodě *A* a poloměrem $AB=AN=c$; a nechť *FQ* je hyperbolou takovou, že $GQ(u)=\frac{ff}{y}$; pak je zřejmé, že křivka *LM* před dosažením středu *A* vykoná kolem tohoto středu nekonečno obratů (neboť plocha *FEGQ* se stane nekonečnou, jakmile bod *G* splyne s *A*); pak zřejmě $AT=\frac{ffy}{cc}$. Odtud je zjevné, že poměr *AM* ku *AT* je konstantní a tím pádem, že úhel *AMT* je všude stejný.

Křivka *LM* se v tomto případě nazývá *logaritmickou spirálou*.[63]

TVRZENÍ XIV.

Zadání.

43. BUDIŽ *na jedné a té samé rovině nějaké dvě libovolné křivky* AMD*,* BMC (Obr. 28)*, které se stýkají v bodě* M*; a budiž na ploše křivky* BMC *pevný bod* L*. Jestliže si nyní představíme, že křivka* BMC *se odvaluje po křivce* AMD *a nepřetržitě k ní přiléhá tak, že odvalené části* AM*,* BM *jsou si vždy rovny; pak je zjevné, že bod* L *nesený rovinou* BMC *tímto pohybem opíše jistý druh cykloidy*[64] ILK*. Nuže tvrdím, že pokud v každém jednotlivém postavení křivky* BMC (*z opisujícího bodu* L *do tečného bodu* M) *povedeme úsečku* LM*, bude tato kolmá ke křivce* ILK.



Obr. 28

Jestliže si totiž u těchto dvou křivek *AMD*, *BMC* představíme dvě navzájem rovné, nekonečně malé části *Mm*, *Mm*; pak je budeme moci pokládat (§ 3) za dvě malé úsečky svírající v bodě *M* nějaký nekonečně malý úhel. Avšak aby malá strana *Mm* křivky či mnohoúhelníku *BMC* splynula s malou stranou *Mm* mnohoúhelníku *AMD*; je třeba, aby bod *L* opsal kolem tečného bodu *M* jakožto středu malý oblouk *Ll*. Je tedy zřejmé, že tento malý oblouk bude součástí křivky *ILK*, a tím pádem, že úsečka *ML*, která je na něj kolmá, bude kolmá též na křivku *ILK* v bodě *L*. Což také bylo dokázat.

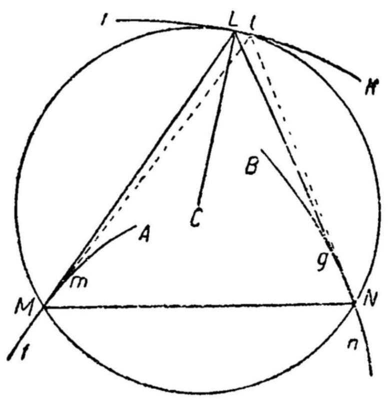
TVRZENÍ XV.

Zadání.

44. BUDIŽ *nějaký libovolný přímočarý úhel* MLN (Obr. 29)*, jehož strany* LM *a* LN *se dotýkají nějakých libovolných dvou křivek* AM *a* BN*. Pokud strany úhlu necháme po těchto křivkách klouzat*

tak, že se jich nepřetržitě dotýkají; pak zřejmě vrchol L *tímto pohybem opíše nějakou křivku* ILK. *Nyní je třeba vést kolmici* LC *na tuto křivku, přičemž poloha úhlu* MLN *je dána*.

Opišme kruh procházející vrcholem *L* a tečnými body *M*, *N*; a jeho středem *C* veďme úsečku *CL*: tvrdím, že tato bude kolmá na křivku *ILK*.



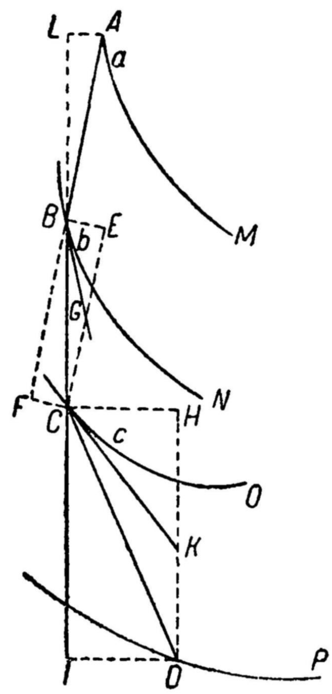
Obr. 29

Jestliže totiž pokládáme křivky *AM*, *BN* za mnohoúhelníky o nekonečnu stran takových jako *Mm*, *Mn*; pak je zjevné, že když necháme strany *LM*, *LN* přímočarého úhlu *MLN*, který máme za neměnný, klouzat kolem pevných bodů *M*, *N* (tečny *LM*, *LN* pokládáme za prodloužení malých stran *Mf*, *Ng*), dokud strana *LM* nesplyne s malou stranou *Mm* mnohoúhelníku *AM* a druhá strana *LN* s malou stranou *Nn* mnohoúhelníku *BN*; tehdy vrchol *L* opíše malou část *Ll* kruhového oblouku *MLN*, poněvadž tento oblouk ze své konstrukce daný úhel *MLN* zahrnuje. Tato malá část *Ll* tudíž bude náležet křivce *ILK*, a tím pádem úsečka *CL*, která je na ni kolmá, bude kolmá i na tuto křivku v bodě *L.* Což také bylo dokázat.

TVRZENÍ XVI.

Zadání.

45. NECHŤ ABCD (Obr. 32) *je dokonale pružnou strunou, na níž jsou v libovolných intervalech* AB*,* BC *atd. upoutána různá závaží* A*,* B*,* C *atd. Jestliže nyní tuto strunu potáhneme v horizontální rovině za konec* D *podél nějaké dané křivky* DP*; je zřejmé, že závaží se rozmístí tak, že napnou strunu a opíší křivky* AM*,* BN*,* CO *atd. Požadujeme nalézt způsob, jak k těmto křivkám vést tečny, přičemž postavení struny* ABCD *je dáno spolu s velikostmi závaží.*



Obr. 30

V prvním okamžiku, kdy se konec *D* pohybuje ve směru *P*, závaží *A*, *B*, *C* opisují nebo tíhnou opisovat malé strany *Aa*, *Bb*, *Cc* mnohoúhelníků skládajících křivky *AB*, *BG*, *CK*; a tudíž jestliže k nim máme vést tečny *AB*, *BG*, *CK*, postačí určit nasměrování závaží *A*, *B*, *C* v tomto prvním okamžiku, tj. najít polohu úseček, které daná závaží tíhnou opisovat. A k tomu podotýkám toto:

1°. Závaží *A* je v tomto prvním okamžiku taženo směrem *AB* a tento směr následovat musí; samo totiž nevleče žádné další závaží, a tudíž zde není překážka, která by *A* z daného směru odchylovala; tím pádem úsečka *AB* bude tečnou ke křivce *AM* v bodě *A*.

2°. Závaží *B* je taženo směrem *BC*; samo však vleče *A*, jež tento směr nesleduje, a proto jej musí pozměňovat; a tudíž závaží *B* nebude směřovat podle *BC*, ale podle nějaké jiné úsečky *BG*, jejíž polohu je třeba nalézt. Což provedu následovně.

Na *BC* jakožto uhlopříčce sestrojím pravoúhelník *EF*, jehož strana *BF* leží na prodloužení *AB*. Jestliže nyní předpokládám, že síla, která táhne *B* ve směru *BC*, je právě *BC* vyjádřena; z pravidel mechaniky je zjevné, že tuto sílu *BC* lze rozložit na další dvě *BE* a *BF*, tj. vychází nastejno, jestli je závaží *B* taženo silou *BC* ve směru *BC* anebo silou *BE* ve směru *BE* a zároveň silou *BF* ve směru *BF*. Avšak závaží *A* se nijak nestaví do směru *BE*, protože *BE* leží kolmo na něj, a tudíž síla *BE* v tomto směru zůstane nezmenšena. Do směru *BF* se nicméně pokládá celou svojí vahou, a proto aby závaží *B* o síle *BF* překonalo odpor závaží *A*, je nutno tuto sílu rozložit mezi tato závaží úměrně k jejich hmotnosti či velikosti. Jestliže tudíž *EC* rozdělíme v bodě *G* tak, že *CG* se bude mít ku *GE* jako závaží *A* k závaží *B*; pak zřejmě *EG* bude vyjadřovat zbývající sílu, kterou závaží *B* tíhne k pohybu ve směru *BF*, jakmile překoná odpor závaží *A*. Je tedy zjevné, že závaží *B* je taženo zároveň silou *BE* ve směru *BE* a silou *EG* ve směru *BF* neboli *EC*, a že tedy bude tíhnout silou *BG* k pohybu podél *BG*. To znamená, že *BG* je jeho nasměrováním, a tím pádem tečnou ke křivce *BN* v bodě *B*.

3°. K nalezení tečny *CK* sestrojím na *CD* jakožto úhlopříčce pravoúhelník *HI*, jehož strana *CI* leží na prodloužení *BC* a spatřuji, že závaží *B* nijak neodporuje síle *CH*, kterou je závaží *C* taženo ve směru *CH*, ale naopak odporuje naprosto síle *CI*, kterou je taženo ve směru *CI*; a této síle kromě toho odporuje i závaží *A*. Velikost jeho odporu určím tak, že povedu *AL* kolmou na *CB* prodlouženou za *B* a zjišťuji, že pokud *AB* vyjadřuje sílu, kterou je závaží *A* taženo směrem *AB*; pak *BL* bude vyjadřovat sílu, kterou je stejné závaží *A* taženo ve směru *BC* tak, že závaží *C* o síle *CI* musí převážit nad celým *B* a k tomu i nad částí závaží *A*, která se k celému *A* má jako jako *BL* ku *BA* nebo *BF* ku *BC*. Jestliže tedy položíme $B+\frac{A\times BF}{BC}.C::DK.KH$, zřejmě bude *CK* představovat nasměrování závaží *B*, a tím pádem bude tečnou v bodě *C* ke třetí křivce *CO*.

Stejným způsobem bychom při vyšším počtu křivek nalezli tečnu ke čtvrté, páté atd. A kdyby bylo třeba nalézt tečny ke křivkám opsaným středními body mezi závažími, určili bychom je podle § 36.

ODDÍL TŘETÍ.

Použití diferenciálního počtu k nalézání největších a nejmenších ordinát, kam lze převést veškeré otázky De maximis & minimis.

DEFINICE I.

Budiž nějaká křivka *MDM* (Obr. 30, 31, 33, 34), jejíž ordináty *PM*, *ED*, *PM* jsou navzájem rovnoběžné; a nechť je taková, že pokud spojitě roste abscisa *AP*, roste též ordináta *MP*, a to až do určitého bodu *E*, po kterém začne klesat; anebo naopak taková, že do určitého bodu *E* klesá a po něm začne růst.

Nuže čáru *ED* nazveme *největší*, anebo naopak *nejmenší* ordinátou.

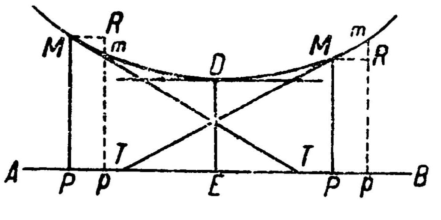
DEFINICE II.

Jestliže položíme nějakou veličinu takovou jako *PM*, která se skládá z jedné nebo více neurčených veličin takových jako *AP*,[65] přičemž když *AP* spojitě roste, roste též *PM*, a to až do určitého bodu *E*, po němž začne klesat, anebo naopak; a nechť je třeba najít pro *AP* takovou hodnotu *AE*, že odtud složená *ED* bude větší nebo menší než kterákoli jiná veličina *PM* obdobně utvořená z *AP*; pak toto nazveme otázkou *De maximis & minimis*.

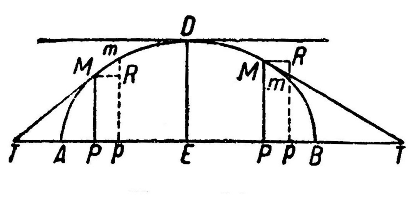
OBECNÉ ZADÁNÍ.

46. POVAHA *křivky* MDM *je dána; nyní je třeba najít pro* AP *takovou hodnotu* AE*, že ordináta* ED *bude největší nebo nejmenší ze všech podobně utvořených* PM.

Pokud při růstu *AP* roste též PM; pak je zjevné (§ 8, 10), že její diferenciál *Rm* bude vzhledem k diferenciálu *AP* kladný; a pokud naopak *PM* klesá, přičemž abscisa *AP* roste, její diferenciál bude



Obr. 31

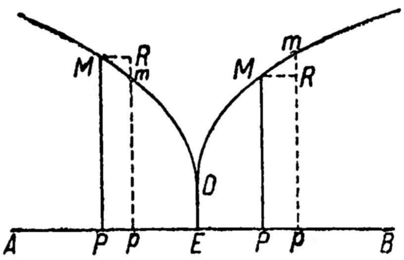


Obr. 32

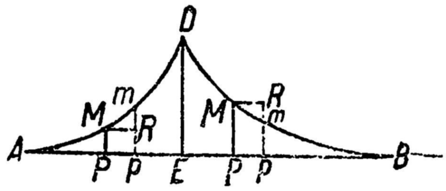
záporný. Žádná spojitě rostoucí, nebo klesající veličina se však nemůže převrátit z kladné v zápornou, aniž by prošla nekonečnem nebo nulou; a sice nulou, jestliže nejprve klesá, a nekonečnem, jestliže nejprve roste. Odtud pak plyne, že diferenciál veličiny, která něčeho vyjadřuje *nejvíce*, nebo *nejméně*, se musí rovnat nule, nebo nekonečnu. Nuže je dána povaha křivky *MDM*; najdeme (Odd. 1 nebo 2) hodnotu *Rm*; a když ji pak položíme nejprve rovnou nule a posléze nekonečnu; poslouží nám na základě prvého, nebo druhého předpokladu k odhalení hledané hodnoty *AE*.

POZNÁMKA.

47. TEČNA V *D* (Obr. 31, 32) je rovnoběžná s osou *AB*, když se diferenciál *Rm* v tomto bodě stane nulovým; jestliže však dosáhne nekonečna, splývá tečna s ordinátou *ED* (Obr. 33, 34). Odtud je zřejmé, že poměr *mR* ku *RM*, který vyjadřuje poměr ordináty k subtangentě, se v bodě *D* rovná nule, nebo nekonečnu.



Obr. 33



Obr. 34

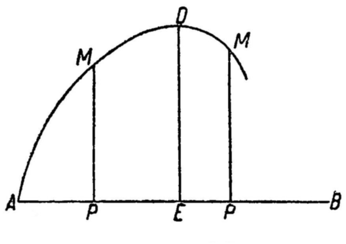
Snadno nahlédneme, že spojitě klesající veličina se z kladné nemůže proměnit v zápornou, aniž by prošla nulou; neukazuje se však již s takovou samozřejmostí, že by, pokud je rostoucí, musela projít nekonečnem. Přizvěme tedy na pomoc představivosti tečny uvažované v bodech *M*, *D*, *M* (Obr. 31, 32). Zřejmě u těch křivek, kde je tečna v *D* rovnoběžná s osou *AB*, subtangenta *PT* nepřetržitě poroste tím více, čím více se body *M*, *P* budou přibližovat bodům *D*, *E*; a stane se nekonečnou, jakmile bod *M* spadne s *D* v jedno. A zřejmě když *AP* nakonec přesáhne *AE*, subtangenta *PT* se z původně kladné převrátí (§ 10) v zápornou, anebo naopak.[66]

PŘÍKLAD I.

48. PŘEDPOKLÁDEJME, že $x^3+y^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, $AB=a$) (Obr. 35) vyjadřuje povahu křivky *MDM*. Diferencováním dostáváme

$$3\,xx\,dx+3\,yy\,dy=ax\,dy+ay\,dx$$

$$\text{a } dy=\frac{ay\,dx-3\,xx\,dx}{3\,yy-ax}=0\,,$$



Obr. 35

když bod *P* splyne s hledaným bode *E*; odkud $y=\frac{3\,xx}{a}$. Jestliže nyní tuto hodnotu dosadíme na místo *y* do rovnice $x^3+y^3=axy$, nalezneme pro *AE* hodnotu $x = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{2}$ takovou, že ordináta *ED* bude největší ze všech podobných *PM*.[67]

PŘÍKLAD II.

49. NECHŤ $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$ je rovnicí, která vyjadřuje povahu křivky *MDM* (Obr. 33). Jejím diferencováním budeme mít

$$dy = -\frac{2\,dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}},$$

což nejprve položím rovno nule. Avšak na základě tohoto předpokladu dostávám

$$-2\,dx\sqrt[3]{a} = 0,$$

odkud hodnotu *AE* určit nelze. Nuže pokládám $\frac{-2\,dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ rovno nekonečnu; což mi dává

$$3\sqrt[3]{a-x} = 0,$$

odkud $x = a$. Což je hledaná hodnota *AE*.[68]

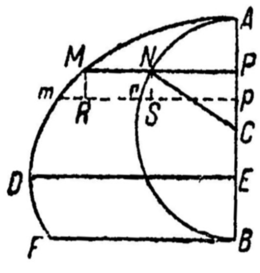
PŘÍKLAD III.

50. BUDIŽ zkrácená polocykloida *AMF* (Obr. 36), jejíž základna *BF* je menší než poloviční obvod *ANB* tvořícího kruhu o středu v bodě *C*. Nyní je třeba na průměru *AB* určit bod *E* tak, aby ordináta *ED* byla co možná největší.

Veďme dle libosti ordinátu *PM*, která daný půlkruh protíná v *N*; a nyní budeme jako obvykle uvažovat v bodech *M*, *N* malé trojúhelníky *MRm*, *NSn*; a označíme neurčené veličiny *AP* jako *x*; *PN* jako *z*; oblouk *AN* jako *u*; a dané *ANB* jako *a*; *BF* jako *b*; *CA*, čili *CN* jako *c*. Z povahy cykloidy dostáváme

$$ANB(a).\,BF(b)::An(u).\,NM = \frac{bu}{a}.$$

A tedy $PM = z + \frac{bu}{a}$, odkud je diferenciál $Rm = \frac{a\,dz + b\,du}{a} = 0$, právě když bod *P* připadá do hledaného bodu *E*. Avšak pravoúhlé trojúhelníky *NSn* a *NPC* jsou podobné, neboť když od pravých úhlů *CNn*, *PNS* odebereme společný úhel *CNS*, pak zbylé úhly *SNn*, *PNC* si budou rovny. A tím pádem



Obr. 36

$$CN.(c)\,CP(c-x)::Nn(du).\,Sn(dz) = \frac{c\,du - x\,du}{c}.$$

A když tedy tuto hodnotu dosadíme na místo *dz* do $a\,dz + b\,du = 0$, nalezneme

$$\frac{ac\,du - ax\,du + bc\,du}{c} = 0\,,$$

odkud vyvodíme x (které je v tomto případě AE) = $c + \frac{bc}{a}$.

Je tedy zjevné, že když na straně B položíme CE za čtvrtou úměrnou k polovičnímu obvodu ANB, základně BF a poloměru CB; pak bod E bude tím, který hledáme.

PŘÍKLAD IV.

51. ROZDĚLIT danou čáru AB (Obr. 35) v bodě E tak, aby součin čtverce její první části AE krát druhá část EB byl největším ze všech podobně utvořených součinů.

Označme neznámou AE jako x; a danou AB jako a; budeme mít

$$\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3\,,$$

která musí být *největší*. Nuže si představe křivou čáru MDM takovou, že poměr ordináty $MP(y)$ k abscise $AP(x)$ bude vyjádřen rovnicí $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, a budeme hledat bod E takový, že ordináta ED bude největší ze všech podobně utvořených PM; což dává

$$dy = \frac{2\,ax\,dx - 3\,xx\,dx}{aa} = 0$$

a odtud

$$AE(x) = \frac{2}{3}a\,.$$

Jestliže obecně má být $x^m \times \overline{a-x}^n$ *největším* (m, n označují libovolná čísla), diferenciál tohoto součinu musí být rovný nule, anebo nekonečnu, což dává

$$mx^{m-1}\,dx \times \overline{a-x}^n - n\,\overline{a-x}^{n-1}\,dx = 0\,,$$

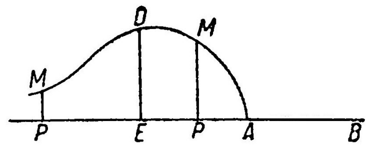
odkud po vydělení $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}\,dx$ dostaneme

$$am - mx - nx = 0$$

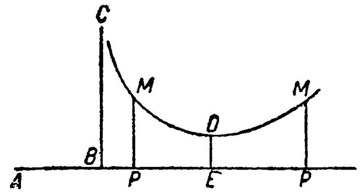
$$\text{a} \;\; AE(x) = \frac{m}{m+n}a\,.$$

Jestliže $m=2$ a $n=-1$, budeme mít $AE=2a$; a pak je třeba zadání úlohy vyslovit následujícím způsobem.

Prodloužit danou čáru *AB* (Obr. 37) za *B* do bodu *E* tak, aby veličina $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ byla *nejmenší* a nikoli



Obr. 37



Obr. 38

největší. Neboť pak rovnice křivky *ADM* bude $\frac{xx}{x-a}=y$; a když pak položíme $x=a$, ordináta *PM*, která se stane *BC*, bude $\frac{aa}{0}$, tj. nekonečná; a pokud nyní předpokládáme *x* nekonečným; budeme mít $y=x$, tj. ordináta bude rovněž nekonečná.

Když $m=1$ a $n=-2$, dostáváme $AE=-a$; odkud plyne, že úlohu musíme zadat takto.

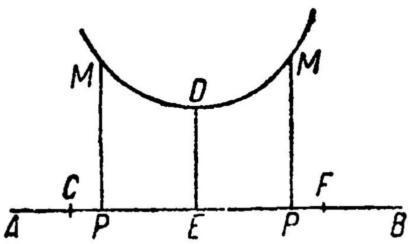
Prodloužit danou úsečku *AB* (Obr. 38) na straně *A* do bodu *E* tak, že veličina $\frac{AE\times\overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ bude větší než každá další podobně utvořená veličina $\frac{AP\times\overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$.

PŘÍKLAD V.

52. PŘÍMÁ čára *AB* (Obr. 39) je rozdělena na tři části *AC*, *CF*, *FB*; a je třeba rozdělit její prostřední část *CF* v bodě *E* tak, aby poměr pravoúhelníku $AE\times EB$ k pravoúhelníku $CE\times EF$ byl nejmenším ze všech podobně utvořených poměrů.

Označme dané *AC* jako *a*; *CF* jako *b*; *CB* jako *c*; a neznámou *CE* jako *x*; budeme mít

$$AE=a+x\ ,\ \ EB=c-x\ \ \text{a}\ \ EF=b-x\ .$$



Obr. 39

Poměr $AE\times EB$ ku $CE\times EF$ bude tím pádem

$$\frac{ac+cx-ax-xx}{bx-xx}$$

a tento musí být *nejmenším*. A proto když si představíme nějakou křivou čáru *MDM* takovou, že poměr ordináty $PM\left(y\right)$ k abscise $CP\left(x\right)$ bude vyjádřen rovnicí

$$y=\frac{aac+acx-aax-axx}{bx-xx}\ ,$$

daná otázka se zúží na to, kterak pro x nalézt takovou hodnotu CE, aby ordináta ED byla nejmenší ze všech jí podobných PM. Sestavíme tedy (diferencováním a vydělením $a\,dx$) rovnici

$$cxx - axx - bxx + 2\,acx - abc = 0\ ,$$

kde jeden z jejích kořenů bude řešením dané otázky.

Jestliže $c = a + b$, budeme mít $x = \frac{1}{2} b$.

PŘÍKLAD VI.

53. ZE všech kuželů, které lze vepsat nějaké dané kouli, určit kužel o největším vypouklém povrchu.

Podstatou této úlohy je určit na průměru AB půlkruhu AFB (Obr. 40) bod E tak, že když povedeme kolmici EF a propojíme A s F; pravoúhelník $AF \times FE$ bude největším ze všech podobných pravoúhelníků $AN \times NP$. Pokud si totiž představíme, že půlkruh AFB vykoná úplný obrat okolo průměru AB; pak je zřejmé, že opíše kouli; že pravoúhlé trojúhelníky AEF, APN opíší kužele této kouli vepsané; a jejich vypouklé povrchy opsané tětivami AE, AN se k sobě budou mít jako pravoúhelníky $AF \times FE$ a $AN \times NP$.

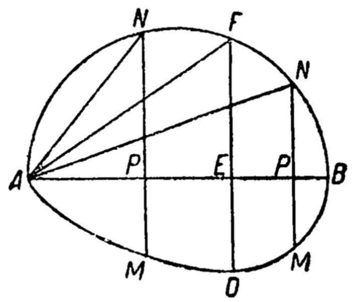
Budiž tedy neznámá $AE = x$; a daná $AB = a$; z povahy kruhu budeme mít

$$AF = \sqrt{ax}\ ,\ \ EF = \sqrt{ax - xx}\ ,$$

a tím pádem

$$AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}\ ,$$

jež má být *největším*. A proto jestliže si představíme nějakou křivou čáru MDM takovou, že poměr ordináty $PM(y)$ k abscise



Obr. 40

$AP(x)$ bude vyjádřen rovnicí $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; pak budeme hledat bod E tak, aby ordináta ED byla největší ze všech jí podobných PM. Nalezením diferenciálu tedy budeme mít

$$\frac{2\,ax\,dx - 3\,xx\,dx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0\ ,$$

odkud konečně dostáváme

$$AE(x) = \frac{2}{3} a\ .$$

PŘÍKLAD VII.

54. POŽADUJEME ze všech rovnoběžnostěnů rovných nějaké dané krychli a^3, kde zároveň je jedna z jejich stran rovna dané úsečce *b*, najít ten, který má nejmenší povrch.

Označme jednu z jeho stran jako x; druhá bude $\frac{a^3}{bx}$; a jestliže nyní vezmeme plochy od všech tří hran b, x, $\frac{a^3}{bx}$ rovnoběžnostěnu; pak jejich součet, tj. $\frac{b}{x}+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{b}$, bude činit polovinu jeho povrchu, který musí být *nejmenším*. Pokud si tedy jako obvykle představíme nějakou křivku, jejíž rovnice je $\frac{bx}{a}+\frac{aa}{x}+\frac{aa}{b}=y$; pak jejím diferencováním dostáváme $\frac{b\,dx}{a}-\frac{aa\,dx}{xx}=0$, odkud

$$xx=\frac{a^3}{b} \text{ a } x=\sqrt{\frac{a^3}{b}}.$$

Nuže stranami rovnoběžnostěnu, které odpovídají zadání, budou 1°. b. 2°. $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. 3°. $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Odkud je zřejmé, že dvě z hledaných hran se jedna druhé rovnají.

PŘÍKLAD VIII.

55. NYNÍ požadujeme ze všech rovnoběžnostěnů (Obr. 41) rovnajících se nějaké dané krychli a^3 ten, který má nejmenší povrch.

Označme jako x jednu z neznámých hran; pak zřejmě zbylé dvě budou podle předchozího příkladu $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$, a tím pádem součet ploch od tří různých hran, který tvoří polovinu povrchu hledaného rovnoběžnostěnu, bude

$$\frac{a^3}{x}+2\sqrt{a^3}\,x;$$

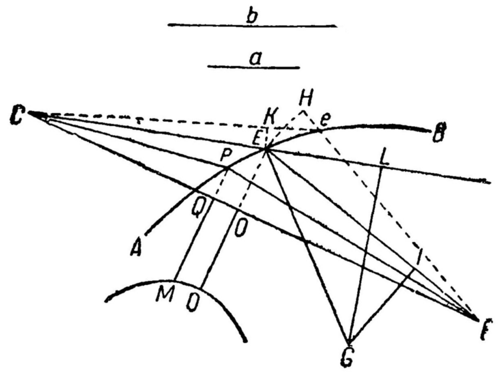
přičemž musí být *nejmenším*. Jeho diferenciál tedy bude

$$-\frac{a^3\,dx}{xx}+\frac{a^3\,dx}{\sqrt{a^3}\,x}=0,$$

odkud získáváme $x=a$; a tím pádem i obě dvě zbylé hrany budou rovny *a* tak, že samotná krychle vyhovuje zadání.

PŘÍKLAD IX.

56. NECHŤ je dána čára *AEB* (Obr. 41) spolu se svou polohou v rovině a dvěma pevnými body *C*, *F*; a veďme do nějakého jejího libovolného bodu *P* úsečky $CP(u)$, $PF(z)$. Budiž pak dána nějaká veličina složená z neurčených veličin *u* a *z* a dalších libovolně zadaných úseček *a*, *b* atd. Ptáme se, jaká musí být poloha úseček *CE*, *EF* tak, aby veličina z nich složená byla větší, nebo menší než obdobná veličina složená z úseček *CP*, *PF*.



Obr. 41

Předpokládejme, že se čáry *CE*, *EF* nacházejí v požadovaném stavu; propojme *C* a *F* a položme křivou čáru *DM* takovou, že když pak na *CF* spustíme libovolnou kolmici *PQM*; ordináta *QM* bude vyjadřovat danou veličinu. Nyní je jasné, že když bod *P* připadne do bodu *E*; pak právě ordináta *QM*, která splyne s *OD*, bude muset být nejmenší, nebo největší ze všech jí podobných, a její diferenciál tudíž roven nule, anebo nekonečnu. Pokud tedy daná veličina bude například $au+2z$; budeme mít

$$a\,du+2\,z\,dz=0\ ,$$

a tím pádem

$$du\,.-dz::2\,z.a\ .$$

Odtud je zřejmé, že *dz* musí být ve srovnání s *du* záporný, tj. úsečky *CE*, *EF* musejí být položeny tak, že když *u* roste, *z* klesá.

Jestliže nyní povedeme *EG* kolmou na *AEB* a z nějakého jejího libovolného bodu *G* spustíme kolmice *GL*, *GI* na *CE EF*; a bodem *e* vzatým nekonečně blízko *E* narýsujeme úsečky *CKe*, *FeH*; a od středů *C*, *F* opíšeme malé kruhové oblouky *EK*, *EH*; pak odtud vznikají podobné pravoúhlé trojúhelníky *ELG* a *EKe*, *EIG* a *EHe*. Když totiž od pravých úhlů *GEe*, *LEK* odebereme společný úhel *LEe*, zbývající *LEG*, *KEe* si budou rovny; a stejně tak dokážeme, že se budou rovnat i úhly *IEG*, *HEe*. Budeme tedy mít

$$GL.GI::Ke(du)\,.He(-dz)::2\,z.a\ .$$

Odtud plyne, že úsečky *CE*, *EF* musí být položeny tak, že pokud povedeme kolmici *EG* na čáru *AEB*; sinus *GL* úhlu *GEC* se bude mít k sinu *GI* úhlu *GEF* tak, jako se veličiny násobící *dz* mají k veličinám násobícím *du*. Což také bylo třeba dokázat.[69]

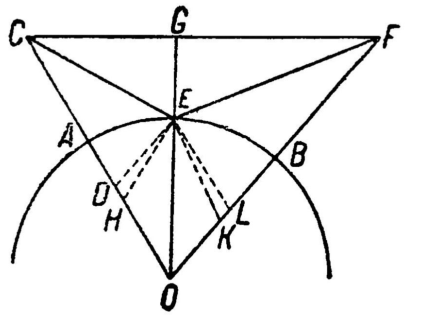
DŮSLEDEK.

57. DEJME tomu, že úsečka *CE* je nyní dána polohou i velikostí, zatímco úsečka *EF* pouze velikostí, a její polohu je třeba najít; zřejmě pokud je dán úhel *GEC*, je dán i jeho sinus *GL*; a tím pádem i sinus hledaného úhlu *GEF*. Jestliže tedy opíšeme kruh o průměru *EG* a z bodu *G* do bodu *I* vyneseme na jeho obvod hodnotu *GI*; pak úsečka *EF* procházející bodem *I* bude mít požadovanou polohu.

Nechť danou veličinou je $au+bz$; najdeme $GI=\frac{a\times GL}{b}$. Odtud je zřejmé, že poloha *EF* bude vždy jedna a ta samá, ať už jsou délky *EC* a *EF* dány jakkoli, protože žádná z nich nevstupuje do *GI*, která se tím pádem nemění. Jestliže $a=b$; pak zřejmě *EF* musí spadat v jedno s *CE* prodlouženou za *E*; neboť $GL=GI$, když body *C*, *F* spadají po různých stranách od čáry *AEB*; pokud však spadají oba na jednu stranu, je třeba úhel *FEG* (Obr. 42) brát rovný úhlu *CEG*.

PŘÍKLAD X.

58. JE dán kruh *AEB* (Obr. 42) spolu se svojí polohou a dvěma body *C* a *F* ležícími vně; nyní je třeba na jeho obvodu najít bod *E* takový, aby součet úseček *CE*, *EF* byl co možná nejmenší.



Obr. 42

Předpokládejme, že bod *E* je tím, který hledáme, a středem *O* veďme čáru *OEG*; je zřejmé, že bude kolmá k obvodu *AEB*, a tím pádem, že (§ 57) úhly *FEG*, *CEG* si budou navzájem rovny. Jestliže tudíž povedeme *EH* tak, aby se úhel *EHO* rovnal úhlu *CEO*; a podobně *EK* tak, aby úhel *EKO* byl roven úhlu *FEO*; a narýsujeme dále *ED*, *EL* rovnoběžné s *OF*, *OC*; pak odtud vznikají podobné trojúhelníky *OCE* a *OEH*, *OFE* a *OEK*, *HDE* a *KLE*. Označme nyní známé *OE* neboli *OA* neboli *OB* jako *a*; *OC* jako *b*; *OF* jako *c*; a neznámé *OD* neboli *LE* jako *x*, *DE* neboli *OL* jako *y*; budeme mít

$$OH=\frac{aa}{b}\ ,\ OK=\frac{aa}{c}$$

$$\text{a}\ \ HD\left(x-\frac{aa}{b}\right).DE(y)::KL\left(y-\frac{aa}{c}\right).LE(x)\ .$$

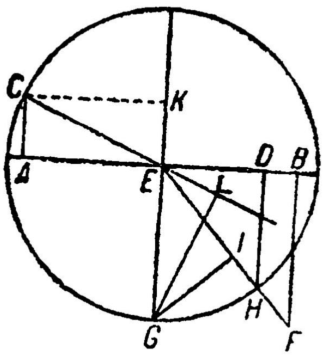
A tedy

$$xx-\frac{aax}{b}=yy-\frac{aay}{c}\ ,$$

což je rovnice hyperboly, kterou snadno sestrojíme a která daný kruh protne v hledaném bodě *E*.[70]

PŘÍKLAD XI.

59. CESTOVATEL, jenž se vydává z místa C (Obr. 43) do místa F, musí přejít dvě pole oddělená přímou čarou AEB. Předpokládá se, že polem přiléhajícím k C urazí v čase c vzdálenost a, zatímco polem přiléhajícím k F ve stejném čase c vzdálenost f. Ptáme se, kterým bodem E přímky AEB musí projít, aby na cestu z C do F vynaložil co možná nejméně času.



Obr. 43

Jestliže vezmeme $a.CE(u)::c.\frac{cu}{a}$ a $b.EF(z)::c.\frac{cz}{b}$; pak zřejmě $\frac{cu}{a}$ vyjadřuje čas, který cestovatel vynaloží na uražení úsečky CE; a stejně tak $\frac{cz}{b}$ čas vynaložený na cestu EF tak, že $\frac{cu}{a}+\frac{cz}{b}$ musí být *nejmenším*. Odtud plyne (§ 56), že když spustíme EG kolmou na čáru AB; pak sinus úhlu GEC se musí mít k sinu úhlu GEF jako a ku b.

Nuže jestliže nyní z hledaného bodu E coby středu opíšeme o poloměru EC kruh CGH a na úsečku AEB povedeme kolmice CA, HD, FB; a na CE a EF kolmice GL a GI; pak budeme mít

$$a.b::GL.GI\ .$$

Avšak $GL=AE$ a $GI=ED$; ježto pravoúhlé trojúhelníky GEL a ECA, GEI a EHD jsou, jak snadno dokážeme, navzájem shodné.[71] Označme tudíž neznámou AE jako x, nalezneme

$$ED=\frac{bx}{a}\ ;$$

a jestliže nyní označíme neznámé AB jako f; AC jako g; BF jako h; z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$EB(f-x).BF(h)::ED(\frac{bx}{a}).DH=\frac{bhx}{af-ax}\ .$$

Avšak na základě rovnosti přepon EH, EC pravoúhlých trojúhelníků EDH, EAC budeme mít

$$\overline{ED}^2+\overline{DH}^2=\overline{EA}^2+\overline{AC}^2\ ,$$

tj. vyjádřeno analyticky

$$\frac{bbxx}{aa}+\frac{bbbbxx}{aaff-2aafx+aaxx}=xx+gg\ .$$

Čili po usměrnění a uspořádání rovnice vychází[72]

$$\begin{array}{llllll} aax^4 & -2aafx^3 & +aaffxx & -2aafggx & +aaffgg & = 0. \\ -bb & +2bbf & +aagg & & & \\ & & -bbff & & & \\ & & -bbhh & & & \end{array}$$

Tuto rovnici je možno najít i nezávisle na Příkladu IX., a sice následujícím způsobem.

Označme, stejně jako minule, známé AB jako f; AC jako g; BF jako h; a neznámou AE jako x; utvoříme

$$a.CE\,(\sqrt{gg+xx})::c.\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} = \text{času},$$

který cestovatel vynaloží na uražení úsečky CE. A zrovna tak

$$b.EF\,(\sqrt{ff-2fx+xx+hh})::c.\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b} = \text{času},$$

který cestovatel vynaloží na projití přímky EF. Což činí

$$\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}+\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b} = \textit{nejmenšímu};$$

a tím pádem jeho diferenciál

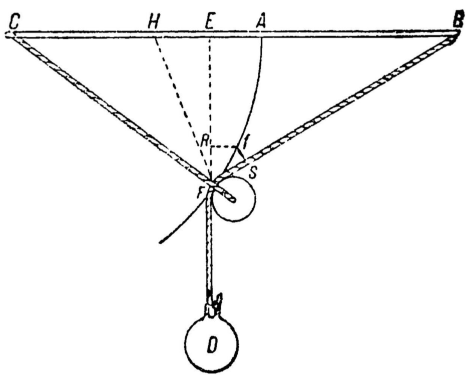
$$\frac{cx\,dx}{a\sqrt{gg+xx}}+\frac{cx\,dx-cf\,dx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}=0\,.$$

Odtud po vydělení $c\,dx$ a usměrnění zlomků[73] získáváme výše uvedenou rovnici, přičemž jeden z jejích kořenů dodá hledanou hodnotu AE.[74]

PŘÍKLAD XII.

60. BUDIŽ kladka F (Obr. 44) volně zavěšená na konci lana CF uvázaného v C; a budiž dále závaží D visící na laně DFB, které prochází přes kladku F a je přivázáno v B tak, že body C, B leží v jedné, horizontální linii. Předpokládá se, že kladka ani lana nic neváží: ptáme se v jaké poloze se závaží D nebo kladka F musí usadit.

Z principů mechaniky je jasné, že závaží D poklesne co možná nejníže pod horizontálu CB; a odtud plyne, že čára DFE k závaží musí být *největší*. Jestliže tedy označíme dané CF jako a; DFB jako b; CB jako C; a neznámou CE jako x; budeme mít



Obr. 44

$$EF=\sqrt{aa-xx}\,,\ \ FB=\sqrt{aa+cc-2cx}\ \text{ a }\ DFE=b-\sqrt{aa+cc-2cx}+\sqrt{aa-xx}\,,$$

které musí být *největší*. Jeho diferenciál je tím pádem

$$\frac{c\,dx}{\sqrt{aa+cc-2cx}}-\frac{x\,dx}{\sqrt{aa-xx}}=0\ ;$$

odtud dostaneme

$$2cx^3-2ccxx-aaxx+aacc=0\ ,$$

odkud po vydělení $x-c$ vychází

$$2cxx-aax-aac=0\ ,$$

kde jeden z kořenů dává hodnotu *AE* takovou, že kolmice *ED* prochází kladkou *F* a závažím *D* právě, když spočívají v klidu.

Tuto úlohu bychom mohli vyřešit i jiným způsobem, a sice následovně.

Jestliže *EF* označíme jako *y*; *BF* jako *z*; budeme mít $b-z+y$ = *největšímu*; a tedy $dy=dz$. Avšak je zřejmé, že kladka *F* opisuje okolo bodu *C* coby středu kruh *CFA*; a tím pádem když z bodu *f* vzatého nekonečně blízko *F* povedeme *fR* rovnoběžnou s *CB* a *fS* kolmou na *BF*; budeme mít

$$FR=dy \text{ a } FS=dz\ .$$

Budou se tedy rovnat navzájem; a tím pádem i malé pravoúhlé trojúhelníky *FRf*, *FSf*, které kromě toho mají společnou přeponu *Ff*, budou rovné a podobné; a odtud je zjevné, že úhel *RFf* je roven úhlu *SFf*, tj. bod *F* musí být na obvodu *FA* položen tak, že úhly, jež svírají úsečky *EF*, *FB* s tečnami v *F*, se budou navzájem rovnat; anebo (což je totéž), že úhly *BFC*, *DFC* si budou rovny.

Nuže pokud nyní povedeme *FH* tak, že úhel *FHC* bude roven úhlu *CFB* neboli *CFD*; pak trojúhelníky *CBF*, *CFH* budou podobné; a stejně tak i pravoúhlé trojúhelníky *ECF*, *EFH*; ježto úhel *CFE* je roven úhlu *FHE*, neboť oba jsou doplňky shodných úhlů *FHC*, *CFD* ke dvěma pravým. A tedy budeme mít

$$CH=\frac{aa}{c} \text{ a } HE\left(x-\frac{aa}{c}\right).EF(y)::EF(y).EC(x)\ .$$

Z povahy kruhu tedy

$$xx-\frac{aax}{c}=yy=aa-xx\ ,$$

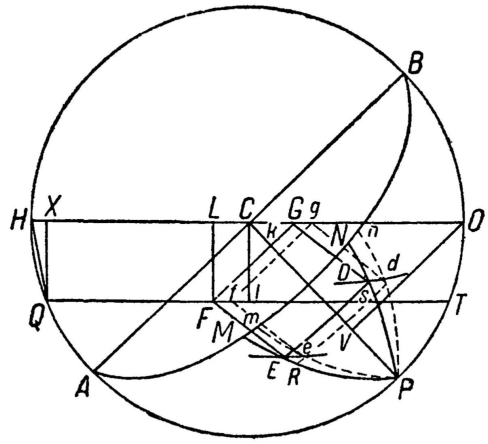
odkud získáme tu samou rovnici co výše.[75]

PŘÍKLAD XIII.

61. JE dána výška pólu; a je třeba najít den, kdy přichází nejkratší soumrak.

Nechť *C* (Obr. 45) je středem sféry; *APTOBHQ* poledníkem; *HDdO* obzorem; *QEeT* kruhem soumraku rovnoběžným s obzorem; *AMNB* rovníkem; *FEDG* úsekem od rovnoběžky k rovníku, který Slunce opíše ve dni s nejkratším soumrakem, uzavřeným mezi rovinami obzoru a soumrakového kruhu; *P* jižním pólem; *PEM*, *PDN* kvadranty deklinačních kruhů.

Oblouk poledníku *HQ* neboli *OT* ohraničený obzorem a soumrakovým kruhem a oblouk *OP* výšky pólu jsou dány; a tím pádem i jejich siny *CI* neboli *FL* neboli *QX* a *OV*. Hledáme sinus *CK* oblouku *EM* neboli *DN* sluneční deklinace, když Slunce opisuje rovnoběžku *ED*.



Obr. 45

Jestliže si od nějaké rovnoběžky k rovníku představíme nějaký další úsek *fedg* nekonečně blízký *FEDG* a dále kvadranty *Pem* a *Pdn*; pak je zřejmé, že čas, za který Slunce projde oblouk *ED*, musí být *nejkratší*; a že diferenciál oblouku *MN*, který je jeho mírou a který se stává *mn*, jakmile se *ED* stane *ed*, musí být nulový. Odtud plyne, že malé oblouky *Mm*, *Nn*, a tím pádem i malé oblouky *Re*, *Sd* si budou navzájem rovny. Jelikož však jsou oblouky *RE*, *SD* ohraničeny těmi samými rovnoběžkami *ED*, *ed*, rovnají se též; a úhly v *S* a v *R* jsou pravé. A tedy malé pravoúhelníky *ERe*, *DSd* (které kvůli nekonečné malosti jejich stran pokládáme za přímočaré) (§ 3) budou navzájem rovné a podobné; a tím pádem se budou navzájem rovnat i přepony *Ee*, *Dd*.

Nuže úsečky *DG*, *EF*, *dg*, *ef*, které představují průsečnice rovin *FEDG*, *fedg* rovnoběžných s rovníkem, budou spolu s obzorem a kruhem soumraku kolmé na průměry *HO*, *QT*, poněvadž roviny všech těchto kruhů jsou každá kolmé na rovinu poledníku; a malé úsečky *Gg*, *Ff* si budou navzájem rovny, neboť úsečky *FG*, *fg* jsou rovnoběžné. Tedy

$$\sqrt{\overline{Dd}^2-\overline{Gg}^2} \text{ neboli } DG-dg=\sqrt{\overline{Ee}^2-\overline{Ef}^2} \text{ neboli } fe-FE\,.$$

Avšak z toho, co jsme dokázali v § 50, je zřejmé, že když v půlkruhu povedeme dle libosti dvě nekonečně blízké ordináty; pak se jimi vymezený malý oblouk bude mít k jejich diferenciálu jako poloměr k abscise vycházející ze středu. Což zde dává (na základě kruhů *HDO*, *QET*) $CO.CG::Dd$ neboli $Ee.DG-dg$ neboli $fe-FE::IQ.IF::CO+IQ$ neboli $OX.CG+IF$ neboli GL. Avšak z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *CVO*, *CKG*, *FLG* vyplývá

$$CO.CG::OV.GH \text{ a } GK.GL::CK.FL \text{ neboli } QX\,.$$

Tudíž z povahy kruhu

$$OV.CK::OX.XQ::XQ.XH\,,$$

tj. jestliže *QX* vezmeme za poloměr, čili plný sinus v pravoúhlém trojúhelníku *QXH*; a jeho úhel *HQX* rovný 9 stupňům, neboť oblouk *HQ* pokládají astronomové rovný 18 stupňům; pak se plný sinus bude mít k tečně při 9 stupních ve stejném poměru, jako se má sinus výšky pólu k sinu jižní deklinace Slunce v čase nejkratšího soumraku. Odtud plyne, že když odebereme 0,8002875 od logaritmu sinu výšky pólu, pak zbytek bude logaritmem hledaného sinu. Což také bylo třeba nalézt.[76]

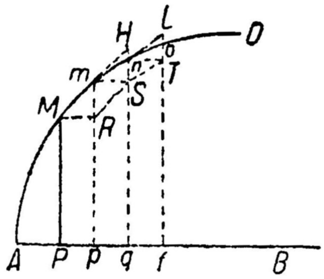
ODDÍL ČTVRTÝ.

Použití diferenciálního počtu k nalézání bodů přehybu a vratu.

PONĚVADŽ napříště budeme využívat druhé, třetí atd. diferenciály; než půjdeme dále, je nutno si o nich vytvořit určitou představu.

DEFINICE I.

Nekonečně malá část, o kterou spojitě roste nebo klesá diferenciál nějaké veličiny, nazveme *diferenciálem diferenciálu* této veličiny neboli jejím *druhým diferenciálem*. Takto pokud si představíme třetí ordinátu *nq* (Obr. 46) nekonečně blízkou druhé *mp*; a povedeme *mS* rovnoběžnou s *AB* a *mH* rovnoběžnou s *RS*; nazveme *Hn diferenciálem diferenciálu Rm* neboli *druhým diferenciálem PM*.



Obr. 46

A stejně tak jestliže si představíme čtvrtou ordinátu *of* nekonečně blízkou třetí *nq*; a povedeme *nT* rovnoběžnou s *AB* a *nL* rovnoběžnou s *ST*; pak diferenciál malých úseček *Hn*, *Lo* nazveme *diferenciálem druhého diferenciálu* neboli *třetím diferenciálem PM*. A tak dále.

UPOZORNĚNÍ.

Nadále budeme počtem d *u každého diferenciálu vyznačovat jeho řád či rod. Například druhý diferenciál neboli diferenciál druhého řádu vyznačíme* dd*; třetí diferenciál neboli diferenciál třetího řádu vyznačíme* ddd*; čtvrtý diferenciál neboli diferenciál čtvrtého řádu* dddd *a tak podobně. Takto* ddy *bude vyjadřovat* Hn; dddy *bude vyjadřovat* $\mathrm{Lo}-\mathrm{Hn}$ *, nebo* $\mathrm{Hn}-\mathrm{Lo}$ *atd.*[77]

Co se týče mocnin těchto diferenciálů, budou vyznačeny čísly postavenými shora za ně. Například čtverec dy *bude* dy^2, *krychle* dy^3*; čtverec* ddy *bude* ddy^2*, krychle* ddy^3*; čtverec* dddy *bude* dddy^2 *, krychle* dddy^3 *atd.*

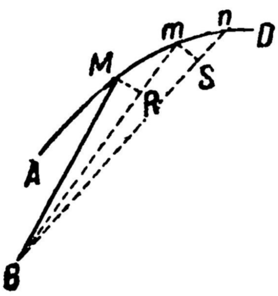
DŮSLEDEK I.

62. JESTLIŽE každou z abscis *AP*, *Ap*, *Af* označíme jako *x*; každou z ordinát *AM*, *Am*, *An*, *Ao* jako *y*; a každý z úseků křivky *AM*, *Am*, *An*, *Ao* jako *u*; pak zřejmě dx bude vyjadřovat diferenciál *Pp*, *pq*, *qf* abscis; dy diferenciál *Rm*, *Sn*, *To* ordinát; a du diferenciál *Mm*, *mn*, *no* úseků křivky *AMB*. Když však chceme vzít například druhý diferenciál *Hn* proměnné *PM*; je zapotřebí si na ose představit dvě malé části *Pp*, *pq* a na křivce další dvě *Mm*, *mn*, abychom dostali diferenciál *Rm*, *Sn*; a jestliže tudíž předpokládáme, že části *Pp* a *pq* jsou si navzájem rovny; zřejmě pak dx bude

vzhledem k dy a du konstantní, neboť *Pp* přecházející v *pq* zůstává neměnným; zatímco *Rm* přecházející v *Sn* a *Mn* přecházející v *mn* se proměňují. Mohli bychom předpokládat, že malé úseky křivky *Mm*, *mn* jsou si navzájem rovny, a pak du bude konstantní vzhledem k dx a dy ; a konečně kdybychom *Rm*, *Sn* předpokládali rovné navzájem; pak by dy bylo konstantní vzhledem k dx a du a jeho diferenciál $Hn(ddy)$ by se rovnal nule.

Stejně tak pro nalezení třetího diferenciálu *PM*, čili druhého diferenciálu *Hn*, je zapotřebí si na ose představit tři malé úseky *Pp*, *pq*, *qf*; na křivce další tři *Mm*, *mn*, *no*; a na ordinátách rovněž další tři *Rm*, *Sn*, *To*. Pak budeme mít konstantní dx , nebo du , nebo dy podle toho, jestli položíme jeden druhému rovny malé úseky *Pp*, *pq*, *gf*, nebo *Mm*, *mn*, *no*, anebo *Rm*, *Sn*, *To*. A zrovna tak je tomu i s diferenciálem čtvrtým, pátým atd.

Toto vše platí i pro křivky *AMD* (Obr. 47), jejichž ordináty *BM*, *Bm*, *Bn* vycházejí všechny z nějakého pevného bodu *B*; abychom totiž určili například druhý diferenciál *BM*; je třeba si představit další dvě ordináty *Bm*, *Bn* svírající nekonečně malé úhly *MBm* a *mBn*; a pokud nyní opíšeme malé oblouky *MR* a *mS*; pak diference malých úseček *Rm*, *Sn* bude druhým diferenciálem *BM*. Jako konstantní pak můžeme vzít malé oblouky *MR*, *mS*, anebo malé úseky křivky *Mm*, *mn*, anebo malé úsečky *Rm*, *Sn*. A tak zrovna je tomu i s diferenciálem čtvrtým, pátým atd. ordináty *BM*.



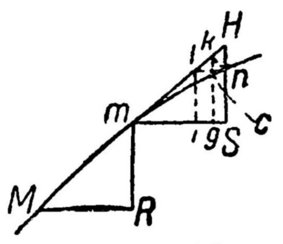
Obr. 47

POZNÁMKA.

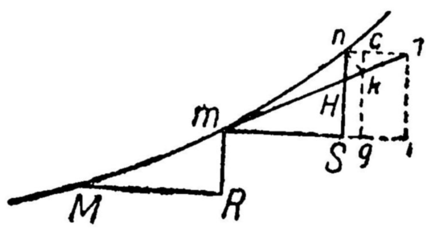
63. JE třeba pečlivě rozlišit

1°. Že máme různé řády nekonečně malých; například *Rm* (Obr. 46) je ve srovnání s *PM* nekonečně malé a ve srovnání s *Hn* nekonečně velké; stejně tak plocha *MPpm* je ve srovnání s plochou *APM* nekonečně malá a nekonečně velká ve srovnání s trojúhelníkem *MRm*.

2°. Že celkový diferenciál *Pf* je stále ve srovnání s *AP* nekonečně malý; neboť každá veličina, která vzniká součtem konečného množství takových veličin jako *Pp*, *pq*, *qf* nekonečně malých ve srovnání s nějakou jinou *AP*, stále zůstává nekonečně malou ve srovnání právě s touto veličinou; a aby se stala veličinou stejného řádu, počet jejích složek řádu nižšího by musel být nekonečný.



Obr. 48



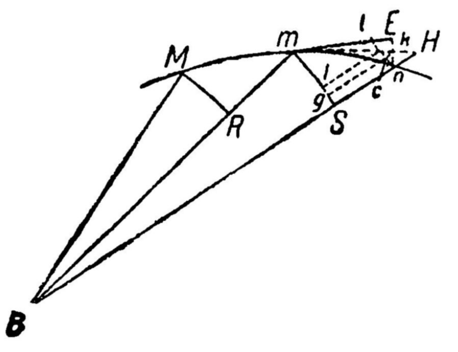
Obr. 49

DŮSLEDEK II.

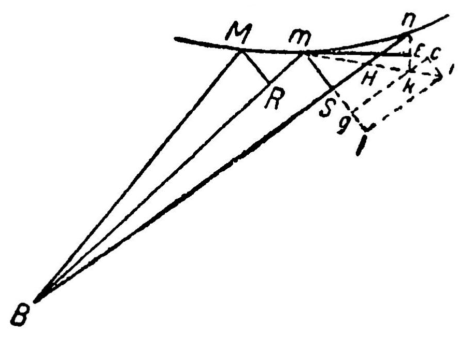
64. UVEDENÝM způsobem můžeme určit druhé diferenciály za všech možných předpokladů.

1°. U křivek, jejichž ordináty *mR*, *nS* jsou rovnoběžné (Obr. 48, 49), prodloužíme malou úsečku *Mm* do *H*, kde protíná ordinátu *Sn*; a když pak ze středu *m* o poloměru *mn* opíšeme oblouk *nk*; povedeme malé úsečky *nl* rovnoběžnou s *mS* a dále *li*, *kcg* rovnoběžné s *Sn*. Nuže pokud má dx být konstantní, tj. *MR* rovný *mS*; pak zřejmě trojúhelník *mSH* bude podobný a rovný trojúhelníku *MRm*; a zřejmě též *Hn* bude ddy , tj. diferenciál *Rm*, *Sn*; a $Hk = ddu$. Avšak za předpokladu, že du je konstantní, tj. $Mm = mn$ neboli *mk*; pak je zjevné, že trojúhelník *mgh* bude podobný a rovný trojúhelníku *MRm*, a tím pádem $Kc = ddy$ a *Sg* neboli $cn = ddx$. Jestliže konečně vezmeme jako konstantní dy , tj. $mR = nS$; pak odtud plyne, že trojúhelník *mil* bude rovný a podobný trojúhelníku *MRm* tak, že *iS* neboli $nl = ddx$ a $lk = ddu$.

2°. U křivek, jejichž ordináty *BM*, *Bm*, *Bn* vycházejí z jednoho a toho samého bodu *B* (Obr. 50, 51), opíšeme ze středu *B* oblouky *MR*, *mS*, jež budeme pokládat (§ 3) za malé úsečky kolmé na *Bm*, *Bn*. Nyní prodlužme *Mm* do *E*; a ze středu *m* o poloměru *mn* opíšeme malý oblouk *nkE*; utvoříme úhel $EmH = mBn$ a povedeme malé úsečky *nl* rovnoběžnou s *mS*; a *li*, *kcg* rovnoběžné s *Sn*. Z trojúhelníku *BSm* o pravém úhlu v *S* nuže vyplývá, že úhel $BmS + mBn$ neboli $+ EmH$ se rovná úhlu pravému; a tím pádem úhel *BmE* se rovná pravému $+ SmH$; a pravému úhlu se rovná též $MRm + RMm$, neboť se jedná o vnější úhel trojúhelníku *RMm*. A tak úhel $SmH = RMm$.



Obr. 50



Obr. 51

Odtud pak vyplývá, že

1° Jestliže konstantní má být dx , tj. malé oblouky *MR*, *mS* se budou rovnat; pak trojúhelník *SmH* bude podobný a rovný trojúhelníku *RMm*; a tedy $Hn = ddy$ a $Hk = ddu$.

2° Když jako konstantní vezmeme du ; pak trojúhelník *gmk* bude podobný a rovný trojúhelníku *RMm*; pročež *kc* bude vyjadřovat *ddy* a *Sg* neboli *cn* bude vyjadřovat ddx .

3° Konečně pokud bereme jako konstantní dy ; trojúhelníky *iml*, *RMm* navzájem budou rovné a podobné tak, že *iS* neboli $ln = ddx$ a $lk = ddu$.

TVRZENÍ I.

Zadání.

65. NAJÍT *diferenciál veličiny složené z nějakých libovolných diferenciálů.*

Vezměme dle libosti některý z diferenciálů za konstantní; a jelikož s ostatními diferenciály počítáme jako s proměnnými, budeme uplatňovat stejná pravidla, která jsme uvedli v prvním oddíle.

Diferenciál $\frac{y\,dy}{dx}$, pokud vezmeme dx jako konstantní, bude

$$\frac{dy^2+y\,ddy}{dx}\,;$$

a když vezeme jako konstantní dy,

$$\frac{dx\,dy^2-y\,dy\,ddx}{dx^2}\,.$$

Diferenciál $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, když vezmeme dx jako konstantní, bude

$$dz\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{z\,dy\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\,,$$

to celé děleno dx,

$$\frac{dz\,dx^2+dz\,dy^2+z\,dy\,ddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}\,;$$

a pokud se za konstantní bere dy, pak

$$dz\,dx\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{z\,dx^2\,ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}-z\,ddx\sqrt{dx^2+dy^2}\,,$$

to celé děleno dx^2,

$$\frac{dz\,dx^3+dz\,dx\,dy^2-z\,dy^2\,ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}\,.$$

Diferenciál $\frac{y\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, když vezmeme dx jako konstantní, činí

$$\overline{dy^2+y\,ddy}\sqrt{dx^2+dy^2}-\frac{y\,dy^2\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\,,$$

to celé děleno dx^3+dy^2,

$$\frac{dx^2\,dy^2+dy^4+y\,dx^2\,ddy}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}\,;$$

a pokud bereme jako konstantní dy, pak

$$\frac{dx^2\,dy^4-y\,dy\,dx\,ddx}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}\,.$$

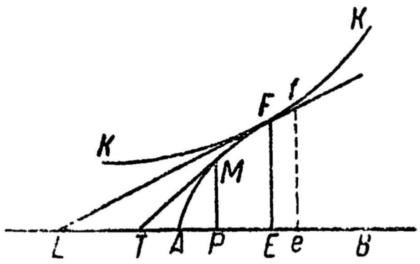
Diferenciál $\frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{\overline{dx^2+dy^2}}}{-dx\,ddy}$ neboli $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$, když vezmeme dx jako konstantní, bude

$$\frac{-3\,dx\,dy\,ddy^2\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dx\,dddy\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2\,ddy^2}.$$

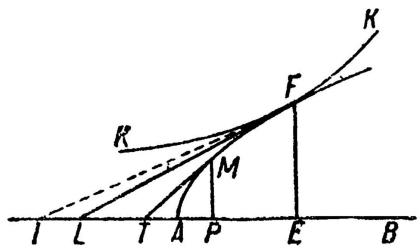
Zde je ovšem třeba poznamenat, že v tomto posledním případě nemáme svobodu si za konstantní zvolit dy; neboť za tohoto předpokladu by jeho diferenciál ddy byl nulový, a tudíž by se v zadané veličině nesměl vyskytovat.

DEFINICE II.

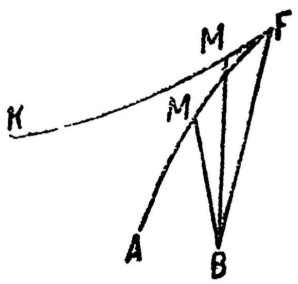
Jestliže nějaká křivá čára AFK (Obr. 52, 53, 54, 55) je vzhledem k nějaké přímé AB, anebo k nějakému pevnému bodu B, z části vydutá a z části vypouklá; pak bod F, který odděluje vydutou část od části vypouklé, a je tím pádem koncem jedné a počátkem druhé; nazveme bodem *přehybu* neboli *inflexním* bodem v případě, že křivka doputujíc do bodu F dále pokračuje ve stejném směru; a bodem *vratu*, když se v cestě vrací na stranu svého počátku.[78]



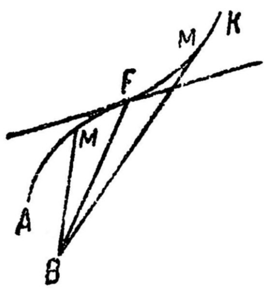
Obr. 52



Obr. 53



Obr. 54



Obr. 55

TVRZENÍ II.

Obecné zadání.

66. JE *dána povaha křivky* AFK*; a nyní je třeba určit bod přehybu nebo vratu* F.

Předpokládejme nejprve, že křivka *AFK* (Obr. 52, 53) má jakožto průměr přímou čáru *AB* a její ordináty *PM*, *EF* atd. jsou všechny navzájem rovnoběžné. Jestliže bodem *F* povedeme ordinátu *FE* a tečnu *FL*; a libovolným bodem *M* části *AF* ordinátu *MP* a tečnu *MT*; pak zřejmě:

1°. U křivek, které mají inflexní bod: když abscisa *AP* spojitě roste, pak také část *AT* průměru, vymezená jeho průnikem s tečnou a počátkem hodnot *x*, roste až do okamžiku, kdy bod *P* spadne v jedno s *E*, a pak následuje její pokles; odtud je zjevné, že *AT*, odpovídající ordinátě v *P*, se musí stát *největší*, tj. *AL*, právě když bod *P* připadne do hledaného bodu *E*.

2°. U křivek, které mají bod vratu: když spojitě roste část *AT*, pak roste též abscisa *AP*; a to až do okamžiku, kdy bod *T* spadne v jedno s bodem *L*, a pak následuje její pokles; odtud je zjevné, že *AP* odpovídající *AT* musí být *největší*, tj. *AE* právě, když bod *T* připadne do *L*.

Nuže pokud *AE* označíme jako *x*; *EF* jako *y*; budeme mít

$$AL = \frac{y\,dx}{dy} - x\ ,$$

čehož diferenciál (když dx předpokládáme jako konstantní) činí

$$\frac{dy^2\,dx - y\,dx\,ddy}{dy^2} - dx\ ,$$

který, vydělen *dx*, tj. diferenciálem *AE*, musí být (§ 47) nulový, nebo nekonečný. Což dává

$$-\frac{y\,ddy}{dy^2} = 0\ \text{, nebo nekonečnu;}$$

odkud po vynásobení dy^2 a vydělení $-y$ vychází

$$ddy = 0\ \text{, nebo nekonečnu.}$$ [79]

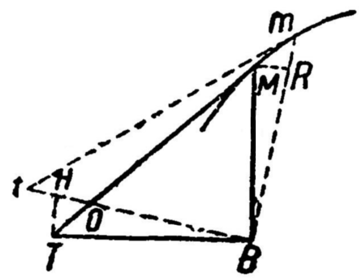
Což nadále bude platit za obecnou formuli pro nalézání bodů přehybu, nebo vratu *F*. Pokud je totiž dána povaha křivky *AFK*; pak hodnotu dy můžeme vyjádřit skrze dx ; a jejím diferencováním za předpokladu, že dx je konstantní, najdeme hodnotu ddy vyjádřenou prostřednictvím dx^2 . Když pak tuto hodnotu položíme rovnou nejprve nule a následně nekonečnu; na základě jednoho, nebo druhého předpokladu najdeme pro *AE* hodnotu takovou, že ordináta *EF* protne křivku *AFK* právě v bodu přehybu, nebo vratu *F*.

Počátek *A* hodnot *x* může být položen i tak, že místo $\frac{y\,dx}{dy} - x$ bude platit $AL = x - \frac{y\,dx}{dy}$; a tedy že *AL* či *AE* bude *nejmenším* a nikoli *největším*. Ježto však bez sebemenších obtíží dojdeme ke shodným závěrům, nebudu se u toho více zdržovat. Je však třeba podotknout, že *AL* se nikdy nemůže rovnat $x+\frac{y\,dx}{dy}$; neboť když bod T připadne vzhledem k počátku A hodnot x na opačnou stranu od bodu P, bude podle § 10 hodnota $\frac{y\,dx}{dy}$ záporná; a tím pádem bude hodnota $\frac{y\,dx}{dy}$ kladná tak, že v tomto případě budeme mít

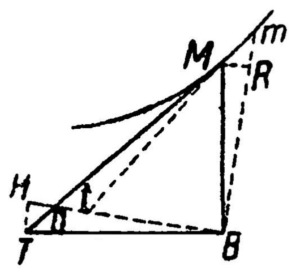
$$AE+EL\text{, čili } AL=x-\frac{y\,dx}{dy}\,.$$

To samé je možno nalézt i jiným způsobem. A sice je jasné, že pokud bereme dx za konstantní a předpokládáme, že ordináta y roste; pak Sn (Obr. 48, 49) bude ve vyduté části menší než SH či Rm a ve vypouklé pak větší. Odtud je zjevné, že v bodě přehybu nebo vratu se hodnota $Hn(ddy)$ musí z kladné převrátit v zápornou; a tím pádem (§ 47) zde musí být nulová, nebo nekonečná.

Předpokládejme za druhé, že křivka AFK (Obr. 54, 55) má coby ordináty úsečky BM, BF, BM vycházející všechny z jednoho a toho samého bodu B. Jestliže nyní povedeme dle libosti ordinátu BM (Obr. 56, 57) a tečnu MT, jež protíná BT kolmou na BM v bodě T; vezmeme bod m nekonečně blízko M; a povedeme ordinátu Bm, tečnu mt a kolmici Bt na Bm protínající MT v O; pak je zřejmé (za předpokladu, že ordináta BM přecházející v Bm roste), že ve vyduté části Bt přesahuje BO; a naopak že je menší v části vypouklé. Čili, že v bodě přehybu nebo vratu F se hodnota Ot převrací z kladné na zápornou.



Obr. 56



Obr. 57

Nuže pokud ze středu B (Obr. 56) opíšeme malé kruhové oblouky MR, TH; utvoří se podobné trojúhelníky mRM, MBT, THO a malé podobné výseče BMR, BTH. A jestliže tedy označíme BM jako y; MR jako dx; budeme mít

$$mR(dy).\,RM(dx)::BM(y).\,BT=\frac{y\,dx}{dy}::MR(dx).\,TH=\frac{dx^2}{dy}::TH\,(\frac{dx^2}{dy}).\,HO=\frac{dx^2}{dy^2}\,.$$ [80]

Avšak diferencováním $BT\,(\frac{y\,dx}{dy})$ za předpokladu, že dx je konstantní, vychází

$$Bt-BT\text{, čili } Ht=\frac{dx\,dy^2-y\,dx\,ddy}{dy^2}\,;$$

a tím pádem

$$OH+Ht \text{ neboli } Ot=\frac{dx^3+dx\,dy^2-y\,dx\,ddy}{dy^2}.$$

Odtud pak po vynásobení dy^2 a vydělení dx plyne, že hodnota $dx^2+dy^2-y\,ddy$ bude v bodě přehybu, nebo vratu nulová, nebo nekonečná. Ježto však je povaha křivky *AFK* (Obr. 54, 55) dána, můžeme vyjádřit hodnotu dy skrze dx; a hodnotu ddy skrze dx^2. A když tyto hodnoty dosadíme do $dx^2+dy^2-y\,ddy$ a výslednou veličinu položíme nejprve rovnou nule a pak nekonečnu; najdeme pro *BF* hodnotu takovou, že když ze středu *B* o tomto poloměru opíšeme kruh; pak tento protne křivku *AFK* v bodě přehybu nebo vratu *F*. Což také bylo zadáno.

Pokud chceme stejný výsledek najít ještě jiným způsobem, pak je třeba uvážit, že ve vyduté části je úhel *BmE* (Obr. 50, 51) větší než úhel *Bmn*; a naopak že v části vypouklé je menší; a tím pádem úhel $MmE-Mmn$ neboli *Emn* (Obr. 50), tj. oblouk *En*, který je jeho mírou, se v hledaném bodě *F* změní z kladného v záporný. Avšak jestliže vezmeme *dx* jako konstantní; z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *HmS*, *Hnk* dostáváme

$$Hm(du).\,mS(dx)::Hn(-ddy).\,nk=-\frac{dx\,ddy}{du},$$

přičemž je třeba si povšimnout, že hodnota *Hn* je záporná, neboť když $Bm(y)$ roste, $Rm(dy)$ klesá. Avšak z podobnosti výsečí *BmS*, *mEk* vyplývá, že

$$Bm(y).\,mS(dx)::mE(du).\,Ek=\frac{dx\,du}{y},$$

a tudíž

$$Ek+kn \text{ neboli } En=\frac{dx\,dx^2-y\,dx\,ddy}{y\,du}.$$

Odtud po vynásobení $y\,du$ a vydělení dx vychází, že $du^2-y\,ddy$ neboli $dx^2+dy^2-y\,ddy$ se pod hledaným bodem *F* musí z kladného převrátit v záporné (Obr. 54, 55).

Jestliže předpokládáme, že *y* se stane nekonečným; členy dx^2 a dy^2 budou ve srovnání se členem $y\,ddy$ nulové; a tím pádem formule

$$dx^2+dy^2-y\,ddy=0 \text{, nebo nekonečnu}$$

se změní v následující

$$-y\,ddy=0 \text{, nebo nekonečnu,}$$

a po vydělení $-y$

$$ddy=0 \text{, nebo nekonečnu,}$$

tedy v tu samou formuli jako v případě prvém. Což ostatně také musí nastat, neboť ordináty *BM*, *BF*, *BM* se stanou rovnoběžnými.

DŮSLEDEK.

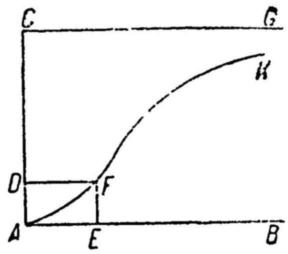
67. KDYŽ $ddy = 0$; zřejmě diferenciál *AL* (Obr. 52) musí být ve srovnání s diferenciálem *AE* nulový; a tudíž dvě nekonečně blízké tečny *FL*, *fL* musí splynout v jedinou úsečku *fFL*. Jestliže však je *ddy* rovno nekonečnu, diferenciál *AL* (Obr. 53) musí být ve srovnání s diferenciálem *AE* nekonečný anebo (což je totéž) diferenciál *AE* je ve srovnání s diferenciálem *AL* nekonečně malý; a tedy je možno jedním a tím samým bodem *F* vést dvě tečny *FL* a *Fl*, které mezi sebou svírají nekonečně malý úhel *LFl*.

Stejně tak jestliže $dx^3 + dy^2 - y\,ddy = 0$; pak zřejmě *Ot* (Obr. 56, 57) se musí stát nulovým ve srovnání s *MR*; a tedy když se bod *M* stane bodem přehybu nebo vratu, dvě nekonečně blízké tečny *MT*, *mt* musí splynout v jednu. Jestliže však je $dx^2 + dy^2 - y\,ddy$ naopak rovno nekonečnu; *Ot* musí být ve srovnání s *MR* nekonečným, anebo (což je totéž) *MR* nekonečně malým ve srovnání s *Ot*; a tudíž bod *m* musí připadnout do bodu *M*, tj. když se tento bod stane bodem přehybu nebo vratu, je možno jím vést dvě tečny svírající mezi sebou nekonečně malý úhel.

Je zjevné, že pokud tečnu v bodě přehybu či vratu *F* prodloužíme, bude v tomto bodě tečnou ke křivce *AFK* a v tomto stejném bodě ji bude též protínat.[81]

PŘÍKLAD I.

68. BUDIŽ nějaká křivá čára *AFK* (Obr. 58), jejímž průměrem je přímá čára *AB*, taková, že poměr abscisy $AE(x)$ k ordinátě $EF(y)$ je vyjádřen rovnicí $axx = xxy + aay$. Jde o to, najít pro *AE* hodnotu takovou, aby ordináta *EF* protínala křivku *AFK* právě v inflexním bodě *F*.



Obr. 58

Rovnice křivky je $y = \frac{axx}{xx + aa}$; a tím pádem

$$dy = \frac{2a^3 x\,dx}{\overline{xx + aa}^2};$$

jestliže za předpokladu, že *dx* je konstantní, vezmeme diferenciál této veličiny a položíme jej rovný nule, nacházíme

$$\frac{2a^3 dx^2 \times \overline{xx + aa}^2 - 8a^3 xx\,dx^2 \times \overline{xx + aa}}{\overline{xx + aa}^4} = 0;$$

což vynásobeno $\overline{xx + aa}^4$ a vyděleno $2a^3 dx^2 \times \overline{xx + aa}$ dává

$$xx + aa - 4xx = 0,$$

odkud

$$AE(x) = a\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Když do rovnice křivky $y=\frac{axx}{xx+aa}$ dosadíme na místo xx jeho hodnotu $\frac{1}{3}aa$, dostáváme

$$EF(y)=\frac{1}{4}a\ ;$$

takže můžeme určit inflexní bod *F*, aniž by bylo nutné předpokládat, že křivka *AFK* vůbec byla opsána.

Jestliže nyní povedeme *AC* rovnoběžnou s ordinátami *EF* a rovnou dané úsečce *a*; a vyneseme *CG* rovnoběžnou s *AB*; pak *CG* bude asymptotou křivky *AFK*. Když totiž *x* položíme za nekonečné, můžeme místo $xx+aa$ klást xx; a tím pádem se rovnice křivky $y=\frac{axx}{xx+aa}$ změní v $y=a$.[82]

PŘÍKLAD II.

69. NECHŤ $y-a=\overline{x-a}^{\frac{3}{5}}$. Tedy

$$dy=\frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{3}{5}}dx \text{ a } ddy=-\frac{6}{25}\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}dx^2=\frac{-6dx^2}{25\sqrt[5]{x-a}^7}\ ,$$

pokud *dx* bereme jako konstantní. Jestliže však tento zlomek položíme rovný nule, najdeme

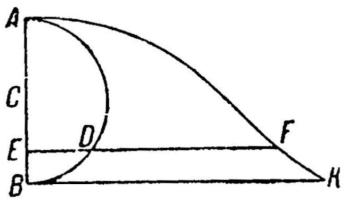
$$-6\,dx^2=0\ ,$$

což o ničem nevypovídá; takže je třeba předpokládat, že je nekonečně velký. Jeho jmenovatel $25\sqrt[5]{x-a}^7$ tím pádem musí být nekonečně malý, čili rovný nule. Odtud pak neznámá

$$AE(x)=a\ .$$

PŘÍKLAD III.

70. BUDIŽ *AFK* (Obr. 59) prodloužená polocykloida, jejíž osa *BK* je větší nežli poloviční obvod tvořícího kruhu se středem v bodě *C*; nyní je třeba určit na průměru *AB* bod *E* tak, aby se ordináta *EF* setkala s cykloidou v inflexním bodě *F*.



Obr. 59

Označme známé *ADB* jako *a*; *BK* jako *b*; *AB* jako 2*c*; a neznámé *AE* jako *x*; *ED* jako *z*; oblouk *AD* jako *u*; *EF* jako *y*; z povahy cykloidy budeme mít

$$y=z+\frac{bu}{a}\ ;$$

a tím pádem

$$dy=dz+\frac{b\,du}{a}\ .$$

Avšak z povahy kruhu plyne

$$z=\sqrt{2cx-xx}\,,\; dz=\frac{c\,dx-x\,dx}{\sqrt{2cx-xx}} \text{ a } du\left(\sqrt{dx^2+dz^2}\right)=\frac{c\,dx}{\sqrt{2\mathrm{cx}-xx}}\,;$$

když pak dosadíme za dz a du jejich hodnoty, nacházíme

$$dy=\frac{ac\,dx-ax\,dx+bc\,dx}{a\sqrt{2cx-xx}}\,,$$

čehož diferenciál (za předpokladu, že dx je konstantní) bude

$$\frac{\overline{bcx-acc-bcc}\times dx^2}{\overline{2\mathrm{cx}-xx}\times\sqrt{2cx-xx}}=0\,;$$

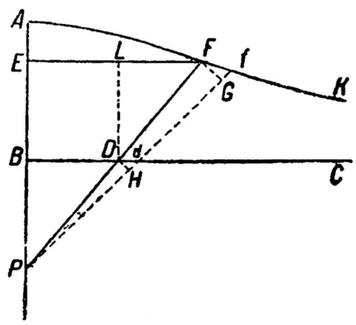
odkud

$$AE(x)=c+\frac{ac}{b} \text{ a } CE=\frac{ac}{b}$$

Je zřejmé, že o inflexním bodu zde může být řeč jedině tehdy, když b je větší než a; pokud by totiž bylo menší, CE by přesahovalo CB.[83]

PŘÍKLAD IV.

71. POŽADUJEME nalézt inflexní bod F Nikomédovy konchoidy (Obr. 60), která má pól v bodě P a přímku BC coby asymptotu. Je vlastností Nikomédovy konchoidy, že když z pólu P do libovolného jejího bodu F povedeme úsečku PF protínající asymptotu BC v D; část DF je vždy rovna jedné a té samé dané úsečce a.



Obr. 60

Veďme PA kolmou na BC a FC rovnoběžnou s BC; označíme známé veličiny AB, čili FD jako a; BP jako b; a neznámé BE jako x; EF jako y; pokud nyní vyneseme DL rovnoběžnou s BA, z podobnosti trojúhelníků DLF, PEF dostáváme

$$DL(x).\,LF\left(\sqrt{aa-xx}\right)::PE(b+x).\,EF(y)=\frac{\overline{b+x}\sqrt{aa-xx}}{x}\,,$$

odkud diferenciál bude

$$dy=\frac{x^3\,dx+aab\,dx}{xx\sqrt{aa-xx}}\,.$$

Jestliže tedy vezmeme diferenciál této veličiny a položíme jej rovný nule; vzniká odtud rovnice

$$\frac{\overline{2a^4b-aax^3-3aabxx}\times dx^2}{\overline{aax^3-x^5}\times\sqrt{aa-xx}}=0\,,$$

kterou převedeme na

$$x^3+3bxx-2aab=0$$

a kde jeden z jejích kořenů představuje hledanou hodnotu *BE*.

Jestliže $a=b$, předchozí rovnice se změní na

$$x^3+3xx-2a^3=0\ ,$$

jež po vydělení $x+a$ dává

$$xx+2ax-2\mathrm{aa}=0\ ;$$

a tudíž

$$BE(x)=-a+\sqrt{3aa}\ .$$

Jinak.

Za ordináty vezmeme čáry *PF* vycházející z pólu *P* a využijeme formule $y\,ddy=dx^2+dy^2$ (§ 66), přičemž *dx* předpokládáme jako konstantní.

Jestliže si představíme druhou ordinátu *Pf* svírající s *PF* nekonečně malý úhel *FPf*; a ze středu *P* opíšeme malé oblouky *FG* a *DH*; pak známé označíme *AB* jako *a*; *BP* jako *b*; a neznámé *PF* jako *x*; *PD* jako *z*; a z povahy dané konchoidy budeme mít

$$y=z+a\ ;$$

odkud

$$dy=dz\ .$$

Avšak z pravoúhlého trojúhelníku *DBP* vyplývá

$$DB=\sqrt{zz-bb}\ ;$$

z podobnosti trojúhelníků *DBP* a *dHD*, *PDH* a *PFG* budeme mít

$$DB(\sqrt{zz-bb}).\,BP(b)::dH(dz).\,HD=\frac{b\,dz}{\sqrt{zz-bb}}\ .$$

$$\text{A}\ \ PD(z).\,PF(z+a)::HD\left(\frac{b\,dz}{\sqrt{zz-bb}}\right).\,FG(dx)=\frac{bz\,dz+ab\,dz}{z\sqrt{zz-bb}}\ .$$

Odtud pak získáme

$$dz\ \text{ neboli }\ dy=\frac{z\,dx\sqrt{zz-bb}}{bz+ab}$$

a jeho diferenciál (předpokládáme, že dx je konstantní)

$$ddy=\frac{\overline{bz^3+2abzz-ab^3}\times dz\,dx}{\overline{bz+ab}^2\sqrt{zz-bb}}=\frac{\overline{bz^4+2abz^3-ab^3z}\times dx^2}{\overline{bz+ab}^3}\ ,$$

jakmile za dz dosadíme jeho hodnotu. A tedy jestliže do obecné formule (§ 66) $y\,ddy=dx^2+dy^2$ dosadíme na místo *y* jeho hodnotu $z+a$ a na místa dy a ddy jejich právě nalezené hodnoty vyjádřené skrze dx a dx^2; vznikne odtud následující rovnice

$$\frac{\overline{z^4+2az^3-abbz}\times dx^2}{\overline{bz+ab}^2}=\frac{\overline{z^4+2abbz+aabb}\times dx^2}{\overline{bz+ab}^2},$$

kterou převedeme na

$$2z^3-3bbz-abb=0\ ,$$

a kde jeden z jejích kořenů zvětšený o a dává hodnotu neznámé PF.

Při $a=b$ pak budeme mít

$$2z^3-3aaz-a^3=0\ ,$$

která po vydělení $z+a$ dává

$$zz-az-\frac{aa}{2}=0$$

a řešení

$$PF(z+a)=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{3}=\frac{3a+a\sqrt{3}}{2}.$$ [84]

PŘÍKLAD V.

72. NECHŤ AFK (Obr. 60) je konchoidou nějakého jiného druhu takovou, že když z libovolného jejího bodu F povedeme do pólu P úsečku PF protínající asymptotu BC v D; pak pravoúhelník $PD\times DF$ bude vždy roven jednomu a tomu samému pravoúhelníku $PB\times BA$. Požadujeme najít inflexní bod F.

Jestliže označíme neznámé BE jako x; EF jako y; a známé AB jako a; BP jako b; budeme mít

$$PD\times DF=ab\ ;$$

a rovnoběžky BD, DF dají

$$PD\times DF(ab).PB\times BE(bx)::\overline{PF}^2(bb+2bx+xx+yy).\overline{PE}^2(bb+2bx+xx)\ .$$

Tedy

$$bbx+2bxx+x^3+yyx=abb+2abx+axx\ \text{ neboli }\ yy=\frac{abb+2abx+axx-bbx-2bxx-x^3}{x}$$

$$\text{a }\ y=\overline{b+x}\sqrt{\frac{a-x}{x}}=\sqrt{ax-xx}+b\sqrt{\frac{a-x}{x}}\ ,$$

čehož diferenciál dává

$$dy=\frac{-ad\,dx+2\,xx\,dx+ab\,dx}{2x\sqrt{ax-xx}}\ ;$$

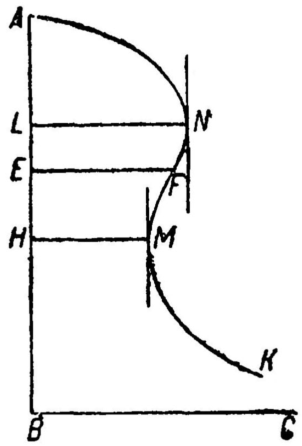
a když pak budeme tuto rovnici opět diferencovat, povstane nová rovnice

$$\frac{\overline{3aab-aax-4abx}\times dx^2}{4\,\overline{ax-xx}\times\sqrt{ax-xx}}=0\ ,$$

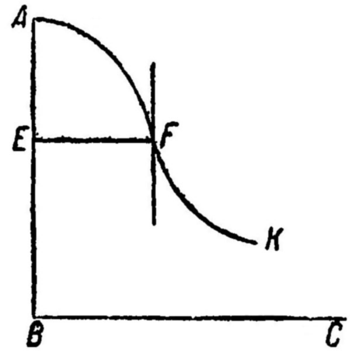
jež se převede na

$$x = \frac{3ab}{a+4b},$$

čímž dostáváme hodnotu neznámé *BE*.



Obr. 61



Obr. 62

Jestliže hodnotu *dy* neboli $\frac{-ad\,dx + 2xx\,dx + ab\,dx}{2x\sqrt{ax-xx}}$ položíme rovnou nule; dostáváme rovnici

$$xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = 0,$$

jejíž kořeny

$$\frac{a+\sqrt{aa+8ab}}{4} \text{ a } \frac{a-\sqrt{aa-8ab}}{4}$$

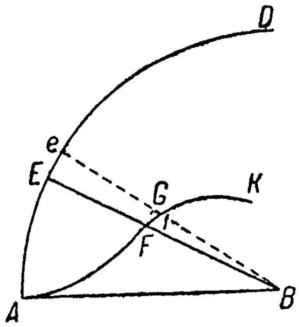
dávají při *a* větším než 8*b* dvě hodnoty *BH* a *BL* (Obr. 61) takové, že ordináta *HM* bude nejmenší mezi všemi sousedními ordinátami a *LN* naopak největší, tj. tečny v *M* a *N* budou rovnoběžné s osou *AB*; a tehdy bod *E* připadne mezi body *H* a *L*.

Když však $a = 8b$; čáry *BH*, *BE*, *BL* (Obr. 62) se každá budou rovnat $\frac{1}{4}a$; a tečna v inflexním bodě *F* pak bude rovnoběžná s osou *AB*. A konečně pokud je *a* menší než $8b$; pak oba kořeny budou imaginární; a tím pádem žádná tečna rovnoběžná s osou nebude.

Úlohu by dále šlo řešit tak, že bychom za ordináty vzali čáry *PF*, *Pf* (Obr. 60) vycházející z pólu *P* a využili formule $y\,ddy = dx^2 + dy^2$ tak, jako příkladě předešlém.[85]

PŘÍKLAD VI.

73. BUDIŽ kruh *AED* (Obr. 63) se středem v bodě *B* a nějaká křivá čára *AFK* taková, že když povedeme libovolný poloměr *BFE*; čtverec *FE* bude roven pravoúhelníku tvořenému délkou oblouku *AE* a nějakou danou úsečkou *b*. Na této křivce je třeba určit inflexní bod *F*.



Obr. 63

Označme oblouk *AE* jako *z*; poloměr *BA* neboli *BE* jako *a*; ordinátu *BF* jako *y*; budeme mít

$$bz = aa - 2\,ay + yy\ ,$$

odkud diferenciál bude

$$\frac{2\,y\,dy - 2\,a\,dy}{b} = dy = Ee\ .$$

Avšak z podobných výsečí *BEe*, *BFG* utvoříme

$$BE(a)\,.\,BF(y)::Ee\left(\frac{2\,y\,dy - 2\,a\,dy}{b}\right).\,FG(dx) = \frac{2\,yy\,dy - 2\,ay\,dy}{ab}\ ,$$

odkud za předpokladu, že *dx* je konstantní, vychází diferenciál

$$4\,y\,dy^2 - 2\,a\,dy^2 + 2\,yy\,ddy - 2\text{ay}\,ddy = 0\ ;$$

a tudíž

$$y\,ddy = \frac{a\,dy^2 - 2\,y\,dy^2}{y - a}\ .$$

Jestliže nyní do obecné formule (§ 66) $y\,ddy = dx^2 + dy^2$ dosadíme hodnoty dx^2 a $y\,ddy$ vyjádřené skrze dy^2, utvoříme rovnici

$$\frac{a\,dy^2 - 2\,y\,dy^2}{y - a} = \frac{4\,y^4\,dy^2 - 8\,ay^3\,dy^2 + 4\,aayy\,dy^2 + aabb\,dy^2}{aabb}\ ,$$

která se převede na

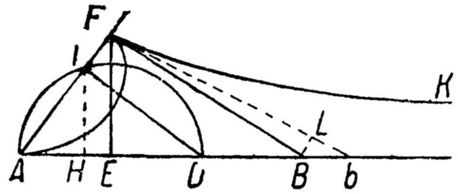
$$4\,y^5 - 12\,ay^4 + 12\,aay^3 - 4\,a^3\,yy + 3\,aabby - 2\,a^3\,bb = 0$$

a jejíž řešení dává hledanou hodnotu *BF*.

Je zjevné, že křivka *AFK*, kterou můžeme nazvat *parabolickou spirálou*, musí mít inflexní bod *F*. Jestliže se totiž na počátku kružnice *AED* znatelně neliší od tečny *A*; pak křivka *AFK* z povahy paraboly musí být vůči této tečně nejprve konkávní. Když se pak zakřivení kružnice kolem svého středu citelně projeví, křivka se musí stát vůči tomuto středu konkávní.[86]

PŘÍKLAD VI.

74. BUDIŽ nějaká křivá čára *AFK* (Obr. 64), jejíž osou je přímá čára *AB*, a budiž její povaha taková, že když povedeme libovolnou tečnu *FB*, která se s *AB* setkává v *B*; pak vymezený úsek *AB* se k tečně *BF* bude mít vždy v daném poměru *m* ku *n*. Ptáme se, jak určit bod vratu *F*.



Obr. 64

Označme neznámé a proměnné AE jako x; EF jako y; budeme mít

$$EB = -\frac{y\,dx}{dy} \text{ (neboť když } x \text{ je roustoucí, } y \text{ klesá)}, \quad FB = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy} .$$

Avšak z povahy dané křivky

$$AE + EB \text{ neboli } AB\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dy}\right).\,BF\left(y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right)::m.n .$$

Tedy

$$m\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{nx\,dx}{y} - n\,dx ,$$

čehož diferenciál za předpokladu, že dx je konstantní a záporné, dává

$$\frac{m\,dy\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{-ny\,dx\,dy + nxy\,ddy - nx\,dy^2}{yy} ,$$

A odtud dostáváme

$$ddy = \frac{\overline{-ny\,dx\,dy - nx\,dy^2}\sqrt{dx+dy^2}}{myy\,dy - nxy\sqrt{dx^2+dy^2}} .$$

Nyní jestliže tento zlomek položíme rovný nule, nacházíme

$$-y\,dx - x\,dy = 0 ;$$

odkud se nedá zjistit nic. A proto je třeba tento zlomek položit rovný nekonečnu, tj. jeho jmenovatel se bude rovnat nule; což na základě rovnice křivky dává

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{my\,dy}{nx} = \frac{nx\,dy - ny\,dx}{my} ,$$

odtud pak

$$dx = \frac{nnxx\,dy - mmyy\,dy}{nnxy} .$$

Jestliže nyní umocníme na druhou obě strany rovnice $my\,dy = nx\sqrt{dx^2+dy^2}$, opět nacházíme

$$dx = \frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxx\,dx - mmyy\,dy}{nnxy} ,$$

odkud konečně dostaneme

$$y\sqrt{mm - nn} = nx .$$

Což dává následující konstrukci.

Opišme o průměru $AD = m$ půlkruh *AID*; vezměme tětivu $DI = n$ a veďme nyní neomezenou přímku *AI*. Tvrdím, že s křivkou *AFK* se setká v bodě vratu *F*.

Neboť jestliže vztyčíme *IH* kolmou na *AB*, podobné pravoúhlé trojúhelníky *DIA*, *IHA*, *FEA* dají

$$DI(n).\,IA(\sqrt{mm-nn})::IH.HA::FE(y).\,EA(x) ,$$

a tudíž

$$y\sqrt{mm-nn}=nx\ ;$$

což je geometrické místo, jež bylo třeba sestrojit.

Je zřejmé, že *BF* je rovnoběžná s *DI*, neboť $AB.BF::AD(m).DI(n)$; odtud plyne, že úhel *AFB* je pravý; a tudíž že čáry *AB*, *BF*, *BE* jsou ve spojitém poměru.

Tuto vlastnost lze objevit též bez pomoci výpočtů; a sice když si v samotném bodu vratu představíme (§ 67) dvě tečny *FB*, *Fb* svírající mezi sebou nekonečně malý úhel. Pokud totiž ze středu *F* opíšeme malý oblouk *BL*; z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *BbL*, *FBE* dostaneme

$$m.n::Ab.bF::AB.BF::Ab-AB \text{ neboli } Bb.bF-BF \text{ neboli } bL::BF.BE\ .$$

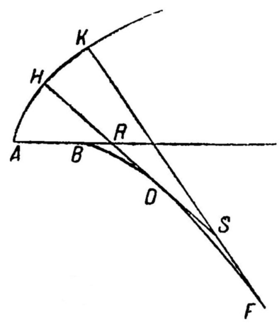
Tudíž atd.

Při $m=n$ je zřejmé, že úsečka *AF* se stane kolmicí na osu *AB*; a tečna *FB* tak bude s touto osou rovnoběžná; což, jak ostatně víme, nastat musí, neboť v tomto případě křivka *AB* musí být půlkruhem o průměru kolmém na osu *AB*. Pokud však je *m* menší *n*; zjevně zde žádný bod vratu nebude, neboť tehdy by rovnice $y\sqrt{mm-nn}=nx$ zahrnovala spor.

ODDÍL PÁTÝ.
Použití diferenciálního počtu k nacházení evolut.

DEFINICE.

Předpokládejme, že nějaká křivá čára *BDF* (Obr. 65) konkávní vždy k jedné a té samé straně je ovinuta či obalena vláknem *ABDF*; kde jeden z jeho konců je upevněn v *F* a druhý natažen podél tečny *BA*. Nyní potahujme koncem *A* tak, aby vlákno zůstávalo stále natažené, a soustavně odvíjejme křivku *BDF*; a je zřejmé, že konec *A* daného vlákna tímto pohybem opíše jistou křivou čáru *AHK*.



Obr. 65

Nuže křivku *BDF* nazveme *evolutou* křivky *AHK*.

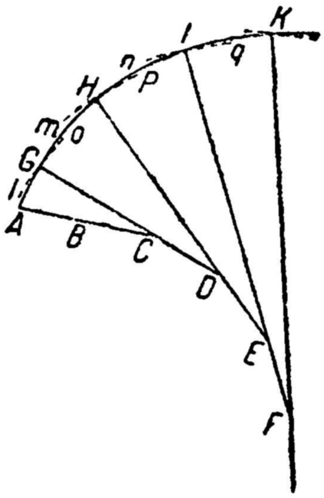
Přímé úseky *AB*, *HD*, *KF* vlákna *ABDF* pak nazveme *poloměry evoluty*.[87]

DŮSLEDEK I.

75. Z toho, že délka vlákna *ABDF* je neměnná, vyplývá, že část křivky *BD* je rovna rozdílu poloměrů *DH*, *BA* vycházejících z jejích konců; a právě tak i část *DF* bude rovna rozdílu poloměrů *FK*, *DH*; a že křivka *BDF* celá bude rovna rozdílu poloměrů *FK*, *BA*. Odtud je zjevné, že kdyby poloměr *BA* křivky byl nulový, tj. kdyby konec vlákna *A* splýval s počátkem *B* křivky *BDF*, pak by poloměry evoluty *DH*, *FK* byly rovny částem *BD*, *BDF* křivky *BDF*.

DŮSLEDEK II.

76. JESTLIŽE se křivka *BDF* (Obr. 76) pokládá za mnohoúhelník *BCDEF* o nekonečnu stran; pak zřejmě konec *A* vlákna *ABCDEF* opíše malý oblouk *AG* se středem v bodě *C*, dokud se poloměr *CG* nespojí v jedinou přímou čáru s malou stranou *CD* sousedící s *CB*; a stejně tak bude *A* opisovat malý oblouk *GH* se středem v bodě *D*, dokud se poloměr *DH* nespojí v jedinou úsečku s malou stranou *DE*; a tak dále, dokud se křivka *BCDF* zcela neodvine. Křivku *AHK* tak můžeme pokládat za seskupení nekonečna malých kruhových oblouků *AG*, *GH*, *HI*, *IK* atd. se středem v bodech *C*, *D*, *E*, *F* atd. Odtud plyne následující.



Obr. 66

1°. Poloměry evoluty se jí spojitě dotýkají jako *DH* v *D*, *KF* v *F* atd. a všechny jsou kolmé na křivku *AHK*, kterou opisují. Neboť například *DH* je kolmá na malý oblouk *GH* i na malý oblouk *HI*, ježto prochází jejich středy *D*, *E*. Odtud je zjevné, že 1°. evoluta *BDF* (Obr. 65) ohraničuje plochu, kam spadají všechny kolmice na křivku *AHK*. 2°. Jestliže prodloužíme libovolný poloměr *HD*, protínající poloměr *AB* v *R*, až k průniku *S* s libovolným dalším poloměrem *KF*; pak vždy bude možno na křivku *AHK* vést dvě kolmice ze všech bodů části *RS* až na tečný bod *D*, odkud lze vést pouze jednu jedinou, a sice *DH*. Zřejmě totiž průnik *R* poloměrů *AB*, *DH* projde všemi body části *RS*, dokud poloměr *AB* svou krajností *A* neopíše křivku *AHK*, na kterou je kolmý; a zřejmě poloměry *AB*, *HD* splývají jedině tehdy, když průnik *R* připadá do tečného bodu *D*.

2°. Jestliže prodloužíme malé oblouky *HG* (Obr. 66) do *l*, *IH* do *m*, *KI* do *n* atd. směrem k počátku odvíjení *A*; pak se každý malý oblouk takový jako *IH* bude z vnějšku dotýkat sousedního oblouku *HG*, neboť poloměry *CA*, *DG*, *EH* vzrůstají soustavně tou samou měrou, jakou se malé oblouky skládající křivku *AHK* vzdalují od bodu *A*. Ze stejného důvodu platí, že když prodloužíme malé oblouky *AG* do *o*, *GH* do *p*, *HI* do *q* na protější stranu od bodu *A*; pak každý malý oblouk takový jako *HI* se bude zevnitř dotýkat svého sousedního oblouku *IK*. Jelikož však můžeme z důvodu nekonečné malosti jak oblouku *HI*, tak strany *DE* klást jeden na místo druhého body *H* a *I*, *D* a *E*; pak odtud plyne, že pokud se středem v libovolném vnitřním bodu *D* evoluty *BDF* o poloměru *DH* opíšeme kruh *mHp*; bude se tento z vnějšku dotýkat části *HA*, která celá do něj bude spadat, a zevnitř části *HK*, která celá bude spadat mimo něj, tj. bude se dotýkat křivky *AHK* a zároveň ji protínat tak, jako tečna v inflexním bodě v tomto bodě protíná křivku.

3°. Ježto se poloměr *HD* malého oblouku *HG* liší od poloměrů *CG*, *EH* sousedních oblouků *GA*, *HI* pouze o nekonečně malou veličinu *CD* či *DE*; plyne odtud, že ať jakkoli zmenšíme poloměr *DH*, bude menší než *CG*, a jeho kruh se tak bude z vnitřku dotýkat části *HA*; a když jej naopak třeba jen o málo zvětšíme, bude přesahovat poloměr *HE*, a jeho kruh se tak části *HK* bude dotýkat z vnějšku. Takto kruh *mHp* představuje nejmenší z kruhů, které se z vnějšku dotýkají části *HA*, a naopak největší z těch, které se zevnitř dotýkají části *HK*; což znamená, že mezi tímto kruhem a křivkou už nemůžeme nechat vést žádný další

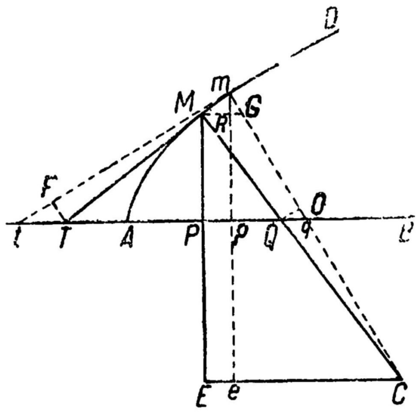
4°. Jelikož křivost kruhů roste úměrně k umenšení jejich poloměrů; plyne odtud, že křivost malého oblouku *HI* se bude mít ke křivosti malého oblouku *AG* jako poloměr *BA* neboli *CA* tohoto malého oblouku k jeho poloměru *DH* neboli *EH*: tj. křivost v *H* křivky *AHK* bude ke křivosti v *A* této křivky tak, jako poloměr *BA* k poloměru *DH*; a stejně tak se křivost v *K* má ke křivosti v *F* tak, jako se má poloměr *DH* k poloměru *FK*. Odtud je zřejmé, že křivost čáry *AHK* nepřetržitě klesá právě tak, jak se odvíjí čára *BDF*; takže v bodě *A*, kde se odvíjení počíná, je největší možná a naopak v bodě *K*, kde podle předpokladu končí, bude její křivost nejmenší.

5°. Body evoluty nejsou ničím jiným než průniky kolmic spuštěných z krajností malých oblouků, které skládají křivku *AHK*. Například bod *D* neboli *E* je průnikem kolmic *HD*, *IE* malého oblouku *AI* tak, že pokud je dána křivka *AHK* společně s polohou jedné ze svých kolmic *HD*; pak k nalezení bodu *D* neboli *E*, kde se tato kolmice dotýká evoluty, postačí nalézt průsečík nekonečně blízkých kolmic *HD*, *IE*. Což vyložíme v následující úloze.[88]

TVRZENÍ I.

Obecné zadání.

77. JE *dána povaha křivé čáry* AMD (Obr. 67) *a spolu s ní jedna z jejích kolmic* MC; *a je třeba určit délku poloměru* MC *evoluty křivky* AMD*, tj. nalézt průnik nekonečně blízkých kolmic* MC*,* mC.



Obr. 67

Předpokládejme nejprve, že osou křivky *AMB* je úsečka *AB*, na níž ordináty *PM* jsou kolmicemi. Představíme si nějakou další ordinátu *mp*, jež bude *MP* nekonečně blízká, neboť bod *m* předpokládáme nekonečně blízký *M*. Bodem průniku *C* povedeme *CE* rovnoběžnou s osou *AB*, jež bude ordináty *MP*, *mp* protínat v bodech *E*, *e*. Konečně vynesme *MR* rovnoběžnou s *AB*; a utvoří se podobné pravoúhlé trojúhelníky *MRm*, *MEC*; neboť úhly *EMR*, *CMm* jsou pravé a úhel *CMR* je jim společný, tudíž úhel *EMC* bude roven úhlu *RMm*.

Jestliže tedy označíme dané veličiny *AP* jako *x*, *PM* jako *y*; a neznámou *ME* jako *z*; budeme mít

$$Ee \text{ neboli } Pp \text{ neboli } MR = dx\ ,\ Rm = dy = dz\ ,\ Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ ;$$

a tehdy

$$MR(dx).\ Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})::ME(z).\ MC = \frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\ .$$

Ježto však *C* je středem malého oblouku *Mm*, jeho poloměr *CM*, který přejde v *Cm*, jakmile *EM* vzroste o svůj diferenciál *Rm*, zůstane nezměněn. Jeho diferenciál bude tím pádem nulový, což (za předpokladu, že *dx* je konstantní) dává

$$\frac{dz\,dx^2 + dy\,dy^2 + z\,dy\,ddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0\ ;$$

odtud pak

$$ME(z) = \frac{dz\,dx^2 + dz\,dy^2}{-dy\,ddy} = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}\ ,$$

když za *dz* dosadíme jeho hodnotu *dy.*

Za druhé předpokládejme, že obě ordináty *BM*, *Bm* (Obr. 68) vycházejí z jediného bodu *B*. Nyní z hledaného bodu *C* na ordináty, které pokládám nekonečně blízko, veďme kolmice *CE* a *Ce*; a od středu B opišme malý oblouk MR; vznikají odtud podobné pravoúhlé trojúhelníky RMm a EMC, BMR, BEG a CeG. A jestliže tedy označíme BM jako y; ME jako z; MR jako dx; dostáváme

$$Rm = dy\ ,\ \ Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ ,\ CE \text{ neboli } Ce = \frac{z\,dy}{dx} \text{ a } MC = \frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\ .$$

Pak, jako v prvním případě, najdeme

$$z = \frac{dz\,dx^2 + dz\,dy^2}{-dy\,ddy}\ .$$

Avšak

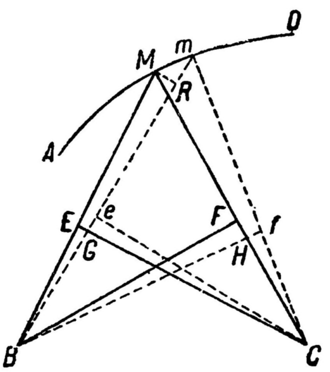
$$BM\,(y).\,Ce\left(\frac{z\,dy}{dx}\right) :: MR(dx).\,Ce = \frac{z\,dy}{y}\ .$$

$$\text{A } me - ME\text{ , čili } Rm - Ge = dz = \frac{y\,dy - z\,dy}{y}\ .$$

A proto jestliže tuto hodnotu dosadíme na místo dz, budeme mít

$$ME(z) = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + dy^2 - y\,ddy}\ .$$

Jestliže předpokládáme, že y je nekonečné; členy dx^2 a dy^2 budou ve srovnání s $y\,ddy$ nulové; a tím pádem se poslední formule změní ve formuli, kterou jsme nalezli v předchozím případě. Což také nastat musí; neboť tehdy budou ordináty navzájem rovnoběžné a oblouk MR se stane úsečkou, jež bude na ordináty kolmá.



Obr. 68

A nyní ježto povaha přímky je dána; nalezneme hodnoty dy^2 a ddy vyjádřené skrze dx^2, anebo hodnoty dx^2 a ddy vyjádřené skrze dy^2. Když je pak dosadíme do předcházejících formulí, dostáváme hodnotu ME, jež bude zcela známa a oproštěná od všech diferenciálů. A jestliže nyní povedeme EC kolmou na ME; pak MC kolmou na křivku bude protínat v hledaném bodě C. Což také bylo zadáno.

DŮSLEDEK I.

78. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků MRm a MEC (Obr. 67, 68) budeme v prvním případě mít

$$MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy}\ ,$$

v druhém pak

$$MC = \frac{\overline{y\,dy^2 + y\,dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}\,.$$ [89]

POZNÁMKA.

79. JE ještě řada dalších způsobů, jak nacházet poloměry evoluty. Část z nich tu představím, abych tak pootevřel rozličné přístupy těm, kdo tímto počtem ještě nevládnou.

Případ první: pro křivky, jejichž ordináty jsou kolmé k ose.

Způsob první. Prodlužme *MR* do *G*, kde se setkává s kolmicí *mC* (Obr. 67). Pravé úhly *Mrm*, *MmG* dávají

$$RG = \frac{dy^2}{dx}\;;$$

a tím pádem

$$MG = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}\,.$$

Avšak z podobnosti trojúhelníků *Mrm*, *MPQ* (body *Q*, *q* vyznačují průniky nekonečně blízkých kolmic *MC*, *mC* s osou *AB*) nastává

$$MQ = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\,,\;\; PQ = \frac{y\,dy}{dx}\;;$$

a tudíž

$$AQ = x + \frac{y\,dy}{dx}\,,$$

odkud diferenciál (za předpokladu, že *dx* je konstantní) činí

$$Qq = dx + \frac{dy^2 + y\,ddy}{dx}\,.$$

A z podobnosti trojúhelníků *CMG*, *CQq* budeme mít

$$MG - Qq\left(\frac{-y\,ddy}{dx}\right).\,MG\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx}\right)::MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right).\,MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy}\,.$$

Druhý způsob. Od středu *C* opišme malý oblouk *QO*; nyní budou malé pravoúhlé trojúhelníky *QOq*, *MRm* podobné, neboť *Mm*, *QO* a *MR*, *Qq* jsou rovnoběžné; a tím pádem

$$Mm\left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right).\,MR(dx)::Qq\left(\frac{dx^2 + dy^2 + y\,ddy}{dx}\right).\,QO = \frac{dx^2 + dy^2 + y\,ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\,.$$

Avšak z podobnosti výsečí *CMm*, *CQO* dostáváme

$$Mm - QO\left(\frac{-y\,ddy}{\sqrt{dx^2 + sy^2}}\right).\,Mm\left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right)::MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right).\,MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy}\,.$$

Třetí způsob. Jestliže povedeme nekonečně blízké tečny *MT*, *mt*; budeme mít

$$PT - AP \ \text{ neboli } \ AT = \frac{y\,dx}{dy} - x\ ,$$

čehož diferenciál činí

$$Tt = -\frac{y\,dx\,ddy}{dy^2}\ .$$

Když pak od středu *m* opíšeme malý oblouk *TF*, vznikne odtud pravoúhlý trojúhelník *FTt* podobný trojúhelníku *RmM*; poněvadž úhly *FtT* a *RMm* neboli *PTM* jsou si rovny, ježto se liší toliko o úhel *Tmt*, který je nekonečně malý; což dává

$$Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}).mR(dy)::Tt(-\frac{y\,dx\,ddy}{dy^2}).TF = \frac{-y\,dx\,ddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}\ .$$

Avšak výseče *TmF*, *MCm* jsou podobné, neboť úhel $Tmt + MmC$ je roven pravému a úhel $MmC + MCm$ je též rovný pravému; poněvadž trojúhelník *CMm* pokládáme za pravoúhlý v *M*. A tedy

$$TH(-\frac{y\,dx\,ddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}).Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})::Tm\ , \text{ čili } \ TM(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}).MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}\ .$$

Čtvrtý způsob. Určíme (§ 64) druhé diferenciály (Obr. 69), přičemž *dx* bereme jako konstantní; pak podobné pravoúhlé *HmS*, *Hnk* trojúhelníky dávají

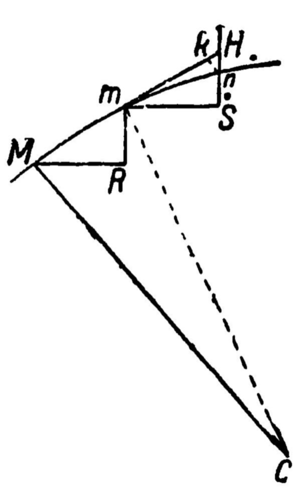
$$Hm \ \text{ neboli } \ Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}).mS \ \text{ neboli } \ MR(dx)::Hn(-ddy).nk = -\frac{dx\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\ .$$

Avšak úhel *kmn* je roven úhlu, který mezi sebou svírají tečny v bodech *M*, *m*; a tím pádem je, jak jsme právě dokázali, roven úhlu *MCm*. Odtud plyne, že výseče *nmk*, *MCm* jsou podobné, a tudíž

$$nk(-\frac{dx\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}).mk \ \text{ neboli (§ 2)}$$

$$Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}).MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}\ .$$

Vezmeme *mH* neboli *Mm* na místo *mk*, poněvadž se liší toliko o malou úsečku *Hk*, která je ve srovnání s nimi nekonečně menší; a stejně tak je *Hn* nekonečně menší než *Rm* neboli *Sn*.



Obr. 69

Případ druhý: pro křivky, jejichž ordináty vycházejí z jediného pevného bodu.

Způsob prvý. Z pevného bodu B (Obr. 68) veďme na nekonečně blízké poloměry CM, Cm kolmice BF, Bf; z pravoúhlých trojúhelníků mMR, BMF, které jsou podobné (neboť když k úhlům mMR, BMF přidáme společný úhel FMR, dávají každý z nich pravý úhel), pak vychází

$$MF \text{ neboli } MH = \frac{y\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} \text{ a } BF = \frac{y\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

odkud diferenciál (za předpokladu, že dx je konstantní) činí

$$Bf - BF \text{ neboli } Hf = \frac{dx^2\,dy^2 + dy^4 + y\,dx^2\,ddy}{\overline{dx^2+dy^2} \times \sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Avšak z podobnosti výsečí CMm, CHf sestavíme následující úměru

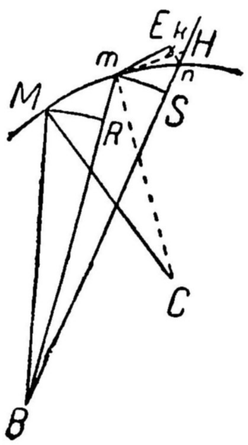
$$Mm - Hf.Mm :: MH.MC,$$

a tím pádem

$$MC = \frac{\overline{y\,d^2 + y\,dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}.$$

Druhý způsob. Určíme (§ 64) druhé diferenciály (Obr. 70) za předpokladu, že dx je konstantní; z podobných výsečí BmS, mEk dostáváme

$$Bm(y).\,mS(dx) :: mE(\sqrt{dx^2+dy^2}).\,Ek = \frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}.$$



Obr. 70

Avšak z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků HmS, Hnk budeme mít

$$Hm \text{ neboli } Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}).\,mS \text{ neboli}$$

$$MR(dx) :: Mn(-ddy).\,nk = -\frac{dx\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

A tudíž

$$En = \frac{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}{y\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

a když pak vezmeme třetí úměrnou k En, Em neboli Mm; z podobnosti výsečí Emn, MCm dají tu samou hodnotu MC, jakou jsme nalezli výše.

Jestliže pak $Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})$ označíme jako du a na místo dx vezmeme za konstantní dy; pak v prvním případě najdeme

$$MC = \frac{du^3}{dy\,ddx};$$

a v druhém

$$MC=\frac{y\,du^3}{dx\,du^2+y\,dy\,ddx}\,.$$

A konečně když jako konstantní vezmeme *du*; nastane v prvním případě

$$MC=\frac{dx\,du}{-ddy}\ \text{neboli}\ \frac{dy\,du}{ddx}\,,$$

poněvadž diferenciál $dx^2+dy^2=du^2$ je $dx\,ddx+dy\,ddy=0$; a takto

$$\frac{dx}{-ddy}=\frac{dy}{ddx}\,;$$

v druhém případě pak

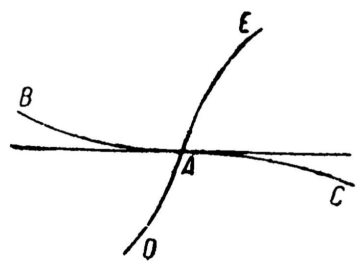
$$MC=\frac{y\,dx\,du}{dx^2-y\,ddy}\ \text{neboli}\ \frac{y\,dy\,du}{dx\,dy+y\,ddx}\,.$$

DŮSLEDEK II.

80. JELIKOŽ pro *ME* nebo *MC* (Obr. 72) nalézáme pouze jednu hodnotu; plyne odtud, že křivá čára *AMD* může mít toliko jednu evolutu *BCG*.

DŮSLEDEK III.

81. JESTLIŽE je hodnota *ME* (Obr. 67, 68) $\left(\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}\right)$ neboli $\left(\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2+dy^2-y\,ddy}\right)$ kladná; bude třeba bod *E* vzít na stejné straně od osy *AB* nebo bodu *B* tak, jak jsme předpokládali během výpočtu. Jestliže však hodnota *ME* je záporná, bod *E* bude třeba brát na straně opačné; a zřejmě křivka pak bude vypouklá. Takto se v bodě přehybu nebo vratu oddělujícím části konvexní a konkávní musí hodnota *ME* převrátit z kladné v zápornou; a nekonečně blízké neboli styčné kolmice se tím pádem musí ze sbíhavých změnit na rozbíhavé. Avšak to může nastat pouze dvěma způsoby. Neboť tyto kolmice buďto rostou, a to stejnou měrou, jakou se přibližují k bodu přehybu nebo vratu; a pak se musí stát rovnoběžnými, tj. poloměr evoluty bude nekonečný. Anebo klesají; a tehdy nutně splynou jedna s druhou, tj. poloměr evoluty bude roven nule. Což vše dokonale odpovídá tomu, co jsme dokázali v předešlém oddíle.

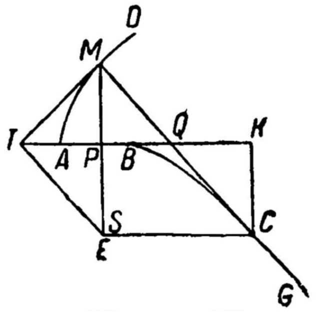


Obr. 71

POZNÁMKA.

82. PONĚVADŽ doposavad jsme měli za to, že poloměr evoluty v je v inflexním bodě vždy nekonečně velký; je na místě ukázat, že je, abych tak řekl, nekonečno druhů křivek, které všechny mají v inflexním bodě poloměr evoluty rovný nule. Zatímco je jen jediný druh křivek, kde je tento poloměr nekonečný.

Nechť *BAC* (Obr. 71) je jednou z těch křivek, které mají v inflexním bodě *A* poloměr evoluty nekonečný. Jestliže nyní počínaje bodem *A* odvineme části *BA*, *AC*; pak zřejmě vznikne křivka *DAE*, která také bude mít inflexní bod v tom samém bodě *A*; avšak její poloměr evoluty bude v tomto bodě roven nule. Když pak stejným způsobem utvoříme třetí křivku odvinutím druhé *DAE* a čtvrtou odvinutím třetí a tak dále až do nekonečna; pak je zřejmé, že v inflexním bodě *A* bude poloměr evoluty všech těchto křivek vždy roven nule. Tudíž atd.[90]



Obr. 72

TVRZENÍ II.

Zadání.

83. U *křivek* AMD (Obr. 72)*, kde osa* AB *svírá s tečnou v* A *pravý úhel, najít bod* B*, ve kterém se tato osa dotýká evoluty* BCG.

Jestliže předpokládáme, že bod *M* se stane nekonečně blízkým vrcholu *A*; pak zjevně kolmice *MQ* protne osu v hledaném bodě *B*. Odtud plyne, že když hledáme obecně hodnotu $PQ(\frac{y\,dy}{dx})$ skrze *x* nebo *y*; a následně položíme *x* nebo $y=0$; pak se ukáže, že bod *P* spadá v jedno s bodem *A* a bod *Q* s hledaným bodem *B*; tj. *PQ* se stane rovnou hledané *AB*. Což objasníme na následujících příkladech.

PŘÍKLAD I.

84. NECHŤ křivka *AMD* je parabolou (Obr. 72), která má coby parametr danou úsečku *a*. Rovnice paraboly je $ax=yy$; a její diferenciál

$$dy=\frac{a\,dx}{2y}=\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}} .$$

Jestliže pak z této poslední rovnice vezmeme diferenciál, přičemž jako konstantní pokládáme *dx*, nacházíme

$$ddy=\frac{-a\,dx^2}{4\,x\sqrt{ax}} .$$

A konečně když tyto hodnoty dosadíme do formule $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ na místa *dy* a *ddy*; budeme (§ 77) mít

$$ME=\frac{\overline{a+4x}\sqrt{ax}}{a}=\sqrt{ax}+\frac{4x\sqrt{ax}}{a}\ .$$ [91]

Což dává následující konstrukci.

Bodem *T*, ve kterém se tečna *MT* dotýká osy, veďme čáru *TE* rovnoběžnou s *MC*; a tvrdím, že tato protne prodloužení *MP* v hledaném bodě *E*. Neboť pravé úhly *MPT*, *MTE* dávají

$$MP(\sqrt{ax}).PT(2x)::PT(2x).PE=\frac{4xx}{\sqrt{ax}}=\frac{4x\sqrt{ax}}{a}\ ;$$

a následně

$$MP+PE=\sqrt{ax}+\frac{4x\sqrt{ax}}{a}\ .$$

Kromě toho z pravoúhlých trojúhelníků *MPQ*, *MEC* získáme

$$PM(\sqrt{ax}).PQ(\frac{1}{2}a)::ME(\sqrt{ax}+\frac{4x\sqrt{ax}}{a}).EC \text{ neboli } PK=\frac{1}{2}a+2x\ .$$

A tím pádem

$$QK=2x\ .$$

Což dává tuto novou konstrukci.

Vezměme *QK* rovnou dvojnásobku *AP* neboli (což je v posledku totéž) *PK* rovno *TQ*; a veďme *KC* rovnoběžnou s *PM*. Nuže *KC* protne kolmici *MC* v bodě *C*, který náleží evolutě *BCG.*

Jinak. Nechť $yy=ax$, $2y\,dy=a\,dx$; čehož diferenciál, pokud bereme dx za konstantní, dává

$$2dy^2+2y\,ddy=0\ ;$$

odtud pak

$$-ddy=\frac{dy^2}{y}\ .$$

A jestliže tuto hodnotu dosadíme do formule $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, nacházíme (§ 77)

$$ME=\frac{y\,dy^2+y\,dx^2}{dy^2}\ ;$$

a tudíž

$$EC \text{ neboli } PK=\frac{y\,dy^2+y\,dx^2}{dy\,dx}=\frac{y\,dy}{dx}+\frac{y\,dx}{dy}=PQ+PT \text{ neboli } TQ.$$

Což dává ty samé konstrukce jako předtím. Neboť

$$MP.PT::dy.dx::PT(\frac{y\,dx}{dy}).PE=\frac{y\,dx^2}{dy^2}=\frac{4x\sqrt{ax}}{a}\ .$$

Nyní k nalezení bodu *B*, ve kterém se osa *AB* dotýká evoluty *BCG*. Máme

$$PQ\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)=\frac{1}{2}a\,.$$

Ježto však je tato veličina konstantní, zůstává stále stejná nezávisle na poloze bodu *M.* A tedy když připadne do vrcholu *A*, stále budeme mít *PQ*, jež se v tomto případě stává

$$AB=\frac{1}{2}a\,.$$

Pokud je třeba povahu evoluty *BCG* určit na způsob Descartův: abscisu *BK* označíme jako *u*; ordinátu *KC* neboli *PE* jako *t*; a dostáváme

$$CK(t)=\frac{4x\sqrt{ax}}{a} \text{ a } AP+PK-AB(u)=3x\,.$$

Když tedy do rovnice $t=\frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ dosadíme za *x* jeho hodnotu $\frac{1}{3}u$, nastává nová rovnice

$$27att=16u^3\,,$$

která vyjadřuje poměr *BK* ku *KC*. Odtud je zřejmé, že evoluta *BCG* obecné paraboly je jinou kubickou parabolou, jejíž parametr se rovná $\frac{27}{16}$ parametru dané paraboly.

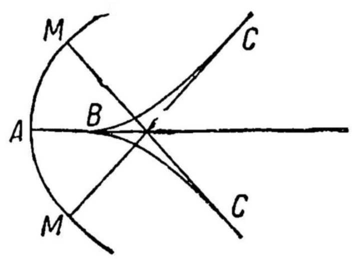
Je zřejmé, že evoluta *CBC* (Obr. 73) celé paraboly *MAM* sestává ze dvou částí *CB*, *BC*, které jsou jedna k druhé konvexní tak, že v *B* utvářejí bod vratu.

Upozornění.

Rozumíme křivkami geometrickými AMD, BCG (Obr. 72) *křivky takové, u nichž lze poměr mezi abscisami* AP, BK *a ordinátami* PM, KC *vyjádřit rovnicí, která neobsahuje žádné diferenciály*; *a jako* geometrické *bereme vše, co je možné vytvořit za pomoci těchto čar. Zde předpokládáme, že abscisy a ordináty jsou přímými čarami.*[92]

Důsledek.

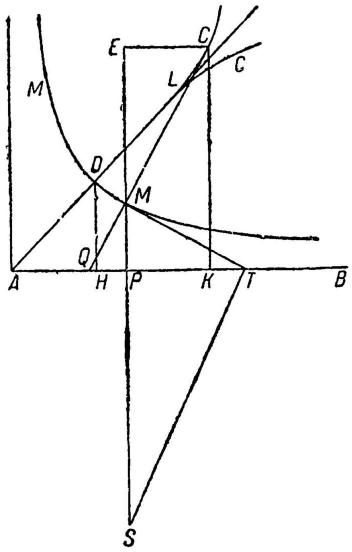
85. Pokud je daná křivka *AMD* geometrická; je zřejmé, že vždy bude možné (jako v tomto příkladě) najít rovnici vyjadřující povahu její evoluty *BCG*; a že tak i tato evoluta bude geometrická. Mimo to však tvrdím, že bude rektifikovatelná, tj. bude možné geometricky najít takové úsečky, jež budou rovny libovolným jejím úsekům *BC.* Neboť je zjevné (§ 77), že za pomoci čáry *AMD*, která je geometrická, určíme na tečně *CM* k úseku evoluty *BC* bod *M* takový, že úsečka *CM* se bude od úseku *BC* lišit pouze o nějakou danou úsečku *AB*.[93]



Obr. 73

PŘÍKLAD II.

86. NECHŤ daná křivka *MDM* (Obr. 74) je hyperbolou ohraničenou svými asymptotami; a její rovnice $aa = xy$.



Obr. 74

Budeme mít

$$\frac{aa}{y} = x\,,\quad \frac{-aa\,dy}{yy} = dx\,;$$

a pokud bereme dx jako konstantní (§ 1),

$$\frac{-aayy\,ddy + 2\,aay\,dy^2}{y^4} = 0\,;$$

odkud

$$ddy = \frac{2\,dy^2}{y}\,.$$

Když tuto hodnotu dosadíme do $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, dostáváme (§ 77)

$$ME = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{-2\,dy^2}\,;$$

a tím pádem

$$EC \text{ neboli } PK = -\frac{y\,dy}{2\,dx} - \frac{y\,dx}{2\,dy}\,.$$

Což dává následující konstrukce.

Bodem *T*, ve kterém se tečna *MT* stýká s asymptotou *AB*, veďme čáru *TS* rovnoběžnou s *MC*, která se s prodlouženou *MP* setká v S; vezměme *ME* rovnou polovině *MS* na opačné straně asymptoty (kterou zde chápeme jako osu), neboť hodnota *MS* je záporná; anebo na té samé straně od bodu *T* vezměme *PK* rovnou polovině *TQ*. Nyní tvrdím, že když povedeme *EC* rovnoběžnou s osou anebo na osu kolmou *KC*, pak úsečku *MC* protnou v hledaném bodě *C*. Ježto zřejmě

$$\frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dy^2} \text{ a } TQ = \frac{y\,dy}{dx} + \frac{y\,dx}{dy}\,.$$

Pokud se pozorněji podíváme na tvar hyperboly *MDM*, nahlédneme, že její evoluta *CLC* musí mít, tak jako evoluta paraboly, bod vratu *L*. Abychom jej určili, podotýkám, že poloměr evoluty *DL* je menší než jakýkoli další poloměr *MC*; odtud plyne, že diferenciál jeho výrazu (§ 78)

$$\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy}\,,\text{ čili } \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$$

bude (Oddíl 3) nulový, nebo nekonečný. Což dává, pokud dx stále bereme za konstantní,

$$\frac{-3\,dx\,dy\,ddy^2\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}2}+dx\,dddy\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}2}}{dx^2\,ddy^2}=0$$, nebo nekonečnu;

odtud pak po vydělení $\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}2}$ a vynásobení $dx\,ddy^2$ obdržíme následující rovnici

$$dx^2\,dddy+dy^2\,dddy-3\mathrm{dy}\,ddy^2=0$$, nebo nekonečnu,

kterou použijeme, abychom pro x nalezli hodnotu AH takovou, že když povedeme ordinátu HD a poloměr evoluty DL; pak bod L bude hledaným bodem vratu.

V tomto příkladě máme

$$y=\frac{aa}{x}\ ,\ dy=\frac{-aa\,dx}{xx}\ ,\ ddy=\frac{2\,aa\,dx^2}{x^3}\ ,\ dddy=\frac{-6\,aa\,dx^3}{x^4}\ .$$

A proto, když tyto hodnoty dosadíme do předchozí rovnice, nalézáme

$$AH\,(x)=a\ .$$

Odtud vyplývá, že bod D je vrcholem hyperboly a čáry AD, DL tvoří jednu jedinou AL, která je její osou.

PŘÍKLAD III.

87. BUDIŽ obecná rovnice $y^m=x$ (Obr. 72, 74) vyjadřující povahu nekonečna všech parabol, když mocnitel m označuje celé nebo lomené kladné číslo; a všech hyperbol, pokud označuje číslo záporné.

Budeme mít

$$my^{m-1}dy=dx\ ,$$

odkud diferenciál za předpokladu, že dx je konstantní, dává

$$\overline{mm-m}\,y^{m-2}dy^2+my^{m-1}ddy=0\ ;$$

po vydělení my^{m-1} obdržíme

$$-ddy=\frac{\overline{m-1}\,dy^2}{y}\ ;$$

dosazením této hodnoty do $\dfrac{dy^2+dy^2}{-ddy}$ odtud dostáváme (§ 77)

$$ME=\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{\overline{m-1}\,dy^2}\ ;$$

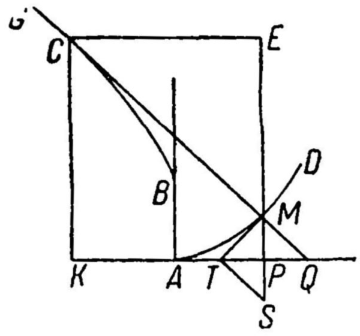
a tím pádem

$$EC \text{ neboli } PK=\frac{y\,dy}{\overline{m-1}\,dx}+\frac{y\,dx}{\overline{m-1}\,dy}\ .$$

Což dává následující obecné konstrukce.

Bodem *T*, v němž se tečna *MT* stýká s osou *AP*, veďme čáru *TS* rovnoběžnou s *MC*, která se s prodlouženou *MP* setká v bodě *S*; vezměme $ME=\frac{1}{m-1}MS$ anebo $PK=\frac{1}{m-1}TQ$: a je zřejmé, že pokud bodem *E* povedeme rovnoběžku k ose anebo bodem *K* kolmici na ni; pak *MC* protnou v hledaném bodě *C*.

Jestliže *m* je záporné, jako je tomu u hyperbol; hodnota *ME* (Obr. 74) bude záporná; a tudíž hyperboly budou vypouklé vůči své ose, jež pak bude asymptotou. Avšak u parabol, kde *m* je kladné, mohou nastat dva případy. Neboť buďto *m* (Obr. 75) bude menší než 1, a tehdy paraboly budou vypouklé ke své ose, která bude tvořit tečnu k vrcholu; anebo bude (Obr. 72) větší než 1, a tehdy budou vůči své ose vyduté, a tato pak bude k vrcholu kolmá.



Obr. 75

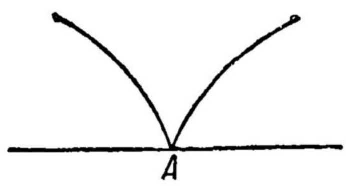
Pokud je třeba v tomto posledním případě bod *B*, v němž se osa *AB* dotýká evoluty. Máme

$$PQ\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)=\frac{y^{2-m}}{m};$$

což dává tři odlišné případy. Buďto totiž $m=2$, což nastává toliko u obecné paraboly; a pak se mocnitel nad *y* bude rovnat nule, a neznámá tím pádem vymizí; a následně

$$AB=\frac{1}{2}\text{, tj. polovině parametru.}$$

Nebo je *m* menší než 2; a ježto pak bude mocnitel nad *y* kladný, neznámá se bude nacházet v čitateli, což (když ji položíme (§ 83) rovnou nule) učiní zlomek nulovým; tj. bod *B* v tomto případě připadne do bodu *A* stejně tak jako u druhé kubické paraboly $axx=y^3$. Anebo konečně *m* je (Obr. 76) větší než 2, a pak bude mocnitel záporný; tehdy neznámá se bude nacházet ve jmenovateli a (když nastane rovnou nule) zlomek se stane nekonečným; tj. bod *B* je nekonečně vzdálen od bodu *A*, anebo (což je totéž), že osa *AB* je asymptotou evoluty tak, jako u první kubické paraboly $aax=y^3$. Lze poznamenat, že v posledním případě má evoluta *CLO* (Obr. 77) poloviční paraboly *ADM* bod vratu *L* tak, že odvinutím části *LO* prodloužené až do nekonečna opíše bod *D* pouze určitý konečný úsek *DA*; zatímco při odvíjení druhé části *LC*, rovněž protažené do nekonečna, opíše nekonečný úsek *DM*.



Obr. 76

Bod *L* určíme stejným způsobem jako u hyperboly. Budiž například $aax=y^3$ nebo $y=x^{\frac{1}{3}}$; budeme mít

$$dy=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx\ ,\ ddy=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}dx^2\ ,\ dddy=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}dx^3\ ;$$

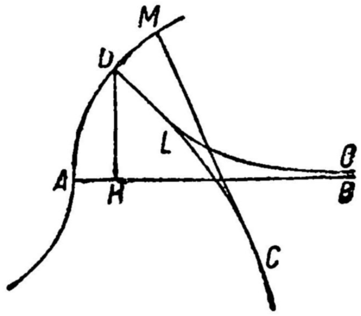
když tyto výrazy dosadíme do rovnice $dx^2 dddy+dy^2 dddy-3\,dy\,ddy^2=0$; nalezneme (§ 86)

$$AH(x)=\sqrt[4]{\frac{1}{91125}}\ .$$

A právě tak je tomu i v ostatních případech.

POZNÁMKA.

88. ZA předpokladu, že *m* je větší než 1 tak, že paraboly jsou vůči své ose vždy vyduté; mohou nastat rozdílné případy. Neboť pokud je čitatel zlomku, který označíme jako *m*, sudý, zatímco jeho jmenovatel lichý; pak se všechny paraboly rozloží po obou stranách své osy podobně, jako je tomu u obecné paraboly (Obr. 73). Avšak když jsou čitatel i jmenovatel oba liché; připadnou paraboly po obou stranách své osy do obrácené polohy tak, že jejich vrchol *A* (Obr. 77) bude inflexním bodem stejně jako u první kubické paraboly $x=y^{\frac{3}{1}}$ nebo $axx=y^3$.



Obr. 77

Konečně jestliže čitatel bude lichý, zatímco jmenovatel sudý; paraboly připadnou do převrácené polohy po jedné straně své osy tak, že jejich vrchol *A* (Obr. 76) bude bodem vratu jako u druhé kubické paraboly $x=y^{\frac{3}{2}}$ nebo $axx=y^3$. Toto vše vyplývá ze skutečnosti, že sudá mocnina nemůže mít zápornou hodnotu. Nuže je zřejmé, že

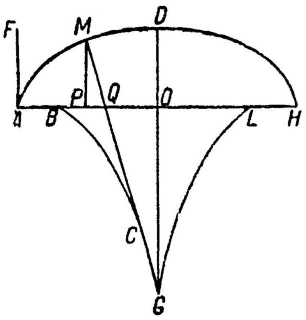
1°. V inflexním bodě *A* (Obr. 77) může být poloměr evoluty nekonečně velký jako u $aax=y^3$, nebo nekonečně malý jako u $aax^3=y^5$.

2°. V bodě vratu *A* (Obr. 76) může být poloměr evoluty buďto nekonečný jako u $a^3xx=y^5$, anebo nulový jako u $axx=y^3$.

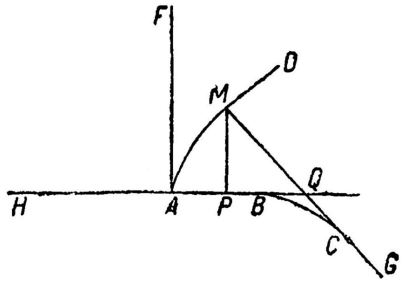
3°. Z toho, že poloměr evoluty je nekonečný nebo nulový neplyne (Obr. 73), že by křivky zároveň měly mít bod přehybu vratu. Neboť v případě $a^3x=y^4$ je tento poloměr nekonečný, v případě $ax^3=y^4$ nulový; nicméně tyto paraboly se rozkládají po obou stranách své osy v podobném rozpoložení jako u obecné paraboly.

PŘÍKLAD IV.

89. NECHŤ křivka *AMD* (Obr. 78, 79) je hyperbolou či elipsou s osou $AH(a)$ a parametrem $AF(b)$.



Obr. 78



Obr. 79

Z povahy těchto čar budeme mít

$$y=\sqrt{\frac{abx\mp bxx}{\sqrt{a}}}\ ,\ dy=\frac{ab\,dx\mp 2\,bx\,dx}{2\sqrt{aabx\mp abxx}}\ \text{a}\ ddy=\frac{-a^3\,bb\,dx^2}{4aabx\mp 4abxx\sqrt{aabx\mp abxx}}\ .$$

Tedy jestliže tyto hodnoty dosadíme do obecného výrazu pro MC (§ 78) $\frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}$,

nalezneme pro tyto dvě křivky

$$MC=\frac{\overline{aabb\mp 4\,abbx+4\,bbxx+4\,aabx\mp 4\,abxx}\sqrt{aabb\mp 4\,abbx+4\,bbxx+4\,aabx\mp 4\,abxx}}{2\,a^3bb}=\frac{4\,MQ^3}{bb}\ ,$$

neboť na každý pád

$$MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right)=\frac{\sqrt{aabb\mp 4\,abbx+4\,bbxx+4\,aabx\mp 4\,abxx}}{2a}\ .$$

Což dává následující konstrukci, která platí i pro parabolu.

Vezměme MC rovnou čtyřnásobku čtvrté spojité úměry k parametru AF a kolmici MQ ohraničené osou; pak bod C bude ležet na evolutě.

Když položíme $x=0$, budeme mít (§ 83)

$$AB=\frac{1}{2}b\ .$$

Jestliže pak u elipsy vezmeme $x=\frac{1}{2}a$, nacházíme (Obr. 79)

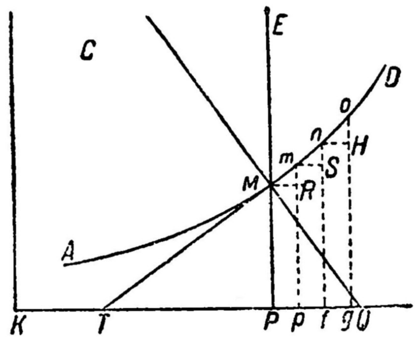
$$DG=\frac{a\sqrt{ab}}{2b}\ ,$$

tj. rovno polovině parametru malé osy. Odtud je zřejmé, že evoluta BCG elipsy končí v bodě G ležícím na malé ose DO, kde tvoří bod vratu; zatímco u paraboly a hyperboly se rozprostírá do nekonečna.[94]

Jestliže u elipsy nastane $a = b$; pak $MC = \frac{1}{2} a$. Odtud plyne, že všechny poloměry evoluty jsou si navzájem rovny; a že tudíž evoluta představuje toliko jediný bod, tj. elipsa se v tomto případě stává kruhem, jehož evolutou je jeho střed. Což, jak ostatně víme, odpovídá pravdě.

PŘÍKLAD V.

90. NECHŤ *AMD* (Obr. 80) je běžnou logaritmickou křivkou, jejíž povaha je taková, že když z libovolného jejího bodu *M* vedeme kolmici *MP* na asymptotu *KP* a dále tečnu *MT*; pak subtangenta *PT* bude vždy rovna jedné a té samé dané úsečce *a*.



Obr. 80

Tedy máme

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = a ,$$

odkud

$$dy = \frac{y\,dx}{a} ,$$

odkud diferenciál, pokud *dx* bereme za konstantní, činí

$$ddy = \frac{dy\,dx}{a} = \frac{y\,dx^2}{aa} ;$$

po dosazení těchto hodnot do $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ nacházíme (§ 77)

$$ME = \frac{-aa - yy}{y} ;$$

odkud

$$EC \text{ neboli } PK = \frac{-aa - yy}{a} .$$ [95]

Což dává následující konstrukci.

Vezměme *PK* rovnou *TQ* na straně bodu *T*, ježto hodnota *PK* je záporná; a veďme *KC* rovnoběžnou s *PM*: tvrdím, že *KC* protne kolmici *MC* v hledaném bodě *C*. Neboť

$$TQ = \frac{aa + yy}{a} .$$

Pokud je třeba, aby bod *M* byl bodem největšího zakřivení; použijeme formuli

$$dx^2\,dddy + dy^2\,dddy - 3\,dy\,ddy^2 = 0 ,$$

kterou jsme nalezli (§ 86) v druhém příkladě; a když pak za dy, ddy, $dddy$ dosadíme jejich hodnoty $\frac{y\,dx}{a}$, $\frac{y\,dx^2}{aa}$, $\frac{y\,dx^3}{a^3}$, nalezneme

$$PM\,(y)=a\sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Je zjevné, že když dx bereme jako konstantní, ordináty y se k sobě mají jako jejich diferenciály dy nebo $\frac{y\,dx}{a}$; a odtud plyne, že i ony tvoří geometrickou posloupnost. Jestliže si totiž představíme, že asymptota nebo osa PK je rozdělena na nekonečné množství navzájem rovných částí Pp neboli MR, pf neboli Ms, fg neboli nH atd. uzavřených mezi ordinátami PM, pm, fn, go atd., dostaneme

$$PM.pm :: Rm.Sn :: PM+Rm \text{ neboli } pm.pm+Sn \text{ neboli } Fn.$$

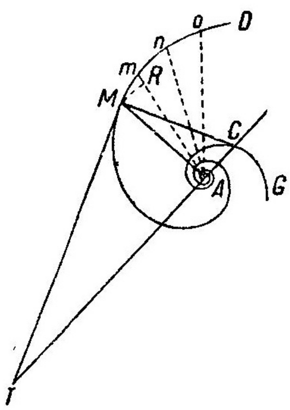
Dokážeme rovněž, že

$$pm.fn :: fn.go \text{ atd.}$$

Ordináty PM, pm, fn, go atd. tedy mezi sebou utvářejí geometrickou posloupnost.

PŘÍKLAD VI.

91. NECHŤ křivka AMD (Obr. 81) je logaritmickou spirálou, jejíž povaha je taková, že když z libovolného jejího bodu M povedeme úsečku MA do bodu A, který je jejím středem, a dále povedeme tečnu MT; pak úhel AMT zůstává všude stejný.



Obr. 81

Jelikož úhel AMT neboli AmM je konstantní, poměr $Mr\,(dy)$ ku $RM\,(dx)$ bude též konstantní. Diferenciál $\frac{dy}{dx}$ tudíž musí být nulový; což (za předpokladu, že dx je konstantní) dává $ddy=0$. Jestliže tedy z obecného výrazu (§ 77) ME pro případ, kdy všechny ordináty vycházejí z jediného bodu, totiž z

$$\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2+dy^2-y\,ddy},$$

odstraníme člen $y\,ddy$; nacházíme

$$ME=y\text{, tj. } ME=AM\,.$$

Což dává následující konstrukci.

Veďme AC kolmou na AM, která kolmici MC na křivku protíná v bodě C; pak bod C bude ležet na evolutě ACB.

Úhly AMT, ACM jsou si rovny, neboť každý z nich spolu s jedním a tím samým úhlem AMC dohromady dávají pravý úhel. Evoluta ACG tedy bude stejnou logaritmickou spirálou jako daná AMD, od které se bude lišit toliko polohou.

Jestliže naopak jako daný předpokládáme bod C evoluty ACG; a v tomto bodě je třeba určit délku jejího poloměru CM, rovnající se (§ 75) části AC, která vykoná nekonečno obratů před tím, než dospěje do A; pak zřejmě stačí spustit AM kolmou na AC tak, že když povedeme AT kolmou na AM, tečna MT bude rovna též části AM dané logaritmické spirály AMD.

Když si představíme nekonečno ordinát AM, Am, An, Ao atd., které jedna s druhou svírají navzájem rovné nekonečně malé úhly; pak zřejmě trojúhelníky MAm, mAn, nAo atd. budou podobné, poněvadž úhly při A se rovnají; a z povahy logaritmické spirály jsou si rovny i úhly při m, n, o atd. A tím pádem

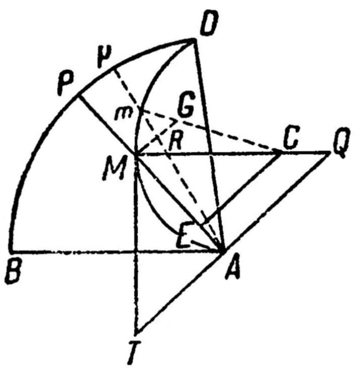
$$AM.Am::Am.An\ .$$

$$\text{A}\ \ Am.An::An.Ao\ \ \text{atd.}$$

Odtud je zřejmé, že pokud se úhly mezi ordinátami AM, Am, An, Ao atd. rovnají, pak tyto ordináty tvoří geometrickou posloupnost.[96]

PŘÍKLAD VII.

92. NECHŤ křivka AMD (Obr. 82) je jednou z nekonečně mnoha spirál, které se utvoří ve výseči BAD;[97] a nechť má vlastnost takovou, že když povedeme libovolný poloměr AMP; přičemž celkový oblouk BPD označíme jako b; jeho část BP jako z; poloměr AB neboli AP jako a; a jeho část AM jako y; pak bude platit úměra $b.z::a^m.\,y^m$.



Obr. 82

Rovnice spirály AMD je $y^m=\frac{a^m z}{b}$, čehož diferenciál dává

$$my^{m-1}dy=\frac{a^m dz}{b}\ .$$

Nuže z podobnosti výsečí AMR, APp dostáváme

$$AM(y).\,AP(a)::MR(dx).\,Pp(dz)=\frac{a\,dx}{y}\ .$$

Když tuto hodnotu dosadíme na místo dz do rovnice, kterou jsme právě nalezli, budeme mít

$$my^m dy=\frac{a^{m+1}dx}{b}\ ,$$

čehož diferenciál (bereme-li dx jako konstantní) činí

$$mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0\,;$$

odkud po vydělení my^{m-1} obdržíme

$$-y\,ddy = m\,dy^2\,;$$

a tím pádem (§ 77)

$$ME\left(\frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + dy^2 - y\,ddy}\right) = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\,dy^2}\,.$$

Což dává následující konstrukci.

Veďme středem A kolmo k AM úsečku TAQ, která tečnu MT protne v T a kolmici MQ v Q; a nechť $TA + \overline{m+1}\,AQ\,.\,TQ :: MA\,.\,ME$. Nyní tvrdím, že když povedeme s TQ rovnoběžnou EC; pak MQ protne v bodě C, který bude ležet na evolutě.

Neboť z rovnoběžnosti MRG, TAQ dostáváme

$$MR(dx) + \overline{m+1}\,RG\left(\frac{dy^2}{dx}\right).\,MG\left(dx + \frac{dy^2}{dx}\right) :: TA + \overline{m+1}\,AQ.TQ :: AM\,(y).\,ME = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\,dy^2}\,.$$

PŘÍKLAD VIII.

93. NECHŤ AMD (Obr. 83) je obecnou polocykloidou, jejíž základna BD je rovna polovičnímu obvodu BEA tvořícího kruhu.

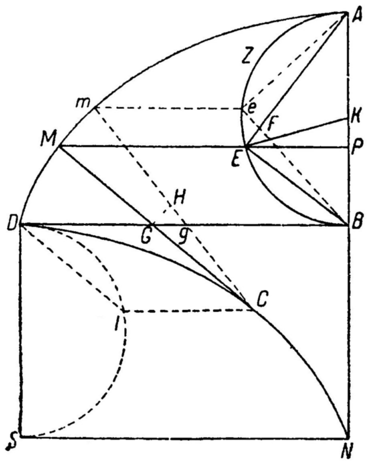
Označme AP jako x; PM jako y; oblouk AE jako u; a poloměr AB jako $2a$; z povahy kruhu dostaneme

$$PE = \sqrt{2ax - xx}\,,$$

odkud diferenciál činí

$$dy = du + \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{2a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}\,,\text{ čili } dx\sqrt{\frac{2ax - x}{x}}\,,$$

když za du dosadíme jeho hodnotu $\dfrac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$; a za předpokladu, že dx je konstantní



Obr. 83

$$ddy = \frac{-a\,dx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}\,;$$

Po dosazení těchto hodnot do $\dfrac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dx^2}}{-dx\,ddy}$, vychází (§ 78)

$$MC = 2\sqrt{4aa - 2ax}\,,\text{ tj. } 2BE \text{ neboli } 2MG\,.$$[98]

Jestliže položíme $x=0$, jako poloměr evoluty ve vrcholu *A* dostáváme $AN=4a$. Když však položíme $x=2a$, zjistíme, že se poloměr evoluty v bodě *D* obrací v nic neboli bude nulový; odtud je zjevné, že evoluta bere svůj počátek v *D* a končí v *N* tak, že $BN=BA$.

Abychom nahlédli povahy této evoluty stačí pouze, když doplníme pravoúhelník *BS*, opíšeme půlkruh *DIS* o poloměru *DS* a povedeme *DI* rovnoběžnou s *MC* nebo *BE.* Pak je jasné, že úhel *BDI* se bude rovnat úhlu *EBD*; a tím pádem že oblouky *DI*, *BE* jsou si rovny navzájem; odkud plyne, že jejich struny *DI*, *BE* nebo *GC* se rovnají též. Pokud tedy vyneseme *IC*, bude rovná a rovnoběžná s *DG*, jež je z utvoření cykloidy rovna oblouku *BE* nebo *DI*; a tím pádem bude evoluta *DCN* jednou z polocykloid, které mají za základnu úsečku *NS* rovnou polovičnímu obvodu *DIS* svého tvořícího kruhu; tj. bude se jednat o samotnou polocykloidu *AMDB*, pouze v převrácené poloze.

DŮSLEDEK.

94. JE zřejmé (§ 75), že část cykloidy *DC* je dvakrát větší než tečna *CG* nebo jí odpovídající struna *DI*; a polocykloida *DCN* dvakrát větší než poloměr *BN* nebo *DS* jejího tvořícího kruhu.

JINAK.

95. DÉLKU poloměru *MC* můžeme najít i bez jakýchkoli výpočtů, a sice následovně. Jestliže si představíme druhou kolmici *mC* prvé nekonečně blízkou, druhou rovnoběžku *me*, druhou strunu *Be*; a ze středů *C*, *B* opíšeme malé oblouky *GH*, *EF*; vznikají pravoúhlé trojúhelníky *GHg*, *EFe*, jež si budou rovné a podobné; neboť $Gg=Ee$, poněvadž *BG* neboli *ME* se rovná oblouku *AE* a stejně tak *Bg* neboli *me* je rovno oblouku *Ae*; a kromě toho *Hg*, čili $mg-MG=Fe$ neboli $Be-BE$; a tudíž *GH* bude rovno *EF.* Ježto však kolmice *MC*, *mC* jsou rovnoběžné se strunami *EB*, *eB*; bude se úhel *MCm* rovnat úhlu *EBe*. A tedy jelikož oblouky *GH*, *EF*, které tyto úhly měří, jsou si rovny; plyne odtud, že rovnat se budou i jejich poloměry *CG*, *BE*; a že tím pádem je třeba *MC* vzít dvakrát větší *MG* neboli *BE.*

LEMMA.

96. JESTLIŽE *máme nějaké libovolné, ať už konečné, nebo nekonečné množství veličin* a, b, c, d, e *atd. představujících ať už čáry, nebo plochy, anebo tělesa; pak se součet všech jejich rozdílů* a-b+b-c+c-d+d-e *atd. rovná největší z nich* a *minus nejmenší* e, *anebo prostě té největší, pokud je nejmenší rovna nule.* Což je zjevné.[99]

DŮSLEDEK I.

97. Z podobnosti výsečí *CMm*, *CGH* je zřejmé, že *Mm* je dvakrát větší než *GM* nebo jí rovná *EF*; a jelikož toto nastává vždy, ať už položíme bod *M* kamkoli; plyne odtud, že součet všech malých oblouků *Mm*, tj. výseč *AM* polocykloidy *AMD*, je dvakrát větší než součet všech malých oblouků *EF.* Avšak malý oblouk *EF* tvoří část struny *AE* kolmé na *BE* a zároveň rozdíl strun *AE*, *Ae*, poněvadž malou úsečku *eF* kolmou na *AE* lze pokládat za malý oblouk opsaný od středu *A*; a tím pádem součet všech malých oblouků *AE* v oblouku *AZE* bude součtem rozdílů všech malých strun *AE*, *Ae* atd. tohoto oblouku; tj. podle lemmatu bude roven struně *AE*. A je tedy zjevné, že část *AM* polocykloidy *AMD* je dvakrát tak větší než jí odpovídající struna *AE.*

DŮSLEDEK II.

98. PLOCHA *MGgm* (§ 2) neboli lichoběžník

$$MGHm = \overline{\frac{1}{2} Mm + \frac{1}{2} GH} \times MG = \frac{3}{2} EF \times BE \ ,$$

tj. rovná se trojnásobku trojúhelníku *EBF* neboli *EBe*. Odtud plyne, že součet *MGBA* oněch všech lichoběžníků je třikrát větší než část kruhu *BEZA* tvořící součet všech těchto trojúhelníků.

DŮSLEDEK III.

99. JESTLIŽE označíme *BP* jako *z*; oblouk *AZE*, čili *EM* neboli *BG* jako *u*; a poloměr *KA* jako *a*; dostáváme rovnoběžník

$$MGBE = uz \ .$$

Avšak plocha cykloidy

$$MGBA = 3\, BEZA = 3\, EKB + \frac{3}{2} au \ ;$$

a tím pádem plocha *AMEB* ohraničená částí cykloidy *AM*, rovnoběžkou *ME*, strunou *BE* a poloměrem *AB* bude rovna

$$3\, EKB + \frac{3}{2} au - uz \ .$$

Odtud plyne, že když vezmeme $BP(z) = \frac{3}{2} a$, plocha *AMEB* bude třikrát větší než odpovídající trojúhelník *EKB*; a jeho kvadratura tedy bude nezávislá na kvadratuře kruhu. Což jako první zpozoroval p. *Huygens*. Podívejme se ještě na jeden druh plochy se stejnou vlastností.

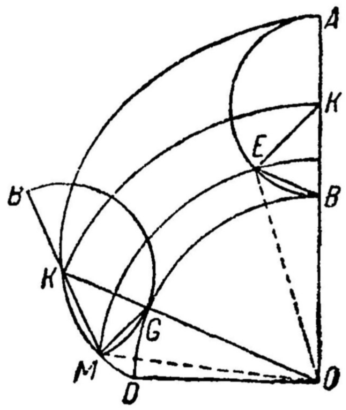
Jestliže od plochy *AMEB* odejmeme úsek *BEZA*; zbude plocha

$$AZEM = 2\, EKB + au - uz \ ;$$

odtud je zjevné, že když bod *P* připadne do středu *K*, plocha *AZEM* bude rovna čtverci poloměru. Zjevně tedy ze všech ploch *AMEB* a *AZEM* pouze tyto dvě právě určené plochy připouštějí úplnou kvadraturu nezávisle na kvadratuře kruhu.[100]

PŘÍKLAD IX.

100. BUDIŽ půlcykloida[101] *AMB* (Obr. 84) opsaná odvalováním půlkruhu *AEB* po nějakém druhém, nehybném kruhu *BGD*; a nyní je třeba na kolmici *MG* o dané poloze určit bod, ve kterém se dotýká evoluty.



Obr. 84

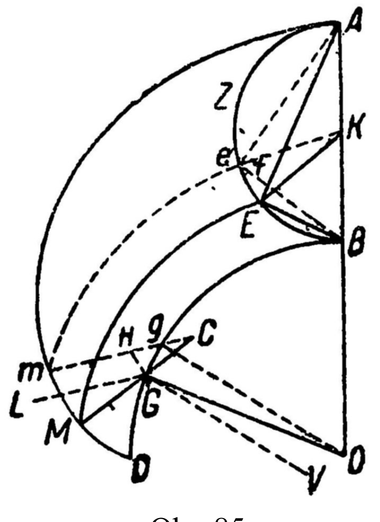
Abychom mohli využít obecných formulí, bylo by třeba jako ordináty křivky *AMB* vzít přímé čáry kolmé na osu *OA* a následně hledat rovnici vyjadřující poměr abscis a ordinát anebo jejich diferenciálů. Poněvadž by se však jednalo o dosti klopotný kalkul, bude v podobných případech mnohem lepší pokusit se o řešení vycházející ze samého způsobu utvoření křivky.

Jakmile půlkruh *AEB* dospěje do polohy *MGB*, kdy se v *G* dotýká základny *BD*, a opisující bod *A* připadne do bodu *M* polocykloidy *AMD*; je zřejmé, že

1°. Oblouk *GM* se rovná oblouku *GD*, jakož i oblouk *GB* pohyblivého kruhu oblouku *GB* kruhu nehybného.

2°. *MG* je (§ 43) kolmá na křivku; ježto totiž poloviční obvod *MGB* neboli *AEB* a základnu *BGD* pokládáme jako seskupení nekonečně mnoha malých přímých čar, kde každé dvě sobě odpovídající jsou si rovny; pak zjevně polocykloida *AMD* bude seskupením nekonečného množství malých oblouků se středy postupně ve všech tečných bodech *G*, kde každý z nich bude opsán jedním a tím samým bodem *M* nebo *A*.

3°. Jestliže ze středu *O* nehybného kruhu opíšeme soustředný oblouk *ME*; pak si oblouky *MG*, *EB* nehybného kruhu budou rovny stejně tak, jako jejich struny *MG*, *EB* a jejich úhly *OGM*, *OBE*. Neboť úsečky *OK*, *OK* spojující středy obou kruhů jsou si rovny, poněvadž procházejí tečnými body *B*, *G*; a proto když vyneseme poloměry *OM*, *OE* a *KE*, vznikají odtud podobné a rovné trojúhelníky *OKM*, *OKE*. Ježto tedy úhel *OKM* se rovná úhlu *OKE*; oblouky *MG*, *BE*, které tyto úhly měří, navzájem rovných půlkruhů *MGB*, *BEA* se budou rovnat, jakož i jejich struny *MG*, *EB*. Odtud plyne, že úhly *OGM*, *OBE* si budou taktéž rovny.



Obr. 85

Nuže uvažujme nyní druhou kolmici *mC* (Obr. 85) nekonečně blízkou prvé, druhý soustředný oblouk *me* a druhou strunu *Be*; a ze středů *C*, *B* opišme malé oblouky *GH*, *EF*. Pravoúhlé trojúhelníky *GHg*, *EFe* budou rovné a podobné; neboť *Gg*, $Dg-DG=Ee$ neboli oblouku *Be* minus oblouku *BE*; a kromě toho *Hg*, čili $mg-MG=Fe$ neboli $Be-BE$. Malý oblouk *GH* se tedy bude rovnat malému oblouku *EF*; odkud plyne, že oblouk *GCH* se má k oblouku *EBF* jako *BE* k *CG*. A celá těžkost se tak omezuje na nalezení poměru těchto úhlů. Což učiníme následovně.

Veďme poloměry *OG*, *Og*, *KE*, *Ke* a označme *OG*, čili *OB* jako *b*; *KE* neboli *KB* neboli *KA* jako *a*; pak zřejmě úhel

$$EBe=OBe-OBE=Ogm-OGM\ ,$$

což se (pokud vedeme *GL*, *GV* rovnoběžné s *Cm*, *Og*) rovná

$$LGM-OGV=GCH-COg\ .$$

Budeme mít tedy úhel

$$GCH=GOg+EBF\ .$$

Ježto však se oblouky *Gg*, *Ee* rovnají, budeme mít též

$$GOg.EKe\text{, čili }2\,EBF::KE(a).OG(b)\ ;$$

a tím pádem úhel

$$GOg=\frac{2a}{b}EBF\ \text{ a }\ GCH=\frac{2a+b}{b}EBF\ .$$

Tudíž

$$GCH.EBF\ \text{ neboli }\ BE.CG::\frac{2a+b}{b}.1\ .$$

A tím pádem neznámá

$$CG=\frac{b}{2a+b}BE\ \text{ neboli } MG.$$

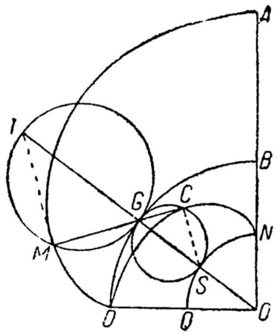
Což dává následující konstrukci.

Vezměme (Obr. 86) $OA(2a+b).OB(b)::MG.GC$; pak bod *C* bude ležet na evolutě.

Je jasné, že 1°. Evoluta začíná v bodě *D* a dotýká se v něm základny *BGD*; neboť oblouk *GM* se v tomto bodě stává nekonečně malým. 2°. Evoluta končí v bodě *N*, takže

$$OA.OB::AB.BN::OA-AB\ \text{ neboli }\ OB.OB-BN\ \text{ neboli } ON;$$

tj. *OA*, *OB*, *ON* jsou spojitě úměrné. 3°. Jestliže nyní ze středu *O* opíšeme kruh *NSQ*; tvrdím, že evoluta *DCN* se utváří odvalováním pohyblivého kruhu *GCS* o poloměru *GS* neboli *BN* kolem nehybného kruhu *NSQ*, tj. bude polocykloidou podobnou dané neboli bude stejného druhu (neboť poloměry *AB*, *BN* pohyblivých kruhů se k sobě mají stejně jako poloměry



Obr. 86

OB, *ON* kruhů nehybných), a sice převrácená tak, že vrchol bude mít v *D*. Pro důkaz předpokládejme, že se poloměry pohyblivých kruhů nacházejí na úsečce *OC* vedené libovolně ze středu *O*; tato pak bude procházet tečnými body *S*, *G*. Nyní když vezmeme *AB* neboli $TG.BN$ neboli $GS::MG.GC$; bod *C* bude ležet na evolutě a kromě toho ještě na kružnici *GCS*; neboť když je úhel *GMT* pravý, úhel *GCS* bude taktéž pravý. Avšak vzhledem k rovnosti úhlů *MGT*, *CGS* se oblouk *TM* neboli *GB* má k oblouku *CS* jako průměr *GT* k průměru $GS::OG.OS::GB.NS$; a tím pádem se oblouky *CS*, *SN* rovnají. Tedy atd.

DŮSLEDEK I.

101. JE jasné (§ 75), že část epicykloidy *DC* je rovna úsečce *CM*; a tím pádem se *DC* má k tečně

$$CG::AB+BN.BN::OB+ON.ON\ ;$$

tj. jako se má součet průměrů dvou pohyblivých kruhů, nebo kruhů pohyblivého a stálého, k poloměru kruhu nehybného. Pravdivost tohoto tvrzení se ukáže též následujícím způsobem. Z podobnosti trojúhelníků *CMm*, *CGH* (Obr. 85) budeme mít

$$Mm.GH\ \text{ neboli }\ EF::MC.GC::OA+OB(2a+2b).OB(b)\ .$$

Odtud plyne (jako v § 97), že část epicykloidy *AM* se má k odpovídající struně *AE* jako součet průměrů tvořícího kruhu a základny k poloměru základny.[102]

DŮSLEDEK II.

102. LICHOBĚŽNÍK $MGHm=\overline{\frac{1}{2}GH+\frac{1}{2}Mm}\times MG$ (Obr. 85). Avšak

$$CG\left(\frac{b}{2a+b}MG\right).CM\left(\frac{2a+2b}{2a+b}MG\right)::GH.Mm=\frac{2a+2b}{b}GH\ .$$

A tedy poněvadž $GH=EF$ a $MG=EB$, budeme mít

$$MGHm=\frac{2a+3b}{2b}EF\times EB\ ,$$

tj. lichoběžník *MGHm* bude vždy vůči odpovídajícímu trojúhelníku $EBF::2a+3b.b$.

Odtud plyne, že plocha *MGBA* ohraničená *MG*, *AB* kolmými na epicykloidu, obloukem *BG* a úsekem epicykloidy *MA* se má k odpovídající kruhové výseči $BEZA::2a+3b.b$.[103]

DŮSLEDEK III.

103. ZJEVNĚ tedy kvadratura kterékoli části cykloidy závisí na kvadratuře kruhu; jestliže však vezmeme *OQ* (Obr. 87) za střední úměrnou mezi *OK*, *OA* a opíšeme o tomto poloměru oblouk *QEM*; pak tvrdím, že plocha *ABEM* ohraničená průměrem *AB*, strunou *BE*, obloukem *EM* a částí

epicykloidy *AM* se má k trojúhelníku $EKB::2a+3b.b$. Pokud totiž označíme oblouk *AE* čili *GB* jako *u*; poloměr *OQ* jako *z*; budeme mít

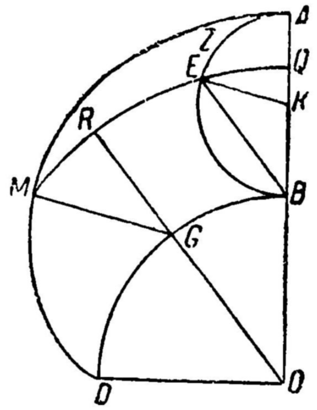
$$OB(b).OQ(z)::GB(u).RQ \text{, čili } ME=\frac{uz}{b}.$$

A tím pádem plocha *RGBQ* čili *MGBE*, tj.

$$\overline{\frac{1}{2}GB+\frac{1}{2}RQ}\times BQ=\frac{zzu-bbu}{2b}.$$

Avšak (§ 102) plocha epicykloidy

$$MGBA=\frac{2a+3b}{b}\times BEZA=\frac{2a+3b}{b}\times EKB+\frac{2a+3b}{b}\times KEZA\left(\frac{au}{2}\right).$$



Obr. 87

Jestliže tedy od této plochy odejmeme plochu předešlou, zůstává

$$ABEM=\frac{2aau+3abu+bbu-zzu}{2b}+\frac{3a+3b}{b}\times EKB=\frac{2a+3b}{b}\times EKB,$$

poněvadž z konstrukce

$$zz=2aa+3ab+bb.$$

Odtud je zjevné, že kvadratura této plochy je na kvadratuře kruhu nezávislá a že touto vlastností se vyznačuje jako jediná ze všech sobě podobných ploch.

Podívejme se ještě na jednu takovou. Jestliže od plochy *ABEM* odebereme výsek $BEZA\left(\frac{1}{2}au+EKB\right)$; zbude pak plocha

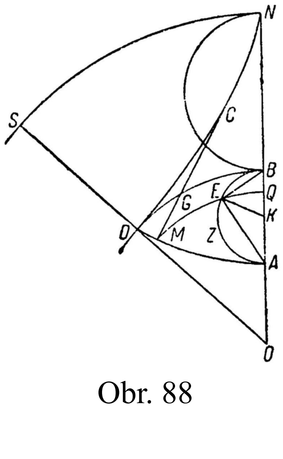
$$AZEM=\frac{2aau+2abu+bbu-zzu}{2b}+\frac{2a+2b}{b}\times EKB=\frac{2a+2b}{b}\times EKB;$$

a když nyní položíme $zz=2aa+2ab+bb$, tj. poloviční obvod v bodě *E* rozdělíme vedví; plocha *EZEM* bude dvakrát větší než trojúhelník *EKB*, tj. ku čtverci poloměru bude $::OK(a+b).OB(b)$.

DŮSLEDEK IV.

104. JESTLIŽE se pohyblivý kruh *AEB* (Obr. 88) odvaluje uvnitř stálého *BGD*, jeho průměr *AB* se z kladného obrací v záporný; a tudíž je třeba změnit znaménka členů, ve kterých vystupuje v liché mocnině. Odtud plyne, že 1°. Pokud dle libosti povedeme na hypocykloidu kolmici *MG* a vezmeme

$$OA(b-2a).OB(b)::MG.GC;$$



Obr. 88

bod *C* bude ležet (§ 100) na evolutě *DCN* opsané odvalováním kruhu o poloměru *BN* po vnitřní straně kružnice *NS* soustředné s *BD*. 2°. Jestliže ze středu *O* opíšeme oblouk *ME*; úsek hypocykloidy *AM* se bude mít (§ 101) vůči struně $AE::2b-2a.b$. 3°. Plocha *MGBA* se má (§ 102) k výseku

$MGBA :: 3b - 2a . b$. 4°. Když vezmeme $OQ = \sqrt{2aa - 3ab + bb}$, tj. střední úměrnou mezi *OK*, *OA*; pak se plocha *ABEM* ohraničená částí hypocykloidy *AM*, obloukem *ME*, strunou *EB* a průměrem *AB* bude mít (§ 103) k trojúhelníku $EKB :: 3b - 2a . b$. Pokud však vezmeme *OQ* čili $OE = \sqrt{2aa - 2ab + bb}$, tj. oblouk *AE* se bude rovnat čtvrtině obvodu; plocha *AZEM* ohraničená částí hypocykloidy *AM* a oblouky *ME*, *AE* bude vůči trojúhelníku *EKB*, který je v tomto případě rovný polovině čtverce poloměru, $:: 2b - 2a . b$.

Důsledek V.

105. Když si představíme, že se poloměr *OB* (Obr. 86, 88) nehybného kruhu stane nekonečným; pak se oblouk *BGD* změní v přímou čáru a křivka *AMD* se stane obecnou cykloidou. Ježto však je v tomto případě průměr *AB* pohyblivého kruhu nulový ve srovnání s průměrem nehybného kruhu; plyne odtud, že 1°. $MG . GC :: b . b$. Jelikož $b \pm 2a = b$, tj. $MG = GC$, a tím pádem když vezmeme $BN = AB$ a povedeme úsečku *NS* rovnoběžnou s *BD*; pak se evoluta *DCN* utvoří odvalováním kruhu o průměru *BN* po základně *NS*. 2°. Část cykloidy *AM* (Obr. 85, 88) se má k odpovídající struně $AE :: 2b . b$. 3°. Plocha *MGBA* se má k výseku $BEZA :: 3b . b$. 4°. Ježto *BQ* (Obr. 87, 88) neboli $\pm OQ \mp OB$, které označuji jako *x*, se rovná $\mp b \pm \sqrt{2aa \mp 3ab + bb}$, tedy (po usměrnění) $xx \pm 2bx = 2aa \pm 3ab$; pak odstraněním členů, ve kterých se nevyskytuje *b*, neboť tyto jsou ve srovnání s ostatními nulové, dostáváme

$$x = \frac{3}{2} a .$$

Tj. když u obecné cykloidy vezmeme $BP = \frac{3}{4} AB$ a povedeme úsečku *PEM* (Obr. 83) rovnoběžnou se základnou *BD*; plocha *AMEB* bude třikrát větší než trojúhelník *EKB*. Stejným postupem pak najdeme, že když bod *P* připadne do středu *K*, plocha *AZEM* ohraničená částí cykloidy *AM*, úsečkou *ME* a obloukem *AE* bude rovna čtverci poloměru. Což bylo dokázáno výše v § 99.

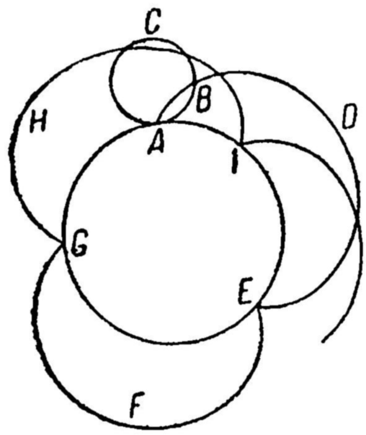
Poznámka.

106. Ježto se oblouky *DG*, *GM* (Obr. 84) navzájem vždy rovnají; plyne odtud, že také úhel *DOG* se bude vždy rovnat úhlu $GKM :: GK . OG$. A tedy pokud jsou dány *D* coby počátek cykloidy *DMA*, poloměry *OG*, *GK* tvořících kruhů a tečný bod *G*; a je třeba určit polohu bodu *M* opisujícího cykloidu; stačí pouze vynést poloměr *KM* tak, aby se úhel *GKM* měl k danému úhlu $DOG :: OG . GK$. Avšak nyní tvrdím, že toto vždy můžeme provést geometricky, pokud je možné poměr těchto poloměrů vyjádřit čísly; a že tudíž cykloida *DMA* pak bude geometrická.

Neboť jestliže položíme například $OG.GK::13.5$; zřejmě úhel MKG musí obsahovat dvakrát daný úhel DOG a k tomu ještě $\frac{3}{5}$ tohoto úhlu. Celou obtíž tak omezíme na rozdělení úhlu DOG do pěti stejných částí. Geometři však vědí, že nějaký daný úhel nebo oblouk můžeme geometricky vždy rozdělit na libovolný počet navzájem rovných částí; neboť vždy dospějeme k rovnici zahrnují toliko přímé čáry. Tedy atd.

Navíc tvrdím, že cykloida *DMA* je mechanická; anebo, což je to samé, že není možné geometricky určit její body *M*, pokud poměr *OG* ku *KG* nelze vyjádřit čísly, tj. když je iracionální.

Totiž (Obr. 89) každá ať už mechanická, nebo geometrická čára se buďto vrací do sebe sama, anebo se rozprostírá do nekonečna; poněvadž v jejím utváření je možné neustále pokračovat. Jestliže tudíž pohyblivý kruh *ABC* během svého prvního obratu opíše bodem *A* cykloidu *ADE*, nebude tato cykloida ještě ukončena; a pokud se kruh povalí dále, opíše druhou *EFG*, pak třetí *GHI* atd, dokud opisující bod *A* po několika obratech opět nepřipadne do bodu, odkud vyšel. A když potom začneme pohyblivý kruh *ABC* znovu odvalovat, opíše opět stejnou křivou čáru tak, že všechny tyto cykloidy společně utvoří toliko jedinou křivku *ADEFGHI* atd. Jelikož však jsou poloměry tvořících kruhů nesouměřitelné; i jejich obvody budou nesouměřitelné; a tím pádem se opisující bod *A* pohyblivého kruhu *ABC* nikdy nebude moci vrátit do výchozího bodu *A* kruhu nehybného, ať už bude počet obratů jakkoli vysoký. Tedy tu bude nekonečno cykloid, které přesto budou tvořit jedinou křivou čáru *ADEFGHI* atd. Jestliže nyní nehybným kruhem povedeme nějakou neomezenou přímku; pak je zřejmé, že křivku taženou do nekonečna protne v nekonečném množství bodů. Ježto však rovnice, která vyjadřuje povahu geometrické čáry, musí mít alespoň tolik rozměrů, kolikrát tuto čáru může v různých bodech protínat nějaká přímka; vyplývá odtud, že by rovnice vyjadřující povahu této křivky měla nekonečno rozměrů. A jelikož toto nastat nemůže, pak je zjevné, že křivka musí být mechanickou neboli transcendentní.[104]

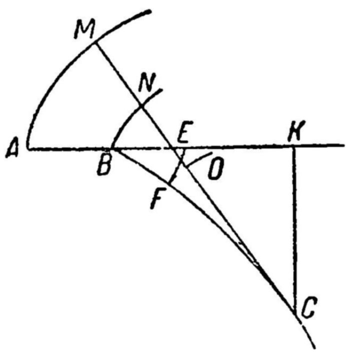


Obr. 89

TVRZENÍ III.

Zadání.

107. JE *dána křivá čára* BFC (Obr. 90)*; a je třeba nalézt nekonečno čar* AM*,* BN*,* EFO*, pro než představuje společnou evolutu.*



Obr. 90

Jestliže počneme bodem *A* odvíjet křivku *BFC*; pak zřejmě veškeré body *A*, *B*, *F* vlákna *ABFC* opíší tímto pohybem křivé čáry *AM*, *BN*, *FO*, které všechny budou mít jako evolutu danou křivku *BFC*. Avšak je třeba mít na zřeteli, že evolutou čáry *FO* je pouze část *FC*, a že tudíž nemá počátek v bodě *F.* K jeho nalezení je zapotřebí počínaje bodem *F* odvinout zbývající část *BF*, abychom opsali úsek *EF* křivky *EFO* s počátkem v bodě *E*, jenž má za evolutu celou křivku *BFC*.

Jestliže chceme najít body *M*, *N*, *O* bez použití vlákna *ABFC*, pak stačí nanést na libovolnou tečnu *CM* odlišnou od *BA* části *CM*, *CN*, *CO* rovné *ABFC*, *BFC*, *FC*.

DŮSLEDEK.

108. JE zjevné, že

1°. Křivky *AM*, *BN*, *EFO* se co do své povahy navzájem velice liší; neboť křivka *AM* má ve svém vrcholu *A* poloměr evoluty rovný *AB*, kdežto u křivky *BN* je nulový. Je také vidět, že samotná podoba křivky *EFO* je velice odlišná od křivek *AM*, *BN*.

2°. Křivky *AM*, *BN*, *EFO* jsou geometrické jedině, když daná *BFC* je geometrická a nadto rektifikovatelná. Neboť jestliže nebude geometrická; pak když *BK* vezmeme za abscisu, nenajdeme geometricky ordinátu *KC*. A jestliže nebude rektifikovatelná; pak po vynesení tečny *CM* nebude možné geometricky určit body *M*, *N*, *O* křivek *AM*, *BN*, *EFO*; neboť geometricky nelze najít přímé čáry, jež by se rovnaly křivce *BFC* a jejím částem *BF*, *FC*.[105]

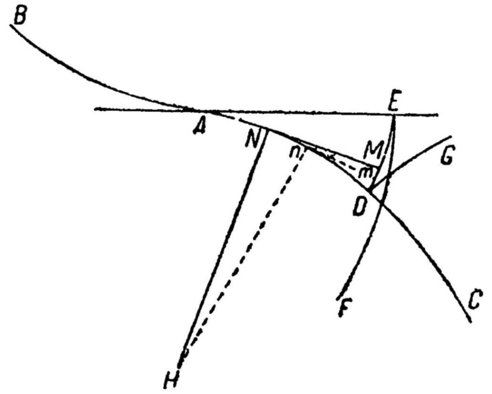
POZNÁMKA.

109. JESTLIŽE křivkou čáru *BAC* (Obr. 91) s inflexním bodem v *A* počneme odvíjet od bodu *A* různého od inflexního bodu; odvinutím části *BAD* se utvoří část *DEF*; a odvinutím části *DC* zbývající část *DG* tak, že *FEDG* bude celková křivka vzniklá odvinutím *BAC*. Avšak je zjevné, že tato křivka svou cestu navrací v bodech *D* a *E* s tím rozdílem, že v bodě vratu *D* jsou části *DE*, *DG* navzájem opačně vypouklé, zatímco v bodě *E* jsou části *DE*, *EF* vyduté na stejnou stranu. V

minulém oddílu jsme si ukázali jak najít body vratu takové jako D: nyní se jedná o to, určit body E, které můžeme nazvat body vratu druhého druhu, jimiž se, pokud vím, ještě nikdo nezabýval.

Abychom tohoto docílili, vyneseme na část DE libovolné dvě kolmice MN, mn ohraničené evolutou v bodech N, n; jimi povedeme další dvě NH, nH kolmé na prvé NM, nm; což dává vzniknout dvěma malým výsečím MNm, NHn, jež budou podobné, neboť úhly MNm, NHn jsou si rovny. Budeme tedy mít

$$Nn.Mm :: NH.NM\ .$$



Obr. 91

Avšak v inflexním bodě A se poloměr NH stává (§ 81) nekonečným nebo nulovým, zatímco poloměr MN, který se promění v AE, zůstává konečnou veličinou. Poměr diferenciálu Nn poloměru MN evoluty a diferenciálu Mm křivky tím pádem musí v bodě vratu druhého druhu nastat buďto nekonečně velký, anebo nekonečně malý. A ježto tedy (§ 86)

$$Nn=\frac{-3\,dx\,dy\,ddy^2\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dx\,dddy\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2\,ddy^2}\ \text{ a }\ Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}\,,$$

budeme mít

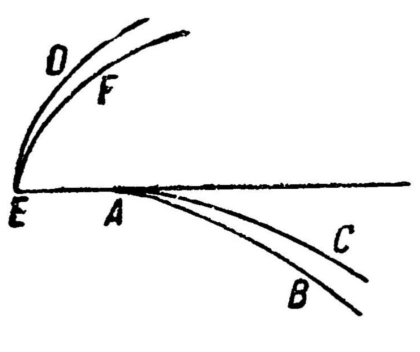
$$\frac{dx^2\,dddy+dy^2\,dddy-3\,dy\,ddy^2}{dx\,ddy^2}=0,\text{nebo}\,\infty\ ;$$

a když toto vynásobíme $dx\,ddy^2$, nacházíme formuli

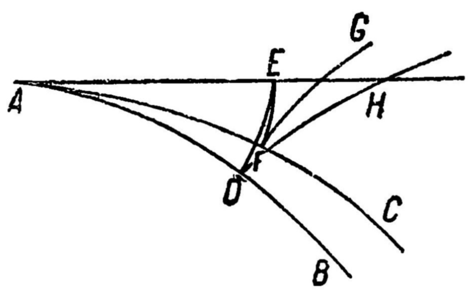
$$dx^2\,dddy+dy^2\,dddy-3\,dy\,ddy^2=0,\text{nebo}\,\infty\ ,$$

pomocí které určíme body vratu druhého druhu.

Můžeme také uvažovat, že křivka s bodem vratu druhého druhu DEF nebo $HDEFG$ (Obr. 92, 93)



Obr. 92



Obr. 93

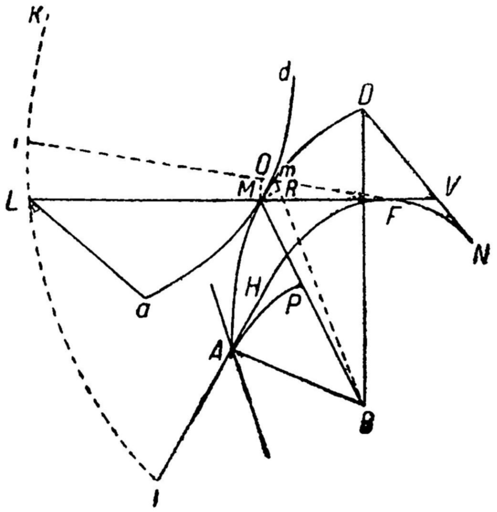
bude mít coby evolutu jinou křivku s bodem vratu druhého druhu BAC takovou, že její bod vratu A bude odpovídat bodu vratu E, tj. bude se nacházet na poloměru evoluty vycházejícím z bodu E.

Avšak je zřejmé, že za tohoto předpokladu bude poloměr *EA* evoluty vždy *nejmenším* anebo *největším*; a tím pádem diferenciál obecného výrazu (§ 78) poloměrů evoluty $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$ musí být v hledaném bodě *E* nulový, nebo nekonečný; což dává stejnou formuli jako výše. Tedy se jedná o obecnou formuli k nalezení bodů vratu druhého druhu.[106]

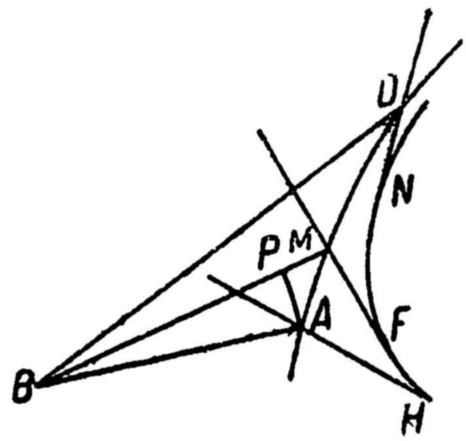
ODDÍL ŠESTÝ.
Použití diferenciálního počtu k nacházení kaustik odrazem.

DEFINICE.

Předpokládejme, že nekonečné množství paprsků *BA*, *BM*, *BD* (Obr. 94, 95), jež vycházejí ze světelného bodu *B*, se odráží od křivé čáry *AMD* tak, že úhly odrazu jsou rovny úhlům dopadu; čáru *HFN*, které se paprsky či jejich prodloužení *AH*, *MF*, *DN* dotýkají, pak nazveme *kaustikou odrazem*.[107]



Obr. 94



Obr. 95

DŮSLEDEK I.

110. JESTLIŽE prodloužíme *HA* do *I* tak, aby $AI = AB$ (Obr. 94), a bodem *I* počneme odvíjet kaustiku *HFN*; pak vzniká křivka *ILK* taková, že tečna *FL* bude (§ 75) neustále rovna části *FH* kaustiky plus úsečka *HI*. A jestliže vezmeme dva paprsky, dopadající *Bm* a odražený *mF*, nekonečně blízké *BM*, *MF*; prodloužíme *Fm* do *l* a následně opíšeme ze středů *F*, *B* malé oblouky *MO*, *MR*; utvoří se malé pravoúhlé trojúhelníky *Mom*, *MRm*, jež budou rovné a podobné; jelikož totiž mají společnou přeponu *Mm* a k tomu úhel $OmM = FmD = RmM$, malé strany[108] *Om*, *Rm* si budou navzájem rovny. Ježto však *Om* je diferenciál *LM* a *Rm* diferenciál *BM* a je tomu tak vždy, ať už bod *M* vezmeme kdekoli; plyne odtud, že $ML - IA$ neboli $AH + HF - MF$, tj. (§ 75) suma všech diferenciálů *Om* úseku křivky *AM* je rovna

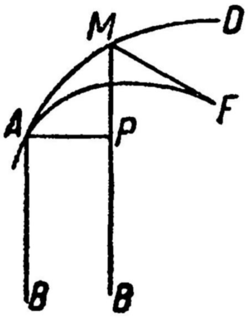
$$BM - BA\,,$$

tj. (§ 96) sumě všech diferenciálů *Rm* toho samého úseku *AM*. Tedy část *HF* kaustiky *HFN* bude rovna

$$BM - BA + MF - AH\ .$$[109]

Rozličné případy mohou nastat podle toho, zdali bude dopadající paprsek *BA* větší, či menší než *BM*; a podle toho, zdali odražený *AH* bude během přechodu do *MF* úsek *HF* odvíjet, anebo obalovat. Avšak vždy bude možné, tak jako nyní, dokázat, že rozdíl dopadajících paprsků se rovná rozdílu paprsků odražených, když k jednomu z nich přidáme úsek kaustiky, kterou odvvíjí před tím, než splyne s druhým. Například (Obr. 95) $BM - BA = MF + FH - AH$; odkud pak dostáváme

$$FH = BM - BA + AH - MF\ .$$



Obr. 96

Jestliže ze středu *B* opíšeme kruhový oblouk *AP* (Obr. 94, 95); pak zřejmě *PM* bude rozdílem dopadajících paprsků *BM*, *BA*. A za předpokladu, že světelný bod *B* se nekonečně vzdálí od křivky *AMD* (Obr. 96); dopadající paprsky *BA*, *BM* se stanou rovnoběžnými a oblouk *AP* se promění v přímou čáru kolmou na tyto paprsky.

DŮSLEDEK II.

111. JESTLIŽE si představíme, že se obrazec *BAMD* (Obr. 94) převrátí v té samé rovině tak, že bod *B* připadne do bodu *I*; a že tečna v *A* ke křivce *AMD* v původní poloze se jí bude dotýkat i v této poloze nové; a nechme dále křivku *aMd* odvalovat po *AMD*, tj. po sobě samé tak, aby úsek *aM*, zůstával rovným úseku *AM*: pak tvrdím, že bod *B* tímto pohybem opíše jistý druh cykloidy *ILK*, jejíž evolutou bude kaustika *HFN*.

Neboť ze samého způsobu utvoření křivky vyplývá, že 1°. Čára *LM* vedená z opisujícího bodu *L* do tečného bodu *M* bude (§ 43) kolmá ke křivce *ILK*. 2°. *La* neboli $IA = BA$ a $LM = BM$. 3°. Úhly sevřené úsečkami *ML*, *BM* s jejich společnou tečnou v *M* jsou si rovny; a tím pádem když *LM* prodloužíme do *F*, paprsek *MF* bude odraženým paprskem dopadajícího *BM*. Odtud je zjevné, že kolmice *LF* se dotýká kaustiky *HFN*: a poněvadž k tomu dochází vždy, ať už bod *L* vezmeme kdekoli; vyplývá odtud, že křivka *ILK* vzniká odvíjením kaustiky *HFN* plus úsečka *HI*.

Z toho plyne, že úsek *FH* neboli $FL - HI = BM + MF - BA - AH$. Což také bylo jiným způsobem dokázáno v důsledku předchozím.

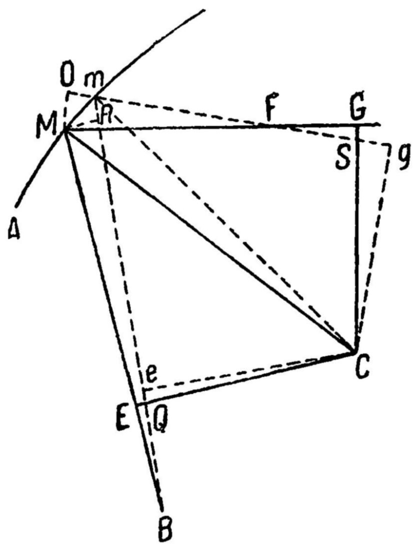
DŮSLEDEK III.

112. JESTLIŽE se tečna *DN* nekonečně přiblíží tečně *FM*; pak zřejmě tečný bod *N* a průsečík *V* splynou s druhým tečným bodem *F* tak, že pro nalezení bodu *F*, ve kterém se odražený paprsek *MF* dotýká kaustiky *HFN*, postačí najít průsečík nekonečně blízkých odražených paprsků *MF*, *mF*. A skutečně pokud si představíme, že nekonečné množství paprsků dopadají nekonečně blízko jeden vedle druhého; skrze průniky odražených paprsků se nám vyjeví mnohoúhelník o nekonečnu stran, z jejichž seskupení se skládá kaustika *HFN*.

TVRZENÍ I.

Obecné zadání.

113. JSOU *dány povaha křivky* AMD (Obr. 97)*, světelný bod* B *a dopadající paprsek* BM*; a nyní je třeba najít na odraženém* MF*, jehož poloha je dána, bod* F*, ve kterém se dotýká kaustiky.*



Obr. 97

Jakmile podle předchozího oddílu najdeme délku *MC* poloměru evoluty v bodě *M* a vezmeme nekonečně malý oblouk *Mm*; vyneseme úsečky *Bm*, *Cm*, *Fm*, ze středů *B*, *F* opíšeme malé oblouky *MR*, *MO* a povedeme kolmice *CE*, Ce, *CG*, *Cg* na dopadající a odražené paprsky; nyní označme dané *BM* jako *y*; *ME* neboli *MG* jako *a*.

Nuže podle předchozího důsledku (§ 110) dokážeme, že trojúhelníky *MRm*, *MOm* jsou podobné a rovné; a tedy že $MR = MO$. Avšak z rovnosti úhlů dopadu a odrazu, máme též

$$CE = CG \text{ , } Ce = Cg \text{ ;}$$

a tím pádem

$$CE - Ce \text{ neboli } EQ = CG - Cg \text{ neboli } SG.$$

Tedy z podobnosti trojúhelníků *BMR* a *BEQ*, *FMO* a *FGS*, dostáváme

$$BM + BE(2y-a).BM(y)::MR+EQ \text{ neboli } MO+GS.MR \text{ neboli } MO::MG(a).MF=\frac{ay}{2y-a}.$$

Kdyby světelný bod *B* připadal vzhledem bodu *M* na opačnou stranu bodu *E*; nebo (což je totéž) kdyby křivka *AMD* byla vůči světelnému bodu *B* vypouklá; pak by se *y* z kladné obrátila v zápornou, a tím pádem bychom měli

$$MF = \frac{-ay}{-2y-a} \text{ neboli } \frac{ay}{2y+a}.$$ [110]

Jestliže předpokládáme, že y se stane nekonečným, tj. bod B se nekonečně vzdálí od křivky AMD; dopadající paprsky budou navzájem rovnoběžné a budeme mít

$$MF=\frac{1}{2}a\ ,$$

neboť a bude ve srovnání s $2y$ nulovým.

DŮSLEDEK I.

114. JEŽTO pro MF (Obr. 94, 95) nacházíme pouze jednu jedinou hodnotu, do níž vstupuje poloměr evoluty; plyne odtud, že křivá čára AMD může mít jen jednu kaustiku odrazem HNF, poněvadž (§ 80) má pouze jednu jedinou evolutu.

DŮSLEDEK II.

115. POKUD je AMD geometrická (Obr. 97); pak zřejmě (§ 85) i její evoluta je geometrická, tj. veškeré body C nalezneme geometricky. Odtud plyne, že veškeré body F její kaustiky se rovněž určí geometricky, tj. že i kaustika HFN (Obr. 94, 95) bude geometrická. Nadto však tvrdím, že tato kaustika bude vždy rektifikovatelná; poněvadž je patrné (§ 110), že za pomoci křivky AMD, kterou máme za geometrickou, lze nalézt přímé čáry rovné libovolnému úseku této kaustiky.

DŮSLEDEK III.

116. JESTLIŽE křivka AMD (Obr. 97) je vypouklá směrem ke světelnému bodu B; pak hodnota $MF(\frac{ay}{2y+a})$ bude vždy kladná; a tedy bude zapotřebí vzít bod F na té samé straně bodu M, kde se nachází bod C, jak jsme také předpokládali během výpočtu. A je tak zřejmé, že nekonečně blízké odražené paprsky se budou rozbíhat.

Avšak jestliže je křivka AMD vůči světelnému bodu B vydutá; hodnota $MF(\frac{ay}{2y-a})$ bude kladná, když y bude větší než $\frac{1}{2}a$; záporná, když bude menší; a nekonečná, když mu bude rovno. Odtud plyne, že když opíšeme kruh o poloměru rovném polovině průměru MC evoluty, nekonečně blízké odražené paprsky se budou sbíhat, pokud světelný B bod připadne vně obvodu kruhu; rozbíhat, když připadne dovnitř; a konečně budou rovnoběžné, pokud připadne na obvod kruhu.

DŮSLEDEK IV.

117. JESTLIŽE se dopadající paprsek *BM* dotýká křivky *AMD* v bodě *M*, dostáváme

$$ME(a)=0\ ;$$

a tím pádem

$$MF=0\ .$$

Poněvadž však v tomto případě míří odražený a dopadající paprsek stejným směrem; a povaha kaustiky je taková, že se dotýká všech odražených paprsků; plyne odtud, že dotýkat se bude též dopadajícího paprsku *BM* v bodě *M*, tj. že kaustika a daná křivka budou mít jednu a tu samou tečnu v bodě *M*, který bude jejich společný.

Jestliže je poloměr *MC* evoluty nulový, opět dostáváme $ME(a)=0$; a tím pádem $MF=0$. Odtud je zřejmé, že kaustika s danou křivkou svírají ve společném bodě *M* úhel, který je roven úhlu dopadu.

Je-li poloměr *CM* evoluty nekonečný; malý oblouk *Mm* se stane přímou čarou a budeme mít

$$MF=\pm y\ ;$$

neboť když $ME(a)$ bude nekonečně velké, bude y ve srovnání bude s a nulové. Ježto však je tato hodnota záporná, když bod *B* připadá vzhledem k čáře *AMD* na stejnou stranu jako bod *C*; a kladná, pokud připadá na stranu opačnou; pak odtud plyne, že pokud je čára *AMD* přímá, nekonečně blízké odražené paprsky se vždy budou rozbíhat.

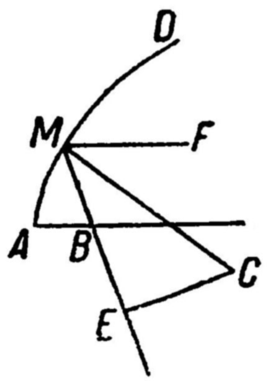
DŮSLEDEK V.

118. JE zjevné, že pokud jsou dány libovolné dva ze tří bodů *B*, *C*, *F*, snadno nalezneme třetí.

Nechť, 1°, křivka *AMD* (Obr. 98) je parabolou s ohniskem ve světelném bodě *B*. Ze základních poznatků o kuželosečkách je jasné, že všechny odražené paprsky budou rovnoběžné s osou; a že tím pádem *MF* bude vždy nekonečné, ať už bod *M* položíme kamkoli. Budeme tedy mít

$$a=2y\ ;$$

odtud plyne, že pokud vezmeme *ME* rovnou dvojnásobku *MB* a vztyčíme kolmici *EC*; pak tato protne *MC* kolmou na křivku *AMB* v bodě *C* ležícím na evolutě této křivky.



Obr. 98

Nechť, 2°, křivka *AMD* (Obr. 99) je elipsou, která má jedno ze svých ohnisek ve světelném bodě *B*. Opět je jasné, že veškeré odražené paprsky *MF* se střetnou v jednom a tom samém bodě *F*, který připadne do druhého ohniska. A pokud si *MF* označíme jako z; pak (§ 113) dostaneme

$$z = \frac{ay}{2y - a};$$

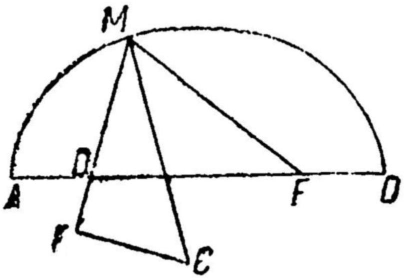
odkud získáme hledanou

$$ME(a) = \frac{-2yz}{y+z}.$$

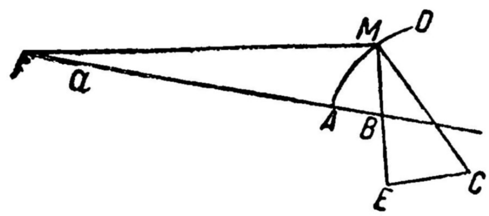
Pakliže křivka *AMD* (Obr. 110) je hyperbolou; ohnisko *F* připadne na druhou stranu; a tím pádem se $MF(z)$ stane záporným, a pak tedy budeme mít

$$ME(a) = \frac{-2yz}{y-z} \text{ neboli } \frac{2yz}{z-y}.$$

Což dává následující konstrukci, jež platí i pro elipsu.



Obr. 99



Obr. 100

Vezměme *ME* (Obr. 99, 100) čtvrtou úměrnou k polovině hlavní osy,[111] dopadajícímu a odraženému paprsku; a veďme kolmici *EC*. Tato pak protne čáru *MC* kolmou na kuželosečku v bodě *C* ležícím na evolutě.

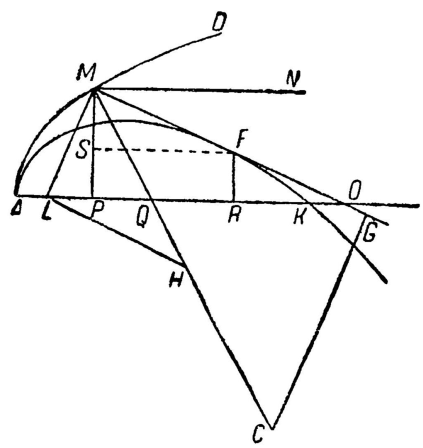
PŘÍKLAD I.

119. NECHŤ křivka *AMD* (Obr. 101) je parabolou; a paprsky *PM* na ni dopadající jsou kolmé na její osu *AP*. Nyní je třeba na odražených paprscích *FM* najít body *F*, ve kterých se paprsky dotýkají kaustiky *AFK*.[112]

Zřejmě když vyneseme poloměr *MC* evoluty a povedeme *CG* kolmou na odražený paprsek *MF*; bude třeba (§ 113) vzít *MF* rovnou polovině *MG*. Tuto konstrukci lze nicméně zkrátit, pokud se uváží, že když povedeme *MN* rovnoběžnou s osou *AP* a úsečku *ML* do ohniska *L*; úhly *LMP*, *FMN* si budou rovny, ježto z povahy paraboly

$$LMQ = QMN$$

a podle předpokladu



Obr. 101

$$PMQ = QMF \ .$$

Jestliže tedy z jedné i druhé strany připojíme stejný úhel *PMF*, úhel *LMF* se bude rovnat úhlu *PMN*, tj. bude pravý. Avšak právě jsme dokázali (§ 118), že *LH* kolmá na *ML* protíná poloměr *MC* evoluty v jeho středu *H.* A jestliže tedy povedeme *MF* rovnou a rovnoběžnou s *LH*; pak *MF* bude jedním z odražených paprsků a kaustiky *AFK* se bude dotýkat v bodě *F.* Což také bylo třeba najít.

Jestliže předpokládáme, že odražený paprsek *MF* je rovnoběžný s osou *AP*; zřejmě bod *F* kaustiky bude od osy *AP* co možná nejvzdálenější, neboť v tomto bodě bude tečna rovnoběžná s osou. Abychom tedy tento bod určili u všech kaustik takových jako *AFK*, které jsou utvořeny paprsky dopadajícími kolmo na osu dané křivky; stačí uvážit, že *MP* se musí rovnat *PQ*. Což dává

$$dy = dx \ .$$

Nechť $ax = yy$, budeme mít

$$dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}} = dx \ ,$$

odtud pak

$$AP(x) = \frac{1}{4}a \ ,$$

tj. jestliže bod *P* připadne do ohniska *L*, odražený paprsek *MF* bude rovnoběžný s osou. Což je ostatně zjevné; neboť v tomto případě *MP* splývá s *LM*, a je tedy třeba, aby též *MN* a *LH* splývala s *LQ*. Odtud je zřejmé, že tehdy je *MF* rovno *ML*; a tudíž jestliže vedeme *FR* kolmou na osu, dostáváme

$$AR \text{ neboli } AL + MF = \frac{3}{4}a \ .$$

A je také zřejmé, že část *AF* kaustiky je v tomto případě rovna parametru, neboť je vždy (§ 110) rovna

$$PM + MF \ .$$

Pokud máme určit bod *K*, ve kterém kaustika *AFK* protíná osu *AP*; pak je třeba hledat hodnotu *MO* a následně ji položit rovnou *MF*; neboť zřejmě když bod *F* připadne do *K*, čáry *MF*, *MO* se stanou navzájem rovnými. Jestliže tedy neznámou *MO* označíme jako *t*; pak úhel *PMO* rozdělený na dvě poloviny kolmicí *MQ* na křivku, dává

$$MP(y) . MO(t) :: PQ\left(\frac{y\,dy}{dx}\right) . OQ = \frac{t\,dy}{dx} \ .$$

A tudíž

$$OP = \frac{t\,dy + y\,dy}{dx} = \sqrt{tt - yy} \ ;$$

a sice na základě pravoúhlého trojúhelníku *MPO*. Jestliže nyní obě strany vydělíme $t+y$, nacházíme

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{t-y}}{\sqrt{t+y}},$$

odkud pak

$$MO(t)=\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2-dy^2}=MF\left(\frac{1}{2}a\right)=\frac{dx^2+dy^2}{-2\,ddy},$$

poněvadž (§ 77)

$$ME(a)=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}.$$

Což dává rovnici

$$dy^2-2\,y\,ddy=dx^2,$$

s jejíž pomocí nalezneme bod *P* takový, že když pak povedeme dopadající paprsek *PM* a odražený *MF*; tento se bude dotýkat kaustiky *AFK* v bodě *K*, v kterém kaustika protíná osu *AP*.

Pro parabolu $y=x^{\frac{1}{2}}$ máme

$$dy=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\,,\ ddy=-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}dx^2\,;$$

a dosazením těchto hodnot do předcházející rovnice nacházíme

$$\frac{1}{4}x^{-1}dx^2+\frac{1}{2}x^{-1}dx^2=dx^2\,;$$

odkud pak

$$AP(x)=\frac{3}{4}\ \text{parametru.}$$

Pokud jde o to, určit povahu kaustiky *AFK* na způsob Descartův; pak je třeba hledat rovnici vyjadřující poměr abscisy $AR(u)$ k ordinátě $RF(z)$; což učiníme následovně. Ježto

$$MO(t)=\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2-dy^2},$$

dostáváme

$$PO\left(\frac{t\,dy+y\,dy}{dx}\right)=\frac{2\,y\,dx\,dy}{dx^2-dy^2}\,;$$

a z podobnosti trojúhelníků *MPO*, *MSF* utvoříme následující úměry

$$MO\left(\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2+dy^2}\right).\,MF\left(\frac{dx^2+dy^2}{-2\,ddy}\right)\ \text{neboli}$$

$$\text{neboli}\ -2\,y\,ddy\,.\,dx^2-dy^2::MP(y).\,MS(y-z)=\frac{dx^2-dy^2}{-2\,ddy}::PO\left(\frac{2\,y\,dx\,dy}{dx^2-dy^2}\right).\,SF\ \text{neboli}$$

$$\text{neboli } PR(u-x)=\frac{dx\,dy}{-ddy}.$$

Tedy budeme mít tyto dvě rovnice

$$z=y+\frac{dy^2-dx^2}{-2\,ddy} \text{ a } u=x+\frac{dx\,dy}{-ddy},$$

jež spolu s rovnicí dané křivky poslouží k sestavení nové rovnice, ve které nadále x a y nebudou vystupovat, a která tím pádem bude vyjadřovat poměr $AR(u)$ ku $FR(z)$.

Jestliže křivka *AMD* je parabolou, jak jsme předpokládali v tomto příkladě, dostaneme

$$z=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}},$$

čili (když obě strany umocníme na kvadrát)

$$\frac{9}{4}x-6xx+4x^3=zz \text{ a } u=3x;$$

odkud získáváme hledanou rovnici

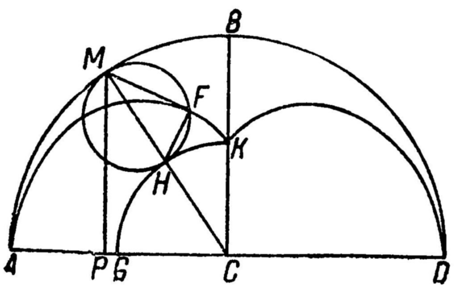
$$azz=\frac{4}{27}u^3-\frac{2}{3}auu+\frac{3}{4}aau,$$

která vyjadřuje povahu kaustiky *AFK*. Lze poznamenat, že *PR* je vždy rovno dvojnásobku *AP*, neboť $AR(u)=3x$; což nabízí ještě další způsob, jak na odraženém paprsku *MF* určit hledaný bod *F*.

PŘÍKLAD II.

120. NECHŤ křivka *AMD* (Obr. 102) je půlkruhem se středem v bodě *C*, jehož průměrem je úsečka *AD*; a dopadající paprsky *PM* jsou kolmé na *AD*.

Poněvadž se evoluta kruhu smršťuje v jediný bod, tj. střed kruhu; plyne odtud (§ 113), že když poloměr *CM* rozdělíme v bodě *H* na dvě poloviny; a povedeme *HF* kolmou na odražený paprsek *MF*; pak *HF* tento paprsek protne v bodě *F*, ve kterém se dotýká kaustiky *AFK*. Zřejmě se odražený paprsek *MF* rovná polovině dopadajícího *PM*; odtud plyne, že 1°. Pokud bod *P* připadá do *C*, bod *F* připadá do bodu *K* neboli středu *CB*. 2°. Úsek *AF* je roven trojnásobku *MF* a kaustika *AFK* trojnásobku *BK*.



Obr. 102

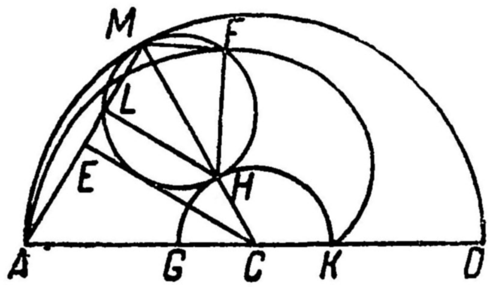
Taktéž je zjevné, že když úhel *ACM* položíme rovný polovině úhlu pravého, odražený paprsek bude rovnoběžný s *AC*; a tím pádem že bod *F* bude nad průměrem *AD* položený výše než jakýkoli jiný bod kaustiky *AFK*.

Kruh o průměru *MH* prochází bodem *F*; neboť úhel *HFM* je pravý. A jestliže ze středu *C* o poloměru *CK* neboli *CH* rovném polovině *CM* opíšeme kruh *KHG*; oblouk *HF* se bude rovnat oblouku HK; neboť pokud je úhel CMF roven CMP neboli HCK, pak oblouky $\frac{1}{2}HF$, HK, jež tyto úhly v měří kruzích MFH, KHG, se k sobě budou mít jako poloměry $\frac{1}{2}MH$, HC těchto kruhů. Odkud je zjevné, že kaustika AFK je epicykloidou, jež vzniká odvalováním pohyblivého kruhu MFH po nehybném kruhu KHG a která má počátek v K a vrchol v A.[113]

PŘÍKLAD III.

121. NECHŤ křivka AMD (Obr. 103) je kruhem o středu v C, jehož průměrem je úsečka AD; a nechť světelný bod A, z nějž vycházejí veškeré dopadající paprsky AM, je jednou z krajností tohoto průměru.

Jestliže ze středu C na dopadající paprsek AM spustíme kolmici CE; pak zřejmě z povahy kruhu bod E rozdělí strunu AM na dvě stejné poloviny; takže $ME(a)=\frac{1}{2}y$. Dostáváme tedy



Obr. 103

$$MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right)=\frac{1}{3}y\,,$$

tj. odražený paprsek MF je třeba vzít rovný třetině dopadajícího AM. Odtud je zřejmé, že

$$DK=\frac{1}{3}AD\,,\ \ CK=\frac{1}{3}CD\,;$$

a že (§ 110) kaustika

$$AFK=\frac{4}{3}AD\,,$$

stejně tak jako její úsek

$$AF=\frac{4}{3}AM\,.$$

Jestliže nyní vezmeme $AM = AC$; odražený paprsek MF bude rovnoběžný s průměrem AD; a tím pádem bod F bude co možná nejvyšším bodem kaustiky nad tímto průměrem.

Jestliže vezmeme $CH = \frac{1}{3} CM$ a povedeme HF kolmou na MF; bod F bude ležet na kaustice; neboť jestliže vedeme HF kolmou na AM, zřejmě

$$ML = \frac{2}{3} ME = \frac{1}{3} AM ,$$

ježto

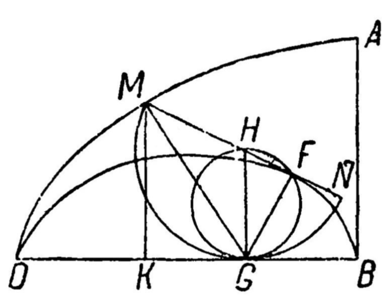
$$MH = \frac{2}{3} CM .$$

Kruh o průměru MH tedy bude procházet bodem F kaustiky; a když pak o středu C a poloměru CK neboli CH opíšeme druhý kruh KHG, oba kruhy si budou rovny a oblouk HK se bude rovnat oblouku HF. Neboť v rovnoramenném trojúhelníku CMA vnější úhel $KCH = 2CMA = AMF$; a tím pádem oblouky HK, HF, tj. míry úhlů v kruzích, jež jsou si rovny, si budou též rovny. Odtud plyne, že kaustika AFK opět bude epicykloidou s počátkem v K a vrcholem v A, která se opíše odvalováním pohyblivého kruhu MFH po nehybném KHG.

To samé bychom mohli dokázat i jinak. Jestliže opíšeme epicykloidu takovou, že počínaje bodem A budeme po kruhu AMD odvalovat kruh jemu rovný; pak v důsledku II (§ 111) jsme dokázali, že jeho evolutou bude kaustika AFK. Avšak (§ 100) tato evoluta představuje epicykloidu stejného druhu, tj. průměry jejich tvořících kruhů se budou rovnat; a bod K určíme, když vezmeme CK za třetí úměrnou k $CD + DA$ a CD, tj. rovnou $\frac{1}{3} CD$. Tudíž atd.[114]

PŘÍKLAD IV.

121. NECHŤ křivka AMD (Obr. 104) je běžnou polocykloidou s vrcholem v A a počátkem v D, která je opsána odvalováním půlkruhu NGM po úsečce BD; a nechť dopadající paprsky KM jsou rovnoběžné s osou AB.



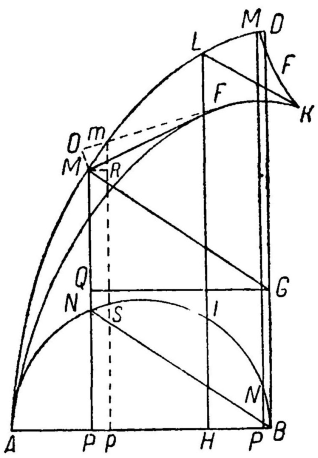
Obr. 104

Ježto MG je rovno (§ 95) polovině poloměru evoluty, plyne odtud (§ 113), že když povedeme GF kolmou na odražený paprsek MF; bod F bude ležet na kaustice DFB. Odtud je zřejmé, že MF je třeba vzít rovnou KM.

Jestliže ze středu H tvořícího kruhu MGN povedeme do tečného bodu G a opisujícího bodu M paprsky HG, HM; pak zřejmě HG bude kolmá na BD a úhel $GHM = MGM = GMK$; odkud je zjevné, že odražený paprsek MF prochází středem H. Avšak kruh, jehož poloměrem je GH, prochází též bodem F; neboť uhel GFH je pravý. Tedy oblouky GN, $\frac{1}{2}GF$, které měří ten samý úhel GHN, se k sobě budou mít jako průměry MN, GH jejich kruhů; a tím pádem oblouk $GF=GN=GB$. A je tedy patrné, že kaustika DFB je epicykloidou opsanou úplným obratem kruhu GFH odvalovaným po úsečce BD.[115]

PŘÍKLAD V.

123. NECHŤ křivka AMD (Obr. 105) opět je obecnou polocykloidou, jejíž základna BD se rovná polovičnímu obvodu ANB tvořícího kruhu. A nechť dopadající paprsky jsou tentokrát rovnoběžné se základnou BD.



Obr. 105

Jestliže povedeme GQ kolmou na PM; pak pravoúhlé trojúhelníky GQM, BPN budou rovné a podobné; a tím pádem $MQ=PN$. Odtud je zřejmé (§ 95, 113), že MF je třeba vzít rovnou odpovídající ordinátě PN tvořícího kruhu ANB.

Aby bod F byl co možná nejvzdálenější od osy AB; je zapotřebí aby tečna MF byla v tomto bodě s osou rovnoběžná. Úhel PMF pak bude pravý, a jeho polovina PMG neboli PNB polovinou pravého úhlu; a bod P tím pádem připadne do středu kruhu ANB.

Stojí za zmínku, že pokud se bod P soustavně přibližuje krajnosti B, pak také bod F se přibližuje ose AB; a to až po určitý bod K, načež se od ní začne vzdalovat do D tak, že kaustika $AFKFD$ má bod vratu v K.

Pokud se jedná o to, jej určit, pak je třeba poznamenat (§ 110, 111), že úsek $AF=PM+MF$, úsek $AFK=HL+LK$ a úsek KF části KFD je roven

$$HL+LK-PM-MF\ ,$$

odkud je zřejmé, že $HL+LK$ musí být *největší*. A jestliže si tedy AH označíme jako x; HI jako y; oblouk AI jako u; budeme mít

$$HL+LK=u+2y\ ,$$

odkud diferenciál činí

$$du+2dy=0 \text{ a } \frac{a\,dy}{y}+2dy=0\ ,$$

když za du dosadíme jeho hodnotu $\frac{a\,dx}{y}$. Odtud z povahy kruhu dostáváme

$$a\,dx=-2y\,dy=2x\,dx-2a\,dx\ ;$$

a tím pádem

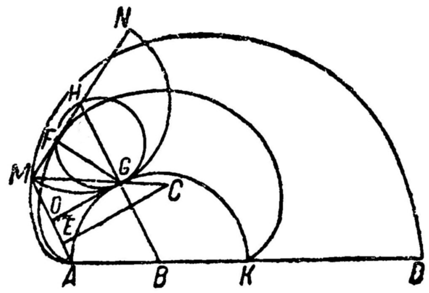
$$AH(x) = \frac{3}{2} a \text{ .}$$[116]

DŮSLEDEK.

124. PLOCHA *AFM* neboli *AFKFM* ohraničená úseky křivek *AF* neboli *AFKF*, *AM* a odraženým paprskem *MF* je rovna polovině kruhové plochy *APN*. Neboť její diferenciál, tj. výsek *FMO*, je roven polovině pravoúhelníku *PpSN*, tj. diferenciálu plochy *APN*; ježto totiž pravoúhlé trojúhelníky *MOm*, *MRm* jsou rovné a podobné, *MO* se bude rovnat *MR* neboli *NS* neboli *Pp* a kromě toho $MF = PN$.

PŘÍKLAD VI.

125. NECHŤ křivka *AMD* (Obr. 106) je polocykloidou s počátkem v bodě A a vrcholem v *D*, utvořená odvalováním kruhu *MGN* po jemu rovném *AGK*; a nechť *AM* jsou dopadající paprsky vycházející všechny z bodu *A*. Úsečka *BH*, která spojuje středy obou tvořících kruhů, nepřetržitě prochází tečným bodem *G* a oblouky *GM*, *GA*, stejně tak jako jejich struny, jsou si vždy rovny; a takto úhel $HGM = BGA$ a úhel $GMA = GAM$. Avšak úhel $HGM + BGA = GMA + GAM$; neboť když na obou stranách připojíme ten samý úhel *AGM*, vznikají dva pravé. Tedy úhel *HGM* se bude vždy rovnat úhlu *GMA*; a tím pádem také úhlu odrazu *GMF*; odkud plyne, že *MF* vždy prochází středem *H* pohyblivého kruhu.



Obr. 106

Nyní jestliže povedeme kolmice *CE*, *GO* na dopadající paprsek *AM*; pak zřejmě

$$MO = OA \text{ a } OE = \frac{1}{3} OM \text{ ;}$$

neboť (§ 100) když bod *C* leží na evolutě,

$$GC = \frac{1}{3} GM \text{ .}$$

Tudíž budeme mít

$$ME = \frac{2}{3} AM \text{ , tj. } a = \frac{2}{3} y \text{ ;}$$

a tím pádem

$$MF\left(\frac{ay}{2y - a}\right) = \frac{1}{2} y \text{ .}$$

Odtud je zřejmé, že když *GF* povedeme kolmou na *MF*, bod *F* bude ležet na kaustice *AFK*.

Kruh o průměru *GH* prochází bodem *F*; a ježto se oblouky *GM*, $\frac{1}{2}GF$, které jsou mírou toho samého úhlu *GHM*, k sobě mají jako průměry *MN*, *GH* jejich kruhů; oblouk *GM* se bude rovnat oblouku *GM*; a tím pádem i oblouku *GA*. Odkud je zjevné, že kaustika *AFK* bude epicykloidou opsanou odvalováním pohyblivého kruhu *HFG* po nehybném *AGK*.

DŮSLEDEK.

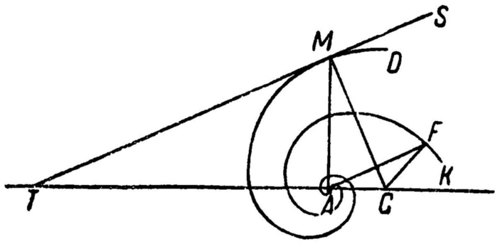
126. JESTLIŽE ze středu v bodě *B* opíšeme kruh o poloměru rovném *BH*, čili *AK*; a na jeho obvod dopadá nekonečné množství přímých čar rovnoběžných s *BD*; pak je zjevné (§ 120), že svými odrazy utvoří tu samou kaustiku *AFK*.

PŘÍKLAD VII.

127. NECHŤ křivka *AMD* (Obr. 107) je logaritmickou spirálou; a nechť dopadající paprsky všechny vycházejí ze středu *A*.

Jestliže krajností *C* poloměru evoluty povedeme úsečku *CA* kolmou na dopadající paprsek *AM*; pak jej bude protínat (§ 91) ve středu *A*. Pročež

$$AM\,(y)=a\ ;$$



Obr. 107

a tím pádem

$$MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right)=y\ .$$

Trojúhelník *AMF* tak bude rovnoramenný; a ježto je úhel dopadu *AMT* rovný úhlu odrazu *FMS*; plyne odtud, že úhel *AFM* je roven úhlu *AMT.* Odkud je zřejmé, že kaustika *AFK* bude logaritmickou spirálou, jež se od dané *AMD* bude lišit toliko polohou.[117]

TVRZENÍ II.

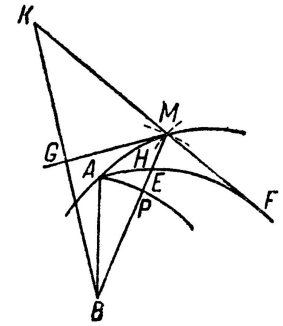
Zadání.

128. JE *dána kaustika odrazem* HF (Obr. 108) *a spolu s ní světelný bod* B; *a je třeba najít nekonečno křivek takových jako AM*, *pro které* HF *právě představuje kaustiku odrazem*.

Na libovolné tečně *HA* vezměme dle libosti bod *A* coby jeden z bodů hledané křivky *AM*; a nyní ze středu *B* opíšeme o poloměru *BA* kruhový oblouk *AP* a o libovolném jiném poloměru *BM* opíšeme druhý kruhový oblouk. Položíme $AH+HE=BM-PA$; a počínaje bodem *E* odvineme kaustiku *HF.* Tímto pohybem se opíše křivá čára *EM*, která protne kruhový oblouk o poloměru *BM* v bodě *M* ležícím (§ 110) na křivce *AM*. Ježto na základě konstrukce

$$PM + MF = AH + HF \ .$$

Popřípadě když vlákno *BMF* upevníme na jeho koncích v *B* a *F*, za pomoci bodce umístěného v *M* je napneme a bodcem počneme pohybovat tak, že úsek *MF* tohoto vlákna obalí kaustiku *HF*; pak zřejmě tento bodec svým pohybem opíše hledanou křivku *MA*.

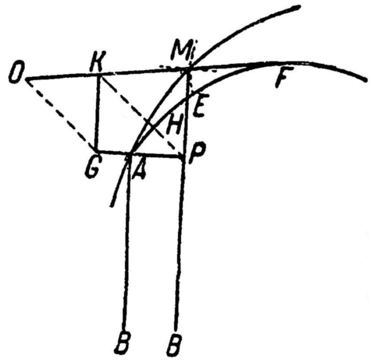


Obr. 108

JINAK.

129. VEĎME dle libosti tečnu *FM* různou od *HA*; a na této tečně budeme hledat bod *M* takový, aby $BM + MF = BA + AH + HF$. Což učiníme následovně.

Vezměme $FK = BA + AH + HF$; a bodem *G* rozdělujícím *BK* na dvě poloviny povedeme kolmici *GM*; tato pak protne tečnu *FM* v hledaném bodě *M*. Neboť $BM = MK$.



Obr. 109

Kdyby bod *B* (Obr. 109) byl nekonečně vzdálený od křivky *AM*, tj. dopadající paprsky *BA*, *BM* by byly rovnoběžné s nějakou přímou čarou zadanou polohou; stále by bylo možno uplatnit prvý způsob konstrukce; a sice pokud bychom uvážili, že kruhové oblouky opsané ze středu *B* se změní v přímé čáry kolmé na dopadající paprsky. Nakonec by se však tato konstrukce ukázala zbytečnou; a tudíž by bylo zapotřebí nahradit ji konstrukcí následující.

Vezměme $FK = AH + HF$. Nyní jestliže najdeme bod *M* takový, že *MP* rovnoběžná s *AB* a kolmá na *AP* bude rovna *MK*: pak zřejmě (§ 110) tento bod bude ležet na hledané křivce *AM*; ježto $PM + MF = AH + HF$. Nuže bod *M* nalezneme následujícím způsobem.

Spustíme *KG* kolmou na *AP*; vezmeme $KO = KG$ a povedeme *KP* rovnoběžnou s *OG* a dále *PN* rovnoběžnou s *GK*: tvrdím, bod *M* bude ten, který hledáme. Neboť z podobnosti trojúhelníků *GKO*, *PMK*, dostáváme $PM = MK$; ježto $GK = KO$.

Pokud by se kaustika *HF* stáhla do jediného bodu, křivka *AM* by se stala kuželosečkou.[118]

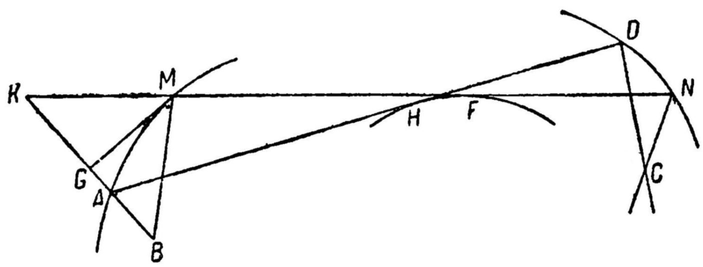
DŮSLEDEK I.

130. JE zřejmé, že křivka procházející všemi body *K* vzniká odvíjením křivky *HF* počínaje bodem *A* a mění se co do povahy v závislosti na poloze bodu *A* na tečně *AH*. Ježto tedy křivky *AM*

povstávají z těchto křivek všechny na základě té samé konstrukce, která je geometrická; plyne odtud (§ 108), že se navzájem liší co do povahy a že geometrické jsou jedině tehdy, když kaustika *HF* je geometrická a rektifikovatelná.

DůSLEDEK II.

131. JE dána křivá čára *DN* (Obr. 110) spolu se světelným bodem *C*; a je třeba najít nekonečno čar *AM* takových, aby se odražené paprsky *DA*, *NM* po následném odrazu od těchto čar opět setkaly v daném bodě *B*.



Obr. 110

Jestliže si představíme, že křivka *HF* je kaustika dané *DN* utvořená světelným bodem *C*; pak zřejmě křivka *HF* musí být rovněž kaustikou křivky *AM*, která má jako světelný bod daný bod *B*; a tak

$$FK = BA + AH + HF \text{ a } NK = BA + AH + HF + FN = BA + AD + DC - CN ,$$

poněvadž (§ 110)

$$HD + DC = HF + FN + NC .$$

Což dává následující konstrukci.

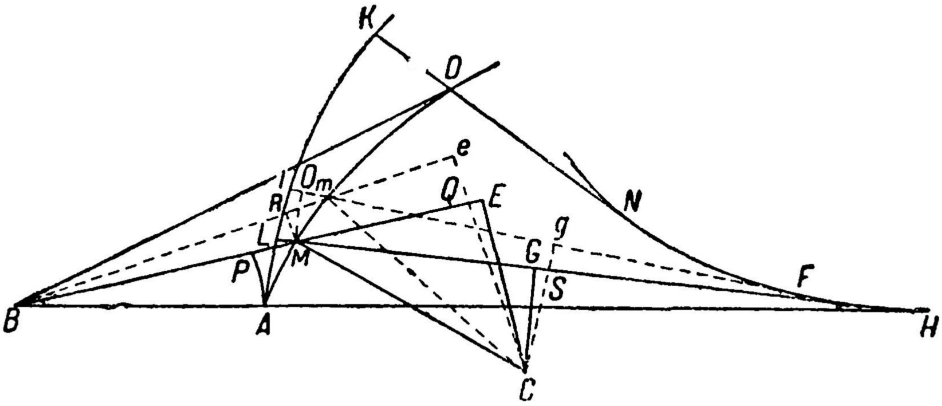
Jestliže na libovolném odraženém paprsku položíme dle libosti bod *A* coby jeden z bodů hledané křivky *AM*; vezměme na jiném libovolném odraženém paprsku *NM* část $NK = BA + AD + DC - CN$; a hledaný bod *M* nalezneme jako výše, § 129.

ODDÍL SEDMÝ.

Použití diferenciálního počtu k nacházení kaustik lomem.

DEFINICE.

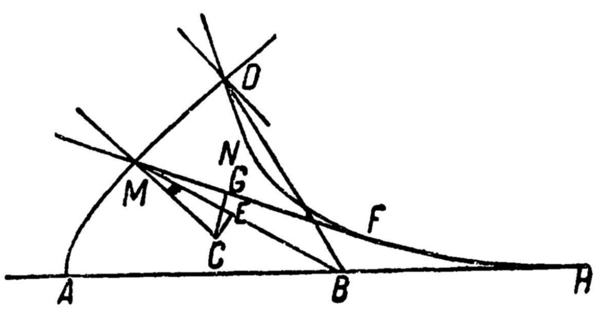
PŘEDSTAVME si nekonečno paprsků *BA*, *BM*, *BD* (Obr. 111) vycházejících z jednoho a toho samého světelného bodu *B*, kterak se lámou při střetu s křivou čarou *AMD*, pročež se přibližují, nebo vzdalují od svých kolmic *MC* tak, že siny *CE* úhlů dopadu *CME* leží vůči sinům *CG* úhlů lomu *CMG* vždy v daném poměru *m* ku *n*; pak křivou čáru *HFN*, jíž se dotýkají veškeré lomené paprsky *AH*, *MF*, *DN* (Obr. 112) nebo jejich prodloužení, nazveme *kaustikou lomem*.



Obr. 111

DŮSLEDEK.

132. JESTLIŽE počínaje bodem *A* budeme obalovat kaustiku *HFN*; opíše se křivka *ALK* taková, že tečna *LF* plus úsek *FH* kaustiky budou vždy rovné té samé úsečce *AH*. A pokud si představíme druhou tečnu *Fml* nekonečně blízkou *FML*; spolu s druhým dopadajícím paprskem *Bm*; a potom o středech *E*, *F* opíšeme malé oblouky *MO*, *MR*; vznikají odtud dva malé pravoúhlé trojúhelníky *MRm*, *MOm* podobné každý s každým dalším dvěma *MEC*, *MGC*. Neboť když od pravých úhlů *RME*, *CMm* odečteme společný úhel *EMm*, zbylé *RMm*, *EMC* se budou rovnat; a právě tak když od pravých úhlů *GMO*, *CMm* odečteme ten samý *GMm*, zbylé *OMm*, *GMC* se budou rovnat. Pročež $Rm.Om::CE.CG::m.n$. Ježto však *Rm* je diferenciál *BM* a *Om* diferenciál *LM*; plyne odtud (§ 96), že $BM-BA$, tj. suma



Obr. 112

všech diferenciálů *Rm* na úseku křivky *AM*, se má k *ML* čili $AH-MF-FH$, tj. sumě všech diferenciálů *Om* na tom samém úseku *AM*, jako se má *m* k *n*; a že tím pádem úsek

$$FH=AH-MF+\frac{n}{m}BA-\frac{n}{m}BM$$

Rozličné případy mohou nastat podle toho, zdali bude dopadající paprsek *BA* větší, nebo menší než *BM*; a zdali lomený paprsek *AH* bude obalovat nebo odvíjet úsek *HF*. Avšak vždy bude možné dokázat tak, jako jsme to provedli nyní, že rozdíl mezi dopadajícími paprsky se vůči rozdílu mezi paprsky lomenými (jestliže k jednomu z nich přičteme úsek kaustiky, který odvíjí do té doby, dokud nesplyne s druhým) má jako *m* ku *n*. Například (Obr. 112), $BA-BM.AH-MF-FH::m.n$, odkud dostáváme

$$FH=AH-MF+\frac{n}{m}BM-\frac{n}{m}BA\ .$$ [119]

Jestliže ze středu *B* opíšeme kruhový oblouk *AP* (Obr. 111); pak zřejmě *PM* bude rozdílem dopadajících paprsků *BM*, *BA*. A jestliže bod *B* položíme od křivky *AMD* nekonečně vzdálený; dopadající paprsky *BA*, *BM* se stanou rovnoběžnými a oblouk *AP* se promění v přímou čáru kolmou na tyto paprsky.

TVRZENÍ I.

Obecné zadání.

133. JSOU *dány povaha křivky* AMD (Obr. 111)*, světelný bod* B *a dopadající paprsek* BM*; a je třeba najít na lomeném paprsku* MF*, jehož poloha je dána, bod* F*, ve kterém se tento paprsek dotýká kaustiky lomem*.

Nacházíme (Odd. 5) délku *MC* poloměru evoluty v daném bodě *M*; a vezmeme nekonečně malý oblouk *Mm*; vyneseme úsečky *Bm*, *Cm*, *Fm*; o středech *B*, *F* opíšeme malé oblouky *MR*, *MO*; spustíme kolmice *CE*, *Ce*, *CG*, *Cg* na dopadající a lomené paprsky; a dané *BM* označíme jako *y*; *ME* jako *a*; *MG* jako *b*; a malý oblouk *MR* jako *dx*.

Nuže podobné pravoúhlé trojúhelníky *MEC* a *MRm*, *MGC* a *MOm*, BMR *a BQe* dají

$$ME(a).MG(b)::MR(dx).MO=\frac{b\,dx}{a}\ .$$

$$\text{A}\ \ BM(y).BQ\ \ \text{neboli}\ \ BE(y+a)::MR(dx).Qe=\frac{a\,dx+y\,dx}{y}\ .$$

Avšak z povahy refrakce

$$Ce.Cg::CE.CG::m.n\ .$$

A tím pádem

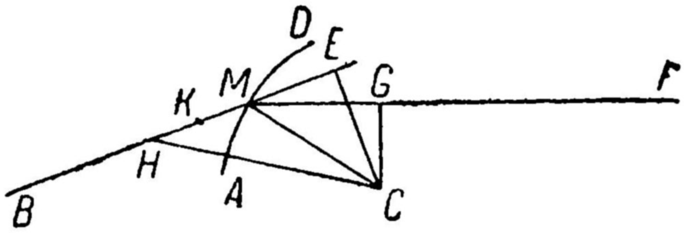
$$m.n :: Ce - CE \text{ neboli } Qe\left(\frac{a\,dx + y\,dx}{y}\right).\, Cg - CG \text{ neboli } Sg = \frac{an\,dx + ny\,dx}{my}.$$

Tedy z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *FMO* a *FSg* budeme mít

$$MO - Sg\left(\frac{bmy\,dx - any\,dx - aan\,dx}{amy}\right).\, MO\left(\frac{bbx}{a}\right) :: MS \text{ neboli } MG(b).\, MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aaa}$$

Což dává následující konstrukci.

Sestrojme při bodu *M* (Obr. 113) úhel $ECH = GCM$ a na *MB* nanesme $MK = \frac{aa}{y}$. Tvrdím, že pokud vezmeme $HK.HE :: MG.MF$; pak bod *F* bude ležet na kaustice lomem.



Obr. 113

Neboť z podobných trojúhelníků *CGM*, *CEH* budeme mít

$$CG.CE :: n.m :: MG(b).\, EH = \frac{bm}{n}.$$

Odkud

$$HE - ME \text{ neboli } HM = \frac{bm - an}{n},$$

$$HM - MK \text{ neboli } HK = \frac{bmy - any - aan}{ny},$$

a tím pádem

$$HK\left(\frac{bmy - any - aan}{ny}\right).\, HE\left(\frac{be}{n}\right) :: MG(b).\, MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}.$$

Zřejmě jestliže hodnota *HK* je záporná, záporná bude též hodnota *MF*; odtud plyne, že pokud se bod *H* nachází mezi body *K*, *E*, připadá bod *M* mezi body *G*, *F*.

Pokud by světelný bod *B* (Obr. 111, 113) připadl na stranu bodu *E* anebo (což je totéž) kdyby křivka *AMD* byla vůči světelnému bodu *B* vydutá; pak by se *y* z kladného převrátilo na záporné, a tehdy bychom měli

$$MF = \frac{-bbmy}{-bmy + any - aan} \text{ čili } \frac{bbmy}{bmy - any + aan}.$$

A konstrukce by se nijak nezměnila.

Jestliže předpokládáme, že se y stane nekonečným, tj. světelný bod B se nekonečně vzdálí od křivky AMD; pak se dopadající paprsky stanou navzájem rovnoběžnými a dostáváme

$$MF = \frac{bbm}{bm - an},$$

neboť člen aan bude ve srovnání se zbylými dvěma bmy, any nulový; a ježto pak $MK(\frac{aa}{y})$ vymizí, postačí konečně vzít $HM.HE::MG.MF$.

DŮSLEDEK I.

134. DOKÁŽEME, tak jako u kaustik odrazem (§ 114, 115), že při daném poměru m ku n má křivka AMD pouze jednu kaustiku lomem, kterážto je vždy geometrická a rektifikovatelná právě, když daná křivka AMD je geometrická.

DŮSLEDEK II.

135. JESTLIŽE bod E připadá vzhledem k bodu G na druhou stranu kolmice MC a když je CE rovna CG; pak zřejmě kaustika lomem se změní v kaustiku odrazem. A skutečně budeme mít

$$MF\left(\frac{bbmy}{bmy - any \mp aan}\right) = \frac{ay}{2y \mp a};$$

ježto $m = n$ a a se z kladného obrací v záporné, navíc bude rovno b. Což souhlasí s tím, co bylo dokázáno v předchozím oddíle.

Jestliže m je ve srovnání s n nekonečné; pak zřejmě lomený paprsek MF spadne v jedno s kolmicí CM tak, že se kaustika lomem stane evolutou. A skutečně budeme mít $MF = b$, které se v tomto případě stává MC, tj. bod F připadne do bodu C, jenž náleží evolutě.

DŮSLEDEK III.

136. JESTLIŽE je křivka AMD vzhledem k světelnému bodu B vypouklá; a hodnota $MF\left(\frac{bbmy}{bmy - any - aan}\right)$ budiž kladná; pak je zřejmé, že bod F je třeba vzít na té samé straně bodu M, kde se nachází bod G; což jsme předpokládali během výpočtu. Pakliže naopak je záporná, bude třeba jej brát na straně opačné. To samé platí i tehdy, pokud je křivka AMD vůči světelnému bodu B vydutá; avšak je třeba si uvědomit, že pak budeme mít

$$MF\left(\frac{bbmy}{bmy - any + aan}\right).$$

Odtud plyne, že nekonečně blízké lomené paprsky se budou sbíhat, pokud hodnota *MF* je v prvním případě kladná a ve druhém záporná; a naopak se budou rozbíhat, pokud v prvním případě bude záporná a ve druhém kladná. Nuže je zjevné, že

1°. Jestliže je křivka *AMD* vzhledem ke světelnému bodu *B* vypouklá, přičemž *m* je menší *n*; anebo je vůči tomuto bodu vydutá a *m* je větší *n*; pak nekonečně blízké lomené paprsky budou vždy rozbíhavé.

2°. Jestliže je křivka *AMD* vzhledem ke světelnému bodu *B* vypouklá, přičemž *m* je větší než *n*; anebo je vůči tomuto bodu vydutá a *m* je menší *n*; nekonečně blízké lomené paprsky budou sbíhavé, pokud $MK(\frac{aa}{y})$ je menší než $MH(\frac{bm}{n}-a)$ neboli $a-\frac{bm}{n}$; rozbíhavé, pokud je větší; a rovnoběžné, když je rovno. Poněvadž však při rovnoběžnosti dopadajících paprsků platí $MK=0$; plyne odtud, že v tomto případě budou nekonečně blízké lomené paprsky vždy sbíhavé.

DŮSLEDEK IV.

137. JESTLIŽE se dopadající paprsek *BM* dotýká křivky *AMD* v bodě *M*, pak budeme mít

$$ME(a)=0\ ;$$

a tím pádem

$$MF=b\ .$$

Odtud pak je zřejmé, že bod *F* připadá do bodu *G*.

Jestliže je dopadající paprsek *BM* kolmý na křivku *AMD*, úsečky $ME(a)$ a $MG(b)$ budou každá rovny poloměru *CM* evoluty; neboť s ním spadají v jedno. Tedy budeme mít

$$MF=\frac{mby}{my-ny+bn}\ ,$$

což se změní v

$$\frac{bm}{m-n}\ ,$$

když dopadající paprsky budou navzájem rovnoběžné

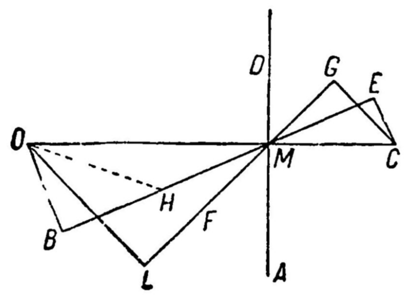
Jestliže se lomený paprsek *MF* dotýká křivky *AMD* v bodě *M*, budeme mít $G(b)=0$. Odkud je zjevné, že kaustika se dané křivky dotýká v bodě *M*.

Jestliže je poloměr *CM* evoluty nulový; úsečky $ME(a)$, $MG(b)$ se též budou rovnat nule, a tím pádem členy aan, $bbmy$ budou ve srovnání s ostatními bmy, $bbmy$ nulové. Odtud vyplývá, že $MF=0$, a že tedy kaustika má s danou křivkou společný bod *M*.

Jestliže je poloměr *CM* evoluty nekonečný; čáry $ME(a)$, $MG(b)$ budou též nekonečné, a tím pádem členy bmy, any budou ve srovnání s dalšími aan, $bbmy$ nulové; a tak budeme mít

$$MF = \frac{bbmy}{\mp aan}.$$

Poněvadž (§ 133) však je tato veličina záporná za předpokladu, že body *F* a *G* náleží opačným stranám křivky *AMD*; a naopak kladná, pokud předpokládáme, že spadají na stranu jedinou; plyne odtud (§ 136), že bod *F* je třeba vzít na stejné straně jako *B*, tj. že nekonečně blízké lomené paprsky se rozbíhají. Je zjevné, že tehdy se malý oblouk *Mm* stává přímou čarou; a předchozí konstrukci nadále není možno uplatnit. Nahradit ji můžeme následující konstrukcí, pomocí níž se určují body kaustik lomem v případě, že *AMD* je přímou čarou.



Obr. 114

Na dopadajícím paprsku *BM* vztyčíme kolmici *BO* (Obr. 114), která v bodu *O* protíná úsečku *MC* kolmou na *AD*; povedeme *OL* kolmou na lomený paprsek *MG*; sestrojíme úhel *BOH* rovný úhlu *LOM* a vezmeme $BM.BH::ML.MF$. Tvrdím, že bod *F* bude ležet na kaustice lomem.

Jelikož pravoúhlé trojúhelníky *MEC* a *MBO*, *MGC* a *MLO* budou vždy podobné, ať už velikost *CM* vezmeme jakkoli; jestliže se tedy stane nekonečnou, stále budeme mít

$$ME(a).MG(b)::BM(y).ML = \frac{by}{a}.$$

A z podobnosti trojúhelníků *OLM*, *OBH* pak dostáváme

$$OL.OB(m.n)::ML\left(\frac{by}{a}\right).BH = \frac{bmy}{an}.$$

Odkud je jasné, že

$$BM(y).BH\left(\frac{bmy}{an}\right)::ML\left(\frac{by}{a}\right).MF\left(\frac{bbmy}{aan}\right).$$

DŮSLEDEK V.

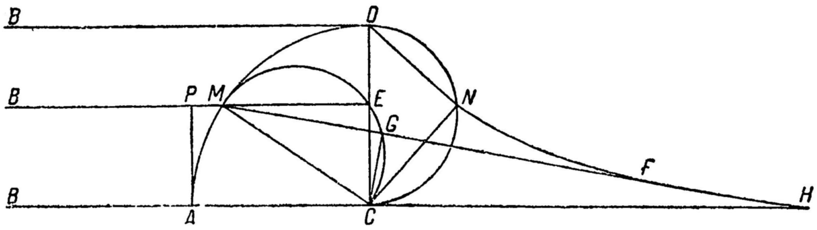
138. ZŘEJMĚ pokud jsou dány libovolné dva ze tří bodů *B*, *C*, *F*, snadno dokážeme nalézt třetí.

PŘÍKLAD I.

139. NECHŤ křivka *AMD* (Obr. 115) je čtvrtkruhem se středem v bodě *C*; nechť dopadající paprsky *BA*, *BM*, *BD* jsou navzájem rovnoběžné a kolmé na *CD*; a konečně nechť poměr *m* ku *n* je jako 3 ku 2, tj. poměr, který nastává u světelných paprsků na přechodu mezi vzduchem a sklem. Ježto se evoluta kruhu *AMD* smršťuje do jediného bodu, a sice jeho středu *C*; plyne odtud, že pokud

opíšeme půlkružnici *MEC*, jejímž průměrem bude paprsek *CM*; a vezmeme strunu $CG = \frac{2}{3} CE$; čára *MG* bude lomeným paprskem, na kterém určíme bod *F*, jak bylo vyloženo výše v § 133.

K nalezení bodu *H*, ve kterém se dopadající paprsek *BA* kolmý na *AMD* dotýká kaustiky lomem; budeme mít (§ 137)



Obr. 115

$$AH\left(\frac{bm}{m-n}\right) = 3b = 3CA\ .$$

A jestliže opíšeme půlkružnici *CND*, která bude mít paprsek *CD* jako průměr, a vezmeme strunu $CN = \frac{2}{3} CD$; pak je zřejmé (§ 137), že bod *N* bude náležet kaustice lomem; neboť dopadající paprsek *BD* se dotýká kruhu *AMD* v bodě *D*.

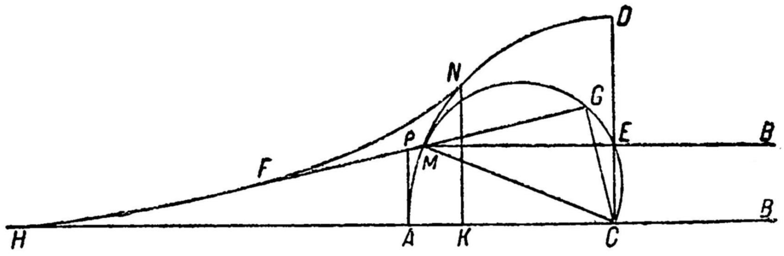
Jestliže vedeme *AP* rovnoběžnou s *CD*; zřejmě (§ 132) úsek

$$FH = AH - MF - \frac{2}{3} PM\ ;$$

a tedy celá kaustika

$$HFN = \frac{7}{3} CA - DN = \frac{7-\sqrt{5}}{3} CA\ .$$

Pokud je čtvrtkruh *AMD* (Obr. 116) vůči dopadajícím paprskům *BM* vydutý a poměř *m* ku *n* se rovná 2 ku 3; na půlkružnici *CEM*, která má paprsek *CM* jako průměr, vezmeme strunu $CG = \frac{3}{2} CE$ a povedeme lomený paprsek *MG*, na němž určíme bod *F*, a sice za pomocí obecné konstrukce, § 133.



Obr. 116

Budeme mít (§ 137)

$$AH\left(\frac{bm}{m-n}\right)=-2b\ ,$$

tj. AH bude ležet na straně (§ 136), vůči níž je čtvrtkruh *AMD* vypouklý, a bude rovna dvojnásobku průměru *AC*. A jestliže předpokládáme *CG* čili $\frac{3}{2}CE$ rovno *CM*; pak je zjevné, že lomený paprsek *MF* se bude dotýkat kruhu *AMD* v *M*; ježto bod *G* tehdy spadá v jedno s bodem *M*. Odtud plyne, že pokud vezmeme $CE=\frac{3}{2}CD$, bod *M* připadne do bodu *N*, ve kterém se kaustika *HFN* (§ 137) dotýká čtvrtkruhu *AMD*. Avšak pokud je *CE* větší než $\frac{2}{3}CD$, dopadající paprsky *BM* se již nebudou moci lámat, tj. přecházet ze vzduchu do skla; ježto je nemožné, aby *CG* kolmá na lomený paprsek *MG* byla větší než *CM* tak, že se veškeré paprsky dopadající na úsek *ND* budou odrážet.

Jestliže vedeme *AP* rovnoběžnou s *CD*; zřejmě (§ 132) úsek

$$FH=AH-MF+\frac{3}{2}PM$$

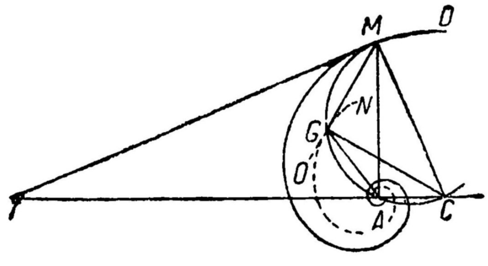
tak, že když povedeme *NK* rovnoběžnou s *CD*, celá kaustika

$$HFN=2CA+\frac{3}{2}AK=\frac{7-\sqrt{5}}{2}CA\ .$$

PŘÍKLAD II.

140. NECHŤ křivka *AMD* (Obr. 117) je logaritmickou spirálou se středem v bodě *A*, odkud vycházejí všechny dopadající paprsky *AM*.

Zřejmě (§ 91) bod *E* připadá do bodu *A*, tj. $a=y$. Jestliže tedy do $\frac{bbmy}{bmy-any+aan}$, což je hodnota (§ 133) *MF*, pokud je křivka vůči světelnému bodu vydutá, dosadíme za *a* jeho hodnotu *y*; budeme mít



Obr. 117

$$MF=b\ ;$$

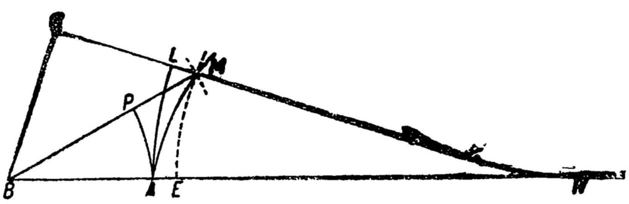
odtud je zřejmé, že bod *F* připadá do bodu *G*.

Jestliže vedeme úsečku *AG* a tečnu *MT*; úhel *AGO*, který doplňuje úhel *AGM* do dvou pravých, bude roven úhlu *AMT.* Ježto totiž kruh, jehož poloměrem je čára *CM*, prochází body *A* a G; pak úhly *AGO*, *AMT* každý mají coby míru polovinu toho samého oblouku *AM*. Je tedy zjevné, že kaustika *AGN* je stejnou logaritmickou spirálou jako daná *AMD* a liší se od ní toliko polohou.

TVRZENÍ II.

Zadání.

141. JSOU *dány kaustika lomem* HF (Obr. 118)*, spolu s ní světelný bod* B *a poměr* m *ku* n*; a je třeba najít nekonečno křivek takových jako* AM*, pro které právě* HF *představuje kaustiku lomem.*


Obr. 118

Na libovolné tečně *HA* vezměme dle libosti bod *A* coby jeden z bodů křivky *AM*; nyní opíšeme ze středu *B* o poloměru *BA* kruhový oblouk *AP*; a dále o libovolném jiném poloměru *BM* opíšeme druhý kruhový oblouk. Když pak vezmeme $AE=\frac{n}{m}PM$; obalením kaustiky *HF* se opíše křivá čáru *EM*, která kruhový oblouk o poloměru *BM* protne v bodě *M* ležícím na hledané křivce. Neboť (§ 132) $PM.AE$ neboli $ML::m.n$.

JINAK.

142. NA libovolné tečně *FM* různé od *HA* budeme hledat bod *M* takový, aby

$$HF+FM+\frac{n}{m}BM=HA+\frac{n}{m}BA\ .$$

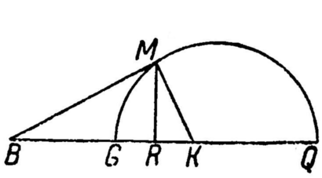
Jestliže tudíž vezmeme

$$FK=\frac{n}{m}BA+AH-FH$$

a na *FK* najdeme bod *M* takový, že

$$MK=\frac{n}{m}BM\ ,$$

pak bude (§ 132) tím, který hledáme. Toho však lze dosáhnout opsáním křivé čáry *GM* (Obr. 119) takové, že když z libovolného jejího bodu *M* povedeme do daných bodů *M*, *K* úsečky *MB*, *MK*; poměr mezi nimi se bude vždy rovnat poměru *m* ku *n*. Jedná se tedy pouze o to, určit povahu tohoto geometrického místa.



Obr. 119

Aby se tak stalo, tedy veďme *MR* kolmou na *BK*; označme danou *BK* jako *a*; a neurčené *BR* jako *x*; *RM* jako *y*. Pravoúhlé trojúhelníky *BRM*, *KRM* dají

$$BM=\sqrt{xx+yy} \text{ a } KM=\sqrt{aa-2ax+xx+yy} \; ;$$

a tak pro splnění podmínky zadání budeme mít

$$\sqrt{xx-yy}\,\sqrt{aa-2ax+xx+yy} :: m.n \; .$$

Odkud

$$yy=\frac{2ammx-aamm}{mm-nn}-xx \; ,$$

což je místo kruhu, který sestrojíme následujícím způsobem.

Vezměme $BG=\frac{am}{m+n}$ a $BQ=\frac{am}{m-n}$ a o průměru GQ opišme půlkružnici GMQ: tvrdím, že právě ta bude požadovaným místem. Neboť když máme

$$QR \text{ neboli } BQ-BR=\frac{am}{m-n}-x \text{ a } RG \text{ neboli } BR-BG=x-\frac{am}{m+n} \; ;$$

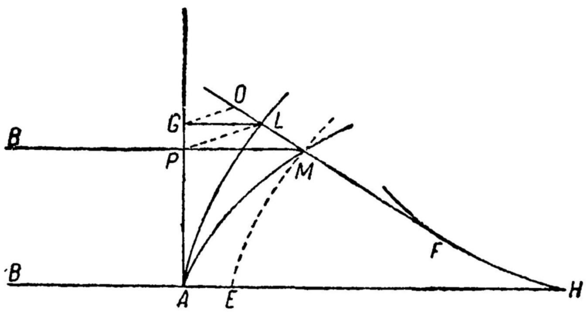
z povahy kruhu dostaneme

$$QR\times RG=\overline{RM}^2 \; ,$$

což vyjádřeno analyticky dává

$$yy=\frac{2ammx-aamm}{mm-nn}-xx \; .$$

Pokud jsou dopadající paprsky BA, BM (Obr. 120) rovnoběžné s nějakou přímkou, která je dána polohou, prvé řešení bude stále platit; avšak toto druhé se ukáže jako bezvýsledné a bude možno nahradit jej následujícím.



Obr. 120

Vezměme $FL=AH-HF$; když pak povedeme LG rovnoběžnou s AB a kolmou na AP, vezmeme $LO=\frac{n}{m}LG$ a vyneseme LP rovnoběžnou s GO a PM rovnoběžnou s GL; je zřejmé (§ 132), že bod M bude tím, který hledáme; neboť

$$LO=\frac{n}{m}LG \; , \; ML=\frac{n}{m}PM \; .$$

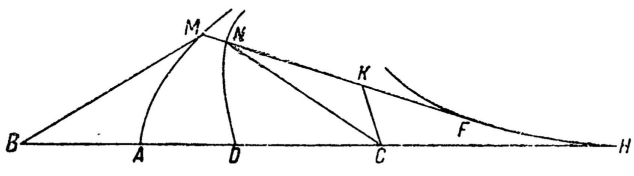
Jestliže se kaustika lomem FH stáhne do jediného bodu; křivky AM se stanou Descartovými ovály, které mezi geometry vzbudily takový rozruch.[120]

DŮSLEDEK I.

143. DOKÁŽEME, právě tak jako u kaustik odrazem (§ 130), že křivky AM jsou navzájem rozdílné povahy; a že geometrické jsou jedině tehdy, když kaustika HF je geometrická a rektifikovatelná.

Důsledek II.

144. Jsou dány křivá čára *AM* (Obr. 121), světelný bod *B* a poměr *m* ku *n*; a je třeba najít nekonečno čar *DN* takových, aby se lomené paprsky *MN* při styku s nimi lomily znovu tak, že se setkají v nějakém daném bodě *C*.



Obr. 121

Jestliže si představíme, že křivá čára *HF* je kaustikou lomem dané křivky *AM* utvořenou od světelného bodu *B*; je zřejmé, že ta samá čára *HF* musí být rovněž kaustikou lomem hledané křivky *DN* o světelném bodě v *C*. A proto (§ 132)

$$\frac{n}{m}BA+AH=\frac{n}{m}BM+MF+FH \ \text{ a } \ NF+FH-\frac{n}{m}NC=HD-\frac{n}{m}DC\ ;$$

a tím pádem

$$\frac{n}{m}BA+AH=\frac{n}{m}BM+MN+HD-\frac{n}{m}DC+\frac{n}{m}NC\ ;$$

a po obvyklé úpravě

$$\frac{n}{m}BA-\frac{n}{m}BM+\frac{n}{m}DC+AD=MN+\frac{n}{m}NC\ .$$

Což dává následující konstrukci.

Na libovolném lomeném paprsku *AH* vezměme dle libosti bod *D* coby jeden z bodů hledané křivky *DN*; a nyní na libovolném jiném lomeném paprsku *MF* naneseme část

$$MK=\frac{n}{m}BA-\frac{n}{m}BM+\frac{n}{m}DC+AD\ ;$$

a když tak jako výše (§ 142) najdeme bod *N* takový, že $NK=\frac{n}{m}NC$; pak zřejmě (§ 132) tento bude ležet na křivce *DN*.

Obecný důsledek.

Pro předchozí tři oddíly.

145. Je zjevné (§ 80, 85, 107, 108, 114, 115, 128, 129, 134, 143), že křivá čára má při daném světelném bodu a poměru sinů pouze jednu jedinou kaustiku odrazem a jednu jedinou kaustiku lomem; a že tyto čáry budou vždy geometrické a rektifikovatelné, pokud ona je geometrická. Zatímco jedna a ta samá křivá čára může být při stejném poměru sinů a té samé poloze světelného bodu společná nekonečnému množství navzájem velice odlišných čar, které jsou geometrické jedině tehdy, když ona je geometrická a rektifikovatelná.

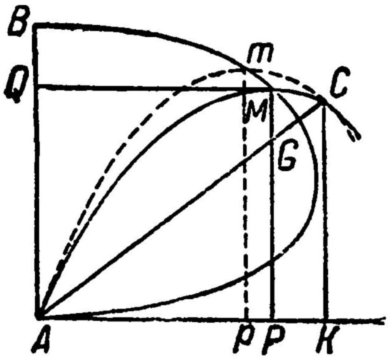
ODDÍL OSMÝ.

Použití diferenciálního počtu k nacházení bodů čar dotýkajících se nekonečna čar daných polohou, ať přímých nebo křivých.

TVRZENÍ I.

Zadání.

146. BUDIŽ *nějaká libovolná čára* AMB (122)*, jejíž osou je úsečka* AP*; a uvažujme nekonečné množství parabol* AMC, AmC *procházejících bodem* A, *jejichž osami jsou ordináty* PM, pm. *Je třeba najít křivou čáru, která se dotýká všech těchto parabol.*[121]



Obr. 122

Zřejmě tečným bodem každé paraboly *AMC* je průsečík *C* s parabolou *AmC*, která je jí nekonečně blízká. Nuže veďme *CK* rovnoběžnou s *MP* a dané *AP* označme jako *x*; *PM* jako *y*; a neznámé *AK* jako *u*; *KC* jako *z*. Z povahy paraboly dostaneme

$$\overline{AP}^2(xx).\overline{PK}^2(uu-2ux+xx)::MP(y).MP-CK(y-z).$$

Což dává

$$zxx=2uxy-uuy,$$

čili obecnou rovnici všech parabol takových jako *AMC*. Podotýkám však, že neznámé $AK(u)$ a $KC(z)$ zůstávají beze změny, zatímco dané $AP(x)$ a $PM(y)$ přecházejí v Ap a pm; a že neměnným zůstává $KC(z)$ jedině tehdy, když bod *C* je průsečíkem. Neboť je zřejmé, že všude jinde protne úsečka *KC* obě paraboly *AMC*, *AmC* ve dvou různých bodech; a tudíž zde budou dvě hodnoty odpovídající jedné a té samé *AK*. A proto když při diferencování právě nalezené rovnice položíme *u* a *z* jako konstanty, určíme tak bod *C* coby bod průniku. Tedy budeme mít

$$2zx\,dx=2ux\,dy+2uy\,dx-uu\,dy\ ;$$

odkud obdržíme neznámou

$$AK(u)=\frac{2xx\,dy-2yx\,dx}{x\,dy-2\mathrm{y}\,dx},$$

když za *z* dosadíme jeho hodnotu $\dfrac{2uxy-uuy}{xx}$. Ježto pak povaha křivky *AMB* je dána; najdeme hodnotu *dy* vyjádřenou skrze *dx*; kterou jestliže následně dosadíme do hodnoty *AK*, vyjádří se tato neznámá prostřednictvím vesměs známých členů oproštěných od všech diferenciálů. Což také bylo zadáno.

Kdybychom namísto parabol měli zadány nějaké jiné přímé nebo křivé čáry určené polohou; řešení úlohy by probíhalo stále více méně stejným způsobem. A to právě si ukážeme v následujících tvrzeních.

PŘÍKLAD.

147. NECHŤ rovnice $xx=4ay-4yy$ vyjadřuje povahu křivky *AMB*; jedná se o půlelipsu, jež má jako vedlejší osu úsečku $AB=a$ kolmou na *AP*; přičemž hlavní osa je dvakrát větší než vedlejší.

Nacházíme $x\,dx=2a\,dy-4y\,dy$; a tudíž

$$AK\,(\frac{2xx\,dy-2xy\,dx}{x\,dy-2y\,dx})=\frac{ax}{y}=u\ .$$

Odtud plyne, že když *AK* vezmeme za čtvrtou úměrnou k *MP*, *PA*, *AB*; a dále povedeme *KC* kolmou na *AK*; pak *KC* protne parabolu *AMC* v hledaném bodě *C*.

Abychom určili povahu křivky, jež se dotýká všech parabol neboli prochází všemi takto nalezenými body *C*; budeme hledat rovnici vyjadřující poměr $AK(u)$ ku $KC(z)$, a to následujícím způsobem. Když do $zxx=2uxy-uuy$ dosadíme za *u* jeho hodnotu $\frac{ax}{y}$; budeme mít

$$y=\frac{aa}{2a-y}\ ;$$

a tím pádem

$$x\ \text{neboli}\ \frac{uy}{a}=\frac{au}{2a-z}\ .$$

Jestliže tedy tyto hodnoty dosadíme do $xx=4ay-4yy$ na místa *x* a *y* ; vzniká rovnice

$$uu=4aa-4az\ ,$$

v níž se nadále *x* a *y* nevyskytují a která vyjadřuje poměr *AK* ku *KC*. Odtud je zřejmé, že hledanou křivkou je parabola s vrcholem v bodě B a ohnisku v bodě *A*, která má coby osu čáru *AB*, a jejíž parametr je tím pádem čtyři krát větší než *AB*.

Nyní tedy máme $y=\frac{aa}{2a-y}$; odkud získáváme

$$KC(z)=\frac{2ay-aa}{y}\ .$$

Ježto však je tato hodnota kladná, pokud 2 *y* je větší než *a*; záporná, pokud je menší; a nulová, když je mu rovno; pak v prvním případě se tečný bod *C* nachází nad *AP*, jak jsme předpokládali během výpočtu; v druhém případě pod *AP*; a konečně na *AP* v případě třetím.

Jestliže povedeme úsečku *AC* protínající *MP* v *G*; pak tvrdím, že $MG=BQ$ a že bod *G* je ohniskem paraboly *AMC*. Neboť

1°. $AK(\frac{ax}{y}).KC(\frac{2ay-aa}{y})::AP(x).PG=2y-a$, a tím pádem $MG=a-y=BQ$.

2°. Parametr paraboly *AMC* je roven $4a-4y$, když za xx dosadíme jeho hodnotu $4ay-4yy$; a tím pádem je $MG(a-y)$ čtvrtou částí parametru; odkud je zřejmé, že bod *G* je ohniskem paraboly tak, že úhel *BAC* je tečnou v bodě *A* rozdělen na dvě poloviny.

Z toho, že se parametr paraboly *AMC* rovná čtyřnásobku *BQ*, vyplývá, že když vrchol *M* připadne do bodu *A*, bude parametr roven čtyřnásobku *AB*; a že tudíž parabola s vrcholem v *A* bude asymptotická k parabole procházející všemi body *C*.

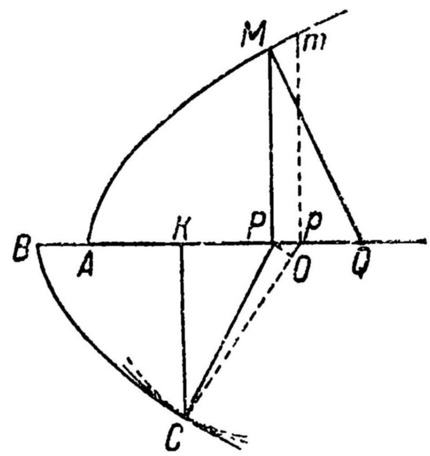
Jelikož se parabola *BC* dotýká všech parabol takových jako *AMC*; zřejmě všechny tyto paraboly protnou určenou čáru *AC* v bodech, jež budou ležet bodu *A* blíže než bod *C*. Avšak v balistice dokážeme (když *AK* položíme coby horizontálu), že všechny paraboly takové jako *AMC* vyznačují dráhu opsanou ve vzduchu střelami, jež by byly o stejné síle pod všemi možnými elevačními úhly vrženy z hmoždíře umístěného v *A*. Odtud plyne, že když povedeme přímku, jež bude půlit úhel *BAC*; pak tato vyznačí postavení, které musí hmoždíř zaujmout, aby jím vržená střela dopadla v rovině *AC* dané polohou do bodu *C*, který bude od hmoždíře co možná nejvzdálenější.

TVRZENÍ II.

Zadání.

148. BUDIŽ *nějaká libovolná křivka* AM (Obr. 123)*, jejíž osou je úsečka* AP*; nyní je třeba najít druhou křivku* BC *takovou, že když na ni spustíme kolmici* PC *a povedeme dále libovolnou ordinátu* PM*; pak si tyto dvě čáry* PM, PC *budou navzájem vždy rovny.*

Když si představíme nekonečné množství kruhů opsaných ze středů *P*, *p* o poloměrech *PC*, *pC* rovných *PM*, *pm*; zřejmě pak hledaná křivka *BC* se musí dotýkat všech těchto kruhů; a tečný bod *C* každého kruhu je bodem průniku s kruhem, který je mu nekonečně blízký. Nuže veďme *CK* kolmou na *AP*; a označme dané a proměnné *AP* jako *x*; *PM* neboli *PC* jako *y*; neznámé a konstanty *AK* jako *u*; *KC* jako *z*. Z povahy kruhu budeme mít



Obr. 123

$$\overline{PC}^2=\overline{PK}^2+\overline{KC}^2\,,$$

tj. vyjádřeno analyticky

$$yy=xx-2ux+uu+zz\,,$$

což je obecná rovnice všech řečených kruhů. Její diferenciál činí

$$2y\,dy=2x\,dx-2u\,dx\,,$$

odkud pak

$$PK(x-u)=\frac{y\,dy}{dx}\ ;$$

což dává následující obecnou konstrukci.

Veďme *MQ* kolmou na křivku *AM*; vezměme $PK=PQ$ a vynesme *KC* rovnoběžnou s *PM*; tvrdím pak, že *KC* protne kruh opsaný ze středu *P* o poloměru $PC=PM$ v bodě *C*, ve kterém se dotýká hledané křivky *BC*. Což je zřejmé, neboť

$$PQ=\frac{y\,dy}{dx}\ .$$

Hodnotu *PK* je možno nalézt ještě i následujícím způsobem.

Jestliže vztyčíme *PO* kolmou na *Cp*; pravoúhlé trojúhelníky *pOP*, *PKC* budou podobné; a tím pádem

$$Pp(dx).Op(dy)::PC(y).PK=\frac{y\,dy}{dx}\ .$$

Když $PQ=PM$; je zřejmé, že kruh opsaný o poloměru *PC* se bude dotýkat *KC* v bodě *K* tak, že tečný bod *C* splyne s bodem *K*; a tím pádem připadne na osu.

Pokud však bude *PQ* větší než *PM*; kruh opsaný o poloměru *PC* se nebude moci dotknout křivky *BC*; poněvadž v žádném bodě nebude s to setkat se s úsečkou *KC*.

PŘÍKLAD.

149. NECHŤ danou křivkou *AM* (Obr. 123) je parabola o rovnici $ax=yy$. Budeme mít

$$PQ \text{ neboli } PK(x-u)=\frac{1}{2}a\ ;$$

a tedy z pravoúhlého trojúhelníku *PKC*

$$x=\frac{1}{2}a+u \quad \text{a} \quad yy=\frac{1}{4}aa+zz$$

Pokud však tyto hodnoty dosadíme do $ax=yy$; obdržíme rovnici

$$\frac{1}{2}aa+au=\frac{1}{4}aa+zz\ , \text{ čili } \frac{1}{4}aa+au=zz\ ,$$

která vyjadřuje povahu křivky *BC*. Odtud je zřejmé, že tato křivka je tou samou parabolou jako *AM*.

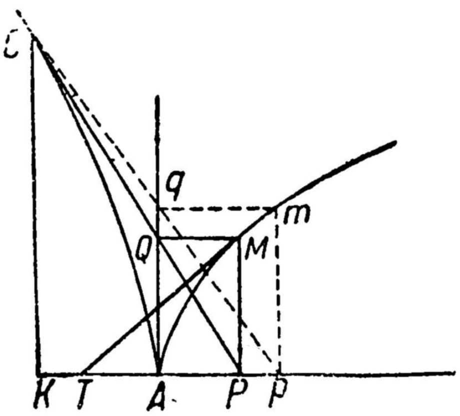
Neboť obě mají stejný parametr *a*; a vrchol *B* prvé je vzdálen od vrcholu *A* druhé o $BA=\frac{1}{4}a$.

TVRZENÍ III.

Zadání.

150. NECHŤ *je dána nějaká libovolná křivá čára* AM (Obr. 124)*, která má coby průměr úsečku* AP *a jejíž ordináty* PM*,* pm *jsou rovnoběžné s úsečkou* AQ *o dané poloze; veďme* MQ*,* mq *rovnoběžné s* AP*; a vynesme úsečky* PQC, pqC. *Nyní požadujeme nalézt křivku* AC*, pro kterou jsou všechny tyto úsečky tečnami; nebo, což je totéž, je třeba na každé úsečce* PQC *určit tečný bod* C.

Představme si druhou tečnu *pqC* nekonečně blízkou *PQC*; a veďme *CK* rovnoběžnou s *AQ*; nyní označíme dané a proměnné *AP* jako *x*; *PM* neboli *AQ* jako *y*; neznámé a konstanty *AK* jako *u*; *KC* jako *z*. Z podobnosti trojúhelníků *PAQ*, *PKC* pak budeme mít



Obr. 124

$$AP(x).AQ(y)::PK(x+u).KC(z)=y+\frac{uy}{x},$$

což je obecná rovnice všech přímých čar takových jako *KC*. Její diferenciál činí

$$dy+\frac{ux\,dy-uy\,dx}{xx}=0\,;$$

odkud získáváme

$$AK(u)=\frac{xx\,dy}{y\,dx-x\,dy}\,.$$

Což dává následující obecnou konstrukci.

Veďme tečnu *MT* a vezměme *AK* třetí úměrnou k *AT*, *AP*; nyní tvrdím, že když povedeme *KC* rovnoběžnou s *AQ*; pak *KC* protne úsečku *PQC* v hledaném bodě *C*.

Poněvadž

$$AT\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{dy}\right).AP(x)::AP(x).AK=\frac{xx\,dy}{y\,dx-x\,dy}\,.$$

PŘÍKLAD I.

151. NECHŤ danou křivkou *AM* (Obr. 124) je parabola o rovnici $ax=yy$. Budeme mít $AT=AP$; odtud plyne, že $AK(u)=x$, tj. že bod *K* připadá do bodu *T*. Jestliže nyní máme sestavit rovnici vyjadřující poměr $AK(u)$ ku $KC(z)$; najdeme $KC(z)=2y$, poněvadž jsme právě určili, že *PK* je rovna dvojnásobku *AP*. Když tedy do $ax=yy$ na místa *x* a *y* dosadíme jejich hodnoty *u* a $\frac{1}{2}z$; dostaneme $4au=zz$. Odtud je zjevné, že křivka *AC* je parabolou s vrcholem v bodě *A* o parametru rovném čtyřnásobku parametru paraboly *AM*.

PŘÍKLAD II.

152. NECHŤ danou křivkou AM (Obr. 125) je čtvrtkruh BDM o středu v bodě A, jehož poloměrem je úsečka AB neboli AD, kterou nazvu a. Zřejmě PQ bude vždy rovna poloměru AM neboli AB, tj. bude všude stejná; a tak je možno uvažovat, že její krajnosti P, Q klouzají po ramenech BA, AD pravého úhlu BAD. Budeme mít

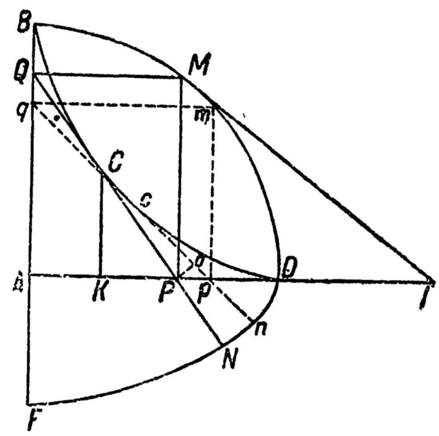
$$AK\,(u)=\frac{x^3}{aa}\,,$$

poněvadž

$$AT=\frac{aa}{x}\,;$$

a z rovnoběžnosti KC, AQ dostaneme

$$AP(x).\,PQ(a)::AK\left(\frac{x^3}{aa}\right).\,QC=\frac{xx}{a}\,.$$



Obr. 125

Odtud je zjevné, že k nalezení tečného bodu C stačí vzít QC třetí úměrnou k PQ a AP. Jestliže hledáme rovnici vyjadřující povahu křivky BCD, najdeme tuto[122]

$$\begin{array}{lllll} u^6 & -3aau^4 & +3a^4uu & -a^6 & =0. \\ & +3zz & +21aazz & +3a^4zz & \\ & & +z^4 & -3aaz^4 & \\ & & & +z^6 & \end{array}$$

DŮSLEDEK I.

153. POKUD máme určit poměr úseku DC křivky BCD k její tečně CP; představme si druhou tečnu cp nekonečně blízkou CP; a když nyní ze středu C opíšeme malý oblouk PO, budeme mít

$$cp-CP \text{ neboli } Op-Cc=-\frac{2x\,dx}{a}\,,$$

a pokud jde o diferenciál

$$CP=\frac{aa-xx}{a}\,;$$

odkud

$$Cc=Op+\frac{2x\,dx}{a}\,.$$

Avšak z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků QPA, PpO dostáváme

$$PQ(a).\,AP(x)::Pp(dx).\,Op=\frac{x\,dx}{a}\,,$$

a tím pádem

$$Cc=\frac{3\,x\,dx}{a}=DC-Dc\ .$$

Zjevně tedy ať už bod *C* vezmeme kdekoli, vždy budeme mít

$$DC-Dc\left(\frac{3\,x\,dx}{a}\right).CP-cp\left(\frac{2\,x\,dx}{a}\right)::3.2\ .$$

Odtud plyne, že suma všech diferenciálů $DC-Dc$ odpovídajících úsečce *PD*, tj. (§ 96) úseku *DC* křivky *BCD*, se má k sumě všech diferenciálů $CP-cp$ odpovídajících té samé úsečce *PD*, tj. (§ 96) tečně $CP::3.2$. A že stejně tak i celá křivka *BCD* se má k tečně $BA::3.2$.

DůSLEDEK II.

154. JESTLIŽE počínaje bodem *D* odvineme křivku *BCD*; utvoří se křivá čára *DNF* taková, že $CN.CP::3.2$, neboť *CN* je vždy rovno úseku *DC* křivky *BCD*. Odtud plyne, že podobné výseče *Cnn*, *CPO* se mají mezi sebou $::9.4$; a že tudíž plocha *DCN* ohraničená křivkami *DC*, *DN* a úsečkou *CN*, která je tečnou v *C* a kolmicí v *N*, se má k ploše *DCP* ohraničené křivkou *DC* a tečnami *DP*, *CP* jako 9 ku 4.

DůSLEDEK III.

155. TĚŽIŠTĚ výseče *CNn* se musí nacházet na oblouku *PO*; neboť $CP=\frac{2}{3}CN$. A ježto je tento oblouk nekonečně malý; plyne odtud, že toto těžiště musí ležet na úsečce *AD*; a tím pádem těžiště ploch *DCN*, *BDF*, které jsou ze všech těchto výsečí složeny, musí ležet na úsečce *AD* tak, že kdybychom na protější straně *BF* opsali stejnou figuru jako *BDF*, těžiště celého útvaru by bylo v bodě *A*.

DůSLEDEK IV.

156. NA základě podobnosti pravoúhlých trojúhelníků P*QA*, *pPO* budeme mít

$$PQ(a).AQ \text{ neboli } PM\,(\sqrt{aa-xx})::Pp(dx).PO=\frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}\ .$$

A z podobnosti výsečí *CPO*, *CNn* též budeme mít

$$CP.CN \text{ neboli } 2.3::PO\left(\frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}\right).Nn=\frac{3\,dx\sqrt{aa-xx}}{2\,a}\ .$$

Avšak pravoúhelník $MP\times Pp$, tj. (§ 2) malá kruhová plocha $MPpm=dx\sqrt{aa-xx}$. Dostáváme tedy

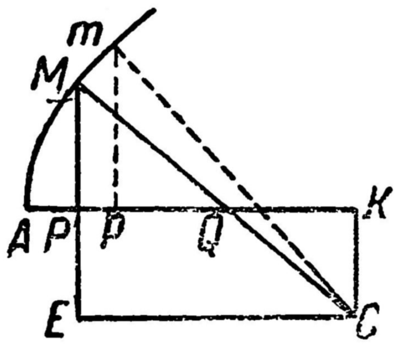
$$AB\times Nn=\frac{3}{2}MPpm\ ;$$

odtud plyne, že když úsek *ND* křivky *DNF* vynásobíme poloměrem *AB*; pak bude jeden a půl krát větší než kruhová výseč DMP;[123] a že celá křivka *DNF* bude rovna třem čtvrtinám čtvrté části kružnice *BMD*.

TVRZENÍ IV.

Zadání.

157. NECHŤ *je dána nějaká libovolná křivka* AM (Obr. 126)*, jejíž osou je úsečka* AP*; a uvažujme dále nekonečné množství kolmic* MC*,* mC *na tuto křivku. Požadujeme nalézt křivku, pro kterou všechny tyto kolmice představují tečny; nebo, což je totéž, na každé kolmici* MC *je třeba najít tečný bod* C.



Obr. 126

Představme si druhou kolmici *mC* nekonečně blízkou *MC*; nyní vyneseme ordinátu *MP* a povedeme bodem průniku *C* úsečky *CK* kolmou a *CE* rovnoběžnou k ose. Když pak označíme dané a proměnné *AP* jako *x*; *PM* jako *y*; neznámé a konstanty *AK* jako *u*; *KC* jako *z*; budeme mít

$$PQ=\frac{y\,dy}{dx}\text{, } PK \text{ neboli } CE=u-x \quad a \quad ME=y+z\text{ ;}$$

z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *MPQ*, *MEC* dostaneme

$$MP(y).PQ\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)::ME(y+z).EC(u-x)=\frac{y\,dy+z\,dy}{dx}\text{ ,}$$

což je obecná rovnice všech kolmic takových jako *MC*. Její diferenciál (když *dx* položíme konstantní) dává

$$dx=\frac{y\,ddy+dy^2+z\,ddy}{dx}\text{ ;}$$

odkud pak

$$ME(z+y)=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}\text{ .}$$

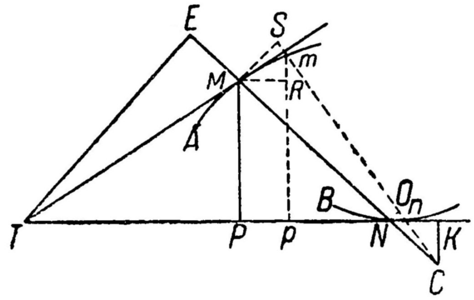
Ježto však povaha křivky *AM* je dána; můžeme vyjádřit hodnoty dy , ddy skrze dx^2 ; a když je pak dosadíme do $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, získáme odsud hodnotu *ME*, jež bude zcela známa a oproštěná od všech diferenciálů. Což také bylo zadáno.

Je zřejmé, že křivka procházející všemi body *C* je evolutou křivky *AM*; a jelikož jsme o evolutách přímo pojednávali v pátém oddíle, bylo by zbytečné uvádět zde nové příklady.

TVRZENÍ V.

Zadání.

158. JSOU *dány libovolné dvě čáry* AM, BN (Obr. 127) *a rovná čára* MN, *jež zůstává neměnnou*; *předpokládejme, že krajnosti* M, N *této čáry nepřetržitě klouzají po dalších dvou. Nyní požadujeme najít křivku, jíž se* MN *během tohoto pohybu ustavičně dotýká*.



Obr. 127

Veďme tečny *MT*, *NT* a představme si úsečku *mn* nekonečně blízkou *MN*, která tudíž protíná *MN* v bodě *C* dotyku s křivkou, jejíž body máme určit. Je zjevné, že úsečka *MN* za přechodu do *mn* proběhne svými krajnostmi malé úseky *Mm*, *Nn* čar *AM*, *BN*, které díky své nekonečné malosti náleží rovněž tečnám *TM*, *TN*; čili můžeme uvažovat, že čára *MN* během svého přechodu do nekonečně blízkého postavení *mn* sklouzla po úsečkách *TM*, *TN* daných polohou.

Nuže veďme na *NT* kolmice *MP*, *CK*; a označme dané a proměnné *TP* jako *x*; *PM* jako *y*; neznámé a konstanty *TK* jako *u*; *KC* jako *z*; a danou *MN*, jež zůstává beze změny, jako *a*. Z pravoúhlého trojúhelníku *MPN* dostaneme

$$PN=\sqrt{aa-yy}\ ;$$

a z podobnosti trojúhelníků *NPM*, *NKC* budeme mít

$$NP\left(\sqrt{aa-yy}\right).\,PM\,(y)::NK\left(u-x-\sqrt{aa-yy}\right).\,KC\,(z)=\frac{uy-xy}{\sqrt{aa-yy}}-y\ ;$$

čehož diferenciál dává

$$aau\,dy-aax\,dy-aay\,dx+y^3\,dx=\overline{aa\,dy-yy\,dy}\,\sqrt{aa-yy}\ .$$

Odkud pak, jestliže pro zestručnění položíme $\sqrt{aa-yy}=m$ a za $y\,dx$ dosadíme jeho hodnotu $x\,dy$; dostáváme z podobnosti trojúhelníků *mRM*, *MPT*

$$PK\,(u-x)=\frac{m^3\,dy+mmy\,dx}{aa\,dy}=\frac{m^3+mmx}{aa}\ ,$$

a tudíž

$$MC=\frac{mm+mx}{a}\ .$$

Což dává následující konstrukci.[124]

Veďme *TE* kolmou na *MN* a vezměme $MC=NE$; pak tvrdím, že bod *C* bude tím, který hledáme. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *MNP*, *TNE* totiž dostáváme

$$MN\,(a).\,NP\,(m)::NT\,(m+x).\,NE\ \text{ neboli }\ MC=\frac{mm+mx}{a}\ .$$

Jinak. Veďme *TE* kolmou na *MN* a o středu *C* opišme malé oblouky *MS*, *NO*; nyní označíme dané *NE* jako *r*; *ET* jako *s*; *MN* jako *a*; a neznámou *CM* jako *t*. Budeme mít

$$Sm \text{ neboli } On = dt \;;$$

a z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *MET* a *mSM*, *NET* a *nON*, *CMS* a *CNO* získáme

$$ME(r-a).ET(s)::mS(dt).SM = \frac{s\,dt}{r-a} \text{ a } NE(r).ET(s)::nO(dt).ON = \frac{s\,dt}{r}\;;$$

$$\text{a } MS - NO\left(\frac{as\,dt}{rr-ar}\right).MS\left(\frac{s\,dt}{r-a}\right)::MN(a).MC(t) = r\;.$$

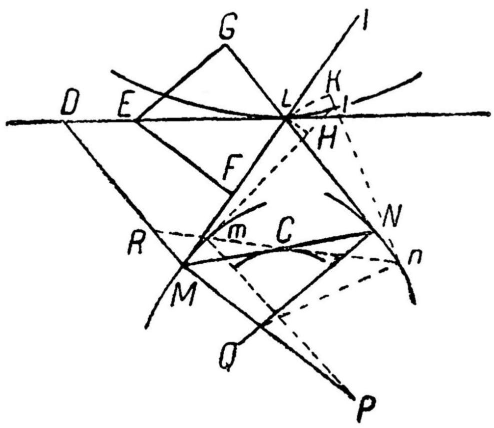
Což dává tu samou konstrukci co výše.

Jestliže předpokládáme, že čáry *AM*, *BN* jsou úsečkami, jež mezi sebou svírají pravý úhel; pak je zjevné, že hledaná křivka bude stejná jako v § 152.

TVRZENÍ VI.

Zadání.

159. BUDIŽ *libovolné tři čáry* L*,* M*,* N (Obr. 128); *a z každého bodu* L*,* l *čáry* L *uvažujme dvě tečny* LM *a* LN*,* lm *a* ln *k oběma křivkám* M *a* N*. Nyní je třeba najít čtvrtou křivku* C*, která se dotýká všech čar* MN*,* mn *spojujících tečné body křivek* M*,* N*.*



Obr. 128

Vynesme tečnu *LE* a libovolným jejím bodem *E* veďme kolmice *EF*, *EG* na zbylé dvě tečny *ML*, *NL*; nyní položíme bod *l* nekonečně blízký bodu *L* a povedeme malé úsečky *LH*, *LK* kolmé po řadě na *ml*, *nl*; a stejně tak povedeme kolmice *MP*, *mP*, *NQ*, *nQ* na tečny *ML*, *ml*, *NL*, *nl*; přičemž tyto kolmice se budou navzájem protínat v bodech *P* a *Q*. Odtud pak povstávají podobné pravoúhlé trojúhelníky *EFL* a *LHl*, *EGL* a *LKl*; jakož i trojúhelníky *LMH* a *MPn*, *LnK* a *NQn* pravoúhlé při *H* a *m*, *K* a *N*, jež budou mezi sebou podobné; poněvadž každý z úhlů *LMH* nebo *MPm* přičtením k jednomu a tomu samému úhlu *PMm* utvoří úhel pravý. Stejným způsobem pak dokážeme, že úhly *LnK*, *NQn* jsou si navzájem rovny.

Nuže označme malou stranu *Mm* mnohoúhelníku skládajícího křivku *M* jako *du*; a dané *EF* jako *m*; *EG* jako *n*; *MN* neboli *mn* jako *a*; *ML* neboli *ml* jako *b*; *NL* neboli *nl* jako *c*; *MP* neboli *mP* jako *f*; *NQ* neboli *nQ* jako *g* (úsečky *MP*, *NQ* zde beru za dané, neboť podle předpokladu je povaha křivek *M*, *N* dána, a tudíž tyto úsečky bude vždy možno najít, viz § 78); pak budeme mít

1°. $MP(f).ML(b)::Mm(du).LH=\frac{b\,du}{f}$.

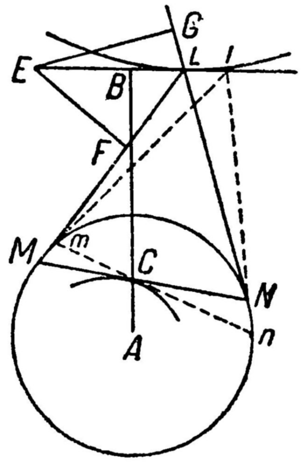
2°. $EF(m).EG(n)::LH(\frac{b\,du}{f}).LK=\frac{b\,n\,du}{mf}$.

3°. LN neboli $\ln(c).nQ(g)::LK(\frac{bn\,du}{mf}).nN=\frac{bgn\,du}{cfm}$.

4°. (když povedeme *MR* rovnoběžnou s *NL* neboli *nl*) $ml(b).l\,n(c)::mM(du).MR=\frac{c\,du}{b}$.

5°. $MR+Nn(\frac{c\,du}{b}+\frac{bgn\,du}{cfm}).MR(\frac{c\,du}{b})::MN(a).MC=\frac{accfm}{ccfm+bbgn}$.

Což také bylo třeba najít.



Obr. 129

Pokud by tečna *EL* spadla v jedno s tečnou *ML*; pak zřejmě $EF(m)$ se obrátí v nic neboli stane se nulovým; a tím pádem bod *C* připadne do bodu *M*. A stejně tak kdyby tečna *EL* splynula s tečnou *LN*; pak by se $EG(n)$ stala nulovou, a tudíž bychom měli $MC=a$; odkud je zjevné, že hledaný bod *C* by připadal do bodu *N*. A konečně pokud by tečna *EL* připadala mezi ramena úhlu *GLI*; pak by se v tomto případě $EG(n)$ stalo záporným, což by dávalo $MC=\frac{accfm}{ccfm-bbgn}$; a hledaný bod *C* by již nespadal mezi body *M* a *N*, nýbrž na jednu či druhou straně mimo ně.

PŘÍKLAD I.

160. PŘEDPOKLÁDEJME, že křivky *M* a *N* (Obr. 129) dohromady tvoří kruh. Zřejmě v tomto případě $b=c$ a $f=g$; co dává

$$MC=\frac{am}{m+n};$$

odkud je zjevné, že k určení hledaného bodu *C* postačí rozdělit úsečku *MN* v daném poměru *m* ku *n*, tj. tak, že $MC.NC::m.n$.

PŘÍKLAD II.

161. PŘEDPOKLÁDEJME, že křivky *M* a *N* představují některou z kuželoseček. Obecnou konstrukci je pak možno zaměnit za jinou a mnohem jednodušší, pokud ovšem budeme mít na zřeteli jistou vlastnost kuželoseček, jejíž důkaz nalezneme v knihách k tomu určených – totiž že když z každého bodu *L*, *l* nějaké úsečky *EL* povedeme dvě tečny *LM* a *LN*, *lm* a *ln* na některou z kuželoseček; pak se všechny úsečky *MN*, *mn* spojující tečné body protnou v jediném bodě *C*,

kterým prochází průměr AC s ordinátami rovnoběžnými s úsečkou EL. Odtud plyne, že k nalezení bodu C stačí vést průměr, jehož ordináty budou rovnoběžné s tečnou EL.

Je zjevné, že v kruhu musí být průměr kolmý na tečnu EL, tj. když z jeho středu A povedeme kolmici AB na tuto tečnu; pak tato protne úsečku MN v hledaném bodě C.[125]

POZNÁMKA.

162. NA základě této úlohy (Obr. 128) je možno vyřešit úlohu následující, která souvisí s metodou tečen.

Jsou dány tři křivky C, M, N; a nechme úsečku MN odvalovat po křivce C tak, aby se jí ustavičně dotýkala; dále body M, N průniku s křivkami M, N povedeme tečny ML, NL protínající jedna druhou v bodě L, jenž tímto pohybem opisuje čtvrtou křivku Ll. Nyní jde o to, vést tečnu LE k této křivce, přičemž polohy úseček MN, ML, NL a bodu C jsou dány.

Ježto je zjevné, že tato úloha je pouze obrácenou úlohou předchozí; a že zde je MC dáno; pak tím, co hledáme, je poměr EF ku EG určující polohu tečny EL. A proto když danou MC označíme jako h; budeme mít

$$\frac{accfm}{ccfm+bbgn}=h\,,$$

odkud pak

$$m=\frac{bbghn}{accf-ccfh}\,;$$

a tím pádem tečna LE musí ležet uvnitř daného úhlu MLG tak, že když libovolného jejího bodu E spustíme kolmice EF, EG na strany tohoto úhlu; pak se k sobě budou mít vždy v daném poměru $bbgh$ ku $accf-ccfh$. Avšak toto nastává, když povedeme MD rovnoběžnou s NL a rovnou $\frac{b^3gh}{accf-ccfh}$.

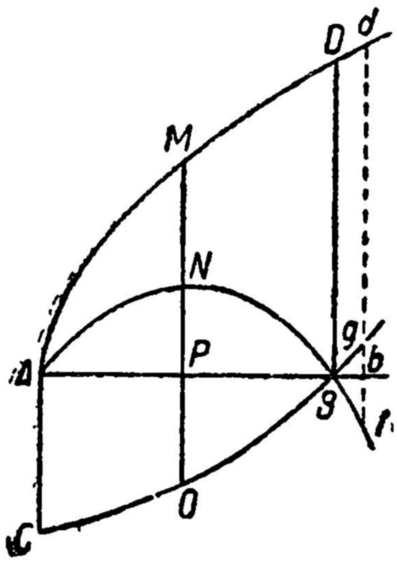
Je zjevné (§ 161), že pokud obě křivky M a N (Obr. 129) zároveň tvoří jedinou kuželosečku, postačí vést LE rovnoběžnou s ordinátami průměru procházejícího bodem C.

ODDÍL DEVÁTÝ.
Řešení některých úloh spjatých s výše uvedenými metodami.

TVRZENÍ I.

Zadání.

163. BUDIŽ *křivá čára* AMD (Obr. 130) (AP=x, PM=y, AB=a) *taková, že hodnota ordináty* y *je vyjádřena zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel se při* x=a *stávají nulovými, tj. jakmile bod* P *spadá v jedno s daným bodem* B. *Ptáme se, jaká bude v tomto případě hodnota ordináty* BD.



Obr. 130

Uvažujme dvě křivé čáry *ANB*, *COB* o společné ose v podobě úsečky *AB*; a sice takové, že ordináta *PN* vyjadřuje čitatel a abscisa *PO* jmenovatel obecného zlomku, který vyhovuje všem *PM* tak, že $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Zřejmě obě tyto křivky se protnou v bodě *B*; neboť podle předpokladu se *PN* a *PO* obě stávají rovny nule, když bod *P* připadá do *B*. Nuže pokud si nyní představíme ordinátu *bd* nekonečně blízkou *BD*, protínající křivky *ANB*, *COB* v bodech *f*, *g*; dostáváme hodnotu

$$bd = \frac{AB \times bf}{bg},$$

která se neliší (§ 2) od *BD*. Otázkou je tedy pouze najít poměr *bg* ku *bf*. Avšak je zjevné, že když abscisa *AP* přejde v *AB*, ordináty *PN*, *PO* se stanou rovny nule; a že když *AP* přejde v *Ab*, změní se tyto ordináty v *bf*, *bg*. Odtud plyne, že samy tyto ordináty *bf*, *bg* tvoří diferenciály ordinát křivek *ANB*, *COB* v bodech *B* a *b*; a tím pádem, že když vezmeme diferenciál čitatele a vydělíme jej diferenciálem jmenovatele, za předpokladu $x = a = Ab$ neboli *AB*, získáme hledanou hodnotu ordináty *bd* neboli *BD*. Což bylo třeba najít.[126]

PŘÍKLAD I.

164. NECHŤ $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Zřejmě při $x = a$ se jak čitatel, tak jmenovatel zlomku stávají rovny nule. A proto vezmeme diferenciál $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aa\,dx}{3\sqrt[3]{axx}}$ čitatele a za

předpokladu, že $x=a$, jej vydělíme diferenciálem $-\frac{3\,a\,dx}{4\sqrt[4]{a^3 x}}$ jmenovatele, tj. z $-\frac{4}{3}a\,dx$ vydělíme $-\frac{3}{4}dx$; což dává $\frac{16}{9}a$ coby hledanou veličinu *BD.*

PŘÍKLAD II.

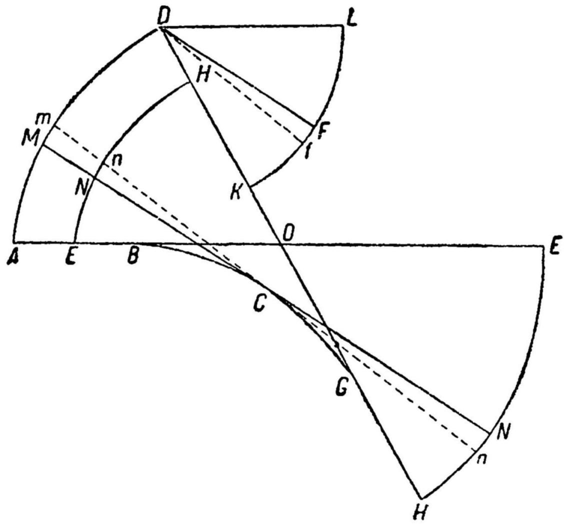
165. NECHŤ $y=\frac{aa-ax}{a-\sqrt{ax}}$. Při $x=a$ obdržíme $y=2\,a$.

Tento příklad bychom mohli vyřešit i bez pomoci diferenciálního počtu, a sice následujícím způsobem.

Usměrněním zlomku budeme mít $aaxx+2\,aaxy-axyy-2\,a^3 x+a^4+aayy-2\,a^3 y=0$, což po vydělení $x-a$ převedeme na $aax-a^3+2\,aay-ayy=0$; a když pak za *x* dosadíme *a*, vychází, stejně jako předtím, $y=2\,a$.

LEMMA.

166. BUDIŽ *nějaká libovolná křivá čára* BCG (Obr. 131) *a* AE *přímá čára, která se jí dotýká v bodě* B *a na níž jsou dle libosti vyznačeny dva pevné body* A, E. *Pokud tuto úsečku po křivce necháme odvalovat tak, že se jí nepřetržitě dotýká; pak zřejmě pevné body* A, E *tímto pohybem opíší dvě křivky* AMD, ENH. *Jestliže nyní povedeme* DL *rovnoběžnou s* AB*, která tím pádem sevře s* DK (*jež podle předpokladu splývá s úsečkou* AE*, když tato se dotkne křivky* BCG *v* G) *úhel* KDL *rovný úhlu* AOD *sevřenému tečnami v* B, G*; a dále ze středu* D *o libovolném poloměru opíšeme oblouk* KFL; *pak tvrdím, ž*e $\mathrm{DK}.\mathrm{KFL}::\mathrm{AE}.\mathrm{AMD}\pm\mathrm{ENH}$, *a sice +, pokud tečný bod spadá mezi opisující body; a –, pokud opisující body vzhledem k tečnému bodu zůstávají vždy na jedné, nebo druhé straně.*



Obr. 131

Totiž pokud předpokládáme, že úsečka *AE* se při svém obratu po křivce *BCG* dostane do vzájemně nekonečně blízkých poloh *MCN*, *mCn*; pak zřejmě výseče *DFf*, *CMm*, *CNn*, budou podobné; a tak $DF.Ff::CM.Mm::CN.Nn::CM\pm CN$ neboli $AE.Mm\pm Nn$. Avšak jelikož toto nastává vždy, ať už tečný bod *C* vezmeme kdekoli; plyne odtud, že poloměr *DK* se má ke kruhu

KFL, sumě všech malých oblouků $Ff::AE.AMD \pm ENH$ neboli sumě všech malých oblouků $Mm \pm Nn$. Což také bylo dokázat.[127]

DŮSLEDEK I.

167. JE patrné, že křivky *AMD*, *ENH* se utvářejí odvinutím jedné a té samé křivky *BCG*; a že tak úsečka *AE* bude v každé své poloze na tyto dvě křivky kolmá vždy tak, že jejich vzdálenost bude všude stejná; což je vlastností rovnoběžných čar. Odtud je zjevné, že pokud je křivka *AMD* dána, lze najít nekonečné množství bodů křivky *ENH* bez nutnosti uvažovat její evolutu *BCG*; a sice když na křivku *AMD* povedeme libovolné množství kolmic a každou z nich vezmeme rovnou *AE*.

DŮSLEDEK II.

168. JESTLIŽE obě poloviny *BC*, *CG* křivky *BCG* jsou navzájem podobné a rovné; a úsečky *BA*, *GH* bereme navzájem rovné; pak zřejmě křivky *AMD*, *ENH* budou podobné a rovné tak, že lišit se budou toliko svojí polohou. Odtud plyne, že křivka *AMD* se bude mít k oblouku $KFL::\frac{1}{2}AE.DK$, tj. v zadaném poměru.[128]

TVRZENÍ II.

Zadání.

169. BUDIŽ *nějaké libovolné dvě křivky* AEV, BCG (Obr. 132) *a třetí* AMD *taková, že když odvinutím křivky* BCG *opíšeme úsek křivky* EM*; pak poměr úseků křivky* AE*,* EM *a poloměrů evoluty* EC*,* MG *bude vyjádřen nějakou libovolnou danou rovnicí. Úkolem je vést z daného bodu* M *na křivku* AMD *tečnu* MT.

Představme si další úsek křivky *em* nekonečně blízký *EM* a poloměry evoluty *CeF*, *GmR*; a budiž 1°. *CH* kolmá na *CE* a protínající v *H* tečnu *EH* ke křivce *AEV.* 2°. *ML* rovnoběžná s *CE* a protínající v *L* oblouk *GL* opsaný o poloměru *MG* ze středu *M.* 3°. *GT* kolmá na *MG* a protínající v *T* hledanou tečnu *MT.*

Označíme pak dané *AE* jako *x*; *Em* jako *y*; *CE* jako *u*; *GM* jako *z*; *CH* jako *s*; *EH* jako *t*; oblouk *GL* jako *r*: odkud budeme mít

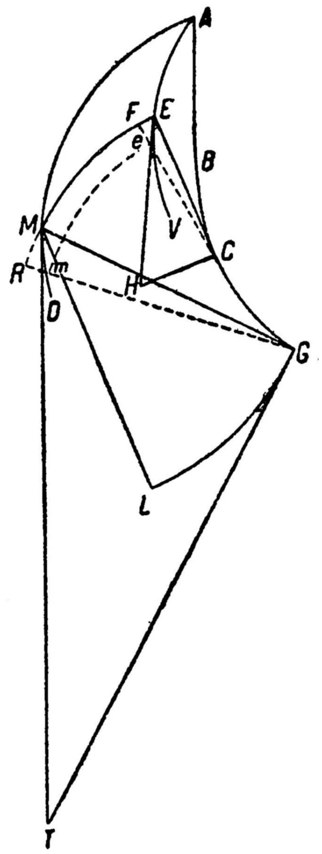
$$Ee = dx \text{ a } Fe \text{ neboli } Rm = du = dz\,;$$

a z podobných pravoúhlých trojúhelníků *eFE*, *ECH* dostaneme

$$CE(u).CH(s)::Fe(dz).FE = \frac{s\,dz}{u}\,.$$

$$\text{A } CE(u).EH(t)::Fe(dz).Ee(dx) = \frac{t\,dz}{u}\,.$$

Avšak podle lemmatu (§ 166)



Obr. 132

$$RF - me = \frac{r\,dz}{z}\ ;$$

a tím pádem

$$RM\ (\overline{RF - me} + \overline{me - ME} + \overline{ME - MF}) = \frac{r\,dz}{z} + dy + \frac{s\,dz}{u}\ .$$

Tedy z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *mRM*, *MGT* budeme mít

$$mR(dz)\,.\,RM\,(\frac{r\,dz}{z} + \frac{s\,dz}{u} + dy) :: MG(z)\,.\,GT = r + \frac{sz}{u} + \frac{z\,dy}{dz}\ .$$

Pokud však do diferenciálu dané rovnice dosadíme na místa du a dy jejich hodnoty dz a $\frac{t\,dz}{u}$; najdeme hodnotu dy vyjádřenou skrz dz ; kterou když pak dosadíme do $\frac{z\,dy}{dz}$, pro hledanou subtangentu *GT* vyjde hodnota zcela známá a oproštěná od všech diferenciálů. Což také bylo zadáno.

Jestliže předpokládáme, že křivka *BCG* se stáhne do jediného bodu *O* (Obr. 133); pak zjevně úsek křivky $ME(y)$ se změní v kruhový oblouk $GL(r)$ a poloměry evoluty $CE(u)$, $GM\,(z)$ si budou navzájem rovny; takže *GT*, jež se v tomto případě stane *OT*, se ukáže $= y + s + \frac{z\,dy}{dz}$.[129]

PŘÍKLAD.

170. NECHŤ $y = \frac{xz}{a}$ (Obr. 133). Odkud diferenciál činí

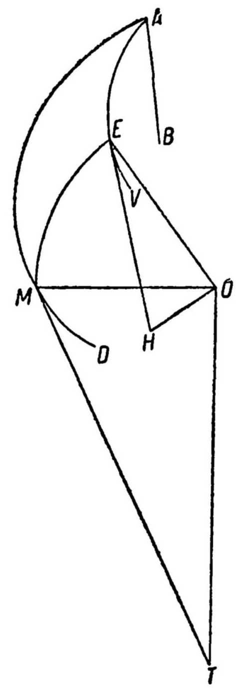
$$dy = \frac{z\,dx - x\,dz}{a}$$

(bereme (§ 133) $-x\,dz$ na místo $+x\,dz$; neboť když x a y rostou, z klesá)

$$= \frac{t\,dz - x\,dz}{a}\ ,$$

když za dx dosadíme jeho hodnotu $\frac{t\,dx}{z}$; a tím pádem

$$OT\ (y + s + \frac{z\,dy}{dz}) = y + s + \frac{tz - xz}{a} = \frac{as + tz}{a}\ ,$$

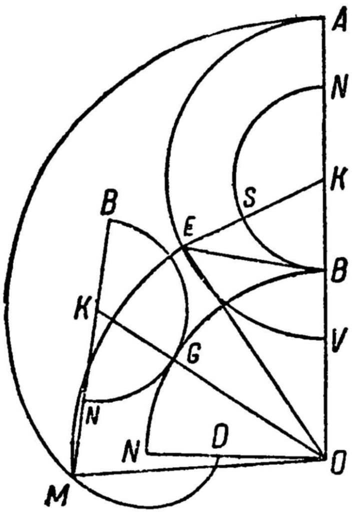


Obr. 133

když za $\frac{xz}{a}$ dosadíme jeho hodnotu y.

POZNÁMKA.

171. JESTLIŽE bod O připadá na osu AB (Obr. 134) a křivka AEV bude půlkruhem; pak křivka AMD bude polocykloidou utvořenou odvalováním půlkruhu BSN po jemu rovném kruhovém oblouku BGN opsaném ze středu O; a její tvořící bod A pak připadne vně, dovnitř, nebo na obvod pohyblivého půlkruhu BSN podle toho, je-li dané a větší, menší, nebo rovné OV.



Obr. 134

Abychom toto dokázali a zároveň určili bod B, předpokládám to, co má být dokázáno, totiž že křivka AMD je polocykloidou o středu v bodě K, jež je tvořena odvalováním půlkruhu BSN po oblouku BGN opsaném ze středu O. Uvažujme, že půlkruh BSN se zastaví v poloze BGN takové, že tvořící bod A připadne do bodu M; nyní vedu středy tvořících kruhů úsečku OK, která tím pádem prochází tečným bodem G; a po vynesení KSE zjišťuji, že trojúhelníky OKE, OKM jsou rovné a podobné, neboť jejich tři strany se odpovídajícím způsobem navzájem rovnají. Odtud plyne 1°. Že vrcholové úhly MOK, EOK jsou si rovny; a že tedy také úhly MOE, GOB jsou si rovny, což dává $GB.ME::OB.OE$. 2°. Že úhly MKO, EKO se taktéž rovnají; a tudíž i jejich měřící oblouky GN, BS jsou si rovny. A to samé je třeba říct též o jejich doplňcích GB, SN do pravého úhlu, poněvadž tyto náležejí shodným kruhům. Avšak z utvoření cykloidy oblouk GB pohyblivého kruhu bude roven oblouku GB nepohyblivého kruhu. Budu tedy mít $SN.ME::OB.OE$.

Nuže dané OV označím jako b; KV nebo KA jako c; a neznámou KB jako u. Dostávám

$$OB=b+c-u \;;$$

a podobné výseče KEA, KSN mi dávají

$$KE(c).KS(u)::AE(x).SN=\frac{ux}{c}\;.$$

A tím pádem

$$OB(b+c-u).OE(z)::SN\left(\frac{ux}{c}\right).EM(y)=\frac{uxz}{bc+cc-cu}=\frac{xz}{a}\;.$$

Odkud

$$KB(u)=\frac{bc+cc}{a+c}\;.$$

Je tedy zjevné, že když vezmeme $KB = \frac{bc+cc}{a+c}$ a ze středů *K* a *O* opíšeme půlkruh *BSN* a oblouk *BGN*; křivka *AMD* bude polocykloidou opsanou odvalováním půlkruhu *BSN* po oblouku *BGN* a její tvořící bod *A* bude připadat vně, uvnitř, anebo na obvod tohoto kruhu podle toho, jestli $KV(c)$ bude větší, menší, nebo rovné $KB = \frac{bc+cc}{a+c}$, tj. podle toho, jestli *a* je větší, menší, nebo rovné $OV(b)$.

DŮSLEDEK I.

172. ZŘEJMĚ

$$EM(y).AE(x)::KB \times OE(uz).OB \times KV(bc+cc-uc).$$

Jestliže však předpokládáme, že *OB* se stane nekonečnou; úsečka *OE* bude též nekonečnou a stane se rovnoběžnou s *OB*, neboť ji nikdy neprotne; soustředné oblouky *BGN*, *EM* se stanou rovnoběžnými úsečkami kolmými na *OB*, *OE*; a tehdy se úsečka *EM* bude mít k oblouku $AE::KB.KV$, poněvadž když se nekonečné přímky *OE*, *OB* navzájem liší pouze o konečnou veličinu, je třeba je pokládat za sobě rovné.

DŮSLEDEK II.

173. Z rovnosti úhlů *MKO*, *EKO* vyplývá, že trojúhelníky *MKG*, *EKB* jsou rovné a podobné; a že se tak úsečky *MG*, *EB* rovnají navzájem. Odtud je zřejmé (§ 43), že pokud je třeba daným bodem *M* vést kolmici *MG* na epicykloidu; postačí, když ze středu *O* opíšeme oblouk *ME* a ze středu *M* o poloměru *EB* kruhový oblouk protínající základnu *BGN* v bodě *G*, jímž pak společně s daným *M* povedeme hledanou kolmici.

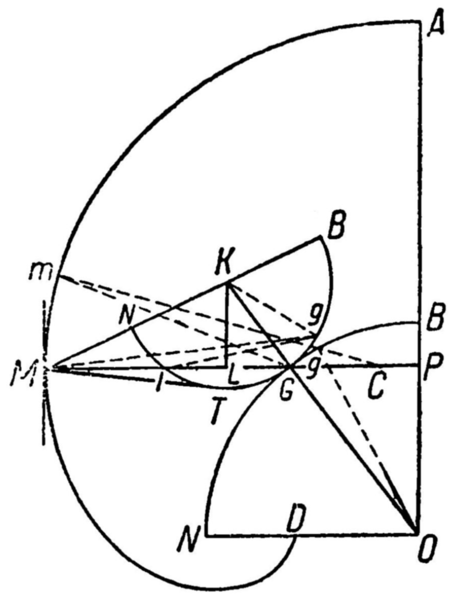
DŮSLEDEK III.

174. PRO případ, kdy je bod *G* daný na obvodu pohyblivého půlkruhu *BGN*; jestliže je třeba najít bod *M* epicykloidy, do kterého připadne opisující bod *A*, když se daný bod *G* dotýká základny; stačí vzít oblouk *SN* rovný oblouku *BG*; a když pak povedeme poloměr *KS* protínající v *E* obvod *AEV*, opsat dále o středu *O* oblouk *EM*. Poněvadž je zjevné, že tento oblouk protne epicykloidu v hledaném bodě *M*.

TVRZENÍ III.

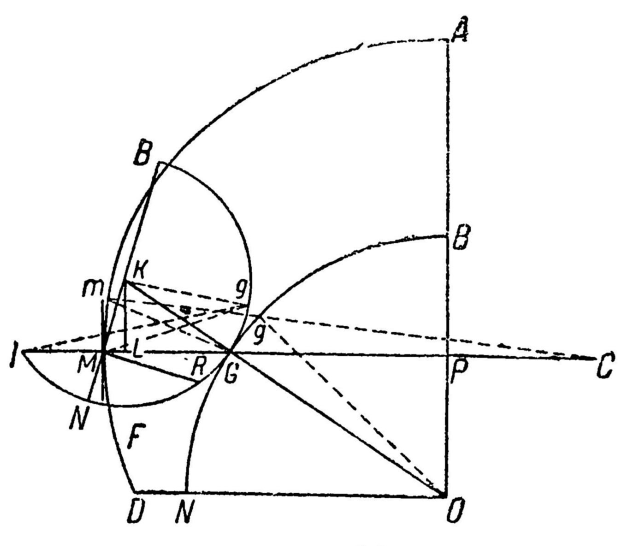
Zadání.

175. NECHŤ AMD (Obr. 135, 136) *je poloepicykloidou, která se opíše odvalováním půlkruhu* BGN *po jemu rovném oblouku* BGN *o jiném středu tak, že odvalené části* BG, BG *si budou vždy rovny; nechť* M *je opisující bod vzatý na průměru* BN *vně, uvnitř, nebo na pohyblivém obvodu* BGN. *Nyní je třeba najít bod* M *poloepicykloidy, který bude vzhledem k její ose* OA *nejvzdálenější.*



Obr. 135

Předpokládejme, že bod *M* je tím, který hledáme; pak zřejmě (§ 47) tečna v *M* musí být rovnoběžná s osou *OA*, a tím pádem kolmice *MG* na epicykloidu musí být kolmá rovněž na osu, s níž se protíná v bodě *P.* Nuže jestliže nyní povedeme středy tvořících kruhů úsečku *OK*, bude tato procházet tečným bodem *G*; a jestliže spustíme *KL* kolmou na *MG*, utvoří se shodné úhly *GKL*, *GOB*; a tím pádem oblouk *IG*, který je dvakrát větší než míra úhlu *GKL*, se bude mít k oblouku *GB*, tj. míře úhlu *GOB*, jako se má průměr *BN* k poloměru *OB*. Odtud plyne, že k určení bodu *G* na půlkruhu *BGN*, v němž se dotýká oblouku představujícího jeho základnu, když opisující bod *M* připadá do bodu o největší vzdálenosti; postačí rozdělit půlkruh *BGN* v bodě *G* takovém, že když daným bodem *M* povedeme tětivu *IG*; oblouk *IG* se bude mít k oblouku *BG* v daném poměru *BN* ku *OB*. Celá otázka se tedy zužuje na běžnou geometrickou úlohu, která má geometrické řešení vždy, když daný poměr představuje poměr dvou čísel; avšak toto řešení je vedeno za pomocí čar o rovnicích více nebo méně vysokého řádu odvislých od složitosti daného poměru.[130]



Obr. 136

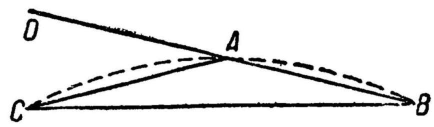
Jestliže předpokládáme, že poloměr *OB* se stane nekonečným; což nastává, když se základna *BGN* napřímí; plyne odtud, že oblouk *IG* bude ve srovnání s obloukem *GB* nekonečně malý. Odtud je zřejmé, že sečna *MIG* se změní v tečnu *MT*, pokud opisující bod *M* připadá vně pohyblivého kruhu; a že zde nemůže být žádný bod o největší vzdálenosti, pokud bod *M* připadne dovnitř.

Když bod *M* připadá na obvod do *N*; postačí rozdělit půlkružnici *BGN* v daném poměru *BN* ku *OB*, a sice v bodě *G*. Poněvadž takto nalezený bod *G* bude tím, ve kterém se pohyblivý kruh *BGN* dotýká základny, když opisující bod splyne s hledaným bodem.

LEMMA II.

176. PRO *každý trojúhelník* BAC (Obr. 137)*, jehož úhly* ABC*,* ACB *a* CAD *doplňující do dvou pravých tupý úhel* BAC *jsou nekonečně malé; tvrdím, že tyto úhly se k sobě mají ve stejném poměru jako jejich protilehlé strany* AC*,* AB*,* BC.

Neboť jestliže opíšeme kruh kolem trojúhelníku *BAC*, oblouky *AC*, *AB*, *BAC* měřící dvojnásobky daných úhlů budou nekonečně malé, a tudíž se nijak nebudou lišit (§ 3) od svých tětiv či strun.



Obr. 137

Pakliže strany *AC*, *AB*, *BC* trojúhelníku *BAC* nejsou nekonečně malé, nýbrž mají konečnou velikost; plyne odtud, že opsaný kruh musí být nekonečně velký; poněvadž oblouky *AC*, *AB*, *BAC*, jež mají konečnou velikost, musejí být ve srovnání s kruhem nekonečně malé, neboť jsou mírami nekonečně malých úhlů.

TVRZENÍ IV.

Zadání.

177. ZA *těch samých podmínek; je třeba na každé kolmici* MG *určit bod* C*, v němž se dotýká evoluty epicykloidy* (Obr. 135, 136).

Představme si druhou kolmici *mg* nekonečně blízkou *MG*, která tuto tím pádem protíná v hledaném bodě *C*; povedeme úsečku *Gm* a když pak na obvodu pohyblivého kruhu vezmeme malý oblouk *Gg* rovný oblouku *Gg* nehybného kruhu, povedeme úsečky *Mg*, *lg*, *Kg*, *Og*. Nuže pokud nyní budeme malé oblouky *Gg*, *Gg* pokládat za malé úsečky kolmé na poloměry *Kg*, *Og*; zřejmě poněvadž malý oblouk *Gg* pohyblivého kruhu připadá na oblouk *Gg* nehybného kruhu, opisující bod *M* připadne do *m* tak, že trojúhelník *GMg* splyne s trojúhelníkem *Gmg*. Odtud je zjevné, že úhel *MGm* se rovná úhlu $gGg = GKg + GOg$; neboť když zde k oběma stranách přičteme ty samé úhly *KGg*, *OGg*, vznikají dva pravé.

Avšak jestliže označíme dané *OG* jako *b*; *KG* jako *a*; *GM* nebo *Gm* jako *m*; *GI* nebo *Ig* jako *n*; nacházíme

1°. (§ 176) $OG.KG::GKg.GOg$. A $OG(b).OG+KG$ neboli $OK(b+a)::GKg.GKg+GOg$ neboli $MGm=\frac{a+b}{b}GKg$.

2°. (*Ibid.*) $Ig.MI::GMg.MgI$. A $Ig\pm MI$ neboli $MG(m).Ig(n)::GMg\pm MgI$ neboli Gig neboli $\frac{1}{2}GKg.GMg$ neboli $Gmg=\frac{n}{2m}GKg$.

3°. (*Ibid.*) Úhel

MCm neboli $MGm-Gmg\,(\overline{\frac{a+b}{b}-\frac{n}{2m}GKg}).Gmg\,(\frac{n}{2m}GKg)::Gm(m).GC=\frac{bmn}{2am+2bm-bn}$.

A tím pádem hledaný poloměr *MC* evoluty bude roven $\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}$.

Za předpokladu, že se poloměr $OG(b)$ nehybného kruhu stane nekonečným; jeho obvod se stane přímou čarou; a když se pak vyškrtnou členy $2amm$, $2am$, neboť ve srovnání se zbylými $2bmm$, $2bm-bn$ jsou nulové, budeme mít $MC=\frac{2mm}{2m-n}$.

DŮSLEDEK I.

178. Z toho, že úhel $MGm=\frac{a+b}{b}GKg$; a z toho, že oblouky různých kruhů se k sobě mají v poměru složeném z poloměrů a úhlů, které měří; plyne, že

$$Gg.Mm::KG\times GKg.MG\times\frac{a+b}{b}GKg.$$

A tím pádem též

$$KG\times Mm=\frac{a+b}{b}MG\times G\,g;$$

anebo (což je totéž)

$$KG\times Mm.MG\times G\,g::OK(a+b).OG(b),$$

což představuje nějaký konstantní poměr. Odtud je zjevné, že velikost úseku *AM* poloepicykloidy *AMD* závisí na sumě všech $MG\times G\,g$ pod obloukem *GB*. Což dokázal p. *Pascal* pro cykloidy mající za základnu přímou čáru.

P. *Varignon* přišel na tuto vlastnost cestou, která se od té naší velice odlišuje.

DŮSLEDEK II.

179. JESTLIŽE opisující bod *M* (Obr. 135) připadá vně obvodu pohyblivého kruhu; nastává nutně jeden ze tří následujících případů. Neboť když povedeme tečnu *MT*; tečný bod *G* připadne 1°. Na

oblouk *TB*, jak jsme předpokládali v obrazci použitém při výpočtu; a pak je $MC\left(\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}\right)$ vždy větší než $MG(m)$. Nebo 2°. Na tečný bod *T*; a tehdy $MC\left(\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}\right)=m$, poněvadž $IG(n)$ vymizí. Anebo 3°. Na oblouk *TN*; a tehdy se hodnota $GI(n)$ z kladné obrátí v zápornou, pročež budeme mít $MC=\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm+bn}$ tak, že *MC* bude menší než $MG(m)$ a zároveň vždy kladná. Odkud zjevné, že ve všech těchto případech bude hodnota poloměru *MC* evoluty vždy kladná.

DŮSLEDEK III.

180. JESTLIŽE opisující bod *M* (Obr. 136) spadá dovnitř obvodu pohyblivého kruhu; bude vždy platit

$$MC=\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn};$$

a pak může nastat, že bn bude větší než $2am+2bm$ tak, že hodnota poloměru *MC* bude záporná. Odtud je zjevné, že při jejím obratu z kladné v zápornou, což se děje, když (§ 81) se bod *M* stává bodem inflexním; nutně pak

$$bn=2am+2bm;$$

a tudíž

$$MI\times MG(nm-mm)=\frac{2amm+bmm}{b}.$$

Avšak když označíme danou *KM* jako *c*; z povahy kruhu dostaneme

$$MI\times MG\left(\frac{2amm+bmm}{b}\right)=BM\times MN(aa-cc),$$

odkud pak neznámá

$$MG(m)=\sqrt{\frac{aab+bcc}{2a+b}}.$$

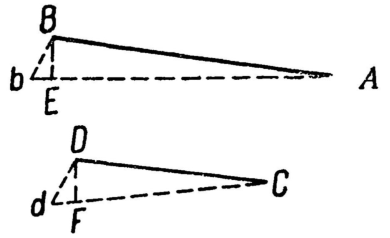
Jestliže tedy ze středu v daném bodě *M* opíšeme kruh o poloměru $MG=\sqrt{\frac{aab+bcc}{2a+b}}$; pak bude protínat pohyblivý kruh v bodě *G*, ve kterém se tento dotýká nehybného kruhu představujícího jeho základnu právě, když opisující bod *M* spadá v jedno s inflexním bodem *F*.

Jestliže povedeme MR kolmou na BN; pak zřejmě $MG=\sqrt{\frac{aab+bcc}{2a+b}}$ bude menší než $MR(\sqrt{aa-cc})$; a rovnat se musí v případě, že se b stane nekonečným, tj. když se základna epicykloidy stane přímou čarou.

Podotkněme, že pokud má kruh opsaný o poloměru MG protínat pohyblivý kruh; MG musí být větší než MN, tj. $\sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}}$ musí být větší než $a-c$; a takto $KM(c)$ musí být větší než $\frac{aa}{a+b}$. Odtud je zjevné, že epicykloida AMD může mít inflexní bod jedině tehdy, když KM bude menší než KN a větší než $\frac{aa}{a+b}$.

LEMMA III.

181. NECHŤ *v každém z trojúhelníků* ABb, CDd (Obr. 138) *je jedna strana* Bb, Dd *ve srovnání s ostatními nekonečně malá: tvrdím, že trojúhelník* ABb *se má k trojúhelníku* CDd *ve složeném poměru úhlu* BAb *k úhlu* DCd *a čtverce strany* AB *neboli* Ab *ku čtverci strany* CD *neboli* Cd.



Obr. 138

Neboť jestliže ze středů A, C o poloměrech AB, CD opíšeme kruhové oblouky BE, DF; zřejmě (§ 2) se trojúhelníky ABb, CDd nebudou nijak lišit od kruhových výsečí ABE, CDF. Tedy atd.

Jestliže jsou si strany AB, CD rovny; trojúhelníky ABb, CDd se k sobě budou mít jako jejich úhly BAb, DCd.

TVRZENÍ V.

Zadání.

182. OPĚT *za stejných podmínek*; *je třeba najít kvadraturu plochy* MGBA (Obr. 135) *ohraničené kolmicemi* MG, BA *na cykloidu, obloukem* GB *a úsekem* AM *polo epicykloidy* AMD, *přičemž kvadraturu kruhu předpokládáme.*

Úhel $GMg(\frac{n}{2m}GKg)$ se má k úhlu $MGm(\frac{a+b}{b}GKg)$ jako (§ 181) malý trojúhelník MGg, jehož základnou je oblouk Gg pohyblivého kruhu, ku malému trojúhelníku neboli výseči GMm; a tím pádem výseč

$$GMm=\frac{2m}{n}MGg\times\frac{a+b}{b}=\frac{2a+2b}{b}MGg+\frac{2ap+2bp}{bn}MGg\,,$$

když si *MI* označíme jako *p* a za *m* dosadíme jeho hodnotu $p+n$. Avšak (§ 181) malý trojúhelník neboli výseč *KGg* se má k malému trojúhelníku *MGg* ve složeném poměru čtverce *KG* ku čtverci *MG* a úhlu *GKg* k úhlu *GMg*, tj. $::aa\times GKg.mm\times\frac{n}{2m}GKg$; a tím pádem malý trojúhelník

$$MGg=\frac{mn}{2aa}KGg\ .$$

Když tedy tuto hodnotu dosadíme do $\frac{2ap+2bp}{bn}MGg$ na místo trojúhelníku *MGg*; budeme mít výseč

$$GMm=\frac{2a+2b}{b}MGg+\frac{\overline{a+b}\times pm}{aab}KGg\ .$$

Avšak z povahy kruhu $GM\times MI(pm)=BM\times MN(cc-aa)$, což je konstantní veličina, která zůstává stále stejná, ať už se opisující bod *M* nachází kdekoli; a tudíž $GMm+MGg$ neboli *mGg*, tj. malá plocha epicykloidy

$$GMmg=\frac{2a+3b}{b}MGg+\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KGg\ .$$

Ježto tedy *GMmg* je diferenciálem plochy epicykloidy *MGBA* a *MGg* diferenciálem zaoblené plochy *MGB* ohraničené úsečkami *MG*, MB a obloukem *GB*; a ježto navíc malá výseč *KGg* je diferenciálem výseče *KGB*; plyne odsud, že plocha epicykloidy

$$MGBA=\frac{2a+3b}{b}MGB+\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KGB\ .$$

Což také bylo třeba najít.

Jestliže opisující bod *M* (Obr. 139) spadá vně obvodu *BGN* pohyblivého kruhu; a tečný bod *G* připadne na oblouk *NT*; zjevně (§ 180) kolmice *MG*, *mg* se protnou v bodě *C*; a pak budeme mít

$$m=p-n\ .$$

Odkud pak plyne, že malá výseč

$$GMm=-\frac{2a-2b}{b}MGg+\frac{2ap-2bp}{bn}MGg=-\frac{2a-2b}{b}MGg+\frac{amp+bmp}{aab}KGg\ ,$$

když stejně jako předtím za malý trojúhelník *MGg* dosadíme jeho hodnotu $\frac{mn}{2aa}KGg$; a tím pádem

$GMm - MGg$ neboli mGg,

tj.

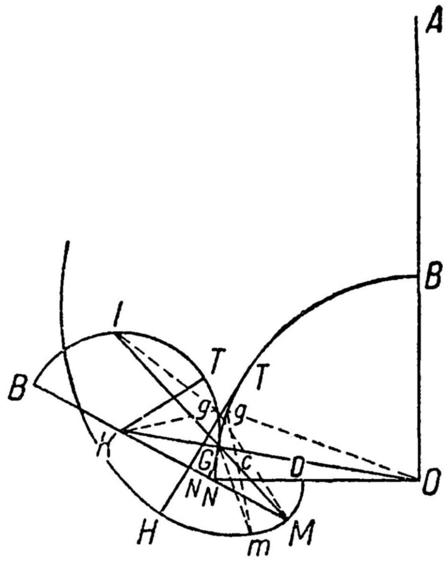
$$MCm - GCg = -\frac{2a-3b}{b}MGg + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KGg\ ,$$

když za pm dosadíme jeho hodnotu $cc-aa$. Avšak za předpokladu, že by TH představovalo polohu tečny TM vzhledem k pohyblivému kruhu, když se jeho bod T dotýká základny v bodě T; pak zřejmě

$$MCm - GCg = MGTH - mgTH\ ,$$

tj. diferenciál plochy $MGTH$; a MGg je diferenciálem plochy MGT právě tak, jako KGg plochy KGT. Tedy (§ 96) plocha

$$MGTH = -\frac{2a-3b}{b}MGT + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KGT\ .$$



Obr. 139

Avšak, jak jsme nyní dokázali, plocha

$$HTBA = \frac{2a+3b}{b}MTB + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KTB\ .$$

A tím pádem vždy a v každém případě plocha

$$MGBA(MGTH + HTBA) = \frac{2a+3b}{b}\overline{MTB - MGT}\ \text{neboli}$$

$$\text{neboli}\ MGB + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}\overline{KGT+KTB}\ \text{neboli}\ KGB.$$

Tedy celková plocha $DNBA$ (Obr. 135) ohraničená kolmicemi DN, BA na epicykloidu, kruhovým obloukem BGN a poloepicykloidou AMD je

$$= \overline{\frac{2a+3b}{b} + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}}\times KNGB\ ;$$

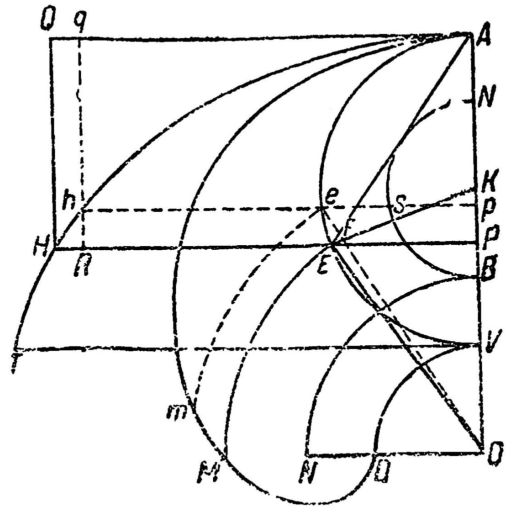
poněvadž jak výseč KGB, tak i část kruhu MGB se změní v půlkruh $KNGB$, jakmile tečný bod G připadne do bodu N.

Jestliže opisující bod M (Obr. 136) připadá dovnitř pohyblivého kruhu; pak je třeba do předešlých formulí na místo $aa-cc$ dosadit $cc-aa$; poněvadž tehdy $BM\times MN = aa-cc$.

Jestliže položíme $c=a$; získáme kvadraturu epicykloid, jejichž opisující bod leží na obvodu pohyblivého kruhu; a za předpokladu, že b je nekonečným, dostaneme kvadraturu cykloid, jež mají coby základnu přímou čáru.[131]

JINAK.

183. OPIŠME o poloměru *OD* oblouk *DV*; a o průměrech *AV*, *BN* půlkruhy *AEV*, *BSN* (Obr. 140).



Obr. 140

Když pak ze středu *O* o libovolném poloměru opíšeme oblouk *EM* ohraničený půlkruhem *AEV* a poloepicykloidou *AMD*; veďme ordinátu *EP*. Jedná se o to, najít kvadraturu plochy *AEM* obsažené mezi oblouky *AE*, *EM* a úsekem *AM* poloepicykloidy *AMD*.

Nuže budiž nějaký další oblouk *em*, soustředný a nekonečně blízký *EM*; další ordináta *ep* a další *Oe* protínající (v případě nutnosti) prodloužený oblouk *ME* v bodě *F*. Označme proměnné *Oe* jako *z*; *VP* jako *u*; oblouk *AE* jako *x*; a tak jako předtím konstanty *OB* jako *b*; *KB* nebo *KN* jako *a*; *KV* nebo *KA* jako *c*: budeme mít

$$Fe=dz\ ,\ Pp=du\ ,\ OP=a+b-c+u\ ,\ \overline{PE}=2cu-uu\ ,\ \text{oblouk } EM\ (\S\ 172)\ =\frac{axz}{bc}\ ;$$

a tím pádem pravoúhelník tvořený obloukem *EM* a malou úsečkou *Fe*, tj. (§ 2) malá plocha

$$EMme=\frac{axz\,dz}{bc}\ .$$

Avšak z pravoúhlého trojúhelníku *OPE* plyne, že

$$zz=aa+2ab+bb-2ac-2bc+cc+2au+2bu\ ,$$

odkud diferenciál činí

$$z\,dz=a\,du+b\,du\ .$$

A jestliže tedy tuto hodnotu dosadíme do $\frac{axz\,dz}{bc}$ na místo $z\,dz$, budeme mít malou plochu

$$EMme=\frac{aax\,du+abx\,du}{bc}\ .$$

Nyní jestliže odvalováním půlkruhu *AEV* po úsečce *VT* kolmé na *VA* opíšeme poloepicykloidu *AHT* a prodloužíme ordináty *PE*, *pe*, dokud se neprotnou v bodech *H*, *h*; pak zřejmě (§ 172)

$$EH\times Pp\ ,\ \text{tj. malá plocha}\ EHhe=x\,du\ ;$$

a takto

$$EMme\left(\frac{aax\,du+abx\,du}{bc}\right).\,EHhe\left(x\,du\right)::aa+ab.bc\ ,$$

což představuje nějaký konstantní poměr. Jelikož však toto nastává vždy, a to nezávisle na místu, ve kterém se právě nachází oblouk *EM*; plyne odtud, že suma veškerých malých ploch *EMme*, tj. plocha *AEM* se má k sumě všech malých ploch *EHhe*, tj. ploše $AEH::aa+ab.bc$. Avšak kvadraturu plochy *AEM* máme (§ 99) na základě kvadratury kruhu; a tím pádem máme i kvadraturu hledané plochy *AEM*.

Toto je možno dokázat i bez jakéhokoli počítání, jak jsem předvedl v *Aktech lipských* ze srpna roku 1695.

Kvadratura plochy *AEH* se dá nalézt též nezávisle na § 99. Neboť jestliže dokončíme rovnoběžník *PQpq*; budeme mít *Qq* neboli $HR.Pp$ neboli $Rh::EP.PA$ neboli *HQ*; poněvadž (§ 18) tečna v *H* je rovnoběžná s tětivou *AE*; a tím pádem $HQ\times Qq=EP\times Pp$, tj. malé plochy *HQqh*, *EPpe* jsou si navzájem vždy rovny. Odtud plyne, že plocha *AHQ* ohraničená kolmicemi *AQ*, *QH* a úsekem *AH* poloepicykloidy *AHT* je rovna ploše *APE* ohraničené kolmicemi *AP*, *PE* a obloukem *AE*. Plocha *AEH* se tedy bude rovnat pravoúhelníku *PQ* minus dvojnásobek části kruhu *APE*, tj. rovnoběžníku sestrojenému z *PE* a *KA* plus nebo minus pravoúhelník sestrojený z úsečky *KP* a oblouku *AE* podle toho, zda-li bod *P* připadá pod nebo nad střed. A tudíž hledaná plocha

$$AEM=\frac{aa+ab}{bc}\overline{PE\times KA\pm KP\times AE}\ .$$

DŮSLEDEK I.

184. KDYŽ bod *P* spadá v jedno s bodem *K*; pravoúhelník $KP\times AE$ vymizí a pravoúhelník $PE\times KA$ se stane rovným čtverci *KA*. Odtud je zřejmé, že v tomto případě plocha

$$AEM=\frac{aac+abc}{b}\ ;$$

a že tím pádem připouští absolutní kvadraturu, a to nezávisle na kvadratuře kruhu.

DŮSLEDEK II.

185. JESTLIŽE k ploše *AEM* připojíme výseč *AKE*; plocha *AKEM* ohraničená poloměry *AK*, *KE*, obloukem *EM* a úsekem *AM* poloepicykloidy *AMD* bude (pokud bod *P* připadá nad střed *K*) rovna

$$\frac{bcc+2\,aac+2\,abc-2\,aau-2\,abu}{2\,bc}AE+\frac{aa+ab}{bc}PE\times KA\ ;$$

a pokud tedy vezmeme

$$VP(u)=\frac{2\,aac+2\,abc+bcc}{2\,aa+2\,ab}$$

(což činí hodnotu $\frac{bcc+2\,aac+2\,abc-2\,aau-2\,abu}{2\,bc}AE$ rovnou nule), budeme mít plochu

$$AKEM=\frac{aa+ab}{bc}PE\times KA\ .$$

Odkud je patrné, že i její kvadratura je nezávislá na kvadratuře kruhu.

Ze všech ploch *AEM* a *AKEM* zřejmě jen tyto dvě, o nichž právě byla řeč, mohou mít absolutní kvadraturu.

UPOZORNĚNÍ.

Vše, co bylo výše dokázáno pro epicykloidy, platí přirozeně též pro hypocykloidy, tj. pro cykloidy, jejichž pohyblivý kruh se odvaluje uvnitř nehybného; a to pokud si uvědomíme, že se poloměry KB(a) *,* KV(c) *z kladných obracejí v záporné. Proto bude zapotřebí změnit v předešlých formulích znaménka u členů, kde* a *a* c *vystupují v liché mocnině.*[132]

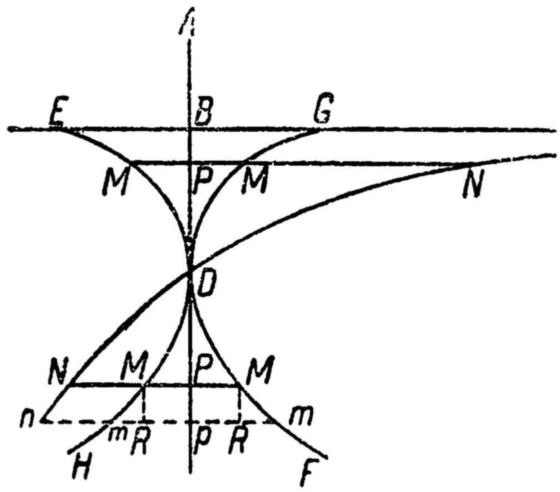
POZNÁMKA.

186. JSOU křivky, u nichž se zdá, jako by měly inflexní bod; a které nicméně žádný nemají. Domnívám se, že nebude od věci toto vysvětlit na příkladu, neboť by to mohlo působit jisté těžkosti.

Mějme geometrickou křivku *NDN* (Obr. 141), jejíž povahu vyjádříme rovnicí

$$z=\frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}\ \ (AP=x\ ,\ PN=z\ )$$

kde je jasné, že 1°. Když je *x* rovno *a*, $PN(z)$ vymizí. 2°. Když je větší *x* je větší než *a*, hodnota je *z* kladná; a naopak pokud je menší, bude záporná. 3°. Při $x=\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ je hodnota *PN* nekonečná. Odtud je zjevné, že křivka *NDN* probíhá po obou stranách své osy a protíná ji v bodě *D* takovém, že $AD=a$; a že její asymptotou je kolmice *BG* vedená bodem *B* takovým, že $AB=\sqrt{\frac{1}{2}aa}$.



Obr. 141

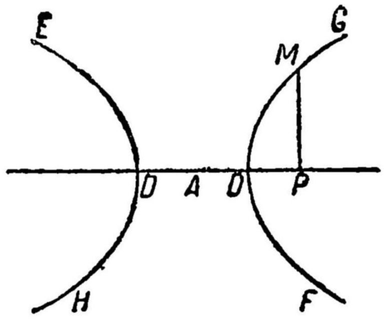
Jestliže nyní opíšeme druhou křivku *EDF* takovou, že pokud dle libosti povedeme kolmici *MPN*; pravoúhelník utvořený ordinátou *PM* a konstantní *AD* se bude vždy rovnat odpovídající ploše *DPN*. Je zjevné, že když *PM* označíme jako *y*; a vezmeme diferenciály, budeme mít

$$AD\times Rm(a\,dy)=NPpn \text{ neboli } NP\times Pp(\frac{xx\,dx-aa\,dx}{\sqrt{2xx-aa}})\ ;$$

a tím pádem

$$Rm(dy).Pp \text{ neboli } RM\ (dx)::PN.AD\ .$$

Odtud plyne, že křivka *EDF* se dotýká asymptoty *BG* prodloužené za *B* v bodě *E*; a osy *AP* v bodě *D*; a že tak musí mít inflexní bod v *D*. Nicméně pro poloměr její evoluty nacházíme (§ 78) hodnotu $-\frac{x^3}{2aa}$, která je vždy záporná a nastává rovnou $-\frac{1}{2}a$, když bod *M* spadne v jedno s *D*; odkud je třeba udělat závěr (§ 81), že křivka procházející všemi body *M* je vůči ose vždy vydutá a že v *D* nemá inflexní bod. Jak tedy toto vše skloubit dohromady? Přistupme k rozřešení.

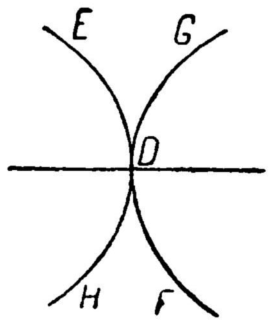


Obr. 142

Jestliže vezmeme *PM* na stejné straně jako *PN*; vzniká druhá křivka *GDH*, která je veskrze podobná *EDF* a též musí být její částí; ježto se utváří tím samým způsobem. Je-li tomu tak, pak je třeba uvažovat, že celková křivka se nebude skládat z částí *EDF*, *GDH*, jak jsme se domnívali, nýbrž z částí *EDH*, *GDF*, které se dotýkají v bodě *D*; neboť za tohoto předpokladu bude vše v nejlepším pořádku. Což také potvrzuje i následující příklad.

Budiž křivka *DMG* (Obr. 142) s rovnicí $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$ ($AP = x$, $PM = y$). Z této rovnice plyne, že celková křivka má podobně jako obecná hyperbola dvě navzájem protilehlé části takové, že jejich vzdálenost *DD* neboli $2\,AD = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$.

Za předpokladu, že *b* vymizí (Obr. 143); délka *DD* vymizí též; a tím pádem se obě dvě části *EDH*, *GDF* budou dotýkat v bodě *D*; čili bude nyní možno uvažovat, že daná křivka má v *D* bod přehybu nebo vratu podle toho, zdali si za její části představíme *EDF*, *GDH* nebo *EDG*, *HDF*. Nicméně snadno bychom zjistili, jak se věci mají, a to nalezením poloměru evoluty; poněvadž by se ukázalo, že bude vždy kladný, přičemž v bodě *D* se stane rovným $\frac{1}{2}a$.



Obr. 143

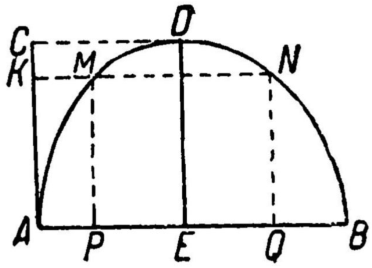
Mimochodem lze podotknout, že kvadratura plochy *DPN* (Obr. 141) závisí na kvadratuře hyperboly; anebo (což je totéž) na rektifikaci paraboly; a že úsek křivky *DMF* splňuje úlohu předloženou panem *Bernoullim* v druhém svazku dodatků *Akt lipských*, s. 291.[133]

ODDÍL DESÁTÝ.

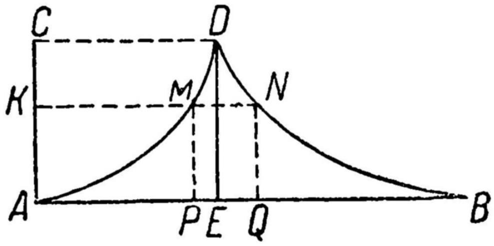
Nový způsob užití diferenciálního počtu u geometrických křivek, odkud se vyvozuje metoda pánů Descarta *a* Hudda.

DEFINICE I.

BUDIŽ křivka *ADB* (Obr. 144, 145, 146) taková, že úsečky *KMN* rovnoběžné s jejím průměrem *AB* ji protínají v bodech *M*, *N*; uvažujme dále, že vydělená část *MN* nebo *PQ* se stane nekonečně malou. V takovém případě ji budeme nazývat *diferenciálem* abscisy *AP* nebo *KM*.[134]



Obr. 144



Obr. 145

DŮSLEDEK I.

187. KDYŽ se část *MN* nebo *PQ* stane nekonečně malou; zřejmě každá z abscis *AP*, *AQ* se stává rovnou *AE* a body *M*, *N* připadnou oba do bodu *D* tak, že ordináta *ED* je buďto největší, anebo nejmenší ze všech podobných *PM*, *NQ*.

DŮSLEDEK II.

188. JE zřejmé, že ze všech abscis *AP* jedině *AE* má diferenciál; poněvadž jedině v tomto případě se *PQ* stává nekonečně malou.

DŮSLEDEK III.

189. JESTLIŽE označíme neurčité *AP* nebo *KM* jako *x*; *PM* nebo *AK* jako *y*; zřejmě pokud $AK(y)$ zůstává neměnným, pak *x* musí nabývat dvou různých hodnot, totiž *KM*, *KN* nebo *AP*, *AQ*. A proto rovnice vyjadřující povahu křivky *ADB* musí být usměrněna, aby jedna a ta samá neznámá *x*, která označuje její kořeny (ježto *y* pokládáme za známou), mohla nabývat rozličných hodnot. Což je třeba nadále mít na zřeteli.

TVRZENÍ I.

Zadání.

190. JE *dána povaha geometrické křivky* ADB*; a nyní je třeba určit největší nebo nejmenší z jejích ordinát* ED.

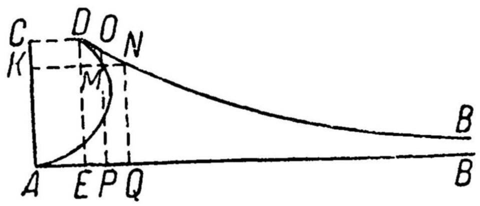
Jestliže vezmeme diferenciál rovnice vyjadřující povahu křivky, přičemž y uvažujeme jako konstantní a x jako proměnnou; pak zřejmě vznikne (§ 188) nová rovnice, jež bude mít jako jeden z kořenů hodnotu *AE* takovou, že ordináta *ED* bude největší nebo nejmenší ze všech jí podobných.

Mějme například $x^3+y^3=axy$. Diferenciál této rovnice, pokud x počítáme za proměnnou a y za konstantní, činí $3xx\,dx=ay\,dx$; a tím pádem $y=\frac{3xx}{a}$. Když tuto hodnotu dosadíme na místo y do rovnice křivky $x^3+y^3=axy$; dostáváme pro x hodnotu $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$ takovou, že ordináta *ED* bude největší ze všech jí podobných, jak se již ukázalo v § 48.

Je zjevné, že stejným způsobem určíme nejen body *D*, kdy jsou ordináty *ED* kolmé nebo tečné ke křivce *ADB*; ale také body *D*, kdy jsou šikmé, tj. kdy body *D* jsou body vratu prvého nebo druhého řádu. Odtud je patrné, že tento nový způsob, jak pojímat diferenciály u geometrických křivek je leckdy jednodušší a méně náročný nežli ten, který jsme představili nejprve (Odd. 3).

POZNÁMKA.

191. KE křivkám s bodem vratu lze podotknout, že čáry *PM* (Obr. 146) rovnoběžné s *AK* je protínají ve dvou bodech *M*, *O*; stejně jako je *KM* rovnoběžné s *AP* protínají v *M*, *N*; a sice tak, že pokud $AP(x)$ zůstává neměnnou, pak y nabývá dvou různých hodnot *PM*, *PO*. A proto při diferencování rovnice, která vyjadřuje povahu této křivky, můžeme x počítat za konstantní a y za proměnnou. Odtud je zřejmé, že pokud x a y pokládáme za proměnné; pak bude zapotřebí, aby se veškeré členy vstupující do součinu jednak s dx, jednak s dy rovnaly nule. Ovšem je třeba mít stále na zřeteli, že dx a dy zde označují diferenciál dvou ordinát vycházejících z jednoho a toho samého bodu a nikoli (jako výše, Odd. 3) diferenciál dvou ordinát, jež jsou si nekonečně blízké.[135]



Obr. 146

DŮSLEDEK.

192. JESTLIŽE po uspořádání rovnice vyjadřující křivku toliko o jedné neznámé proměnné x vezmeme její diferenciál; pak je zřejmé, že 1°. Tímto neprovádíme nic jiného než, že každý člen vynásobíme exponentem mocniny x a diferenciálem dx a následně vydělíme x. 2°. Toto dělení x stejně tak jako násobení dx lze zanedbat, poněvadž jsou pro všechny členy stejné. 3°. Exponenty mocnin x tvoří aritmetickou posloupnost, jejíž první člen je mocnitelem nejvyšší mocniny a poslední nula; neboť podle předpokladu jsme členy, které je možno z rovnice vypustit, označili hvězdičkou.[136]

Nechť například $x^3 * - ayx + y^3 = 0$. Jestliže každý člen vynásobíme členy aritmetické posloupnosti $3, 2, 1, 0$; vznikne nová rovnice $3x^3 - ayx = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & * & -ayx & +y^3 & = & 0. \\ 3, & 2, & 1, & 0. & & \\ \hline 3x^3 & * & -ayx & * & = & 0. \end{array}$$

Odtud dostáváme $y = \frac{3xx}{a}$; právě tak, jako kdybychom diferencovali obvyklým způsobem.

Nuže tvrdím, že místo aritmetické posloupnosti 3, 2, 1, 0 lze použít libovolnou jinou aritmetickou posloupnost: $m+3$, $m+2$, $m+1$, $m+0$, čili m (označujeme m libovolné číslo celé nebo lomené, kladné nebo záporné). Neboť ze součinu $x^3 * - ayx + y^3 = 0$ krát x^m budeme mít $x^{m+1} *$, atd. $= 0$, přičemž pro nalezení diferenciálu je třeba, každý se svým protějškem, tyto členy vynásobit, členy posloupnosti $m+3$, $m+2$, $m+1$, m.

$$\begin{array}{cccccc} x^{m+3} & * & -ayx^{m+1} & +y^3 x^m & = & 0. \\ m+3, & m+2 & m+1, & m. & & \\ \hline \overline{m+3}\, x^{m+3} & * & -\overline{m+1}\, ayx^{m+1} & +my^3 x^m & = & 0. \end{array}$$

Odkud

$$\overline{m+3}\, x^{m+3} - \overline{m+1}\, ayx^{m+1} + my^3 x^m = 0;$$

což když vydělíme x^m, dává

$$\overline{m+3}\, x^3 - \overline{m+1}\, ayx + my^3 = 0;$$

zrovna tak, jako bychom byli prve dostali prostým vynásobením zadané rovnice členy posloupnosti $m+3$, $m+2$, $m+1$, m.

Při $m = -3$ dostáváme posloupnost 0, -1, -2, -3; a rovnice bude $2ayx - 3y^3 = 0$. Při $m = -1$ bude posloupnost 2, 1, 0; a rovnice $2x^3 - y^3 = 0$.

Je možno změnit znaménka všech členů posloupnosti, tj. místo $0, -1, -2, -3$ a $2, 1, 0, -1$, můžeme vzít $0, 1, 2, 3$ a $-2, -1, 0, 1$; neboť tím se stane jen to, že změníme znaménka všech členů nové rovnice, která musí být položena rovna nule. A skutečně, místo $2ayx-3y^3=0$, $2x^3-y^3=0$, budeme mít $-2ayx+3y^3=0$, $-2x^3+y^3=0$; což je totéž.

Avšak je zřejmé, že to, co jsme právě dokázali o tomto příkladu, platí stejným způsobem i o všech ostatních. Odtud plyne, že pokud u náležitě upravené rovnice, která musí mít dva navzájem rovné kořeny, vynásobíme její členy členy nějaké libovolné aritmetické posloupnosti; pak vzniká nová rovnice, jež bude mezi svými kořeny zahrnovat jeden ze dvou sobě rovných kořenů rovnice prvé. A ze stejného důvodu, jestliže tato nová rovnice má mít opět dva navzájem rovné kořeny; a nechť je vynásobena nějakou aritmetickou posloupností; povstává rovnice třetí, která bude mít mezi svými kořeny jeden ze dvou sobě rovných kořenů druhé rovnice; a tak podobně. Čili jestliže vynásobíme rovnici, která má mít trojnásobný kořen, součinem dvou aritmetických posloupností, utvoří se nová rovnice, jež mezi svými kořeny bude mít jeden ze tří navzájem rovných kořenů první rovnice; a stejně tak pokud má mít rovnice čtyřnásobný kořen, bude třeba ji vynásobit součinem tří aritmetických posloupností; a pokud pět, součinem čtyř, atd.

Což je přesně jádro metody p. *Hudda*.

TVRZENÍ II.

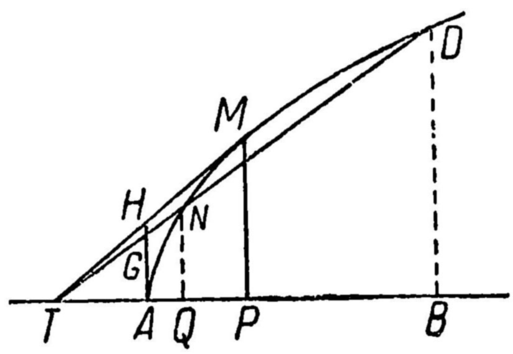
Zadání.

193. Z *daného bodu* T *na průměru* AB (Obr. 147)*, nebo z daného bodu* H *na* AH *rovnoběžné s ordinátami; je třeba vést tečnu* THM.

Tečným bodem *M* veďme ordinátu *MP* a označme *AT* jako *s*; *AH* jako *t*, kde jedna, nebo druhá je dána; a neznámé *AP* jako *x*; *PM* jako *y*. Nuže podobné trojúhelníky *TAH*, *TPM* dají

$$y=\frac{st+tx}{s},\quad x=\frac{sy-st}{t};$$

dosazením těchto hodnot na místa x a y v dané rovnici vyjadřující povahu křivky *AMD*, utvoříme novou rovnici, ve které se *x*, nebo *y* nadále nebude vyskytovat.



Obr. 147

Jestliže nyní povedeme přímou čáru *TD* protínající úsečku *AH* v *G* a křivku *AMD* ve dvou bodech *N*, *D*, ze kterých spustíme ordináty *NQ*, *DB*; pak je zjevné, že ježto *t* vyjadřuje v předchozí rovnici *AG*; *x*, nebo *y* budou mít dvě hodnoty *AQ*, *AB*, nebo *NQ*, *DB*, které se stanou rovnými navzájem; a sice budou se rovnat hledané *AP*, nebo *PM* právě, když *t* vyjadřuje *AH*, tj. když se sečna *TDN* stane tečnou *TM*. Odtud plyne, že tato rovnice musí mít jeden dvojnásobný kořen. Proto ji vynásobíme nějakou libovolnou aritmetickou posloupností, což v případě nutnosti budeme opakovat a rovnici opět vynásobíme libovolnou jinou aritmetickou posloupností, abychom pak porovnáním výsledných rovnic mohli nalézt tu, která zahrnuje toliko neznámou *x*, nebo *y* a danou *s*, nebo *t*. Následující příklad tuto metodu dostatečně osvětlí.

PŘÍKLAD.

194. NECHŤ $ax=yy$ je rovnice vyjadřující povahu křivky *AMD*. Jestliže na místo *x* dosadíme jeho hodnotu $\frac{sy-st}{t}$, budeme mít tyy, atd., která musí mít jeden dvojnásobný kořen.

$$\begin{array}{llll} tyy & -asy & +ast & = 0. \\ 1\,, & 0\,, & -1\,. & \\ \hline tyy & * & -ast & = 0. \end{array}$$

Jestliže tedy tyto členy po pořádku vynásobíme členy aritmetické posloupnosti $1\,,\ 0\,,\ -1\,,$ dostaneme $as=yy=ax$; a tím pádem $AP(x)=s$. Odtud je zřejmé, že když vezmeme $AP=AT$ a povedeme ordinátu *PM*; čára *TM* bude tečnou v *M*. Jestliže však je místo $AT(s)$ danou veličinou $AH(t)$; pak je třeba tu samou rovnici tyy , atd. vynásobit jinou posloupností, totiž $0\,,\ 1\,,\ 2$; a budeme mít hledanou $PM(y)=2t$.

Stejnou konstrukci bychom našli, kdyby se do $ax=yy$ za *y* dosadila jeho hodnota $\frac{st+tx}{s}$. Neboť pak vychází rovnice $ttxx$, atd.; přičemž součin jejích členů krát $1\,,\ 0\,,\ -1$ dává $xx=ss$; a tudíž $AP(x)=s$.

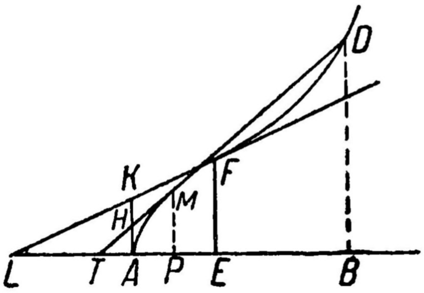
DŮSLEDEK.

195. JESTLIŽE nyní předpokládáme, že dán je bod *M*; a je třeba najít bod *T*, nebo *H*, ve kterém tečna *MT* protíná průměr, nebo *AH* rovnoběžnou s ordinátami; pak stačí v poslední rovnici, jež vyjadřuje hodnotu neznámé *x*, nebo *y* vzhledem k dané *s*, nebo *t*, tuto poslední pokládát za neznámou a *x*, nebo *y* za známou.

TVRZENÍ III.

Zadání.

196. POVAHA *geometrické křivky* AFD (Obr. 148) *je dána*; *a nyní je třeba určit její inflexní bod* F.



Obr. 148

Veďme hledaným bodem F ordinátu FE a tečnu FL; a bodem A (počátek x-ů) veďme AK rovnoběžnou s ordinátami. Označíme neznámé LA jako s; AK jako t; AE jako x; EF jako y: podobné trojúhelníky LAK, LEF dají opět $y=\frac{st+tx}{s}$ a $x=\frac{sy-st}{t}$ tak, že když tyto hodnoty dosadíme do rovnice křivky na místo y, nebo x; vznikne nová rovnice, ve které se y, nebo x nadále nebudou vyskytovat stejně tak, jako tomu bylo v předchozím tvrzení.

Jestliže nyní povedeme přímou čáru TD, která protíná úsečku AK v H, křivky AFD se dotýká v M a protíná ji v D; a z těchto bodů spustíme ordináty MP, DB; pak zjevně 1°. Poněvadž s vyjadřuje AT; a t vyjadřuje AH; nalezená rovnice musí mít jeden dvojnásobný kořen, a sice rovný (§ 193) AP, nebo PM podle toho, zdali jsme nechali vymizet y, nebo x; a navíc další kořen AB, nebo BD. 2°. Ježto s vyjadřuje AL; a t vyjadřuje AK; tečný bod M splyne s bodem průniku D v hledaném bodě F: neboť (§ 67) v inflexním bodě F se tečna LF musí dotýkat křivky a zároveň ji protínat; a takto se hodnoty AP, AB pro x nebo PM, BD pro y stanou rovnými navzájem; totiž obě se budou rovnat hledané AE, EF. Odtud vyplývá, že rovnice musí mít jeden trojnásobný kořen. A proto ji vynásobíme součinem dvou libovolných aritmetických posloupností; což se v případě nutnosti provede opakovaně tak, že ji stejným způsobem vynásobíme dalším součinem dvou libovolných aritmetických řad, abychom na základě porovnání výsledných rovnic mohli nechat vymizet neznámé s a t.

PŘÍKLAD.

197. BUDIŽ rovnice $ayy=xyy+aax$ vyjadřující povahu křivky AFD. Když za x dosadíme jeho hodnotu $\frac{sy-st}{t}$, vzniká rovnice $sy^3-styy-atyy$, atd.

sy^3	$styy$	$+aasy$	$-aast$	$=0$.
	$-at$			
1,	0,	-1	-2.	
3,	2,	1,	0.	
$3sy^3$	*	$-aasy$	*	$=0$.

kterou když vynásobíme 3, 0, -1, 0, tj. součinem dvou aritmetických posloupností 1, 0, -1, -2 a 3, 2, 1, 0; budeme mít

$$yy = \frac{1}{3}aa\ ;$$

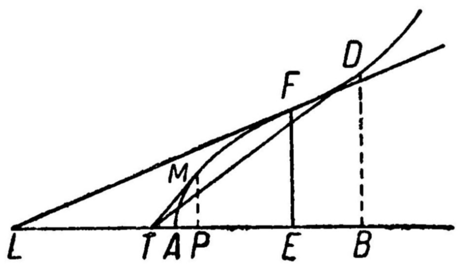
a když tuto hodnotu dosadíme do rovnice křivky, najdeme neznámou

$$AE(x) = \frac{1}{4}a\ .$$

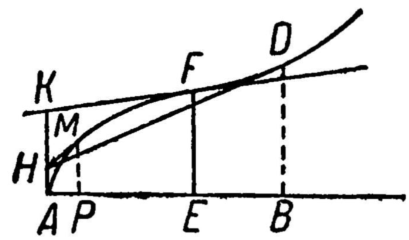
Což nás přivádí zpět k § 68.

JINAK.

198. TUTO úlohu můžeme řešit též s poukazem na to, že z jednoho a toho samého bodu L, nebo K (Obr. 149, 150) lze vést toliko jedinou tečnu LF, nebo KF, neboť tato se z vnějšku dotýká vyduté části AF a zevnitř vypouklé FD; zatímco z jakéhokoli jiného bodu T, nebo H vzatém na AL, nebo AK mezi A a L, nebo A a K je možno vést dvě tečny TM, TD, nebo HM, HD: jednu k části vyduté a druhou k vypouklé. Inflexní bod tak lze pokládat za průnik dvou tečných bodů M a D. A tedy za předpokladu, že $AT(s)$, nebo $AH(t)$ jsou dány a my hledáme (§ 194) hodnotu x, nebo y vtaženou k s, nebo t; dostaneme rovnici o dvou kořenech AP, AB, nebo PM, BD, jež se oba stanou rovny hledané AE, nebo EF, když s vyjadřuje AL a t vyjadřuje AK. Jestliže tedy tuto rovnici vynásobíme libovolnou aritmetickou posloupností, atd.



Obr. 149



Obr. 150

PŘÍKLAD.

199. BUDIŽ tak jako výše $ayy = xyy + aax$; opět dostáváme $sy^3 - styy - atyy + aasy - aast = 0$, což v součinu s aritmetickou posloupností 1 , 0 , -1 , -2 dává rovnici

$$y^3 * - aay - 2aat = 0\ ,$$

kde se nadále s nevyskytuje a která má dva různé kořeny, totiž PM, BD, když t vyjadřuje AH; a jeden dvojnásobný rovný hledané EF, když t vyjadřuje AK. Jestliže tedy tuto poslední rovnici znovu vynásobíme aritmetickou posloupností 3 , 2 , 1 , 0 , dostaneme

$$3yy - aa = 0\ ;$$

a tím pádem

$$EF(y)=\sqrt{\frac{1}{3}aa}\ .$$

Což bylo třeba najít.

TVRZENÍ IV.

Zadání.

200. VÉST *z daného bodu* C *vně křivky* AMD (Obr. 151) *kolmici* CM *na tuto křivku*.

Veďme kolmice *MP*, *CK* na průměr *AB* a ze středu *C* o poloměru *CM* opišme kruh; je zřejmé, že se křivky dotkne v bodě *M*. Když pak označíme neznámé *AP* jako *x*; *PM* jako *y*; *CM* jako *r*; a známé *AK* jako *c*; *KC* jako *t*: budeme mít *PK* neboli

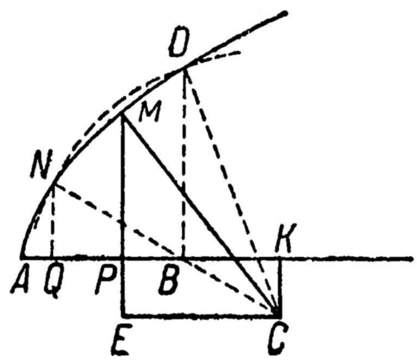
$$CE=s-x\ ,\ \ ME=y+t\ ;$$

a na základě pravoúhlého trojúhelníku *MEC* potom

$$y=-t+\sqrt{rr-ss+2sx-xx}\ ,\ \ x=s-\sqrt{rr-tt-2ty-yy}$$

a pokud tyto hodnoty dosadíme na místa *y*, nebo *x* do rovnice křivky, vznikne odtud nová rovnice, ve které se *y*, nebo *x* nadále nebudou vyskytovat.

Jestliže nyní z toho samého středu *C* opíšeme další kruh protínající křivku ve dvou bodech *N*, *D*, z nichž spustíme kolmice *NQ*, *DB*; zjevně ježto *r* vyjadřuje v předchozí rovnici poloměr *CN*, nebo *CD*, pak *x*, nebo *y* nabude dvou hodnot *AQ*, *AB*, nebo *NQ*, *DB*, jež se stanou navzájem rovnými, a sice budou se rovnat hledané *AP*, nebo *PM* právě, když *r* vyjadřuje poloměr *CM*. Odtud plyne, že rovnice musí mít jeden dvojnásobný kořen. A proto ji vynásobíme, atd.



Obr. 151

PŘÍKLAD.

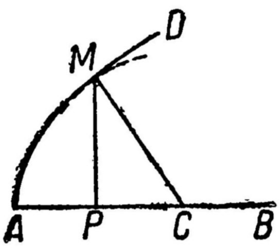
201. NECHŤ rovnice $ax=yy$ vyjadřuje povahu křivky *AMD*. Jestliže do ní na místo *x* dosadíme jeho hodnotu $s-\sqrt{rr-tt-2ty-yy}$, budeme mít $as-yy=a\sqrt{rr-tt-2ty-yy}$ tak, že když každý člen umocníme na druhou a následně rovnici náležitě uspořádáme; nalezneme následující y^4, atd., jež musí mít jeden dvojnásobný kořen, jakmile *y* vyjadřuje hledanou *PM*.

$$\begin{array}{llllll} y^4 & * & -2asyy & +2aaty & +aass & = 0\,. \\ & & +aa & & -aarr & \\ & & & & +aatt & \\ 4\,, & 3\,, & 2\,, & 1\,, & 0\,. & \\ \hline 4y^4 & * & -4asyy & +2aaty & * & = 0\,. \\ & & +2aa & & & \end{array}$$

Tedy ji vynásobíme aritmetickou posloupností $4\,,\ 3\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 0$ a dostaneme rovnici

$$4y^3 - 4asy + 2aay + 2aat = 0\,,$$

jejíž řešením se pro *y* dobereme hledané hodnoty *MP*.



Obr. 152

Kdyby daný bod *C* připadal na průměr *AB* (Obr. 152); měli bychom $t=0$, a tím pádem by bylo třeba odstranit všechny členy, kde se *t* vyskytuje; což by dávalo

$$4as - 2aa = 4yy = 4ax\,,$$

když bychom za yy dosadili jeho hodnotu ax. Odtud získáme

$$x = s - \frac{1}{2}a\,,$$

tj. když *CP* vezmeme rovnou polovině parametru a po vztyčení ordináty *PM* kolmé na *AB* povedeme přímou čáru *CM*; pak tato bude kolmá na křivku *AMD*.

DŮSLEDEK.

202. JESTLIŽE nyní předpokládáme, že bod *M* (Obr. 152) je daný a hledá se bod *C*; pak bude zapotřebí v poslední rovnici, jež vyjadřuje hodnotu $AC(s)$ v poměru k $AP(x)$, nebo $PM(y)$, pokládat tyto za známé a onu za neznámou.

DEFINICE II.

Jestliže o libovolném poloměru evoluty opíšeme kruh, bude se nazývat *oskulační kruh*.

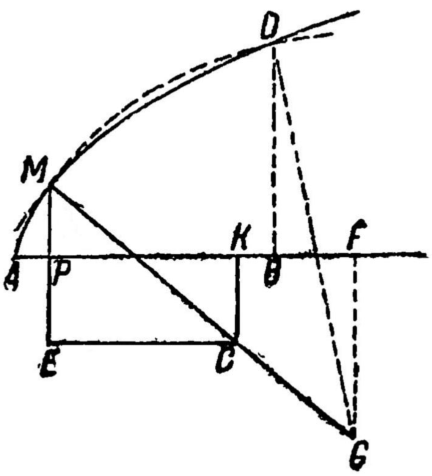
Bod, ve kterém se tento dotýká či stýká s křivkou, nazveme *oskulační bod*.

TVRZENÍ V.

Zadání.

203. POVAHA *křivky* AMD (Obr. 153) *je dána a spolu s ní libovolný její bod* M*; nyní je třeba najít střed* C *kruhu, jenž se s ní stýká v daném bodě* M.

Veďme kolmice MP, CK na osu a označme čáry stejnými písmeny jako v předchozím tvrzení; dojdeme k té samé rovnici, přičemž je třeba mít na zřeteli, že písmeno x, nebo y, které tam jsme pokládali za neznámou, zde označuje danou veličinu; a naopak že s, t, uvažované tam coby známé, jsou zde vlastně neznámé zrovna tak jako r.



Obr. 153

Nuže je zřejmé 1°. Že hledaný bod C bude ležet na kolmici MG ke křivce. 2°. Že vždy bude možno opsat kruh, jenž se bude křivky dotýkat v M a protínat ji nejméně ve dvou bodech (předpokládám, že nejbližší z nich je D, odkud spustíme kolmici DB); ježto vždy můžeme nalézt kruh, jenž bude libovolnou křivku různou od kruhu protínat nejméně ve čtyřech bodech; a ježto tečný bod M odpovídá toliko dvěma bodům průniku. 3°. Že čím blíže se jeho střed G přibližuje hledanému bodu C, tím blíže se také přibližuje bod průniku D tečnému bodu M tak, že když bod G připadne do bodu C, bod D spadne v jedno s bodem M; poněvadž (§ 76) kruh opsaný o poloměru CM se musí dotýkat křivky a protínat ji v jednom a tom samém bodě M. Odtud je patrné, že když s vyjadřuje AF a t vyjadřuje FG, rovnice musí mít jeden dvojnásobný kořen, a sice (§ 200) rovný AP nebo PM podle toho, zdali necháme vymizet y, nebo x; a navíc ještě jeden kořen AB, nebo BD, který se stane též rovným AP, nebo PM právě, když s a t vyjadřují hledané AK, KC; a tudíž tato rovnice musí mít tři navzájem rovné kořeny.

PŘÍKLAD.

204. NECHŤ rovnice $ax=yy$ vyjadřuje povahu křivky AMD; pak najdeme (§ 101) rovnici y^4, atd. Pokud ji vynásobíme $8, 3, 0, -1, 0$, tj. součinem dvou aritmetických posloupností $4, 3, 2, 1, 0$ a $2, 1, 0, -1, -2$, dostáváme $8y^4=2aaty$.

$$\begin{array}{llllll}
y^4 & * & -2asyy & +2aaty & +aass & = 0. \\
 & & +aa & & -aarr & \\
 & & & & +aatt & \\
4, & 3, & 2, & 1, & 0. & \\
2, & 1, & 0, & -1, & 2. & \\
\hline
8y^4 & * & * & -2aaty & * & = 0.
\end{array}$$

Odtud dovodíme hledanou KC, nebo $PE(t)=\dfrac{4y^3}{aa}$.

Jestliže požadujeme, aby rovnice vyjadřovala povahu křivky, jež prochází všemi body *C*; vynásobíme znovu y^4 atd. posloupností 0 , 3 , 4 , 3 , 0 , tj. součinem posloupností 4 , 3 , 2 , 1 , 0 a 0 , 1 , 2 , 3 , 4 ; a nacházíme $8asy-4aay=6aat$. Odtud pak, když pro zestručnění položíme $s-\frac{1}{2}a=u$; dostaneme

$$y=\frac{3at}{4u} \text{ a } 4y^3=\frac{27a^3t^3}{16u^3}=aat ;$$

a tím pádem

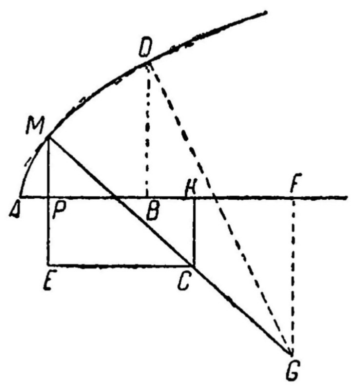
$$16u^3=27aat .$$

Odtud plyne, že křivka procházející všemi body *C* je druhou kubickou parabolou s parametem rovným $\frac{27a}{16}$, jejíž vrchol je od vrcholu zadané paraboly vzdálen $\frac{1}{2}a$; neboť $u=s-\frac{1}{2}a$.

Pokud je poloha částí křivky sousedících s daným bodem *M* po obou stranách veskrze podobná, jako je tomu v případě, kdy je zde zakřivení největší nebo nejmenší; plyne odtud, že jeden z průniků tečného kruhu může s tečným bodem splývat jedině tehdy, když s ním bude spadat v jedno i druhý; a takto rovnice musí mít v tomto případě čtyřnásobný kořen. A skutečně když vynásobíme y^4 , atd., posloupností 24 , 6 , 0 , 0 , 0 , tj. součinem tří aritmetických posloupností 4 , 3 , 2 , 1 , 0 a 3 , 2 , 1 , 0 , -1 a 2 , 1 , 0 , -1 , -2 ; dostaneme $24y^4=0$, což ukazuje, že aby sousední části křivky byly z obou stran podobné, pak bod *M* musí připadat do vrcholu *A* paraboly.

JINAK.

205. ÚLOHU (Obr. 154) můžeme řešit též, když vzpomeneme na důkaz v § 76; že totiž z hledaného bodu *C* je možno vést pouze jednu kolmici *CM* na křivku *AMD*; zatímco na této kolmici leží nekonečno dalších bodů *G*, z nichž lze vést dvě kolmice *MG*, *GD* na křivku. A tedy za předpokladu, že bod *G* je dán a hledáme (§ 200) hodnotu *x*, nebo *y* vzhledem k daným *s* a *t*; zřejmě tato rovnice musí mít dva různé kořeny, totiž *AP*, *AB*, nebo *PM*, *BD*, které se stanou navzájem rovnými, když bod *G* spadne v jedno s hledaným bodem *C*. A proto když tuto rovnici vynásobíme libovolnou aritmetickou posloupností, atd.



Obr. 154

PŘÍKLAD.

206. BUDIŽ jako výše $ax = yy$; budeme mít (§ 101) $4y^3$, atd.

$$\begin{array}{llllll} 4y^3 & * & -4asy & +2aat & = & 0\,. \\ & & +2aa & & & \\ 2\,, & 1\,, & 0\,, & -1\,. & & \\ 8y^3 & * & * & -2aat & = & 0\,. \end{array}$$

což v součinu s aritmetickou posloupností $2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1$, dává tak jako (§ 204) předtím $t = \frac{4y^3}{aa}$.

DŮSLEDEK.

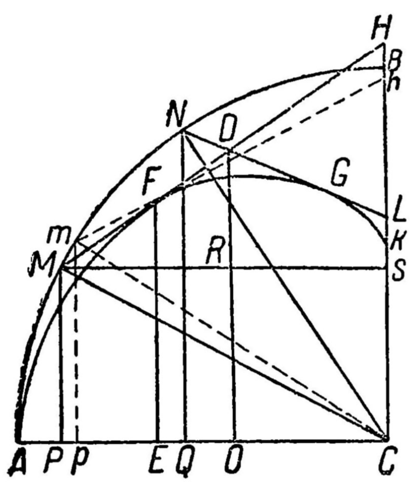
207. JE zjevné, že oskulační bod (Obr. 153, 154) můžeme uvažovat jako (§ 203) jako splynutí tečného bodu s bodem průniku toho samého kruhu; anebo jako (§ 205) splynutí dvou tečných bodů dvou různých, soustředných kruhů: zrovna tak, jako je možno inflexní bod pokládat (§ 196) za splynutí tečného bodu s bodem průniku té samé přímé čáry, nebo (§ 198) jako splynutí dvou tečných bodů dvou různých přímých čar vycházejících z jednoho a toho samého bodu.

TVRZENÍ VI.

Zadání.

208. NAJÍT *rovnici vyjadřující povahu kaustiky* AFGK (Obr. 155) *utvořené ve čtvrtkruhu* CAMNB *odraženými paprsky* MH, NL*, atd., kde dopadající paprsky* PM*,* QN*, atd. jsou rovnoběžné s* CB.

Podotýkám 1°. Že když prodloužíme odražené paprsky *MF*, *NG*, jež se dotýkají kaustiky v *F*, *G* až do jejich průniku s *CB* v bodech *H*, *L*; budeme mít *MH* rovnou *CH*, *NL* rovnou *CL*. Neboť úhel $CMH = CMP = MCH$; a právě tak úhel $CNL = CNQ = NCL$.



Obr. 155

2°. Že z daného bodu *F* na kaustice *AFK* lze vést pouze jedinou úsečku *MH*, jež by se rovnala *CH*; zatímco z daného bodu *D* mezi čtvrtkruhem *AMB* a kaustikou *AFK* můžeme vést dvě čáry *MH*, *NL* takové, že $MH = CH$ a $NL = CL$. Neboť z bodu *F* je možné vést pouze jedinou tečnu *MH*; zatímco z bodu *D* můžeme vést dvě *MH*, *NL*.

Nuže tedy nechť je zadáno, vést z daného bodu *D* úsečku *MH* tak, aby se rovnala úseku *CH*, jejž vytyčuje na paprsku *CB*.

Veďme *MP*, *DO* rovnoběžné s *CB* a *MS* rovnoběžnou s *CA* a nechť jsou dané *CO* nebo *RS* označeny jako *u*; *OD* jako *z*; *AC* nebo *CB* jako *a*; a neznámé *CP* nebo *MS* jako *x*; *PM* nebo *CS* jako *y*; *CH* nebo *MH* jako *r*. Pravoúhlý trojúhelník *MSH* dává

$$rr = rr - 2ry + yy + xx\ ;$$

odkud

$$CH(r) = \frac{xx+yy}{2y}\ .$$

Kromě toho podobné trojúhelníky *MRD*, *MSH* dají

$$MR(x-u).MS(x)::RD(z-y).SH = \frac{zx-xy}{x-u}\ ,$$

a tím pádem

$$CS+SH \ \text{ neboli } \ CH = \frac{zx-uy}{x-u} = \frac{xx+yy}{2y} = \frac{aa}{2y}\ ,$$

když za $xx+yy$ dosadíme jeho hodnotu aa. Odtud (po vynásobení křížem) sestavíme rovnici

$$aax - aau = 2zxy - 2uyy\ ;$$

a když za yy dosadíme jeho hodnotu $aa-xx$, vychází

$$2zxy = aax + aau - 2uxx\ .$$

Obě strany rovnice umocníme na druhou, abychom se zbavili iracionálních kořenů; a když pak opět dosadíme za yy jeho hodnotu $aa-xx$, dostáváme konečně

$$\begin{array}{lllllll}
4uux^4 & -4aaux^3 & -4aauuxx & +2a^4ux & +a^4uu & = & 0\ . \\
4zz & & -4aazz & & & & \\
 & & +a^4 & & & &
\end{array}$$

Zřejmě však když *u* vyjadřuje *CO* a *z* vyjadřuje *OD*; musí mít tato rovnice dva různé kořeny, totiž *CP*, *CQ*; a naopak když *u* vyjadřuje *CE* a *z* vyjadřuje *EF*; *CQ* se stává rovno *CP* a tehdy má jeden dvojnásobný kořen. Jestliže tedy její členy vynásobíme členy aritmetické posloupnosti 4, 3, 2, 1, 0 a 0, 1, 2, 3, 4; vznikají odtud dvě nové rovnice, jejichž prostřednictvím po vymizení neznámé *x* nalezneme rovnici

$$\begin{array}{llllll}
64z^6 & -48aay^4 & 12a^4zz & a^6 & = & 0, \\
 & +192uu & -96aauu & -15a^4uu & & \\
 & & +192u^4 & -48aau^4 & & \\
 & & & +64u^6 & &
\end{array}$$

vyjadřující poměr abscisy $CE(u)$ k ordinátě $EF(z)$. Což také bylo třeba najít.

Tečný bod *F* můžeme najít za pomoci metody vyložené v osmém oddíle. Neboť jestliže si představíme nějaký druhý dopadající paprsek *pm* nekonečně blízký *PM*; pak zřejmě odražený paprsek *mb* bude protínat *MH* v hledaném bodě *F*. Veďme tímto bodem *FE* rovnoběžnou s *PM* a označme *CE* jako *u*; *EF* jako *z*; *CP* jako *x*; *PM* jako *y*; *CM* jako *a*; pak stejným způsobem jako výše najdeme

$$\frac{aax+aau-2uxx}{xy}=2z \ .$$

Avšak je zjevné, že *CM*, *CE*, *EF* zůstávají beze změny, zatímco *CP* a *PM* se mění. A proto budeme rovnici diferencovat tak, že *a*, *u*, *z* budeme pokládat za konstanty a *x*, *y* za proměnné; odkud vychází

$$2uyxx\,dx+aauy\,dx-aaxx\,dy-aaux\,dy+2ux^3\,dy=0 \ ,$$

kde za *dx* dosadíme jeho hodnotu $-\frac{y\,dy}{x}$ (kterou najdeme diferencováním $yy=aa-xx$) a následně když za yy dosadíme jeho hodnotu $aa-xx$, vychází konečně

$$CE(E)=\frac{x^3}{aa} \ .$$

Za předpokladu, že křivka *AMB* nadále nebude čtvrtkruhem, nýbrž jakoukoli jinou křivkou, jež jako poloměr své evoluty v bodě *M* úsečku *MC*; pak zřejmě (§ 76) její malý úsek *Mm* můžeme uvažovat za kruhový oblouk opsaný ze středu *C*. Odtud plyne, že když tímto středem povedeme kolmici *CP* na dopadající paprsek *PM*; vezmeme $CE=\frac{x^3}{aa}$ ($CP=x$, $CM=a$); a vyneseme *EF* rovnoběžnou s *PM*; pak *EF* protne odražený paprsek *MH* v bodě *F*, ve kterém se dotýká kaustiky *AFK*.

Jestliže povedeme všemi body *M*, *m* libovolné křivky *AMB* přímé čáry *MC*, *mC* do nějakého pevného bodu *C* ležícím na její ose *AC*; a další úsečky *MH*, *mh* až k průniku s *CB* kolmé na osu tak, že úhel $CMH=MCH$ a $Cmh=mCh$; a je třeba najít na každé *MH* bod *F*, v němž se dotýká křivky *AFK* tvořené nepřetržitými průniky úseček *MH*, *mh*; pak stejně jako úředtím najdeme

$$CH=\frac{xx+yy}{2y}=\frac{zx-uy}{x-u} \ ;$$

odkud

$$\frac{x^3+uyy-uxx}{xy}=2z \ ,$$

kde vychází (když *u*, *z* bereme jako konstanty a *x*, *y* jako proměnné) diferenciál

$$2x^3\,y\,dx-uxxy\,dx-x^4\,dy+ux^3\,dy+xxyy\,dy+uxyy\,dy-uy^3\,dx=0 \ ;$$

a tím pádem hledaná

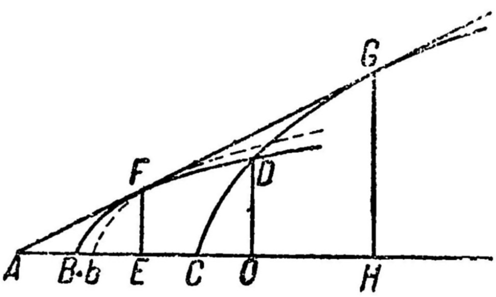
$$CE(u) = \frac{2x^3 y\,dx - x^4 dy + xxyy\,dy}{xxy\,dx - x^3 dy + y^3 dx - xyy\,dy}.$$

Jelikož však je povaha křivky *AMB* dána, hodnotu *dy* vyjádříme skrze *dx*; a když ji pak dosadíme do výrazu *CE*, členy tohoto výrazu budou již zcela známé a prosté všech diferenciálů.[137]

TVRZENÍ VII.

Zadání.

209. NECHŤ AO (Obr. 156) *je polopřímkou počínající pevným bodem* A*; uvažujme nekonečné množství parabol* BFD*,* CDG*, jejichž společnou osou je* AO *a parametry jsou úsečky* AB*,* AC *vytyčené pevným bodem* A *a vrcholy parabol* B*,* C*. Nyní je třeba určit povahu čáry* AFG*, která se dotýká všech těchto parabol.*



Obr. 156

Za prvé podotýkám, že jakékoli dvě z těchto parabol *BFD*, *CDG* se budou protínat v bodě *D* ležícím mezi čarou *AFG* a osou *AO*; a že když *AC* nastane rovno *AB*, průsečík *D* připadá do tečného bodu *F*.

Nuže nechť je zadáno, vést daným bodem *D* parabolu o vyznačených vlastnostech. Jestliže povedeme ordinátu *DO* a označíme dané *AO* jako *u*; *OD* jako *z*; a neznámou *AB* jako *x*; z povahy paraboly dostaneme

$$AB \times BO(ux - xx) = \overline{DO}^2(zz),$$

po úpravě pak

$$xx - ux + zz = 0.$$

Avšak je zjevné, že když *u* vyjadřuje *AO*; a *z* vyjadřuje *OD*; rovnice bude mít dva různé kořeny, totiž *AB*, *CA*; a naopak pokud *u* vyjadřuje *AE*; a *z* vyjadřuje *EF*; *AC* se stává rovným *AB*, tj. má v tomto případě jeden dvojnásobný kořen. A proto ji vynásobíme aritmetickou posloupností 1, 0, -1; což dává $x = z$. Když pak tuto hodnotu dosadíme na místo *x*, vychází rovnice $u = 2z$, jež bude vyjadřovat povahu čáry *AFG*. Odtud je zjevné, že *AFG* je přímou čárou svírající s *AO* úhel *FAO* takový, že *AE* je dvojnásobkem *EF*.

Pokud je třeba najít obecné řešení této otázky bez ohledu na to, jakého stupně jsou paraboly *BFD*, *CDG*; použijeme metodu, kterou jsme vyložili v osmém oddíle; a sice následovně. Když *AE* označíme jako *u*; *EF* jako z; *AB* jako *x*; budeme mít

$$\overline{u - x}^m \times n^n = z^{m+n}$$

obecně vyjadřující povahu paraboly *BF*. Diferenciál této rovnice dává (pokud u a z bereme jako konstanty a x jako proměnnou)

$$-m\times\overline{u-x}^{m-1}dx\times x^n+nx^{n-1}dx\times\overline{u-x}^m=0\ ;$$

což po vydělení $\overline{u-x}^{m-1}dx\times x^{n-1}$ dává

$$-mx+nu-nx=0\ .$$

Odkud vyvodíme

$$x=\frac{n}{m+n}u\ ;$$

a tudíž

$$u-x=\frac{m}{m+n}u\ .$$

Jestliže tedy tyto hodnoty dosadíme do obecné rovnice na místo $u-x$ a x; a (pro stručnost) položíme $\frac{m}{m+n}=p$, $\frac{n}{m+n}=q$, $m+n=r$, budeme mít

$$z=\sqrt[r]{p^m q^n}\ .$$

Odtud je zjevné, že čára *AFG* bude vždy přímá, ať už bude složitost parabol jakákoli; neboť jediné, co se tu mění, je poměr *AE* ku *EF*.

Z výkladu tohoto oddílu je zřejmé, jakým způsobem je třeba používat metodu pánů Descarta *a* Hudda *k řešení otázek tohoto rázu, pokud křivky jsou geometrické. Zároveň však vidíme, že se nemůže měřit s metodou pana* Leibnize*, kterou jsem se tímto pojednáním v základu snažil vysvětlit. Poněvadž tam, kde ona dává toliko dílčí řešení, poskytuje tato řešení obecná; poněvadž se rozprostírá na transcendentní čáry; a poněvadž není vůbec nutné zbavovat se iracionálních kořenů: což by velice často bylo neproveditelné.*

KONEC.

OBSAH.

1 *Leurs perpendiculaires* (jejich kolmice), tj. normály.

2 „Ať jsem Archimédovo pojednání o spirálách četl dvakrát, třikrát a napínal všechny síly ducha, abych nahlédl velejemné předivo důkazů spjatých s nacházením tečen k nim; přesto, musím přiznat, jsem si z těchto úvah nikdy neodnášel tolik jistoty, aby mi v duši neutkvělo zrnko pochybnosti, že veškerou sílu oněch důkazů jsem nepochopil atd." Ismaël Boulliau (1605 – 1694), latinsky zvaný Bullialdus, francouzský astronom, matematik a právník. Pohnutkou k sepsání *De lineis spiralibus demonstrationes novae* (Paris, 1651) bylo, jak autor dále uvádí, dospět k Archimédovým závěrům jinými cestami, a sice „aby se mu jejich pravdivost konečně vyjevila a při ní mohl ustat jeho duch". Avšak, což je podstatnější, nejen jemu, ale i dalším, „jimž Archimédovy výklady připadají příliš obšírné a vůbec nejasné a klidně a s důvěrou mu nemohou přitakat". Svůj díl viny na tom dle Bullialda nese i autorita Françoise Vièta a jeho pochyby stran platnosti Archimédova dokazování rovnosti subtangenty spirály a obvodu jejího „prvního kruhu" v tvrzení XVIII *De lineis spiralibus* (Heiberg II, 71, viz níže). Řeč je pochopitelně o Archimédově exhaustivní metodě a důkazech sporem z ní plynoucích, která se nejen matematikům Viètovy velikosti zdála nejasná, neuspokojivá, obtížná, případně málo poučná nebo zbytečná. Bullialdus si proto ve své knize mimo jiné ukládá řečené tvrzení dokázat *přímo*, potvrdit tak platnost Archimédova důkazu a danou pravdu učinit jasnější. Jak vidno ve zhuštěné podobě se na tomto příkladu představují zcela základní otázky matematiky klasického věku – od epistemologické hodnoty důkazu sporem, přes přípustnost nekonečnosti v geometrických úvahách až po vztah matematiků k jejich antickým předchůdcům. Bullialdovy práce v oblasti matematiky nicméně zůstaly bez hlubšího dopadu na další vývoj; zřejmě pro jejich anticky geometrický ráz v době, jíž, až na některé podstatné výjimky, ovládla Descartova geometrie.

3 „Archimédův důkaz v případě tečny ke spirále, totiž ukázat přímou čáru rovnou obvodu kruhu, není dostatečně platný. Zajisté předkládá přímou čáru větší obvodu libovolného mnohoúhelníku, jejž kruhu vepíšeme, a dále menší obvodu libovolného mnohoúhelníku opsaného: a tedy snad rovnou obvodu kruhovému? Ukazuje se tu úhel menší než jakýkoli tupý, avšak větší než jakýkoli ostrý: a proto snad pravý? Jestliže je Archimédův závěr pravdivý, pak ve svých závěrech klame (*fallaciter concludit*) Eukleidés. O tom však bude příhodnější uvažovat po té, co pojednáme analytiku dělení úhlů" (*Supplemetum geometriae*, VOM, 240). François Viète, obecně pokládaný za největšího francouzského matematika 16. století, otec programu nové, axiomaticky založené symbolické analýzy (*Isagoge in Artem Analyticam*, tamt., 1–13), díky níž zejména zavedením písmenných koeficientů u členů rovnic umožnil využití algebraického formalismu a řešení úloh skrze nacházení jejich kořenů (*effectio*).

Do protikladu vůči Eukleidovi staví Viète Archiméda dále ve *Variorum de rebus Mathematicis Responsorum Liber VIII*, kapitola XIV (tamt., 347–437), kde podle všeho třeba též hledat jádro jeho výtky. Ve scholiu k Archimédovu důkazu tvrzení XVIII *De lineis spiralibus*, analogicky k délkám subtangenty spirály a obvodu jejího prvního kruhu, píše:

> „Takto by někdo mohl říci, že úhlu půlkruhu je roven úhel pravý. Kdyby mu totiž roven nebyl, pak buďto bude větší, nebo menší. Budiž nejprve větší a nechť pak vezme nějaký přímočarý úhel menší než pravý, avšak větší než úhel půlkruhu. A tu hned spatřuje, že toto nemůže nastat; neboť dokáže, že pro jakkoli vzatý přímočarý úhel je úhel půlkruhu větší. Budiž pak menší a nechť vezme nějaký přímočarý úhel větší než pravý, avšak menší než úhel půlkruhu. A tu také hned spatřuje, že tomu tak být nemůže; neboť dokáže, že pro jakkoli vzatý tupý úhel je úhel půlkruhu menší. A tak učiní závěr na základě tvrzení, jež je proti Eukleidovi a odporuje jeho mínění." /*adsumpto quoque rectilineo* zde čtu jako *adsumpto quocunque rectilineo*, jinak celá pasáž nedává smysl, pozn. překl./ (tamt., 391)

Nejedná se tedy vlastně o nic menšího než o otázku „rohového úhlu" (*angulus cornicularis*), tj. úhlu mezi tečnou ke kruhu a jeho obvodem; a ovšem též doplňkového úhlu mezi obvodem kruhu a jeho průměrem neboli „úhlu půlkruhu" (*angulus semicircularis*). Připomeňme, že podle důkazu Eukleidových *Základů*, III.16, je rohový úhel menší než jakýkoli ostrý; popřípadě úhel půlkruhu větší nežli jakýkoli ostrý, přitom však menší než úhel pravý. Oproti úhlu přímočarému je tedy rohový úhel nekonečně menší. Avšak proto mezi sebou nemohou být v žádném poměru, neboť žádným násobkem rohového úhlu se nepřesáhne úhel přímočarý (Def. V.4); proto pak nemohou být stejného rodu, neboť nemohou vstoupit do žádného poměru (Def. V.3); proto jsou mimo společnou míru, neboť větší nemůže být násobkem menšího (Def. V.2); a proto konečně nemohou oba být veličinami, neboť menší, nakolik je jeho částí, není mírou většího (Def. V.1). Přijetí rohového úhlu jakožto úhlu, a případně pak úhlu vůbec za veličinu, tak přivádí ke zjevným rozporům v rámci Eudoxovy obecné teorie proporcí, jak je vyložena v V. knize Eukleidových *Základů*, a tím představuje rozkladný prvek v samotném založení řecké geometrie.

Určení povahy či postavení křivočarých úhlů bylo předmětem sporů patrně již v dobách před sepsáním *Základů*. Svědčí o tom i skutečnost, že Eukleidés pojem tečného úhlu zmiňuje pouze jednou a, jak se domnívá Thomas Heath (*Euclid's Elements*, 39 nn), vlastně jen z povinnosti, neboť v dalších tvrzeních *Základů* na něm již nijak nestaví. Otázka nicméně, od Démokrita, Prokla, Campana, Cardana, přes slavný spor Clavia s Peletierem, přetrvala až do hloubi 17. století, kdy její naléhavost prací *De angulo contactus et semicirculi tractatus* (1654) Johna Wallise poněkud ustává. Wallisovo řešení lze podat následovně (tamt., 42): podle Eukleida (Def. I.4) je rovinný úhel náklonem dvou styčných čar; pokud se tedy čáry setkávají, aniž by ve svém průniku byly nakloněny, což je případ tečného úhlu, úhel spolu netvoří; a tečný úhel tím pádem není úhlem, neboť tečna na kružnici leží bez naklonění neboli na ni připadá. Ježto pak bod není čarou, nýbrž jejím *počátkem*, a čára není plochou, nýbrž počátkem plochy; pak ani úhel není vzdáleností mezi čarami, nýbrž počátečním sklonem, tendencí k jejich odchýlení (*gradus divaricationis*). Nakolik se tedy čáry, jež svým průnikem netvoří úhel, jedna druhé vzdalují, je dáno stupněm jejich zakřivení (*gradus curvitatis*), a tento pak je základem srovnání, například u tečen k různě velkým kruhům, a mírou v tomto druhu styčných čar.

Ve zmíněném sporu Clavia s Peletierem se François Viète staví na stranu francouzského učence, který byl toho mínění, že tečný úhel vůbec není úhlem a není ani veličinou právě tak, jako „úhel" mezi dvěma styčnými kruhy; zatímco úhel půlkruhu je pro všechny jeho průměry roven úhlu pravému (k důkazům, tamt., 41). Své důvody Viète předkládá ve XIII. kapitole *Responsorum*, *Angulus cornicularis* (VOM, 386-387), přičemž hned z kraje, na základě úvah Apollonia z Pergy, staví domněnku o patrně cizím původu Eukleidových slov (*adulterina*) z tvrzení III.16 „*καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων* (úhel půlkruhu je větší než jakýkoli ostrý úhel a zbylý menší), nakolik si ovšem Eukleidés neodporuje a kdyby tomu tak nebylo (a jeho slova byla pravá), zhroutilo by se mnohé ze základů geometrie". Z hlediska pozdějšího vývoje tu ovšem nad důmyslnými poukazy na rozličné slepé uličky, kam by zákonitě vedlo uznání tečného úhlu jakožto úhlu a veličiny, zřetelně vyčnívá hlavní argument spočívající v novém nahlédnutí samotného pojmu dotyku, k čemuž Moritz Cantor (MCV III, 540) poznamenává, že do té doby nikdy nebylo tak jasně řečeno, co se vlastně slovem „dotyk" míní.

> „Kruh totiž je třeba považovat za rovinný útvar o nekonečném počtu stran a úhlů; avšak přímá čára dotýkající se přímé čáry, ať je sebekratší, spadá s ní v jednu (*coincidit in eandem rectam*) a žádný úhel netvoří." (VOM, 386).

Podstata Viètova nesouhlasu s Archimédem tedy, nakolik je možno dovodit, spočívá v možnosti, dnes by se řeklo, nearchimedovských veličin v postupu Archimédova dokazování, která, jak se ukázalo výše, stojí v rozporu s obecnou teorií proporcí Eukleidových *Základů*: svou vlastní, pozoruhodnou, jakkoli přibližnou, přesto však libovolně přesnou a svým způsobem limitní (*propemodum aequalem*) konstrukci tečny ke spirále Viète podává v kap. XVI *Responsorum* (tamt., 393). Ke smíření mezi Archimédem a Eukleidem v otázce povahy tečného úhlu pak přirozeně přistupuje Leibniz, jehož slova zazní závěrem:

> „ … poněvadž je přechod /mezi přímočarým úhlem a úhlem nulovým/ spojitý, pak nutně tečný úhel není prostřední veličinou mezi nulovým úhlem a nějakým úhlem přímočarým; a je tím pádem zcela jiného druhu. Vzhledem k přímočarému úhlu jej ovšem nelze uvažovat ani jako nekonečně malý, neboť ten zajisté klademe mezi nulový úhel a nějaký úhel vykazatelný (*assignabilis*). V této věci tak proti Claviu dávám za pravdu Peletierovi; a když Eukleidés řekl, že tečný úhel je menší než jakýkoli přímočarý úhel, vyslovil se poněkud volněji, přičemž menším úhlem mínil ten, jehož počátky spadají do prostoru úhlu předchozího. Tudíž netřeba se domnívat, že by vzhledem k úhlu přímočarému přisuzoval tečnému úhlu povahu dokonalé veličiny (*perfectam quantitatem angulo contactus respecto rectilinei tribuisse*). A takto jsou smířeni Archimédes s Eukleidem, kteří v očích velikého Françoise Vièta stáli proti

sobě, a velice se mýlil Clavius, když popíral axiom, který říká, že, co přechází z jedné krajnosti do druhé, a to přes vše, co leží mezi, musí projít rovným …“ *In Euclidis ΠΡΩΤΑ* (MS V.1, 192)

K otázce tečného úhlu, kromě výše uvedených, srv. též R. J. Boscovich, *De lege continuitatis*, s. XXXVII.

4 „Avšak místo vzhledem ke třem a čtyřem čarám, o němž Apollonius ve své třetí knize říká, že je Eukleides nebyl s to sestrojit, nedokázal by sestrojit ani on sám, ani nikdo jiný, anebo dokonce jen přidat něco k tomu, co napsal Eukleidés, toliko s pomocí poznatků o kuželosečkách, které v době Eukleidově byly dokázány …“ (*Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, *Liber VII*, 686). Pappos Alexandrijský (asi 300-350), geometr a astronom, poslední z velikých řeckých matematiků, autor sbírky *Mathematicae collectiones* shrnující a rozvíjející nejdůležitější výsledky předešlých staletí řecké matematiky.

Historický význam a vliv *Collectiones* na matematiku 17. století, a jejich VII. knihy především, lze jen stěží přecenit – už kvůli otázce, o níž je právě řeč, a úloze, kterou sehrála ve věci utváření Descartovy i Fermatovy analytické geometrie (a stejně tak geometrie projektivní!). Její původ se podle Pappa (tamt., 673, 678) odvíjí od Aristaeových („poznatky o kuželosečkách“ v citaci výše) a Eukleidových prací o kuželosečkách. Jasnějšího rozlišení došla v *Kuželosečkách* Apolloniových a Pappos ji shrnuje následovně:

„Jsou-li společně se svojí polohou dány tři přímé čáry a z jednoho a toho samého bodu jsou vedeny jiné přímé čáry, s nimi svírající nějaké dané úhly; a je dán poměr pravoúhelníku tvořeného dvěma z těchto čar ku čtverci strany zbylé; pak řečený bod bude připadat tělesovému místu (*locum solidum*) o dané poloze, tj. jedné ze tří kuželoseček. A jestliže jsou pod danými úhly vedeny přímé čáry ke čtyřem čarám daným polohou a je dán poměr pravoúhelníku tvořeného prvními dvěma ku pravoúhelníku tvořenému dvěma zbylými; pak bod obdobně bude připadat nějaké kuželosečce s danou polohou.“ (tamt., 679)

Geometrické otázky či úlohy obecně, a tedy i geometrická místa, tj. místa bodu splňující zadané podmínky, dělí Pappos na „rovinná“ (*locum planum*), která je možno najít transformacemi rovinných útvarů za pomoci toliko pravítka a kružítka; „tělesová“ (*locus solidum*), vyžadující ke svému řešení kuželosečky (řezy kuželem, čili tělesem); a „lineární“ (*locum linearem*), k nimž je zapotřebí „méně přirozených“ čar, vznikajících na základě „méně pravidelných ploch a složitějších pohybů“ (Pappos 1876, IV, 271), snad proto pak zvaná *mechanická*. Zřejmě již Eukleidés věděl (Pappos 1877, VII, 679), že kuželosečky je možno považovat za geometrická místa splňující nějaký vztah vzhledem ke třem nebo čtyřem úsečkám, avšak Pappos pokračuje:

„Jestliže úsečky jsou jen dvě, je prokázáno, že jde o místo rovinné. Pokud však jsou vedeny přímé čáry pod danými úhly na více než čtyři přímé čáry dané polohou, bod připadne do míst, jež nebyla doposud určena; pouze je nazýváme lineárními, aniž bychom cokoli věděli o jejich povaze nebo vlastnostech … Ta pak zadáme následujícím způsobem: jestliže z nějakého bodu jsou pod danými úhly vedeny přímé čáry na pět přímých čar daných polohou; a je dán poměr pravoúhlého rovnoběžnostěnu tvořeného třemi z nich ku pravoúhlému rovnoběžnostěnu tvořenému dvěma zbylými a nějakou danou, bod připadne nějaké čáře o dané poloze. A jestliže jsou vedeny na šest přímých čar a je dán poměr tělesa tvořeného řečenými třemi ku tělesu tvořenému zbylými, bod rovněž připadne na nějakou čáru s danou polohou. Jestliže však jsou vedeny na více než šest přímých čar, nadále nebude možno říci: ‚a je-li dán poměr tělesa tvořeného čtyřmi úsečkami ku tělesu tvořenému úsečkami zbylými‘, ježto není nic, co by bylo tvořeno více než třemi rozměry.“ (tamt., 681)

Antické členění čar, předestřený princip jeho překonání, hranice geometrického názoru veličin: jen zřídkakdy lze s takovou jistotou nahmatat tep dějin a na ploše jednoho odstavce zahlédnout jako narýsovanou novou cestu geometrie včetně překážek bránících v jejím dosažení. Je totiž zřejmé, že je to právě vnitřní nutnost dané geometrické úlohy, která velí opustit její přísně geometrický výklad: aby mohla být vyložena v celé své obecnosti, je třeba porušit rámec II. a VI. knihy *Základů*, jež geometrický součin ztotožňují s konstrukcí pravoúhelníku o daných úsecích, a tím také zákon dimenzionální homogenity mezi jednotlivými prvky úlohy. Tento *scrupule*, jak jej nazývá *Descartes*

(AT VI, 378), bránící v zadání místa více než šesti čar, a odtud i místa obecného, nicméně Pappos jakoby v předznamenání přístupu Descartova obchází úkrokem ke složeným poměrům dvojic úseček („*per compositas proportiones haec et enuntiare et generaliter demontrare*“). A tedy moderní, v posledku Descartovou, symbolickou řečí je možno – pro jednoduchost v případě sudého *n* Pappových čar – otázku míst shrnout rovnicí:

$$d_1 d_2 \ldots d_n = k\, d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2\mathrm{n}},$$

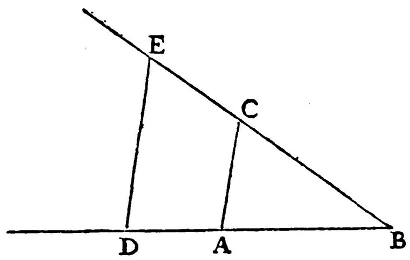
a tudíž

$$\frac{d_1}{d_{n+1}} \frac{d_2}{d_{n+2}} \cdots \frac{d_n}{d_{2\mathrm{n}}} = k,$$

kde $d_1, d_2, \ldots, d_{2\mathrm{n}}$ jsou vzdálenosti přímých čar $L_1, L_2, \ldots, L_{2\mathrm{n}}$ daných polohou od hledaného místa bodu *P* a *k* pak daný poměr.

Descartovo vystoupení s obecným řešením tak, pro tehdy asi třicetiletého geometra, bylo nejen nevídanou demonstrací síly a důkazem převahy vlastní metody; ale rovněž jistým vyvrcholením širších úvah o *mathesis universalis* a novém založení geometrie, k němuž Pappova úloha poskytla dějinnou příležitost. A skutečně zde pozornému pohledu *in nuce* sotva mohou uniknout některé zárodečné ideje Descartovy metody: pravidlo nepřerušeného postupu od jednodušších případů ke složitějším, míra komplexity podle *n* Pappových čar představující zároveň jisté dělítko přesnosti a uchopitelnosti křivek, případně náznak jejich hierarchie na základě složitosti (skladebnosti) opisujících pohybů.

Pappově úloze se Descartes začal věnovat již roku 1632 na výzvu univerzitního učitele Golia (AT I, 232-242), který jej chtěl v jeho metodě takříkajíc prověřit. Kolem řešení Pappovy úlohy se pak odvíjí v podstatě celá *Géométrie* (1637) coby jisté ztělesnění ideje *pravé mathesis* – „obecné vědy objasňující vše, nač je možno se ptát ve věci řádu a míry, aniž by byly vztaženy k nějaké dané látce“ Descartových *Regulí* (Pravidlo IV, AT X, 398). Na rozdíl třeba od Viètovy symbolické algebry, jednotné metody *všech*, aritmetických i geometrických, veličin, která je tím pádem nutně podřízena podmínkám dimenzionální homogenity (Panza 2005, 22) právě proto, aby se na geometrické veličiny formálně mohla vztahovat; geometrická algebra Descartova dosahuje své obecnosti díky možnosti vymezit geometrické operace a veličiny tak, aby splňovaly veškeré formální požadavky odpovídajících operací aritmetických, tedy včetně homogenity. A jak známo, všechna čísla jsou jednoho rodu, a tím i výsledky operací na nich. Klíčovou úlohu v tomto definičním podniku sehrálo zavedení nezávislé, jednotkové geometrické veličiny, kterou lze zvolit z povahy či pro potřeby úlohy libovolně. A pak je zajisté možné, za pomoci Eukleidova tvrzení VI. 16, geometrický součin (AT VI, 370) dvou úseček $a = AC$, $b = DB$ vyložit nikoli jako konstrukci pravoúhelníku o stranách *a*, *b*, nýbrž jako konstrukci (Obr. I) úsečky $ab = DE$ o jednotkové míře $AB = 1$,



Obr. I

tj. geometrické veličiny stejného rodu definované formální podmínkou

$$1 : a = a : ab;$$

a obdobným způsobem pak, na základě obecné teorie proporcí Eukleidových *Základů*, i zbylé geometrické operace dělení a odmocňování (AT VI, 370-371). Dimenze geometrické veličiny *a* tedy v Descartově geometrii již neznamená víc než „počet relací“, jenž danou geometrickou veličinu dělí od veličiny jednotkové právě tak, jako výrazy „*čtverec* a“ nebo „*krychle* a“ nadále neznačí než pouhá jména v univerzálním řetězu vztahů

$$1:x=x:x^2=x^2:x^3=\ldots$$

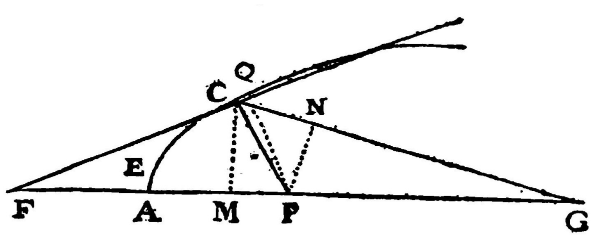
Díky novému výkladu geometrické skutečnosti, jenž co do rodu staví na roveň všechny geometrické veličiny, je nyní možno 1°. Určit jednoduchý – absolutní vzhledem k řešení úlohy (Pravidlo VI, AT X, 381) – prvek geometrické úlohy, tj. přímou čáru, ke které se budou vztahovat (*appliquer par ordre*) veškeré body otázky. 2°. Prvky relativní, tj. známé a neznámé úsečky. 3°. Tyto pojmenovat jednoduchými symboly. A 4°. Analyticky vyjádřit jejich vztahy a poměry, tj. přeložit geometrickou úlohu do řeči algebraických rovnic. Jakmile tedy Descartes vyklepává z boty Pappův *scrupulus*, konečně může vykročit vstříc řešení, jež se obecně začíná předpokladem, že to, co hledáme, již máme, a následným sestavením Rovnice (*sic*!).

Algebraické vyjádření úloh o různě velkém *n* Pappových čar pak v posledku dává vyjevit nové hierarchii složitosti příslušných míst neboli *křivek*, která se, byť ne zcela jednoduše, zračí vzrůstajícím stupněm rovnic *přímo* odrážejících konstrukci jakéhokoli z jejich bodů, a definujících tak novou, potenciálně nekonečnou, hierarchii geometricky přípustných a přesně uchopitelných (algebraických) čar (v. 1), tedy nový geometrický řád vůbec.

K hlubšímu rozboru Pappovy úlohy stejně tak jako celé Descartovy geometrie viz Bos (2001, 271-348), jenž Pappovu úlohu nazývá „katalyzátorem“ Descartovy geometrie. K vnitřnímu napětí mezi hierarchiemi křivek na základě složitosti pohybů a na základě stupně jejich rovnic ve vztahu k Pappově úloze a *Geometrii* viz Serfatti (2008, 11-45).

5 „A konečně pokud jde o všechny zbývající vlastnosti, které lze přisoudit křivým čarám, závisejí jedině na velikosti úhlů, jež tyto svírají s jinými čarami. Avšak měřit velikost těchto úhlů nebude o nic obtížnější, než by tomu bylo v případě úhlů mezi dvěma úsečkami, pokud dokážeme do bodu, kde se v hledaném úhlu jedna druhé dotýkají, vést přímé čáry, které je protínají pod pravým úhlem, čili (čímž zde míním to samé) pod pravým úhlem protínají jejich tečny. Tedy budu mít za to, že když tu předestřu obecný postup, kterak vést úsečky pod pravým úhlem do jejich libovolného bodu, pak jsem tím položil všechny nutné předpoklady ke studiu křivých čar. A troufám si říci, že právě toto je nejužitečnější a nejobecnější otázka nejen, co znám, ale dokonce i, co jsem si v geometrii přál kdy znát.“ *Géométrie*, II (AT VI, 413).

Nejobecnější a nejužitečnější, poněvadž umět za pomoci čistě algebraických postupů určit normálu, a tím i tečnu, k libovolné (pochopitelně: pouze algebraické) křivce v každém jejím bodě, znamená skrze rovnici plně vyjádřit a ovládnout její názorný, geometrický *tvar* (Panza 2005, 83). Jestliže toto Descartes dokáže, prokáže tím zároveň opodstatněnost své geometrické analýzy, a pak právem může prohlásit, že „obyčejnou geometrii přesahuje tak, jako Ciceronova rétorika dětský slabikář (*a, b, c des enfans*)“ (AT I, 479). Budiž tedy nějaká křivka *CE* (Obr. II); a je třeba pod pravým úhlem vést přímou čáru bodem *C* (AT VI, 413).



Obr. II

Podle obecné metody první knihy *Geometrie* budeme předpokládat, že úloha je vyřešena a hledanou normálou je *CP.* Předpokládáme dále, že jednoduchou přímou čarou, k níž se vztahují veškeré body křivky, je AG; a tedy, že křivka má rovnici. A pojmenujeme (z povahy rovnice) známé $MC=x$; $MA=y$; a neznámé (*indéterminées*), jež je třeba určit, $PC=s$ a $PA=v$, čili $PM=v-y$. Nyní sestavme rovnici vyjadřující jejich vzájemné vztahy. Z hlediska jednoduchosti úvahy se ukazuje vhodným, a to bez újmy na obecnosti, zvolit pravoúhlou vztažnou soustavu a díky tomu využít Pythagorovy věty, a tím pádem (tamt., 414)

$$s^2=x^2+v^2-2vy+y^2,$$

a tudíž

$$x=\sqrt{s^2-v^2+2vy-y^2},\text{ nebo } y=v+\sqrt{s^2+x^2}.$$

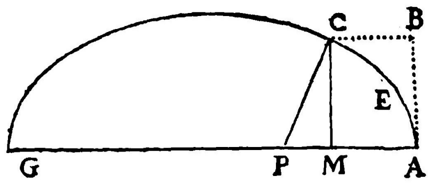
Výsledná rovnice tak podle předpokladu postihuje geometrické vztahy mezi souřadnicemi bodu *M* a úsečkami *v* a *s*, kde *s* představuje uvažovanou normálu. Avšak v rámci té samé vztažné soustavy vyjadřuje tato rovnice právě tak kruh o středu *P*; a jestliže tedy z bodu *C* povedeme *CF* kolmou na *CP*, pak *CF* bude tečnou jak ke kruhu, tak křivce *CE*, a tím pádem se i „kruh bude křivky *CE* dotýkat, aniž by ji protínal“ (AT XI, 417), neboť normálou u kruhu je právě jen jeho poloměr. Ježto pak předpokládáme, že rovnici křivky (vyjadřující vztah *x* a *y*) známe, můžeme na základě této a jedné z dvou předchozích odvodit novou rovnici (R), jež bude vedle *s* a *v* zahrnovat už pouze *x*, nebo *y*. Nyní tedy je třeba najít kruh o poloměru *CP*, který se tím pádem křivky *CE* bude dotýkat v jediném bodě *C*.

> „A k tomu je třeba uvažovat, že pokud má bod *P* splňovat naše podmínky, kruh o středu v *P* procházející bodem *C* se křivky *CE* bude dotýkat, aniž by ji protínal; jestliže však bod *P* bude třeba jen o málo blíže anebo dále od bodu *A*, než by měl; pak kruh křivku protne nejen v bodě *C*, ale nutně též v nějakém dalším bodě. A pak také je třeba uvážit, že když tento kruh křivku *CE* protíná, rovnice ukrývající veličiny *x* a *y* a jiné podobné, za předpokladu, že *PA* a *PC* jsou známy, nutně zahrnuje dva navzájem různé kořeny.“ (tamt., 417)

Nuže je zřejmé, že aby *CP* mohla být normálou ke křivce, rovnice R musí mít jeden dvojnásobný kořen. Tímto je v prvním kroku analýzy geometrická podstata úlohy převedena na otázku po podmínce algebraické rovnice. Krok druhý následuje hledáním podoby takové rovnice, čili analýzou její *formy*:

> „Navíc je třeba si uvědomit, že pokud má rovnice dva navzájem rovné kořeny, nutně musí nabývat stejné formy, jako když bychom sebou samým vynásobili rozdíl mezi předpokládanou neznámou veličinou a veličinou, jež je jí rovna; a kdyby pak tato poslední neměla tolik rozměrů, co rovnice původní, vynásobíme ji další, která jich bude mít právě tolik, kolik zbývá; čímž bude možno navzájem porovnat (*y avoir separement equation entre chacun des termes*) všechny členy prvé a druhé rovnice.“ (AT XI, 418-419)

Zřejmě tedy tvar rovnice musí odpovídat $(y-e)^2=0$, čili $y^2-2ey+e^2=0$ a obdobně v dalších případech. Jednou z křivek, na které Descartes uplatňuje svou novou, obecnou metodu tečen, je elipsa. Na jejím jednoduchém příkladě se pak výše uvedené úvahy dostatečně objasní. Budiž elipsa *CE* o průměru (příčné ose) *AG*, bod *C* ležící na elipse a normála *CP*, kterou je třeba najít (Obr. III).



Obr. III

A nechť *MA* je úsekem průměru, *CM* jeho ordinátou (*auquel* CM *soit appliquée par ordre*), *q* její příčnou osou (*traversant*) a *r* její *latus rectum* („*côté droit*“ elipsy o poloosách *a*, *b* je $2\frac{b^2}{a}$, tj. struna procházející ohniskem kolmo na průměr). Položme $MA=y$, $CM=x$; pak podle 13. tvrzení první knihy Apolloniových *Kuželoseček* (Heath 1896, 11) *x*, *y* spojuje rovnice

$$x^2=ry-\frac{r}{q}y^2.$$

Jestliže *PC* má být normálou v bodě *C* a dále položíme $PC=s$ a $PA=v$, pak veličiny *x*, *y* splňují stejně tak rovnici

$$s^2=x^2+v^2-2vy+y^2,$$

odkud po odstranění x^2 z předchozích dvou rovnic povstává nová rovnice R (AT VI, 415)

$$y^2-\frac{r}{q}y^2+ry-2vy+v^2-s^2=0$$

neboli

$$y^2+\frac{qry-2qvy+qv^2-qs^2}{q-r}=0,$$

která podle předpokladu musí mít jeden dvojnásobný kořen, a tedy odpovídat tvaru $y^2-2ey+e^2=0$. Nuže

$$y^2+\frac{qry-2qvy}{q-r}+\frac{qv^2-qs^2}{q-r}=y^2-2ey+e^2,$$

odkud, porovnáním druhých členů obou rovnic, vychází (tamt., 419)

$$\frac{qry-2qvy}{q-r}=-2ey.$$

a tedy

$$v=e-\frac{r}{q}e+\frac{1}{2}r.$$

Ježto pak ze samého principu metody tečen předpokládáme, že *e* se rovná *y*, konečně dostáváme hodnotu

$$v=y-\frac{r}{q}y+\frac{1}{2}r,$$

která určuje bod *P*, a tím i východisko k syntéze dané geometrické úlohy, čili nalezení tečny k elipse *CE*.

Descartova metoda tak v posledku spočívá na čistě algebraickém určení neznámých koeficientů v rámci soustav rovnic, jež jsou nicméně v průběhu odvození stále obdařeny svým původním geometrickým významem, tj. rovnice vyjadřující křivku a algebraické podmínky odpovídající dotyku tečny. Metoda tečných kruhů je tedy dokonale obecnou co do povahy uvažovaných křivek, nakolik ovšem je možno vyjádřit je algebraickou rovnicí (vše ostatní je z Descartova geometrického ráje vypovězeno), byť sám Descartes přiznává, že k nalezení krátké a snadné cesty je občas zapotřebí trocha obratnosti. A jakkoli je tento postup v případě vyšších stupňů rovnic velice krkolomný a nakonec prakticky nemožný, přesto je čistě algebraické povahy a ve své podstatě pouze naplněním jednoduchých pravidel metody, která je pro libovolnou algebraickou křivku dána předem.

Více v Barbin (2006, 166-175), kde lze nalézt též zajímavé představení Descartovy metody hledání tečny ke „květu jasmínu“ (či Descartovu listu, $x^3+y^3=3axy$); dále viz Panza (2005, 83-92) a Cantor (MCV II, 776-778).

6 Pierre de Fermat (1601-1665), toulouský právník a hodnostář, polyhistor, klasický filolog a hlavně „největší z amatérů“: ve svém volném čase *in margo* pokračovatel Viètův, spoluobjevitel „karteziánské“ analytické geometrie, s Pascalem spoluzakladatel počtu pravděpodobnosti, obnovitel teorie čísel, autor principu nejmenšího času – *prince des amateurs*, jehož závažné matematické objevy nesou jména jiných.

Fermatovu metodu tečen lze spatřit poprvé v *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (FO I, 133-136); ve skutečnosti tedy byla objevena již před rokem 1636, totiž okolo roku 1629. Odvozena je, ostatně, jak sám název napovídá, z Fermatovy obecné metody *de maximis et minimis*, a bude tak zapotřebí pojednat nejprve o ní. Podle samotného Fermata, *Analytica investigatio* (FO I, 147), se její původ váže jednak k Viètově metodě *syncrisis* (složení, srovnání) z *De Aequationum recognitione et emendatione* (Viète 1646, 104-111); a pak k otázce *diorismu*, tj. omezující podmínce tvrzení či úlohy zaručující její obecné řešení. V *Základech* I.22 je to například podmínka trojúhelníkové nerovnosti pro délky tří úseček určených k sestrojení trojúhelníku (Mahoney 1994, 148nn).

Syncrisis definuje Viète jako „vzájemné porovnání (*collatio*) dvou souvstažných rovnic za účelem odhalení jejich uspořádání“, přičemž souvztahem rovnic se tu rozumí, „když obě jsou podobné a skládají se navíc z těch samých daných veličin [...], avšak jejich kořeny jsou rozdílné“ (Viète 1646, 104-105). *Syncrisis* je tedy metodou vyjádření konstant či koeficientů dané rovnice prostřednictvím jejích kořenů. Pro jednoduchost vezměme příklad kvadratické rovnice; oproti Fermatovu (Viètovu) značení, řečí Descartovou $bx-x^2=c$. Jestliže y je druhým kořenem rovnice, pak platí zajisté i $by-y^2=c$, a tím pádem

$$bx-x^2=by-y^2$$

neboli

$$b(x-y)=x^2-y^2$$

a odtud

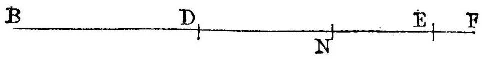
$$b=x+y \text{ a } c=xy.$$

S otázkou *diorismu*, druhým z kořenů své metody, se Fermat střetává v VII. knize Pappových *Collectiones*, kde v tvrzení 61 (Commandinovy edice) stojí:

> „Jsou-li dány tři úsečky AB, BC, CD a pravoúhelník ABD se má k pravoúhelníku ACD tak, jako čtverec o straně BE ku čtverci o straně EC; pak poměr mezi pravoúhelníky AED a BEC je jediný a nejmenší (*singularis et minima*). A tvrdím, že je stejný jako poměr čtverce o straně AD ku čtverci o straně vzniklé přesahem úsečky, jež může obsáhnout (*potest contentum*) pravoúhelník $AC\times BD$, oproti úsečce, jež může obsáhnout pravoúhelník $AB\times CD$.“ (Mahoney 1994, 151)

Tím podstatným, oč tu kráčí, jsou samozřejmě tajemná slova *proprotio singularis et minima*, jejichž smysl Commandino nebyl s to rozluštit (*satis percipi non potest*). Na rozdíl od Fermata, který úlohu klade následovně:

> „Budiž úsečka $BDEF$ (Obr. IV), na níž jsou dány body B, D, E, F. Nyní je třeba mezi body D, E položit bod N tak, aby pravoúhelník BNF vůči pravoúhelníku DNE stál v nejmenším možném poměru.“ (FO I, 151)



Obr. IV

Překlad do řeči algebry tu Fermatovi otevírá hlubší vhled do úlohy, jíž odráží skrze kvadratickou rovnici, kde její kořeny vyznačují dva různé úseky splňující podmínky zadání. Avšak zajisté *nejmenší* poměr může být jen jeden; a otázkou tedy je, co se stane s druhým kořenem.

Dělení úsečky $AB=b$ na dva úseky o nějakém daném součinu c obecně vyjadřuje rovnice

$$bx-x^2=c.$$

Ježto však z geometrické povahy zadání je zřejmé, že tyto úseky nemohou být libovolně dlouhé, otázka vyžaduje *diorismos*. Díky Eukleidovi, VI.27, Fermat věděl, že součin obou úseků nemůže být větší než $\frac{1}{4}AB^2$, a v tom případě $x=\frac{1}{2}b$; bod splňující zadání tedy musí ležet právě v polovině dané úsečky, přičemž největší pravoúhelník bude roven jedné čtvrtině čtverce b (FO I, 148; Mahoney 1994, 153). Ovšem za předpokladu, že součin úseků je menší, úlohu budou splňovat dva body, zatímco bod největšího pravoúhelníku bude ležet mezi nimi (FO I, 148). Metodou *syncrisis* Fermat určuje, že součet kořenů se vždy rovná b, což je ostatně zjevné z geometrického zadání; nicméně pokud se jedná o jejich rozdíl

> „Oč více se zvětšují pravoúhelníky vzešlé z dělení, tím menší je rozdíl mezi A a E /x a $b-x$/, dokud posledním rozdělením u největšího pravoúhelníku úplně nezmizí (*per ultimam maximi rectanguli divisionem evanescat*); a v tom případě nastává μοναχόν neboli jediné řešení, kdy jsou si obě veličiny rovny, tj. A se bude rovnat E.“ (FO I, 148-149)

Zřejmě tedy i pro největší pravoúhelník má rovnice dva kořeny: avšak rovnají se navzájem právě tak, jako se jedna druhé rovnají délky vytyčených úseků o společném bodu uprostřed dané úsečky. A zde patrně leží počátek Fermatovy obecné metody *de maximis et minimis*. Její další podoby se jí dostalo díky zjednodušení a vylepšení Viètovy metody *syncrisis* spočívající v označení druhého kořene nikoli zvláštním jménem, řekněme *y*, nýbrž analyticky, při zachování geometrického diorismu, obecně jako $x+e$ – „poněvadž *E* (jakož i *A*) je neurčitou (*incerta*) veličinou, nic nebrání nazývat ji $A+E$“ (FO I, 150).

Nuže nechť je třeba určit například $max(bx-x^3)$; pak tedy obměněnou metodou *syncrisis*

$$bx-x^3=b(x+e)-(x+e)^3,$$

čili

$$bx-x^3=bx+be-x^3-3x^2e-3xe^2-e^3,$$

a tedy

$$be=3x^2e+3xe^2+e^3$$

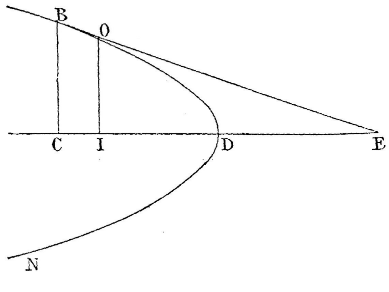
děleno rozdílem kořenů *e*

$$b=3x^2+3xe+e^2,$$

což je v obecném případě „uspořádání dvou tímto způsobem k sobě vztažených rovnic“. V případě maxima se však oba kořeny, x a $x+e$, musejí rovnat, a tudíž *e* bude rovno nule; a je proto třeba „odstranit veškeré homogenní veličiny obsahující *E*, neboť nic nepředstavují“. Konečně tedy zůstává $b=3x^2$, „kterážto rovnice dá hledané největší těleso“ (FO I, 150). Řešením úlohy z Pappovy VII. knihy, nalezení nejmenšího *poměru*, se pak *Analytica investigatio* uzavírá.

Tehdejší matematické kruhy zastihla Fermatova metoda *de maximis et minimis* v nanejvýš strohé, až nesrozumitelné podobě, která měla daleko k jednoduchosti shora uvedených algebraických úvah. Představena byla (FO I, 133-134) nikoli jako postup *falsa suppositione* (kořeny jsou různé) pro určení obecné stavby rovnice a následné vyšetření případu maxima, kdy se kořeny navzájem rovnají, nýbrž jako obecný algoritmus vyložený za pomoci Diofantova pojmu *adaequatio* (*παρισότης*, „přirovnání“, položení za „skoro rovné“). Zjevně tedy jako by od počátku počítala s případem maxima, a tudíž předpokládala dělení nulou. Následovalo zmatení korunované hořkým sporem s Descartem. Obdobný stín totiž zahaloval i stavbu metody tečen vybudovanou právě na jejích základech. Coby důsledek svého algoritmu ji Fermat přestavuje v *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (FO I, 135-136), která byla roku 1638 zaslána Descartovi:

> „Budiž například parabola *BDN* (Obr. V) s vrcholem *D* a průměrem *DC,* na níž je dán bod *B*; a je třeba vést úsečku *BE*, která bude tečnou k parabole a její průměr bude protínat v bodě *E*. Nyní jestliže vezmeme nějaký libovolný bod na úsečce *BE* a povedeme z něj ordinátu *OI* a z bodu *B* povedeme ordinátu *BC*; poměr *CD* ku *DI* bude větší poměr čtverce *BC* ku čtverci *OI*, poněvadž bod *O* leží mimo parabolu.



Obr. V

Avšak z podobnosti trojúhelníků se čtverec *BC* má ku čtverci *OI* stejně, jako se má čtverec *CE* ku čtverci *IE*; a tím pádem i poměr *CD* ku *DI* bude větší než poměr čtverce *CE* ku čtverci *IE*. Ježto pak bod *B* je dán, dána je i ordináta *BC* a odtud též bod *C* a úsečka *CD*: nechť je tedy *CD* rovno danému *d* a položme *CE* jako *a*; a *CI* jako *e*. Pak tedy *d* ku $d-e$ bude ve větším poměru než a^2 ku a^2+e^2-2ae; a jestliže prostřední a krajní členy (*medias et extremas*) vynásobíme navzájem, da^2+de^2-2dae bude větší než da^2-a^2e. Proveďme tedy adekvaci podle výše uvedené metody: po odstranění společných členů

$$de^2-2dae\approx-a^2e$$

anebo, což je totéž,

$$de^2 + a^2 e \approx 2dae.$$

Nyní vydělme všechny členy *e*; pak

$$de + a^2 \approx 2da$$

Odstraňme *de*; tím pádem

$$a^2 = 2da,$$

a tedy

$$a = 2d.$$

A tím bylo dokázáno, že *CE* je dvakrát větší než *CD*, což také odpovídá skutečnosti.“ /výraz „*adaequabitur*“ je zde vyjádřen znakem přibližné rovnosti „≈“, pozn. překl./

Jaká z podmínek úlohy má tedy být minimem? Podobně jako s pojmem *adaequatio*, Fermat ani u metody tečen nic bližšího neříká. Jejich propojení a hlubší význam své metody bude nucen odkrýt, a snad i objevit, až pod tlakem sporu s Descartem.

7 „Co se týče Vašich křivých čar, vlastnost, jejíž důkaz mi tu posíláte, se mi zdá natolik krásná, že bych ji vyzdvihl i nad kvadraturu paraboly, kterou objevil Archimédes. Ten totiž zkoumal danou čáru, zatímco Vy určujete plochu té, která ještě není dána. Nedomnívám se, že by obecně bylo možno podat obrácené pravidlo (*la converse*) k mému pravidlu tečen ani k tomu, jež používá pan de Fermat, jakkoli je jeho užití oproti mému v mnoha případech jednodušší.“ *Descartes à M. de Beaune*, 20. únor 1639 (AT II, 510).

Podle Apollonia představuje *symptoma*, což Fermat překládá jako *propriété spécifique*, paraboly právě úměrnost čtverců ordinát k úsekům mezi vrcholem paraboly a průnikem ordinát s průměrem, čili abscisám; *symptoma*, specifická vlastnost – u kuželosečky je to v posledku algebraická rovnice – tedy určuje vztah bodů křivky k jejímu průměru. Poněvadž tečna je určena dvěma body, tečnu k parabole (Obr. V) v daném bodě *B* hledá Fermat skrze její průnik s průměrem, kde neznámou je subtangenta *CE*. Body *O* tečny pak, v souladu s její definicí u Řeků, leží vně křivky; a tedy pokud se v rovnici křivky namísto bodu křivky uvažuje bod tečny *O*, vznikne rovnice, jež bude mít extrémní hodnotu v daném bodě *B* křivky. Jak Fermat píše později v *Ad eamdem methodum*:

„Ve skutečnosti uvažujeme v rovině libovolné křivky dvě čáry dané polohou, z nichž jednu můžeme nazývat *průměr* a druhou *ordináta*. Předpokládejme pak, že tečnu v nějakém daném bodě křivky jsme již nalezli; a na základě *adekvace* uvažujme, že specifickou vlastnost křivky je třeba najít ovšem nikoli již na křivce, nýbrž na tečně.“ (FO I, 141)

Zbývá tedy již jen uplatnit metodu adekvace a s její pomocí nalézt takovou subtangentu *CE*, při které extrémní hodnota spadá do daného bodu *B*.

Spor Descarta s Fermatem, ve kterém ještě před jeho propuknutím bylo zřejmě největším proviněním Pierra de Fermata to, že si dovolil kritizovat (FO II, 106-107) *Dioptriku*, je nejen přehlídkou Descartovy zášti a podezíravosti, ale také vynikající literární lekcí rafinovanosti barokního nactiutrhání. Zapojili se do něj Pascal, Roberval, Mydorge, osudovou ledabylostí jej vířil Mersenne a skončil tak, že „pan Descartes měl pravdu a pan Fermat se nemýlil“, jak to skvěle vyjádřil povolaný rozhodčí Girard Desargues, kromě toho objevitel projektivní geometrie. Ostatně nakonec utichá v duchu těchto Descartových slov: „Když vidím tento poslední způsob, jímž hledáte tečny ke křivým čarám, nemám víc, co bych řekl, než že je velice dobrý, a kdybyste jej býval takto vysvětlil hned na začátku, nic bych proti němu byl nenamítal.“ (AT II, 281)

Na podrobné vylíčení povahy, průběhu, veškerých omylů a nedorozumění i osobních okolností komplikovaného sporu zde bohužel není místo. Včetně podrobnějšího algebraického výkladu metody tečen je lze nalézt vynikajícím způsobem podané v Mahoney (1994), 170-213. Viz také Barbin (2006, 180-193).

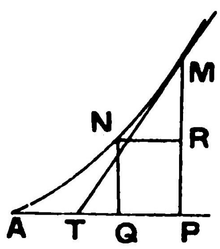
8 Výrazy *ordináta* a *abscisa*, česky „pořadnice“ a „úsečka“, vycházejí z Commandinova překladu Apolloniových *Kuželoseček* (Commandino 1566, 14), kde se hovoří o čarách „vedených po řadě“ (*ordinatim applicatae*). Rozumí se jimi rovnoběžné úsečky obsažené mezi křivkou a průměrem, který je dělí na dvě poloviny; tím je pochopitelně určen i jejich směr, který u kuželoseček odpovídá tečně k vrcholu nebo vrcholům ležícím na průměru. Pokud jde o abscisy, znamenají úseky průměru

po řadě odseknuté ordinátami od vrcholu kuželosečky (*quae ex diametro ab ipsa abscinditur ad verticem sectionis*, tamt., 34). Geometři 17. století obecně vztahovaly křivky k jediné ose, která byla, v souladu s řeckým viděním, uvažována jako součást přirozenosti dané křivky. Descartes užívá výrazu *appliquée par odre*, Fermat *appliquée*, *applicata*; zatímco abscisy jsou opisovány obraty jako „úseky z průměru" (*segments du diamètre*). Je proto mylné mluvit v případě Descartovy nebo Fermatovy algebraické geometrie o soustavách *souřadnic.* Jakkoli se výše (v. 7) ukázalo, že v duchu Descartovy geometrie je možné absolutní prvek řešení přímo *zvolit*, přesto ordináty požívaly plné geometrické skutečnosti, a nelze je tudíž ztotožňovat pouze s jejich vztažnou, metrickou úlohou. Krok tímto směrem učiní až Leibniz ve spise z roku 1692 ovlivněném vývojem projektivní geometrie s výmluvným názvem, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu* (MS V, 266-269). Zatímco Desargues s Pascalem ve svých pracích osvobodili pojem ordináty od nutné podmínky rovnoběžnosti, a tak se ordináty, při zachování stejné „*ordonance*", mohly též sbíhat do jediného bodu (v nekonečnu); Leibniz provádí další zobecnění v podobě postačující podmínky „společného zákona" (*loi commune*) stojícího po řadě za polohou každé z ordinát. Odtud se pak, mimo jiné, razí nový termín *souřadnic* (*coordonées*), jímž se v zásadě ordináty s abscisami staví na roveň (Parmentier 1995, 210-222). V podobném smyslu pracuje s oběma řadícími čarami i Markýz de l'Hospital. Ordinátu nazývá *appliquée*, pro abscisu používá přímého francouzského překladu *coupée* – „useknutá", čili úsečka.

9 Isaac Barrow (1630-1667), anglický matematik, astronom a teolog, Newtonův předchůdce v křesle lukasiánského profesora matematiky v Cambridge, jehož nejvýznamnějším dílem jsou *Lectiones opticae et geometricae* (1669-1670); zde geometrickou analýzu 17. století rozšířil o některé nové infinitesimální prvky a náhledy (včetně obráceného poměru mezi otázkami tečen a kvadratur), které však vzhledem k úzce geometrickému zaměření nutně zůstaly v pozadí pozdějších algebraických syntéz Newtona a Leibnize.

Barrowova metoda tečen za pomoci „diferenciálního trojúhelníku" tak v rámci *Lectiones geometricae* představuje pozoruhodný moment. Po zavedení geometrických postupů nalézání tečen, „bez mrzutého počítání" (*citra Calculi molestiam*), ke křivkám, kde je dána tečna k nějaké křivce sdružené (přednášky VIII-X), je konečně třeba doplnit metodu, jak určit tečnu k základní křivce družiny (Feingold 1990, 224-225). Geometrické analýzy s konečnými veličinami zde střídá úvaha založená na kalkulu s infinitesimálními prvky, a nebude proto od věci ji vzhledem k její spřízněnosti s počátky infinitesimálního počtu i pozdějším interpretacím v tomto směru (Child 1916) uvést v plném znění. Na konci X. přednášky Barrow píše:

> „Splnili jsme tedy první část toho, co jsme si předsevzali, a pro úplnost nyní, v podobě dodatku, připojme námi užívanou metodu nacházení tečen skrze výpočet (*ex Calculo*). Ačkoli věru nevím, jestli to k něčemu bude, když metod tohoto druhu je všude tolik a jsou všeobecně známy. Nicméně na radu přítele /patrně Newton/ tak učiním; a to tím ochotněji, že oproti ostatním, o nichž jsem pojednal, se tato jeví úspornější a obecnější. Postupuji následujícím způsobem.



Obr. VI

Nechť *AP*, *PM* /Obr. VI/ jsou přímé čáry dané polohou, z nichž *PM* protíná danou křivku v *M*; a předpokládejme, že *MT* je tečnou ke křivce v *M* a úsečku *AP* protíná v *T.* Nyní, k nalezení velikosti úsečky *PT* pokládám oblouk *MN* za neomezeně malý (*indefinite parvum*); a povedu *NQ* rovnoběžnou s *MP* a *NR* s *AP*. Označím $MP=m$; $PT=t$; $MR=a$; $NR=e$; a nějakými jmény označím i zbylé přímé čáry příhodné pro řešení úlohy, jež jsou dány zvláštní povahou křivky. Pak na základě rovnice vzešlé z výpočtu porovnám navzájem *MR*, *NR* (a skrze ně i *MP*, *PT*), a to při zachování následujících pravidel.

1. Během výpočtu odstraním veškeré členy, ve kterých vystupují mocniny *a* nebo *e*, anebo jejich součiny (neboť tyto členy platí za nic)

2. Jakmile je *rovnice sestavena*, odstraním všechny členy, které se vyznačují písmeny konstantních nebo známých veličin; anebo ty, v nichž nevystupují *a* nebo *e* (neboť tyto členy, pokud se převedou na jednu stranu rovnice, budou vždy rovné nule /*nihilum adaequabunt*/).

3. Dosadím *m* (neboli *MP*) za *a*; a *t* (neboli *PT*) za *e*. Odkud konečně je určena velikost *PT*.

Jestliže by pak do výpočtu vstoupila neurčitě malá částečka nějaké křivky, nechť se na její místo dosadí vhodně zvolená malá část tečny, anebo (z důvodu neomezené malosti křivky) jakákoli ekvivalentní (*aequipollens*) přímá čára." (Barrow 1670, 70-71)

Barrow namísto vysvětlení původu či založení své metody nabízí, jakkoli ne zcela prosté, pouze příklady jejího použití. Je však zřejmé, že co do své podstaty se jeho metoda zakládá na stejném předpokladu jako metoda Fermatova. Totiž jestliže *M* je bodem dotyku, ležícím společně na tečně i na křivce; a *MN* neomezeně malým (*indefinite parvus*) obloukem, pak lze nevykazatelně či maximálně blízký bod *N* položit jako by za druhý společný bod tečny a křivky, a tím pádem jeho abscisa $AQ(AP-e)$ a ordináta $NQ(PM-a)$ náležejí povaze křivky, splňují její rovnicí, a je tak možné je do ní dosadit. Výsledkem je výraz zahrnující jednak členy, ve kterých vystupují pouze *AP*, *PM* a konstanty; jednak členy *e*, nebo *a*; a konečně členy zahrnující mocniny a součiny *e* a *a*. Tyto poslední jsou neurčitě malé, v konečném zúčtování platí za nijaké a podle 1. pravidla jsou odstraněny (Feingold 1990, 226). Členy, ve kterých nevystupují *e* a *a*, vyjadřují toliko povahu křivky (podmínky bodů *M* ležících na křivce), tedy dávají její rovnici, a všechny dohromady, na jedné straně rovnice, tudíž nepředstavují nic; čili podle 2. pravidla budou odstraněny. Zbývající členy rovnice pak vyjadřují poměr *e* ku *a*; a ježto podle předpokladu bod *N* leží na tečně, lze tento poměr vyjádřit prostřednictvím poměru subtangenty *PT* k ordinátě *PM*; a podle 3. pravidla dosadit *t* za *e* a *m* za *a* (tamt.). Což konečně dovoluje určit délku subtangety *PT*, bod *T*, a tím také tečnu v bodě *M*.

Jistě by bylo svůdné pohlížet na stránky *Lectiones geometricae* Leibnizovýma očima – a pak by zde vskutku byl infinitesimální počet již téměř připraven. Stejnýma očima je ovšem taktéž zřejmé, že především v matematice symbolismus váží nekonečno a symboly d*x* a d*y* vypovídají nesrovnatelně více než *a* a *e*. Představují výsledky algebraických operací, které jsou určeny obecnými pravidly kalkulu, a základní předměty nové analýzy pro všechny křivky – zatímco Barrow používá nekonečně či neurčitě malé *a*, *e* coby pomocné pojmy k řešení jednotlivých případů geometrických otázek. Barrowova metoda sice vynáší na světlo fundamentální pojem diferenciálního poměru *a*/*e*, ale jen jako lokální prostředek k určení subtangenty, bez jeho obecné, zakládající úlohy – a to tím spíše, že poměru Barrow odmítl přiznat postavení *veličiny* (tamt., 237). Nesporným přínosem tu však je úspornost výrazu, která ovšem, stejně jako ostatní metody, narážela na své hranice vždy, když rovnice křivky, třebaže algebraická, zahrnovala jiné než celočíselné mocniny *x* a *y*.

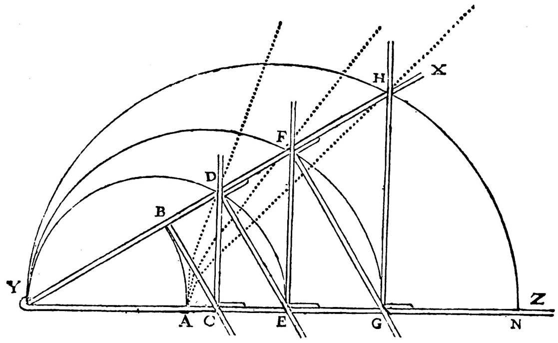
K Barrowově metodě tečen viz komentáře k anglickému překladu *The Geometrical Lectures* (Child 1916), článek M. Mahoneyho (Feingold 1990, 179-250) a dále Boyer (1949, 182-186).

10 Řeč je samozřejmě o slavné *Nova methodus* z roku 1684, celým názvem *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* (MS V, 220-226), což lze převést jako „Nová metoda pro nacházení maxim a minim stejně tak jako tečen, kterou nezatěžují lomené ani iracionální veličiny, a k tomu uzpůsobený význačný druh počtu".

11 „Mohl bych zde uvést i několik dalších způsobů rýsování a pojímání křivých čar, jejichž složitost by se postupně zvyšovala do nekonečna; avšak pro celkové pochopení všech čar v přírodě a jejich řádné roztřídění bude, myslím, nejlepší říci, že všechny body čar, jež můžeme nazvat geometrické, tj. spadající pod nějakou určitou a přesnou míru, leží nutně v nějakém poměru ke všem bodům nějaké přímé čáry, který lze vyjádřit jednou, společnou rovnicí. Jestliže tato rovnice neobnáší víc než obdélníky dvou neznámých (*indéterminées*) veličin, anebo čtverec jedné a té samé, křivka

náleží prvnímu a nejjednoduššímu rodu, jenž obsahuje pouze kruh, parabolu, hyperbolu a elipsu. Avšak pokud rovnice vystoupá až k třetímu nebo čtvrtému rozměru jedné nebo obou neznámých (neboť k určení vztahu mezi oběma body jsou zapotřebí dvě), bude druhého rodu; a když rovnice dosáhne pátého a šestého rozměru, bude třetího; a tak dále až do nekonečna." (AT VI, 392-393)

Geometrické a mechanické křivky docházejí svého rozlišení na začátku II. knihy *Geometrie*, kde Descartes prostřednictvím svého teoretického pravítkového přístroje (Obr. VII) a obdobných zařízení (*compas de Descartes*) předvádí mechanický způsob spojitého tvoření stále složitějších křivek (*AD*, *AF*, *AH*, ...). Jestliže podle Řeků jsou geometrické, čili mohou být sestrojeny, čáry takové, které lze konstruovat za pomoci pravítka a kružítka, pak ovšem není žádný důvod, aby na jejich základě – skrze jejich průsečíky s jinými čarami anebo další geometrické úkony na nich – stejným právem nemohly být dány, jednoznačně určeny a sestrojeny nové čáry, které by pak vstupovaly opět do dalších konstrukcí atd., „nakolik je možno si je představit opsané jedním souvislým pohybem, anebo vícero pohyby následnými, kde poslední jsou zcela řízeny těmi, které jim předcházejí (tamt., 389-390)". Takové křivky pak budou stejně tak jako „úsečka, kruh či kuželosečka jasně a rozlišeně uchopené", „spadající pod nějakou určitou a přesnou míru", a tudíž (myšlenkově) konstruovatelné a *geometrické*, poněvadž utvořené pomocí úseček, kruhů a jejich reiterací (Panza 2005, 31). Naproti tomu všechny ostatní, jejichž tvořící pohyby nejsou vnitřně seřízeny, artikulovány, nezávisejí jeden na druhém, jsou *mechanické*. Metodicky tak mimo geometrii zůstávají i takové křivky jako Archimédova spirála nebo kvadratrix, neboť jsou „opsány dvěma oddělenými pohyby a nemají mezi sebou žádný přesně měřitelný poměr" (AT VI, 390), zrovna tak jako cykloida, cisoida a další.



Obr. VII

Hledisko sestrojitelnosti křivek na základě spojitého utvářejícího pohybu, jakkoli nezměrně rozšiřuje a vyjasňuje geometrické pole, přesto nemůže být *směrodatné*. Nevyjadřuje totiž obecnou povahu křivek a neodhaluje jejich vnitřní řád, a je proto doplněno a v posledku, přinejmenším pro budoucí pokolení, nahrazeno dělítkem algebraickým. Ukázalo se výše (v. 4, 5), jakým způsobem rovnice vyjadřují poměr všech bodů křivky k nějaké přímé čáře a kterak algebraické operace na nich zrcadlí geometrické konstrukce. Geometrická křivka je pak taková, že každý její bod má poměr k nějaké přímé čáře, který lze přesně vyjádřit jedinou, společnou rovnicí. Pronikavost a význačnost tohoto pohledu se projevuje okamžitě. Algebraické kritérium dává samo sebou vyplynout společnému řádu *všech* geometrických křivek, hierarchii „rodů" křivek podle jejich složitosti, kde n-tý rod propojuje křivky o rovnici zahrnující členy s mocninou $2n$ a $2n$-1 (třídění podle stupně rovnice provede teprve Fermat). Ve světle obou dvou hledisek zřejmě tedy Descartova geometrie připouští křivky jednak narýsované spojitým, vnitřně seřízeným pohybem (pohyby podle pravítka, kružítka a jejich reiterací); jednak křivky plně vyjádřitelné prostřednictvím algebraické rovnice určitého stupně; základním požadavkem zde tedy musí být logická ekvivalence obou podmínek. Descartes ji přirozeně tvrdí (tamt., 395) a pokládá za princip, dokázána bude až roku 1876 Alfredem Kempem.

Descartovo nové založení povahy křivek geometrické pole sice neomezeně rozšiřuje, ale též značně omezuje. Toto omezení je však důsledkem metody „jak se nikdy nemýlit" (slovy Pascala), kráčet jistými kroky a nepouštět se do marných dobrodružství s nekonečnem; a ve své době představuje vynikající rovnovážný bod mezi obecností a přesností (Giusti 1986, 27). Křivky přesahující úplnou algebraickou rovnici určitého stupně, jejichž body nejsou dány poměrem dvou *přímých* čar (poměr křivé a přímé čáry zůstane pro Descarta konečnému lidskému duchu nedostupný), unikají geometrii a jsou toliko mechanické. Leibnizovi, který bude takové křivky nazývat *transcendentní* (přesahující každý konečný stupeň), jistá dějinná ironie skrytá v tomto označení neunikla. V *De dimensionibus figurarum inveniendis* (1684) píše:

> „Staří odmítali používat křivky vyšších stupňů a řešení nalezená na jejich základě pokládali za mechanická. Descartes jim toto vytýkal a do geometrie nechal vstoupit veškeré křivky, jejichž povahu bylo možné vyjádřit algebraickou rovnicí neboli rovnicí o nějakém přesně určeném stupni. Zajisté velmi správně. Avšak chyboval neméně, když nekonečno dalších, které lze nicméně popsat stejně tak přesně, nazval mechanickými a z geometrie vyloučil jen proto, že nebyl s to je převést na rovnice a pojednat je podle svých vlastních pravidel. Je ovšem třeba si uvědomit, že právě takovéto nanejvýš užitečné křivky, jako jsou cykloida nebo logaritmická spirála a další podobné, je možno vyjádřit za pomoci počtu a rovnic, a to dokonce konečných, byť zajisté nikoli algebraických, o určitém stupni, nýbrž rovnic o stupni neomezeném (*gradus indefiniti*), čili transcendentním.“ (MS V, 124).

K transcendentním křivkám a možnosti jejich kvadratur viz dále *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (1686), „O skryté geometrii a analýze nedělitelných veličin a nekonečen“ (Parmentier 1995, 126-143). Viz též § 106 této knihy.

12 *Indéterminées*.

13 „Leibnizova pravidla (která jsem výše všude používal) se nicméně vztahují pouze na algebraické křivky; aspoň já jsem z nich stran transcendentních křivek nedokázal získat nic zvláštního, co by stejně tak nenáleželo i ostatním metodám /tečen/“ *Tractatus mathematicus de figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis* (Craig 1693, 43). John Craig (1663-1731), skotský matematik a teolog, průkopník Leibnizova počtu (včetně diferenciálního symbolismu) na britských ostrovech; zřejmě pod dojmem sporu o infinitesimální počet mezi Newtonem a Leibnizem nicméně *dx*, *dy* později pro tečky fluxí opouští.

Leibnizova odpověď na *De figurarum curvilinearum* přišla o rok později v práci představující kvadratury coby zvláštní případ obrácené otázky tečen, *De geometria recondita* (v. 7). Zde Leibniz pokládá první základy svého integrálního počtu, prokazuje sílu svého symbolismu i platnost „skryté geometrie“ v oblasti transcendentních veličin, zatímco metodu tečen nazývá toliko „drobným korolárem“ svého nového počtu. Ke Craigovu pokusu (Craig 1693, 29) dokázat na základě diferenciálního počtu Barrowův teorém, *Lectio*, XI, 1, (Barrow 1670, 85), že „suma vzdáleností mezi ordinátami a kolmicemi ke křivce vzatými na ose a k ose vztaženými je rovna polovině čtverce poslední ordináty“ uvádí následující průzračné věty:

> „Ve zmíněném případě postupuji následovně. Budiž ordináta *x* a abscisa *y*; řečený interval mezi kolmicí a ordinátou budiž *p*. Podle mé metody je okamžitě zřejmé, že $p\,dy = x\,dx$, což dovodil i dr. Craig; a když tuto diferenciální rovnici převedeme na rovnici sumační, vychází $\int p\,dy = \int x\,dx$. Avšak na základě toho, co jsem dokázal ve své metodě tečen, je zřejmé, že $d\,\frac{1}{2}xx = x\,dx$; a naopak tedy $\frac{1}{2}xx = \int x\,dx$ (neboť stejně jako mocniny a kořeny v běžném počtu, jsou i naše sumy a diference neboli ∫ a d reciproční). Máme tedy $\int p\,dy = \frac{1}{2}xx$, což bylo třeba dokázat. Nicméně používám na místo zvláštních písmen raději d*x* a podobné znaky, neboť d*x* je jistou modifikací samotné *x*. Díky tomu pak v případě nutnosti do výpočtu vstupují pouze písmeno *x* se svými mocninami a diferenciály, a je možné vyjádřit transcendentní vztahy mezi *x* a něčím dalším (*relationes transcendentes inter* x *et aliud exprimantur*). Tím je též možno rovnicí postihnout i transcendentní křivky. Budiž například oblouk *a*, sinus versus *x*; pak $a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$ a pokud *y* je ordinátou cykloidy, pak $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$ bude rovnice plně vyjadřující vztah mezi ordinátou *y* a abscisou *x* a z ní lze dokázat všechny vlastnosti cykloidy.“ (MS V, 231)

Uvedené místo je zásadní důležitosti: Leibnizova *dx* označují nejen *veličinu*, ale *modifikaci* původní veličiny, operaci na *x*. V rovnicích tak přímo zrcadlí *vztahy* (a vztahy vztahů), a tím také a zrod křivek z křivek, čili křivky transcendentní.

14 Ehrenfield Walther von Tschirnhaus (1651-1708), německý matematik a fyzik, (evropský) vynálezce porcelánu, autor knih *Medicina mentis* (1686) a *Medicina corporis* (1687), od pařížských let blízký přítel Leibnizův, a to i přes Tschirnhausův poněkud volnější způsob nakládání s Leibnizovými (Bernoulliovými a jiných) objevy; jeho matematické práce se váží především k teorii algebraických rovnic a jejich algoritmů, optických křivek, zrcadel a kaustik, jichž je objevitelem (v. 107).

15 Jan Hudde (1628-1704), holandský právník a matematik, devatenáctinásobný purkmistr města Amsterodamu, spolu s Janem de Wittem (1625-1672) a Hendrikem van Heuratem (1633-1660) žák Franze van Schootena (1615-1660); spolu se podíleli na latinském vydání Descartovy *Geometrie* (1659), kde rovněž vyšly Huddovy práce k teorii rovnic a otázkám maxima a minima, *Epistolae duae, quarum altera de Aequationum reductione, altera de Maximis et Minimis agit*.

Hudde se matematice věnoval jen krátce, mezi léty 1654-1663, nicméně jeho výsledky značně ovlivnily její další vývoj; pochopitelně hlavně skrze Newtona a Leibnize, do jejichž aféry také zasáhly. Jeho známým pravidlem pro nacházení dvojnásobných kořenů algebraických rovnic, které bylo původně zamýšleno k řešení otázek maxima a minima, se později, prostřednictvím Van Heurata, celý postup hledání tečen dokázal zjednodušit až na úroveň prosté algoritmické manipulace. Hned v úvodu svého prvního dopisu Van Schootenovi, *De aequationum reductione*, uvádí Hudde fundament nové metody:

> „*Teorém*. – Jestliže nějaká rovnice zahrnuje dva navzájem rovné kořeny a tuto rovnici vynásobíme nějakou libovolnou aritmetickou posloupností, totiž první člen rovnice prvním členem posloupnosti, druhý člen rovnice druhým členem posloupnosti atd.; pak tvrdím, že výsledkem bude rovnice, která bude obsahovat jeden ze zmíněných kořenů.“ (Collins 1856, 267-268)

Zjednodušení postupu, které se přirozeně nejvíce projevuje při vyšších řádech rovnic, je ve srovnání s čistou Descartovou metodou dosti zásadní. Za příklad vezměme Descartovo určení tečny k elipse (v. 5) vedoucí k řešení rovnice

$$y^2+\frac{qry-2qvy}{q-r}+\frac{qv^2-qs^2}{q-r}=0.$$

Jestliže pro jednoduchost vezmeme aritmetickou posloupnost {0, 1, 2, 3, …}, pak Huddovým pravidlem dostáváme

$$2\times y^2+1\times\frac{qry-2qvy}{q-r}+0\times\frac{qv^2-qs^2}{q-r}=0;$$

přičemž kořenem této rovnice je původně hledaný dvojnásobný kořen y. Tím pádem budeme mít

$$2y(q-r)+qr-2qv=0$$

a tudíž stejně jako dříve

$$v=y-\frac{r}{q}y+\frac{1}{2}r.$$

Důkaz Huddova pravidla za pomoci pojmu derivace by sice nebyl obtížný, ale v historické souvislosti nedává žádný smysl. Sám Hudde podává důkaz pro případ rovnice pátého stupně, který je možné zobecnit. Jeho vysvětlení se vzhledem k Descartově metodě i van Heuratově rozšíření podrobně věnuje například Panza (2005, 104-118).

Markýz de l'Hospital vnitřní spojitost určení násobných kořenů s diferenciací objevuje na jaře roku 1694 (v. 106). Věnován je jí desátý oddíl této knihy, především § 192.

16 *Leurs differérences infiniments petites* – „neboli diferenciálům“ doplněno. L'Hospital obecně užívá názvu *différence*, tj. diference, rozdíl (konečný i nekonečně malý). Navzdory jeho platónské víře v nekonečně malé jako by toto slovo upomínalo na konečný původ nekonečně malého. V *Encyklopedii*, o nějaké půl století později, D'Alembert, třebaže v nic takového nevěří, již běžně mluví o *quantité différentielle*, anebo prostě *différentielle* a klade ji na roveň s nekonečně malou veličinou nebo veličinou menší než jakoukoli vyznačitelnou, vykazatelnou, danou (*quantité moindre que toute grandeur assignable*). Sloveso *differentiare* – odkud jsou *differentialis*, *differentiatio*, *differentiabilis* atp. běžné latinské odvozeniny – utvořil Leibniz roku 1677. Pro

následující strany *Analýzy nekonečně malých* bude tedy shora uvedená vsuvka sloužit jako překladová definice a právě v tomto smyslu se pro *différence* bude užívat výrazu *diferenciál*.

17 Toto mnohokráte slibované, poptávané a očekávané dílo Leibniz, ustavičně zaneprázdněn starostmi a povinnostmi jiného řádu, stále odkládal a nikdy nenapsal; k lítosti bratrů Bernoulliů, markýze de l'Hospitala a dalších kolegů, a bez pochyby též ke škodě na příštích cestách myšlení vůbec. Spíše než zevrubné pojednání infinitesimálních metod znamenala *Scientia infiniti* pro Leibnize „výsostnější všeobecnou nauku“, *mathesis generalis sublimior* (A III, 6, 14) – projekt životního rozsahu, argonautské putování, entelechii Leibnizova ducha. S nadsázkou lze říci, že veškeré Leibnizovy matematické objevy nebyly než jejím předstupněm či korolárem.

První soubornou prací o integrálním počtu byly přednášky Johanna Bernoulliho *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque conscriptae ad usum illustr. Marchionis Hospitalii* (JBO III, 385-558) sepsané pro markýze de l'Hospitala mezi léty 1691-1692, které však vyšly až roku 1742.

18 „Zásluhu je třeba uznat p. Newtonovi (jemuž geometrie, optika a astronomie vděčí za mnohé), že v této věci sám něco podobného vytvořil, podle toho, co o tom doposud víme. Je sice pravda, že používá jiných znaků; ale poněvadž charakteristika je, aby tak řekl, značnou částí objevitelského umění, domnívám se, že naše znaky vidí šířeji (*donnent plus d'ouverture*)“ *Considerations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendantes*, 1694 (MS V, 307). Newtonovy objevy na poli infinitesimálního počtu, jak známo, byly dlouho drženy ve skrytosti, případně maskovány běžnými metodami; odtud pak zřejmě poněkud strohé ocenění ze strany tvůrců nového počtu okolo Leibnize i pozdější hořké rozepře.

19 *Lequel est presque tout de ce calcul.*

20 *La caractéristique*.

21 Zamýšlenou druhou část *Analýzy nekonečně malých*, počet integrální, l'Hospital, jak ostatně v předmluvě sám uvádí, nikdy nenapsal. K anglickému překladu *Analýzy nekonečně malých*, zcela přepracovanému do notace a názvosloví fluxí, ji připojil anglický matematik a překladatel Edmund Stone (1700-1768) v *The Method of Fluxions both Direct and Inverse* (1730). O pět let později Stoneovu práci přeložil do francouzštiny jezuita a přírodovědec Louis-Bertrand Castel (1688-1757), *Analyse des infiniment petits comprenant le calcul intégral dans toute son étendu* (1735). Dvojdílného pojednání se zamýšlená druhá část *Analýzy* konečně dočkala v podobě *Traité du calcul intégral, pour servir de suite à l'Analyse des infiniment petits de M. le marquis de l'Hôpital* (1754-1756) z pera francouzského právníka, vojáka a mořeplavce, Louis-Antoina de Bougainville (1729-1811).

22 Termín *parametr* mezi prvními zavedl francouzský právník, politik a matematik, přítel Descartův, Claude Mydorge (1585-1647) ve svém pojednání o kuželosečkách *Prodromus catoptricorum et dioptricorum sive conicorum* (1631); zde v klasickém geometrickém stylu, bez použití algebraické analýzy, dokázal na základě úvah s kuželem značně zjednodušit důkazy Apolloniových *Kuželoseček* a přišel též s významnou myšlenkou deformace geometrických figur. V definici XIX (Mydorge 1641, 3) popisuje Mydorge parametr kuželosečky jako „přímou čáru vedenou od vrcholu libovolné kuželosečky, nebo její části, k příslušnému průměru ve stejné vzdálenosti k ordinátám, s níž se srovnávají a podle které se určují.“ Odpovídá délce *latus rectum* $2\frac{b^2}{a}$, tj. struně vedené ohniskem kolmo na průměr. V současnosti označuje *parametr* polovinu této délky.

23 *La droite*, „přímá“. *La* (*ligne*) *droite* neznamená u L'Hospitala nic víc než právě přímou čáru o nějaké délce. Oproti úsečce není *droite* přesně (vlastně jednou pro vždy) určena délkou mezi dvěma body; spíše je jimi vyznačena a představuje jejich vzdálenost; její bytostnou povahou je *přímost*, zatímco délka přichází až po případě. Oproti přímce je *droite* samozřejmě konečná. Když mluví L'Hospital o úsečce, užívá obratu (*droite*) *constante*; přímku nazývá *droite indéfini*, „neomezená přímá čára“, či prostě *l'indéfini*. V tomto smyslu tedy *droite* stojí někde uprostřed a s českým názvoslovím se pojmově naprosto míjí a zejména v případě „malých úseček“, tj. diferenciálních čar, může nesprávně navozovat dojem jejich aktualizovanosti. V zájmu stručnosti a srozumitelnosti a s touto výhradou překládám nicméně *droite* (vedle „přímé čáry“) též jako „úsečku“, zejména pokud je na základě konstrukce co do délky jasně určena; (*droite*) *indéfini* pak jako („neomezenou“) „přímku“, případně podle souvislosti jako „polopřímku“.

24 V přednáškách Johanna Bernoulliho sepsaných pro markýze de l'Hospitala mezi léty 1691-1692, *Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differencialium* zní první postulát následovně: „Veličina zmenšená nebo zvětšená o veličinu nekonečně krát menší (*infinities minor*) není zmenšena ani zvětšena (Bernoulli 1922, 3)“.

25 Bernoulliho druhý postulát: „Každá křivá čára je složena z nekonečna přímých, a sice nekonečně malých (Bernoulli 1922, 3)“. Třetí Bernoulliho postulát se týká počtu integrálního („Obrazec obsažený mezi dvěma ordinátami, diferenciálem abscisy a nekonečně malou částkou nějaké křivky se pokládá za rovnoběžník“) a L'Hospital jej pochopitelně neuvádí.

26 Pravidlo I u Bernoulliho: „Diferenciál sečtených veličin je součet jednotlivých diferenciálů každé z veličin vzatých zvlášť (Bernoulli 1922, 3).“

27 Obdobným způsobem dokazuje pravidlo pro diferenciál součinu Johann Bernoulli; ne však rekurzivně, nýbrž přes substituce $e=dx$, $f=dy$, $g=dz$ atd. pro každý nový součinitel: „diferenciální veličina $xyz=xy\,dz+zx\,dy+zy\,dx$. Vynásob $x+e$, $y+f$, $z+g$ za předpokladu $g=dz$. Součin $xyz+zye+zxf+xyg+zef+xfg+gef$ = podle 1. postulátu $zye+zxf+xyg=zy\,dx+zx\,dy+xy\,dz$.“ (Bernoulli 1922, 4)

Seskupení členů vyjadřuje L'Hospital stejně jako Bernoulli znakem horní příčky (*vinculum*), který v obecné platnosti zavedl Franz Van Schooten ve své edici Viètových děl z roku 1646, zatímco Descartes *vinculum* používal jen spolu se znakem odmocniny (Cajori 1993 II, 386). Kulaté závorky se v tomto smyslu začínají objevovat s autory jako Bar-leDuc, Henrion, de Billy a zejména Girard; prosazuje je Leibniz, který vždy dává přednost *lineárnímu* způsobu značení, a samozřejmostí se stanou díky Eulerovi. Roku 1708 se k nim ve své redakční politice přihlašuje *Acta eruditorum*:

> „[...] označovat budeme $\sqrt{aa+bb}$ jako $(aa+bb)^m$; a tedy $\sqrt[m]{aa+bb}$ bude $(aa+bb)^{1:m}$ a $\sqrt[m]{\overline{aa+bb}^n}=(aa+bb)^{n:m}$. Vskutku nepochybujeme, že všichni matematici, kteří čtou tato *Acta*, jsou s význačností (*praestantia*) symbolismu p. Leibnize srozuměni a v této věci s námi budou souhlasit.“ (tamt., 219)

Oproti tomu L'Hospital kulatými závorkami vyznačuje analytické výrazy geometrických veličin v rámci kalkulu, například $PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)=-x$, kde PT je subtangenta a $\frac{y\,dx}{dy}=-x$ její hodnota (v. c). Konečně je třeba mít na paměti, že seskupení členů pomocí vinkula má u L'Hospitala nezvyklý význam, kde výraz $-\overline{a-b}$ označuje $-a-b$.

28 Kromě uvedené substituce Bernoulli v *Lectiones* nabízí ještě jeden způsob určení diferenciálu podílu, zcela analogický k pravidlu o součtu (v. 27)

> „Diferenciál $\frac{x}{y}$ je $\frac{y\,dx-x\,dy}{yy}$. Odečti $\frac{x}{y}$ od $\frac{x+e}{y+f}$. Zbývá $\frac{ey-fx}{yy+fy}=$ podle 1. postulátu $\frac{ey-fx}{yy}=\frac{y\,dx-x\,dy}{yy}$. Q. E. D“ (Bernoulli 1922, 5).

29 *Et partant on aura* $dx=y\,dz+z\,dy$, *et* $dz=\frac{dx-z\,dy}{y}=\frac{y\,dx-x\,dy}{yy}$, *en mettant pour* z *sa valeur* $\frac{x}{y}$.
Použití znaku „=“ v posledním vyvození je z dnešního pohledu nepřesné a rovnici by se zde slušelo rozdělit. Při troše dobré vůle však L'Hospitalova úspornost výrazu nemůže být na překážku porozumění, a proto ji překlad v zájmu zachování osobitosti jeho textu bude ctít. Podobně je tomu i s logickým rozlišováním *hodnoty* a jejího *výrazu*, které se v 17. století jednoduše neklade, a není důvod je v rámci překladu dosazovat násilím.

Na rozdíl od Leibnize, Gregoryho a Pascala, kteří užívali znaku x^2, označuje l'Hospital druhou mocninu neboli kvadrát jako *xx* – stejně jako Descartes, Huygens, Wallis nebo Euler. Tento způsob zápisu se udržel až do konce 18. století. Ještě Gauss jej obhajuje s tím, že x^2 nezaujímá o nic méně místa než *xx*, a proto nenaplňuje hlavní úlohu symbolu (Cajori 1993 I, 349).

30 *Puissances parfaites et imparfaites*, „dokonalé“ („úplné“) a „nedokonalé“ („neúplné“) mocniny. Mocnina úplná svůj kořen obsahuje jednou či vícekrát beze zbytku; v opačném případě je mocnina neúplná a její kořen klasická matematika nazývá iracionální, nesouměřitelný či „hluchý“ (*surdus*). Řeč je přirozeně o mocninách s (ne)celočíselným racionálním exponentem, bylo by však

nepřiměřené v tomto znění l'Hospitalova slova překládat. Překlad tohoto ražení by totiž mohl zakrýt skutečnost, že pojem mocniny byl od Eukleida spojen s pojmem proporce, a tím i se všemi otázkami nesouměřitelnosti a rozdílnostmi teorií proporce Eukleidových knih V a VII. U Eukleida značila mocnina (*δύναμις*, *puissance*, mocnost) možnost utvořit nad úsečkou čtverec; a výše (v. 12) se ukázalo, že bylo význačným úspěchem algebraického pohledu, nahlédnout poměr právě jako *veličinu*, a tím i úměrnost vyjádřit znakem rovnosti. Podstatným je zde totiž pojem *poměru* (*ratio*, *raison*), přičemž čísla toliko vyznačují počet poměrů či jejich opakování (*rationis multiplicationem*). Nehledě k obtížím s geometrickou interpretací poměrů i proto trvalo dosti dlouho, nežli lomené mocniny – poprvé je zavádí Stevin ve své *Aritmetice* (1585) – získaly v matematice plné domovské právo. Zásadním způsobem pak možnosti exponenciálního značení prohlubuje Leibniz, když na místo mocnitele připouští i proměnnou či neurčenou veličinu, čímž rovněž podává definici (v. 9) transcendentní rovnice (Parmentier 1995, 72). Symbolické osvobození nesouměřitelných veličin skrze zápis neúplných mocnin zlomky tak lze jen stěží docenit. Díky němu mohly být jednoduchým a univerzálním pravidlům kalkulu podřízeny i výrazy, u nichž by usměrňování v rámci rovnic vedlo k nezvladatelně rozsáhlým výpočtům, které právě, jak se ukázalo, byly mezí všech předchozích, více méně plně algoritmizovaných metod tečen před samotným nástupem diferenciálního počtu.

31 Výraz $y=\sqrt[3]{x}$ takto v podstatě kóduje eukleidovskou soustavu proporcí $1:y=y:z=z:x$ stejně tak, jako $a=\frac{1}{3}$ soustavu $0-a=a-b=b-1$. Dlužno podotknout, že s každým podobným, třeba jen o málo složitějším výrazem, stále jasněji vysvítá, jak mocným nástrojem myšlení je a jakým epochálním objevem vlastně byla karteziánská algebra.

Bernoulli (1922, 5) při hledání diferenciálů veličin pod odmocninou (*quantitates surdae*) postupuje nejprve přes substituce:

„Budiž například veličina $\sqrt{ax+xx}$, již nazývám $=z$; tato pak bude $ax+xx=zz$ a $a\,dx+2\,x\,dx=2\,z\,dz=2\,dz\,\sqrt{ax+xx}$. Tedy $\dfrac{a\,dx+2\,x\,dx}{2\,\sqrt{ax+xx}}=dz=$ diferenciál původní $\sqrt{ax+xx}$."

Postup založený na vlastnostech geometrických a aritmetických posloupností mocnin a mocnitelů předkládá vzápětí: „Ty samé diferenciály nalezneme jinak z utvoření řady, kde veličiny samotné jsou geometricky úměrné a jejich mocnitele aritmeticky úměrné." (tamt.)

32 Z logiky výkladu *Lectiones* – od diferenciálu součtu a rozdílu (v. 26), přes veličiny „složené", součiny (v. 27) a podíly (v. 28) – dokazuje Bernoulli nejprve pravidlo 2 diferenciace úplných mocnin (zobecněním z případu *xx*), zatímco pro iracionální veličiny či veličiny pod odmocninou vyhrazuje samostatné pravidlo 5 formálně vyjádřené (Bernoulli 1922, 7):

$$\sqrt[p]{x}\ \text{differ.}\ \frac{dx}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}}.$$

L'Hospital jde tedy v duchu formálních pravidel hlouběji; postupuje obecněji a, jak je u něj obvyklé, oba případy spojuje v jediný.

33 Většina příkladů je převzata z Bernoulliho *Lectiones*.

34 Eukleidés, Def. III.2, vymezuje tečnu ke kruhu jako „přímou čáru, jež se s kruhem střetává (*ἅπτω*), avšak pokud je prodloužena, neprotíná jej". V souladu s touto definicí chápe i řecká geometrická tradice tečnu co do polohy vůči křivce jako *vnější.* Takto v tvrzení III.16 Eukleidés dokazuje, že tečna nemůže připadnout dovnitř kruhu; poněkud překvapivě však dodává, že podobným způsobem se dokáže i to, že tečna nepřipadá ani na jeho obvod. Tato druhá podmínka ovšem v posledku znamená, že tečna není žádnou částí kruhu, s kruhem má společný jen jeden jediný bod, a tedy že kruh nelze v žádném případě nahlížet jako mnohoúhelník (Barbin 2006, 144).

Nápad uchopit tečnu jako prodloužení spojnice dvou nekonečně blízkých bodů ležících *na* křivce či obsažených v křivce samotné, svého druhu *zvnitřnění* tečny, vede až k vlastním základům infinitesimálního počtu neboli *vnitřní geometrie*. V jejím inauguračním spise *Nova methodus* i na mnoha dalších místech k tomu Leibniz uvádí:

„[...] najít tečnu obecně znamená vést přímou čáru spojující dva nekonečně blízké body křivky, čili prodloužit stranu mnohoúhelníku o nekonečném počtu úhlů, který je v našem pojetí s křivkou ekvivalentní (*quod nobis curvae aequivalet*). Tuto nekonečně malou vzdálenost pak vždy můžeme označit nějakým diferenciálním znakem, jako *dv*, nebo ji vyjádřit nějakým vztahem, do nějž vstupuje, tj. nějakou známou tečnou.“ (MS V, 223)

Ukázalo se výše, že k podobné myšlence dospěl stran úvah tečného úhlu Viète (v. 148), vycházel z ní Kepler a velice se k ní přiblížili Fermat (v. 157) a Barrow (v. a). Aby se však tečna vskutku mohla stát vnitřní vlastností křivky, bylo zapotřebí jednak opustit samozřejmost geometrického náhledu, jenž ostří mysli připoutává, jako u dřívějších metod, k subtangentě coby nejpřímočařejšímu prostředku určení tečny; a dále pak přesunout těžiště k symbolické analýze, tj. vytvořit patřičný způsob značení, s jehož pomocí by bylo možno formálně nahlédnout neviditelné vztahy mezi veličinami. Naplnění prvé podmínky obnáší Leibnizovo charakteristické zobecnění Pascalova „malého trojúhelníku“ pro všechny křivky (zde trojúhelník *MRm*, Obr. 3); druhou podmínku pochopitelně zajišťuje Leibnizův diferenciální formalismus charakterizující formulí

$$\frac{y}{t}=\frac{dy}{dx},$$

kde *t* označuje subtangentu, vnitřní povahu změny křivky v podobě proměnné geometrické veličiny.

Johann Bernoulli (1922, 8), tento princip výslovně neklade, nicméně při hledání tečny z něj vychází coby důsledku svého 2. postulátu (v. 14).

35 Zápis geometrické úměry na způsob $a.b::c.d$, který L'Hospital obecně v *Analýze nekonečně malých* používá, se poprvé objevil v práci *Clavis mathematicae* (1631) anglického matematika Williama Ougthreda (1574-1660) a brzy se rozšířil i do děl Gregoryho, Wallise nebo Newtona (Cajori 1993 I, 285-292). O významu kulatých závorek ve vzorcích u L'Hospitala byla řeč v souvislosti s vinkulem (v. 16); zde je třeba poznamenat, že u

$$mR(dy).RM\,(dx)::MP(y).PT=\frac{y\,dx}{dy}$$

se, stejně jako v jiných podobných případech, znak „=“ vztahuje k poslednímu členu úměrnosti ve smyslu

$$mR(dy).RM\,(dx)::MP(y).PT,$$

a tedy

$$PT=\frac{y\,dx}{dy}.$$

S označováním poměrů a proporcí zvláštními znaky nesouhlasil Leibniz, neboť, jak říká: „pro poměr postačuje znak dělení a zrovna tak u proporce stačí znak rovnosti. Poměr *a* ku *b* proto zapisuji jako $a:b$ nebo $\frac{a}{b}$, neboť je dán podílem *a* děleno *b*. Proporci neboli rovnost dvou poměrů vyjadřuji rovností dvou podílů nebo zlomků. Když tedy vyjadřuji, že poměr *a* ku *b* je stejný jako poměr *c* ku d, stačí napsat $a:b=c:d$ anebo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.“ Konečně bude trvat asi sto let, než se Leibnizův názor prosadí. (tamt., 295).

36 *En termes qui seront tous affectés par* dy – doslova: „postiženy *dy*“.

37 *En termes entièrement connus et delivrés des différences*.

38 Johann Bernoulli (1922, 8-9) podává příklady pro běžnou parabolu $ax=yy$ a dále různé kubické, bikvadratické a další paraboly; a odtud vyvozuje obecné pravidlo pro nalezení subtangenty ($=s$) u všech parabol:

„Jestliže povaha libovolné paraboly je $a^c x^m = y^n$; její subtangenta bude $\frac{nx}{m}$. Jest totiž $a^c mx^{m-1}dx=ny^{n-1}dy$ a $a^c mx^{m-1}.ny^{n-1}::dy.dx::y.s=\frac{ny^n}{a^c mx^{m-1}}=\frac{a^c x^m n}{a^c x^{m-1}m}=\frac{nx}{m}$.“

a pokračuje určením subtangenty pro elipsu a hyperbolu. L'Hospital naproti tomu oba případy paraboly a hyperboly podřizuje obecnému pravidlu, přičemž některé z Bernoulliho příkladů uvádí níže jako jeho důsledky.

39 *Qui exprime la nature de l'hyperbole entre les asymptotes*.

40 *De toutes les paraboles à l'infini*. Parabolami vyšších řádů $y^n = px$, čili paraboloidy se v 17. století zabývali mnozí z největších matematiků. Descartes, v dopise Mersennovi z roku 1638 (AT II, 246-252) vyslovil bez důkazů – přičemž vůbec není zjevné, jakou *metodou* k nim mohl přijít – vztahy pro těžiště, plochy a objemy parabolických konoidů. S odhlédnutím od Descartova slovního vyjádření i způsobu zobecnění z několika prvních případů s poukazem „až do nekonečna“ je možno, s Paulem Tannerym (tamt., 248), Descartovy výsledky shrnout následovně:

1°. Poměr subtangenty k abscise je n;

2°. Poměr obsahu $2\int_0^x y\,dx$ k trojúhelníku vepsanému pravoúhelníku xy je $\frac{2n}{n+1}$;

3°. Poměr úseků vydělených na abscise těžištěm tohoto obsahu je $\frac{n+1}{n}$;

4°. Poměr objemu $\pi\int_0^x y^2\,dx$ vůči opsanému válci $\pi\, xy^2$ je $\frac{n}{n+2}$;

5°. Poměr úseků vydělených na abscise těžištěm tohoto tělesa je $\frac{n+2}{n}$.

Metodou *de maximis et minimus* dospěl i Fermat k obdobným závěrům coby odpovědi na otázky (FO I, 195-8) Bonaventury Cavalieriho, který ve čtvrté z *Exercitationes geometricae* (Cavalieri 1647, 305-306) podal s pomocí své metody nedělitelných pozoruhodný důkaz kvadratury do $n=10$ a odtud zobecnil kvadraturu $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ paraboly $y=x^n$ mezi vrcholem a $x=a$ (Perkins 2012, 43-47). Podstatným způsobem, totiž o křivočaré nedělitelné prvky, obohatil Cavalieriho metodu Evangelista Torricelli. Ve stopách Archimédových představil, v *De dimensione parabolae* (1644), na dvacet způsobů kvadratur parabol a mimo jiné také, k údivu Cavalieriho, Hobbese a mnohých dalších, určil (konečný) objem hyperbolického tělesa o nekonečné délce a obsahu – známého rohu Gabrielova či Torricelliho trumpety. Avšak bylo to až pozvednutí metody nedělitelných na symbolickou rovinu algebry, co otevřelo cestu k obecnému pojmu paraboly. Rozhodný krok zde vykonal John Wallis, který pro paraboly zavádí obecně též lomené mocnitele. Neboť, jak podotýká v *De Algebra tractatus* z roku 1685, ohledně kuželoseček:

> „Zajisté je třeba se ptát po jejich povaze (*natura*) uvažované abstraktně od té, která se předpokládá v jejich konstrukci; tj. po přirozenosti, která je všude provází, ať jsou sestrojeny jakkoli. Toto jsem tedy na stejném /*De sectionibus conicis*, 1656/ místě (stručně, ale jasně) učinil; kuželosečky jsem odloučil od kužele a uvažoval je abstraktně coby rovinné obrazce, aniž bych do nich pletl jakékoli ohledy kužele (*absque illis cum Cono implicationibus*).“ (Wallis 1693, 317)

Je-li dovoleno povznést výše řečené na drobný příběh matematického uvědomění, pak je zřejmé, že místo markýze de l'Hospitala v něm není nikterak bezvýznamné. Jestliže Wallis ve prospěch čistého geometrického tvaru odhlíží od povahy konstrukce kuželoseček, a tím je osvobozuje od „spletitostí kužele“, L'Hospital přistupuje k abstrakci o stupeň vyšší, totiž k odhlédnutí od geometrického *tvaru* vůbec, kde v jediném analytickém výrazu postihuje „přirozenost veškerého nekonečna“ parabol a hyperbol, toliko na základě povahy čísla m.

Srv. též § 13, § 88 této knihy. K Wallisově kvadratuře obecné paraboly viz zejména *Arithmetica infinitorum*, 44 (JWO, 383-384). K Bernoullimu výrazu pro paraboly viz v. 38. Historicko-systematický výklad otázky parabol a hyperbol lze nalézt v Loria (1902, 254-270).

41 Jistá rafinovaná nezúčastněnost L'Hospitalova podání by zde neměla zakrýt skutečnost, že parabola rodu $m=\frac{3}{2}$, aspoň co do význačnosti a dějinného vlivu, zajisté není jen jednou z nekonečna. Objevil ji roku 1657 mladý anglický matematik, Wallisův žák, William Neile (1637-1670) a zároveň dokázal určit i délku jejího oblouku. Stala se tak jednou z nejstarších rektifikova(tel)ných algebraických křivek v matematice; její jméno, semikubická parabola (později nazývána též „kvadráto-kubická parabola“), jí dal John Wallis, který Neilovy výsledky zveřejnil v *De cycloide* (JWO, 550-554). Význam Neilova výsledku nelze podcenit, neboť vyznačuje první narušení hranic Descartovy geometrie, v posledku tak i mezí uložených Descartem konečné mysli vůbec (v. a) – přitom však cestou běžné, konečné geometrie. Nejdůležitější úlohu (právě proto) nicméně semikubická parabola sehrála v rukou Leibnizových coby zbraň proti „karteziánské sektě“ a abbé

Catelanovi, a to ve sporu o zákony pohybu a principy jeho zachování, v otázce tzv. „živých sil“. Zde, stručně řečeno, metafyzický princip Descartovy fyziky, zákon zachování „množství pohybu“ (*mv*), Leibniz s poukazem na jeho rozpor s Galileovým zákonem volného pádu nahrazuje svým vlastním zákonem zachování „živé síly“, tj. součinu hmotnosti tělesa a čtverce jeho rychlosti (mv^2).

Ve snaze prokázat nedostatečnost karteziánské analýzy ve věci pohybu předkládá Leibniz, v *De linea isochrona in qua grave sine acceleratione descendit et de controversia cum dn. Abbate D. C.* („O křivce stejnoměrného času, po níž hmotné těleso sestupuje, aniž by zrychlovalo; a o sporu s opatem D. C.“) z roku 1689, mechanickou úlohu, jejíž řešení dává právě semikubickou parabolu:

> „Najít křivku rovnoměrného času, po které hmotné těleso sestupuje uniformě, tj. ve stejných časech se stejně přibližuje k horizontu, přičemž dolů spadá bez zrychlování a stále stejnou rychlostí.“ (MS V, 234)

Leibnizovo řešení vychází z diferenciálního vyjádření zákona volného pádu těles, kde čtverce vertikálních rychlostí tělesa jsou úměrné výškám pádu; podstatnější jsou však obecné závěry, které odtud vyvozuje. Řešení totiž splňuje nekonečno *podobných* isochronních křivek lišících se jen co do parametru; k jednoznačnému výsledku je tedy třeba dalších podmínek, např. podmínky *nejkratšího* času, za který se křivka má přiblížit k horizontu (tamt., 236). Podobnost křivek je v tomto smyslu Leibnizem zcela osvobozena od geometrických intuicí: je dána právě jen úlohou konstanty. Odtud je pak přirozeně už jen krok k úvaze o družinách křivek, jak se uvidí níže, a povaze konstanty v rámci integrování (Parmentier 1995, 158-159). Ostatně kubická parabola je evolutou paraboly $y^2=2\,px$, čehož také Christiaan Huygens, objevitel evolut, využil při důkazu její rektifikace (Loria 1902, 261). Konečně je neméně důležité, že právě úloha o isochronní křivce přivedla na cestu nového počtu nekonečna prvního z jeho velkých tvůrců, Jakoba Bernoulliho.

Pokud jde o konstantu a, L'Hospital ji u jednotlivých případů paraboloidů $y^m=x$ klade kvůli zachování geometrického zákona homogenity (v. 157); většinou je tedy rovna 1. Takto v případě semikubické paraboly $y^3=axx$ a podobně. Johann Bernoulli v *Lectiones* ukazuje výpočet tečny k semikubické a jiným parabolám na s. 9; viz rovněž v. 41. Vzpomínky na svoji účast ve sporu o živé síly líčí Johann Bernoulli v *Autobiographie* (Wolf 1859, 89-90).

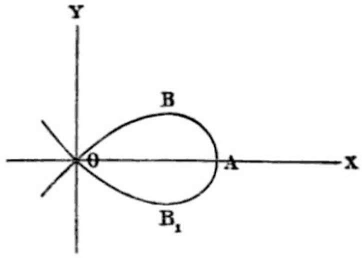
42 L'Hospital zde vychází ze symptomatu elipsy z Apolloniových *Kuželoseček*, I.13, (Heath 1896, 10), jež dává vrcholovou rovnici elipsy, kde a představuje hlavní osu neboli průměr a b je parametr ve smyslu *latus rectum*, čili tečna k vrcholu elipsy

$$y^2=bx-\frac{b}{a}x^2,\ \text{čili}\ y^2=\frac{b}{a}x(a-x).$$

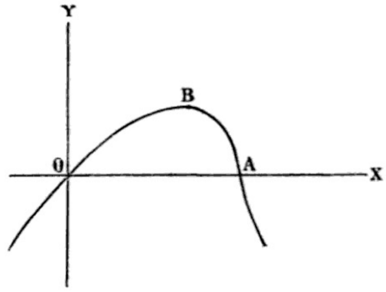
43 Obecná vrcholová rovnice všech elips je zvláštním případem rovnice křivek zvaných Slusovy perly,

$$y^m=\frac{b}{a}x^n(a\pm x)^p.$$

Jak sám název napovídá, studoval je vlámský matematik, právník a astronom René-François de Sluse (1622-1685) jinak známý hlavně pro svou algebraickou metodu tečen, kterou ostatně i pro ně využil. Sluse se nicméně zabýval jen některými omezenými případy a obvykle jen výseky odpovídajícími kladným hodnotám x a y. V dopisech Huygensovi, kde se tyto křivky objevují poprvé, připisuje Sluse jejich objev Pascalovi; ale právě Pascal jim dává zmíněné jméno. Zjevně podle zvláštního případu perel $y^n=kx^n(a-x)$, jež Pascal nazývá *perly (n+1)-ého řádu* (Obr. VIII, IX), neboť



Obr. VIII



Obr. IX

při n sudém připomíná křivka v kladných abscisách tvar perly (Obr. VIII): je symetrická podle osy abscis a protíná ji ve vrcholu A, jehož vzdálenost od počátku O je rovna a; největší ordinátu má pro kladné abscisy v $y=\frac{na}{n+1}$, zatímco ve směru záporných abscis se rozprostírá do nekonečna. Naopak když n je liché (Obr. IX), do nekonečna se rozprostírá v obou směrech a vedle těch samých průniků s osou a maxima pro kladné abscisy má ještě inflexní bod v $x=\frac{2na}{1+n}$. Nejjednodušší z křivek o lichém n byla nazývána *quartique piriforme*, totiž křivka čtvrtého řádu svým tvarem připomínající hrušku. (Teixeira 1972, 234).

Pro výpočty tečen, obsahů a objemů a k dalším matematickým vlastnostem a dějinám perlových křivek u Huygense a Van Schootena viz Teixeira (1972, 231-234) a Loria (1902, 271-278).

44 Právě tak Bernoulli (1922, 10) na příkladu určení tečny k hyperbole podotýká: „Nalezením tečny určíme rovněž asymptoty, pokud je budeme uvažovat jako tečny v nekonečnu, a tedy jejich abscisy x a ordináty (*applicatas*) y jako nekonečně velké.“ Obecný výpočet tečny hyperboly se pak upraví na základě postulátu 1 (v. 13) odstraněním nekonečně menších veličin tak, jak to předvádí i l'Hospital.

45 *Diamètre conjugué*, sdružený průměr. Z Commandinova překladu, *diameter coniugata*, Apolloniových *Kuželoseček*, *definitiones primae*, 16: „Sdruženými průměry křivé čáry anebo dvou křivých čar nazývám úsečky, z nichž každá je průměrem a dělí napůl úsečky od druhé stejně vzdálené.“ (Commandino 1566, 6). U hyperboly se tedy jedná o hlavní a vedlejší osu; a v L'Hospitalově příkladě pak vedlejší poloosu, jak se ostatně ukazuje i podle vztahu pro *latus rectum*, čili parametr (v. 155) – a je délka hlavní osy AB, b parametr AD, a poněvadž u hyperboly se hlavní osa má k vedlejší, jako se má vedlejší osa k parametru, vedlejší osa bude $\sqrt{ab}$ a poloosa AE pak její polovina.

46 L'Hospital zde za abscisu na místo obvyklé úsečky bere část oblouku, čili křivočarý úsek, což je vlastně definiční znak transcendentní geometrické veličiny. Rovnice (o určitém stupni) algebraických čar vyjadřuje vždy poměr dvou přímých čar. Výmluvné svědectví o nekonečném bohatství za hranicemi Descartova geometrického ráje a průzor do říše transcendentních čar podává již John Craig v *De figurarum curvilinearum quadraturis*:

> „Takové křivky (spolu s Leibnizem) nazývám *transcendentními*, jejichž povahu lze vyjádřit rovnicí, ve které jedna z neznámých (*indeterminatis*) označuje nějakou křivou čáru. Zvláště pak, když tato neznámá veličina označuje křivku algebraickou neboli prvního rodu, pak výsledná křivka bude transcendentní křivkou druhého rodu. Jestliže pak neznámá veličina vstupující do rovnice označuje křivku druhého rodu, pak křivka (definovaná touto rovnicí) bude transcendentní křivkou třetího rodu, a tak dále až do nekonečna.“ (Craig 1693, 42)

U Craiga (tamt., 44), podobně jako Barrowa (v. a), tento náhled ovšem vede k poměrně klopotnému, v zásadě geometrickému výstupu k transcendentní křivce a její tečně přes postupné dosazování hodnot abscisy a ordináty křivky vyššího rodu do diferenciálního výrazu pro subtangentu křivky rodu prvního, čili křivky algebraické. Příčinou toho je, jak už bylo výše naznačeno neoperativní (v. 12) charakteristika „částeček křivky“ prostřednictví zvláštních písmen, ve smyslu počátku Craigova pravidla: „Do rovnice definující křivky *AD* za *y* položíme $y+m$, za *x* položíme $x+e$ a za *v* položíme $v+n$, a tedy $v+\frac{mc}{b}$."

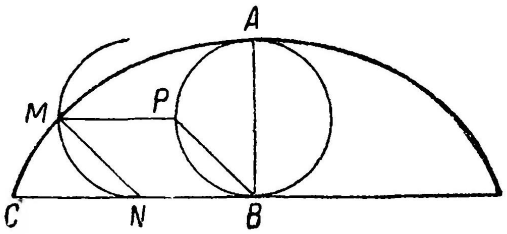
Leibnizův přístup k transcendentním křivkám byl vždy především analytický. Svědčí o tom ostatně i samo jméno, které jim uděluje. *Transcendentní* značí, jak bylo řečeno (v. a), vyjádřitelné rovnicí o „neurčitém stupni" (*de degré indéfini*), čili rovnicí o stupni *přesahujícím* jakýkoli určený stupeň, neboli kde samotný stupeň představuje neznámou. Skutečnost, že křivku nelze určit algebraickou rovnicí o konečném stupni, totiž dle Leibnize nijak neznamená, že by sama křivka ve své přirozenosti a odtud i její příslušná rovnice byly „neurčité" (Parmentier 1995, 65). Přirozeným krokem a zároveň nejznámějším Leibnizovým příkladem je pak úvaha rovnice exponenciální, jak vysvětluje v dopise Huygensovi: „Mohu dokázat, že rovnice $x^x-x=27$ je určena a má konečný počet kořenů." (MS II, 31).

Díky diferenciálnímu značení, které vyznačuje změny geometrických veličin, tedy křivých čar, na základě samotné proměnné *x*, je však možno sestavit rovnice analyticky vyjadřující transcendentní čáry *přímo*; a tak pojmy abscisy a ordináty či rovnou souřadnic (v. b) osvobodit nejen od přímosti, ale obecně od jejich geometrického základu, a to ve prospěch toliko *společného zákona* daného nějakou charakteristickou formulí. Po Desarguesových a Pascalových zobecněních řadících čar Leibniz v *De linea ex lineis* pak na jejich účet píše:

> „Zajisté je ale možno uvažovat mnoho způsobů, jak vést nekonečno čar podle nějakého společného zákona, aniž by byly dány buď jako rovnoběžné, nebo sbíhající se do jediného bodu anebo se od společného bodu rozbíhající. Takové čáry pak ve vší obecnosti budu nazývat *ordinátami* (*ordinatim ductas*), nebo čarami danými po řadě (svojí polohou). Mějme například nějaké zrcadlo o libovolném tvaru a dané poloze, či spíše nějaký jeho řez v rovině osy, odrážející sluneční paprsky, jež na zrcadlo dopadly přímo, anebo nějak odražené či lomené; pak tyto odražené paprsky budou tvořit nekonečno přímočarých ordinát a pro libovolný bod zrcadla (při zachování ostatních podmínek) dostáváme jemu odpovídající odražený paprsek. Nicméně ordinátami nerozumím pouze přímé čáry, nýbrž také všemožné křivé čáry, nakolik ovšem je možno podat *zákon* umožňující pro jakýkoli daný bod (coby ordinatrix) vést jemu odpovídající křivku." (MS V, 266-267)

47 *Roulette*, cykloida. Žádná jiná křivka klasické matematiky se krásou a význačností svých geometrických *i* mechanických vlastností, vzrušeným zájmem ze strany největších z matematiků i spory o prvenství nemohla rovnat jedinečnosti „Heleny geometrů". Lze snad i říci, že cykloida (též trochoida či ruleta) – coby obrazné svědectví doby, kdy geometrie plně vstoupila do pohybu a pohyb do geometrie – představuje pro 17. století to samé, čím byl pro antiku kruh. Jednalo se takřka o křivku osudovou, „jablko sváru" (Montucla II, 42), o niž se svými zbraněmi ucházeli všichni geometričtí koryfejové klasického věku. Oproti nehybné, posvátné pravdě antické geometrie tak vypovídá mnohé o přirozené dynamice, myšlenkové, lidské i institucionální, dobývání pravdy na počátku novověku. Řečeno s Leibnizem, pozoruhodným „*zřetězením všech věcí*" (MS V, 332) jsou dějiny cykloidy a dějiny raného období infinitesimální matematiky vnitřně propleteny; a ukazuje právě jen na sílu nové analýzy nekonečně malých, že si L'Hospital může dovolit položit křivku tohoto věhlasu jako „Příklad II", coby zvláštní případ nekonečna dalších. Z uvedených důvodů si cykloida zaslouží poněkud zevrubnější pojednání.

Jméno napovídá, že cykloida – *cycloïde*, „kruhu podobná"; či ještě lépe L'Hospitalova a Pascalova *roulette*, „kotálnice" – vzniká jako uvažovaná stopa bodu na obvodu (tvořícího) kruhu, jenž se bez prokluzů odvaluje, čili „kotálí" po nějaké přímé čáře. Nazýváme cykloidu zkrácenou, či prodlouženou, pokud se opisující bod pevně spojený s tvořícím kruhem vezme pod, nebo nad jeho obvodem; a mluvíme o epicykloidě, případně hypocykloidě, když se tvořící kruh odvaluje po vnějším, respektive vnitřním obvodu nějakého jiného kruhu. Je však třeba upozornit, že o zkrácené a prodloužené cykloidě mluví L'Hospital v opačném smyslu, než je dnes obvyklé, totiž podle délky základny oproti obvodu tvořícího kruhu. Vlastnost prosté cykloidy, kterou L'Hospital v tomto příkladě uvádí, se pak klade následovně.



Obr. X

Uvažujme tvořící kruh (Obr. X) procházející bodem *M*; pak zřejmě *MPBN* bude představovat rovnoběžník, neboť *MP* je rovnoběžná a rovná *NB*. Nyní je jasné, že $\widehat{PA}=\widehat{BPA}-\widehat{BP}$ a ze způsobu utvoření cykloidy

$$\widehat{BPA}=CB \text{ a } \widehat{BP}=\widehat{MN}=CN,$$

$$\widehat{PA}=CB-CN=NB=MP,$$

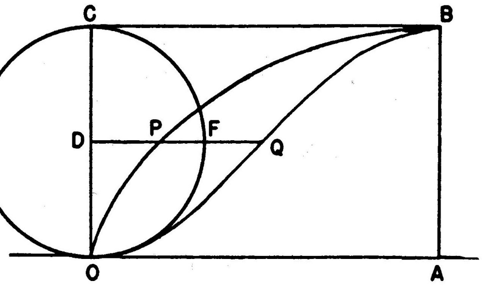
a tedy podle L'Hospitalova příkladu

$$x=y.$$

Nepřekvapí, že první zmínky o cykloidě z dějin myšlení neurčitě vystupují na pozadí věčných snah o kvadraturu kruhu. Podle Wallise byla známa Mikuláši Kusánskému, který se ostatně pokoušel určit kvadraturu kruhu mechanicky odvalováním obručí; za tímto účelem se jí zabýval i Charles de Bouvelles v *Geometriae introductionis libri sex* (1501). Prvním, kdo křivku vážně studoval a rozšířil povědomí o ní, byl Galileo, jemuž také vděčí za své jméno. V dopise Cavalierimu z roku 1640, období sporů o cykloidu, píše, že mu na mysl přišla již více než před padesáti léty, obdivoval ji pro její půvabnou zakřivenost (*curvita graziosissima*) příhodnou pro tvar mostního oblouku a pokoušel se určit její vlastnosti vycházeje přitom z principu, že by obsah pod jejím obloukem mohl být trojí obsahu tvořícího kruhu (Loria 1901, 461). K tomuto ve své radikální genialitě dospěl tím, že ze stejného materiálu vystřihl tvořící kruh i oblouk pod cykloidou, aby pak porovnal jejich váhy. Výsledky dávaly vždy něco méně než trojnásobek, což Galilea přivedlo k mínění, že otázka ukrývá nesouměřitelnost a zkoumání vzdal.

Vlastní příběh cykloidy se, jako ostatně mnohé z důležitých dějů zakládání nové vědy, začíná s otcem Mersennem, který ke křivce koncem třicátých let 17. století obrátil pozornost francouzských matematiků. Do Mersennova kruhu patřil od roku 1628 i Gilles Persone de Roberval, jemuž se vskutku o šest let později podařilo provést kvadraturu cykloidy a ukázat, že plocha pod jejím obloukem je rovna *přesně* trojnásobku tvořícího kruhu. Vyšlo najevo mnohem později, až roku 1693, kdy poprvé přichází do tisku Robervalova *Traité des indivisibles*, že rozhodující podmínku objevu patrně představují Cavalieriho čerstvě (1629) zveřejněné poznámky k vlastní metodě nedělitelných, anebo Robervalův vlastní objev této metody, jak prohlašoval, čistě ze znalosti Archimédových metod (OCI, 88). Neboť zajisté – čistě prostředky eukleidovské geometrie je kvadratura cykloidy nedostupná. Robervalova práce byla součástí kandidatury na Ramovu stolici při Collège de France, o jejíž získání se každé tři roky vypisovala nová soutěž. Bylo tedy pro vítěze jedině racionální nevystavovat příliš své skutečné metody, aby je za čas nějaký *perfectionneur* nepoužil proti němu. Robervalovi se přihodilo, že tuto pozici zastával 40 let. Přišel tak o mnoho svých zásluh a prvenství, byl nucen rozpoutat spor o cykloidu s Toricellim, jenž podobnými prostředky dospěl k podobným výsledkům, a skončit ve stínu dějin za postavami formátu nikterak většího. To budiž zmíněno s nutnou lehkostí a jen na okraj, coby mravoličný příběh z heroických dob vědy, k jakým že koncům i tehdy vedl „racionální“ přístup k poznání. Dodejme, že také z těchto temných stránek vědění vycházely mnohé z Leibnizových snah o nové vědecké instituce, zakladatelské a emendační. Robervalovo řešení, které se opírá o Cavalieriho „teorém nedělitelných“, lze shrnout následovně.

Budiž *OABP* (Obr. XI) plocha pod polovičním obloukem cykloidy s tvořícím kruhem o průměru *OC*. Nechť *P* je libovolný bod na cykloidě a vezměme *PQ* rovnou *DF*. Místo bodu *Q* pak nazveme doprovodnou křivkou cykloidy.



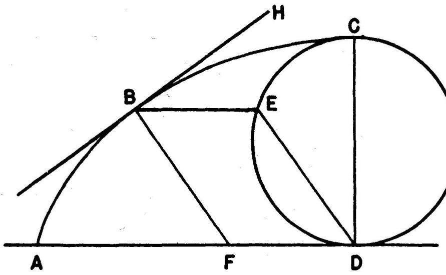
Obr. XI

Podle Cavalieriho teorému – jenž praví, že pokud jsou dvě plochy všude stejné šířky, pak jejich obsahy jsou si rovny – dělí doprovodná křivka *AQD* pravoúhelník *ACDB* na dvě poloviny, neboť z povahy jejího utvoření každé úsečce *DQ* v *OQBC* odpovídá úsečka v *OABQ* o stejné délce. A právě tak strana *OA* pravoúhelníku je rovna polovině obvodu kruhu a strana *OC* pak jeho průměru, a tudíž obsah pravoúhelníku se rovná dvojnásobku obsahu tvořícího kruhu; a tedy obsah *OABQ* je roven obsahu tvořícího kruhu. Plocha mezi cykloidou *OPB* a doprovodnou křivkou *OQB* se tak bude rovnat polovině *OFC* tvořícího kruhu, neboť obě dvě plochy mají všude stejnou šířku. A tím pádem plocha pod polovinou oblouku cykloidy bude jeden a půl krát větší obsahu tvořícího kruhu a plocha pod celým obloukem cykloidy pak jeho trojnásobkem (Whitman 1969, 2-3).

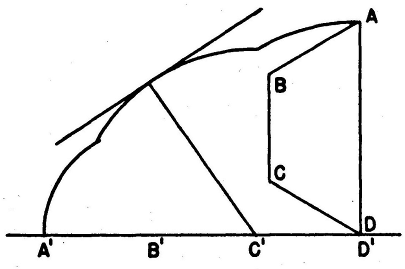
Roku 1638 Mersenne zasílá Robervalovo řešení Descartovi a Fermatovi a otevírá otázku tečen k cykloidě. Svá řešení mu zanedlouho zasílají Descartes, Fermat i Roberval, z nichž každé je osobité, avšak s nárokem na univerzální platnost *metody* pro všechny křivky; neboť odvislé od obecného pojetí křivých čar, a tím i tečen k nim, jež bylo vlastní každému z jednotlivých autorů. Povstávají odtud pak obvyklé spory o původnost a zásluhy a následné obviňování z plagiátorství živené – zejména Descartovou – pýchou a osobní nesnášenlivostí. Descartova metoda se opírá o výše (v. 149) uvedenou úvahu stran tečných kruhů, čili středů křivosti (tamt., 4) a normál coby jejich poloměrů; Roberval vychází z vlastního, originálního uchopení křivek v podobě výslednic sil tvořících pohybů, „axiomu či principu objevování“, že „směr pohybu bodu, jenž opisuje křivku, je tečnou ke křivce v každé poloze tohoto bodu“ (OCI, 91); zatímco Fermat uplatňuje svoji metodu *de maximis et minimis* a pozoruhodnou ideu, že „je dovoleno dosadit ordinátám křivek ordináty tečen a obloukům křivek délky odpovídajících tečen“ nalezených uvedenou metodou, čímž se dotýká samotného základu diferenciálního počtu. Připomeňme, že cykloida je křivkou transcendentní.

Descartovy důmyslné, byť zkusmé útoky na otázky nekonečna pro další dějiny matematiky zůstaly povětšinou ve stínu metodických předpisů hlásaných jeho *Geometrií*. Nebyly ostatně určeny k tisku – stránky odkrývající v Descartově tvořivé osobnosti předchůdce počtu nekonečna jsou rozesety v dopisech jednotlivcům či úzkému okruhu vzdělanců. Vyznačují se volným užíváním infinitesimálních pravoúhelníků, limitních přechodů, Cavalieriho a Robervalových „nedělitelných“ rovnoběžných čar coby obsahů figur, ztotožněním křivek s mnohoúhelníky o nekonečnu stran (tamt., 99). Což je také případ Descartovy archimedovské kvadratury cykloidy (AT II, 253-265) i jeho stručné a jednoduché (*fort courte et fort simple*) metody nalezení tečny (AT II, 307-313).

Nechť *B* je libovolným bodem poloviční cykloidy *ABC* (Obr. XII) a nechť je třeba v tomto bodě vést tečnu k cykloidě.



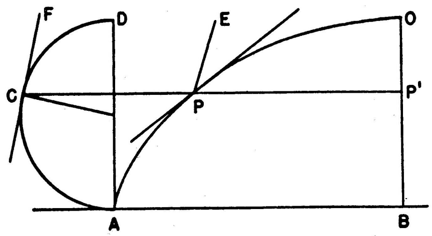
Obr. XII



Obr. XIII

Nuže veďme *BE* rovnoběžnou se základnou *AD* protínající tvořící kruh v *E* a dále veďme *BF* rovnoběžnou s *ED* a *BH* kolmou na *BF*; pak *BH* bude požadovanou tečnou. Neboť jestliže mnohoúhelník *ABCD* (Obr. XIII) necháme odvalovat po přímé čáře *A'D'*, pak jeho bod *A* opíše křivku složenou z kruhových oblouků o středech v *B'*, *C'*, *D'* atd., přičemž zajisté tečny k těmto kruhovým obloukům budou vždy kolmé na úsečky spojující jejich středy s příslušným tečným bodem. „Avšak to samé nastává i u mnohoúhelníku o sto tisíc milionech stran, a tím pádem také u kruhu." (tamt., 309) A tedy jestliže tvořící kruh pokládáme za mnohoúhelník o nekonečnu stran, tečna v daném bodě bude čára kolmá na spojnici tohoto bodu s bodem, v němž se v okamžiku utváření tečného bodu tvořící kruh dotýká základny cykloidy. Důkaz uzavírá Descartes svým neopakovatelným způsobem slovy: „Mohl bych uvést i pro mne hezčí a geometričtější důkaz této tečny, ale nechám toho; nechce se mi to psát, protože by to bylo poněkud delší." (AT II, 309) Oblouk cykloidy se tak v Descartově heuristice ukazuje vlastně jakýmsi limitním případem křivky kruhovýchoblouků, jejich obalovou křivkou *avant la lettre* (OCI, 114). Celý postup pak jistě ne náhodou upomíná na paradox Aristotelova kola hojně probíraný v 16. století, zejména však v prvním dnu Galileových *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*, které vychází téhož roku 1638. Descartes otázku Aristotelova kola i Galileovy *Discorsi* ve stejné době diskutuje v dopise Mersennovi (AT II, 271).

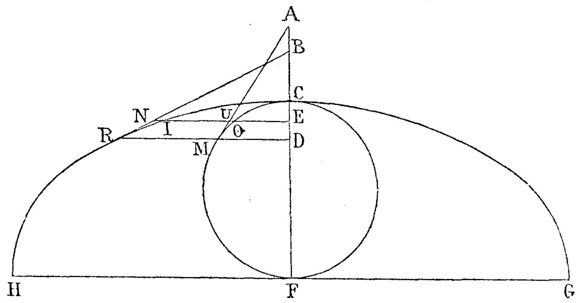
Robervalova metoda určení tečny k cykloidě, již nazývá *Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval*, vychází, jak bylo řečeno, z její kinematické definice. Nechť se průměr *AD* (Obr. XIV)



Obr. XIV

kruhu pohybuje stejnoměrně, rovnoběžně ke své původní poloze, kde *A* leží vždy na úsečce *AB* rovné polovině obvodu kruhu, dokud nedosáhne polohy *BO*. Zároveň nechť bod *A* druhým pohybem o té samé rychlosti probíhá poloviční obvod kruhu *ACD* tak, že do bodu *D* dospěje ve stejný okamžik, kdy *AD* dosáhne *BO*. Bod *A* pak výsledkem svého dvojího pohybu opíše půlcykloidu *APO* (Whitman 1969, 4). Jestliže nyní přímými čarami vyjádříme směry obou tvořících pohybů, tečnu k cykloidě v daném bodě nalezneme jako směr pohybu složeného. Nuže z libovolného bodu cykloidy *P* veďme *PP'* rovnoběžnou s *AB* a protínající původní půlkruh v *C*, jež bude prvním z určujících směrů tvořícího pohybu v *P*. Veďme dále tečnu *CF* ke kruhu v bodě *C* a k *CF* rovnoběžnou *PE*, která bude představovat druhou složku směru bodu *P*. Výsledným směrem obou pohybů, a tedy tečnou k cykloidě v bodě *P*, konečně bude čára dělící na půl úhel *EPP'*.

Fermatova metoda se zdá právě tak složitá, jako Descartova prostá; zajisté proto, že Fermat jde hlouběji. Počáteční *symptoma* (v. 152), čili specifickou vlastnost cykloidy Fermatova postupu (cykloidu nazývá *curva Domini de Roberval*) představuje (Obr. XV) rovnost úseku *RD* a součtu ordináty *DM* a kruhového oblouku *MC* (FO I, 162). V posledku se tedy jedná právě o rovnost úsečky *RM* a kruhového oblouku *CM*, jak se ukázalo výše a jak se uvažuje v L'Hospitalově příkladu.



Obr. XV

Jestliže *R* má být bodem cykloidy, v němž je třeba vést tečnu *RB*; tedy veďme úsečku *RMD* kolmou na *CDF* a půlkruh protínající v *M*. Nyní veďme v bodě *M* tečnu ke kruhu, přičemž „bychom postupovali stejně, i kdyby křivka *COM* byla jiné povahy" (tamt., 163). Fermatova metoda je tedy obecná; platí i pro kotálnice utvořené od jiných tvořících křivek, nakolik k nim známe vést tečnu.

Za těchto podmínek budiž hledaná *DB* rovna *a*; *DA* určená konstrukcí rovna *b*; *MA* právě tak budiž *d*; danou *MD* označme jako *r*; danou *RD* jako *z*; daný úsek *CM* obvodu kruhu jako *n*; a libovolně vzatou úsečku *DE* jako *e*; a veďme z bodu *E* úsečku *EOUIN* rovnoběžnou s *RMD*. Pak tedy (podobností trojúhelníků *BDR* a *BEN*)

$$a : a-e :: z : \frac{za-ze}{a},$$

a tím pádem

$$\frac{za-ze}{a} = EOUIN.$$

Tedy je třeba, „vzhledem ke specifické vlastnosti křivky, kterou je třeba uvažovat na tečně" (tamt.), provést adekvaci úsečky $\frac{za-ze}{a}$ úsečce *OE* spojené s křivkou *CO*. Což vlastně značí položit skoro rovnými body *I* a *N*, neboť *I* leží na křivce a *N* na tečně; čím menší pak je *e*, tím bude adekvace přesnější (OCI, 138). Čili

$$IE \approx \frac{za-ze}{a}.$$

Avšak na základě specifické vlastnosti křivky $IE = OE + \widehat{CO}$; dále $\widehat{CO} = \widehat{CM} - \widehat{MO}$; a tím pádem

$$\frac{za-ze}{a} \approx OE + \widehat{CM} - \widehat{MO}.$$

Nyní Fermat podle výše uvedeného principu, „bez narušení symetrie (*ad vitandam asymmetriam ex superiori cautione*)" (FO I, 163) přistupuje k dalším dvěma adekvacím, jednak mezi *OE* a *UE* a dále mezi *MO* a *MU*, čímž ztotožňuje body *O* a *U* a malý kruhový oblouk s úsekem tečny. Následkem druhé adekvace pak nastává

$$\frac{za-ze}{a} \approx UE + \widehat{CM} - MU;$$

analytickými termíny se *UE* vyjádří z podobnosti trojúhelníků *ADM* a *AEU* tak, že *b* se má k $b-e$, jako *r* k

$$\frac{rb-re}{b} = UE$$

a právě tak v případě *MU*, jako se má *b* ku *d*, tak se má *e* ku

$$\frac{de}{b} = MU.$$

Ježto pak *CM* byla označena za *n*, výše uvedená adekvace bude analytickými termíny vyslovena jako

$$\frac{za-ze}{a}\approx\frac{rb-r\,e}{b}+n-\frac{de}{b},$$

což násobeno *ab* dává

$$zba-zbe\approx rba-rae+bna-dae;$$

a vzhledem k *propriété spécifique* $z=r+n$

$$zba\approx rba+bna,$$

čili

$$zbe\approx rae+dae;$$

a po vydělení *e*

$$zb=ra+da=(r+d)a.$$

Konečně tedy

$$\frac{z}{a}=\frac{r+d}{b}\ \text{neboli}\ \frac{MA+MD}{DA}=\frac{RD}{DB}.$$

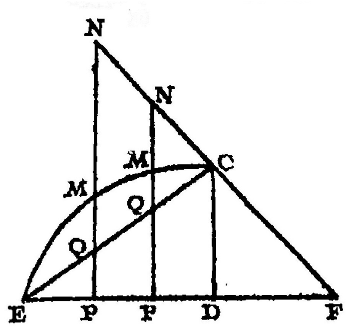
Tato poslední úměra konečně již umožňuje konstrukci bodu *B*, a tím i tečny *RB* k cykloidě, k níž Fermat přistupuje posléze (FO I, 164-165).

Výsledky francouzských matematiků Mersenne ještě téhož roku 1638 oznamuje Galileovi, který však další výzkumy cykloidy deleguje na své žáky. Nové studium křivky dává roku 1644 vzniknout prvnímu tištěnému pojednání o cykloidě, Torricelliho *Appendix de Dimensione Cycloidis* (Torricelli 1644, 85-90) zahrnující tři postupy určení plochy pod cykloidou, jeden na způsob Archimédův a dva založené na nové metodě nedělitelných. Nařčení ze strany Robervala z přivlastnění jeho objevu přichází coby zřejmě nevyhnutelný důsledek. Přesněji, píše Pascal v *Histoire de la Roulette* (POC, 159), se jednalo o obvinění z krádeže Fermatovy metody a Robervalova výsledku opsaných tehdy již zesnulým Beaugrandem, jak je podle Robervala Torricelli nalezl v Galileově pozůstalosti; v čemž byl, jak Pascal dosti jednostranně dodává, „nejen neomluvitelný, ale též nešťastný; vždyť to ve Francii byla věc k popukání, vidět Torricelliho, kterak si v roce 1644 připisuje objev, jenž byl veřejně a bez debat již 8 let přiznáván p. de Robervalovi..." Výše zmiňovaná Galileova slova i Robervalův způsob zatajování vlastních metod však dávají tušit, že záležitost stěží mohla být tak přímočará; celá otázka se nicméně přirozeně uzavírá Torricelliho smrtí roku 1647 přicházející záhy po jejím nastolení.

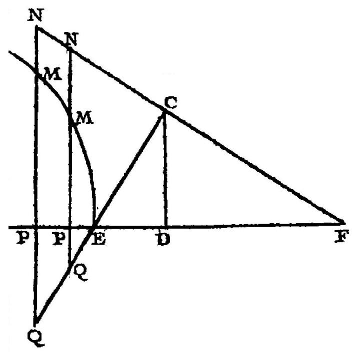
Nejslavnější kapitolu příběhu cykloidy jakožto cykloidy, *Histoire de la Roulette*, otevírá na začátku roku 1658 jistý Amos Dettonville, vlastním jménem Blaise Pascal. V období, kdy dráhu vrcholného geometra Pascal již dávno opustil, mu myšlenka na cykloidu, jak praví legendy jeho života, pomohla ulevit od příšerné bolesti, a pojal proto za Boží záměr a vnuknutí dokázat o ní vše, co bylo možné. Což také učinil a v červnu téhož roku byl připraven pod řečeným pseudonymem vyhlásit výzvu největším matematikům Evropy k nalezení důležitých vlastností cykloidy, z nichž nakonec – jakmile zjistil, že většinu zodpověděl již Roberval – zůstaly dvě: určit obsah a těžiště polovičního pod půlcykloidou vymezeného úsečkou rovnoběžnou se základnou a objem a těžiště jeho rotačního tělesa. Pascalovy důkazy představují vrchol geometricky infinitesimálních úvah bez užití kalkulu a jako takové také skončily takříkajíc na vedlejší koleji vývoje. Příběh cykloidy po jejími různými maskami však, jak již víme pokračoval, v Huygensových kyvadlových hodinách, kde se cykloida ukázala tautochronou a brachystochronou v době Bernoulliho výzvy nejbystřejším matematikům světa.

48 Pierre Varignon v *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits* (1725), 17-18, znázorňuje L'Hospitalovu poznámku následujícím tvrzením, kde strany *EC*, *FC* (Obr. XVI, XVII) představují původní křivky *AQC*, *BCN* (Obr. 8).

„*NECHŤ* ECF *je nějakým přímočarým trojúhelníkem o vrcholu* C *a základně* EF*, na niž libovolným způsobem připadá* CD*. Dle libosti prodloužíme na jedné straně* CF *a z bodů* N *povedeme* NP *rovnoběžné s* CD*, protínající základnu v* P *a druhou stranu v* Q*. Pak na těchto úsečkách* NP *bod* M *takový, že pro všechny bude platit* $\overline{\mathrm{PQ}}^m.\overline{\mathrm{PM}}^{m}::\overline{\mathrm{PM}}^n.\overline{\mathrm{PN}}^n$*. Tvrdím, že* *křivka* MM *bude jednou z nekonečna kuželoseček.*



Obr. XVI



Obr. XVII

DŮKAZ. Ježto *PN*, *CD* jsou rovnoběžné (*hyp.*), budeme mít $\overline{PQ}^m.\overline{CD}^m::\overline{EP}^m.\overline{ED}^m$ a $\overline{PN}^n.\overline{CD}^n::\overline{PF}^n.\overline{DF}^n$. Čili, po řadě vynásobeno $\overline{PQ}^m\times\overline{PN}^n.\overline{CD}^{m+n}::\overline{EP}^m\times\overline{PF}^n.\overline{ED}^m\times\overline{DF}^n$. Avšak (*hyp.*) $\overline{PQ}^m.\overline{PM}^m::\overline{PM}^n.\overline{PN}^n$, a tím pádem $\overline{PQ}^m\times\overline{PN}^n=\overline{PM}^{m+n}$. A tudíž $\overline{PM}^{m+n}.\overline{CD}^{m+n}::\overline{EP}^m\times\overline{PF}^n.\overline{ED}^m\times\overline{DF}^n$ neboli $\overline{PM}^{m+n}.\overline{EP}^m\times\overline{PF}^n::\overline{CD}^{m+n}.\overline{ED}^m\times\overline{DF}^n$. A poněvadž tento poslední poměr je konstantní, pak pokaždé získáváme $\overline{PM}^{m+n}.\overline{EP}^m\times\overline{PF}^n::\overline{PM}^{m+n}.\overline{EP}^m\times\overline{PF}^n$, čili $\overline{PM}^{m+n}.\overline{PM}^{m+n}::\overline{EP}^m\times\overline{PF}^n.\overline{EP}^m\times\overline{PF}^n$. Což dává místo elipsy /Obr. XVI/ a místo hyperboly /Obr. XVII/ a konečně paraboly, pokud bod *F* budeme uvažovat nekonečně vzdálený, tj. *EF* a *CF* navzájem rovnoběžné; neboť pak budeme mít *DF* všude sobě rovné, a tudíž všude platí $\overline{PM}^{m+n}.\overline{PM}^{m+n}::\overline{EP}^n.\overline{EP}^n$. Což činí místo nekonečna parabol.“

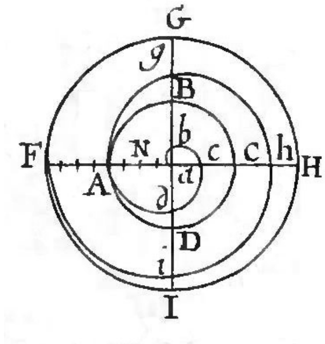
V případě $m=1=n$ nastává tedy $\overline{PM}^2.\overline{PM}^2::EP\times PF.EP\times PF$, což vede k místům běžné elipsy, hyperboly a paraboly (tamt.).

49 Slovy Archimédovými, jestliže se v rovině kolem svého pevného počátku otáčí /polo/přímka rovnoměrným pohybem, dokud se nevrátí do původní polohy, a jestliže se zároveň počínaje jejím pevným počátkem po přímce rovnoměrně pohybuje bod, pak tento bod v rovině opíše spirálu (Heiberg II, 11). Archimédovu spirálu neboli závitnici lze tedy uvažovat jako výslednici dvou rovnoměrných pohybů o rovnici v polárních souřadnicích, kde pólem je pevný bod, polární osou pohyblivá přímka, *a* nějakou (kladnou) konstantou

$$\rho=a\phi.$$

Jestliže φ nabírá záporných hodnot, vzniká druhé rameno spirály, spirála souměrná s prvou podle druhé polární osy; ta nicméně přichází na pořad dne až v polovině 17. století. Jak vidno na první pohled, Archimédova spirála je křivkou transcendentní, čili mechanickou (§ 106), neboť počet jejích průniků s nějakou danou přímkou je nutně vždy vyšší než jakýkoli konečný, a tudíž není možné vyjádřit ji algebraickou rovnicí (v. 46). Z uvedené rovnice dále vyplývá, že libovolný bod Archimédovy spirály je možno určit právě, když kruh o poloměru *a* je rektifikovatelný; a naopak, nakolik lze Archimédovu spirálu opsat spojitým pohybem, je možno libovolný kruh rektifikovat; a tudíž že Archimédova spirála představuje kvadratrix (Loria 1901, 427). Jak se ukázalo výše (v. 148), za tímto účelem Archimédovu spirálu studoval i François Viète. Sám Archimédes stran spirály vyřešil otázku tečny ke křivce a její kvadraturu, zatímco otázku rektifikace přenechal až klasickému věku, kdy Cavalieri, Řehoř od sv. Vincenta, Roberval, Pascal a Fermat ukázali, že rektifikace Archimédovy spirály je ekvivalentní rektifikaci paraboly (tamt., 430).

L'Hospitalovu rovnici Archimédovy spirály lze spolu s Abbém de la Caille (1768, 306-307) vysvětlit následovně. Uvažujme kruh *ABCD* (Obr. XVIII); v souladu s utvořením spirály střed *a* opíše v prvním obratu poloměru *aA* spirálu *abcdA*, ve druhém pak *AghiF*, zatímco poloměr *aF* opíše kruh *FGHI*.



Obr. XVIII

Označme obvod *ABCD* jako *b*; jeho poloměr *aA* jako *a*; a nechť poloměr *aA* proběhne oblouk *AC*, přičemž střed *a* proběhne $aN = ac$. Nyní vezměme oblouk *AC* jako abscisu a *ac* jako odpovídající ordinátu; a pokud abscisu označíme jako *x* a ordinátu jako *y*, pak se obvod *ABCD* ku poloměru *aA* bude mít tak, jako například abscisa *AC* ku ordinátě $aN = ac$, čili

$$b : a :: x : y$$

a tedy

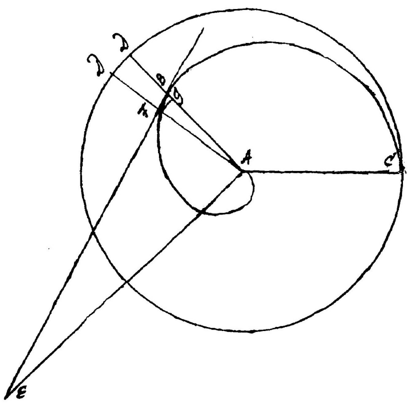
$$y = \frac{ax}{b}.$$

Jde tedy vlastně o rovnici vycházející z polárního uspořádání řadících čar, jež poprvé zavádí Jakob Bernoulli roku 1691.

Johann Bernoulli věnuje nalezení tečny k Archimédově spirále Úlohu XI *Lectiones*, v níž pedagogicky postupuje v duchu zadání Archimédova, nicméně veškerou délku Archimédova postupu (Heiberg II, 70-77) řeší na poli dvou řádků:

„Nalézt tečnu ke křivce. Budiž /Obr. XIX/ poloměr $AC = a$, obvod $DDCD = b$, $AB = x$ a veďme *AE* kolmou k *AB*. Nechť se poloměr *AC* má k obvodu tak, jako *AB* k oblouku *CKD*. Pak také

$$AD.AF :: DD.FG \text{ a } a.x :: \frac{b\,dx}{a}.\frac{bx\,dx}{aa} \text{ a dále } BG.FG :: AB.AE, \text{ tj. } dx.\frac{bx\,dx}{aa} :: x.\frac{bxx}{aa} = s.$$



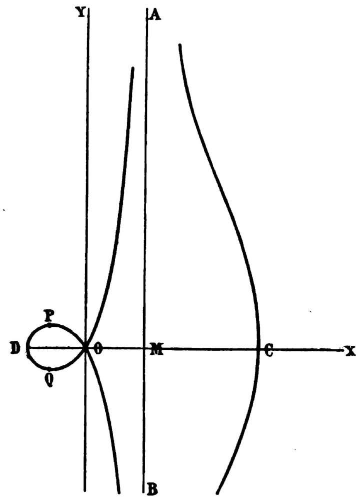
Obr. XIX

Jestliže tedy máme vést tečnu v bodě *C*, vychází $s = b$, což svojí dlouhou úvahou dokázal Archimédes.“ (Bernoulli 1922, 16)

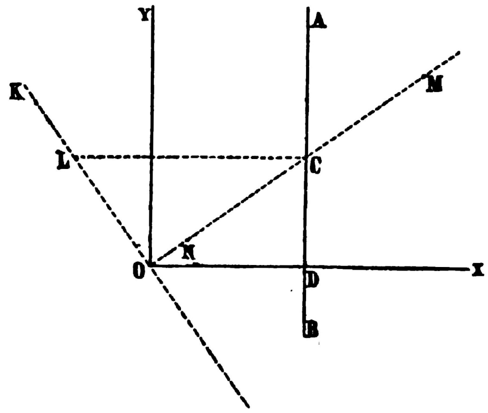
Více v k Archimédově spirále v Loria (1901, 426-438); mnohé ze spirál uvažovaných v 17. století probírá Pierre Varignon v *Nouvelle formation de Spirales*, 1704.

50 Jestliže O (Obr. XXI) je pevný bod a AB nějaká daná úsečka; a tímto bodem povedeme úsečku OC a od C vezmeme dva úseky rovné nějaké dané veličině h; pak geometrické místo bodů M a N pro jakoukoli podobnou úsečku OC (Obr. XX) se bude nazývat Nikomédovou konchoidou (Teixeira I, 259); O se bude nazývat pólem konchoidy, OM polární osou a a přímka AB její základnou $x=h$, která je zároveň i její asymptotou. Obr. XXI znázorňuje případ, kdy $h>a$ s vrcholy v D a C; při $h=a$ vrchol D i uzel vymizí a křivka má v O bod vratu; a při $h<a$ v počátku souřadnic izolovaný bod. Rovnice Nikomédovy konchoidy v polárních, respektive kartézských souřadnicích bude tedy

$$\rho=\frac{a}{\cos(\phi)}\pm h, \text{ respektive } (x-a)^2(x^2+y^2)-h^2x^2=0.$$



Obr. XX



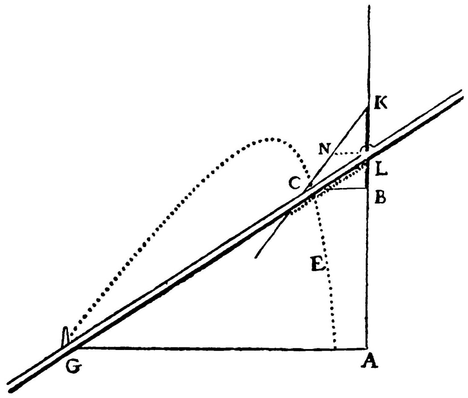
Obr. XXI

Objev konchoidy (křivky připomínající mušli) přímky, podle Prokla, náleží Nikomédovi (asi 200-100). S její pomocí zodpověděl Nikomédes otázku trisekce úhlu, kterou, jak tvrdí Proklos, sám také nastolil; neboť tato křivka umožňuje najít dvě střední geometrické úměrné mezi dvěma veličinami, a tím tento „solidní" problém (v. 3) vyřešit právě tak, jako otázku zdvojnásobení objemu krychle (při $h=2a$). Postup nalezení dvou středních úměrných veličin podává Pappos v *Collectiones* IV, 32 (Hultsch I, 275-277). Jedná se tedy o křivku věhlasnou, a tudíž příkladnou, na níž své analytické metody uplatňovali všichni vynikající matematici 17. století. Descartes představuje bez výpočtu konstrukci normály k Nikomédově konchoidě v druhé knize *Geometrie* (AT VI, 423-424); Fermat v *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (FO I, 160); kinematickou metodou k určení tečny nakonec také na základě korespondence s Fermatem dochází i Roberval (1730, 32). Johann Bernoulli podává příklad konstrukce tečny k Nikomédově konchoidě coby zvláštní křivce v Úloze VII *Lectiones*, 12-13.

Jak je patrné již z L'Hospitalova výkladu, pojem Nikomédovy konchoidy lze snadno zobecnit nahrazením přímky AB (Obr. XXI) nějakou libovolnou křivkou. K tomuto zobecnění přistupují Roberval v *Observations sur la composition des mouvements*, kde rovněž představuje obecnou metodu určení tečny ke konchoidě křivky C, nakolik lze určit tečnu ke křivce původní; a právě tak i Barrow v *Lectiones geometricae*, VIII (Barrow 1670, 66). Z Robervalova *De resolutione aequationum* (1730, 233), vychází další zobecnění pojmu konchoidy, v jehož duchu zde L'Hospital křivku zadává, kdy v rovině jsou dány pevná křivka C a pohyblivá křivka C', pevný bod O a pohyblivý bod A spojený s C', který pohybem C' probíhá křivku C. Nuže úsečka spojující body O a A protíná křivku C' v bodech, které jejím pohybem opisují další křivku zvanou konchoida křivek C a C'. Jestliže tedy tak, jako v L'Hospitalově příkladě, C bude přímkou a C' kruhem o středu v A, výslednou konchoidou bude konchoida Nikomédova; a jestliže C' představuje parabolu, bod A její ohnisko a *C* přímku spadající v jedno s její osou, konchoida *C* a *C'* bude Descartovou parabolou. (Teixeira I, 266).

Více k vlastnostem a dějinám Nikomédovy konchoidy Loria (1901, 128-133); Teixeira (I, 259-268), kde lze nalézt i výklad Pappovy konstrukce trisekce úhlu.

51 *La Paraboloïde de M. Descartes*. Po Newtonově *Ennumeratio linearum tertii ordinis* (1706) se „karteziánská parabola“ může jevit jako jedna z mnoha kubických parabol, nicméně sluší se připomenout, že v očích samotného Descarta požívala výsadního postavení. Na stránkách *Geometrie* plní tato křivka úlohu svého druhu křižovatky obou přístupů (v. 51, 152) k novému geometrickému řádu, podstatně tak přispívá k vymezení jeho hranic vůbec, tj. k utvoření obou kritérií geometrických čar včetně možnosti jejich sjednocení. Z hlediska vydělení křivek spojitým pohybem za pomoci Descartových teoretických automatů (Obr. VII, Obr. XXII) představuje karteziánská parabola po úsečkách, kruhu a kuželosečkách první ze stavebních kamenů vyššího geometrického řádu na základě hierarchie složitosti křivek. Řád geometrické křivky lze stavět následovně (AT VI, 393).



Obr. XXII

Uvažujme posuvný pravítkový přístroj (Obr. XXII), jehož poloha je dána pouze množstvím podpěrek *AL*, průnikem pravítka *GL*, plochy *CNKL* s libovolně prodlouženou stranou *KN* směrem k *C*, opisující křivku *EC*. Nyní lze zvolit nějakou přímou čáru, jako *AB*, ke které se budou vztahovat různé body křivky *AC*; a „lze je zvolit libovolně, neboť třebaže máme mnoho možností, jak rovnici učinit kratší a jednoduší, vždy je možno čáru na daný rod upravit“. Z libovolného bodu *C* křivky pak veďme *CB* rovnoběžnou s *GA*, „a ježto *CB* a *BA* představují neurčené veličiny, označuji je jednu *y* a druhou *x*“ (tamt., 394). A nyní již stačí známým způsobem určit rovnici křivky, tedy najít její rod a ukázat, že uvažovanou křivkou je hyperbola. Jestliže však namísto přímé čáry *CNK* postavíme samotnou hyperbolu či jinou křivku prvního rodu ohraničující plochu *CNKL*, pak průnik této křivky a pravítka *GL* opíše další křivku, která bude druhého rodu. V případně kruhu to zřejmě bude pravé rameno Nikomédovy konchoidy neboli „vrchní konchoida“ (*la premiere Conchoide des anciens*), avšak „jestliže jí bude parabola o průměru *KB*, opíše se nejjednodušší křivka Pappovy otázky, pokud je dáno pět čar polohou“ (tamt., 395).

Descartova parabola, „křivka pouze o jeden stupeň složitější než kuželosečky“, tak v rámci druhé knihy *Geometrie* význačným způsobem vstupuje do ustavení mechanického kritéria geometrických čar, založeného na řízeném spojitém pohybu i kritéria algebraického vycházejícího původně z řešení Pappovy úlohy; představuje znamení jejich jednoty. Místo ve třetí knize, na než L'Hospital poukazuje, je zřejmě následující (řeč je o stupních rovnic a jim odpovídajících geometrických konstrukcích; místo pokračuje „obecným pravidlem“ konstrukce úloh o rovnici šestého stupně)

> „Avšak ze stejného důvodu není možno jakoukoli z úloh, jež jsou o stupeň vyšší nežli tělesové (*solides*), a předpokládají tak nalezení čtyř středních úměrných či rozdělení úhlu na pět rovných částí, konstruovat za pomoci žádné z kuželoseček. Proto se domnívám, že zde vykonám vše, co je možné, když podám obecné pravidlo jejich konstrukce s využitím křivky, jež se opíše průnikem paraboly a přímé čáry, jak se ukázalo výše. Troufám si totiž tvrdit, že

co do přirozenosti není žádná jednodušší, kterou by bylo lze za tímto účelem použít; a rovněž jste viděli, že tato křivka bezprostředně následuje kuželosečky v řešení otázky, o něž staří tolik usilovali a které dává poznat řád křivých čar přípustných v geometrii.“ (tamt., 476)

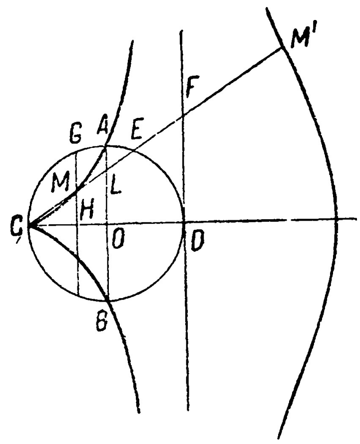
Rovnice karteziánské paraboly, jinak také zvané Descartův (Newtonův) trojzubec či parabolická konchoida je

$$axy = y^3 - 2ay^2 - a^2 y + 2a^3.$$

Výrazem „*la compagne de la Paraboloïde de Descartes*“ (překládám jako „doprovodná křivka“) míní L'Hospital zřejmě rameno karteziánské paraboly v záporných hodnotách abscis, jež v dané době z hlediska geometrické interpretace ještě zdaleka nebyly samozřejmým pojmem.

K odkazům stran Descartovy paraboly viz v. 152. K Descartovu listu (Robervalův *galand* či *fleur de jasmin*), jenž je transformací rovnice karteziánské paraboly vzhledem k novým osám, což podle všeho Descartes sám věděl (AT II, 336), a jeho dějinám viz Loria (1901, 50-58).

52 Budiž dán v rovině kruh o středu *O* (Obr. XXIII) a jeho dva navzájem kolmé průměry *AB* a *CD.* Jestliže nyní z bodu *A* ležícího na jeho obvodu vezmeme po obou stranách dle libosti dva sobě rovné kruhové oblouky *AG* a *AE* a povedeme *GH* rovnoběžnou s *AB* a následně polopřímku *CE*; pak geometrické místo bodů průniku *GH* a *CE* nazveme Diokleovou cisoidou (Loria 1901, 36).



Obr. XXIII

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků je zřejmé, že $CM + CE = 2CL$; odtud pak L'Hospitalova rovnice $z + y = 2x$; a jestliže *DF* je tečna ke kruhu, pak na paprsku *CF* platí $FM = CE$, a tedy $CM = EF$. Tímto způsobem je pak možno cisoidu zadat či sestrojit i pro místa vně krajností *A*, *B* kruhu tak, že se bude rozprostírat do nekonečna a právě tečna *DF* bude představovat její asymptotu. Jestliže se pak v souladu s touto konstrukcí vezme úsek $FM' = CE$, místo bodu *M'* bude představovat doprovodnou křivku k cisoidě o asymptotě rovnoběžné s *DC*.

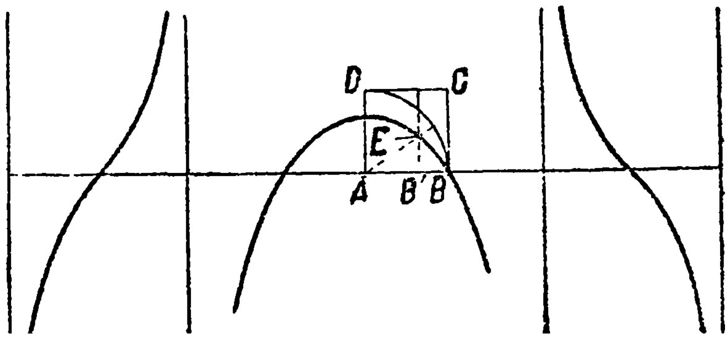
Diokleova cisoida patří mezi křivky, jimž dalo vznik hledání odpovědi na tři slavné otázky antické geometrie. Z Eutokiova komentáře k druhé knize Archimédova *Pojednání o kouli a válci* (Heiberg III, 81) se dozvídáme, že křivka byla objevena Diokleem (někdy mezi 250-100) za účelem vyřešení délského problému zdvojení objemu krychle, neboť, jak vidno, vskutku umožňuje nalezení dvou středních geometrických úměrných, a je tedy *duplikatrix*. Na stejném místě je popsáno i její sestrojení a užití; jménem cisoida (podobná listu břečťanu) ji označují až Proklus a Pappus (Loria 1901, 36). Zatímco staří uvažovali pouze část křivky obsaženou v kruhu, v její nekonečnosti ji začali pojednávat až matematici 17. století. Zmiňuje se o ní Roberval v dopise Fermatovi (FO II, 201); René de Sluse nachází její asymptotu a určuje objem tělesa vzniklého rotací cisoidy kolem této asymptoty. Další vlastnosti cisoidy dokázali Huygens, Wallis a Newton, který rovněž sestrojil přístroj křivku mechanicky opisující (Teixeira I, 2).

Johann Bernoulli podává opět ve zhuštěné podobě výpočet tečny k cisoidě na v Úloze VIII. *Lectiones*, 16-17.

53 Varignon v *Éclaircissments*, 21, k Tvrzení IX připojuje zajímavou poznámku stran rovnic křivek, do nichž coby neznámé vstupují samy oblouky křivek (v. 46). Najít tečnu ke křivkám, ke kterým se

tyto neznámé vztahují, je možno jedině za pomoci diferenciálů jejich tečen; neboť takové rovnice nedávají více než právě diferenciály křivek jako *Nn*, *Pp*, zatímco diferenciály běžných ordinát *FN*, *Fn* nebo *PN*, *Pn* a jejich poměry zůstávají z povahy dané rovnice nedostupné. Naopak jestliže povedeme *MH*, *MK* rovnoběžné tečnám v *N*, *P*; jejich diferenciály dají *MO*, *MR* atd.

54 Dle Pappových *Collectiones* IV, 25 (Hultsch I, 250-253) se Dinostratova kvadratrix sestrojí následovně. Mějme kvadrát *ABCD* (Obr. XXIV) a od středu *A* opišme kruh *BD*; pohybujme nyní úsečkou *AB* tak, že bod *A* zůstává pevným a *B* opisuje kruh *BD*. Jestliže pak bod *B* necháme rovnoměrně probíhat úsečku *AB*, přičemž *BC* bude stále v rovnoběžné poloze s *AD*; a zároveň úsečka *AB* bude probíhat rovnoměrně úhel *BAD*, a tedy bod *B* kruh *BD*; pak geometrické místo průniků *E* úseček *AB* a *BC* opíše Dinostratovu kvadratrix.



Obr. XXIV

Kvadratrix řečená Dinostratova je tedy mechanická křivka objevená podle Pappa známým sofistickým učencem Hippiou z Elidy (asi 440-390) patrně za účelem trisekce úhlu nebo obecně rozdělení úhlu v nějakém daném poměru (Loria 1901, 410). Pro řešení kvadratury kruhu ji použil Dinostratés (asi 390-320), odtud pak i její jméno. Ze způsobu zadání se jedná o křivku transcendentní o nekonečnu ramen protínajících osu abscis v $\pm(2n+1)r$, kde r je strana kvadrátu. Stejně jako v případě cisoidy uvažovali staří toliko část křivky obsaženou v kvadrátu, její nekonečnosti objevuje až Roberval. Dinostratovou kvadratrix studovali právě Roberval, který roku 1636 příhodně, prostřednictvím své kinematické metody dokázal určit tečnu; a právě tak Fermat, Huygens, Barrow, Newton, jenž roku 1676 dokázal za pomoci nekonečných řad určit tečnu, kvadraturu i délku oblouků. Dinostratova kvadratrix coby křivka *mechanická* přirozeně zasáhla i do Leibnizových úvah o transcendenci čar v *Supplementum geometriae dimensoriae* z Lipských akt 1694.

> „Právě tak k sestrojení transcendentních veličin jsme doposud používali vztažení či poměření (*applicatio seu admensuratio*) křivých čar k přímým, jako při opisování cykloidy nebo odvíjení vlákna či listu zavinutých kolem nějaké čáry nebo plochy. Kdybychom chtěli geometricky (tj. přesným spojitým pohybem) opsat Archimédovu spirálu nebo kvadratrix starých geometrů, snadno bychom tak učinili uzpůsobením křivky přímé čáře tak, aby přímočarý pohyb byl řízen (*attemperetur*) podle pohybu kruhového. Jsem tedy dalek toho, jak učinil Descartes, vylučovat tyto křivky […].“ (MS V, 294-295)

Bylo již mnohokrát řečeno, že pro Descarta nespadá poměr mezi kruhovým a přímočarým pohybem, v posledku mezi křivkou a úsečkou, mezi ty, které jsou *exactes et précis.* Další námitka, kterou by bylo možno vznést proti mechanickému utvoření Dinostratovy kvadratrix, by spočívala v neurčitelnosti bodu *E*, v jehož okolí poloměr kruhu a úsečka *BC* spadají v jedno. Leibnizovou odpovědí by zřejmě bylo, že zde stačí *teoretická* přesnost mechanismu bez ohledu na jeho praktickou neuskutečnitelnost (Parmentier 1995, 254).

L'Hospitalovu rovnici Dinostratovy kvadratix stačí s poukazem ke způsobu utvoření objasnit (v. 46, 49) tak, že jako b označíme čtvrtkruh *BD* (Obr. XXIV); a jeho poloměr *AB*; jako x libovolnou část *AB* proběhnutou úsečkou *AB*; a jako y libovolnou část obvodu *BD* proběhnutou poloměrem *AB*; pak

$$b:a::y:x;$$

a tedy

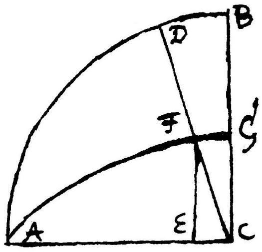
$$ay = bx, \text{ čili } y = \frac{bx}{a}.$$

Je zřejmé, že při $x = a$ bude $y = b$ neboli $\frac{2r}{\pi}$; a tudíž, že $\pi = \frac{2r}{y}$. Jestliže tedy dokážeme takový bod určit geometricky, je určeno i π; a tím pádem bude možno rektifikovat obvod kruhu a v posledku najít jeho čtverec. Což právě je poměr, jakým Dinostratova kvadratrix přináleží otázce kvadratury kruhu.

Tečně ke kvadratrix je věnována Úloha IX *Lectiones*, 14, Johanna Bernoulliho.

55 Zde je možno nabídnout v plném znění krátké srovnání postupů a stylů markýze de l'Hospitala a Johanna Bernoulliho, *Lectiones*, Úloha XII:

„Najít průnik *G* /Obr. XXV/ kvadratrix *AG* a kolmého poloměru *CB*. Uvažujme bod *D*, jenž



Obr. XXV

se přibližuje bodu *D* tak, že vzdálenost *DB* bude nekonečně malá stejně tak, jako vzdálenost *CE*; jestliže tedy povedeme poloměr *CD* a kolmici *EF*, nepochybně bod *F* bude třeba pokládat za ten samý jako bod *G*, neboť mezi sebou nejsou vzdáleny než o nekonečně malý interval. Bod *F* se pak určí takto:

$$AB.AC :: AD.AE :: DB.EC :: DB.FG :: CB.CG :: AC.CG.$$

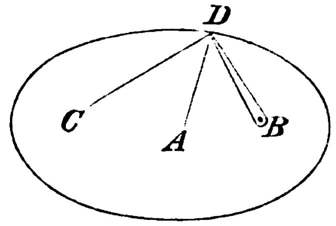
A tedy je *CG* třetí úměrnou k obvodu kvadrantu a k poloměru kruhu. Odtud plyne, že *G* nelze určit jinak, pokud bychom zároveň neměli rektifikaci kruhové čáry.“ (Bernoulli 1922, 14-15)

56 *Dont je suppose que l'un des membres soit zéro.*

57 *Ligne mixtiligne* – čára smíšená z čar přímých a křivých, tj. čára „křivo-přímá“ či „obojaká“.

58 Tschirnhausova hlavní a v počátcích osvícenství velice vlivná práce, *Medicina Mentis, sive tentamen genuinae Logicae in qua disseritur de Methodo detegendi incognitas veritates* („Léčba mysli aneb zkoumání o pravé logice pojednávající o metodě odkrývání neznámých pravd“) z roku 1686, jak podtitul napovídá, je dílem logickým či obecně epistemologickým. Vyznačuje se však především tím, že, v duchu doby, vysvětluje úkony mysli na matematických modelech a analogiích. Bez dalších výkladů jistě pozoruhodné Tschirnhausovy teorie poznání (Tschirnhaus 1686, 48-68), za příklad utváření pojmů z obrazivých a rozumových prvků mysli se zde bere právě opisování křivek na základě jejich ohnisek.

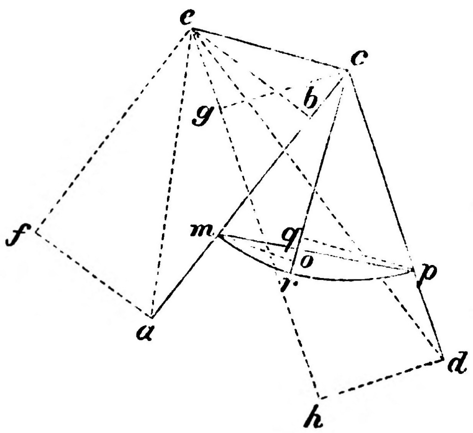
Křivka o jediném ohnisku se od pevného bodu *A* opíše za pomoci hrotu *B* upevněného na druhém konci vlákna o nějaké dané délce; čili vzniká kruh. Elipsa, křivka o dvou ohniskách, pak vzniká, když vlákno upevněné ve dvou pevných bodech *A*, *B* stále napíná opisující hrot C. Jestliže má křivka tři ohniska v pevných bodech *A*, *B*, *C* (Obr. XXVI); vlákno je jedním koncem upevněno



Obr. XXVI

v bodě A, druhým v C, přičemž bod B volně obepíná; pak křivku opisuje napínající hrot D. Jakkoli další případy již Tschirnhaus neuvádí, obecný postup je zřejmý: při m ohniskách budou konce lana pevně upevněny ve dvou bodech, obepínat budou kolíky v $m-2$ bodech, zvláštní případy se budou odvíjet od počtu ohnisek ležících v přímé linii případy a podobně (MCV III, 147); a dále křivky o nižším počtu ohnisek budou představovat zvláštní případy křivek o počtu vyšším. Především však při utváření křivek bude nyní možno na místa ohnisek vzít ohniskové křivky samé, a utvořit tak ohniskové křivky vyššího rodu, jež pak opět mohou vstupovat na místa ohnisek či křivek původních.

Pokud jde o L'Hospitalovo Tvrzení X. Jestliže máme dva ohniskové body a, d (Obr. XXVII) spojené jeden λ vláken a druhý μ vláken s křivkobodem c tak, že $\lambda\times ac=\mu\times dc$ značí celkovou, konstantní délku původního vlákna; pak domníval se Tschirnhaus (1686, 74), že tečnu (normálu) ke křivce v c lze určit následujícím postupem.



Obr. XXVII

Budiž o středu v bodě c o nějakém poloměru opsán kruhový oblouk mp, jenž v m protne paprsek světla ca a v p paprsek cd. Kruhový oblouk rozdělíme v r v obráceném poměru počtů vláken vedoucích do a a d tak, že $mr.rp::\mu.\lambda$. Neboť pak bude rc připadat v c na křivku kolmo. Zde však se Tschirhaus, jak ukázal mladý švýcarský matematik Nicolas Fatio de Duiller (1664-1753) a jak sám Tschirnhaus později přiznává ve druhém vydání *Medicina mentis* (1695, 99), zmýlil v posledním z kroků. Totiž rc je na křivku v c kolmá právě, když bude ve zmíněném poměru rozdělen nikoli oblouk mrp, nýbrž jeho tětiva mnp. Neboť jestliže je pak nc kolmá na křivku a zároveň ce kolmá na cn, pak ce musí být tečnou ke křivce, a tedy dané křivce nemůže náležet žádný další bod e úsečky ce. Je tudíž třeba ukázat, že $\lambda\times ae=\mu\times de$ nesplňuje podmínky délky vlákna (MCV III, 148; včetně důkazu).

Vedle opravy Tschirnhausova řešení však Fatio de Duiller připojil ještě následující pozoruhodné tvrzení stran nacházení normál, které L'Hospital v Tvrzení X rovněž zvažuje. Budiž b, c, d ohniska křivky a m libovolný bod této křivky dané délkou tvořícího vlákna

$$\chi\times mb+\lambda\times mc+\mu\times md.$$

Jestliže se nyní opíše od středu m o libovolném poloměru kruhový oblouk tak, že mb bude protínat v f, mc v g a md v h; a do bodů f, g, h položíme závaží o vahách v poměru $\chi:\lambda:\mu$ tak, že jejich těžiště připadne do bodu *n*; pak *nm* bude normálou křivky.

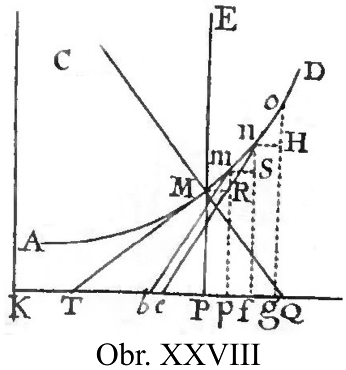
Úloha je též předmětem L'Hospitalova dopisu Leibnizovi (A III, 6, 437-441) K Tschirnahusovým ohniskovým křivkám viz Cantor (MCV III, 146-149); k odpovědi na Fatiovu metodu tečen na základě těžiště viz druhé vydání *Medicina mentis*, Tschirnhaus (1695, 100-102).

59 Výrazem *rectangle*, pravoúhelník, zde L'Hospital, podobně jako Descartes v. 152, vyjadřuje po způsobu klasické řecké geometrie součin dvou veličin.

60 Toto je zřejmé z definice kuželoseček na základě ohniska a řídící přímky obsažené *in nuce* v Pappových *Collectiones*, VII (Commandino 1660, 438-446), kde tvar kuželosečky určuje parametr ekcentricity, zde $e=\frac{a}{b}=\frac{FM}{MG}$. Při $e<1$ je geometrické místo bodu *M* elipsou; při $e=1$ parabolou; a při $e>1$ hyperbolou. Název *focus*, čili ohnisko pochází z Keplerovy epochální práce *Astronomia Nova* (1609); zde, jak známo, jsou oběžnice planet určeny coby málo excentrické elipsy se Sluncem v jednom z jejich ohnisek. První vskutku analytické definice některých kuželoseček za pomoci jejich ohniskových vlastností a vztahu k řídící křivce podává v *Nouveaux éléments des sections coniques* roku 1679 francouzský matematik a astronom Phillipe de la Hire (1640-1718); ve své úplnosti však určující poměr vzhledem k ohnisku a *directrix* odhalují až Newton a Boscovich. Obecný přístup markýze de L'Hospitala v posmrtně vydaném díle z roku 1707, *Traité Analytique des Sections Coniques, et de leur usage pour la résolution des Equations dans les problèmes tant déterminés qu'indéterminés* („Analytické pojednání kuželoseček a jejich použití při řešení rovnic v otázkách určitých stejně tak jako neurčitých“), jež se stalo základní učebnicí kuželoseček 18. století, vychází z uchopení kuželoseček na způsob La Hirův jako křivek takových, že součet rozdílů vzdáleností každé z jejich bodů vzhledem k dvěma pevným bodům je konstantní; čili že každý bod kuželosečky leží ve stejné vzdálenosti od jednoho pevného bodu a nějaké pevně dané přímé čáry (Bongiovanni 2007, 460). K ohnisku a řídící křivce v L'Hospitalových *Kuželosečkách* viz například L'Hospital (1707, 278-283).

61 Vyřešil Johann Bernoulli na stránkách dopisu N°28 z 22. července 1694 (JBB I, 233-235). Viz v. 113.

62 *Logarithmique*, logaritmika, logistika, logaritmická křivka. Je povahou logaritmické křivky, že velikosti jejích abscis stojí v aritmetické posloupnosti, zatímco ordináty následují posloupnost geometrickou. Představu o utvoření logaritmické křivky lze snadno navodit tak, jak to činí Abbé de la Caille (1768, 314-315). Budiž na libovolně dlouhé přímé čáře *KQ* (Obr. XXVIII) vztyčeny kolmice *PM*, *fn*; a v polovině *Pf* vztyčme další kolmici, jež bude střední geometrickou úměrnou *PM* a *fn*.



Obr. XXVIII

Vezměme $fg=pf$ a v bodě *g* vztyčme kolmici *go* odpovídající třetí geometrické úměrné *pm* a *fn*. Pak křivka procházející body *M*, *m*, *n*, *o* bude částí logaritmické křivky; a *Pp* bude odpovídat logaritmu *pm*; *Pf* logaritmu *fn* atd. Úsečka *PM* pak pochopitelně nebude mít žádný logaritmus, neboť je vzata za jednotku. Je tedy zřejmé, že pokud ordináty jsou čísla, abscisy budou jejich logaritmy; a tedy řeč je zajisté o transcendentní křivce (v. 46), kterou dnes, spolu s Leibnizem, nazýváme *exponenciální*.

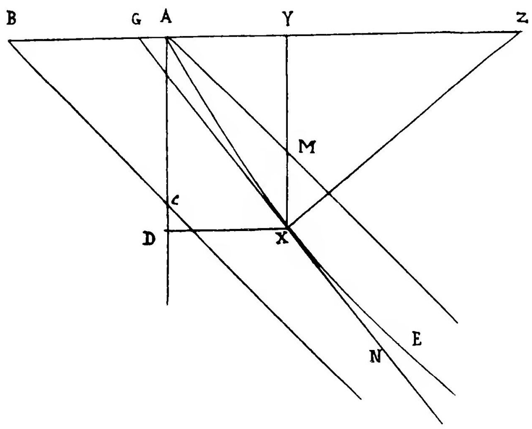
Obdobným způsobem, jaký byl právě předveden, přistupovali k logaritmice i první z matematiků, kteří se křivkou mezi léty 1635-1645 začali zabývat. Evangelista Torricelli jí roku

1644 věnoval práci pojmenovanou *De hemihyperbola logarithmica*, neboť jde o křivku o jediné asymptotě připomínající hyperbolu, která v sobě, jak vyzdvihuje sám Torricelli, sjednocuje rovnoměrný, aritmetický i rovnoměrně zpomalující, geometrický pohyb Napierových logaritmů (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, 1614). Zde Torricelli kromě sestrojení křivky dokázal čistě geometricky určit její podstatné vlastnosti – kvadraturu pod nekonečným obloukem křivky, objem rotačního tělesa (Loria 1900, 80); z povahy obou posloupností a Eukleidova tvrzení V.12 pak rovnost plochy mezi dvěma abscisami rozdílu ordinát vynásobenému subtangentou; a coby důsledek i *propagatio tangentium*, tedy osobitou vlastnost logaritmiky v podobě neměnnosti její subtangenty (tamt., 83).

Ještě před Torricelliho prací se nicméně k logaritmické křivce *avant la lettre* váže jiná matematická událost, jejíž význam je co do postupu analytického uvědomění látky geometrie zcela mimořádný. O metodách nacházení tečen ke křivkám, jejichž povahu lze nějak vyjádřit, bylo leccos řečeno výše; zde však přichází řeč na otázku opačnou, totiž nakolik je možno určit povahu křivky, pokud jsou dány vlastnosti jejích tečen, což již je otázka vpravdě diferenciální. Pařížským učencům kolem Marina Mersenna ji s vědomím její význačnosti (AT V, 535) roku 1638 pokládá Florimond de Beaune (1601-1652), jeden z řady „*petits maîtres*“ počátků 17. století (OCI, 115), francouzský právník, amatérský matematik a astronom a mimo jiné také znalec *Geometrie* a autor jejího prvního komentáře, jehož si vysoce cenil i sám Descartes (AT II, 510).

Z dotazovaných čtyř úloh Florimonda de Beauna, vycházejících snad z optických zkoumání, se otázka „druhé čáry“ stala příkladnou, neboť představuje svým způsobem první případ diferenciální rovnice v dějinách. Největší naděje stran nalezení své „druhé čáry“ vkládá De Beaune právě v Descarta (AT V, 528). Zadání úlohy je následující (Obr. XXIX):

> „Mějme křivku *AXE* o vrcholu *A*, ose *AYZ* a vlastnosti takové, že když na křivce vezmeme libovolný bod, jako *X*; z tohoto bodu povedeme přímou čáru *XY* řazenou (*ordonnée*) kolmo na osu a bodem *X* povedeme tečnu *GXN*, na níž z bodu *X* vztyčíme kolmici *YX*; pak *ZY* ku *YX* budou mezi sebou stát ve stejném poměru, jako nějaká daná čára, třeba *AB*, ku čáře *YX* minus *AY*.“ (AT V, 519)



Obr. XXIX

Křivka *AXE* je tedy dána nikoli poměrem abscis a ordinát, nýbrž povahou subnormály *YZ* vzhledem k ordinátě křivky a nějaké konstantní čáře tak, že

$$\frac{ZY}{YX}=\frac{AB}{YX-AY};$$

když vůči ose pod polovinou pravého úhlu povedeme z bodu *A* polopřímku *AM*, nastává $AY = AM$, a pak lze rovnici zapsat jako

$$\frac{ZY}{YX}=\frac{AB}{XM}.$$

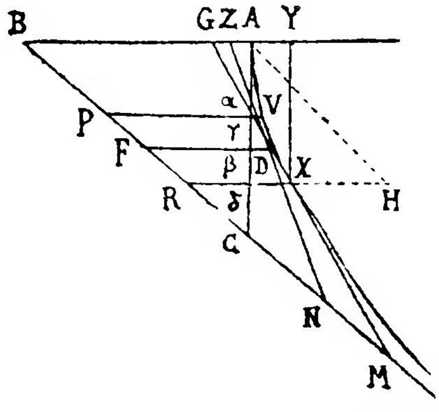
Jak vidno, řešením úlohy, jež o nějakých čtyřicet let později Leibniz vynese v několika tazích, je právě logaritmika, čili exponenciální křivka. Descartova odpověď je proto tím pozoruhodnější, že řeč je o křivce mechanické, která je analytickými prostředky *Geometrie* nedosažitelná, a tedy vypovídá mnohé o podivuhodné šíři a nespoutanosti Descartova matematického génia. Od samého počátku odpovědi De Beauneovi je přitom zřejmé, že si Descartes byl vědom základní souvislosti mezi obrácenou úlohou tečen a otázkou kvadratur stejně tak, jako povahy úlohy přesahující oblast algebraických čar:

> „Co se týče Vašich křivých čar, vlastnost, jejíž důkaz mi tu posíláte, se mi zdá natolik krásná, že bych ji vyzdvihl i nad kvadraturu paraboly, kterou objevil Archimédes. Ten totiž zkoumal danou čáru, zatímco Vy určujete plochu té, která ještě není dána. Nedomnívám se, že by obecně bylo možno podat obrácené pravidlo (*la converse*) k mému pravidlu tečen ani k tomu, jež používá pan de Fermat, jakkoli je jeho užití oproti mému v mnoha případech jednodušší. Nicméně je možné vyvodit z něj *a posteriori* věty platné o všech křivých čarách vyjádřených rovnicí, v níž jedna z veličin x nebo y nemá více než dva rozměry, zatímco druhá jich může mít třeba tisíc." (AT II, 513-514)

Pokusy najít druhou De Beaunovu křivku vlastní metodou tečen, jak Descartes sám přiznává, jsou v posledku bezvýchodné. Neboť metoda tečen dává pouze výsledky *a posteriori*, tedy jedině na základě nějaké předem dané křivky. Je proto třeba přistoupit k jinému, „obecnějšímu způsobu" určení hledané křivky:

> „Je tu však jiný způsob, který je obecnější a *a priori*, totiž skrze průnik dvou tečen, který nastává mezi oběma tečnými body položenými tak blízko vedle sebe, jak si jen lze představit. Neboť když budeme uvažovat, jaká musí být křivka, aby tento průnik nastal vždy právě mezi těmito body a nikoli před nebo za nimi, můžeme pak nalézt její konstrukci. Avšak nabízí se tolik cest, kudy se ubírat, a věnoval jsem se jim tak málo, že bych odtud zatím nedokázal vydat správný počet." (tamt., 514)

Budiž tedy De Beaunovou „druhou čarou" křivka *AVX* (Obr. XXX) o vrcholu *A* a namísto osy *AY* a ordináty *XY* uvažujme asymptotu *BC* svírající s osou polovinu pravého úhlu. Skutečnost, že *BC* je asymptotou Descartes nijak nezdůvodňuje, a je možné, že jde o výsledek, který již dříve nalezl De Beaune (Barbin 2006, 208). Dále veďme k asymptotě rovnoběžně s osou ordináty *PV*, *RX* atd.; a vynesme tečny *AC*, *ZVN*, *GXM* atd.



Obr. XXX

Nyní část asymptoty mezi ordinátou a tečnou jednoho a toho samého bodu, jako *PN*, *RM* atd., bude, pokračuje Descartes, vždy rovna *BC* „jak snadno nahlédnete z kalkulu" (AT II, 515); přičemž důkaz u zasvěceného společníka a objevitele úlohy mlčky předpokládá. Zřejmě však tímto krokem Descartes zadání úlohy elegantně přetváří nově na nalezení křivky o význačné vlastnosti v podobě konstantní délky *BC* „šikmé subtangenty" *PN*, *RM* atd. Důkaz daného tvrzení není vyloženě triviální, nicméně vychází z běžné geometrie trojúhelníků a Thaletovy věty a lze jej nalézt třeba v Barbin (2006, 208-209).

Nuže uvažujme na křivce dva body *V* a *X*, jejich ordináty *PV* a *RX* a tečny v těchto bodech *ZN* a *GM* protínající se v *D*; avšak, tvrdí Descartes, „nakolik se čáry *ZVN* a *GXM* dotýkají křivky v bodech *V* a *X*, nutně pak se musejí protínat navzájem v rovině ležící mezi těmito dvěma co možná nejbližšími body, jako například v bodě *D*, ze kterého vedu *FD* rovnoběžnou s *PV*“ (AT II, 515). Jestliže nyní označíme $AB=b$, $PF=\epsilon$, $FR=\omega$ a $NP=RM=BC=b\sqrt{2}$; pak za předpokladu, že *AB* bude rozdělena na *m* stejně dlouhých částí a *n* bude vyjadřovat počet takových částí obsažených v úsečce *PV*, pak

$$PV=n\frac{b}{m} \text{ a } RX=\frac{nb-b}{m};$$

poněvadž Descartes dále předpokládá, že rozdíl ordinát *PV* a *RX* bude jen jedna část tak, že

$$PV-RX=\frac{b}{m}.$$

Nyní z Thaletovy věty

$$\frac{NP}{PV}=\frac{NF}{FD}, \text{ čili } FD=\frac{nb}{m}-\frac{n\epsilon}{m\sqrt{2}}.$$

A právě tak

$$\frac{MF}{FD}=\frac{MR}{RX}, \text{ a tedy } FD=\frac{nb-b}{m}+\frac{(n-1)\omega}{m\sqrt{2}}.$$

Odkud Descartes získává dvojí vyjádření *FD*; oba výrazy může položit za sobě rovné, a tím pádem

$$b\sqrt{2}=(n-1)\omega+n\epsilon;$$

čili

$$PR=\epsilon+\omega=\frac{b\sqrt{2}+\omega}{n}=\frac{b\sqrt{2}-\epsilon}{n-1}, \text{ a tudíž } \frac{b\sqrt{2}}{n}<PR<\frac{b\sqrt{2}}{n-1}.$$

Poslední nerovnost, „aby se odstranilo hluché číslo $\sqrt{2}$“, Descartes převádí vzhledem k *AC* do tvaru

$$\frac{b}{n}<\alpha\beta<\frac{b}{n-1}.$$

Nyní je půda analýzy připravena k dalšímu kroku, jenž bude spočívat v postupných aproximacích; neboť: „jelikož to samé platí pro všechny s osou rovnoběžné ordináty, které se neliší navzájem o víc než jednu z částí úsečky *AB*, pak toto stačí, abychom dokázali, že když tuto čáru *AB* rozdělíme na 8 a když *PV* obsahuje například $\frac{3}{4}b$, pak

$$\frac{1}{8}b+\frac{1}{7}b<A\alpha<\frac{1}{7}b+\frac{1}{6}b;$$

a když *AB* rozdělíme na 16, pak

$$\frac{1}{16}b+\frac{1}{15}b+\frac{1}{14}b+\frac{1}{13}b<A\alpha<\frac{1}{15}b+\frac{1}{14}b+\frac{1}{13}b+\frac{1}{12}b.$$

A tímto způsobem, když se *AB* bude dělit na více částí, je možno se stále více, až do nekonečna, přibližovat skutečné (*juste*) délce $A\alpha$, $A\beta$ a podobných čar, a tím zadanou čáru mechanicky sestrojit.“ (tamt., 516)

Ačkoli Descartes nikde o logaritmech nemluví, snad si jejich souvislosti s druhou De Beanovou křivkou byl vědom, neboť dále upřesňuje samu povahu pohybů sloužících k její mechanické konstrukci:

> „K přesnému opsání této křivky *AVX* je třeba pohybovat dvěma přímými čarami tak, že když jednu z nich vztáhneme na čáru *AH* a druhou na *AB*; začnou se ve stejný okamžik pohybovat stejnou rychlostí, *AH* k *BR* a *AB* k *RH*; přičemž ta, co se pohybuje, od *AH* k *BR* udržuje stále stejnou rychlost, avšak druhá, sestupující z *BA* rovnoběžně s *RH* svoji rychlost zvyšuje v poměru takovém, že pokud na počátku měla jeden stupeň rychlosti, bude jich mít $\frac{8}{7}$, jakmile prvá proběhne osminu čáry *AB*; a $\frac{8}{6}$ neboli $\frac{4}{3}$, když prvá proběhne čtvrtinu *AB*; a
>
> $$\frac{8}{5}, \frac{8}{4}, \frac{8}{3}, \frac{8}{2} \text{ a 8 a 16 a 32 atd.,}$$
>
> když prvá dospěje do

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} \text{ a } \frac{7}{8} \text{ a } \frac{15}{16} \text{ a } \frac{31}{32} \text{ atd.}$$

čáry AB a tak do nekonečna; a průnik těchto dvou přímých čar opíše přesně čáru AVX o požadovaných vlastnostech.“ (tamt., 517)

Číselné hodnoty sestupné složky pohybu opisujícího křivku, které zde Descartes uvádí, lze s Evelyne Barbin (2006, 211-212) přiblížit z výše utvořené rovnosti

$$FD = \frac{nb}{m} - \frac{n\epsilon}{m\sqrt{2}}, \text{ čili } PV - \frac{n\epsilon}{m\sqrt{2}};$$

tudíž

$$\frac{\alpha\gamma}{PV-FD} = \frac{m}{n} \text{ a } FD = \frac{nb-b}{m} + \frac{n\omega-\omega}{m\sqrt{2}} = RX + \frac{n\omega-\omega}{m\sqrt{2}};$$

a odtud

$$\frac{\gamma\beta}{FD-RX} = \frac{m}{n-1}.$$

Nyní jestliže body V a D jsou velice blízko, pak poměr mezi rozdílem $\alpha\gamma$ abscis a rozdílem ordinát $PV - FD$ a je roven rychlosti sestupného pohybu v bodě V, a tedy $\frac{m}{n}$. Svoji odpověď Florimondu de Beauneovi stran druhé křivky, z jiného než karteziánského úhlu pohledu (v. 3) snad paradoxně, Descartes zakončuje:

„Avšak domnívám se, že tyto dva pohyby jsou natolik nesouměřitelné, že není možno přesně řídit jeden podle druhého, a tedy že tato křivka náleží mezi ty, které jsem ze své geometrie vyloučil coby pouze mechanické; a z toho důvodu se také nedivím, že jsem ji nedokázal najít jinou cestou než tou, kterou jsem zvolil; neboť ona by se vztahovala jen na čáry geometrické.“ (AT II, 517)

Descartův pokus o řešení zajisté nese dotek matematické geniality; nicméně, jak bude proti „karteziánské sektě“ často opakovat Lebniz, je spíše plodem právě velikosti Descartova ducha, nežli jeho metody. Nadřazenost své vlastní analýzy, nikoli bez jisté pýchy, Leibniz se zdrcující lehkostí doloží hned v ustavujícím spisu diferenciálního počtu z roku 1683, *Nova methodus*, kde v *appendixu* (přívěsku!) podává letmé řešení De Beaunovi úlohy. Třebaže Descartes se co do základního východiska – úvahou průniku tečen ve dvou velmi blízkých bodech i určením rychlosti v bodě V – značně přiblížil principu infinitesimálního počtu, bude to právě symbolické zvnitřnění diferencí (zde Leibnizovi postačují libovolné konečné), co podobný druh úloh nadále učiní než jen žákovským cvičením. Z pouhého srovnání obou postupů, ostatně tak jako z celé L'Hospitalovy knihy, vysvítá univerzální síla Nové metody okamžitě:

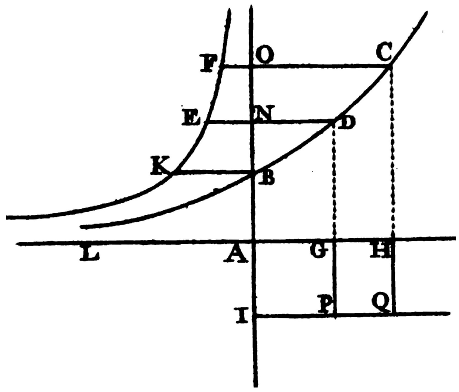
„Najít křivku takovou, že když k její ose povedeme tečnu WC, XC bude vždy rovna té samé konstantní úsečce a. Nyní XW neboli w se má k XC neboli a jako dw ku dx; a tedy jestliže vezmeme dx (které můžeme zvolit libovolně) konstantní, čili neměnné, totiž rovno b; čili jestliže x neboli AX roste rovnoměrně, pak dostáváme $w = \frac{a}{b} dw$; a tedy ordináty w budou úměrné svým nárůstům či diferencím (*differentiis*) dw, tj. pokud se x nacházejí v aritmetické posloupnosti, budou w v posloupnosti geometrické. Čili jestliže w jsou čísla, x budou jejich logaritmy, a tedy křivka WW je křivkou logaritmickou.“ (MS V, 226)

Pokud jde o souvislost logaritmiky s hyperbolou, jež vystupuje v pozadí L'Hospitalova příkladu; objevuje se ve velkolepém *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (1647) Řehoře od sv. Vincenta (1584-1667), práci, která, třebaže zůstala ve stínu nově nastupující karteziánské analýzy, výrazně ovlivnila tvůrce infinitesimálního počtu, především pak Pascala s Leibnizem. V knize VI zde vlámský jezuita, mimo jiné, podává kvadraturu hyperboly, přičemž, v tvrzení CIX (St. Vincent 1647, 586) na geometrický způsob dokazuje, že pokud abscisy hyperboly následují v geometrické posloupnosti, pak plochy pod jejím obloukem těmito abscisami vytyčené jsou si rovny, a tedy postupují aritmeticky; a naopak v tvrzení CXXX (tamt., 597), že ordináty ohraničující stejné plochy pod hyperbolou postupují v geometrické posloupnosti.

Samotné kořeny L'Hospitalova postupu nicméně (nepříliš překvapivě) vycházejí patrně z přednášek Johanna Bernoulliho, *Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium* (v. 7), *Lectio* X, věnované obrácené metodě tečen:

„Najít povahu křivky *BDC*, jejíž subtangenta je vždy rovna konstantně *a*. Na základě předpokladu máme $dy:dx=y:a$, odkud $a\,dx=a\,dy$ a $dx=a\,dy:y$; což vynásobeno *a* dává

$$a\,dx=aa\,dy:y.$$

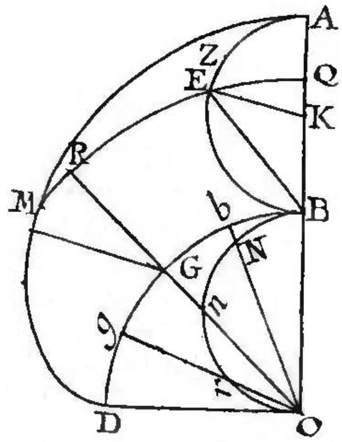


Obr. XXXI

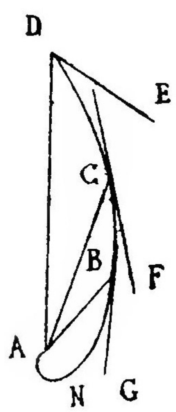
Nuže k sestrojení křivky veďme neomezeně normály *BI*, *LH*; a ke všem *AB*, *AN*, *AO* atd. rovným *y* přiřaďme *KB*, *NE*, *OF* atd. rovné $aa:y$; pak křivkou *KEF* bude hyperbola o asymptotách *AO*, *AL*. Nyní k *AG*, *AH* přiřaďme *GP*, *HQ* atd. rovné *a*; pak *IPQ* bude přímou čarou rovnoběžnou s *AH*. Jestliže vezmeme hyperbolickou plochu *KN* rovnou pravoúhelníku *AP* a *KO* rovnou *AQ*; pak body průniku *D*, *C* atd. Budou ležet na hledané křivce. Odtud pak jestliže *AG*, *AH* atd. jsou aritmeticky úměrné, budou *AB*, *AN*, *AO* úměrné geometricky; neboť plochy *KN*, *EO* atd. si musejí být rovny; a proto křivka *BDC* bude logaritmikou.“ (JBO III, 421).

K Bernoulliho řešení De Beaunovy úlohy, které se zakládá na právě uvedené úloze, viz následující Lekci XI (tamt., 423-424) a k Bernoulliho studiím exponenciálních funkcí jako takových viz JBO I, 179. Stran De Beauneovy úlohy viz Barbin (2006, 204-213), a OCI, 189-195. K dalším vlastnostem logaritmické křivky viz Loria (1901, 542-550).

63 Konstrukci logaritmické spirály lze přiblížit od čtvrtkruhu *BGD* (Obr. XXXII), jejž rozdělíme na libovolný počet stejných částí *Bb*, *bG*, *Gg*, *gD*; a jestliže pak na poloměrech *Ob*, *OG*, *Og* vezmeme



Obr. XXXII



Obr. XXXIII

v geometrické posloupnosti úseky *ON*, *On*, *Or*; body *N*, *n*, *r* budou náležet logaritmické spirále s ordinátami *ON*, *On*, *Or* a ordinátami, případně též *bN*, *Gn*, *gr*; a abscisami v podobě příslušných oblouků *Bb*, *BG*, *Bg* stojících v posloupnosti aritmetické, které je tedy možno uvažovat jako logaritmy ordinát (De la Caille 1768, 315-316).

Zřejmě první zmínku o logaritmické (Descartově, Bernoulliho, rovnoúhlé, proporcionální, geometrické, exponenciální) spirále v 17. století lze nalézt roku 1638 v Descartově odpovědi na Mersennovu otázku ohledně „povahy spirály představující stejně nakloněnou rovinu (*plan également incliné*)“. Descartes píše (Obr. XXXIII):

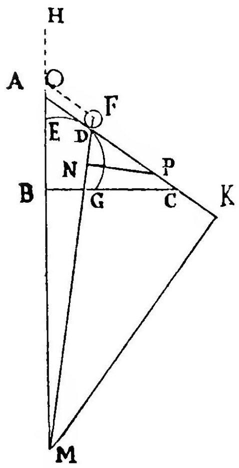
> „Avšak pokud jde o tu spirálu, má vícero vlastností, které ji činí dosti nápadnou. Neboť pokud *A* je středem země; a *ANBCD* onou spirálou; pak jestliže povedeme úsečky *AB*, *AC*, *AD* a podobné takové, křivka *ANB* a úsečka *AB* budou stát ve stejném poměru jako křivka *ANBC* a úsečka *AC*, nebo *ANBCD* a *AD* a stejně tak pro všechny ostatní. A jestliže povedeme tečny *DE*, *CF*, *GB* atd., úhly *ADE*, *ACF*, *ABG* atd. si budou rovny.“ (AT II, 360)

Od Archimédovy spirály se tedy Descartova liší v tom, že pohyb bodu po rotující přímé čáře není konstantní, nýbrž rovnoměrně zrychlený; z vlastností popisovaných Descartem pak vychází rovnice

$$\frac{s}{\rho}=a,$$

kde s představuje délku oblouku a ρ je průvodičem. Stojí jistě za povšimnutí, že Descartes, jak upozorňuje Paul Tannery (tamt.), věděl o úměrnosti mezi obloukem logaritmické spirály a jeho poloměrem; a to tím spíše, že *Geometrii* jsou úvahy tohoto druhu zapovězeny (v. 3). Souvislost, která dala vzniknout Descartově spirále a snad i nalezení zmíněné úměry je pozoruhodná a je třeba ji uvést, neboť mnohé vysvětluje a učená literatura ji nenabízí. Nachází se v jednom z předchozích dopisů Mersennovi (AT II, 232-234), kde se mimo jiné na příkladu nakloněné roviny představuje tvrzení, že „úměra mezi přímou čarou popisující pohyb a tou, která vyznačuje, o kolik se těleso přiblížilo středu země, je ta samá jako úměra mezi tíhou absolutní a relativní“ (tamt., 229). Po základní propozici o tíze bodu *F* (Obr. XXXIV) na nakloněné rovině *AC*, totiž že stojí ve stejném poměru vůči své absolutní tíze, jako úsečka *AB* vůči úsečce *AC*, Descartes pokračuje:

> „Což je nicméně úplná pravda jedině, pokud předpokládáme, že hmotná tělesa (*les cors pesans*) tíhnou dolů po rovnoběžných čarách tak, jak se běžně předpokládá, pokud o mechanice uvažujeme jen proto, abychom ji využili v praxi; neboť drobný rozdíl, jejž může způsobit náklon těchto čar, nakolik směřují ke středu země, není nijak znatelný. Avšak



Obr. XXXIV

> jestliže má být výpočet zcela přesný, pak je zapotřebí, aby čára *CB* byla částí kruhu a *CA* částí spirály, se středy ve středu země.“ (tamt., 232-233)

Logaritmické spirále samotné se však Descartes nijak šířeji nevěnuje; snad proto, že jde pouze o křivku mechanickou. Neznamená to však ani v nejmenším, že se nejedná o spirálu (doslova) zázračnou, a to jak pro její význačné matematické vlastnosti, tak především ustavičné vyjevování v přírodě – od tvarů ulit, květů, galaxií až po uložení plodu v lůně matčině – *spira mirabilis*, slovy největšího z jejích obdivovatelů, Jakoba Bernoulliho.

Přibližně ve stejné době jako Descartes, a v souladu s výše představenými výsledky (v. 40, 62) lze snad usuzovat, že také nezávisle na něm objevil logaritmickou (geometrickou) spirálu Evangelista Torricelli. Dokázal určit její kvadraturu a rovněž – ještě před Neilovou kubickou parabolou (v. 41) zřejmě u první křivky v dějinách – rektifikovat její oblouk. Jedná se sice o přímý důsledek zmíněné Descartovy definice, a v tomto smyslu také na Torricelliho výsledek roku 1647 odpoví Roberval, nikoli však Torricelliho vlastní z *De infinitis spiralibus* (1645), která se nese ve stejném duchu jako shora uvedená definice Abbého de la Caille; Torricelli naproti tomu svoji rektifikaci provádí archimedovským důkazem dvojí *reductio ad absurdum* (Stoll 2000, 88-89).

Jistě však tím, kdo do podivuhodné povahy logaritmické spirály nahlédl nejhlouběji a s pomocí diferenciálního počtu odhalil její nejvýznačnější vlastnosti, byl basilejský profesor matematiky, Jakob Bernoulli. Za účelem studia křivky vynalezl soustavu polárních souřadnic a své *spira mirabilis* věnoval dva články vycházející v Lipských Aktech. V prvém z nich z roku 1691 (AE 1691, 282-283), podává Jakob Bernoulli kvadraturu křivky, její rektifikaci, spojitost s loxodromou i nanejvýš pronikavý postřeh stran délky logaritmické spirály, totiž: „ježto se tato spirála obtáčí okolo středu *C* v nekonečném množství obratů, je zřejmé, že neomezené (*interminatae*) křivce se může rovnat úsečka o konečné délce.“ (tamt., 283). Druhý článek, *Lineae cycloidales, evolutae, antevolutae, causticae, anticausticae, pericausticae. Earum usus et simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis* (AE 1692, 207-213) z roku 1692, jenž vskutku „zasluhuje palmu“ (tamt., 208), rozvíjí Tschinhausovu teorii kaustik a na jejím základě pojednává o odolnosti logaritmické spirály vůči běžným geometrickým transformacím, plynoucí z nejtajemnější vlastnosti spirály, soběpodobnosti ve všech jejích částech. Bernoulli tak dokazuje, že logaritmická spirála coby výchozí křivka (*exposita*) je rovna své vlastní evolutě, evolventě (*antevoluta*, *développante*); že její kaustika odrazem (*katacaustica*) právě tak, jako kaustika lomem (*diacaustica*), antikaustika (evolventa kaustiky) a perikaustika, a tím pádem i všechny křivky, které lze utvořit od těchto stejnými transformacemi, budou stále tou samou logaritmickou spirálou. Svou logaritmickou spirálou byl Jakob Bernoulli doslova učarován; svůj článek uzavírá těmito slavnými, oslavnými slovy:

> „Poněvadž se mi tato úžasná spirála svou jedinečnou a podivuhodnou povahou natolik zalíbila, že se rozjímání o ní stěží dokážu nabažit, uvažoval jsem, že by mohla nanejvýš případně sloužit mnohým skutečnostem za symbol. Ježto totiž je vždy sobě podobná a plodí tu samou spirálu, ať už se zavinuje, odvinuje, nebo vyzařuje /tj. coby svoji evolventu, evolutu, kaustiku/, takto by mohla být buďto znamením ve všem podobného potomstva jednoho rodu; *Simillima Filia Matri*: či jistým nastíněním (je-li dovoleno otázky věčné pravdy připodobňovat tajemstvím víry) samotného věčného rození Syna, jenž otci Obrazem a z něj jako Světlo ze Světla vyzařujíc vyvstává s ním samým *ὁμοούσιος*. Anebo, chcete-li, jelikož naše zázračná křivka v samotné proměně pevně trvá nezměněna stále jedna sobě podobná (*constantissime similis et numero eadem*), mohla by být symbolem síly a stálosti v protivenstvích; nebo také našeho Těla na konci rozličných přeměn a dokonce po smrti samé jeho budoucího vzkříšení. A tedy kdyby se v dnešní době ujal zvyk napodobovat Archiméda, ochotně bych si nechal tuto spirálu vyrýt na svůj náhrobek s Epitafem: *Eadem numero mutata resurget.*“ (tamt., 212-213)

Eadem mutata resurgo – proměněna, znovu stejná povstanu. Tato půvabná slova velkého Basilejana pochopitelně nemohla zůstat oslyšena. S čím ovšem Jakob těžko mohl počítat, byla skutečnost, že pevná ruka rytcova na jeho hrobě vyvede neomylně spirálu Archimédovu.

Závěrem je možno podotknout, že generace plagiátorů Gina Lorii ustavily jeho dnes zřejmě již nevykořenitelný (hemží se jím celý internet) omyl, že jméno *logaritmická* dal této spirále až Pierre Varignon (1704). Kdo logaritmickou spirálu první takto pojmenoval, není zřejmé; ale jasné je, že to bylo nejpozději roku 1696, a to na stránkách *Analýzy nekonečně malých*. K vlastnostem logaritmické spirály viz Loria (1901, 448-457). Zajímavé řešení L'Hospitalova příkladu pomocí nového exponenciálního počtu Johanna Bernoulliho a další důsledky lze nalézt ve Varignonových *Éclaircissements*, 27-28.

64 *Roullete*, zřejmě v tomto případě se rozumí cykloida v obecném smyslu, vznikající také od křivek různých od kružnice. Výše se ukázalo (v. 47), že tento pojem byl zřejmý již Fermatovi a vztahovala se na něj i jeho metoda tečen. Obecnými cyklickými křivkami se zabýval francouzský matematik a všestranný vědec Philippe de la Hire (1640-1718), *De cycloide* (1676), známý především pro své práce v projektivní geometrii a svým odporem proti infinitesimálnímu počtu v debatě o jeho hodnotě při Akademii věd na počátku 18. století.

65 L'Hospitalovo vyjádření se značně blíží prvním definicím matematické *funkce*, jak je nacházíme u Leibnize, například *Nova calculi differentialis applicatio*, 1694 (výraz lze však najít mnohem dříve):

> „Nazývám *funkcí* úsek přímé čáry, který lze vytyčit toliko na základě přímých čar vedených mezi nějakým pevným bodem, daným bodem křivky a její křivosti.“ (MS V, 306)

Jako příklady Leibniz uvádí abscisu, ordinátu, tečnu, subtangentu, subnormálu a poloměr křivosti. Johann Bernoulli definuje funkci ještě obecněji:

> „*Funkcí* proměnné veličiny zde nazýváme veličinu složenou libovolným způsobem z této proměnné veličiny a z konstant.“ (JBO II, 241)

K Eulerovi a dalšímu vývoji pojmu funkce viz Bos (1974, 8-10).

66 O vývoji otázek *de maximis et minimis* před ustavením infinitesimálního počtu něco málo zaznělo v souvislosti s Fermatovou metodou tečen (v. 6, 7). Po Eukleidovi, Apolloniovi a Diofantovi doplňme za celý středověk, že se jí, ve smyslu spíše matematickém, zaobírali „metafyzici kalkulu“, oxfordští *calculatores* Thomas Bradwardine (1290-1349), Richard Swineshead (kolem poloviny 14. století) zejména v X. části svých *Liber Calculationum* a Walter Burley (1275-1344), *De primo et ultimo instanti*; a pak samozřejmě génius 14. století Nicolas Oresme (asi 1320-1382), jenž ve svých úvahách změn intenzity kvalit (*latitudo formarum*) v *De Tribus Praedicamentis* (1335) dospěl ke klíčovému rozlišení a vlastně jednomu z východisek veškerého zkoumání krajních hodnot, že totiž v blízkosti maxima nebo minima je míra změny intenzity nějaké kvality (zde rychlosti) nejmenší. (Taton 1964, 505-507). Druhé ze základních východisek přístupu ke krajním hodnotám uvažuje namísto *míry* nějak znázorněné změny veličiny v blízkosti svých krajních hodnot naopak její velikost, *rozdíl*, čili nárůst či úbytek. Hlavním pramenem v tomto smyslu, ještě před Fermatem, se stává významná a vlivná práce Keplerova *Nova stereometria doliorum vinariorum* z roku 1615 (Boyer 1949, 111).

Stereometrie vinných sudů představuje souhrnné pojednání o měření objemů těles, jež se zakládá na archimedovských postupech stejnou měrou, jako je živeno matematicko-metafyzickými spekulacemi renesance, zejména Mikuláše Kusánského a Giordana Bruna. Geometrické nekonečno a zákon kontinuity proto přijímá přirozeně coby výraz nejvyšší matematické harmonie Stvořitele a odtud pak se ze samé povahy veličiny dává nejen možnost, ale dokonce nutnost hledání míry mezi přímými a křivými čarami, podstatu analogií mezi jejich útvary a samozřejmě užívání jejich limitních připodobnění. Podnět k otevření Keplerových průzkumů otázek maxima a minima však není o nic méně závažný. Jestliže pomineme metodu vyvolení takříkajíc *optimální* nevěsty, ve které se matematik Kepler poněkud přepočítal – a již si svým druhým manželstvím chystal úplně stejná neštěstí jako prvým (kdy naopak neuvažoval vůbec); pak nepochybně úspěšným byl tentokrát v čistě matematické úloze určení tvaru sudu s vínem optimálního, tj. maximálního objemu. Což jej vede k základním úvahám otázek *de maximis et minimis* vrcholících ve druhé části *Nové doliometrie*. Zde za pomoci tabulky – a odtud právě shora zmíněný význačný postřeh – sady rozměrů výšky a základny a jim příslušných objemů vinných sudů odhaluje, že nejpříhodnější z proporcí má právě sud rakouský (KOM IV, 602-609). Zkoumání pak zakončuje ódou na přírodu, která „geometrii vyučuje už jen na základě pouhého instinktu“, a rakouské bednáře.

Matematické rozvržení úlohy maxima a minima, jak se spatřuje u L'Hospitala, totiž že v bodě, ve kterém se nějaká veličina stává *největší*, její (kladný) diferenciál se stává nulovým a naopak, vychází samozřejmě až z ducha Leibnizovy *Nové metody pro maxima a minima* (1684); ještě před tím lze obdobně nalézt v Newtonově *Methodus fluxionum* (1671) vydané nicméně až roku 1736. V *Nova methodus* Leibniz přírůstek (vždy kladných) ordinát v křivky označuje znakem dv, obdobně pochopitelně u abscis a ordinát dx; v okamžiku, kdy je ordináta největší, $dv=0$ a tečna (vlastně prodloužená diferenciální částka křivky) je rovnoběžná s osou; a Leibniz jednoduše pokračuje:

> „Jestliže dv je vzhledem k dx nekonečná, pak tečna je na osu kolmá a spadá v jedno s ordinátou. Pokud se dv a dx rovnají, úhel mezi tečnou a osou je poloviční úhlu pravého. Jestliže, pokud ordináty v rostou, rostou i jejich přírůstky či diference dv (čili když vezmeme dv kladné, také ddv neboli diference diferencí, jsou také kladné, nebo také záporné, když dv vezmeme záporné), křivka je vůči ose konvexní, či naopak konkávní." (MS V, 221)

Atd. pro inflexní body, jež „na rozdíl od úlohy maxima zahrnují rovnost ne dvou, nýbrž tří kořenů" (tamt.) (v. 5, 15). V případě Leibnize tedy o maximu či minimu rozhoduje neexistence tendence k další změně, $dv=0$, čili

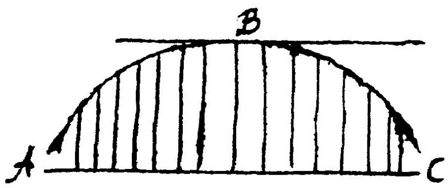
$$\frac{dv}{dx}=\infty.$$

Obecně je tedy dosti obtížné pochopit, co L'Hospital míní tím, že by diferenciál měl být roven nekonečnu (obzvláště při jeho vlastním pojetí diferenciálů coby nekonečně malých částek proměnné veličiny); případně, jak v § 46 nahlédnout souvislost prohlášení markýze de L'Hospitala o průchodu spojitě rostoucí veličiny nekonečnem s hledáním maxim a minim. Abbé de la Caille se ve svém komentáři, s. 319, v tomto případě logicky pokouší (viz níže) uvažovat růst subtangenty PT (Obr. 31, 32) v závislosti na poloze tečného bodu M, který čím více se přibližuje krajnosti D, tím větší bude subtangenta PT, až se pro bod D stane nekonečnou; a konečně, jakmile se tečný bod M opět dostane za D, subtangenta PT se objevuje na druhé straně, tedy se z kladné změní v zápornou a nadále se bude zmenšovat. Svůj úsudek chytře uzavírá:

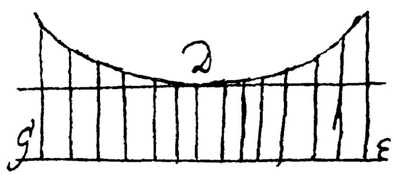
> „Ale to jsou úvahy, které neradno hnát příliš daleko, abychom se neztratili v jakési nesrozumitelné metafyzice. Spokojme se s tím, že budeme diferencovat danou rovnici; diferenciál položíme = 0 a buďme si jisti, že pokud křivka vyjádřená danou rovnicí maximum či minimum má, touto metodou je objevíme." (tamt., 320)

Varignon se danému místu vůbec vyhýbá, spokojuje se s vyvozením podmínek existence maxima nebo minima z L'Hospitalovy první definice (čímž se L'Hospital nezabývá) a dále pokračuje v duchu pravidel § 47, kde L'Hospital mluví již, podobně jako Leibniz, o diferenciálním *poměru dy* ku dx rovném nule, nebo nekonečnu a poukazuje na rozpory a chybná řešení, k nim vede položit dy rovno nekonečnu. Konečně je ovšem třeba říci, že o $dy=\infty$, případně i $ddy=\infty$ mluví ve svých dopisech L'Hospitalovi zcela přirozeně také Johann Bernoulli (JBB I, 207-226).

Právě na základě $dy=0$, byť s geometrickým východiskem rovnoběžnosti tečny a osy, ostatně svoji teorii maxima (Obr. XXXV) a minima (Obr. XXXVI) staví Johann Bernoulli, *Lectiones*, XII:



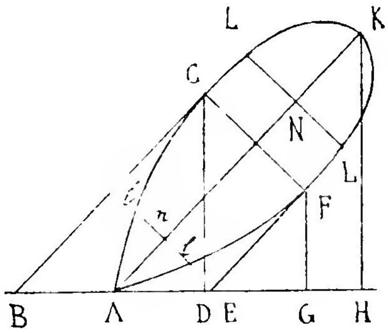
Obr. XXXV



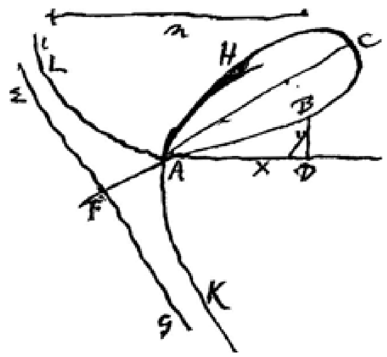
Obr. XXXVI

> „K nalezení maximální veličiny uvažujme veličiny po řadě vztažené k nějaké křivce vyduté vzhledem k ose, jak na Obr. ABC. A naopak k nalezení minimální veličiny je uvažujme přiřazené křivce vůči ose vypouklé, jako na Obr. GDE, kde GE je osou. Nyní veďme maximálním či minimálním bodem tečnu, jež bude rovnoběžná s osou. Ježto $dy.dx :: y.s$ a y je nekonečně krát menší než subtangenta, bude také $dy=0$ ve srovnání s dx. Takto jestliže je třeba nalézt největší pravoúhelník z těch, jež dávají dvě části x a $a-x$ dané čáry a; budu uvažovat $ax-xx$ za ordinátu nějaké křivky konkávní vůči ose a její diferenciál $a\,dx-2x\,dx=0$. Pročež $a\,dx=2x\,dx$ a $x=\frac{1}{2}a$. A tedy největší pravoúhelník bude, když se x vezme $=\frac{1}{2}$." (Bernoulli 1921, 16)

67 Křivka $x^3+y^3=3axy$ zvaná dnes *Descartův list*, byla v 17. století označována jako *květ jasmínu* (*nœud de ruban*, *galand*). Descartes, podobně jako Roberval, se domníval, že část křivky pro kladné abscisy a ordináty připomínající okvětní lístek (Obr. XXXVII) se souměrně opakuje i ve zbylých kvadrantech, neboť abscisy a ordináty počítal vždy kladné po všech stranách od počátku *A*. Skutečný tvar křivky, včetně asymptoty a kvadratur, nalezl (vlastnoručně, Obr. XXXVIII) až Christiaan Huygens (HOC X, 374-380); což oznamuje dopisem L'Hospitalovi roku 1692, N°2777 (tamt., 352). Sám L'Hospital pak téměř obratem zasílá Huygensovi vlastní vyšetření tvaru křivky –



Obr. XXXVII

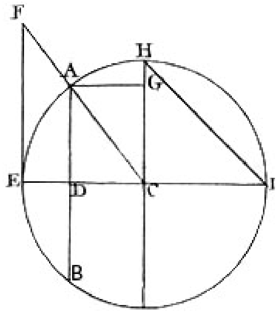


Obr. XXXVIII

kořen pro zápornou ordinátu nicméně stále nazývá „nepravým“ (*faux*) – a řešení kvadratury pomocí metod integrálního počtu, N°2787 (HOC, 390-394). Obdobné řešení, o němž se markýz Huygensovi nezmiňuje, podává též Johann Bernoulli v *Lectiones de calculo integralium* (JBO III, 403). Descartův list je zajímavý především z hlediska vývoje metod hledání tečen, neboť coby Descartova výzva (AT I, 490-491) Fermatovi (FO II, 169) vstupuje do sporu o nadřazenost metody mezi oběma geometry (v. 6). Jedná se rovněž o křivku, pro niž Descartes nehledá tečnu svou obecnou metodou tečných kruhů (a tedy normál), kterou od počátku upřednostňoval – zřejmě kvůli otázkám refrakce a broušení skel (Barbin 2006, 137). Fermatovu konstrukci tečny k *folium Cartesii* zjednodušuje Barrow (v. 9) v *Lectiones geometriae* X. Viz Teixeira I, 85-91.

68 Varignon (1725, 30) poznamenává k L'Hospitalovu kroku do nekonečna (v. 66), že $dy=0$ dává $2dx\sqrt[3]{a}=0$ jedině, když $3\sqrt[3]{a-x}=0$ je ve srovnání s $2dx\sqrt[3]{a}=0$ nekonečným; což činí x nekonečným, a tím pádem také y. Rovnice se pak změní $y=\sqrt[3]{axx}$, a tedy $y^3=axx$; odkud plyne $x=\pm\sqrt{\frac{y^3}{a}}$, a tím pádem také „dvě nekonečná maxima $PM\,(y)$“. Příklad lze řešit při $dy=0$ běžným způsobem, když se původní rovnice zbaví odmocnin.

69 V L'Hospitalově době není znám pojem sinu coby analytické, goniometrické *funkce* – toto přichází až s Eulerovou *Introductio in analysin infinitorum* (1748). Nebylo tehdy ani funkce logaritmické ani jakékoli jiné (v. 65); a proto L'Hospital nepodává pravidla jejich diferencování, i když se tomu Coolidge (1990) nemůže vynadivit. Sinus, latinsky *oblouk*, záhyb, zakřivení, se zde chápe ve smyslu čistě geometrickém. Ostatně ještě Diderotova a D'Alembertova *Encyklopedie* (XV, 219) definuje sinus *neboli* sinus droit (*sinus rectus*) jako „přímou čárou vedenou od oblouku kolmo na poloměr procházející druhou krajností oblouku“. Takto sinus nějakého oblouku bude polovinou struny oblouku dvojnásobného; a proto úsečka *AD* (Obr. XXXIX) představuje „*sinus droit* či prostě sinus



Obr. XXXIX

oblouku *AE*." Zřejmě tedy velikost sinu i při daném úhlu závisí na velikosti samotného oblouku, a tím pádem na velikosti poloměru kruhu. Odtud pak se mluví o úplném sinu (*sinus total*), sinu čtvrtkruhu *HE*, jejž představuje právě poloměr *HC* kruhu či přepona pravoúhlého trojúhelníku *ADC*, byť samozřejmě poměry mezi siny podobných oblouků (daného úhlu) a jejich úplnými siny zůstávají. D'Alembert a de La Chapelle výklad vlastností sinu ukončují: „Abychom dostali číselné hodnoty sinů atd. vezmeme poloměr za jednotku a určíme hodnoty *sinů*, tečen a sečen vyjádřené v částech poloměru." (tamt.)

Pokud jde tedy o Příklad IX, jestliže vezmeme přeponu *GE* (Obr. 41) za úplný sinus, strana *GI* se stane *sinus droit* úhlu *GEI*; a stejně tak v pravoúhlém trojúhelníku *GLE* nelze brát *GE* za úplný sinus, aniž by *GL* nebyl sinem úhlu *GEL*, a tedy jeho doplňkového úhlu *GEC* (De la Caille 1768, 324); neboť, jak lze snadno nahlédnout, siny doplňkových úhlů jsou si rovny a trojúhelníky *GIE* a *GLE* mají společnou přeponu.

70 Zde je potřeba upozornit, že Obr. 42 *Analýzy nekonečně malých* je poněkud matoucí a může navozovat mylný dojem, že úhly *CGE* a *FGE* jsou oba pravé, a tudíž se rovnají. Naletěl mu v tomto smyslu i Abbé de la Caille, když ve svém komentáři píše: „Článek 58 zdá se mi pojednán s menší svědomitostí než ostatní; a důkazy, které proto hodlám snést, jsou, bohužel, až příliš přesvědčivé." (De la Caille 1768, 325); a dále velmi správně uvádí, že v tomto případě by se nutně oba zmíněné trojúhelníky shodovaly v každém ohledu a úloha by se pak ukázala docela prostinkou.

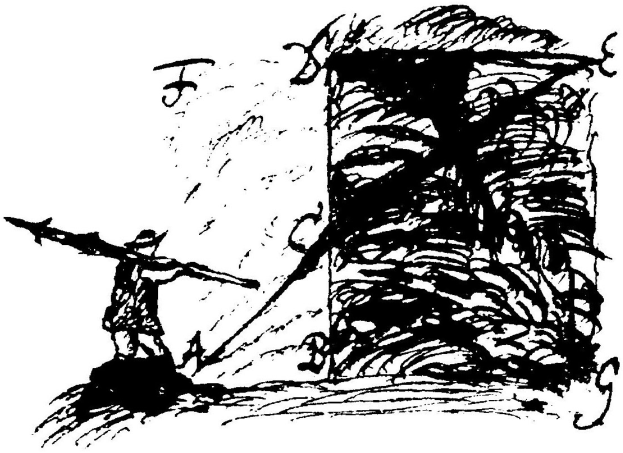
Varignon doplňuje, že k důkazu podobnosti trojúhelníků *HDE* a *KLE* je třeba uvážit, že úhly *CEG* a *FEG* jsou si rovny; a pak tedy i úhly $ECO+EOC$ a $EFO+EOF$, tj. podle předpokladu i $HEO+HOE$ a $KEO+KOE$. Avšak na základě rovnoběžníku *DL* se budou rovnat i $DEO+HOE$ a $LEO+KOE$. Po odečtení úhlů od druhých pak zůstává $DEH=LEK$, přičemž úhly při *D* a *L* jsou si rovny, a tudíž trojúhelníky *HDE* a *KLE* jsou podobné (Varignon 1725, 35).

71 *Égaux et semblable entr'eux* – „podobné a rovné", čili *shodné* ve smyslu zvláštního případu podobnosti, totiž shodnosti, kongruence.

72 *En ôtant les fractions et ordonnant ensuite l'égalité*. Zápis skladby členů či sdružení koeficientů rovnice do sloupců vychází z prací Viètových, Harriotovy (1560-1621), *Artis analyticae praxis* (1631) a především používá jej – společně se složenou závorkou před společným činitelem členů ve sloupci – Descartes v *Geometrii* (AT VI, 398). V L'Hospitalově případě tak $\begin{matrix} a^2 x^4 \\ -b^2 \end{matrix}$ označuje $(a^2-b^2)x^4$ a podobně. Více viz Cajori I, 201 a 344-355.

73 *En ôtant les incommensurables*, odstraněním nesouměřitelností.

74 Zcela obdobný příklad pocestného *A* (Obr. XL) se včetně půvabného obrázku nachází v *Lectiones* (1922, 17-18); Johann Bernoulli přitom podává pouze tento druhý, přímý způsob řešení a přirozeně dochází k té samé diferenciální i výsledné rovnici. Analogie s Descartovo-Snellovo-Fermatovým



Obr. XL

zákonem lomu světla v souvislosti prvním způsobem řešení sama nabízí a L'Hospital si jí zajisté musel být vědom; nicméně, jak vidno, postupuje čistě geometricky a staví na výsledku § 56 výše.

Této analogie se naopak jako příkladu při řešení obdobné úlohy plně chápe Leibniz v *Nova methodus* (MS V, 224-225), jednak aby prokázal správnost svého výsledku z *Principium unicum Opticae Catoptricae et Dioptricae* (AE 1682, 185-191) a oprávněnost znovuuvedení účelových příčin do fyziky; a spolu s tím pochopitelně zjevnou nadřazenost své metody vůči převládající karteziánské vědě, neboť „jiní veleučení muži museli postupovat mnohými oklikami k výsledkům, jež kdokoli s tímto počtem obeznámený dosáhne ve třech řádcích“ (MS V, 225).

Descartovo řešení otázky lomu světla založené na mechanické analogii světla a vrženého míče lze nalézt v druhé rozpravě *Dioptriky* (AT VI, 94-105); Fermatovo pak například v *Analysis ad refractiones* atd. (FO I, 170-179).

75 Prvý způsob řešení tohoto příkladu představuje zjednodušení Bernoulliho postupu z Úlohy XIX, *Lectiones* (Bernoulli 1921, 19).

76 Řešení úlohy o dni nejkratšího soumraku, kterou Coolidge (1990, 156) z nějakého důvodu nazývá „*amusing*“, oznámil „pan Bernoulli, lékař“ na stránkách *Journal des Sçavans* již roku 1693, kde rovněž píše, že s bratrem Jakobem se jí zabývali pět let, a dodává:

> „Tato otázka je tím zajímavější, že i s mojí metodou *de maximis et minimis* (která je nicméně jednou z nejkratších) přivádí do vleklého a obtížného výpočtu, který se přitom na samém konci nechá převést na drobnou kvadratickou rovnici. Překládám ji jednoduchou geometrickou úměrou: *jako se poloměr má k tečně polovičního kruhu soumraku (který běžně předpokládáme rovný 18 stupňům), tak se má sinus elevace pólu k sinu hledané poledníkové deklinace slunce*.“ (JS 1693, 29; JBO I, 64)

Jde tedy od počátku a veřejně o vlastní dílo Johanna Bernoulliho – samotný postup, jejž v *Journal des Sçavans* neuvádí, je pak předmětem vskutku nejdelší Úlohy XX *Lectiones* (Bernoulli 1922, 20-23). Nicméně ve věci otcovství se mu dostane poněkud hořkého zadostiučinění, jak sám, roku 1722, píše stran nového – a v mnoha dalších ohledech nešťastného – komentáře k *Analýze nekonečně malých* dopisem jeho autorovi, Jean-Pierrovi Crouzasovi (1663-1750):

> „[...] říkáte tam, když mluvíte o úloze nejkratšího soumraku, že *toto řešení náleží p. Bernoullimu, v současné době profesoru matematiky v Basileji*; co jiného tím chcete říct než, že v knize *Analýzy* již není jiné řešení, které by pocházelo ode mě, než toto řešení soumraku? Zajisté je to důsledek, který přirozeně vyplývá z Vašeho tvrzení: upřímně, pane, raději jste měl, tady stejně, jako jinde, pomlčet o jménu skutečného autora řešení obsažených v *Analýze*, neboť tím, že mi připisujete toto, upíráte mi všechna ostatní.“ (JBO IV, 160-168)

Tímto však drsná ironie celého případu nejkratšího soumraku ještě zdaleka nekončí, neboť se přihodilo, že L'Hospitalovo řešení se nadto ukazuje být jednodušším, přirozenějším, *lepším*. Třebaže co do podstaty je pravděpodobně založeno a umožněno Bernoulliho rozborem z *Lectiones*, L'Hospital, jak vidno, postupuje synteticky, a elegantně se tak oprošťuje veškerých Bernoulliho „obtížných a zdlouhavých výpočtů (*calcul prolixe et embarassé*)“ končících v rovnici čtvrtého stupně a následném hledání kořenů vhodných k řešení. Masku vrcholného šklebu si konečně dějiny nasazují, když se v podobném duchu v *Encyklopedii* vyjádří D'Alembert, heslo *CRÉPUSCULE*, kde rovněž lze nalézt jeho vlastní řešení a vysvětlení dané úlohy:

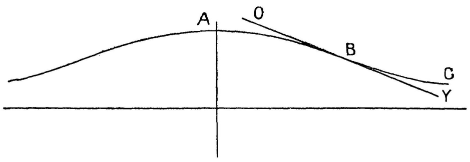
> „Tato otázka byla velice elegantně vyřešena v obou dílech /*Analýza nekonečně malých* a Pierre Charles le Monnier (1715-1799), *Institutions astronomiques* (1746), 407/ a nepředstavuje vážné těžkosti. Přesto p. Jean Bernoulli říká v souboru svých děl, svazek I, strana 64, že se jí zabýval pět let, aniž by byl schopen dobrat se konce. Příčinou toho bude patrně, že problém nejprve řešil analyticky, namísto, aby použil druh syntézy, kterou nacházíme v *Analýze nekonečně malých* a v *Instr. astr.* a která řešení činí mnohem jednodušším [...]“ (E IV, 456)

77 Poněvadž *MR* a *mS* (Obr. 46) jsou podle předpokladu rovnoběžné a rovné, čára procházející *R* a *S* bude rovnoběžná s *mH*; pak na základě Definice I Oddílu IV *Hn* bude diferencí *mR* a *SH*, jež si pak budou rovny; navíc trojúhelníky *MRm* a *mSH* jsou podobné, přičemž jejich základny *MR* a *mS* se rovnají, a proto $Rm=SH$ (Varignon 1725, 37).

78 *Points d'inflexion et de rebroussement*, „body přehybu a vratu“. Neužívaný, doslovný překlad inflexe coby „přehybu“ volím jen tehdy, pokud je řeč o inflexních bodech a bodech vratu dohromady, a to jednak z důvodu jazykové libozvučnosti, jednak kvůli zvýraznění logické souvislosti obou druhů význačných bodů v rámci pojetí L'Hospitalovy práce. Jestliže se mluví pouze o *point d'inflexion*, ponechávám samozřejmě běžný *inflexní bod*. Vsuvka „bodem přehybu neboli inflexním bodem“ zde tedy slouží jako překladová definice.

Jak už bylo předesláno (v. 66), určení inflexního bodu křivky lze za určitých podmínek převést na nalezení trojnásobného kořenu její rovnice, ježto tečna ke křivce v tomto bodě křivku zároveň protíná. Přirozeně tedy počátky analytického pojednání inflexních bodů spadají hned do prvních kroků algebraické geometrie. Otázku zvedá Roberval na případu Nikomédovy konchoidy (v. 53), když roku 1636 píše Fermatovi v odpovědi na jeho žádost (FO II, 72) po nalezení tečny ke křivce:

> „Pokud jde o geometrii, povím Vám něco jen ke konchoidě a řeknu Vám, že Vaši úlohu dobře chápu a zdá se mi, že jste o ní uvažoval jen dosti zlehka, když říkáte, že je vypouklá zevnitř či na straně vzhledem k pólu a že nemá žádný výlučný bod, kde by nebylo možno vést tečnu.



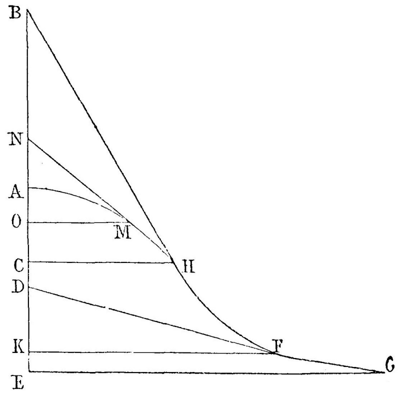
Obr. XLI

> Neboť mějme konchoidu *ABC* /Obr. XLI/. Zjistíte, že na ní leží jistý bod, jako *B*, takový, že od *A* až do *B*, je konchoida *vypouklá navenek*; a od *B* přes *C* až do nekonečna je vypouklá dovnitř, což je podivuhodné. A kromě toho, že bodem *B* nelze vést přímou čáru, která se jí dotýká; nýbrž, jako v případě *OBY*, která s ní svírá úhly *OBA*, *YBC*, přičemž každý z nich je menší než jakýkoli daný přímočarý úhel.“ (FO V, 44-45)

Proto podle Robervala v inflexních bodech konchoidy, v souladu s antickým geometrickým pojetím (v. 7), není možné vést tečnu. Zásadním postřehem pro Fermatova následná zkoumání inflexních bodů (*puncta inflexionum*) metodou *de maximis et minimis* se nicméně ukazuje právě úvaha velikosti křivočarých úhlů *ABO*, *CBY*. V dodatku k *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, kde se otázkou zabývá, takto Fermat velice důmyslně podřizuje poprvé podmínkám své metodě minim v posledku přímo *vlastnost tečny*, neboť:

> „*Budiž, na následujícím obrázku* /Obr. XLII/, *křivka* AHFG, *jejíž křivost v bodě* H *se takříkajíc změní. Veďme tečnu* HB *a ordinátu* HC. *Úhel* HBC *pak bude nejmenší ze všech,*

které svírají tečny s osou ACD*, ať již pod, nebo nad bodem* H*, jak je snadné dokázat*." (FO I, 166)



Obr. XLII

Dokázat toto jistě není snadné. Z hlediska antického názoru se tu vlastně mezi sebou srovnávají nesrovnatelné, „nekonečně malé" rohové úhly (v. 2); nicméně minimizací, v podstatě diferenciálního, *poměru HC* ku *CB* vyjadřujícího sklon tečny zde Fermat, *in nuce*, již vyslovuje nutnou podmínku inflexního bodu na základě druhého diferenciálu $ddv=0$ (a později derivace), jak ji známe u Leibnize (v. 66) nebo Newtona.

K otázce inflexních bodů lze, jak bylo řečeno výše, přistoupit také metodou karteziánské geometrie. Samotný Descartes tuto možnost zmiňuje v dopise Mersennovi (AT II, 312) z roku 1638. Průzračný výklad v tomto směru podává Claude Rabuel (1669-1728) ve svém komentáři Descartovy *Geometrie* (1730, 320), který uvažuje ordinátu v inflexním bodě coby trojjedinou právě proto, že přímá čára za předpokladu, že se v tomto bodě křivky dotýká, a tudíž zde určuje dvě sobě rovné ordináty (v. 5), zároveň ji protíná, čímž dává ordinátu třetí. A tedy analogicky s případem tečny, zde rovnice musí nabýt tvaru zahrnujícího jeden trojnásobný kořen

$$y^3-3y^2e+3e^2y-e^3=(y^2-2ey+e^2)(y-e).$$

Rabuel pochopitelně staví na výsledcích, ke kterým v 17. století postupně dospěli Descartovi následovníci Sluse, Hudde a Van Schooten. Společně se Slusem se zkoumáním inflexních bodů (*confinia flexus contrarii*) zabýval rovněž Christiaan Huygens (HOC XII, 210-214).

Johann Bernoulli věnuje inflexním bodům (*puncti flexus*) Úlohu XII *Lectiones* (1922), zatímco body vratu zde nepojednává vůbec, což některé mohlo vést k mínění, že náležejí čistě L'Hospitalovi. Řeč o nich lze nicméně nalézt v Bernoulliho dopise L'Hospitalovi z 22. dubna 1694 (JBB I, 207), odkud je patrné, že od Johanna Bernoulliho přebírá L'Hospital i zmíněné jméno. Pokud jde o nalezení inflexního bodu, nabízí Bernoulli tři způsoby, z nichž první, na základě maximální délky subtangenty, je obsažen v 1° následujícího § 66. Druhý – jestliže dx je konstatní, pak v inflexním bodě bude konstantí i dy, a tudíž $ddy=0$ – pak coby obecné pravidlo L'Hospital odvozuje z prvého v 2° stejného paragrafu. Třetí způsob, z koincidence dvou tečen v inflexním bodě, viz v. 81 níže.

79 Varrignon (1725, 39), dodává k § 66 1°, že pokud *F* (Obr. 52, 53) je inflexním bodem, pak *AL* je *největší*, a tudíž její diferenciál $M=0$. Co se týče 2°. Jestliže *F* je bodem vratu, pak *největší* je *AE*, a tedy se i její diferenciál musí rovnat nule, neboli diferenciál *AL* je v tento okamžik oproti diferenciálu *AE* nekonečným. Proto, upřesňuje, pro určení bodu přehybu nebo vratu je třeba položit diferenciál *AL* rovný nule nebo nekonečnu, a sice nule pro inflexní bod a nekonečnu pro bod vratu. Srv. také § 191 *Analýzy nekonečně malých*.

Pozdější stránky, 42-44, Varignova komentáře stran obtížného a nejednoznačného § 66 nicméně obsahují poznámku *à examiner*, přičemž opětovné prozkoumání 1° a 2° vyúsťuje v odstavec *Difficulté.* Zde Varignon bere zpět shora uvedené rozlišení a pochybuje, že by ddy =nekonečnu bylo jistou známkou pro bod vratu křivky, neboť se nachází se též u „prodloužené" cykloidy § 70, jež žádný bod vratu nezahrnuje a kde podobný předpoklad dokazuje jen to, že se cykloida dotýká své

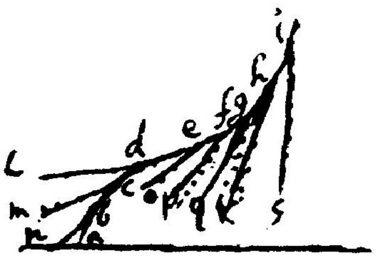
„poslední ordináty *BK*“ v jejím vrcholu *K* a v tomto bodě má *ddy* =nekonečnu. Z několika dalších protipříkladů nakonec vyvozuje, že *ddy* =nekonečnu značí pouze, že tečna je rovnoběžná s ordinátou, aniž by nutně poukazoval na bod vratu. Což je ostatně i případ kubické paraboly § 69, kde L'Hospital vůbec neříká, zdali se jedná o bod přehybu nebo vratu.

Bylo by nicméně příliš snadné L'Hospitalův předpoklad *ddy* =nekonečnu označit jen tak za „absurdní“ a „fundamentálně špatný“, jak to činí Coolidge (1990), 156, když už je pěšina do nekonečna dobře prošlapána a pěkně upravena. A to i přesto, že snaha vysvětlit tento předpoklad, ještě před odstavcem *Difficulté*, který Juškevič ve svém komentáři vůbec nezmiňuje (Ю 1935, 410), vede Varignona až k podivným, metafyzickým variacím na téma absolutního nekonečna vzešlého z dělení nulou, relativního nekonečna měnícího se v relativní konečno a podobně (tamt., 41). Z podobných předpokladů ovšem skládali počet nekonečna (v. 66) jeho zakladatelé a jistá svoboda pojmů v jejich rukou přirozeně umožňovala virtuozitu nahlédnutí; a právě tyto znepokojující otázky vedly jejich pokračovatele k jistému přesnějšímu uchopení. A netřeba zmiňovat, že i z podobně „špatných základů“ mohou povstat pevné stavby (v. 126). Konečně nutné a postačující podmínky bodu vratu křivky má možnost si každý najít v libovolné (středoškolské) učebnici diferenciálního počtu.

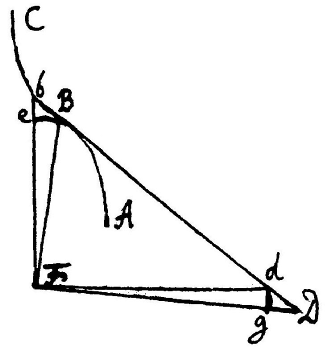
80 Viz v. 29.

81 Po několika příkladech, kterak se prvními dvěma způsoby váže hledání inflexních bodů k otázkám *de maximis et minimis*, kde je vždy nutno znát rovnici vyjadřující vztah *x* a *y* dané křivky, pokračuje Johann Bernoulli (1922, 28) třetím způsobem určení inflexních bodů, tentokrát z „pouhého utvoření křivek“ (*ex sola curvarum generatione*):

> „Předpokládám, že libovolná křivka je složena z nekonečna přímých nekonečně malých stran /Obr. XLIII/ *ab*, *bc*, *cd* atd. a tečna v libovolném bodě *d* není ničím jiným než malou stranou *dc* prodlouženou do *m*. Tedy je zjevné, že pokud křivka je navenek vypouklá, tečna



Obr. XLIII



Obr. XLIV

> následující částky *de* spadá vně a svírá nekonečně malý úhel *ldm*. Jestliže však je křivka navenek vydutá, tečna její částky připadne dovnitř: bod přehybu tedy bude tam, kde tečna následné částečky nepřipadne ani dovnitř ani vně, a tedy spadne v jedno s tečnou částečky předchozí, tj. tam, kde dvě následné částky jako *de*, *fg* leží rovně.“ (Bernoulli 1922, 28-29)

Lze poznamenat mimochodem, že právě tento obecný, ve smyslu Descartově mimogeometrický způsob zadání a uvažování křivek toliko „utvořením a vztažením čar vycházejících z nějakého společného bodu vzhledem k čarám následujícím“ (tamt.); odtud možnost uchopit jejich – mechanické, kinematické, optické či obecně fyzikální – závislosti formálním kalkulem stojí v samotném základu síly a ustavení infinitesimálního počtu a, jak se již ukázalo (v. 42, 48), představuje přímo hnací sílu jeho rozvoje. „Obecnou rovnici“, s jejíž pomocí lze u takovýchto křivek určit inflexní bod, Johann Bernoulli odvozuje na následujícím příkladu:

> „Budiž tedy libovolná křivka *ABC* /Obr. XLIV/ s inflexním bodem v *B*, který hledáme. Z daného bodu *F* (od něj vedené čáry na křivku vysvětlují její utvoření či povahu) uvažujme čáry *FB*, *Fb* svírající nekonečně malý úhel *bFB*; veďme na *FB*, *Fb* kolmé *FD*, *Fd* a z bodu *B*

tečnu BdD, která (ježto B je inflexním bodem) bude zároveň tečnou v b. Ze středu F opišme malé oblouky Be, gd a nechť FB neboli $Fb = z$; FD neboli $Fd = t$; $Be = dy$; pak tedy $be = dz$, $gD = dt$. Ježto úhel $BFe = gFd$, bude

$$FB.FD :: Be.gd,$$

a tedy

$$gd = \frac{t\,dy}{z};$$

a (z podobnosti trojúhelníků beB a gdD)

$$be.Be :: gd.gD, \text{ čili } dz.dy :: \frac{t\,dy}{z}.dt,$$

a tedy

$$\frac{t\,dy^2}{z} = dz\,dt$$

neboli (poněvadž $t.z :: dy.dz$)

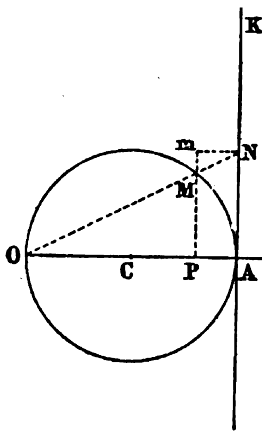
$$\frac{dy^3}{dz} = dz\,dt \text{ a } dy^3 = dz^2\,dt.$$

A z této rovnice, ježto dy a dt lze vyjádřit skrze dz, vysvitne, jaké bude z neboli úsečka FB, ze které konečně také poznáme inflexní bod B.“ (tamt., 29)

Odkud se snadno dostane známá formule pro inflexní bod v polárních souřadnicích, a to pokud položíme $dy = \rho\, d\,\omega$, $z = \rho$ – na rozdíl od L'Hospitala, který bere $dx = \rho\, d\,\omega$ (Ю 1935, 407-410),

$$t = \frac{-\rho^2 d\,\omega}{d\,\rho}.$$

82 Křivka, o níž zde L'Hospital pojednává, je verzí křivky zvané *versiera* (*versiera d'Agnesi*). Mějme kruh o středu C a průměru $OA = a$ a tečnu AK ke kruhu (Obr. XLV). Veďme pak z O úsečku ON;



Obr. XLV

z bodů M a N, ve kterých protíná kruh a tečnu AK veďme úsečky Nm a MP rovnoběžné s OA a AK. Místem m průniku všech podobných Nm, MP, když se ON bude otáčet okolo počátku O, je právě versiera Agnesi (Teixeira I, 108) tak, že

$$\frac{OP}{PM} = \frac{OA}{AN}, \text{ čili } \frac{mP}{MP} = \frac{OA}{OP};$$

odkud při $OP = y$ a $mP = x$

$$\frac{y}{\sqrt{y(a-y)}} = \frac{a}{x}, \text{ čili } x^2 y = a^2(a-y), \text{ a tudíž } y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}.$$

Jestliže tedy L'Hospitalovu křivku zapíšeme jako

$$y = \frac{a x^2}{a^2 + x^2} = a - \frac{a^3}{a^2 + x^2},$$

jedná se zřejmě o zmenšenou versieru.

Křivku, která se mimo jiné uplatňuje i v přírodních dějích optiky a kvantové mechaniky, studoval již Fermat roku 1657 (FO I, 279-280), kde si povšiml, že kvadratura versiery závisí na kvadratuře kruhu; její kvadraturou se zabývali i Gregory (1668) a Huygens (HOC X, 41). Jedná se o kubickou křivku č. 63 Newtonovy *Ennumeratio linearum tertii ordinis* (1706). Jména „*versoria*" se jí dostalo již roku 1703 Grandiho (1671-1742) prací *La quadratura del cerchio e dell'iperbole*, a to na základě *sinus* versus (Obr. XLV, v. 69), který vystupuje v její konstrukci. Odvozuje se tedy od latinského *vertere*, „převracet", „obracet", podobně jako *adversarius*, „obrácený", „protivný" a odtud i tehdejší italské *(av)versario*, „ďábel" a (*av*)*versaria*, „ďáblice", „čarodějnice". Právě v tomto smyslu přeložil jméno křivky cambridgeský profesor matematiky John Colson (1680-1760) – s typickým anglosaským citem pro románské jazyky – jako „*Witch of Agnesi*"; což se anglofonním mluvčím líbí, a tak křivce toto jméno více méně již zůstalo. Konečně napovídá aspoň to, že versieře věnovala několik stránek své slavné knihy *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (1748) Maria Gaetana Agnesi (1718-1799). Colsonův anglický překlad této knihy vychází roku 1801.

Úloha určení inflexního bodu versiery nachází své řešení prvními dvěma Bernoulliho způsoby (v. 78) na stránkách *Lectiones* (1922, 24-26). L'Hospital, jako obvykle, na stránkách *Analýzy*, § 68 oba postupy sjednocuje.

Více ke křivkám odvozeným a jejich souvislostem s cisoidou (v. 53) a dalším vlastnostem versiery viz Teixeira (I, 108-117); Loria (1901, 75-80).

83 Zde je na místě znovu připomenout, že z dnešního pohledu mluví L'Hospital o cykloidě *zkrácené* (v. 48), jak je patrné ze zadání i Obr. 59.

84 Svými dvěma způsoby nalezení inflexních bodů řeší úlohu také Bernoulli (1922), 26-27 a 29-30.

85 „Konchoida nějakého jiného druhu" (Bernoulli: „*altera conchoida*") se po té, co ji tak na konci 19. století pojmenoval Gino Loria, dnes nazývá *Slusovou konchoidou.* Sluse ji uvažuje roku 1662 v dopise Huygensovi (HOC IV, 247). Její konstrukce je dostatečně zřejmá z L'Hospitalova zadání; Obecně se tedy jedná o konchoidu takovou, že když úsek *PD* (Obr. 60) od pólu *P* k přímé čáře *BC* prodloužíme za *D* do bodu *F*, tak že $PD \times DF = k^2$, kde k^2 je nějaká daná veličina; pak místo bodu *F* tvoří Slusovu konchoidu. Odtud pak v případě L'Hospitalově

$$DF = PF - PD = PF - \frac{PB}{\cos DPB},$$

jestliže nyní vezmeme $PF = \rho$, úhel $DPB = \omega$ a ostatní neznámé jako v Příkladu V, dostáváme ze zadání $PD \times DF = PB \times BA$

$$\rho = \frac{a\cos^2\omega + b}{\cos\omega} \text{ a } DF = \rho - \frac{b}{\cos\omega},\ PD = \frac{b}{\cos\omega}.$$

L'Hospital se, jak upozorňuje Abbé de la Caille (1768, 349-350), v kroku od *dy* k *ddy* dopouští chyby ve znaménku a navíc zapomíná na *x*, když namísto správného dělitele $4axx - 4x^3$ nejprve dělí $\overline{4ax - xx} \times \sqrt{ax - xx}$, což v *errata* opět nesprávně opravuje na $4ax - 4x^2$. Nicméně v tomto případě nejde o nic významného, neboť rovným nule se posléze pokládá čitatel.

Johann Bernoulli věnuje nalezení inflexních bodů Slusovy konchoidy rovněž dva příklady *Lectiones* (1922, 27-28 a 30-31).

86 Křivku zvanou parabolická spirála, anebo vlastními slovy „*parabola helicoides, vel si mavis spiralis parabolica*" zkoumá v *Acta eruditorum* 1691 jako první Jakob Bernoulli, a sice již prostředky Leibnizova počtu diferenciálů. Zajímavá jsou hned jeho slova z úvodu *Specimen calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis* (AE 1691, 13-21), kde doznává, že kvůli krajní stručnosti *Nova methodus* vlastně odtud nebyl schopen metodu pochytit. Podařilo se mu to, jak dále píše, až za pomoci počtu Isaaca Barrowa (v. 9), poněvadž „kdokoli mu porozumí, těžko nebude moci poznat tento druhý, objevený p. L., který totiž je v onom prvém založen a kromě diferenciálního značení a úspornosti operací (*operationis aliquo compendio*) se od něj příliš neliší" (tamt., 14). Dodejme, že k nesrozumitelnosti *Nova methodus* v očích Leibnizových současníků

přispěly vedle strohosti pravidel symbolického počtu položených bez důkazů a vysvětlení navíc četné typografické vady. Parabolickou spirálu, zde *AFK* (Obr. 63), konstruuje Jakob Bernoulli ohnutím osy běžné paraboly kolem kruhu *AED* tak, že její ordináty *EF*, *eG* všechny směřují do středu kruhu *B*; abscisami jsou kruhové oblouky *AE* a platí stejně jako pro parabolu $\overline{EF}^2 = b\overline{AE}$. Dále určuje tečny, maximální úhel mezi tečnou a ordinátou, kvadraturu, rektifikaci, inflexní bod, evoluty atd.

Jestliže označíme $y=\rho$, $b=2\,p$, $z=a\,\omega$, rovnice křivky bude $(\rho-a)^2=2ap\,\omega$. Tvar parabolické spirály pak závisí na poměru *a* ku *b*, přičemž Jakob Bernoulli jej bere roven $4\,\pi$ (Loria 1902, 440); zvláštním případem parabolické spirály je spirála Fermatova, $\rho^2=k^2\omega$, kde k^2 je libovolnou konstantou.

Johann Bernoulli úlohu řeší v *Lectiones* (1922, 31). Viz také JBO I, 46-47.

87 *Le rayon de la développée*, „poloměr (paprsek) evoluty“, známěji poloměr křivosti (*rayon de courbure*). Poloměr křivosti geometricky značí poloměr oskulačního kruhu, tj. kruhu, který v daném bodě křivky ke křivce přiléhá co možná nejtěsněji (doslova ji „líbe“ – *osculor*: líbat, laskat), čímž na rozdíl od tečného kruhu dává pojem nejen o směru křivky (tečny), ale také o změně tohoto, další tendenci její křivosti vzhledem k této tečně; a ježto křivost kruhu je pro nějaký jeho poloměr vždy stejná a konstantní, umožňuje tak v daném bodě křivky popsat její *zakřivení*. Střed oskulačního kruhu, čili střed křivosti dané křivky v nějakém bodě, právě tak, jako střed kruhu tečného, leží na normále ke křivce a vskutku lze přímo určit jako průnik dvou nekonečně blízkých normál. Místo všech středů křivosti dané křivky pak představuje právě evolutu křivky, a tedy všechny středy křivosti dané křivky leží na její evolutě, která pak je obálkou všech normál křivky. Jak lze snadno nahlédnout již z tohoto stručného nástinu, který níže bude rozveden do historických souvislostí, co do teorie se tedy jedná o mimořádně důležitý pojem a *za účelem pochopení křivých čar* vlastně klíčový. Snad právě „vrcholným zřetězením všech věcí“ také ostatně zakládá dějinnou příležitost ku vzniku *Analýzy nekonečně malých* – neboť, jak známo, právě tato idea poloměru křivosti spojila životní cesty Johanna Bernoulliho a markýze de l'Hospitala.

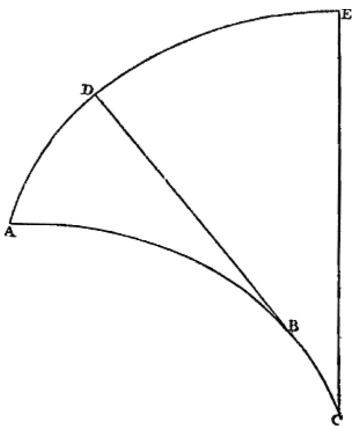
Základní myšlenka měření křivosti se zdá tím prostší, čím je fundamentálnější: křivky jsou někde křivé více, někde méně, avšak kruh je všude stejně křivý, a to tím více, čím menší je jeho poloměr. Přirozeně se tedy nabízí vzít za křivost veličinu v obráceném poměru k poloměru kruhu a pro libovolnou křivku pak kruhu takového, který se jí nejvíce blíží. Takto radikálně byl ovšem s to uchopit věc až Leibniz v *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi* (1686) – v celé své velikosti a s padesáti lety algebraické geometrie (a zejména s Fermatem) v zádech. Může tedy někomu připadat „divným“, jak dlouho to trvalo (Coolidge 1969, 36), pokud se zároveň netáže, jak a nač se vlastně ptá. Antika samozřejmě coby rovinná místa (v. 4) rozlišovala různé druhy křivých čar. Proklos v Def.IV svého komentáře k *Základům* (Proklos 1791, 127-135), zmiňuje Platona a Aristotela, již uznávají tři druhy míst – jednoduchá přímočará a kruhová a smíšená – odkud Aristotelovy tři druhy pohybů a patrně také důvod nejzazšího myšlenkového omezení eukleidovské geometrie na úkony pravítkem a kružítkem. Smíšená místa pak čerpají svoji bytnost jednak z roviny, jako „list břečťanu“ (cisoida), či spirála; jednak z tělesa, jako kuželosečky (tamt., 134). Mezi jednotlivými druhy geometrických míst v antice tedy, obrazně řečeno, leží druhová propast, která z povahy věci brání podobnému srovnání. Dlouhá cesta k obecnému uchopení (přirozenosti) křivky, natož pak křivosti, je pootevřena teprve s Pappovou úlohou a postupuje skrze kroky algebraické geometrie 17. století (v. 41).

Otázka křivosti se však přirozeně po svém způsobu vynořila i v antice, a to v takřka soupodstatném problému rohového úhlu, o němž bylo pojednáno výše (v. 3). Avšak ještě než John Wallis v *Defensio Tractatus angulo contactus et semicirculi* (1685) napíše, že tečný úhel je vlastně stupeň zakřivení, který je vždy úměrný délkám poloměrů strun podobných oblouků (JWO II, 456), lze myšlenku míry křivosti v téměř čisté formě nalézt u Mikuláše z Oresme, který mezi jinými *qualitates intensibiles et remissibiles* mluví o intenzitě křivosti (*curvitas*) a v *De configurationibus qualitatum et motuum*, XXI, si všímá, že v případě kruhu je křivost *uniformní* a roste v obráceném poměru s jeho poloměrem (Coolidge 1969, 36; Malbouisson 2011, 129-131). S nápadem „kruhu obsahujícího poměr křivosti“ (KOM II, 175), takřka oskulačního kruhu *ad hoc*, přichází o tři století později Kepler, a to v souvislosti se svou – z hlediska pozdější matematizace přírody nanejvýš významnou – prací o geometrických transformacích obrazu na sítnici v *Paralipomena in*

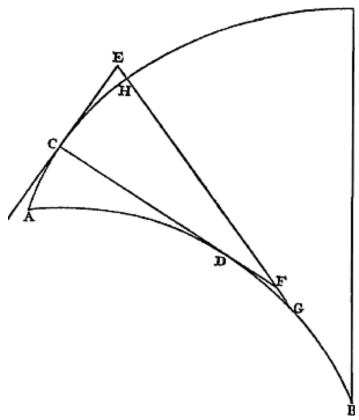
Vitelionem, III, 2 (1604).

Základní stavební kameny teorie evolut, čili míst středů křivosti, jak je vystavěna v *Analýze nekonečně malých*, poprvé vystupují z mechanických úvah a pokusů stran (isochronního) pohybu kyvadla shrnutých v *Horologium oscilatorium* (1673) Christiaana Huygense. Bude to právě na základě těchto a Tschirnhausových a výzkumů evolut a kaustik, „objasňujících povahu křivých čar v jejich obecnosti“ (MS V, 283), odkud Leibniz vybuduje teorii obálek a obecněji pojem družiny křivek. Huygensovy kyvadlové hodiny představují bez nadsázky jeden z nejvýznamnějších vynálezů všech dob a jejich příběh je úchvatný jak z hlediska teoretického a objevitelského, tak také co do dalekosáhlých praktických důsledků – což, jako by mluvil dnes, neopomíná zdůraznit již Fontenelle (1715, xi-xii), proti všem, kteří tak rádi shazují vše, čemu nerozumí, jako „neužitečné a nepraktické“. Díky v zásadě „pusté“, „odtažité“, „matematické spekulaci“ stran isochronismu cykloidy nicméně Huygensovy hodiny umožnily navzdory kymácení lodí téměř dokonale přesné měření času na moři, a tím vskutku neomezený rozvoj svobody mořeplavby (Barbin 2006, 237-259) – v posledku vedoucí k výtrysku ducha raného kapitalismu. Naproti tomu bude právě tak jedním z významných výsledků vlastně čistě geometrická teorie Huygensových evolut. Na začátku třetí knihy *Horologium oscilatorium* klade Huygens následující, nadále klasické definice evolventy a evoluty:

> „Jestliže uvažujeme vlákno, nebo ohebnou čáru, ovinutou kolem čáry zakřivené k jedné straně; a jestliže jeden konec vlákna zůstává upevněn ke křivce a druhý je oddálen tak, že volná část vlákna zůstává stále natažena; pak je zřejmé, že tento konec vlákna opíše jistou křivku. Říkejme jí evolventa (*Descripta ex evolutione*). A nechť ta, kolem níž je vlákno ovinuto se nazývá evoluta. Na Obr XLVI je *ABC* evolutou a *ADE* příslušnou evolventou takovou, že když krajnost vlákna přechází z *A* do *D*, jeho napnutá část bude úsečka *DB*, zatímco zbytek *BC* je stále ovinut okolo křivky *ABC*. Je zjevné, že *DB* se dotýká evoluty v *B*.“ (HOC XVIII, 188)



Obr XLVI



Obr XLVII

Huygens dále v Tvrzení I dokazuje, že všechny tečny k evolutě protínají evolventu pod pravým úhlem (tamt., 190); čili že kolmice z *C* (Obr XLVII) na tečnu *CD* k evolutě je tečnou k evolventě, tj. protíná evolventu jedině v bodě *C*. Důkaz vede na antický způsob, přičemž ukazuje, že žádný bod *H* evolventy různý od *C* nenáleží této přímé čáře *CE*. Nuže v případě, kdy bod *H* leží ve větší vzdálenosti od počátku *A* evolventy než bod *C*, tečna *HG* k evolutě protíná *CD* v bodě *F* a kolmici k ní v bodě *E*. Pak tedy

$$DF+FG>DG \text{ a } CD+DG=HG$$

a tedy

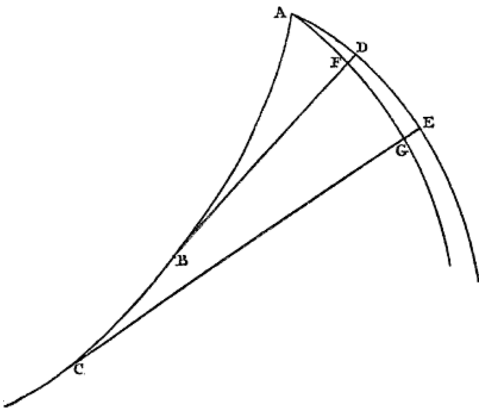
$$CF>HF.$$

Dále, ježto úhel *FCE* je pravý

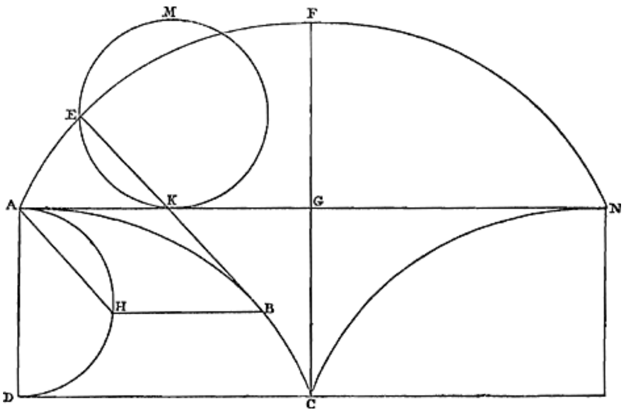
$$EF>CF,$$

a tím pádem jsou H a E navzájem různými body. Obdobně pak pro druhý případ, kdy leží na druhé straně bodu C. (Barbin 2006, 256).

Díky Tvrzení III, které dokazuje, že „dvě čáry zakřivené k jedné straně a k té samé straně vyduté nemohou v takovéto vzájemné poloze vycházet z jediného bodu tak, aby každá normála k jedné byla zároveň normálou druhé“ (HOC XVIII, 194), může následně Huygens dokázat obrácené Tvrzení I, totiž Tvrzení IV, „jestliže z jednoho a toho samého bodu vycházejí dvě křivé čáry zakřivené k jedné straně a k té samé straně konkávní a nacházejí se v takové vzájemné poloze, že všechny tečny k jedné protínají druhou v pravých úhlech, pak tato druhá bude evolventou prvé počínaje jejich společným bodem“ (tamt., 196). Důkaz tvrzení opět probíhá sporem, neboť jestliže čáry ABC a ADE (Obr XLVIII) splňují uvedené tvrzení a zároveň je evolventa AFG evoluty ABC je různá od ADE, pak každá normála k AFG rovněž bude normálou ADE, což právě je podle předchozího tvrzení nemožné (Barbin 2006, 257).



Obr XLVIII



Obr XLIX

Nyní je vše připraveno k Huygensovu mistrovskému tahu, v němž se z teorie evolut dokáže správné založení původně experimentálního principu kyvadlových hodin, tj. Tvrzení V: „Pokud se přímá čára dotýká cykloidy v jejím vrcholu; a pokud na této přímé čáře vzaté coby základna sestrojíme druhou cykloidu, jež bude rovná a podobná cykloidě spodní; pak libovolná tečna ke spodní cykloidě bude normálou k oblouku vrchní cykloidy“ (HOC XVIII, 199). Nuže je třeba dokázat, že tečna BK (Obr XLIX) k cykloidě ABC protíná cykloidu ABC v pravých úhlech. Opišme tedy kolem osy AD cykloidy ABC tvořící oblouk AHD protínající BH rovnoběžnou se základnou v H a veďme úsečku AH. Pak na základě vlastnosti tečny k cykloidě (v. 48) BK je rovnoběžná s AH, a tudíž

$$AK = BH = AH.$$

Budiž E průnikem BK s tvořícím kruhem probíhajícím K; poněvadž úhly EKA a KAH se rovnají, pak

$$EK = AH, \text{ a tím pádem } EK = AK.$$

Odtud pak plyne, že bod E leží na horní cykloidě AFN; a na základě Tvrzení I konečně BK prodloužená do E bude její normálou. Tudíž podle Tvrzení VI „odvíjením počínaje vrcholem půlcykloidy, je opsána druhá půlcykloida, která je podobná a rovná prvé a jejíž základna spadá v jedno s přímou čarou dotýkající se cykloidy v jejím vrcholu“ (tamt., 200).

Toto z hlediska *Analýzy nekonečně malých* vlastně jen zvláštní tvrzení bylo nutné představit coby poctu Huygensovu objevitelskému duchu, neboť „nyní je zřejmé, že kyvadlo zavěšené a uvedené do pohybu mezi dvojicí lamel ohnutých do tvaru půlcykloid, opisuje svým pohybem oblouk cykloidy, a tudíž jeho oscilace nezávisle na výšce jejich amplitudy probíhají ve stejných časech“ (tamt., 202). Pokud ovšem jde o ideu křivosti vůbec a její další vývoj, jeví se důležitějším Tvrzení XI té samé části *Horologium oscilatorium*, kde se Huygens pokouší obecně nalézt evolutu, čili určit poloměry křivosti v posledku „pro všechny geometrické křivky“ úvahou průniku dvou nekonečně blízkých normál křivky, a tím pádem trojjedinosti dvou tečných bodů normál s evolutou a bodu jejich průniku (tamt., 226). Formule, ke kterým by Huygensův postup vedl, kdyby již měl v držení symbolickou metodu diferenciálů, právě tak, jako výklad – poněkud obsáhlejšího – postupu samého, lze nalézt například v Cantor (MCV III, 136-137).

Není proto žádný div, že první přesné, obecným pravidlům podřízené pojetí křivosti čar nacházíme teprve u zakladatelů infinitesimálního počtu. Z části pravděpodobně i Huygensovy geometrické vhledy pak docházejí analytického výkladu v *Methodus fluxionum et serierum infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam* Isaaca Newtona sepsané někdy kolem roku 1670. Třebaže Newton svoji infinitesimální matematiku z různých důvodů držel v tajnosti – *The Method of Fluxions and Infinite series* vychází v Colsonově překladu až roku 1736 – a sotva tudíž mohla mít na *Analýzu nekonečně malých* přímý vliv (v. 18) – až na těžko ověřitelné domněnky, že by se nějaký rukopis dostal přímo do L'Hospitalových rukou (Blanco 2008); přesto nebude od věci Newtonovu metodu krátce zmínit coby doklad přirozené spojitosti růstu matematických idejí. Ostatně už úvodní premisa *Prob. V.*, „Pro libovolný daný bod dané křivky, najít velikost křivosti (*Quantity of Curvature*)“, ve stejném duchu jako shora citovaná slova Leibnize, naznačují, že pochopení křivých čar bylo v druhé polovině 17. století obecně již plně na výši otázky míry křivosti, neboť, Newton otevírá, „je málo otázek ohledně křivek, které by byly elegantnější, anebo poskytovaly hlubší vhled do jejich přirozenosti“ (Newton 1736, 59). Následují základní principy křivosti čar: stejný kruh má všude stejnou křivost a v různých kruzích je v obráceném poměru k jejich poloměrům; jestliže se kruh dotýká nějaké křivky v libovolném bodě po její konkávní straně a zároveň má velikost takovou, že do tečných úhlů v blízkosti tohoto bodu nelze vepsat žádný další kruh, pak je tento kruh stejné křivosti jako křivka v daném bodě; a tudíž středem křivosti křivky v libovolném bodě je právě střed stejně zakřiveného kruhu, a tedy „paprsek či poloměr křivosti je část kolmice na křivku ohraničená tímto středem“ (tamt., 60). V dalších odstavcích Newton zajímavým střídáním limitních a infinitesimálních úvah určuje hlavní znaky středů křivosti, které, jak říká, všechny zakládají možnost obecné metody jejich nacházení. Z nich pak jakožto nejjednodušší volí – podobně jako Huygens – podmínku průniku po stranách daného bodu dvou nekonečně blízkých normál. Odtud konečně, když se x položí za nezávislou proměnnou tak, že $\dot{x}=1$ a $z=\dot{y}/\dot{x}$, získává Newton obecnou formuli poloměru křivosti (tamt., 61-62; Coolidge 1969, 38)

$$\frac{\overline{1+zz}\sqrt{1+zz}}{\dot{z}}.$$

Po Descartově metodě tečného kruhu, jejím de Beaunově rozšíření na přímou čáru, Wallisových pracích stran rohových úhlů, Fermatových úvahách inflexních bodů, Huygensových evolutách atd. s nyní, věru, již docela přirozenou ideou oskulačního kruhu přichází, jak už bylo předesláno, také Leibniz. Svůj objev – o tom netřeba pochybovat – včetně celé obecné teorie, již by bylo lze odtud rozvinout, nastiňuje poprvé, bez výpočtů a formulí, v *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi* (1686). Pojem křivost a její míry Leibniz metodicky buduje na základě analogií s případem směru křivky neboli její tečny, neboť „tak, jako geometři směr křivky měřili nejjednodušší čarou mající ten samý směr v daném bodu, totiž tečnou; tak stejným způsobem měřím křivost nejjednodušší křivkou mající v uvažovaném bodě nejen stejný směr, ale i stejné zakřivení (*flexuram*), totiž kruhem, který je dané křivce nejen tečný, ale, ba co víc, který ji obemyká (*osculante*)“ (MS VII, 326). Nejvhodnější je tečna k určení směru křivky, poněvadž její směr je v každém bodě stejný, a stejně kruh je nejvhodnější k určení křivosti křivky, ježto křivost kruhu je všude stejná. Mezi nekonečnem všech kruhů, jež se křivky v daném bodě dotýkají, je kruh oskulační ten, který s křivkou svírá *minimální úhel dotyku*, a tedy „řečeno jazykem geometrů, který se křivce blíží tak, že mezi něj a uvažovanou křivku již nelze vepsat žádný další kruhový oblouk“ (tamt., 327) právě tak, jako mezi tečnu a křivku již nelze vepsat žádnou další přímou čáru. Takový úhel se pak nazve *oskulační*.

Nicméně právě tato až příliš radostně či ochotně následovaná stopa geometrické posloupnosti dovedla Leibnize i k jeho nejpamětihodnějšímu omylu. Jestliže totiž k nalezení tečného bodu je třeba uvažovat rovnici o jednom dvojnásobném kořenu, tj. jeden dvojjediný průnik; a u inflexního bodu tři navzájem rovné kořeny (v. 78); pak, pokračuje Leibniz, oskulační kruh „tak, jako jakoukoli jinou oskulační křivku“, dostaneme úvahou čtyř sobě rovných kořenů rovnice křivky. Což je sice v jistých zvláštních případech, například ve vrcholu paraboly, pravda, avšak obecně stačí kořeny tři, neboť ze dvou dotyků kruhu s křivkou spadajících v jediný, může jeden bod vstupovat do obou dvou dotyků, čili být jim společný (Parmentier 1995, 119). Potrvá celých šest let, než Jakob

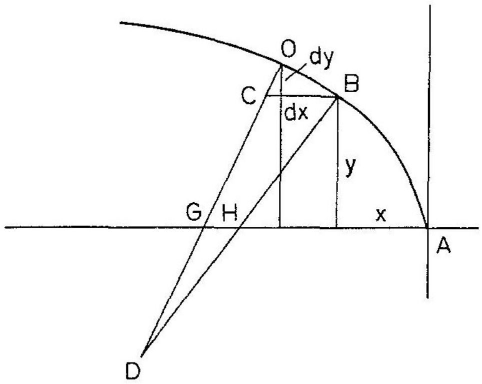
Bernoulli v *Additamentum ad solutionem curvae causticae* (AE 1692, 110-116), vedle dalších skvělých pozorování stran oskulačních kruhů, na Leibnizovu chybu upozorní; a další dobu, než Leibniz svoji „porážku“ (MS III, 207) plně uzná. I přes zmíněný omyl se však Leibnizova cesta ukazuje nanejvýš plodnou a univerzální, neboť právě ona iluzorní geometrická posloupnost kořenů oskulace Leibnizovi dává okamžité zobecnění a přesnou míru oskulací druhého, třetího atd. stupně, kdy v jedno spadají tři, čtyři atd. doteky kruhu a křivky (MS VII, 327). Odtud pak je okamžitě patrná vnitřní souvislost objevu oskulačních kruhů s diferenciálním počtem samotným. Rovněž Leibnizova definice oskulace prostřednictvím tečného úhlu by se mohla ve světle vleklých sporů o jeho povahu jevit jako nešťastná; avšak je to právě oskulační kruh, který pojmu úhlu dotyku dává zpětně dobrý smysl: oskulační úhel je *z definice* dán křivkou jejím oskulačním kruhem, a to na základě řádů nekonečně malých, neboť pak oskulační úhel je minimální tečný úhel, čili „úhel nekonečně menší než jakýkoli tečný úhel, ba oproti němu dokonce nulový (*infinite exiguus, imo nullus*)“ (tamt., 327); právě tak, jako tečný úhel oproti úhlu přímočarému. Jde tedy o rozdíl mezi druhým a prvním diferenciálem *úhlu*, potažmo mezi prvým diferenciálem a samotným přímočarým úhlem (Parmentier 1995, 121).

Srv. Leibnizova slova ze závěru v. 3. Dále k poloměrům evoluty a míře křivosti viz Barbin (2006, 237-259); Cantor (MCV III, 171-185); Coolidge (1969, 35-39), stejně jako odkazy ve v. 3.

88 Srv. *Lectiones Mathematicae de Methodo integralium*, XV (JBO III, 432-434), pro Bernoulliho pojednání oskulačních kruhů a evolut. L'Hospitalův výklad v §75 a §76, byť přirozeně oba dokazují obdobné vlastnosti, se od Bernoulliho výkladu liší co do postupu, výchozích pojmů a jejich logického zřetězení.

89 Jeden z nejpozoruhodnějších a nejosobitějších rysů původní Leibnizovy metody diferenciálů, jenž byl v dalším vývoji matematické analýzy cíleně eliminován (i samotným Leibnizem), spočívá, jak vynikajícím způsobem ukázal H. J. M. Bos (1974), ve vnitřní neurčitosti základního pojmu diferenciálu vedoucí k nutnosti volby posloupnosti u některé z geometrických proměnných (srv. § 62, § 65 a další). Tato volba je dána geometrickou povahou té či oné úlohy a projevuje se v rozdílnosti výsledných formulí zahrnujících diferenciály vyšších řádů právě v závislosti na volbě aritmetické posloupnosti jedné z proměnných veličin. Význačným příkladem tohoto rázu raného infinitesimálního počtu, jenž skrze určující svobodu zakládá možnost elegance, budiž právě klíčový pojem teorie křivých čar a výsadní místo užití druhého diferenciálu, tedy poloměr křivosti či oskulačního kruhu.

Je zřejmé, že Johann Bernoulli formuli poloměru křivosti, jež tolik nadchla L'Hospitala, objevil někdy před rokem 1691, kdy přijíždí do Paříže. Její odvození v pravoúhlé soustavě souřadnic se – po úvodu v duchu Leibnizova rozvržení teorie oskulačního kruhu (karteziánským určením rovnice s jedním trojnásobným kořenem, v. 87) – nachází v Lekci XVI, *Lectiones de methodo integralium* (JBO III, 437) a až na drobnosti odpovídá tomu, které L'Hospital podává v § 79. Mějme poloměry křivosti *OD*, *BD* (Obr L) kolmé ke křivce *AB*. Na základě předchozí Lekce (tamt., 433), jestliže



Obr L

oblouk *OB* je nekonečně malý, průnik *D* bude středem oskulačního kruhu, a tedy je třeba hledat velikost $BD = r$. Ježto *HB* je normálou křivky,

$$AH = x + \frac{y\,dy}{dx}.$$

Za předpokladu, že dx je konstantní (*posito* $ddx = 0$), bude GH diferenciálem AH, odkud

$$HG = dx + \frac{dy^2 + y\,ddy}{dx}.$$

Dále

$$BC : HG = BD : HD, \text{ kde } BC = \frac{dx^2 + dy^2}{dx} \text{ a } HD = r - BH = r - \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx};$$

a tudíž dostáváme hodnotu $BD = r$ poloměru křivosti pro dx konstantní

$$r = \frac{-\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx\,ddy}.$$

Odtud (Bos 1974, 37), pokud se dosadí $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, což zde však Johann Bernoulli nečiní, vychází formule

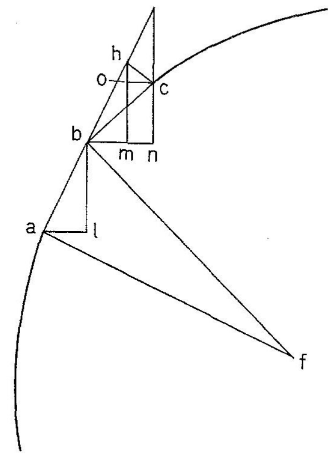
$$r = \frac{ds^3}{dx\,ddy} \text{ pro } dx \text{ konstantní,}$$

což jednak, jak se ukáže níže, představuje jednu z formulí pro poloměr oskulačního kruhu z pera bratra Jakoba; jednak v pozdějším, funkcionálním pojetí x coby nezávislé proměnné odpovídá známé formuli

$$r = \frac{\left[\dfrac{ds}{dx}\right]^3}{\left[\dfrac{ds}{dx}\right]} = \frac{\left[1 + \dfrac{dy^2}{dx}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right]}.$$

Jakob Bernoulli otázku poloměru křivosti řeší poprvé v *Curvae diacausticae* (AE 1693, 244-255), kde bez důkazů podává formuli v polárních souřadnicích, přičemž se mylně domnívá, že v každém inflexním bodě paraboloidů (kromě běžné paraboly) se poloměr oskulačního kruhu stává nekonečným (JBB I, 204). Důkazy jeho tvrzení, stejně tak, jako nápravu tohoto omylu pak o rok později zveřejňuje L'Hospital (AE 1694, 387-391) – jeho řešení tvoří obsah § 77-79 a § 81-82 *Analýzy nekonečně malých*. Jakob Bernoulli nicméně nedlouho po té, v *Curvaturae laminae elasticae* (AE 1694, 262-276), přináší vlastní, nanejvýš zajímavá odvození formule poloměru křivosti právě v závislosti na předpokladu aritmetické posloupnosti u jednotlivých geometrických proměnných, která jedinečným způsobem dokládají názorně geometrickou složku prvního infinitesimálního počtu. V protikladu k výše uvedenému postupu Johanna Bernoulliho uveďme jeho v zásadě čistě geometrické odvození formule v polárních souřadnicích, jež lze podat následovně.

Předpokládejme na základě Obr LI, že konstantní jsou „prvky křivky“ *ab*, *bc*, čili že *ds* jsou si rovny (AE 1694, 264). Zřejmě tedy poloměry oskulačního kruhu *af*, $bf = z$, jež se sbíhají v bodě *f*



Obr LI

evoluty, jsou kolmé na nekonečně malé částky křivky (*portiunculae infinite parvae*) *ab*, *bc* a v bodě *f* svírají úhel *afb* rovný úhlu *hbc*, jestliže *ab* prodloužíme do *h*, neboť tehdy $bh = bc$. Uvažujme nyní rovnoběžné *al*, *bn*, *co* coby „prvky vstupující“ do abscis (*dx*, *ddx*); a *bl* coby prvek ordinát (*dy*). Jakob Bernoulli nadále uvažuje, že trojúhelníky *bmh*, *hoc* tak, jako *hcb*, *abf* jsou podobné, a tudíž

$$ho.bc :: ho.hc \times hc.bc :: bm.bh \times ab.bf :: al.ab \times ab.bf;$$

a ježto *ds* je konstatní,

$$ho.bc :: al.bf.$$

Avšak

$$ho = hm - nc = bl - nc = ddy;$$

tedy

$$ho.bc :: al.bf,$$

a tím pádem poloměr oskulačního kruhu při *ds* konstantním

$$z = \frac{dx\,ds}{ddy} \text{ a rovněž } z = \frac{dy\,ds}{ddx}.$$

Odtud coby důsledek, pokračuje Jakob Bernoulli, plyne, že pro každou křivku, jejíž prvky jsou položeny sobě rovnými, jsou druhé diferenciály koordinát prvním diferenciálům obráceně úměrné, jak lze snadno nahlédnout z uvedeného výsledku, případně z pouhé podobnosti trojúhelníků *bmh* a *hoc*, kde *co* neboli *ddx* se má k *oh* neboli *ddy* tak, jako *hm* ku *bm* nebo *bl* ku *al*, čili *dy* ku *dx* (tamt.). Podobnými geometricko-infinitesimálními úvahami pak Jakob Bernoulli dospívá ke známé formuli pro *dx* konstantní

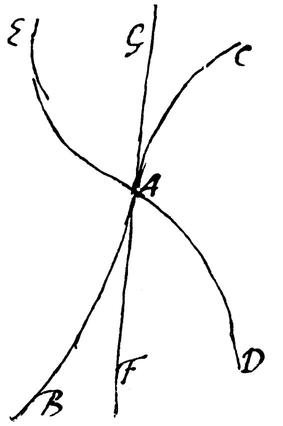
$$z = \frac{ds^3}{dx\,ddy};$$

a obdobně pro *dy*

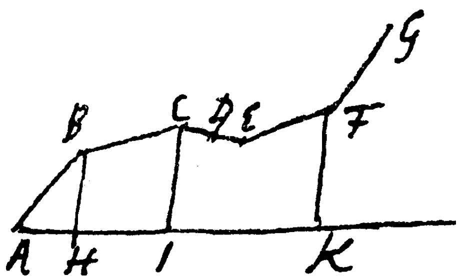
$$z = \frac{ds^3}{dy\,ddx}.$$

K Newtonově formuli viz v. 87. L'Hospitalova odvození poloměru oskulačního kruhu a jejich diskuse ze strany Johanna Bernoulliho, stejně jako náznaky počínajícího rozkolu mezi ním a bratrem Jakobem lze nalézt v dopisech 35-37 (JBB I, 244-256). Pro celkový přehled stran odvození formulí vzhledem k volbě posloupností viz Bos (1974, 35-40). Zde také lze nalézt souhrn Leibnizovy pozoruhodné odpovědi z *Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica* (MS V, 309-318) z téhož roku, v níž hledání poloměrů křivosti propojuje se svou teorií obálek; přičemž využívá – vstříc časům budoucím – toliko konečných proměnných a konečných diferenciálních *poměrů*, bez výpočtů druhých diferenciálů a nutnosti volby mezi posloupnostmi proměnných.

90 Nad velikostí poloměru křivosti v inflexním bodě začíná markýz de l'Hospital uvažovat, jak již bylo předesláno, v návaznosti na článek Jakoba Bernoulliho *Curvaturae laminae elasticae*. Dopisem ze 7. dubna 1694, Nr. 21 (JBB I, 203-205) sděluje Johannovi Bernoullimu svůj objev, že oproti mínění jeho bratra a p. Leibnize (*ddy* v inflexním bodě vždy rovno nule) nalezl též křivky, u nichž poloměr oskulačního kruhu může být „nekonečně malý či nulový“. Jako příklad uvádí čáru *BAC* s inflexním bodem v počátku *A* (Obr LII) a tečnou *FAG* v tomto bodě. Jestliže nyní budeme počínaje bodem *A*



Obr LII



Obr LIII

odvíjet část *CA*, pak je zřejmé, že se opíše křivka *AE*; a konečně, že celková křivka *DAE* bude rovněž mít inflexní bod v bodě *A*, třebaže v tomto bodě bude poloměr její evoluty *BAC* nulový (tamt., 204); a jestliže například, pokračuje L'Hospital, křivka *DAE* bude paraboloidem $aax^3 = y^5$, snadno se dokáže, že v inflexním bodě *A* bude poloměr její evoluty nulový.

Avšak, táže se L'Hospital, když v inflexním bodě máme vždy $ddy = 0$, přičemž nemůžeme nesouhlasit s Leibnizem, že pokud rostou a blíží se inflexnímu bodu, jistě dvě nekonečně blízké normály nemohou přejít z divergentních v konvergentní, aniž by prošly rovnoběžností; avšak, jak se právě ukázalo, za předpokladu, že klesají, stanou se nakonec nulovými – co si pak počít s obecnou formulí poloměru evoluty

$$\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy},$$

jestliže v inflexním bodě je *ddy* vždy rovno nule? Neboť, L'Hospital ukončuje výklad své nesnáze: „Přijde mi jasné, že v inflexním bodě máme vždy $ddy = 0$, avšak nezdá se mi, že by to platilo i opačně (*reciproque*), a mám za to, že je nekonečné množství křivek, které nikterak nemění své zakřivení a přitom v některých svých bodech mají $ddy = 0$; sdělte mi, co si o tom myslíte.“ (tamt.)

Jak vidno, L'Hospital se zde skrze geometrickou úvahu dotýká toho, co bude později, na základě limitní definice spojitosti, označeno jako bod nespojitosti; přičemž zajisté pojem spojitosti chápe přirozeným, obrazným způsobem, tedy jako vlastnost nikde nepřerušené geometrické čáry a poloměr křivosti jako poloměr oskulačního kruhu. Východisko i zdroj bezradnosti jeho úvah zde ovšem představují pravidla, která Leibniz a Jakob Bernoulli odvodili, nehistoricky řečeno, na základě křivek, u nichž jsou prvá a druhá derivace spojité, a kde tedy v maximu nutně $dy = 0$ a v inflexním bodě $ddy = 0$. Ostatně již z počátku své pozdější odpovědi (AE 1697, 480-481) na L'Hospitalovy námitky vynáší Jakob Bernoulli přímo za *matematický* zákon, že „příroda skoku nečiní a dokonce i v nejmenším koná postupně“ (*Natura non facit saltum, sed etiam in minimis agit gradatim*). S jistou oporou ve výpočtech pak l'Hospitalův případ zdůvodňuje tak, že v bodě *A* (Obr. 71) jsou „virtuálně obsaženy všechny prostřední (*intermedios*) stupně zakřivení“ (tamt., 480); a v posledku, že „v tomto bodě je poloměr oskulačního kruhu zároveň nula i nekonečno, a tudíž bod *A* vynikavě (*eminenter*) v sobě zahrnuje všechna zakřivení od maximální po minimální, a proto v něm všechny evoluty spadají v jedinou, totiž osu“ atd. (tamt., 481). Není zde bohužel místo sledovat dopodrobna celkový postup Jakoba Bernoulliho, byť leccos vypovídá o tvůrčím duchu tehdejší matematiky; vraťme se k odpovědi druhého z bratrů, která se zrcadlí v úvaze § 82 *Analýzy.*

Po tisícerých díky za novou splátku 200 liber a ujištění, že bratr námitku přivítal a že ta již je na cestě do Lipských akt a za Leibnizem (srv. MS III, 185), dává Bernoulli v první části L'Hospitalovi za pravdu, aniž by ovšem v obecné formuli spatřoval zmíněnou obtíž. Dle jeho mínění totiž „může být *ddy* v inflexním bodě ve srovnání s ostatními *ddy* rovněž nekonečným, což právě činí, že obecný výraz je někdy =0“ (JBB I, 206). Poněvadž, pokračuje Johann Bernoulli, s vzrůstající křivostí roste též *ddy*, pak jakmile křivost dosáhne nekonečna, a tudíž poloměr evoluty bude nekonečně malý, *ddy* se stane vzhledem k ostatním *téhož druhu* nekonečným. Odtud plynoucí důsledek, totiž že není nutné, aby křivka přecházející z vypouklosti k vydutosti musela projít přímostí (*droiture*), tj. aby $ddy = 0$, pak spočívá v možnosti, že „ona přímost může zaujímat toliko jeden diferenciál křivky nekonečně menší ve srovnání s ostatními“ (tamt.). Svoji ideu se pak pokouší vysvětlit na příkladu křivky *ABCFG* (Obr LIII) s osou *AK* a diferenciály *AB*, *BC*, *CF*, *FG*, kde

> „je jasné, že inflexní bod může nastat v *D* tak, že pouze dvě nekonečně malé části *CD*, *DE* celkového diferenciálu *CF* jsou položené v přímé čáře tak, že, připouštím, dvě kolmice v *D* a *E* jsou rovnoběžné, avšak tyto jsou kvůli jejich nekonečné blízkosti spojené. A pak to budou kolmice v *C* a *F*, jejichž průnik (který bezpochyby může být nekonečně blízký) tvoří poloměr evoluty v inflexním bodě: a proto tvrdím, že k nalezení inflexního bodu je zapotřebí vidět, zdali *ddy* rostou, anebo klesají. Jestliže rostou, bude třeba *ddy* položit rovné nekonečnu; jestliže klesají, nule.“ (tamt., 206-207)

Jakkoli málo se na první pohled zdá uspokojivým takovéto vysvětlení (zve k nekonečnému regresu?), stojí základem k následující „významné věci, která dá lépe nahlédnout povaze inflexního bodu (*nature du point de contour*)“ a která také nabízí zajímavé srovnání s § 82:

> „Jestliže počneme odvíjet křivku v inflexním bodě, jehož poloměr oskulačního kruhu (*cercle baiseur*) je nekonečný, opíše se druhá křivka, která má rovněž inflexní bod, avšak poloměr jeho oskulačního kruhu bude nekonečně malý; jestliže nyní odvineme tuto druhou křivku počínaje opět inflexním bodem, opíšeme třetí, která má také svůj inflexní bod, avšak jehož poloměr oskulačního kruhu je nejen nekonečně malý, ale i nekonečně menší než byl u druhé; když odvineme třetí, opíšeme čtvrtou, jejíž poloměr oskulačního kruhu v inflexním bodu je nekonečně menší než ten u třetí atd. […]; odtud je zřejmé, že je pouze jeden druh křivek, u kterých je poloměr oskulačního kruhu v inflexním bodě nekonečně veliký, avšak je nekonečno druhů křivek, kde je tento poloměr vždy nekonečně malý.“ (tamt., 207)

S body nespojitosti tohoto druhu se tedy L'Hospital, při svém obecném pojetí geometrické spojitosti, potýká, dalo by se říct, vyzbrojen nekonečnem; a sice zásadou, že žádná spojitě rostoucí, nebo klesající veličina se nemůže převrátit z kladné v zápornou, aniž by prošla nekonečnem nebo nulou; a sice nulou, jestliže nejprve klesá, a nekonečnem, jestliže nejprve roste (§ 46), a proto při změnách znaménka diferenciálu v těchto bodech klade ve srovnání s ostatními diferenciály téhož druhu $dy = \infty$, případně $ddy = \infty$ (v. 66). Viz také § 88.

Dodejme nakonec, že půl roku na to oznamuje L'Hospital objev nekonečna křivek o nulovém poloměru evoluty v inflexním bodu Leibnizovi těmito slovy: „Také jsem nalezl, že […] (A III, 6, 236)“. Souhrn shora uvedených společných myšlenek pak vychází pod L'Hospitalovým jménem v *Nouvelles remarques sur les développées, sur les points d'inflexion et sur les plus grandes et les plus petites quantitez* (HAS X, 397-399).

91 Posud řešení úlohy odpovídá Bernoulliho *Lectiones de methodo integralium*, XVII (JBO III, 438). Varignon (1725, 53) doplňuje, že k nalezení bodu, kde se osa stýká s evolutou, je třeba hledat bod, v němž je poloměr evoluty rovnoběžný s osou.

92 K pojmu geometrické (algebraické) čáry viz zejména v. 4, 11, 13, 47, 52 a také nanejvýš názornou úvahu § 106.

93 Obdobně Johann Bernoulli, *Lectiones de methodo integralium*, XV (JBO III, 434), vyvozuje korolár stran rektifikovatelnosti evoluty s tím rozdílem, že u Bernoulliho následuje po geometrických úvahách o poloměrech evolut a evolutách obecně (v. 88).

94 Evolutou elipsy je křivka zvaná *tetrakuspid* („čtyřhrot“) mající čtyři body vratu, které pochopitelně odpovídají vrcholům elipsy, kde zakřivení je největší, potažmo nejmenší. Proto se L'Hospital

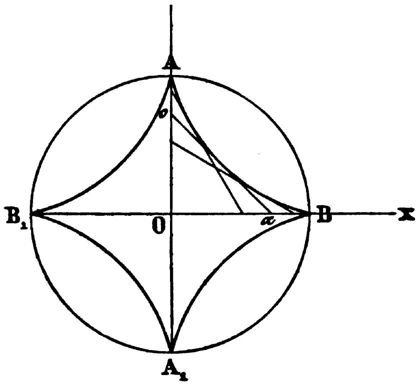
vyjadřuje nepřesně, když tvrdí, že evoluta *končí* (*se termine*) v bodě D, neboť pak by se zajisté nejednalo o bod vratu, jak vtipně poznamenává Juškevič (Ю 1935, 417). Malou osou míní L'Hospital $\sqrt{ab}$, poněvadž velká osa je a a jejím parametrem (v. 22) je b. Čili platí:

$$\sqrt{ab} . a :: a . \text{parametru malé osy;}$$

a odtud pak L'Hospitalův výsledek (De la Caille 1768, 353), který bychom dnes na základě stejné úměry zapsali jako $\frac{a^2}{b}$, kde a je hlavní poloosou a b vedlejší.

První pojednání evolut elipsy a hyperboly lze nalézt roku 1673, přirozeně u objevitele evolut Christiaana Huygense, *De horologio oscillatorio*, II, X (HOC XIII, 220-224). Příklad poloměru evoluty u hyperboly řeší též Johann Bernoulli, *Lectiones de methodo integralium*, XVII (JBO III, 438).

Konečně tetrakuspid představuje zvláštní, prodloužený případ význačné, hypocykloidální křivky o rovnici $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ pojmenované ze zřejmých důvodů *astroid*. Nejjednodušeji jej lze zadat jako křivku obalující úsečky, které protínají strany *OA* a *OB* (Obr LIV) svírající pravý úhel tak, že



Obr LIV

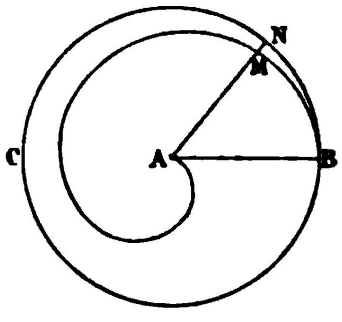
délka úseku *ao* mezi těmito stranami zůstává konstantní.

K dalším způsobům utvoření astroidu, jeho matematickým vlastnostem a dějinám viz Teixeira I, 328-333. Stran evolut elipsy a hyperboly viz tamt., 339-344.

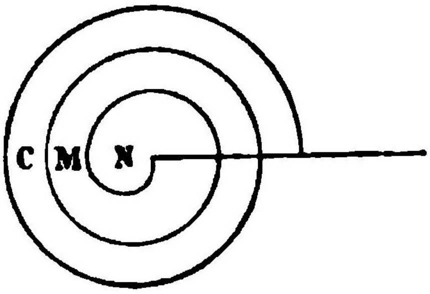
95 Posud obdobné řešení v Bernoulliho *Lectiones de methodo integralium*, XVII (JBO III, 438).

96 Evolutami i dalšími geometrickými transformacemi logaritmické spirály se, jak už bylo řečeno výše (v. 64), první zabýval Jakob Bernoulli. Johann Bernoulli, *Lectiones de methodo integralium*, XXV (JBO III, 459-460) pojednává evoluty logaritmické spirály na konci kapitoly o cykloidách, a to samozřejmě z důvodu shodnosti evoluty a evolventy u obou křivek.

97 Spirály vyšších řádů $\rho^m = k\omega$, kde m je nějaké kladné číslo, vznikají coby bezprostřední zobecnění Archimédovy spirály (v. 50). Přibližuje se k nim Fermat v dopise Mersennovi z roku 1636 (FO II, 12-14), kde zmiňuje spirálu, kterou údajně Menelaos u Pappa nazývá *podivuhodnou* (*admirable*); dnes je známa pod názvem *Fermatova spirála* (v. 86). Spirálu zadává vlastností takovou, že „když povedeme libovolnou přímou čáru jako *AMN* (Obr LV), pak obvod kruhu *CNB* se bude mít k části



Obr LV



Obr LVI

NCB obvodu jako čtverec *AB* ku čtverci *AM“* (tamt., 13). Nuže plocha pod spirálou ohraničená úsečkou AB je polovinou obsahu celého kruhu; a tudíž, „což je ta podivuhodná vlastnost, plocha opsaná prvním obratem /zde *N*, Obr LVI/ je polovinou plochy *M* vzešlé z druhého obratu; plocha C z třetího obratu je rovna ploše *M* a všechny následující plochy vzešlé z libovolného dalšího obratu jsou rovny ploše *M*, a tím pádem i mezi sebou“ (tamt., 14). Odtud pak Fermat odhaluje rektifikace a kvadratury i v případech jiných spirál vyšších řádů (Loria 1901, 436).

Díky Mersennovi, který Fermatovy výsledky zařadil do své *Harmonie universelle* (1637) a dalších prací, se během příštích let začala novými spirálami zabývat většina předních matematiků (Torricelli, Huygens, Wallis, Sluse, Bernoulli); v dějinném pohybu, jenž během pár desítek let „přirozenost“ různých spirál podřadil obecné přirozenosti formule v nekonečnu ve smyslu v. 41.

Ke spirálám vyšších řádu více viz Loria (1901, 434-441). Ohledně Fermatovy spirály je pro úplnost třeba podotknout, že zahrnuje ještě druhé, zrcadlově obrácené rameno a oproti zdání Obr LVI se plochy *M*, *C* atd., pochopitelně, postupně zužují, jinak by se nemohly navzájem rovnat.

98 Příklad v Bernoulliho *Lectiones de methodo integralium*, XVII (JBO III, 438-439).

99 Sám Leibniz nedlouho před smrtí, tupen pomluvami Newtonových (*aemulus*) přívrženců (*quidam novi homines*), posledním pokusem zjednat si spravedlnost vysvětluje v *Historia et origo calculi differentialis* (vydáno až roku 1846 C. I. Gerhardtem), že právě toto – pro nekonečno prvků zdaleka ne „zjevné“ – tvrzení je prvním základním kamenem celé stavby jeho diferenciálního počtu. Vskutku, jedná se o hlavní operativní vlastnost diferenciální řady, tj. řady diferencí mezi členy jiné řady (dané nějakým pravidlem), zatímco před ním stojí už jen onen „velký axiom“, že *celek je větší své části* (Leibniz 1846, 4). Tento axiom Leibniz drží – pro některé následovníky samozřejmě „proti zdravému rozumu“ (Russell 1993, 52) – i v extrapolaci diferenciálních pravidel pro ne-konečné řady prvků. Právě z tohoto napětí plynou logické těžkosti nekonečně malého a přirozeně též Leibnizovy pokusy o jeho založení; odtud coby stopa budoucnosti povstává jednak Leibnizovo jemné pojetí neaktualizovaného, matematického nekonečna; jednak, ze zákona kontinuity, pojem nekonečně malého coby užitečné fikce na cestě dalšímu, limitnímu rozvoji infinitesimálního počtu. Srv. například také MS III, 963.

100 *La quadrature absolue et independante de celle du cercle.*

101 *Demi-roulette*. L'Hospital, podobně jako Bernoulli a další matematici, epicykloidu (epitrochoidu) stejně tak, jako hypocykloidu, nazýval obecně jako cykloidu (*cyclois*) či *roulette*. Snad proto, jak říká Johann Bernoulli (JBO III, 450), že „je okamžitě zřejmé, že při nekonečném kruhu *ABC* se obvod *ABC* stává přímou čarou, pročež se křivka *ADC* promění v běžnou, huygensovskou cykloidu; a vše, co se dokáže o všech cykloidách obecně, pak je stejně tak třeba chápat i o této běžné (*vulgaris*) cykloidě“ (v. 104, Obr LVII).

Jméno *epicykloida* (*epi*, řecky „nad“) pochází od Philippa de la Hire, který je použil ve své práci *Traité des épicycloïdes et leur usage en mécanique* z roku 1694. Myšlenka epicykloidy vychází z rozšíření pojmu Nikomédovy konchoidy (v. 51) vedoucí při nahrazení přímé čáry kruhem k Pascalovu šneku (*limaçon de Pascal*). Zvláštním případem Pascalova šneku – což objevil de la Hire roku 1708 – je pak kardioid, nejjednodušší epicykloida, kde se poloměr pevného kruhu a kruhu, který se po něm bez prokluzování kotálí, navzájem rovnají.

Idea epicykloidy jde ovšem v čase mnohem hlouběji; nejpozději u Hipparcha byla využívána k vysvětlování astronomických jevů oběhů planet ve známých *epicyklech* (Loria 1901, 479). První pojednání této křivky nacházíme u Albrechta Dürera *Underweysung der Messung mit dem Zyrkel und rychtsheyd* (1525), který také za pomoci zvláštních přístrojů dokázal sestrojit její tvar. Na první vskutku důkladné a systematické pojednání epicykloid bylo nicméně nutno počkat právě až k De la Hireovi. Ten sice objev epicykloid připisuje Dearguesovi, avšak ani v nejmenším se, na rozdíl od Huygense (HOC XVIII, 597-623), nezmiňuje o dánském astronomu Ole Römerovi (1644-1710), se kterým se ovšem v Paříži osobně setkal Leibniz a později, roku 1692 v *Generalia de natura linearum* (MS V, 283), podává svědectví o jeho pracích na epicykloidách. Kromě toho Römer již roku 1675 představuje pařížské Akademii věd pozoruhodný výsledek svých geometricko-mechanických výzkumů, ve kterém určil, že nejvhodnějším tvarem ozubených kol tak, aby do sebe dokonale, bez skoků a tření, zapadala, je právě tvar epicykloid. Budiž řečeno mimochodem, že de la Hire si tento výsledek přivlastnil, čemuž se Leibniz nemůže vynadivit (Leibniz 1899, 346-347), když už jej před ním přinesli nejen Römer, ale i Huygens. Vrcholnou studii epicykloid konečně přináší Newton, *Principia*, I, 48-49, kde určuje, že na rozdíl od cykloid epicykloidy jsou křivky geometrické a rektifikovatelné, pokud poměr mezi poloměry pevného a pohyblivého kruhu je racionální. Ke stejným výsledků dochází nicméně, a podle svých slov patrně nezávisle na Newtonovi, Johann Bernoulli v přednáškách integrálního počtu (1691) pro markýze de l'Hospitala (v. 104), kde v *Lectiones*, XXI-XXVIII (JBO III, 448-472) podrobně probírá kvadratury, rektifikace, evoluty, kaustiky a další vlastnosti cykloidálních křivek.

Samotný L'Hospital věnoval epicykloidám článek *D. Marchionis Hospitalii Theorema Novum de Quadrandis Cycloidibus basium circularium* (AE 1695, 372-374).

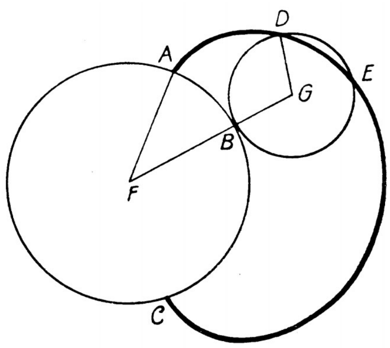
Více k epicykloidám viz Loria (1901, 479-504); důkazy vztahů mezi Pascalovým šnekem a kardioidem a další viz Teixeira (I, 199-218). Vztah nekonečnosti mezi epicykloidou a „huygensovskou" cykloidou půvabným způsobem rozebírá Montucla (II, 392).

102 Obdobně Johann Bernoulli, *Lectiones de methodo integralium*, XXII (JBO III, 453-454), který následně úlohu řeší metodou integrálního (*componendo*) počtu.

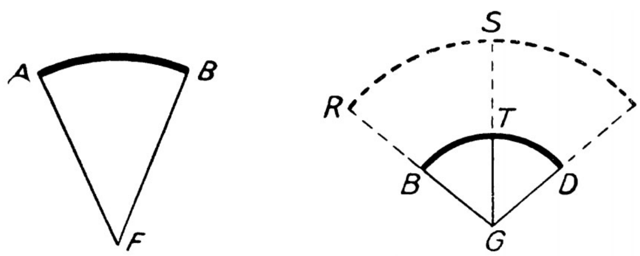
103 Johann Bernoulli, *Lectiones de methodo integralium*, XXII (JBO III, 454). Na konci lekce coby poznámka zaznívají počáteční slova § 104 stran znamének u velikostí průměru kruhů.

104 Po obecných úvahách o povaze a utvoření běžné (*vulgaris*), „huygensovské" cykloidy Lekce XXI, *Lectiones de methodo integralium*, pokračuje Johann Bernoulli hluboce pronikavým výkladem epicykloid (v. 101), který L'Hospital využívá v § 106:

> „Ze způsobu utvoření křivky je rovněž patrné, že oblouk *AB* /Obr LVII/ ohraničený počátečním bodem *A* křivky a libovolně položeným bodem dotyku *B* kruhu *BDE* je roven



Obr LVII



Obr LVIII

> oblouku *BD* mezi tím samým bodem dotyku a shora určeným bodem *D*: a zajisté odvalováním kruhu *BDE* bude oblouk *AD* měřit oblouk *AB*. Odtud plyne, že pokud je dán počáteční bod *A* a oblouk *AB*, je možné geometricky nalézt bod *D*, tj. je-li dán počáteční bod *A* a oblouk *AB* a je možno geometricky vytyčit oblouk *BD* rovný oblouku *AB*, pak epicykloida (*Cyclois*) *ADC* bude geometrickou křivkou. Jestliže však nebude lze geometricky nalézt oblouk *BD* tak, aby byl roven oblouku *AD*, bude epicykloida křivkou mechanickou.

Dokáži nicméně, že u některých epicykloid je možné oblouk *BD* rovný oblouku *AD* vytyčit, zatímco u některých tomu tak není; tím se zároveň ukáže, že některé epicykloidy jsou křivky geometrické, kdežto jiné mechanické; což zatím, pokud vím, nikdo nezahlédl. Tvrdím tedy, že pokud kruhy *ABC* a *BDE* jsou takové, že poloměr *FB* se má k poloměru *GB* tak, jako číslo k číslu, tj. pokud stojí v poměru vyjádřitelném čísly, epicykloida *ADC* je geometrická; jestliže naopak má poloměr *FB* ku poloměru *GB* poměr čísly nevyjádřitelný, epicykloida *ADC* bude mechanickou. První případ se dokáže takto: jestliže danému oblouku *AB* /Obr LVIII/ vezmeme jemu rovný *BD* a *GB* prodloužíme do *R* tak, že *GR* bude rovno *FA*; a nechť se úhel *RGS* rovná úhlu *AFB*; pak bude dán oblouk *BT*. Položme dále, aby se *GB* ku *FA* mělo tak, jako oblouk *BT* ku oblouku *BD*; pak se oblouk *BD* bude rovnat oblouku *AB*. Poněvadž

$$BD:BT=AF:BG=RG:BG=RS:BT=AB:BT$$

a tudíž

$$AB=BD.$$

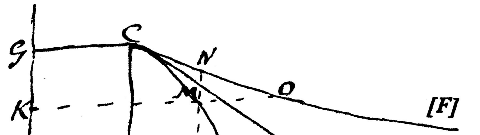
Zbývá jen dokázat, že je možno nalézt geometricky oblouk *BD*, jenž by se měl k oblouku *BT* tak, jako *AF* ku *BG*, tj. jako číslo k číslu.“ (JBO III, 451-452)

Což již není nijak zvlášť těžké; jestliže je *AF* násobkem *BG*, věc je vyřešena. Stojí-li pak v nějakém jiném poměru, jako například 13:5 (!), pak … zbytek úsudku včetně poměru samého plně odpovídá začátku § 106. Důkaz druhého případu, Lekce XXII (tamt., 451-452), posléze L'Hospital sleduje již téměř slovo od slova.

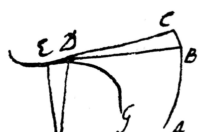
105 Na přináležitost nekonečna různých evolvent k jedné jediné evolutě poukazuje v obecné souvislosti s družinami čar Leibniz v *De linea ex lineis* (MS V, 266-269) z *Acta eruditorum* roku 1692 (v. 8, 47), odkud povstávají důležité pojmy diferencovatelnosti a parametru družiny křivek (Parmentier 1995, 210-221). Podrobně, včetně příkladu nalezení evolventy pro $ax^2=y^3$, se jí zabývá rovněž Johann Bernoulli, *Lectiones de methodo integralium*, XVIII-XIX (JBO III, 441-444). Zde pokládá rozlišení povahy evolvent dle středu oskulačního kruhu (tamt., 442) i podmínku geometričnosti evolventy, nakolik evoluta je geometrická a (samozřejmě v algebraickém smyslu) rektifikovatelná (tamt., 441), které v poněkud rozvitější podobě nacházíme v § 108.

106 V návaznosti na otázku velikosti poloměru oskulačního kruhu v inflexním bodě (v. 90) přichází L'Hospital hned v dalším dopise, květen 1694, Nr. 23 (JBB I, 214-218) s novým objevem-otázkou, který Johann Bernoulli nazve bodem vratu druhého druhu (*point de rebroussement de la seconde sorte*). Coby protipříklad Bernoulliho předchozí odpovědi (v inflexním bodě musí být poloměr evoluty rovný nule) uvažuje L'Hospital křivky, kdy je tento poloměr jednak nekonečný (například $y^2=x^5$), jednak dokonce „konečný či určitý (*déterminé*)“, což právě nastává v případě evoluty křivky *BAC* (Obr. 91) § 109, kde část *DE* evoluty se opíše odvíjením *AD*, *EF* odvíjením *AB* a *DG* odvíjením *DC* a kde vzniká Bernoulliho „dvojrohá čára“ (*ligne bicorne*); a proto, uzavírá L'Hospital, „pro nalezení tohoto druhu bodů *C* není úvaha evoluty nic platná“ (tamt., 215). Své důvody pak vysvětluje následujícím výkladem, v kterém se, jak poznamenává Otto Spiess (tamt., 216), zračí základní zahlédnutí ekvivalence Descartovy metody s pravidly diferenciálního počtu rozvinuté v oddílu 10 *Analýzy*, zejména v § 192:

„Není snad pravda, že když abscisa $AP(x)$ /Obr LIX/ zůstává neměnnou, ordináta y má dvě hodnoty *PM* a *PN*, které se stanou sobě rovnými, jakmile bod *P* připadne do hledaného



Obr LIX



Obr LX

bodu *E*? Jestliže tedy spolu s pány Descartem a Huddem budeme v rovnici vyjadřující povahu této křivky x jako známou a y jako neznámou a vynásobíme ji jako obvykle nějakou aritmetickou posloupností; pak utvoříme novou rovnici a jejím prostřednictvím pak budeme moci určit bod *C*. Avšak tomu je ekvivalentní vzít diferenciální rovnici a odstranit z ní všechny členy násobené *dx*. Odtud je zřejmé, že *dx* musí být ve srovnání s *dy* nulovým. Stejně tak dokážeme, pokud vezmeme za abscisu *AK* a za ordinátu *KM* nebo *KO*, že *dy* musí být nulovým v srovnání s *dx*. Avšak *dy* se má k *dx*, jako *CE* ku *CT*. Nutně tedy ve stejném bodě *C* zlomek dy/dx bude nulový, nekonečný a určený. Jak tohle dát dohromady? Právě od vás očekávám vysvětlení." (tamt., 215-216)

Johann Bernoulli ve své odpovědi, Nr. 24, 21. května 1694 (tamt, 217-223), připouští, že prozatím uvažoval pouze takové „dvojrohé" čáry, u nichž se vypouklost převrací a kde plně platí, že poloměr oskulačního kruhu musí být buďto nekonečný či nulový; a nikoli „*body vratu tohoto druhého druhu*". Avšak úvaha evoluty může sloužit i k nalezení těchto bodů vratu, neboť (Obr LX):

> „Mějme libovolnou křivku *ABC*, jejíž evolutou je *GDE*; veďme dále dva nekonečně blízké poloměry *CE*, *BD*; a v bodech *E* a *D* dvě kolmice *EF*, *DF* stýkající se v *F*. Odtud, jak víte, povstávají dva podobné trojúhelníky *BDC* a *EFD*; nyní tedy za předpokladu, že křivka *ABC* bude zahrnovat bod vratu druhého druhu (*soit rebroussante de la seconde sorte*) a do inflexního bodu povedeme dva poloměry evoluty; pak je zjevné, že evoluta stále bude mít inflexní bod v průniku těchto dvou poloměrů. Poněvadž však v inflexním bodě je poloměr oskulačního kruhu vždy nekonečný nebo nekonečně malý, plyne odtud, že poměr (*raison*) diferenciálu evoluty *DE* a poloměru *DF* oskulačního kruhu je vzhledem k ostatním poměrům buďto nekonečně malý, nebo nekonečně velký; a to za předpokladu, že diferenciály evoluty budou navzájem rovné, nebo aspoň budou mezi sebou v nějakém konečném poměru; neboť každou křivku si mohu představit rozdělenou, jakkoli se mi zlíbí. Za těchto podmínek tedy tvrdím, že *CB* ku *BD* rovněž musí ve srovnání s ostatními poměry mít nekonečně malý, nebo nekonečně velký poměr. A proto k nalezení bodu vratu druhého druhu vezmeme diferenciál křivky a vydělíme jej poloměrem jejího oskulačního kruhu; a to, co vyjde, musíme položit rovno nule nebo nekonečnu." (tamt., 218)

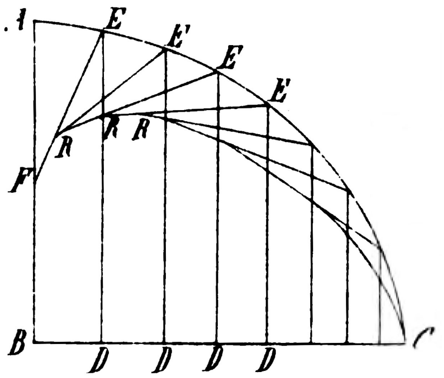
V tom, že evoluta bude stále mít inflexní bod v průniku poloměrů evoluty, se Johann Bernoulli mýlí, neboť bod vratu druhého druhu se může odvinout v další podobný bod vratu, jak mu ani ne za tři týdny L'Hospital namítne hned na úvod své odpovědi (tamt., 223). Podle toho také celý Bernoulliho postup pozmění a dospívá k formuli, již nacházíme v § 109. Stojí za zmínku, že v pokračování předchozího výkladu se Johann Bernoulli geometrickým dokazováním dotýká podstatné vlastnosti hrotu (v. 90), již nazývá snad napůl žertem *grand mystère*, že totiž v „bodu vratu může být *dy* vzhledem k *dx* nejen nekonečným, konečným a nulovým, ale též v jakémkoli myslitelném poměru" (tamt., 218); což zřejmě znamená, že v hrotu je hodnota dy/dx neurčitá, čili může nabýt libovolné hodnoty. Diskuze o přirozenosti bodů vratu pokračuje pak dalšími dopisy až do konce léta 1694. Souhrn úvah těchto dvou dopisů – nekonečno druhů čar o nulovém poloměru evoluty v inflexním bodě, *ddy* v inflexním bodě možné $=\infty$, *dy* v maximu či minimu možné $=\infty$ – pak ještě téhož roku vychází pod L'Hospitalovým jménem v *Mémoires de Mathematiques* coby *Nouvelles remarques sur les dévelloppées, sur les points d'infléxion, et sur les plus grandes et les plus petits quantitez* (HAS X, 397-399).

Bod vratu druhého druhu bývá ve francouzštině nazýván *bec d'aigle* (orlí zobák), v němčině *Schnabelspitze* („zobcovitý hrot"); český název se, *à ma connaissance*, neklade.

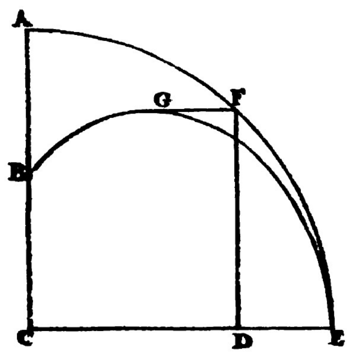
107 Kaustika, z řeckého, a později latinského, *kaustikos* („hořící", „pálivý"; srv. německé *Brennlinie*), označuje obalovou křivku, čili společnou tečnu paprsků, jež vycházejí z nějakého světelného bodu v konečné, nebo nekonečné vzdálenosti, odražených (katakaustika) od profilu zrcadla nějakého daného tvaru; anebo lomených (diakaustika) optickým předmětem uvažovaným rovněž jako křivka nějakého určeného tvaru. Takto D'Alembert, *Encyklopedie* II, 792, popisuje kaustiky jako „sled průniků (*points de concours*) nekonečně blízkých odražených nebo lomených paprsků, které utvoří mnohoúhelník o nekonečnu stran neboli křivku zvanou kaustika; tato křivka je tečnou (*est touchée*) těmto odraženým nebo lomeným paprskům, poněvadž tyto paprsky nejsou ničím víc než prodloužením malých stran kaustiky" (v. 35). Proto je tedy kaustika pojmenována od slovesa *hořet*, neboť v sobě soustřeďuje průniky nekonečna světelných paprsků. Zvláštním případem kaustiky odrazem, například u parabolického zrcadla, je pak jediný bod, čili ohnisko.

Pojem kaustiky objevil Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (v. 14), který roku 1681 píše Leibnizovi o svých nových zrcadlech a táže se, zdali se Huygens či jiní matematikové doposud nezabývali následující otázkou:

> „Budiž kruhová křivka *AEC* /Obr LXI/; uvažujme rovnoběžné sluneční paprsky *DE*, jež se odrážejí od *EF* a je třeba určit, jaká je křivka *FRC* vznikající průniky odražených paprsků? Objevil jsem, že tato křivka je geometrická, jak to nazývá Descartes; a dokonce, že pokud je



Obr LXI



Obr LXII

> dána libovolná geometrická křivka *AEC*, pak lze též nalézt geometrickou křivku *FRC*.“ (MS IV, 484)

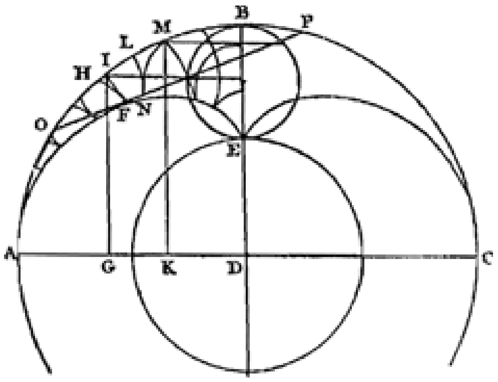
Leibniz odpovídá, že dané otázce (což je událost!) „správně nerozumí“ (*verstehe ich nicht recht*). Domnívá se, že místo průniků odražených paprsků netvoří křivku, nýbrž plochu, a sice celou rovinu (*totum planum*), neboť „libovolný odražený paprsek protíná libovolný další“ (tamt., 485). O rok později předkládá Tschirnhaus svůj objev Akademii věd a následně vydává článek *Inventa nova* (AE 1682, 364-365), jehož obsah shrnuje v dalším dopise Leibnizovi. Ohledně kaustik zde vysvětluje, že dosud se o místu odražených slunečních paprsků uvažovalo jen jako o ohniskovém (*ubi comburunt*) bodu; zatímco takto může vznikat nejen pouhý bod, ale též celá křivka (*integra aliqua curva*); neboť vzdálenosti *AE*, *EE* atd. (Obr LXI) se uvažují za „neomezeně malé“ (*indefinite parvae*), a tudíž mnohoúhelník jejich průniků *FRRR* atd. bude představovat křivku. Významný výsledek rektifikovatelnosti kaustiky geometrické křivky podává Tschirnhaus bez důkazu – patrně na základě zobecněné úvahy nad mnohoúhelníkem o nekonečnu stran, ale rozhodně bez opory v počtu nekonečna – v následujícím teorému:

> „Jestliže sluneční paprsky *DF* /Obr LXII/ dopadají na libovolnou křivku *AFE*, ať už geometrickou, jak je nazývá Descartes, nebo mechanickou jako kvadratrix, cykloida atd., nebo dokonce načrtnutou volně rukou (*libera manu formata*); a tyto paprsky se odrážejí tak, že jejich průniky utvářejí křivku *BGE*; pak dopadající paprsek *DF* a odražený *GF* budou vždy rovné úseku *GE* vytyčenému tečným bodem *G* a bodem *E* dotyku s křivkou; a tudíž *CA* a *CB*, kde dopadající a odražený paprsek spadají v jedno, budou rovny celkové křivce *BGE* tak, jako například u kruhu bude ona křivka *BGE* rovna poloměru *CA* a polovičnímu poloměru *AB*.“ (MS IV, 489; srv. AE 1682, 365)

Je už spíše jen zajímavostí, že Akademie věd, jak ve zmíněném hesle líčí D'Alembert, ustavila komisi za účelem prošetření nového druhu křivek, která zejména ústy De la Hirea (jenž se sám později kaustikám usilovně věnoval) zpochybnila způsob jejich utváření; načež jí Tschirnhaus odmítl předat svoji metodu a místo toho své pojednání poslal bez důkazů do *Acta eruditorum*.

Přibližně ve stejné době, roku 1678, jako Tschirnhaus – ve spojitosti se svými evolutami a na základě vlastní vlnové teorie světla – dosahuje pojmu kaustiky (lomem i odrazem) též Christiaan Huygens. V *Traité de la lumière*, vydané ovšem až roku 1690, Huygens vedle dalších geniálních objevů určuje tvar i podstatné vlastnosti kaustik (HOC XIX, 534-537), a to jednak na způsob místa průniků odražených či lomených paprsků tak, jako tomu bylo u Tschirnhause; jednak po způsobu vlnoploch, kde kaustika v každém bodě představuje hrot dvou svých evolut (čela vlny) utvořených počínaje daným bodem odvíjením obou protilehlých stran kaustiky. Na příkladu katakaustiky kulového zrcadla uzavírá Christiaan Huygens své pojednání o světle těmito slovy (Obr LXIII):

„A poněvadž tyto rovnoběžné paprsky nejsou ničím jiným než kolmicemi vln dopadajícími do vydutého povrchu a tyto vlny jsou rovnoběžné s *AD*; zjistíme, že pokud se střetávají



Obr LXIII

s povrchem *AB*, utvářejí svými odrazy přeložené (*repliées*) vlny, které se skládají ze dvou křivek vznikajících od dvou protilehlých odvinutí (*évolutions opposées*) částí křivky *AFE*. Takto když vezmeme *AD* jako dopadající vlnu, pak jakmile se část *AG* setká s povrchem *AI*, tj. místo *G* přejde do *I*, pak to budou křivky *HF*, *FI* vzešlé z odvíjení křivek *FA*, *FE* u obou s počátkem v bodě *F*, jež dohromady budou tvořit šíření (*propagation*) části *AG*; a chvíli po té, když část *AK* dorazí k povrchu *AM*, ježto je místem *K* v *M*, tehdy křivky *LN*, *NM* budou společně tvořit šíření této části. A tímto způsobem bude přeložená vlna stále postupovat, dokud špička (*la pointe*) *N* nedospěje do ohniska *E*. Křivku *AFE* lze spatřit v dýmu, nebo poletujícím prachu, když představíme vyduté zrcadlo proti slunci; a je třeba si uvědomit, že plně odpovídá křivce, jež se opíše bodem *E* na obvodu kruhu *EB*, když jej necháme odvalovat na druhém kruhu o polovičním poloměru *ED* a středu *D*. Takto tedy představuje jistý druh cykloidy, jejíž body je ovšem možno najít geometricky.“ (tamt., 537)

Je tedy zřejmé, že zkoumání evolut křivek s body vratu neznačí na stránkách *Analýzy nekonečně malých* jen čistě geometrickou snahu po odhalení přirozenosti inflexního bodu atd.; nýbrž je vedeno stejně tak nejhlubšími otázkami soudobé přírodovědy. Či spíše oběma stejným právem, neboť obě otázky jsou v očích geometrů 17. století přirozeně hluboce propojeny. Přestože Huygens své výsledky představil Akademii o tři roky dříve než Tschirnhaus, zřejmě proto, že křivky nijak nepojmenoval a nevyzdvihl jejich význačnost, jeho objev zůstal bez povšimnutí a všechnu slávu za kaustiky sklidil Tschirnhaus. Po něm se křivek okamžitě chopili další čelní matematikové jako Philippe de la Hire či Jakob Bernoulli. Četné práce zasvětil kaustikám Johann Bernoulli (právě od něj pocházejí termíny *diakaustika* a *katakaustika*), což bude ostatně patrné ze i stránek *Analýzy nekonečně malých*. Samotný markýz de l'Hospital napsal ve věci kaustik článek do *Memoires de Mathematique*, *Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction* ze srpna roku 1693 (p. 32) navazuje na Jakoba Bernoulliho *Curvae diacausticae* (v. 64, 89) a za pomoci diferenciálního počtu podává elegantní, obecné analýzy a důkazy, které Jakob Bernoulli vynechal a které by jakoukoli jinou cestou vedly k „nanejvýš obtížným a nudným výpočtům (*calculs très-penibles et très-ennuyeux*)“ (HAS X, 380). Jde o určení 1° průniku dvou nekonečně blízkých od libovolné křivky lomených paprsků (§ 133); 2° zdůvodnění původního výsledku, jehož Jakob Bernoulli dosahuje při daném poloměru evoluty, prvým případem a 3° postup nalezení tohoto poloměru (HAS X, 381-382).

Bylo by zbytečné připomínat, že i Leibniz otázce kaustik nakonec (velice záhy, viz níže v. 109) dobře porozuměl a nahlédl okamžitě mimořádný teoretický potenciál tohoto pojmu, jehož nejhlubší kořen sahá v konečném zúčtování až k průlomové myšlence Florimonda de Beaunea (v. 61), vyjádřit povahu křivky společnou vlastností jejích tečen (Chasles 1837, 110). I díky ideji Tschirnhausových „kvaziohnisek“, jež mohou představovat nejen bod, ale též nějakou čáru (v. 59), dojde v Leibnizových rukou, *De linea ex lineis* (v. 8, 105), pojem kaustiky svého nejširšího zobecnění. Totiž v podobě křivky, tvořené na základě *společného zákona* nekonečnem dalších přímých nebo křivých čar coby souřadnic daných nějakým pravidlem; a to včetně možnosti jejího charakteristického zachycení skrze analytický výraz neboli rovnici v širokém slova smyslu. Což je ovšem mimořádný výsledek nejen matematický, ale také (a právě proto) výkon vpravdě metafyzický, neboť *linea ex lineis* v Leibnizových očích představuje hluboký obraz či význačný model, jak by řekl Michel Serres, samotné Božské předzjednané harmonie a s tím spojený předstupeň či vzorek (*échantillon*) univerzální charakteristiky:

> „Soudím pak, vyjádřím-li se po způsobu algebraiků, že podobně jako pan Hudde, který prohlásil, že může podat algebraickou křivku sledující profil jakékoli tváře, mohli bychom my vyjádřit pomocí formule vyšší Charakteristiky určitou esenciální vlastnost Vesmíru a z té pak vyčíst všechny jeho postupné stavy v každém jeho místě a čase [...] Domnívám se ostatně mít dobré důvody věřit, že ony všemožné třídy jsoucen, jejichž shromáždění vytváří svět, jsou v idejích Božích, který zná rozlišeně stupnici jejich esencí, jen jako tolikéordináty jedné jediné křivky.“ (Grene; Ravetz 1962)

Více k analytickým vlastnostem kaustik v Loria (1901, 662-672). O souběhu obalových křivek s Leibnizovými metafyzickými úvahami a vesmírným řádem srv. například Brunschwicg (1912, 226-229); Serres (1990); Makovský (2009).

108 *Les petits côtés.*

109 Lze nalézt též v *Lectiones de methodo integralium*, XXVI (JBO III, 466). Důkaz tvrzení, jejž Tschirnhaus nepodal (v. 107), přináší jako první Leibniz, a to hned příštím dopisem Tschirnhausovi (MS IV, 493-494).

110 Analytický postup řešení v *Lectiones de methodo integralium*, XXIX (JBO III, 473-474). Varignon, *Éclaircissement*, 60, upozorňuje, že v § 77 a dalších bylo *ME* označeno jako *z*, kdežto zde je jako *a*, neboť zde představuje konstantu. Obecně tedy v případě, že se ordináty *y* sbíhají v *B* (Obr. 97)

$$ME(a)=\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2+dy^2-y\,ddy};$$

jestliže se pak tento výraz *a* dosadí do $MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right)$, pak budeme mít opět obecně

$$MF=\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2+dy^2-2\,y\,ddy},$$

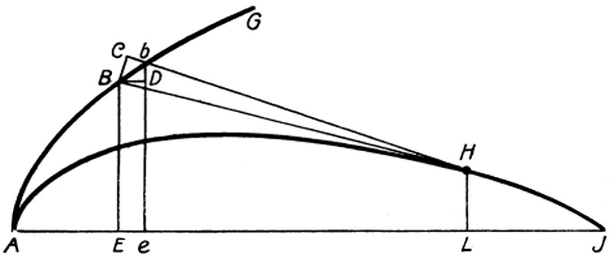
což je zajisté hodnota, ke které *mutatis mutandis* svým dlouhým postupem dochází i Johann Bernoulli. Jestliže pak bod *B* bude nekonečně vzdálený, odražený paprsek $MF\left(\frac{a}{2}\right)$ vychází jako

$$MF=\frac{dx^2+dy^2}{-2\,ddy}.$$

111 *Axe traversant* (nebo jen *traversant*), hlavní osa (*latus traversant*) elipsy, jejíž kolmou strunou v ohnisku je *côté droit*, čili *latus rectum* (v. 22).

112 Jestliže sluneční paprsky dopadají na parabolu rovnoběžně s její osou, pak je jasné, že se všechny odrážejí do jediného bodu, tj. ohniska; a že právě to představuje její kaustiku odrazem. Proto se Johann Bernoulli ptá, jakou podobu bude mít tato kaustika odrazem, pokud budou paprsky na osu paraboly kolmé. Příklad oproti L'Hospitalovi řeší velice rychle; a tudíž na srovnání obou postupů je možno lehce nastínit jedinečný pedagogicko-syntetický přínos *Analýzy nekonečně malých*.

Mějme parabolu *ABG* (Obr LXIV) s vrcholem v *A*, osou *AI*, kde parametr bude *a*; *AE* jako *x*, *BE* neboli *y* jako $\sqrt{ax}$. Budiž dále *EB*, *ec* dopadající paprsky a jejich odražené *BH*, *bH*; a je třeba určit kaustiku *AH*, tj. najít délku *BH*.



Obr LXIV

Poněvadž $y=\sqrt{ax}$, budeme mít

$$dy=\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}},\ dy^2=\frac{a\,dx^2}{4x}\ \text{a}\ dy^2=\frac{-a\,dx^2}{4x\sqrt{ax}};$$

odtud pak

$$\frac{-dx^2+dy^2}{2ddy}=\frac{\overline{a+4x}\sqrt{ax}}{2a}=BH,$$

což, jak praví Johann Bernoulli (JBO III, 471), „lze velice snadno sestrojit tím, že řekneme: jak se mají dvojnásobný parametr k součtu parametru a čtyřnásobku abscisy *AE*, tak se má ordináta *BE* k hledané *BH*; pročež křivka *AH* je rovna

$$\frac{\overline{3a+4x}\sqrt{ax}}{2a}.\text{“}$$

Zbylé úvahy pak Johann Bernoulli věnuje nalezení plochy *HBb*, integraci *AHB* a konečně kvadratuře plochy *AHL* (tamt., 471-472).

113 Kaustiky odrazem rovnoběžných paprsků od kruhu pojednává Johann Bernoulli v Lekci XXVII; jejich cykloidální povahu pak v XXVIII (JBO III, 467-472). Vychází zde z Tschirnhausovy práce *Methodus curvas determinandi, quae formantur a radiis reflexis, quorum incidentes ut paralleli considerantur* (AE 1690, 68-73), kde Tschirnhaus dokazuje synteticky, že *MF* je poloviční *PM* (Obr. 102), avšak mýlí se v tom, že by kaustika dělila bodem *F* na půl úseky rovnoběžek *MP* mezi kruhy o průměrech *AC* a *AD*; což Johann Bernoulli ukazuje analyticky položením rovnice kaustiky a dovozením případů nesouměřitelnosti jejích řadících čar (JBO III, 468).

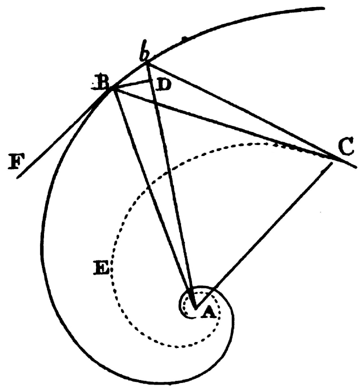
114 Touto úlohou, Lekce XXX (JBO III, 475-476), již Johann Bernoulli překonává co do rozsahu i obecnosti to, co k pojmu kaustik přinesl Tschirnhaus. K nalezení kaustiky zde podává analytické řešení stejně tak, jako řešení syntetické „*ad modum Tschirnausii*“, které přebírá L'Hospital.

115 Johann Bernoulli, *Lectiones de methodo integralium*, XXXII (JBO III, 479-480). Na výkladu úlohy této i příštích se opět jasně ukazuje vynikající, eukleidovská jednota *Analýzy nekonečně malých*, kde L'Hospital buduje řešení na předchozích tvrzeních v několika krocích, zatímco Johann Bernoulli je staví od základů.

116 Johann Bernoulli, *Lectiones de methodo integralium*, XXIX (JBO III, 472-473). Důsledek obsažený v následujícím § 124 klade Bernoulli při zachování Obr. 105, kde *C* bude průnikem křivky *AFK* s *BD*, následovně: „Cykloidální plocha *ABCFA* je šestinásobkem plochy kaustiky *AFKMA*; ona je totiž trojnásobkem půlkruhu *ABN*, tato pak jeho polovinou (*subduplum*)“ (tamt., 473).

117 Kaustiku k logaritmické spirále nalezl Jakob Bernoulli roku 1692 (v. 64). Johann Bernoulli podává analytické řešení a důkaz této krásné vlastnosti logaritmické spirály v *Lectio* XXII (Obr LXV):

> „Mějme logaritmickou spirálu *bBA* o středu *A*, který je zároveň světelným bodem dopadajících paprsků *AB*, *Ab*, zatímco jejich odražené paprsky svými průniky *C* utvářejí



Obr LXV

křivku CEA. Tvrdím, že tato křivka CEA je také logaritmickou sprиálou, a sice tou samou. Budiž $bD:DB=a:b$ (neboť úhel DbB je vždy konstantní); položme tedy $AB=y$, pak $bD=dy$ a tudíž

$$BD=\frac{b\,dy}{a}=dx.$$

Ježto pak dx bereme za konstantní, bude $\frac{bdy}{a}$ rovněž konstantní, a tím pádem $ddy=0$. Takto

$$\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2+dy^2-y\,ddy}=BC=\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2+dy^2}=y=AB,$$

a tudíž

$$AB=BC.$$

Veďme nyní čáru AC; pak úhel BAC bude = úhlu BCA a poněvadž úhel $ABF=CBb$; bude úhel

$$ABF=BAC=BCA=\text{konstantě.}$$

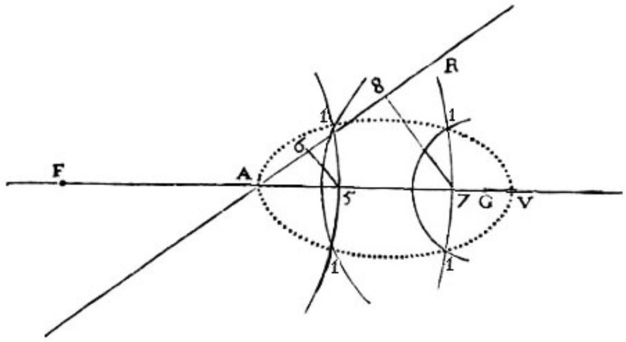
A tím pádem je křivka CEA logaritmickou spirálou, a sice tou samou jako křivka bBA, ježto úhly ABF a ACB jsou si rovny a CB se křivky dotýká“ (JBO III, 481)

118 Kaustika pak bude představovat ohnisko kuželosečky, jak už bylo řečeno výše (v. 107, 112).

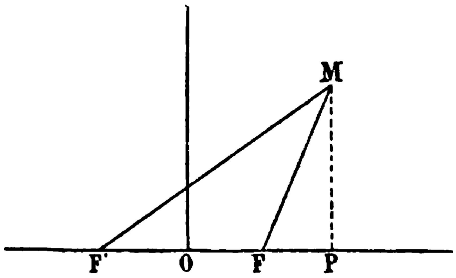
119 Na konci zevrubného výkladu kaustik lomem dochází k výsledku rovněž Johann Bernoulli v Lekci LVI (JBO III, 548-549) uzavíraje těmito slovy (pro případ L'Hospitalova Obr. 112): „a protože AB můžeme uvažovat jako oblouk opsaný od nekonečně vzdáleného středu, budeme paprsky vycházející z tohoto bodu pokládat za rovnoběžné (tamt., 549)“. Pozoruhodná jsou nicméně i Bernoulliho slova z úvodu lekce: „Nijak nám nebude záležet na tom, zdali medium, které vzhledem ke kolmici láme paprsky, bude hustší nebo řidší nežli to, z něhož paprsky přicházejí, nýbrž pouze a jen na onom okřídleném zákonu lomu, který je potvrzen zkušeností a který zde je třeba předpokládat coby hypotézu (*hic tanquam hypothesis supponenda est*). Na něm pak počet k určení kaustik vybudujeme (*cui calculum in Causticis determinandis superstruemus*)“ (tamt., 546). Stejný přístup k „přírodním zákonům“ bylo lze spatřit již při řešení Leibnizovy *linea isochrona* (v. 43) i Bernoulliho brachystochrony, kde harmonie mezi řešeními, stálá přítomnost jediné výsledné křivky, tj. cykloidy, představovaly způsob potvrzení správnosti hypotézy – zákonů volného pádu těles a lomu světla – právem úspornosti přírody při veškerém jejím konání.

120 Obecně řečeno nechť r a r' jsou vzdálenosti nějakého proměnného bodu M (Obr LVII) od dvou pevných F a F'; pak když platí

$$gr+hr'=k,$$



Obr LXVI



Obr LXVII

kde g, h a k jsou nějaké dané konstanty, geometrické místo opsané bodem M bude sestávat z jednoho či dvou oválů, které nazveme *Descartovy ovály* (Teixeira I, 218). Z definice těchto význačných křivek čtvrtého řádu, kterou by bylo možno nazvat bipolární či bifokální (F a F' představují ohniska), je zřejmé, že se jedná vlastně o zobecnění pojmu kuželoseček; jestliže totiž $|r|=|h|$, Descartovy ovály se stávají středovými kuželosečkami.

Počátky křivky leží na stránkách Descartovy *Dioptriky* (AT VI, 185) v hledání – po stopách Keplerových (v. 87) – tvaru dělícího povrchu mezi dvěma prostředími o různých hustotách tak, aby se paprsky vyslané ze světelného bodu v prvém z nich a lomené průchodem druhým opět setkaly v jediném daném bodě. Z odstupu šedesáti let, tedy poněkud nehistoricky, by se proto dalo říct, že důvodem, proč Descartes své ovály začal studovat, je právě ona vlastnost, kterou L'Hospital vyslovuje na konci § 142; totiž že jejich kaustikou lomem je jediný bod, čili ohnisko. Za účelem *přesného* určení tvarů čoček (objev, jímž si pravděpodobně připsal snad největší *impakt* v dějinách vědy a techniky) však René Descartes vychází v definici „zde předložených křivých čar, které nikterak nejsou bez užitku a vyznačují se rozličnými vlastnostmi, jež si v ničem nezadají s kuželosečkami (tamt., 424)“ z druhé knihy *Geometrie* z na první pohled podivně složitého utvoření svých čtyř oválů (Obr LXVI):

> „Veďme nejprve čáry *FA* a *AR* s průnikem v bodě *A* bez ohledu na úhly, jež mezi sebou svírají; nyní na jedné z nich vezmu dle libosti bod *F*, tj. ve větší či menší vzdálenosti od bodu *A* podle toho, zdali chci tyto ovály utvořit větší či menší; a z bodu *F* coby středu opíšu kruh procházející kousek za bodem *A*, jako třeba bodem *5*; z tohoto bodu *5* pak povedu úsečku *56* protínající druhou přímou čáru v *6* tak, že *A6* bude menší než *A5* podle libovolného poměru, totiž takového, který bude měřit lomy paprsků, chceme-li využití v dioptrice. Vezmeme pak na úsečce *FA* také na straně bodu *5* dle libosti bod *G*, čili tak, že *AF* a *GA* budou v poměru, jaký požadujeme. Nyní na úsečce *A6* položím *RA* rovným *GA* a ze středu *G* o poloměru rovném *R6* opíši kruh, který bude druhý kruh protínat po obou stranách v bodě *1*, tj. v bodě náležejícím prvnímu z hledaných oválů.“ (tamt., 424-425)

Obdobně se utvoří i obrazy dalších „lichých“ bodů osy a od nich i průniky kruhů v daném poměru utvářejících místo prvního Descartova oválu. Pokud jde o zbylé tři, druhý se liší co do polohy bodu R vzhledem k A (tamt., 425-426) tak, že v bifokální rovnici bude h záporným. U třetího a čtvrtého (tamt., 426-428) spadají ohniska dovnitř oválu tak, že F leží mezi G a A. Descartes mimo to nabízí i další zajímavé způsoby utvoření oválů, například mechanickou „metodu zahradníka“, jakou lze opsat elipsu, viz například komentář ke *Geometrii* (Rabuel 1730, 340-344). Nicméně je třeba uvést pár slov právě k refrakčním vlastnostem oválů a pro stručnost jen k prvnímu z nich.

Descartovy ovály se dělí na dvě části o rozdílných vlastnostech (tamt., 429). U první, jež je dána plochou skla *1A1* (Obr LXVI) platí, že všechny paprsky přicházející ze strany bodu F se lámou do bodu G. Neboť, jestliže se vrátíme ke shora položené rovnici $gr+hr'=k$, „podle toho, co bylo řečeno v *Dioptrice*“, platí, stručně řečeno,

$$\frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)}=\frac{h}{g}=k,$$

kde i_1 a i_2 jsou úhly, které svírají úseky *IF* a *IG* s normálou, čili zákon lomu světla. Naopak strana oválu při bodu *V* od konkávního povrchu zrcadla o tvaru *1V1* odráží všechny paprsky vycházející z *G* do bodu *F* a oslabuje jejich sílu podle poměru, jaký je mezi *A5* a *A6* (AT VI, 430). Odtud pak, jak dále říká Descartes, analogie bodů *F*, *G* s ohnisky v elipsách a hyperbolách. Důkazům uvedených vlastností za pomoci své algebraické metody věnuje Descartes následující čtyři stránky *Geometrie*, kde je každý může nahlédnout. Zbytek pojednání oválů je věnován tvarům čoček, jež soustřeďují paprsky do jediného bodu, a to v závislosti na požadovaných vlastnostech čoček či brýlí, ať už mají obě strany konkávní, konvexní, anebo sestávají z obou. Za zmínku zde coby jeden z vrcholných geometrických výkonů doby bezpochyby stojí případ, kde Descartes určuje samotný tvar čočky, tj. povahu dvou refrakčních oválů, toliko na základě daných ohnisek a poměru tlouštěk obou čoček (tamt., 438).

Mimo tyto zvláštní dioptrické vlastnosti, které především zajímaly Descarta (srv. v. 67), oplývají ovály četnými dalšími. Newton v *Principiích* I, CXVII, ukazuje kromě jiného, že ovály vznikají jako místo bodu, jehož vzdálenosti od obvodu dvou kruhů jsou v nějakém daném poměru (Newton 1687, 232-235). Huygens v *Traité de la lumière* VI (HOC XIX, 525-536), tedy ve stejné kapitole *O tvarech* diaphanních *těles sloužících k lomu a odrazu*, kde se pojednávalo i o kaustikách (v. 113), tento způsob utvoření i vlastnosti oválů představuje coby přímý důsledek své vlnové teorie; přičemž Descartovu „sílu paprsků“ vykládá jako jejich *rychlost* (Descartes, jak známo, pokládal šíření světla za okamžité). Michel Chasles (1793-1880), francouzský matematik známý především z projektivní geometrie, který se v 19. století zabýval teorií ohnisek Descartových oválů, k tomu poznamenává, že ani Descartes, ani Newton, nebo Huygens se ovály nezaobírali z čistě geometrického hlediska, a proto nezahlédli skutečnost, že geometrické místo oválu je vždy tvořeno dvěma sdruženými ovály. Proto jim pak unikl případ, kdy dva sdružené ovály mají jeden společný bod a tvoří křivku o jednom dvojitém bodu zvanou Pascalův šnek (v. 101); což značí, že Pascalův šnek je nejen zároveň epicykloidou a konchoidou kruhu, ale také křivkou mající dvě ohniska tak, jako ostatní Descartovy ovály (Chasles 1837, 161-162).

K vlastnostem Descartových oválů a jejich důkazům viz dále Loria (1901, 661-670); Teixeira (I, 199-234).

121 S konkrétními, dějinnými případy obalové křivky, jimž se rukou Leibnizovou (v. 8, 105, 107) dostalo význačných teoretických zobecnění, jsme se již zabývali v podobě evolut (obálka normál nějaké křivky, § 157 a v. 87) a kaustik (obálka světelných paprsků odražených nebo lomených nějakou optickou soustavou, v. 107). Ukázalo se také, že během svých zapovězených výbojů do Země nekonečna (například při hledání tečny k cykloidě, v. 48) se s obalovou křivkou *in nuce* setkával Descartes; ostatně i ovály jsou na pozadí jeho vlastní definice v podstatě obalovými křivkami soustav ohniskových kruhů. Lze tedy jaksi obrazně říci, že ontogenetický řád *Analýzy nekonečně malých* věrně zachycuje zkrácenou fylogenezi pojmu obalových čar.

Názornou představu obalové křivky nějaké družiny křivek, zde parabol, si lze snadno utvořit na základě *Éclaircissements* k *Analýze* (Varignon 1725, 72-73): jestliže tečný bod každé z parabol *AMC* s hledanou křivkou máme zároveň nahlédnout jako průnik dané paraboly se sousední, nekonečně blízkou parabolou, pak je třeba tečnou křivku uvažovat jako mnohoúhelník o nekonečnu stran složený z parabol, jichž se dotýká a které jsou mu v místě dotyku společné. Takto pak bod průniku, v němž se stýkají dvě nekonečně blízké paraboly, bude představovat jeden z úhlů mnohoúhelníku tvořících tuto křivku, a tím pádem v ní bude obsažen. Čili tečná křivka bude utvořena toliko z nekonečně malých úseků parabol, ve kterých se těchto parabol dotýká, a tedy průniky těchto nekonečně blízkých parabol budou obsaženy v této křivce a „ježto tyto tečné úseky (*portions d'atouchement*) můžeme brát za body, lze pak na ně nahlížet jako na body dotyku těchto parabol s tečnou křivkou“ (Varignon 1725, 73).

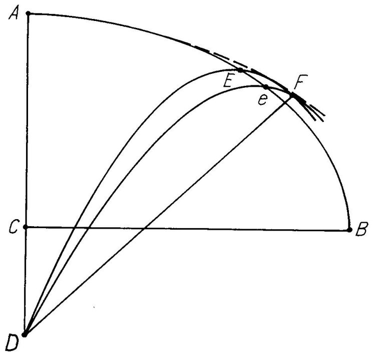
Obecnou teorii „čar dotýkajících se nekonečna čar daných polohou“, jak vidno, L'Hospital neuvádí a oddíl jim věnovaný začíná rovnou příklady. Lze ji však nalézt především ve dvou Leibnizových pracích, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata, easque omnes tangente, ac de novo in ea re Analysis infinitorum usu*, tj. „O čáře utvořené z nekonečna po řadě vedených sbíhavých čar a těchto se dotýkající, a nové užití Analýzy nekonečen v této věci“ (AE 1692, 168-171; MS V, 266-269) a *Nova calculi differentialis Applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione*, „Nové uplatnění diferenciálního počtu a jeho užití k sestrojení rozličných čar daných podmínkou jejich tečen“ (AE

1694, 311-316; MS V, 301-305). V první z nich, v protikladu k L'Hospitalovi, bez veškerých výpočtů a důkazů, přichází – na pozadí Tschirnahusových u Huygensových kaustik a evolut na jedné straně a Desarguesova pojmu ordinát konvergujících v nekonečnu na straně druhé – s matematickou syntézou založenou na pojmu *parametru.* Ten je pro danou křivku konstantní, avšak proměnný v případě družiny křivek, a zajišťuje tak řádný (*ordinatim*) přechod z jedné křivky na druhou nejbližší (*proxima*) na základě *společného zákona*, rovnice až na parametr společné všem čarám družiny. Zobecnění pojmu ordináty se završuje ideou – pro niž Leibniz razí novotvar *ordinatrix* (v. 47) – čáry ustavující řád mezi nekonečnem dalších přímých nebo křivých čar, nakolik pro každý její bod dokážeme na základě společného zákona vést čáru jí odpovídající; v případě evoluty tedy *ordinatrix* pro nekonečno jejích tečen představuje evolventa, u běžných ordinát je to osa abscis; a Leibniz zmiňuje také příklad Tschirnahusových *kvaziohnisek* (srv. obdobný případ, jak jsme přeložili, „křivkobodů“, v. 59), čili kaustik utvořených vlastně průniky všech sousedních paprsků (MS V, 267). Tím podstatným z hlediska matematického je tu však především Leibnizův záměr podřídit výše uvedené pojmy algoritmům svého počtu, nebo, jak zde, snad pro věší porozumění ze strany soudobého obecenstva, píše: „*naší Analýzy nedělitelných*“ (tamt., 268):

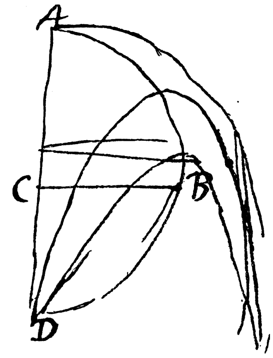
> „Nuže jakmile již máme sestavenu lokální (*locali*) rovnici (neboli rovnici jedné z po řadě daných křivých čar), avšak obecnou (neboť vykazuje zákon společný všem), hledejme její rovnici diferenciální způsobem, který ještě zbývá vyložit (*modo mox dicendo*); a na základě těchto dvou rovnic nalezneme hledanou křivku. Přesto jestliže hledáme tečnu ke křivce v libovolném z jejích bodů, pak stačí jen *diferencovat rovnici* této křivky, čili hledat rovnici, jež bude diferenciální k rovnici odpovídající dané lokální křivce; avšak v tomto případě budeme *parametry*, tj. úsečky o *konstantní* délce (*rectae magnitudine constantes*), jež vstupují do konstrukce křivky nebo do výpočtu její rovnice a běžně je označujeme *a*, *b* atd., považovat za jedinečné (*unicae*) neboli *nediferencovatelné* právě tak, jako samu tečnu nebo některé další *funkce* od křivky odvislé, jako například normály vedené od osy ke křivce. Jak ordináta, tak abscisa, obvykle zapisované jako x a y (jež mám ve zvyku nazývat též *koordinátami*, neboť každá z nich je řazena vzhledem k jedné ze stran úhlu svíraného kodirektricemi) je *sdružená* (*gemina*) neboli *diferencovatelná.*“ (MS V, 268)

Zatímco *De linea ex lineis* představuje svého druhu zachycení a rozvržení hlubokých formálních zahlédnutí – podobně, jako tomu bylo s *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi* (1686) u teorie oskulačních kruhů (v. 87); k přísnějšímu, algoritmickému pojednání otázky, právě na nově odkrytých základních kamenech (obecný geometrický pojem *funkce* (v. 65), koordináty, ordinatrix, diferencovatelnosti a družiny čar) dochází až v druhém z článků, *Nova calculi differentialis Applicatio* vycházejícím o dva roky později. Je zajímavé a příznačné, že Leibniz svůj spisek začíná tak, jako by na shora uvedené pojmy z *Linea ex lineis* už skoro zapomněl; jisté však je, že k otázce družiny křivek se vrací až na opakovaná naléhání markýze de l'Hospitala, jenž Leibnizovy podstatné intuice dokázal zachytit a dokonce mu sám v této věci podává pomocnou ruku. Hned ve svém *prvním* dopise Leibnizovi z 14. prosince 1692 totiž píše:

> „Četl jsem velice pozorně to, co jste zařadil do Lipských Akt z měsíce dubna /*De linea ex lineis*/ a domnívám se, že tu zahlížím metodu, kterou jste představil, ale chtělo by to nějaké příklady, aby se mi to vyjasnilo; a zde je jeden, který jsem vymyslel.



Obr LXVIII



Obr LXIX

Budiž elipsa *ABD* /Obr LXVIII/ o poloosách *CA*, *CB* a uvažujme nekonečné množství parabol *DEF*, *Def*, které všechny procházejí tím samým bodem *D* a všechny jejich vrcholy se protínají (*se rencontrent*) poloviční elipsu. Je třeba opsat čáru, která se jich všech dotýká a určit bod *F*, ve kterém se libovolné dvě tyto paraboly vzdálené navzájem jen o nekonečně malou délku protínají. Zjišťuji, že při $CB = AD$ je čára, která se dotýká všech těchto parabol, sama také parabolou s vrcholem v bodě *A* a ohniskem *D*; a že úsečka *DF* protínající parabolu *DEF* prochází jejím ohniskem. Budu Vám velice zavázán, když mi sdělíte, jakým způsobem použít Váš počet k řešení tohoto druhu otázek." (A III, 5, 449-450)

Leibniz, nadšen z nové známosti, odpovídá na předchozí otázky markýze de l'Hospitala; nicméně pokud jde o obalovou křivku nekonečna parabol, „potřebuje se ještě trochu zamyslet, anebo se podívat do svých náčrtů (*brouillons*)".

L'Hospital byl hloubkou otázky, zajisté velice správě, uchvácen; nicméně toto nebyl jeho první pokus se o ní dozvědět víc. Již 8. prosince 1692, dopis N° 6, se totiž obrací s žádostí o radu na Johanna Bernoulliho, způsobem, jenž byl pro veškerou jejich výměnu typický:

„Rád bych, kdybyste mi zaslal nějakou obecnou metodu pro řešení problému, jako je tento. Mějme libovolnou poloviční elipsu *ABD* /Obr LXIX/ s poloosami *AC*, *CB*; a za předpokladu, že máme nekonečno parabol, jež všechny procházejí *D* a jejich vrcholy leží na půlelipse, je třeba najít čáru, jež se jich všech dotýká. Na místo elips a parabol bychom mohli předpokládat i nekonečno jiných čar. Zdá se mi, že tento problém má co do činění s tím, co říká p. Leibniz v lipských *Aktech* z dubna tohoto roku." (JBB I, 160)

Benoulliho odpověď z 18. prosince se sice nedochovala, nicméně hned z dalšího L'Hospitalova dopisu, N° 7, z 2. ledna, je dostatečně zřejmé, že se v zásadě jedná o postup § 146. Zde totiž L'Hospital podává vlastní důkaz Bernoulliho konstrukce obalové křivky a končí slovy: „Opravdu rád bych věděl, jak jste došel k této konstrukci (tamt., 163)". Zde Bernoulliho odpověď bohužel také schází. L'Hospital ji ovšem shrnuje v následující odpovědi tímto způsobem: „řešení leibnizovské křivky $a\,ddx = dy^2$, v němž konstruujete x a y každé zvlášť prostřednictvím dvou křivek, které, když se zkombinují, dávají hledanou křivku." A markýz de l'Hospital byl s postupem svého mladšího učitele zřejmě natolik spokojen, že se hned 24. února 1693 pochlubil Leibnizovi otevíraje těmito, abych tak řekl, poněkud „nepřesnými" slovy: „Domnívám se, že jsem objevil způsob, jakým uplatnit diferenciální počet k nacházení čáry, jež se dotýká nekonečna dalších v řadě (*en rang*) daných čar […]" (A III, 5, 496).

Dobrý Leibniz si od nynějška snad v každém listu svým korespondentům, čili vědeckým špičkám doby *in universum*, nemohl vynachválit nově navázaného spojenectví (jakož i hluboké pronikavosti markýze de l'Hospitala), které jej ku vyšší slávě analýzy naplňovalo, jistě je třeba říci, oprávněnými nadějemi. A své první plody vydalo už jen v tom, že Leibnizovi poskytlo příležitost vrátit se k teorii obalových křivek a zpřesnit její základní pojmy a postupy. Takto v dokonalé harmonii s hlavní myšlenkou své teodicey mimo jiné i drobný podvod markýze de l'Hospitala dal vzniknout *Nova calculi differentialis Applicatio* (AE 1694, 311-316) vstříc dalšímu charakteristickému osvobození infinitesimálního počtu od jeho geometrického základu, neboť zde:

„Po způsobu Descarta, který podřídil kalkulu antická geometrická místa skrze rovnice vyjadřující každý bod křivky, používáme rovnice nekonečně rozsáhlejší postihující libovolný bod libovolné křivky zahrnuté v sérii po řadě vzatých křivek (*in serie ordinatim sumtarum curvarum*). Takto se x a y zajisté uvažují za abscisy a ordináty, čili koordináty libovolné z řečených křivek, avšak vztahují se zvláště (*speciatim*) také na křivku utvořenou jejich průniky neboli všem společnou tečnu; a to díky *užitečné dvojznačnosti charakteristiky* (*aequivocationis characteristicae genere*).“ (MS V, 301)

122 Obalová křivka, jak bylo řečeno výše (v. 94), se v tomto případě nazývá *astroid.*

123 *Sesquialtère du segment circulaire*, z latinského *sesquialter*, „zahrnující jeden a půl krát“. Název vychází z Boethiova (asi 480-524/5) zevrubného pojednání poměrů a proporcí coby principů hudby z *De Institutione Arithmetica*, jež si udrželo značný vliv v umění i teorii čísel a matematice až do renesance.

124 S úlohou i konstrukcí křivky přichází L'Hospital v dopise Bernoullimu N° 53 z 6. července 1695 (JBB I, 297). Jedná se o zobecnění Bernoulliho řešení „křivky ustavičně se dotýkající přepony pravého úhlu, jež klouže mezi svými stranami“ (čili astroidu) z *Curvae causticae* (JBO I, 57) a *Lectiones de Methodo Integralium* (JBO III, 467), kde přináší i její rektifikaci. Důkaz zde L'Hospital neuvádí, protože „lze snadno nahlédnout“.

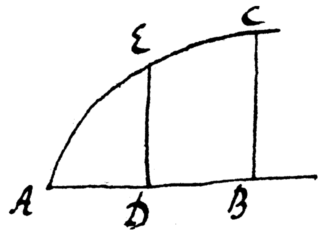
125 Úlohu pro případ paraboly a kruhu, spolu s dalšími obdobnými příklady, zadává markýz de l'Hospital k vyřešení Johannu Bernoullimu v dopise z 2. ledna 1693. Bernoulliho odpověď s řešením se nedochovala, a není tudíž zřejmé, komu náleží zobecnění otázky z § 161.

126 Slavné L'Hospitalovo pravidlo vyslovuje Johann Bernoulli v podobě odpovědi na vlastní námitku proti L'Hospitalově důkazu (JBB I, 225-226), že v bodě vratu stojí dy ku dx „ve všech představitelných poměrech (v. 106), neboť ukázal jsem Vám v příkladu, který mi předkládáte

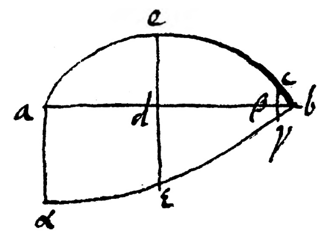
$$\frac{\sqrt{2a^3x-x^4-\text{etc}}}{a-\text{etc}},$$

když $x=a$, nastává $\frac{0}{0}=$ nějaké určité veličině; a tudíž čitatel nula ku jmenovateli nula nestojí v libovolném poměru (tamt., 229-230)“. Ačkoli otázka významu algebraického výrazu, který se objevuje v § 164, při $x=a$ se vine mnoha dopisy obou geometrů již od června 1693 – a čím více se v ní L'Hospital nemohl dobrat konce, tím spíše naléhal na Bernoulliho, který se naopak, pokud je měl, nezdál příliš nakloněn vydat obecné řešení. Stalo se tak až po roce, kdy píše, že si hned „na první příležitost vyhrazuje obecný způsob řešení této rovnice stejně tak, jako metodu nalezení tečen ke křivkám „člunů“ (*chalouppes*) a křivek opsaných středními body mezi čluny“ (tamt., 230). K poctě a oslavě Bernoulliho objevitelského génia nechť tedy L'Hospitalovo pravidlo zazní v plném, původním znění:

„*Probl.* Je dána nějaká křivka, jejíž povaha je vyjádřena zlomkem rovným y, který má v určitém případě čitatele a jmenovatele rovné nule: požadujeme jeho hodnotu, tj. velikost ordináty y.



Obr LXX



Obr LXXI

Řeš. Nechť AEC je danou křivkou, $AD=x$, $DE=y$, $AB=$ nějaké konstantě takové jako BC nastává rovným zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou rovny nule. K nalezení velikosti ordináty BC tedy sestrojím na té samé ose adb dvě další křivky aeb a $a\varepsilon b$ takové povahy, že když se vezmou abscisy rovné AD, ad, pak ordináty de budou stát v poměru rovném čitateli obecného zlomku vyjadřujícího ordináty DE; a $d\varepsilon$ pak budou v poměru jmenovatele toho samého zlomku. Nuže za těchto podmínek je zřejmé, že *de* děleno *dε* může být položeno rovným *DE*; a otázka se redukuje na nalezení hodnoty *de* děleno *dε* v případě, kdy *ab* je rovno *AB*. Avšak vidím, že v tomto případě *de* a *dε* vymizí, poněvadž oba dva členy zlomku vymizí, a tak se obě křivky *aeb* a *αεb* protnou v bodě *b*: a stačí tedy vzít tyto poslední diferenciály *βc*, *βγ*, které pokud jeden vydělím druhým, vyznačí velikost hledané *BC*. Což mi dává toto obecné pravidlo: *K získání hodnoty ordináty řečené křivky v řečeném případě je třeba vydělit diferenciál čitatele obecného zlomku diferenciálem jmenovatele a tento podíl za předpokladu, že* x *bude učiněno rovným* AB*, bude hodnotou*.“ (JBB I, 235)

Zde netřeba komentáře. Nicméně je dobré si uvědomit, z jakých geometrických kořenů a okruhů otázek (v. 79, 90, 106) vlastně vyrůstá známé pravidlo, které lze za jistých podmínek vyslovit jako

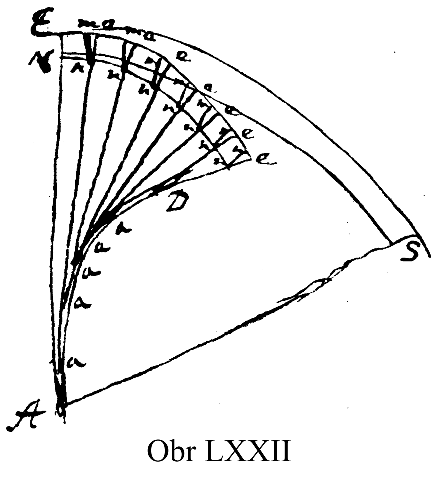
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

127 Varignon v *Éclaircissements*, 81, nabízí srovnání článku § 166 s Newtonovými *Principy*, I, XI, tvrzení XLVII (Newton 1687, 163) a odkazuje též na L'Hospitalův článek *Theorema novum de quadrandis Cycloidibus basium circularium pro quavis distantia puncti describentis a centro circuli mobilis* (AE 1695, 372-374). Základem pro tento článek, který do latiny přeložil právě Varignon, je Bernoulliho dopis N° 52 z 6. června 1695 s řešením – převzato v § 166 a § 169 – uvozeným větou: „Rád bych věděl, k čemu může být tato otázka, je hezká, ale málo užitečná“ (JBB I, 294). Závislost

$$\frac{DF}{Ff}=\frac{AE}{Mm-Nn},$$

mezi délkami oblouků rovnoběžných křivek, již zde L'Hospital představuje a která je základem následné integrace, odvozuje Bernoulli synteticky následujícím *Lemmatem*:

„Budiž *AaaaD* /Obr LXXII/ nějakou libovolnou křivkou, kterou odvineme tak, že vznikají dva nekonečně blízké oblouky *Eeeee* a *Nnnnn*; pak tvrdím, že diferenciál těchto dvou oblouků nalezneme tak, že když *AE* položíme ke kruhovému oblouku *ES* opsanému o poloměru *AE*, který se vytyčí mezi *AE* a *AS* rovnoběžnou s tečnou *De*; stejně tak bude i



Obr LXXII

vzdálenost *EN* mezi oběma oblouky ke čtvrtému hledanému členu úměry (*quatrieme cherchée*). Jestliže si totiž představíme, že tečny *ae*, *ae*, *ae* atd. budou vedeny tak, utvoří navzájem rovné úhly *EAe*, *eae*, *eae* atd.; pak když povedeme *nm*, *nm*, *nm* atd. rovnoběžné s *NE*, *ne*, *ne* atd., je zjevné, že všechny trojúhelníky *mne* budou shodné (*semblable et egaux*). Avšak každá část *ee* přesahuje každou *nn* o délku základny *me*; a tudíž velková křivka *Eeee* přesahuje celkovou křivku *Nnnn* o všechna *me*, kterých je tolik, kolik je úhlů *EAe* v úhlu *EAS* (neboť suma všech úhlů *eae* je = *EAS*), a tedy

$$EA\,.\,Ee+Ee+Ee\,\text{atd}\,(ES)::EN\,.\,me+me+me\,\text{atd.}\,(Eeeee-Nnnnn).\text{“ (tamt.)}$$

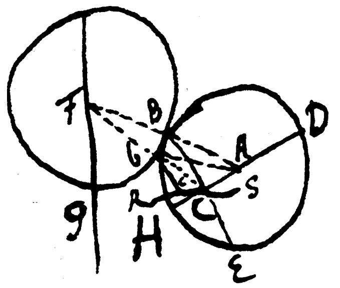
Analytický důkaz této vlastnosti rovnoběžných křivek podává německý matematik A. L. Crelle (1780-1855) v *Mémoire sur le parallelisme des courbes et surfaces courbes* (1821). Srv. také výše uvedené Huygensovo Tvrzení III. z *Horologia* (HOC XVIII, 194; v. 87) a dále například Loria (1902, 643-651).

128 „Při této příležitosti Vám musím říct, že pokud je dána nějaká libovolná křivka, mohu okamžitě sestrojit další křivku, jež bude spolu s danou rovna nějakému kruhovému oblouku" (JBB I, 295). Na oba důsledky, § 167 a § 168, lemmatu Bernoulli nadále poukazuje příklady; L'Hospital v *Analýze* dodává jejich důkazy.

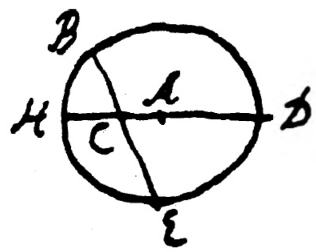
129 Viz v. 127, 128.

130 Poměrně obsáhlé řešení opět na žádost L'Hospitala podává Johann Bernoulli v dopise N° 46 z 5. března 1695 (JBB I, 267-269). Po vyznačené místo je L'Hospital přebírá téměř slovo od slova; Bernoulli pak pokračuje rozborem (tamt., 268) všech tří případů, kdy opisující bod připadá dovnitř, na, anebo vně pohyblivého kruhu; a v prvním případě hledá inflexní bod dané cykloidy, což představuje řešení druhé L'Hospitalem požadované úlohy (z téhož dopisu N°42, tamt., 263). Součástí postupu je pak i Lemma II z následujícího § 176:

„Mějme tedy nyní opisující bod C /Obr LXXIII/ uvnitř pohyblivého kruhu a na poloměru DH hledáme inflexní bod C cykloidy (*roulette*) RS. A veďme ze středů A a F nekonečně blízké



Obr LXXIII



Obr LXXIV

poloměry AB, Ab a FB, Fb; nyní uvažuji kruhy za mnohoúhelníky o nekonečnu stran o společné straně Bb; a proto pokud povedeme BC, Cb a bc, úhel cbC je (ze způsobu utvoření cykloidy) roven úhlu $GBH = BFb + BAb$. Ježto však C je inflexním bodem, obě kolmice BC, bc k cykloidě budou rovnoběžné, a tím pádem

$$bCB = cbC = BFb + BAb = \left(\text{poněvadž } FB \,.\, AB :: BAb \,.\, BFb\right) = \frac{AB}{FB} BAb + BAb$$

což, když BC prodloužíme do E a povedeme bE, bude rovno

$$\frac{2\,AB}{FB} BEb + 2\,BEb.$$

Avšak dva vnitřní úhly jsou rovny úhlu vnějšímu, čili

$$BEb + CbE = bCB = \frac{2\,AB}{FB} BEb + 2\,BEb,$$

a tudíž

$$CbE = \frac{2\,AB}{FB} BEb + BEb;$$

a když tuto rovnost převedeme na úměru, máme $FB \,.\, FB + 2\,AB ::$ (ježto v trojúhelnících o nekonečně malých úhlech, jako je trojúhelník bcE, jsou úhly v tom samém poměru, jako jsou protější strany) bC neboli $BC \,.\, CE$. Otázka se tedy mění na následují: *Nalézt na obvodu nějakého kruhu bod* B *takový, že když povedeme daným bodem* C *na poloměr* DH *úsečku* BCE*, část* BC *se bude mít k* CE *v daném poměru*. Což lze vyřešit snadno pro každý případ. Neboť mějme poloměr pohyblivého kruhu $AH = a$, poloměr kruhu pevného $FB = b$, $AC = a$ a neznámý úsek $CB = x$; pak dostáváme

$$CE=\frac{HC\times CD}{BC}=\frac{aa-cc}{x};$$

a podle toho, co bylo shora nalezeno,

$$b.b+2a::x.\frac{aa-cc}{x},$$

což mi dává

$$x=\sqrt{\frac{aab-ccb}{b+2a}}.$$

C. Q. F. T." (tamt., 268-269)

Bernoulliho řešení L'Hospital dále v § 180 rozšiřuje pro libovolný bod křivky *RS*, a tedy i inflexní, kdy je hodnota poloměru oskulačního kruhu nekonečná.

131 Lekce XII a XIII, *Lectiones de methodo integralium* (JBO III, 454-457), L'Hospitalovi stojí základem metody nalezení kvadratury cykloidy, jestliže opisující bod leží na obvodu tvořícího kruhu. Postup pro zbylé dva případy doplňuje Johann Bernoulli v dopisu N° 50, 3. května 1695.

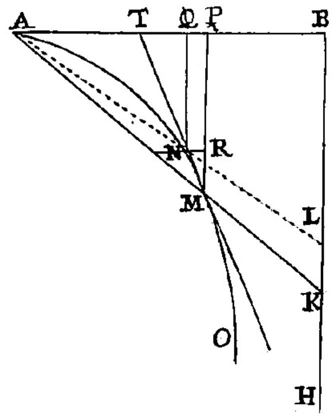
132 Zde již L'Hospital logicky přistupuje k rozlišení (v. 101) epicykloid a hypocykloid pod názvy *roulette extérieure* a *roulette intérieure*, čili „vnější" a „vnitřní" cykloida.

133 Křivka, o níž je řeč, se obvykle nazývá *kappa* (na základě volné podobnosti s řeckým písmenem *κ*) či *Gutschovenova křivka* podle holandského geometra, Descartova žáka a spolupracovníka Gerarda van Gutschovena (1615-1668), který ji studoval na začátku šedesátých let 17. století. Jedná se o křivku čtvrtého řádu, jíž lze zapsat jako

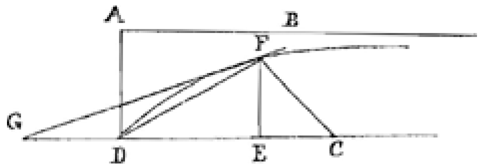
$\rho=\alpha\tan(\theta)$, anebo v karteziánských souřadnicích $y^2(x^2+y^2)=a^2x^2$;

a která se postupně stala význačným příkladem čáry, jež je v jednom ze svých bodů sama sobě tečnou. Díky Gutschovenovi se s křivkou seznamuje Sluse, jenž ji roku 1662 zmiňuje v dopise Huygensovi, podává způsob jejího utvoření a připojuje pravidlo nalezení tečny k ní:

> „Mezi rovnoběžkami *AB*, *DC* /Obr LXXVI/ spojenými normálou *AD* uvažujme křivku takové povahy, že když vezmeme libovolný její bod *F*, povedeme spojnici *DF* a spustíme z *F* normálu *FC* protínající *DC* v *C*; pak úsečka *FC* bude vždy rovna *AD*. Z tohoto popisu je zjevné, že *AB* bude představovat asymptotu křivky. Tečnu v daném bodě *F* pak snadno nalezneme, když spustíme kolmici (*normali*) *EF* a *CD* prodloužíme do *G* tak, že *CE*, *CD*, *CG* budou stát ve spojité úměrnosti." (HOC IV, 207)

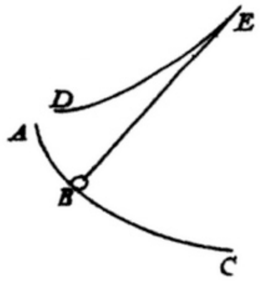


Obr LXXV

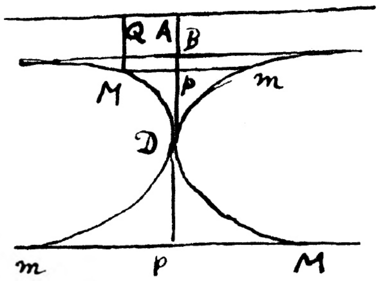


Obr LXXVI

V odpovědi Slusovi Huygens nachází její algebraickou rovnici a další vlastnosti (tamt., 238). Další způsob utvoření křivky kappa, k němuž se váže výše uvedená polární rovnice, podal Barrow v Lekci X, *Lectiones geometricae* roku 1670. Křivka zde slouží jako první z příklad Barrowovy infinitesimální metody tečen (v. 9, 67) a je zadána následovně (Obr LXV): „Nechť úhel *ABH* je pravý; a budiž křivka *AMO* taková, že když z *A* povedeme libovolnou přímou čáru *AK*, jež bude *BH* protínat v *K* a křivku *AMO* v *M*; pak struna *AM* bude vždy rovna abscise *BK*“ (Barrow 1670, 81).



Obr LXXVII



Obr LXXVIII

Počátek úvah § 186, jak uvádí sám L'Hospital, se váže k otázce křivky padacího mostu (p. 41-44), konkrétně k citovanému *Additio*, kde Johann Bernoulli předkládá geometrům „rozkošnou otázku (*jucundum Problema*) nikoli nepodobnou isochroně Hygensově /cykloidě/ stejně tak, jako Leibnizově /semikubické parabole, v. 42/“, totiž nalezení „křivky *ABC* /Obr LXXVII/, po níž těleso *B* sestupuje volně, vlastní tíží tak, aby na křivku tlačilo vždy stejnou odstředivou silou; aneb, což je v posledku totéž, aby vlákno *BE* obalující křivku *DE*, jehož odvíjením vzniká hledaná *ABC*, bylo zavěšeným závažím *B* napnuto stále stejnou silou, a tedy v libovolném okamžiku byla požadována stejná pevnost vlákna (AE Suppl. II, 289-291; JBO I, 141-142; srv. v. 42)“. Rozprava o druzích křivek padacího mostu a „odstředivé křivce“ (*courbe centrifuge*) probíhá střídavě od února do září 1695 na stránkách řady dopisů.

Otázku sebedotyku otevírá L'Hospital v dopise N° 49 (JBB I, 281), kde právě naráží na zdánlivé rozporuplnosti (*conrarietez apparentes*) vyložené v § 186. Johann Bernoulli odpovídá, N°50, že je velice obtížné se v tom vyznat; nicméně problém spočívá v tom, že oba „úseky křivky nejsou spojité (*continues*), nýbrž styčné (*contigues*), což je veliký rozdíl (tamt., 285)“; a pokračuje příkladem algebraické křivky z konce § 186 (upraveno pro případ Obr. 143):

> „Zde tedy máme stejné obtíže, jaké uvádíte; co na to tedy odpovědět? Nic víc, než že popírám, že by *B* byl opravdovým inflexním bodem, neboť je jím jen akcidentálně a ne podle přirozenosti křivky; vzhledem k tomu, že *FD* a *DE*, jakož i *GD* a *DH* jsou rozdílnými částmi křivky, jež se staly styčnými a nikoli spojitými; neboť spojitými jsou *GDF* a *EDH*; a díky tomu může mít poloměr evoluty bez jakéhokoli rozporu nějakou určitou velikost. Když toto vztáhneme k naší křivce odstředivé síly, pak tvrdím, že části *MD*, *DM* /Obr LXXVIII/, které jste vyznačil na Vašem obrázku, nejsou spojité; a tudíž skládají jen polovinu křivky, neboť druhá polovina je složena ze zbylých dvou částí *mD*, *Dm* podobných *MD*, *DM*; což potvrzuje i to, že diferenciální rovnice křivky není jen ta, kterou jste našel
>
> $$\frac{yy\,dy-aa\,dy}{\sqrt{2\,yy-aa}}=a\,dx, \text{ ale také tato } \frac{yy\,dy-aa\,dy}{-\sqrt{2\,yy-aa}}=a\,dx;$$
>
> poněvadž kořen $2\,yy-aa$ je $\pm\sqrt{2\,yy-aa}$. Tvrdím tedy, že křivka odstředivé síly je druhem hyperboloidu, jehož příčná osa (*axe transverse*) je nekonečně malá, a tudíž spojitými částmi jsou *MDm* a nikoli *MDM* nebo *mDm*; odtud je zřejmé, že inflexní bod je pouze akcidentální, abych tak řekl, a ne esenciální či přirozený.“ (tamt., 285-286)

Viz také obsáhlý komentář, který článku věnuje Varignon (1725, 89-93).

134 Účel posledního oddílu *Analýzy nekonečně malých*, lze říci, je veskrze propagandistický – odvislý především od osobních a institucionálních podmínek doby jejího vzniku. Proti horlivým a přesvědčeným karteziánům se zde prokazuje, což ostatně L'Hospital sám uvádí v předmluvě *Analýzy*, přirozená nadřazenost Leibnizovy metody diferenciálů vůči dosavadní omezené a neobratné algebraické metodě tečen založené na určování násobných kořenů rovnic. Proto pak může o nějakých 70 let později v době, kdy byl počet nekonečna již pevně usazen, Abbé de la Caille napsat, že „tento oddíl je nejméně důležitý ze všech, neboť ukazuje jen, že počtem diferenciálů se mnohem snadněji než jakoukoli jinou metodou řeší otázky předložené v devíti předešlých (De la Caille 1768, 375)“. Odtud pak je též zřejmé, že i většina komentářů, které by se vztahovaly ke

skutečnostem zde uvedeným, již zazněla a bylo by zbytečné je opakovat. Pro dnešního čtenáře, domnívám se však, je cenný v poukazu na prvotní provázanost obou symbolických metod konce 17. století právě s roz-uměním geometrických čar. Upozornit je ovšem třeba právě na rafinovanou stavbu oddílu, která zrcadlí veškerý dosavadní postup této krásné knihy stejně tak, jako na jeho umístění na samý její konec. Kontrast je pochopitelně nanejvýš chtěný: jedná se téměř bez nadsázky o tvrdý pád na zem po nespoutaném vzletu do dosud nevídaných výšin, těžký návrat do jeskyně z nekonečné říše idejí. S tímto L'Hospitalovým vzletem pak zřejmě souvisí i to, že vzdor všem Leibnizovým pokusům o založení či aspoň vysvětlení pojmu diferenciálu se zde nakládá s nekonečnou malostí jako s *definiens*, prvotním, jednoduchým pojmem.

135 *Les différences des deux appliquées qui partent d'un même point*, viz v. 16. Ke vzniku § 191 viz v. 106.

136 Pochopitelně na základě pravidel § 4 a § 7; právě odtud by se vedl onen snadný důkaz Huddova pravidla (v. 15), jak ostatně L'Hospital naznačuje. Znak hvězdičky na místě neznámého členu rovnice užívá Descartes v *Géométrie*.

137 Pojednání kaustiky § 208 (podobně jako oskulačního kruhu § 203 a § 204) a složitost rovnic, kterou toto obnáší, snadno mohou sloužit za význačný příklad a důkaz L'Hospitalových tvrzení, že metoda pánů Descarta a Hudda *se nemůže měřit s metodou pana* Leibnize*, kterou se tímto pojednáním Guillaume-François-Antoine, markýz de l'Hospital v základu snažil vysvětlit.* A kterou jsme se my tímto komentářem snažili po stránce historické, filologické a filosofické co nejúplněji současnému čtenáři přiblížit.

KONEC.

Seznam použité literatury.

Primární literatura.

- *Acta eruditorum anno MDCLXXXII. [-MDCCXXXI] publicata…* . Mencke, Johann Burchard (ed.); Jöcher, Christian Gottlieb (ed.). Lipsiae: Apud J. Grossii Hæredes & J. F. Gleditschii, 1682-1731.

- *Actorum Eruditorum quae Lipsiae publicantur supplementa (1692-1734).* Lipsiae: Apud J. Grossii Hæredes & J. F. Gleditschii, 1692-1734.

- ANSELME de Sainte-Marie, P. *Histoire généalogique et chronologique de la maison royale de France*, Tome VII. Paris: Compagnie, 1733.

- APOLLONIUS; COMMANDINO, Frederico (trans., com.). *Apollonii Pergaei conicorum libri quattuor.* Bononiae: Ex Officina Alexandri Benatii, 1566.

- APOLLONIUS; HEATH, Sir Thomas Little (ed.). *Treatise on conic sections*. Cambridge: University Press, 1896.

- ARCHIMEDES; EUTOCIUS; HEIBERG, Johan Ludvig (trans., com.). *Archimedis Opera Omnia. Cum commentariis Eutocii*. Vol. I-III. Lipsiae: In edibus B. G. Teubnerii, 1880-1881.

- BARROW, Isaac. *Lectiones geometricae*. Londini: Apud Johannem Dunmore, 1670.

- BARROW, Isaac; CHILD, James Marc (trans., com.). *The geometrical lectures of Isaac Barrow.* Chicago; London: The Open court publishing company, 1916.

- BEAUVAL, Henri Basnage de. *Histoire des ouvrages des sçavans*. Rotterdam: Chez Reinier Leers, 1692.

- BERNOULLI, Jakob. *Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera*. Genevæ: Sumptibus hæredum Cramer & fratrum Philibert, 1744.

- BERNOULLI, Johann. *Brief an Pierre Rémond de Montmort von Johann I Bernoulli*. BS UB, Handschriften. SIGN: L Ia 665, Nr.15. Stable URL: http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/1719-07-13_Bernoulli_Johann_I-Montmort_Pierre_Remond_de.

- BERNOULLI, Johann. *Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differencialium*. Basel: Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft, 1922.

- BERNOULLI, Johann. *Johannis Bernoulli ... Opera Omnia Tam Antea Sparsim Edita, quam hactenus inedita.* Tom. I-IV. Lausannae; Genevae: Bousquet, 1742.
- BERNOULLI, Johann; COSTABEL, Pierre; PEIFFER, Jeanne (hgs.); SPEISER, David (ed.). *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*. Bd.II-III. Basel: Springer, 1988-1992.
- BERNOULLI, Johann; SPIESS, Otto (hg.). *Der Briefwechsel von Johann I. Bernoulli*, Bd. I. Basel: Birkhäuse, 1955.
- BOSCOVICH, Ruggiero Giuseppe. *De continuitatis lege et eius consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires dissertatio*. Romae: Ex typographia generosi Salomoni, 1754.
- BOULLIAU, Ismael. *De lineis spiralibus demonstrationes novae.* Parisiis: Apud Sebastianum Cramoisy, regis & reginae architypographum, et Gabrielem Cramoisy, via Iacobaea, sub Ciconiis, 1657.
- CAVALIERI, Bonaventura. *Exercitationes geometricae sex... auctore F. Bonaventura Cavalerio,...* . Bononiae: Typis J. Montii, 1647.
- CRAIG, John. *Tractatus mathematicus de figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis*. Londini: Apud Sam. Smith & Benj. Walford, 1693.
- DESCARTES, René; ADAM, Charles; TANNERY, Paul. *Oeuvres de Descartes publiées par Charles Adam & Paul Tannery.* Vol. I-XII. Paris: L. Cerf, 1897-1910.
- EUCLID; HEIBERG, Johan Ludvig (ed.). *Euclidis opera omnia*. Lipsiae: In edibus B. G. Teubneri, 1883.
- EUCLID; HEIBERG, Johan Ludvig; HEATH, Sir Thomas Little (intr., com.). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Cambridge: University Press, 1908.
- EUKLEIDÉS; SERVÍT, František (překl.). *Eukleidovy Základy.* Praha: Jednota českých mathematiků, 1907.
- EUKLID; HEIBERG, Johan Ludvig; FITZPATRICK, Richard (ed., trans.). *Euclid's Elements Of Geometry.* Lulu.com: 2007. ISBN 978-0-6151-7984-1.
- FERMAT, Pierre de; TANNERY, Paul (ed., trans.); HENRY, Charles (ed.). *Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry.* Paris: Gauthier-Villars et fils, 1891 (I); 1894 (II).

- FONTENELLE, Bernard de. „Éloge de Monsieur le Marquis de L'Hospital“. In: *Éloges des Academiciens. Avec l'Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, T. 1. La Haye: Isaac van der Kloot, 1715, p. 47-63.

- GALILEI, Galileo. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali*. In Leida: Appresso gli Elsevirii, 1638.

- GRÉGOIRE de Saint-Vincent. *P. Gregorii a Ste Vincentio opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Antverpiae: Apud Ioannem et Iacobum Meursios, 1647.

- *Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique.* Tome X. Paris: Par la compagnie des libraires, 1730.

- HUYGENS, Christiaan. *Opera varia*. Lugduni Batavorum: Apud Janssonios Vander Aa, 1724.

- HUYGENS, Christiaan; VOLLGRAFF, Johan Adriaan. *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. Vol. I-XXII. La Haye: M. Nijhoff, 1888-1950.

- *Journal des sçavans*. Paris: Chez Jean Cusson, 1691; 1692; 1693.

- KEPLER, Johannes. *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur.* Fancofurti: Apud Claudium Marnium et & Haeredes Ioannis Aubrii, 1604.

- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von der preussischen (Deutschen) Akademie der Wissenschaften, Reihe 1-7. Darmstadt (Leipzig, Berlin): Akademie Verlag, 1923- .

- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; GERHARDT Carl Immanuel (hg.). *Historia et origo calculi differentialis.* Hannover: Im Verlage der Hahn´schen Hofbuchhandlung, 1846.

- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; GERHARDT, Carl Immanuel (hg.). *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*. Berlin: Mayer & Müller, 1899.

- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; GERHARDT, Karl Immanuel (hg.). *Die philosophischen Schriften*. 7 Bände. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung, 1875 – 1890.

- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; GERHARDT, Karl Immanuel (hg.). *Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. I. GERHARDT.* 7 vols., Berlin (vol. 1-2); Halle (vol. 3-7), 1849-1863. Reprinted: Hildesheim: Georg Olms., 1962.

- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; MAKOVSKÝ, Jan (překl.). „O pravé mystické teologii“. In: *Studia Comeniana et historica* 42, č. 87-88 (2012), p. 2-6.

- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; PARMENTIER, Marc (trans., intr., com.). *La Naissance Du Calcul Differentiel: 26 Articles Des Acta Eruditorum*. Paris: Vrin, 1995. ISBN 2-7116-0997-0.

- L'HOSPITAL, Guillaume François Antoine de. *Traité Analytique des Sections Coniques, et de leur usage pour la résolution des Equations dans les problèmes tant déterminés qu'indéterminés*. Paris: Veuve de J. Boudot et J. Boudot fils, 1707.

- L'HOSPITAL, Guillaume François Antoine de; CAILLE, Nicolas-Louis de La. *Analyse des infiniment petits par M. le Marquis de l'Hôpital, suivie d'un Nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage. Par l'auteur du Guide des jeunes mathématiciens dans l'étude des leçons de mathématique de M. l'Abbé de La Caille*. Paris: Didot, 1768.

- L'HOSPITAL, Guillaume François Antoine de; YOUSCHKEVITCH, Adolf, P. (ed.). *Analiz beskonechno malykh : perevod s frantsuzskogo, N.V. Levi, pod redaktsiei i so vstupitelnoi statéi A.P. Yushkevicha*. Moskva: Gos. Tekh.-Teor. Izd., 1935.

- MALBOUISSON, Iara Velasco E Cruz. *Filosofia e ciência no século XIV : o caso de Nicole Oresme.* Universidade Estadual de Campinas, 2011.

- MONTUCLA, Jean Etienne. *Histoire des mathematiques: dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau & le développement des principales découvertes, les contestations qu'elles ont fait naître, & les principaux traits de la vie des mathématiciens les plus célebres,* Vol. 2. Paris: C. A. Jombert, 1758.

- MYDORGE, Claude. *Claudii Mydorgii ... Prodromi catoptricorum et dioptricorum: siue Conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria praeuii & facem praeferentis. Libri quatuor priores*. Parisiis: Ex typographia I. Dedin, via Nucum, sub signo trium Columbarum, 1641.

- NEWTON, Isaac. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Londini: Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater, 1687.

- NEWTON, Isaac; COLSON, John (trans.). *The method of fluxions and infinite series; with its application to curve-lines*. London: Printed by Henry Woodfall, 1736.

- NIEUWENTIJDT, Bernard. *Analysis infinitorum, seu Curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae*. Amstelaedami: apud Joannem Wolters, 1695.

- NIEUWENTIJDT, Bernard. *Considerationes circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae Principia, & calculi differentialis usum in resolvendis problematibus Geometricis*. Amstelaedami: apud Joannem Wolters, 1694.

- PAPPUS; COMMANDINO, Federico (trans., com.). *Pappi Alexandrini Mathematicae collectiones*. Bononiae: Ex Typographia HH. De Duccijs, 1660.

- PAPPUS; HULTSCH, Friedrich Otto. *Collectionis quae supersunt...* . Berolini: Apud Weidmannos, 1878.

- PASCAL, Blaise. *Oeuvres de Blaise Pascal*, Tome V. Paris: Chez Lefèvre, 1819.

- PROCLUS; TAYLOR, Thomas. *The Philosophical and Mathematical Commentaries of Proclus on the First Book of Euclid's Elements*. London: Printed for the author, 1791.

- RABUEL, Claude. *Commentaires sur la geometrie de M. Descartes*. Lyon: Marcellin Duplain, 1730.

- ROBERVAL, Gilles Personne de. „De resolutione aequationum“. In: *Histoire de l'Académie royale des sciences ... avec les mémoires de mathématique & de physique... tirez des registres de cette Académie*. Paris: J. Boudot, 1730, p. 136-247.

- SAURIN, Joseph. „Éloge de M. le Marquis de L'Hospital“. In *Journal de Sçavans*, *pour l'anne'é MDCCIV.* Paris: Chez Jean Cuson, 1704, p. 188-192.

- *The philosophical transactions 1700-1701*, vol. XXII. London: Printed by M. Mathews for R. Knaplock, R. Wilkin, and H. Clements, 1700. Stable URL: http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/22/260-276.toc.

- TORRICELLI, Evangelista. „Appendix de Dimensione Cycloidis“. In: *Opera geometrica*. Florentiae: Typis A. Masse & L. de Landis, 1644, p. 85-90.

- TSCHIRNHAUS, Ehrenfried Walther von. *Medicina mentis : sive, Artis inveniendi praecepta generalia*. Lipsiae: Apud J. Thomam Fritsch, 1695.

- TSCHIRNHAUS, Ehrenfried Walther von. *Medicina Mentis, sive tentamen genuinae Logicae in qua disseritur de Methodo detegendi incognitas veritates*, Amsterodami: Apud A. Magnum & J. Rieuwertz juniorem, 1686.

- VARIGNON, Pierre. „Nouvelle formation de Spirales“. In: *Histoire de l'académie royale des science, année MDCCIV.* Paris: Chez G. Martin, J.-B. Coignard fils, H.L. Guérin, 1704, s. 61-130.

- VARIGNON, Pierre. *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*. Paris: Chez Rollin, 1725.
- VIÈTE, François; SCHOOTEN, Frans van. *Francisci Vietæ Opera mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita*. Lugduni Batavorum: Ex Officina Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum, 1646.
- WALLIS, John. *Johannis Wallis ... De algebra tractatus, historicus & practicus ... cum variis appendicibus ... Operum Mathematicorum volumen alterum*. Oxford: E Theatro Sheldoniano, 1693.
- WALLIS, John. *Opera mathematica*. Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1695.
- WALLIS, John. *Tractatus duo de Cycloide*. Oxoniae: Typis Academicis Lichfiendianis, 1659.

Sekundární literatura.

- ALAIN. *Propos sur les pouvoirs*. Paris: Gallimard, 1985. ISBN 987-2-07-032278-7.
- BARBIN, Evelyn. *La révolution mathématique du XVIIe siècle*. Paris: Ellipses 2006. ISBN 798-2-7298-3144-8.
- BESSOT, Didier; Cercle d'histoire des sciences (eds.). *Aux origines du calcul infinitésimal.* Paris: Ellipses, 1999. IBSN 2-7298-6818-6.
- BOYER, Carl B. *The history of the calculus and its conceptual development: (The concepts of the calculus)*. New York: Dover Publications, 1949.
- BRUNSCHWICG, Léon. *Les étapes de la philosophie mathématique*. Paris: Librairie F. Alcan, 1912.
- CAJORI, Florian. *A history of mathematical notations*. New York: Dover Publication, 1993. ISBN 0-486-67766-4.
- CANTOR, Moritz (hg.). *Vorlesungen über geschichte der mathematik*. I-IV. Leipzig: B. G. Teubner, 1880-1924.
- COLLINS, John. *Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota, etc., ou, Correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du XVIIe siècle, relative à l'analyse supérieure*. Paris: Mallet-Bachelier, 1856.

- COOLIDGE, Julian Lowell. *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxford: Clarendon Press, 1990. ISBN 0-19-853939-8.

- DIDEROT, Denis; D'ALEMBERT, Jean Le Rond. *Encyclopédie, Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une Société de Gens de lettres*. Tome I-XXVIII. Paris: Briasson, 1751-1772.

- ERASMUS. *Les Adages d'Érasme*. Présentés par les Belles Lettres et le GRAC (UMR 5037): 2010.

- FEINGOLD, Mordechai (ed.). *Before Newton: the life and times of Isaac Barrow*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1990. ISBN 0-521-30694-9.

- GARDIES, Jean-Louis. *Pascal entre Eudoxe et Cantor*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1984. ISBN 2711608441.

- CHASLES, Michel. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Bruxelles: M. Hayes, 1837.

- LORIA, Gino. *Spezielle algebraische und transscendente ebene kurven.* Leipzig: G. B. Teubner, 1902.

- MAHONEY, Michael S. *The mathematical career of Pierre de Fermat, 1601-1665*. Princeton, N. J.: Princeton university Press, 1994. ISBN 0-691-03666-7.

- MANCOSU, Paolo. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York; Oxford: Oxford University Press, 1996. ISBN 0-19-508463-2.

- NEEDHAM, Tristan. *Visual Complex Analysis*. Oxford: Claredon Press, 1997. ISBN 0-19-853447-7.

- *Nouveau siècle de Louis XIV*, Tome 4. Paris: Chez F. Buisson, 1793.

- PANZA, Marco. *Newton et les origines de l'Analyse: 1664–1666*. Paris: Albert Blanchard, 2005. ISBN 2-85367-230-1.

- PERKINS, David. *Calculus and its origins*. Washington: MAA, 2012. ISBN 978-0-88385-575-1.

- RUSSELL, Bertrand; EISLER, Lee. *The quotable Bertrand Russell*. Buffalo, N. Y.: Prometheus Books, 1993. ISBN 0-87975-728-0.

- SERFATI Michel; DESCOTES, Dominique. *Mathématiciens français du XVIIe siècle:*

Descartes, Fermat, Pascal. Clermont-Ferrand: Presses Universitaires Blaise-Pascal, 2008. ISBN 978-2-84516-354-6.

- SERRES, Michel. *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques : étoiles, schémas, points*. Paris: Presses universitaires de France, 1990. ISBN 2-13-043389-8.

- STURDY, David J. *Science and Social Status: The Members of the Academie Des Sciences 1666-1750*. Woodbridge, Suffolk, UK; Rochester, NY, USA: Boydell Press, 1995. ISBN 0-85115-395-X.

- TATON, René (ed.). *History of science*. Translated by A. J. Pomerans. New York: Basic Books, 1964.

- TEIXEIRA, Francisco Gomes. *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches.* New York: American Mathematical Society, 1972.

- WHITESIDE, Derek. *The Mathematical Principles underlying Newton's Principia Mathematica*. University of Glasgow: 1970.

- WOLF, Rudolf. *Biographien zur Kulturgeschiche der Schweiz*. Zürich: Orell, Füsslii a Comp. 1859.

Články.

- BEELEY, Philip. „Infinity, Infinitesimals, and the Reform of Cavalieri: John Wallis and his Critics“. In: Ursula Goldenbaum and Douglas Jesseph, ed. *Infinitesimal Differences: Controversies between Leibniz and his Contemporaries*. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2008, p. 199-214. ISBN 978-3-11-020216-8.

- BLANCO ABELLÁN, Mónica. „Could L'Hospital have read Newton's Methodus fluxionum?“. In: *3rd International Conference of the European Society for the History of Science*. Viena: 2008, p. 61-68. Id.: 52013911.

- BLAY, Michel. „Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley“. In: *Revue d'histoire des sciences*, 39, n°3 (1986), p. 223-253. Stable URL: http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0151-4105_1986_num_39_3_4477.

- BONGIOVANNI, Vincenzo. „Étude Historique des premieres caracterisations des coniques“. In: *Revista Brasileira de História da Matemática*, 7, n°14 (2007), p. 439-462. ISSN 1519-955X.

Stable URL: http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20Festschrift/37%20-%20Vincenzo%20-%20final.pdf.

- BOS, Henk J. M. „Differentials, higher-order differentials and the derivative in the leibnizian calculus“. In: *Archive for history of exact sciences*, 14 (1974), p. 1-90.

- COOLIDGE, Julian Lowell. „The Unsatisfactory Story of Curvature“. In: *Selected papers on calculus*; Mathematical Association of America. Belmont: Dickenson Pub. Co., 1969, p. 35-39.

- COSTABEL, Pierre. „Une lettre inédite du marquis de L'Hôpital sur la résolution de l'équation du troisième degré“. In: *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*. 18, n°1 (1965), p. 29-43.

- GIUSTI, Enrico. „Le problème des tangents de Descartes à Leibniz“. In: Albert Heinekamp, ed. *300 Jahre "Nova methodus" von G. W. Leibniz (1684-1984).* Stuttgart: Steiner Verlag Wiesbaden, 1986, p. 26-37. ISBN 3-515-04470-1.

- GRENE, Marjorie; RAVETZ, Jerome, R.. „Leibniz's Cosmic Equation: A Reconstruction“. In: *The Journal of Philosophy*, 59, n°6 (1962), p. 141-146. Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2022829.

- LORIA, Gino. „Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica“. In: *Bibliotheca Mathematica*, 3, n°1 (1900), p. 75-89.

- MAKOVSKÝ, Jan. „Mystika rozumu I“. In: *Studia Comeniana et historica* 42, č. 87-88 (2012), p. 126-143. ISSN 0323-2220.
- MAKOVSKÝ, Jan. „Mystika rozumu II“. In: *Studia Comeniana et historica* 43, č. 89-90 (2013), p. 266-285. ISSN 0323-2220.

- MAKOVSKÝ, Jan. „O Leibnizově kosmické rovnici“. In: *Kosmologie v dějinách a současnosti filosofie.* Olomouc: Univerzita Palackého, 2009, p. 87-100. ISBN 978-80-244-2438-5.

- NAGEL, Fritz. „Nieuwentijt, Leibniz, and Jacob Hermann on Infinitesimals“. In: *Infinitesimal Differences: Controversies between Leibniz and his Contemporaries*. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2008, p. 199-214. ISBN 978-3-11-020216-8.

- PEIFFER, Jeanne. „Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann“. In: *Electronic Journal for History of Probability and Statistics,* Vol. 2/1, June 2006. Stable URL: http://www.jehps.net/Novembre2006/Peifferanglais3.pdf.

- PEIFFER, Jeanne. „Le problème de la brachystochrone à travers les relations de Jean I Bernoulli avec L'Hôpital et Varignon“. In: *Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli*. (Studia Leibnitiana. Sonderheft 17). Stuttgart: Franz Steiner Verlag Wiesbaden, 1989, p. 59-81. ISBN 3-515-05082-5.

- ROBINET, André. „L'abbé de Catelan, ou l'erreur au service de la vérité“. In: *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 11, n°4 (1958), p. 289-301.

- ROBINET, André. „Le groupe malebranchiste introducteur du Calcul infinitésimal en France“. In: *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 13, n°4. Paris: Presses universitaires de France, 1960, p. 287-308.

- SÉVIGNÉ, Marie de Rabutin-Chantal. *Lettres de Madame de Sévigné, de sa famille, et de ses amis*. Tome XI, 1693-1701. Paris: Chez Dalibon, 1823.

- STOLL, André. „Les Spirales“. In: *REPERES - IREM*. N° 39 - avril 2000 (73), p. 73-99. Stable URL: http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/39stoll.pdf.

- WHITMAN, E. A. „Some Historical Notes on the Cycloid“. In: *Selected papers on calculus*; Mathematical Association of America. Belmont: Dickenson Pub. Co., 1969, p. 1-7.

- YOUSCHKEVITCH, Adolf P. „Gottfried Wilhelm Leibniz et les fondements du calcul infinitésimal“. In: *Organon*, 5 (1968), p. 153-168.

Anotace.

Práce je věnována přelomové, epochální práci prvního období infinitesimálního počtu, *Analyse des infiniment petits* Guillauma, markýze de l'Hospitala. Dělí se na tři podstatné části: překlad, komentář a úvodní studii. Účelem je představit toto dílo v jeho jedinečných okolnostech jeho vzniku a zároveň určit jeho obecné místo v dějinách matematických idejí. Úvodní studie je věnována především osobnosti markýze de l'Hospitala. Na pozadí rozvoje infinitesimálního počtu se vykresluje jeho po dlouhou dobu oficiální obraz v dějinách matematiky. V druhé části se rozebírá blízký lidský i matematický vztah markýze de l'Hospitala s Johannem Bernoullim; a na základě rozboru markýzových geometrických úspěchů se ve srovnání s řešeními Johanna Bernoulliho, bratra Jakoba a Leibnize se podává obecná charakteristika prvního infinitesimálního počtu coby geometrické *i* fyzikální teorie a možností jeho objevitelských cest prostřednictvím analogií založených na nejzazším požadavku harmonie přírody. Třetí část úvodní studie v historických souvislostech sporů a výměn stran základů diferenciálního počtu objasňuje z hlavní ideje Leibnizovy symbolické přírody, totiž zákona kontinuity, povahu diferenciálního znaku *dx*, jeho radikální novost a argumenty ospravedlnění přesnosti infinitesimálního počtu. Druhá kontroverze, která je v práci představena, probíhá mezi Rollem a Varignonem; podstatnými rysy jsou institucionální podmínky rozvoje počtu a Varignonovy pokusy o důkazy nekonečně malých v Newtonově duchu. Komentář *Analýzy nekonečně malých* slouží k historickému, filologickému a filosofickému objasnění nových metod a dokládá utváření *Analýzy nekonečně malých* z jejích zdrojů, tj. přednášek Johanna Bernoulliho markýzi de l'Hospitalovi a jejich dopisové výměny.

Annotation.

Bien que ma dissertation de thèse consiste essentiellement en trois pièces de nature assez distincte (il s'agit de la traduction en tchèque de *l'Analyse des infiniment petits*, son commentaire et l'étude d'introduction), cependant, je subsume le tout sous une idée unificatrice de la loi de continuité leibnizienne qui régit le système de symboles au fondement du calcul différentiel. Quant à la première partie, elle décrit premièrement l'histoire de la vie du marquis de l'Hospital dite « officielle» ou bien « académique » due à l'Éloge de Bernard de Fontenelle qui sert de l'arrière-plan de la seconde partie, de l'étude introductrice, du portrait « caché», consistant en l'analyse des succès géométriques du marquis, des solutions de problèmes physico-géométrique célèbres en comparaison de celles de Jean Bernoulli, son jeune précepteur – fondée bien évidemment sur la correspondance mutuelle. En raison de la nature du calcul leibnizienne tant physique que géométrique je démontre que c'était précisément la pureté géométrique de son ésprit qui faisait obstacle à l'invention géométrique du marquis. Én deuxième lieu je présente la description des controverses qui ont éclaté entre Leibniz et Nieuwentiijt sur la questions de fondement du calcul, tout en précisant sur les écrits leibniziennes la nature symbolique ambiguë de différentielles. L'autre controverse, entre Rolle et Varignon, sert à décrire les contrainte institutionnelles du dévéloppement du calcul aussi que les explication fondatrices de la part de Varignon qui indique la futur transformation newtonienne du calcul infinitésimal. Enfin le commentaire, d'après ladite idée unificatrice, marque sur des exemples mathématiques la transformation algébrique de la géométrie grecque pendant le XVII^{e} siècle tout en illustrant les articles de l'Analyse et comparant ses sources bernoulliennes.

Annotation.

The basis of my dissertation consists in three rather distinct parts, that is Czech translation, a commentary and introduction to the famous *Analyse des infiniment petitis* by marquis the l'Hospital. Nevertheless I unify the whole in virtue of the leibnizien metaphysical idea of the law of continuity governing the symbolic system fundamental to the differential calculus of Leibniz. Concerning the first part of the introduction I represent the so called academical or official picture of marquis de l'Hospital based on the *Éloge* by Bernard de Fontenelle. I use this picture as a background to the so called hidden picture of the marquis, which consists in the analysis of the physico-geometrical problems solved by the marquis de l'Hospital in comparison to those of Johann Bernoulli, based naturally on the correspondence of the two of them. I demonstrate, regarding the nature of the calculus both physical and geometrical, that it was precisely the geometrical purity of his mind had forbidden him to make inventions in geometry, unlike Johann Bernoulli. In the third part I describe the controversies that made part of the development of the calculus; firstly the controversy between Nieuwentijt and Leibniz concerning the fundamental questions of calculus. I precise on this occasion my views on the nature of leibnizian calculus as stated above, that is ambiguous symbolism of differentials. The second controversy, between Rolle and Varignon puts forward institutional obstacles of the development of the calculus as well as the foundational attempts made by Varignon that indicated the future transformation of the calculus according to the spirit of Newton. Finally the commentary, by the symbolic idea above, indicates the algebraical shift of the 17th century geometry; illustrates articles of the *Analyse des infiniment petits* and shows the dependence on Bernoulli's inventions.