



FAKULTA STROJNÍ
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA STROJNÍ
KATEDRA KONSTRUOVÁNÍ STROJŮ

DISERTAČNÍ PRÁCE

k získání akademického titulu doktor
v doktorském studijním programu: P2301 Strojní inženýrství
studijním oboru: Stavba strojů a zřízení

Průběh zkratového momentu mechanickou soustavou pohonu

Autor:
Školitel:

Ing. Miroslav Urbánek
Doc. Ing. Petr Heller, CSc.

Plzeň 2015

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení disertační práci, jejichž téma je „Průběh zkratového momentu mechanickou soustavou pohonu“.

Tato práce je koncipována dle požadavků Studijního a zkušebního řádu ZČU Plzeň, tj. obsahuje zejména shrnutí a zhodnocení poznatků ve studované oblasti.

Prohlašuji, že jsem tuto písemnou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této práce.

V Plzni dne:

.....
podpis

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat všem, kteří mě doposud v mém úsilí podporovali, zejména svému školiteli, Doc. Ing. Petru Hellerovi, CSc., rodině a kolegům.

Upozornění

Podle zákona o právu autorském č. 35/1965 Sb. (175/1996 Sb. ČR), § 17, zákona o vysokých školách č. 111/1998 Sb. je využití a společenské uplatnění výsledků práce, včetně uváděných vědeckých a výrobně - technických poznatků nebo jakékoliv nakládání s nimi možné pouze na základě autorské smlouvy se souhlasem autora, autorů citovaných prací a Fakulty strojní Západočeské univerzity v Plzni.

Počty předaných výtisků disertační práce a autoreferátu jsou uvedeny na první straně přihlášky.

Vyjádření nositele a řešitelů projektu, že student je autorem té části práce, kterou předkládá, včetně určení procentuálního podílu studenta na celkovém projektu.

Předložená disertační práce vznikla v rámci projektů Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy 1M0519 - Výzkumné centrum kolejových vozidel, ZČU 2005 -2011 a CZ.1.05/2.1.00/03.0077 Západočeské materiálově metalurgické centrum, COMTES FHT a.s. 2011-2014.

Student je autorem disertační práce z 100%, což činí 2% z celkového projektu MŠMT 1M0519 a 2% z celkového projektu MŠMT-CZ.1.05/2.1.00/03.0077.

.....
Doc. Ing. Petr Heller, CSc.
řešitel projektu
Výzkumné centrum kolejových vozidel

.....
Dr. Ing. Zbyšek Nový
výzkumný ředitel centra
Západočeské materiálově metalurgické centrum

Anotace

Zkratový moment je nepředvídatelný a nežádoucí jev, který má negativní vliv na elektrické a mechanické komponenty každého pohonu. V technické praxi existuje mnoho způsobů individuálního pohonu dvojkolí trakčním elektromotorem. Pro řešení daného problému byla zvolena elektrická jednotka, u které se tento problém historicky vyskytoval a jednotka je stále vyráběna v různých modifikacích. Škody způsobené zkratovým momentem na mechanických částech pohonu byly jedním z důvodů zabývat se uvedenou problematikou.

Ve své práci představuji možné způsoby řešení zkratového momentu se zaměřením na pastorek, který je nejvíce namáhán při působení zkratového momentu u elektrické jednotky 471. Součástí mé práce jsou pevnostní výpočty vybraných komponent individuálního pohonu a materiálové analýzy.

Summary

Short circuit torque is an unpredictable and undesirable phenomenon, which has a negative influence on the electrical and mechanical components of each drive. In the engineering practice, there are many ways of an individual wheelset drive by traction motor. For finding a problem solution, an electric unit, which is produced in various modifications still at present and where the problem occurred historically, was chosen. Damages caused by short circuit torque on mechanical parts of the drive were one of the reasons to deal with this issue.

In the thesis, I present possible ways of solution of the short-circuit torque with the focus on a pinion, which is stressed most when exposed to the short circuit torque at electric unit 471. Strength calculations of selected components of an individual drive and material analysis are part of my thesis.

Zusammenfassung

Kurzschlussdrehmoment ist ein unvorhersehbares und unerwünschtes Phänomen, welches einen negativen Einfluss auf die elektrischen und mechanischen Komponenten jedes Antriebs hat. In technischer Praxis gibt es viele Möglichkeiten, wie ein Radsatz durch den Traktionsmotor antreiben. Um das Problem zu lösen, wurde für die Analyse eine Elektroeinheit, in welcher das Problem schon historisch wirkt, gewählt. Diese Elektroeinheit ist weiterhin in verschiedenen Modifikationen hergestellt. Schäden, die durch das Kurzschlussdrehmoment an mechanischen Teilen des Antriebs auswirken, sind die Motivation, sich mit diesem Thema befassen.

In meiner Arbeit stelle ich verschiedene Möglichkeiten der Lösung des Kurzschlussmoments mit dem Fokus auf ein Ritzel vor. Dieses Ritzel ist höchstbelastet mit dem Kurzschlussdrehmoment bei der Elektroeinheit Nr. 471. Wichtiger Teil meiner Arbeit sind die Festigkeitsberechnungen der einzelnen Antriebskomponenten und Materialanalyse.

OBSAH :

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Úvod | 8 |
| Cíle disertační práce | 9 |
| 1. Železniční doprava a kolejová vozidla | 10 |
| 1.1. Hnací kolejová vozidla..... | 10 |
| 1.2. Rozdělení hnacích vozidel s individuálním pohonem..... | 10 |
| 1.2.1. Pohon sousým motorem | 11 |
| 1.2.2. Pohon tlapovým motorem..... | 11 |
| 1.2.3. Pohon kloubovou hřídelí procházející dutinou rotoru trakčního motoru..... | 12 |
| 1.2.4. Pohon dutou hřídelí kolem nápravy | 13 |
| 1.2.5. Pohon dutou kloubovou hřídelí kolem nápravy | 13 |
| 1.2.6. Pohon kloubovým hřídelem a nápravovou převodovkou s kuželovým soukolím ... | 14 |
| 1.2.7. Pohon dvojkolí elektrickým motorem s osou kolmou k nápravě, vně rámu podvozku | 14 |
| 2. Elektrická jednotka řady 471 | 15 |
| 2.1. Popis individuálního pohonu..... | 16 |
| 3. Analýza zkratového momentu | 19 |
| 3.1. Co je to vlastně zkratový moment | 19 |
| 3.2. Popis asynchronního trakčního motoru | 20 |
| 3.3. Výpočty zkratových momentů výrobcem motorů..... | 21 |
| 3.4. Naměřená data z diagnostického systému vozidla | 23 |
| 3.5. Výpočet zkratových momentů pomocí numerické simulace | 26 |
| 3.5.1. Rešerše | 27 |
| 3.5.2. Úprava diferenciálních rovnic | 27 |
| 3.5.3. Parametry motoru | 43 |
| 3.5.4. Simulace teoretických poruch pomocí náhradního schématu..... | 48 |
| 3.6. Zhodnocení zkratového momentu | 48 |
| 3.7. Vliv zkratového momentu na mechanickou část pohonu..... | 49 |
| 3.7.1. Kinematická analýza pomocí maticové počtu | 49 |
| 3.7.2. Kinetická a potenciální energie..... | 56 |
| 3.8. Spojení mechanické a elektrické části | 59 |
| 3.8.1. Testování modelu..... | 60 |
| 3.8.2. Kinematické poměry v bodech kontaktu kola s kolejnicí..... | 63 |
| 3.8.3. Silové účinky v bodech kontaktu kola s kolejnicí | 69 |
| 3.8.4. Silové účinky působící na dvojkolí | 72 |
| 3.8.5. Zhodnocení modelu | 74 |
| 4. Analýza poškození součástí vzniklým zkratovým momentem | 75 |
| 4.1. Metalografická analýza pastorku..... | 78 |
| 4.1.1. Hodnocení makrostruktury..... | 78 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.1.2. Hodnocení mikrostruktury..... | 79 |
| 4.1.3. Řádkovací elektronová mikroskopie..... | 79 |
| 4.1.4. Kapilární zkouška..... | 81 |
| 4.1.5. Únava a šíření trhliny | 82 |
| 4.1.6. Zhodnocení metalografické analýzy..... | 85 |
| 4.2. Kontrola z hlediska konstrukce | 86 |
| 4.2.1. Kontrola pastorku | 86 |
| 4.2.2. Kontrola hřídele rotoru..... | 90 |
| 4.2.3. Zhodnocení..... | 94 |
| 5. Definice modelu pro detekci poškození mechanické části pohonu | 95 |
| 5.1. Modelování ozubení..... | 96 |
| 5.2. Namáhání ozubení..... | 99 |
| 5.2.1. Výsledky simulace při působení jmenovité momentu 2400Nm..... | 100 |
| 5.2.2. Výsledky simulace při působení zkratového momentu 5765Nm..... | 102 |
| 5.3. Napětí v pastorku po nalisování | 105 |
| 5.4. Deformace skříní sestavy od vlastní hmotnosti..... | 106 |
| 5.5. Namáhání pastorku, kola a statoru | 108 |
| 5.6. Celkové namáhání soustavy pohonu | 112 |
| 5.7. Posouzení únavy a vznik trhliny | 114 |
| 5.8. Zhodnocení vlivu momentu na mechanickou simulaci..... | 116 |
| 6. Celkové shrnutí defektů při zkratovém momentu | 117 |
| 7. Splnění cílů | 119 |
| 8. Předpokládané přínosy práce | 120 |
| 9. Doporučení pro praxi..... | 121 |
| 10. Závěr..... | 122 |
| 11. Literatura | 123 |
| 12. Přílohy | 125 |
| 12.1. Odvození rovnic pro směr y | 125 |
| 12.2. Naprogramované skripty | 136 |

Seznam použitých jednotek

| Značka | Veličina | Jednotka |
|------------------|---------------------------------------------------------|----------|
| C | kapacita | F |
| f_r | kmitočet rotoru | Hz |
| f_s | kmitočet napájecího zdroje | Hz |
| i | okamžitý proud | A |
| I | střední hodnota proudu | A |
| i_{d1}, i_{d2} | proudy ve stejnosměrném meziobvodu | A |
| k | transformační koeficient | - |
| l | indukčnost | H |
| L_r | rozptylová indukčnost rotorového vinutí | H |
| $L_{s\sigma}$ | celková rozptylová indukčnost statorového vinutí | H |
| L_t | indukčnost trolejového vedení | H |
| L_v | indukčnost přídavné vazby | H |
| L_w | rozptylová indukčnost | H |
| L_σ | rozptylová indukčnost statorového vinutí | H |
| M | moment | Nm (Nmm) |
| p | výkon | W |
| p_p | počet pól párů | - |
| R | odpor | ohm |
| R_r | odpor rotorového vinutí | ohm |
| R_s | odpor statorového vinutí | ohm |
| R_t | odpor trolejového vedení | ohm |
| s | skluz – elektrický | - |
| u | okamžité napětí | V |
| U | střední hodnota napětí | V |
| u_{c1}, u_{c2} | napětí na filtračních kondenzátorech | V |
| U_t | napětí trolejového vedení | V |
| ψ | spřažené magnetický tok | Wb |
| ω | ω_{m-p_p} , úhlová rychlost dvojpólového motoru | rad/s |
| ω_m | úhlová rychlost motoru (n-pólů) | rad/s |
| ω_r | $\omega_s - \omega$, úhlový kmitočet motoru | rad/s |
| ω_s | synchronní úhlová rychlost dvojpólového motoru | rad/s |
| ω_{sm} | synchronní úhlová rychlost motoru (n-pólů) | rad/s |
| dolní indexy: | | |
| A, B, C | rotorové vinutí | |
| a_1, b_1, c_1 | 1. statorové vinutí | |
| a_2, b_2, c_2 | 2. statorové vinutí | |
| r | rotoru | |
| s | statoru | |
| x | x-ová složka | |
| y | y-ová složka | |
| horní index: | | |
| IA, I | souřadný systém stojící svázaný s 1. statorovým vinutím | |
| IB | souřadný systém stojící svázaný s 2. statorovým vinutím | |
| II | souřadný systém svázaný s rotujícím vinutím | |
| III | souřadný systém rotující synchronní rychlostí | |

| | | |
|-----------|--------------------------------|---------------------|
| a | velikost trhliny | mm |
| b | tlumení | - |
| B | matice tlumení | - |
| D,d | průměr | mm |
| E | modul pružnosti v tahu (tlaku) | MPa |
| E_k | kinetická energie | J |
| E_p | potenciální energie | J |
| F | síla | N |
| G | modul pružnosti ve smyku | MPa |
| h | výška | mm |
| I | moment setrvačnosti | kgmm^2 |
| J | průřezový moment | mm^2 |
| J_p | polární moment | mm^2 |
| k | tuhost | Nmm |
| K | matice tuhosti | Nmm |
| K_I | faktor intenzity napětí | $\text{MPam}^{1/2}$ |
| K_{IC} | lomová houževnatost | $\text{MPam}^{1/2}$ |
| l | délka | mm |
| m | hmotnost | Kg |
| M | moment | Nmm |
| M | matice hmotnosti | kgmm^2 |
| n | otáčky | - |
| N | počet cyklů | - |
| q | vektor zobecněných souřadnic | mm |
| p | tlak | MPa |
| R | poloměr | mm |
| x | výchylka | mm |
| z | počet zubů | - |
| Δ | vzdálenost | mm |
| μ | Poissonovo číslo | - |
| ρ | hustota | kg/m^3 |
| φ | úhlová výchylka | ° |
| σ | napětí | MPa |

dolní indexy:

| | |
|---|--------------|
| a | hlava |
| d | dvojkolí |
| o | ohyb |
| p | pohon |
| r | radiální |
| t | tečné |
| x | x-ová složka |
| y | y-ová složka |
| z | z-ová složka |
| 1 | pastorek |
| 2 | ozubené kolo |

horní index:

| | |
|---|-----------------|
| p | hřídelový prvek |
|---|-----------------|

Úvod

Současná hnací kolejová vozidla ať se závislou či nezávislou trakcí (s elektrickým přenosem) mají v hnacím podvozku obvykle trakční střídavé asynchronní motory. Asynchronní motory díky své jednoduché konstrukci a nízkým zástavovým prostorám jsou téměř „nenahraditelnou“ koncepcí individuálního pohonu dvojkolí. Při vývoji nových trakčních vozidel se závislou trakcí, kterými se budu zabývat, je tento typ pohonu stále využíván, ať se jedná o střídavou či stejnosměrnou napájecí síť. Výhody této koncepce převyšují jeho negativa a případné problémy.[1], [25], [26], [32]

Obecně lze tvrdit, že každé zařízení bývá zdrojem problémů, které může vnášet do systému chyby. Jedním z negativních vlivů působící v soustavě pohonu dvojkolí je zkratový moment, který vzniká v důsledku poruch zařízení před motorem a velikost zkratového momentu může narůst až na násobky nominálních hodnot. Zmiňované poruchy nemusí být vždy markantní, ale při jejich častém opakování se jejich vliv stupňuje. Poruchy mohou být např.: chyby v elektronickém řízení, destrukce některé elektrické nebo mechanické části a atd. Zkratový moment, závislý na typu a velikosti zkratu, pak působí na mechanickou část pohonu, které jsou nadměrně namáhány oproti běžnému provozu. [25], [26]

Cílem mé práce je sledovat vliv zkratového momentu na mechanickou část pohonu dvojkolí, protože při kritických hodnotách momentu může docházet k inicializaci poškození nebo dokonce k destrukci některé z komponent pohonu. Právě časově krátké zatížení v řádech milisekund o vysokých hodnotách bývá iniciátorem poškození mechanických součástí. Uvedené problémy pravděpodobně vznikaly při haváriích v elektrických jednotkách 471, kdy docházelo k poškození ozubení pastorku umístěného na hřídeli asynchronního motoru a k poškození spoluzabírajícího kola v prvním převodovém stupni. Dále zde docházelo ke spadávání pastorku z kužele hřídele motoru a nebo ke stříhání šroubu mezi skříní převodovky a statorem motoru. Všechny tyto vzniklé problémy vedly k podrobnějšímu prozkoumání celého problému, což je náplní mé práce. [25], [26], [27]

V rámci řešení tohoto problému ve výzkumných centrech byly provedeny komplexní materiálové analýzy systematickým přístupem ke vzniku zkratu a jeho působení na pohon dvojkolí. Dalším přínosem práce bude seznam doporučení pro technickou praxi, které mohou pomoci k eliminaci namáhání celé mechanické části pohonu, protože tento typ pohonu je díky své jednoduché konstrukci a aplikaci používán řadou předních českých a světových výrobců trakčních vozů (ŠKODA TRANSPORTATION, BOMBARDIER, SIEMENS).[25], [27]

V průběhu řešení jsem získával nové informace o problému a podle nich jsem směřoval řešení své práce. V rigorózní práci jsem představil možný způsob simulace a její verifikace, ale po získání nových informací ohledně porušení pastorku a spoluzabírajícího kola, se řešení zaměřilo na pastorek a jeho okolí, viz **Obr. 0-1**. Proto odvozené rovnice popisující asynchronní motor s dvojitou hvězdou byly použity pouze jako vstupní moment, následně byly získány záznamy z diagnostického zařízení jednotky, které lze považovat za věrohodnější. Z důvodu popsání nedokonalého kontaktu v ozubení jsem využil numerické simulace pomocí metody konečných prvků. Na základě CAD modelu pohonu dvojkolí byl vytvořen zjednodušený numerický model, kde jsem sledoval chování konstrukce při působení provozních a nestandardních jevů.[28],[30]



Obr. 0-1 – Poškozené ozubení v převodovce elektrické jednotky 471 [29]

Cíle disertační práce

- 1) Provést rozbor současného stavu elektrických pohonů
- 2) Popis elektrické jednotky 471
- 3) Analýza zkratového momentu a možnosti jeho negativního působení na mechanické části pohonu
- 4) Analýza poškození součástí vzniklým zkratovým momentem
- 5) Definovat model pro detekci poškození mechanické části pohonu
- 6) Provést analýzu při působení zkratového momentu
- 7) Celkové shrnutí defektů při zkratovém momentu
- 8) Splnění cílů
- 9) Shrnout a zobecnit poznatky získané z provedených rozborů
- 10) Z provedených řešení stanovit doporučení pro konstrukční a provozní praxi

1. Železniční doprava a kolejová vozidla

Železniční doprava je kolejová doprava provozovaná po železniční dráze a provozuje ji obvykle železniční společnost. Výhodou kolejové dopravy oproti silniční je v relativně nízké spotřebě energie na tunokilometr, které je dáno nízkým valivým odporem v kontaktu kola s kolejnicí a také nižším aerodynamickým odporem vlaku. Železniční doprava se obvykle dělí na nákladní a osobní. Ač s rozvojem silniční a letecké dopravy ve druhé polovině dvacátého století její význam upadl, je železniční společnost stále významným a prakticky nenahraditelným přepravcem velkých objemů materiálů např. uhlí. Spolu s výstavbou vysokorychlostních tratí se železniční doprava osob znovu stává konkurencí pro dopravu silniční i leteckou mezi centry měst na střední vzdálenosti.

Kolejové vozidlo je způsobilé k jízdě po koleji, jenž vozidlo nese a vede. Hlavní částí vozidla je skříň a pojezd. Kolejová vozidla se dělí na hnací vozidla, vozy a speciální vozidla. Hnací vozidla nebo-li trakční budou předmětem práce, i když speciální vozidla, která mohou být také trakční, nebudou zde více zmiňována. [4]

1.1. Hnací kolejová vozidla

Hnací kolejová vozidla jsou vozidla, která přenáší trakční sílu adhezním způsobem z kola na kolejnici a překonávají jízdni odpory vozu resp. vozové soupravy. Charakteristické vlastnosti vozidla jsou: hlavní rozměry, hmotnost, hnací soustrojí, trakční vlastnosti, spřahování a narážecí ústrojí, brzda, ale také vytápění, větrání a opatření proti hluku, elektrická výzbroj, stanoviště strojvedoucího, atd.

Hnací kolejová vozidla se dají rozdělit podle různých hledisek, ale jedno z nejdůležitějších je podle zdroje energie. Nejstarším způsobem je parní trakce od které se již upustilo a dnes již existují i nekonvenční systémy, jako jsou např. akumulátorové, pneumatické s neadhezními systémy. V současné technické praxi se ustálily dva pohony a to elektrická a motorová trakce (závislá a nezávislá). Obě trakce se dají posuzovat podle společných hledisek, jsou to provozní účel vozu, výkonová kategorie, uspořádání pojezdu vozidla a způsob pohonu dvojkolí a jeho značení. Hnací vozidla se závislou trakcí, konkrétně elektrické jednotky budou předmětem práce. [4]

1.2. Rozdělení hnacích vozidel s individuálním pohonem

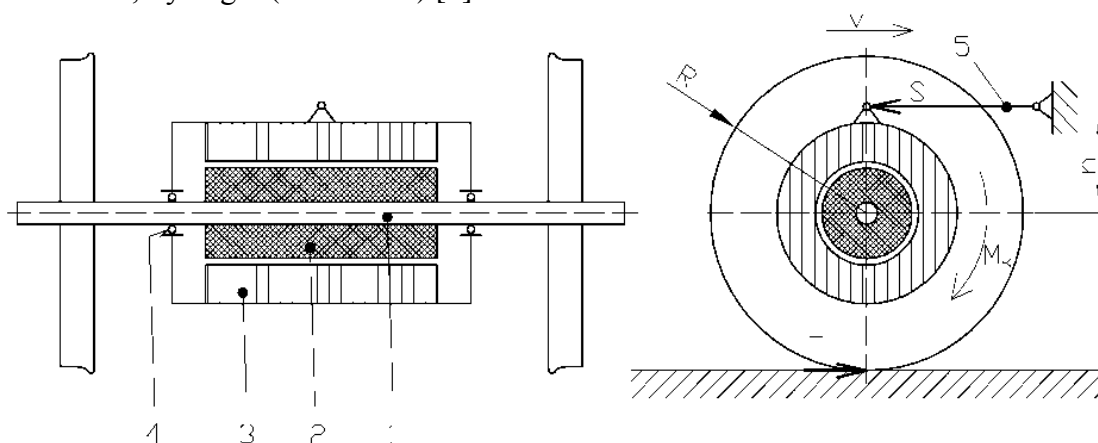
Obecně lze dále rozdělit vozidla podle typu pohonu na vozidla s centrálním pohonem, skupinovým pohonem, individuálním pohonem a pohonem volně otočného kola. Práce se zabývá individuálním pohonem, protože pohon elektrické jednotky 471 má individuální pohon. Pod pojmem individuální pohon dvojkolí se rozumí převážně pohon dvojkolí s elektrickým trakčním motorem a podle konstrukčního uspořádání trakčního motoru a hnané nápravy, viz Tab. 1-1. Použití konkrétního individuálního pohonu dvojkolí je ovlivněno kategorií vozidla, jeho koncepčním a konstrukčním uspořádáním a výkonem trakčního motoru. V následujících podkapitolách jsou uvedeny pouze individuální pohony železničních vozidel. [4],[8]

Tab. 1-1 - Rozdělení individuálních pohonů dvojkolí [8]

| | |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A. Trakčním motorem s osou rovnoběžnou s nápravou | <ul style="list-style-type: none"> - sousým motorem (přímý pohon) - tlapovým motorem - motorem s kloubovou hřídelí v dutině rotoru - motorem s kloubovou hřídelí v dutině pastorku, - motorem a krátkou kloubovou hřídelí - motorem a spojkou - dutou hřídelí kolem nápravy - dutou kloubovou hřídelí kolem nápravy |
| B. Trakčním motorem s osou kolmou k nápravě | <ul style="list-style-type: none"> - pohon dvojkolí s pevnou nápravou - pohon kol pomocí spojovací hřídele - pohon dvojice volně otočných kol |

1.2.1. Pohon sousým motorem

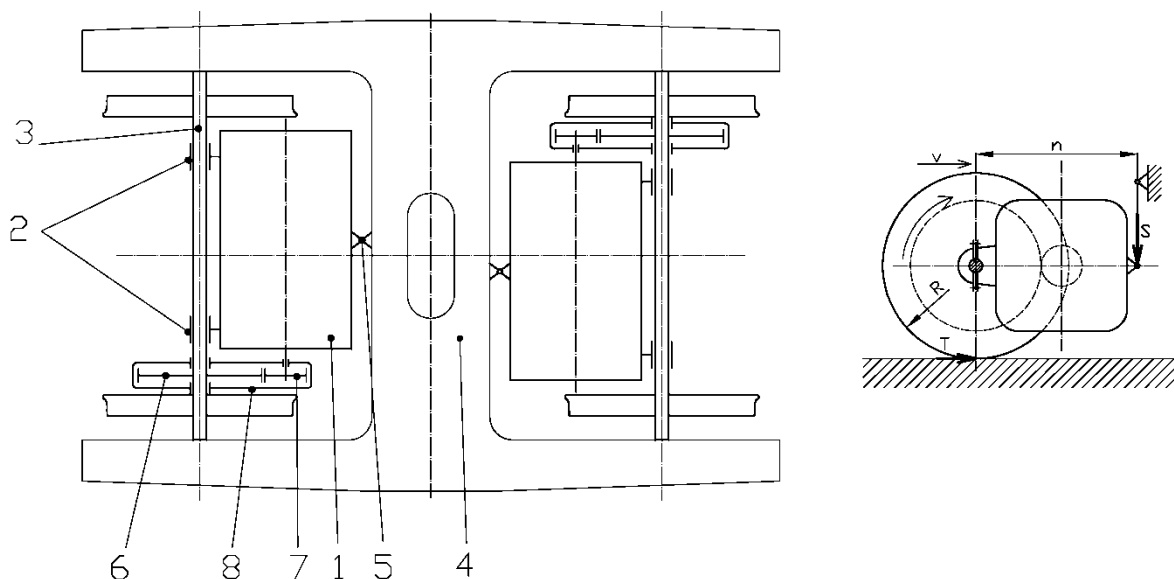
Přímý pohon dvojkolí trakčním motorem na nápravě je nejjednodušší z možných pohonů dvojkolí. Hnací moment se na dvojkolí přenáší bez ozubeného převodu, otáčky motoru se shodují s otáčkami dvojkolí. Stator je v tomto případě uložen na rámu podvozku a mezi rotorem a nápravou bývá použit vhodný mechanismus, např.: ojníčkový.. Schematicky zobrazený princip tohoto pohonu je na **Obr. 1.1** a praktické použití je např.: pohon AEG, ŠKODA 85 E, Syntegra (SIEMENS) [8]



Obr. 1.1 - Schéma pohonu sousým motorem (přímý pohon) [8]

1.2.2. Pohon tlapovým motorem

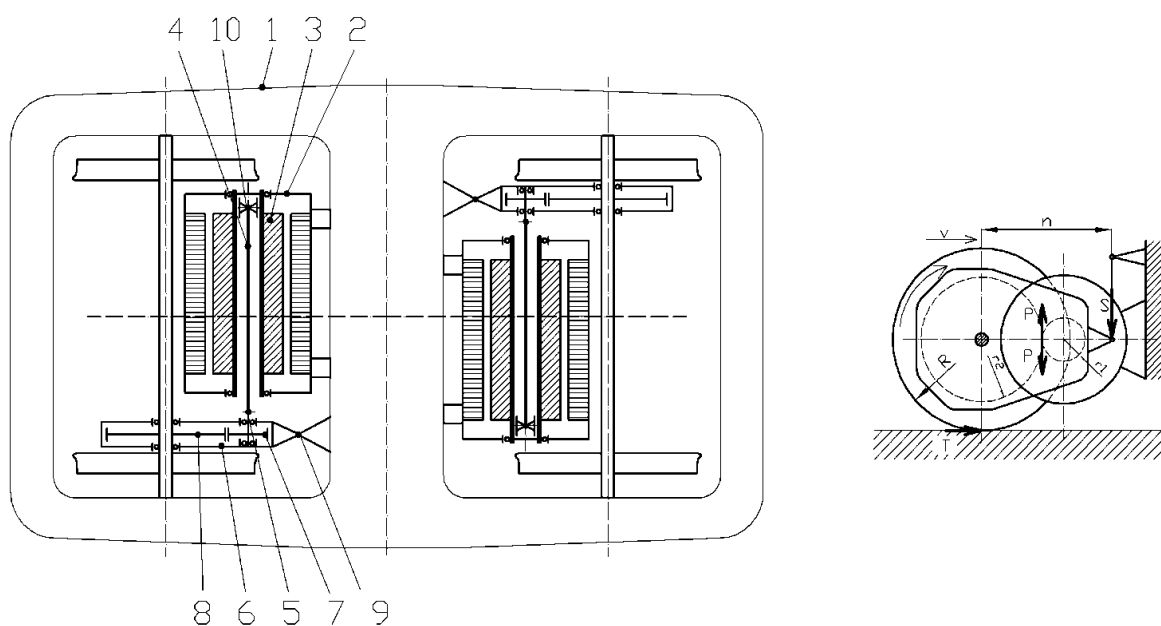
Pohon tlapovým motorem byl a stále je (v různých modifikacích) používán pro některé své významné pozitivní vlastnosti. Patří k nim přijatelné výrobní náklady, jednoduchost a robustnost a tím i spolehlivost v provozu. Z nevýhod musí být uvedena velká nevypružená hmotnost, neboť přibližně polovina hmotnosti trakčního motoru spočívá na nápravě, je tedy nevypružená. Dále je obtížné utěsnění krytu převodu proti úniku oleje. Z uvedených důvodů je více používán u vozidel pro nižší a střední rychlosti (do 100-120 km/h), některé modifikace jsou používány i pro vyšší rychlosti. Tento pohon je s oblibou používán u trakčních vozidel nezávislé trakce, tedy u dieselelektrických lokomotiv TE 015 (CZLOKO), ŠKODA 90E, motorových vozů Prima BB 427000 (ALSTOM) a ŠKODA 27Ea. [8]



Obr. 1.2 - Schéma pohonu tlakovým trakčním motorem [8]

1.2.3. Pohon kloubovou hřídelí procházející dutinou rotoru trakčního motoru

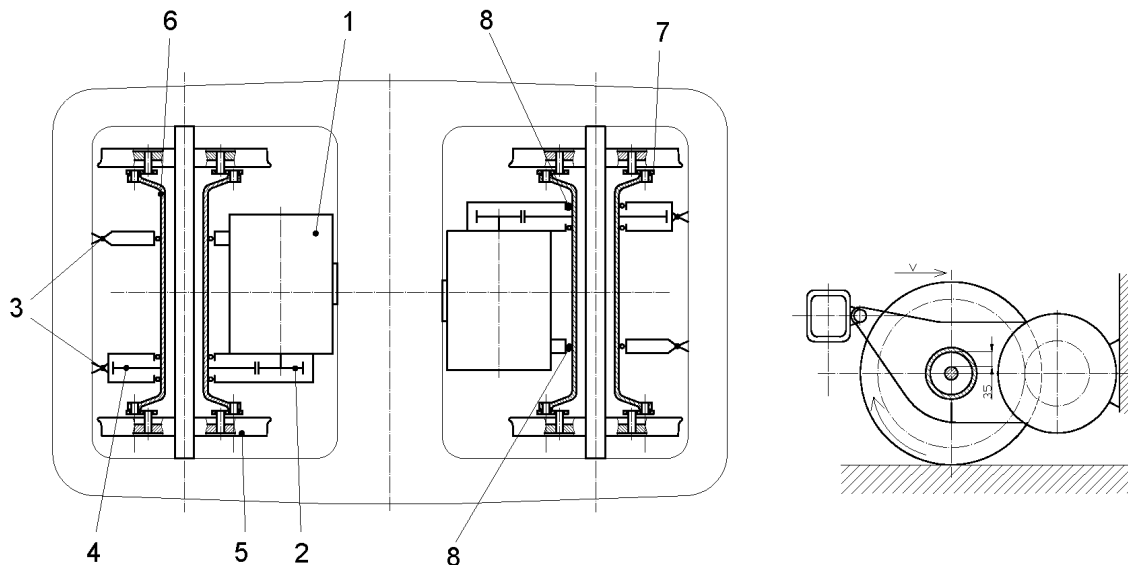
U stejnosměrných trakčních motorů velkých výkonů (700 kW a více), jejichž osa je rovnoběžná s osou nápravy, nelze z prostorových důvodů vložit kloubovou hřídel mezi motor a převodovku. Řešení ukazuje Obr. 1.3, kde na rámu podvozku 1 je pevně uchycen trakční motor 2 s dutým rotorem 3, v němž se nachází kloubová hřídel 4, s jedním kloubem 5, mezi kloubovou hřídelí a pastorkem 7. Zde je možné použít relativně dlouhou kloubovou hřídel, která se při relativních svislých pohybech duté hřídele rotoru 3 a osy pastorku 7 jen málo šikmo deformuje a usnadňuje tak činnost kloubů. Ozubené kolo 8 je nalisováno na nápravě. Kloub 10 kloubové hřídele v dutině rotoru 4 je konstruován pohyblivě ve směru osy motoru, aby umožnil našikmení kloubové hřídele při svislých pohybech motoru. Důležitou roli hraje závěska 9, která se nachází mezi převodovkou 6 a rámem podvozku 1. [8]



Obr. 1.3 - Schéma pohonu kloubovou hřídelí procházející dutým rotorem motoru [8]

1.2.4. Pohon dutou hřídelí kolem nápravy

Cílem pohonů dutou hřídelí objímajících nápravu je snížení velikosti nevypružených hmot. Ze schématu na **Obr. 1.4** je patrné, že trakční motor 1, má na svém hřídeli nasazen pastorek 2. Pastorek zabírá s ozubeným kolem 4, které je nasazeno na duté hřídeli 6. Celé toto soustrojí je zavěšeno na hlavním příčnicku rámu podvozku a přes závěsy 3 na čelníku. Dutá hřídel je uložena ve valivých ložiskách 8, které jsou součástí soustrojí motor - převodovka. Dutá hřídel 6 má na obou koncích konzoly, které jsou připojeny přes ojníčkový mechanismus 7 s koly 5. Ojníčkový mechanismus je naznačen pouze schematicky, může být různého provedení, některé z nich budou popsány dále. Soustrojí motor, převodovka, dutá hřídel je plně vypružené. [8]

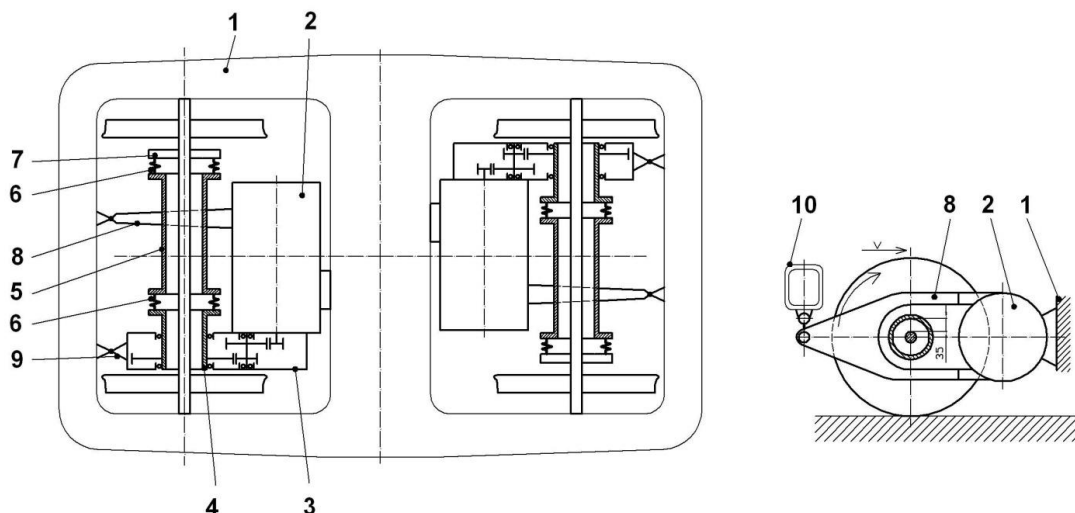


Obr.

1.4 - Schéma pohonu dutou hřídelí kolem nápravy [8]

1.2.5. Pohon dutou kloubovou hřídelí kolem nápravy

Pohon dutou hřídelí kolem nápravy nachází uplatnění u vozidel pro vysoké rychlosti. Je to dáno nízkou hmotností nevypružených hmot, která je omezena jen na dvojkolí s ložiskovými skříněmi a částí kloubové hřídele umístěné na nápravě. Následující **Obr. 1.5** ukazuje schéma tohoto pohonu zabudovaného v podvozku. Na rámu podvozku 1 je upevněno soustrojí složené z trakčního motoru 2 a převodové skříně 3 za pomoci konzoly trakčního motoru 8 a konzoly převodovky 9. Obvykle použitý asynchronní trakční motor má poměrně vysoké otáčky (3500 ot/min i více), což vyžaduje použití dvoustupňové převodovky, jak je schematicky v obrázku naznačeno. Velké ozubené kolo druhého stupně převodu je upevněno na trubkovém unašeči 4, který je v převodovce uložen na ložiskách. Dutá hřídel 5 objímající nápravu je na straně blíže k převodovce spojena s trubkovým unašečem 4 přes mechanismus 6. Na druhém konci může být dutá hřídel spojena stejným mechanismus 6 s unašečem 7, který je pevně nalisován na nápravě. **Obr. 1.5** vpravo ukazuje situaci v řezu. Pozice 1 je část rámu podvozku a pozice 10 je jeho čelník. Dutá hřídel 5 má vůči nápravě vůli cca 35 až 50 mm. Tato vůle umožňuje svislé pohyby soustrojí 2 a 3 (motor s převodovkou). Soustrojí motor 2, převodovka 3 s trubkovým unašečem 4 a částí kloubové hřídele 5 je plně vypruženo. Nevypružené zůstává pouze dvojkolí, včetně menší části kloubové hřídele 5. Použití pohonu dutou kloubovou hřídelí kolem nápravy využívá např.: lokomotiva Taurus (SIEMENS) a dále tento způsob pohonu využívaly i další výrobce jako jsou ŠKODA (E471), BOMBARDIER. [8]



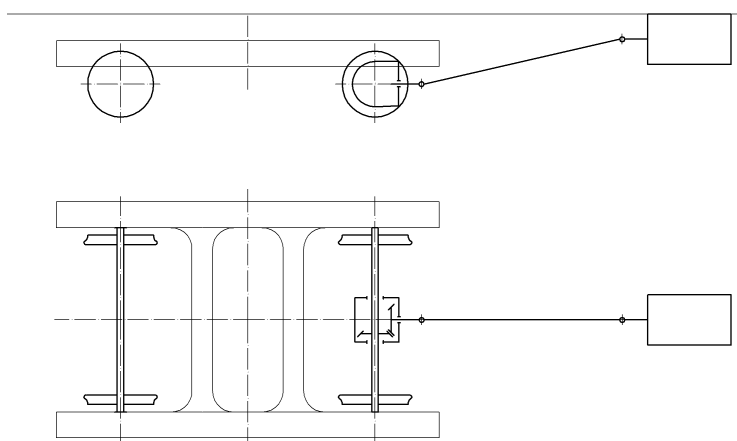
Obr. 1.5 - Schéma pohonu dutou kloubovou hřídelí kolem nápravy [8]

1.2.6. Pohon kloubovým hřídelem a nápravovou převodovkou s kuželovým soukolím

Poměrně neobvyklým konstrukčním řešením individuálního pohonu je, když motory jsou namontovány na skříně a pohon podvozku je řešen přes převodovku a kardanový hřídel. Toto řešení snižuje nevypružené hmoty na podvozku a tím snižuje celkové opotřebení při vysokých rychlostech. Příklad tohoto neobvyklého konstrukčního řešení je British Rail Class 91, kde současně lokomotiva má také zavěšený transformátor na spodku skříně, takže v porovnání současnými elektrickými lokomotivami je skříně relativně prázdná. [57]

1.2.7. Pohon dvojkolí elektrickým motorem s osou kolmou k nápravě, vně rámu podvozku

Koncepce tohoto pohonu má několik variant, ale v železniční dopravě je používán např.: trakční motor pod skříně vozidla, pohání jedno dvojkolí v rámu podvozku. Tento pohon je použit na podvozku vozidla Pendolino ČD, řady 680, viz Obr. 1.6. V podvozku je umístěn naklápěcí mechanismus skříně, proto z prostorových důvodů je trakční motor zavěšen na spodku skříně, pohání přes kloubovou hřídel a kuželovou převodovku jedno dvojkolí v podvozku. [8]



Obr. 1.6 - Schéma pohonu dvojkolí jednotky Pendolino, ČD řada 680 (ALSTOM) [8]

2. Elektrická jednotka řady 471

City Elefant je obchodní název pro elektrickou dvoupodlažní jednotku s hliníkovou integrální stavbou skříně skládající se z elektrického vozu 471, vloženého vozu 071 a řídicího vozu 971. Jednotka je určena pro dopravu cestujících v městských aglomeracích pro stejnosměrné napájení napětím 3 kV DC. Tato jednotka se v pražské příměstské dopravě stává od roku 2000 postupně nástupcem elektrických jednotek řad 451 a 452, resp. v ne zcela vyhovujících prototypch jednotek řady 470. Všechny vozy jednotky jsou dvoupodlažní s nástupní hranou v úrovni 550 mm nad temenem kolejnice, tj. v úrovni nástupiště. Délka soupravy přes spřáhla je 79,2 metru, hmotnost 155,4 tun. Skříně jsou vyrobeny z hliníkových profilů. Maximální provozní rychlost jednotky je 140 km/h a konstrukční rychlost 160 km/h. Formálně má jednotka 643 míst pro cestující z toho 310 k sezení z nichž je 23 míst v první třídě a 287 ve druhé. Oddíl první třídy se nachází v horním podlaží elektrického vozu, v ostatních vozech jednotky jsou pouze oddíly druhé třídy. Celá jednotka je vybavena klimatizací, okna v oddílech pro cestující nejsou otevírací. Krajní nástupní prostory jednotky jsou vybaveny zvedacími plošinami pro cestující na invalidním vozíku.

Pojezd motorového vozu jednotky je tvořen dvěma dvounápravovými podvozky s individuálním pohonem náprav třífázovými asynchronními trakčními motory zapojenými do dvojité hvězdy. Trakční měniče jsou IGBT tranzistory s kapalinovým chlazením. Měníče jsou osazeny prvky s maximálním závěrným napětím 3,3kV a novější vozy s 6,5kV. Řízení soupravy je možné ve třech režimech, tj. automatické vedení vlaku, automatická regulace rychlosti a manuální režim. Řídicí systém také dovoluje ovládání až čtyř spojených jednotek z jednoho stanoviště. Plánovaná životnost je udávána nejméně 40 let a cena soupravy je asi 216 milionů Kč. [7], [42], [43], [44]



elektrická jednotka řady 471



elektrická jednotka řady 575 (LG)



elektrická jednotka řady 671 (ZSSK)



elektrická jednotka řady 675 (UZ)

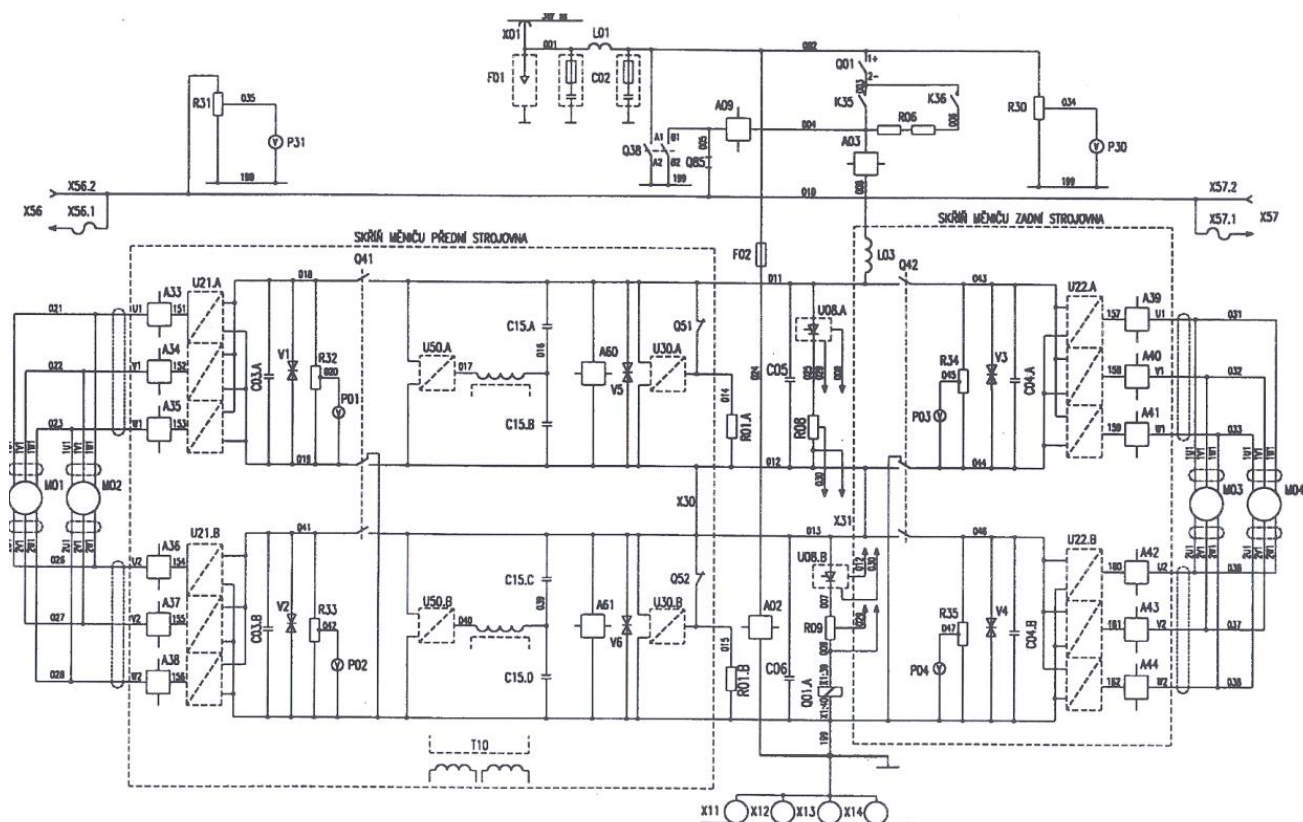
Obr. 2.1 Elektrické jednotky 471 a její modifikace [42]

Společnost ŠKODA TRANSPORTATION a.s. na bázi původní elektrické jednotky řady 471 postavila několik modifikací této jednotky, které jsou provozovány na jiných sítích než byla původní jednotka zkonstruována. Ale i přes rozdílný způsob napájení trakčních motorů v podvozku jsou vždy asynchronní motory zapojené do dvojité hvězdy. [42],[43],[44]

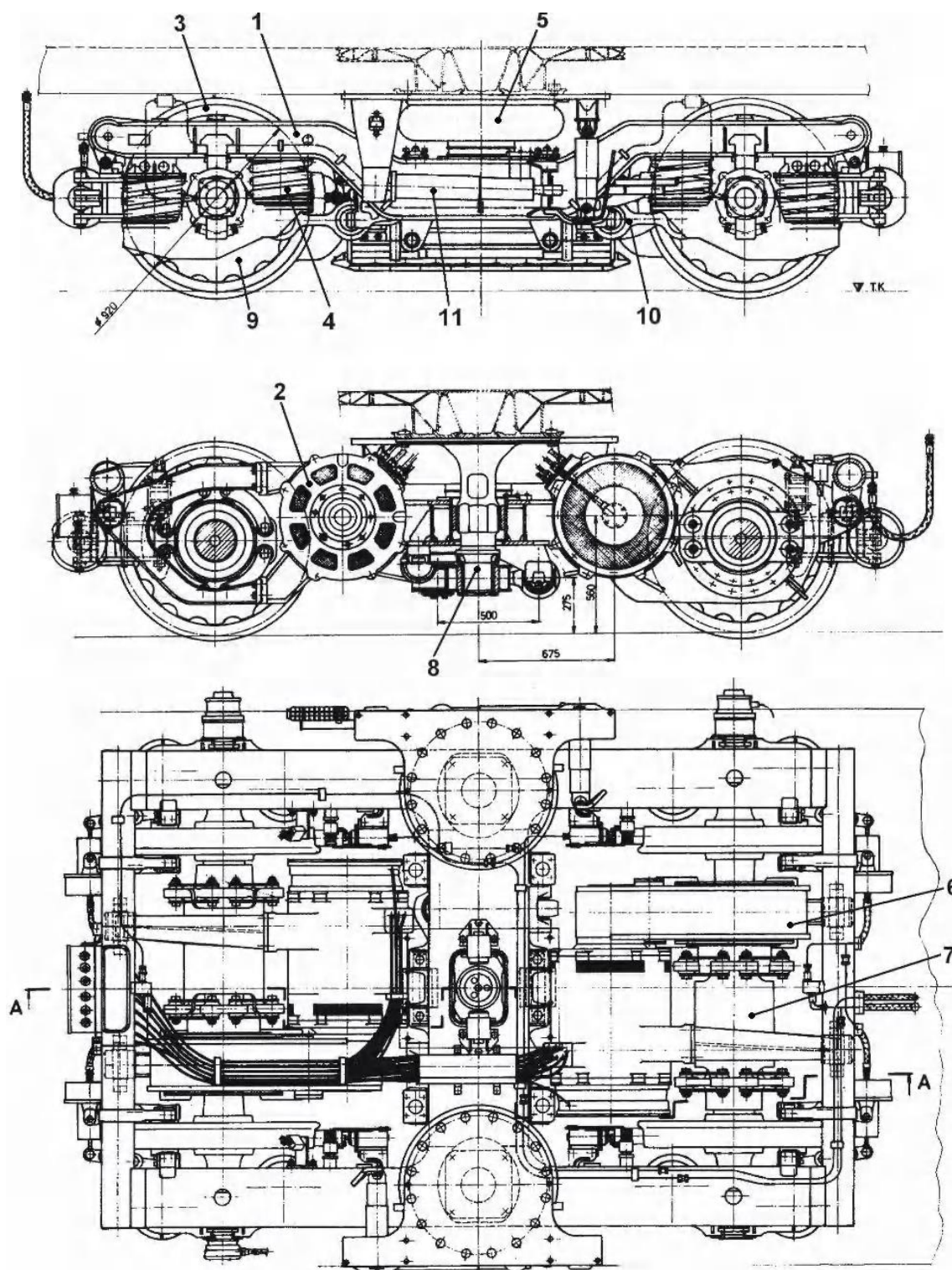
Zmiňovanými modifikacemi jsou elektrická jednotka řady 575 (LG), která je určena pro příměstský provoz na tratích Litvy s rozchodem 1520 mm. Další modifikací je elektrická jednotka řady 671 (ZSSK), jež je dvousystémová jednotka určená pro přepravu cestujících v okolí městských aglomerací. A v neposlední řadě elektrická jednotka řady 675 (UZ), určená pro meziregionální dopravu primárně na tratích Ukrajiny. [42],[43],[44]

2.1. Popis individuálního pohonu

Elektrická jednotka řady 471 je určena pro elektrickou stejnosměrnou trakci a k odběru proudu ze sítě je jediný polopantografový sběrač ŠKODA 3 LSP 40/S, umístěný ve snížené části střechy trakčního vozu. Hlavní vypínač je typu N1B4G3 s vypínacím proudem 1250 A. Trakční měnič se skládá z dvanácti IGBT tranzistorů. Trakční motory MLU 4245 K/6 jsou střídavé třífázové asynchronní šestipólové stroje s vlastním chlazením, zapojené do dvojité hvězdy a napájené napět'ovými střídači. Regulaci výkonu EDB zajišťuje také měnič s IGBT prvky. Primární měnič pomocných pohonů sestává ze čtyř IGBT tranzistorů. Kompletní schéma zapojení je na **Obr. 2.2**. Podvozky jsou oba hnací a dvojkolí jsou vedena ojnicemi. Trakční motory jsou usazeny na silentblocích v rámu podvozku a přes kloubové spojky pohánějí dvoustupňové nápravové převodovky, viz **Obr. 2.3** [25],[30]



Obr. 2.2 Elektrické zapojení E 471, [33]

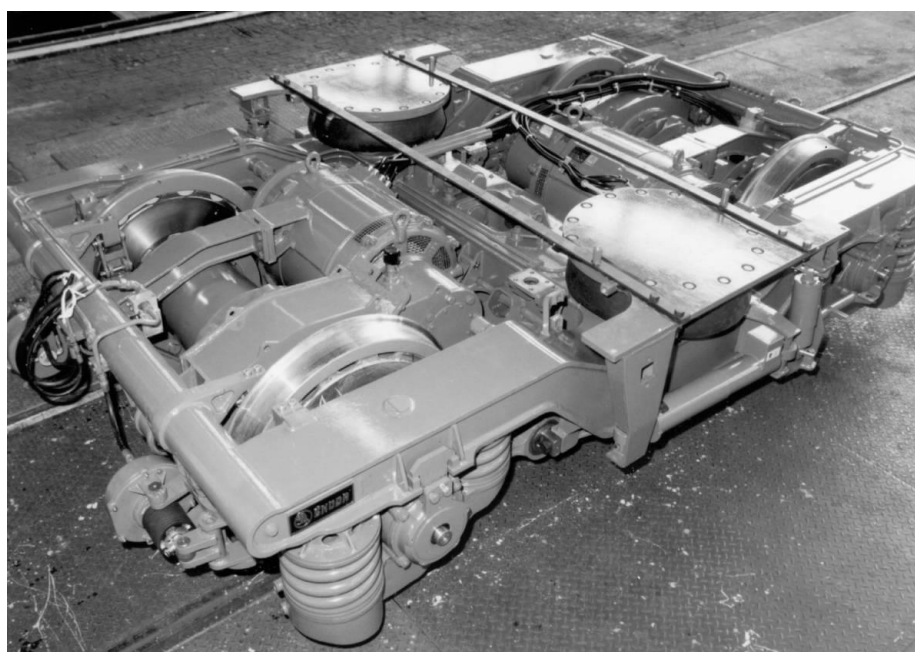


1–Uzavřený svařovaný rám podvozku, 2 – Dva trakční asynchronní motory s kotvou na krátkou a s vlastním chlazením o výkon 2x 500 kW, 3 – Dvojkolí s průměrem 920 mm, 4 - Primární vypružení šroubovitými pružinami s paralelním tlumičem, 5 - Sekundární pneumatické pružiny a paralelní svislý tlumič, 6 - Nápravová převodová skříň, 7 - Dutá kloubová hřídel kolem nápravy, 8 - Otočný čep s mechanismem pro přenos tažné síly, 9 – Kotoučová brzda s kotoučem v kole, 10 – Vedení nápravového ložiska 11 – Podélný tlumič vrtivého pohybu, 12 - Kolejnicová brzda

Obr. 2.3 Nárys a půdorys podvozku 471 [7]

Od doby využívání výkonové elektroniky pro pohony, jmenovitě IGBT tranzistorů se mohou pohodlně řídit asynchronní motory, které jsou konstrukčně jednodušší než stejnosměrné motory. Asynchronní motor s kotvou nakrátko v kombinaci IGBT tranzistorem je vhodným individuálním pohonem dvojkolí. Nově používané asynchronní motory s dvojitou hvězdou se začaly zavádět skoro před 20 lety v kolejových vozidlech. Problematikou dvojitě hvězdy se zabývali členové Katedry Výkonové elektroniky na Fakultě elektrotechnické na ZČU v Plzni (dále v textu jen KEV) a jejich zkušenosti formou publikací a odborných konzultací byly využívány i v této práci. [25],[30],[31]

Z hlediska této práce jsou nejdůležitější komponenty pohonu v podvozku, který je zobrazen na výkresu sestavy **Obr. 2.3** a fotografie podvozku je na **Obr. 2.4**.



Obr. 2.4 Fotografie podvozku elektrické jednotky 471, ŠKODA TRANSPORTATION s.r.o. [7]

Tab. 2-1 Souhrnné údaje

| Základní údaje | | Parametry pohonu | |
|-----------------------|--------------------------------------|----------------------------------------|--------------------|
| Výrobce | ŠKODA TRANSPORTATION | Uspořádání pojezdu | Bo'Bo'+ 2'2'+ 2'2' |
| Rok výroby | 1997– dosud | Napájecí soustava | 3 kV DC |
| Počet vyrobených kusů | 83 k 14.3.2013 | Druh elektromotorů | Asynchronní |
| | | Převodový poměr | 4,31 |
| Provozovatel | ČD | Regulace výkonu | IGBT tr |
| Období provozu | 2000–dosud | Hmotnost a rozměry | |
| Trvalý výkon | 2000 kW | Hmotnost ve službě | 155,4 t |
| Maximální tažná síla | 180 kN | Délka přes nárazníky | 79 200 mm |
| Maximální rychlost | 140 km/h | Minimální poloměr projížděných oblouků | 120 m |
| Míst k sezení / stání | 310/333 z toho 23 míst v 1. třídě | Rozchod kolejí | 1 435 mm |

3. Analýza zkratového momentu

V této kapitole bude proveden rozbor zkratového momentu a popis trakčního motoru. Zkratový moment vzniká ve vzduchové mezeře a následně je přenášen přes rotor na další mechanické komponenty. V rámci řešení bylo prověřeno několik možných cest, jak získat průběh zkratového momentu. První možný zdroj byly výpočty dodané společností ŠKODA ELECTRIC, která je výrobcem trakčním motorů dodávaných pro elektrickou jednotku 471. Dalším použitelným zdrojem je záznam z diagnostického zařízení vozidla. Tento zdroj je z pohledu řešení nej přesnější z hlediska praxe, ale nepostihne teoreticky možné průběhy. A proto poslední sledovanou cestou řešení bylo použití matematického modelu z literatury [31] pro řešení v programu Dynast, který umožňuje řešení diferenciálních rovnic s více derivacemi. Tento matematický model musel být upraven pro řešení v programu MATLAB, tzn. každá diferenciální rovnice musela obsahovat jen jednu derivaci.

3.1. Co je to vlastně zkratový moment

Zkratový moment vzniká v důsledku zkratu, který je v mezinárodním elektrotechnickém slovníku definován jako náhodné nebo úmyslné spojení přes zanedbatelný odpor nebo impedanci dvou nebo více bodů obvodu, které mají při normálním provozu různá napětí. Obvykle ke zkratu může docházet z různých příčin, z nichž se často uvádějí nedokonalosti a vady elektrických zařízení, přepětí, nedostatečné dimenzování zařízení, chybná manipulace a nebo cizí zásahy.[41], [59]

V elektrickém zařízení se zkraty projevují četnými nepříznivými následky, které ve značné míře ohrožují bezpečnost zařízení, bezpečnost provozu a předně bezpečnost obsluhy. Z uvedených důvodů je třeba elektrické rozvodné soustavy dimenzovat s ohledem na možné zkratové proudy, které vznikají při zkratu. Velikost těchto zkratových proudů se stanovuje výpočtem nebo měřením na modulu. Základním prostředkem pro určování poměrů při zkratech v elektrických soustavách (při jejich projektování i provozu) je matematické modelování zkratu (tj. výpočet zkratových proudů). Pro výpočet zkratových proudů v současné době existuje mnoho českých technických norem (např. ČSN IEC 781:1994 (33 3021), ČSN EN 60909-0:2002 (33 3022), ČSN 33 3022-1::2004, ČSN IEC 909-2:1997 (33 3024), ČSN EN 61660-1:1999 (33 3025), ČSN EN 61660--2:1999 (33 3025), ČSN EN 61660-3:2002 (33 3025), ČSN EN 60865-1:1997 (33 3040). [41], [59]

Z hlediska zkratové odolnosti je základním předpokladem pro správné dimenzování prvků elektrické rozvodné soustavy znalost zkratových poměrů v místě jejich předpokládané instalace (provozování). Pro výpočet zkratových poměrů v současné době existuje několik počítačových programů. [41], [59]

Obecně točivý moment (v elektrotechnické terminologii označován jako mechanický) vzniká ve vzduchové mezeře mezi státorem a rotorem. Pokud dojde ke zkratu v důsledku např.: nadproudu, lze tento moment označovat za zkratový. Mechanický moment asynchronního motoru se obecně spočte na základě elektrického schématu a je obecně závislý na počtu fází, počtu pólpárů, napětí, odporu, indukčnostech a velikosti proudu. Pro určení zkratového momentu je třeba vždy elektrické schéma motoru upravit resp. některé členy zanedbat. [35], [58]

3.2. Popis asynchronního trakčního motoru

Asynchronní trakční motor MLU 4245 K/6 je určen pro individuální pohon dvojkolí elektrického vozu 471 (**Obr. 3-1**). Trakční motor je 6 pólový uzavřený asynchronní motor s kotvou nakrátko a s vlastní ventilací. Pro přenos krouticího momentu je jednostranně vyveden kuželový konec hřídele. Do odpruženého podvozku je motor upevněn přes jednu pevnou konzolu, jeden silentblok a dále přírubou k převodové skříni. Motor je určen pro pracovní podmínky v mírném a studeném klimatu podle ČSN EN 50125-1. Napájení a provozování motoru je pomocí speciálního provedení statorového vinutí, které je zapojeno do dvou třífázových vinutí do hvězdy s oddělenými uzly. Hvězdy jednotlivých fází mají shodné magnetické osy. Každá hvězda je napájena ze samostatného napěťového střídače s IGBT tranzistory se strmostí napěťových pulzů max. $5kV \cdot \mu s^{-1}$. Napěťové střídače jsou svými stejnosměrnými svorkami připojeny přímo na dělený vstupní filtr. [44]



Obr. 3-1 Trakční motor MLU 4245 K/6 [44]

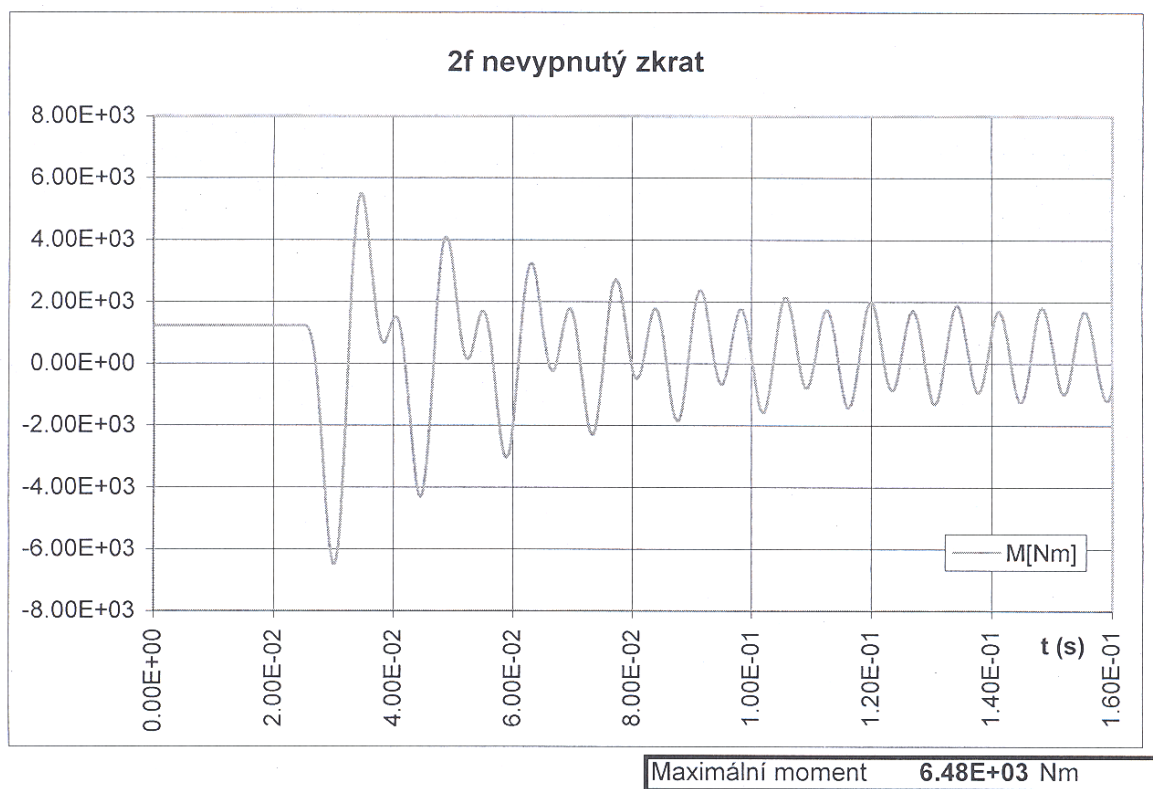
Tab. 3-1 Technické údaje jsou uvedeny pro sinusové napájení [5], [44]

| | |
|---------------------------------------------------|------------------------|
| Jmenovitý výkon | 500 kW |
| Jmenovité sdružené napětí | 3x1130 V |
| Jmenovitý proud | 2 x 155A |
| Jmenovité otáčky | 1989 min ⁻¹ |
| Maximální provozní otáčky | 4120 min ⁻¹ |
| Účinnost | 0.867 |
| Jmenovitá frekvence | 100 Hz |
| Počet pólů | 6 |
| Počet fází | 2 x 3 |
| Momentová přetížitelnost při nulových otáčkách | 1.85 |
| Momentová přetížitelnost při jmenovitých otáčkách | 1.3 |
| Momentová přetížitelnost při maximálních otáčkách | 1.3 |
| Třída teplotní izolace | 200 |
| Izolační napětí motoru | 3000 V |
| Zkušební napětí motoru | 7000 V |
| Hmotnost motoru | 1320 kg +3 % |
| Jmenovitý moment | 2400Nm |

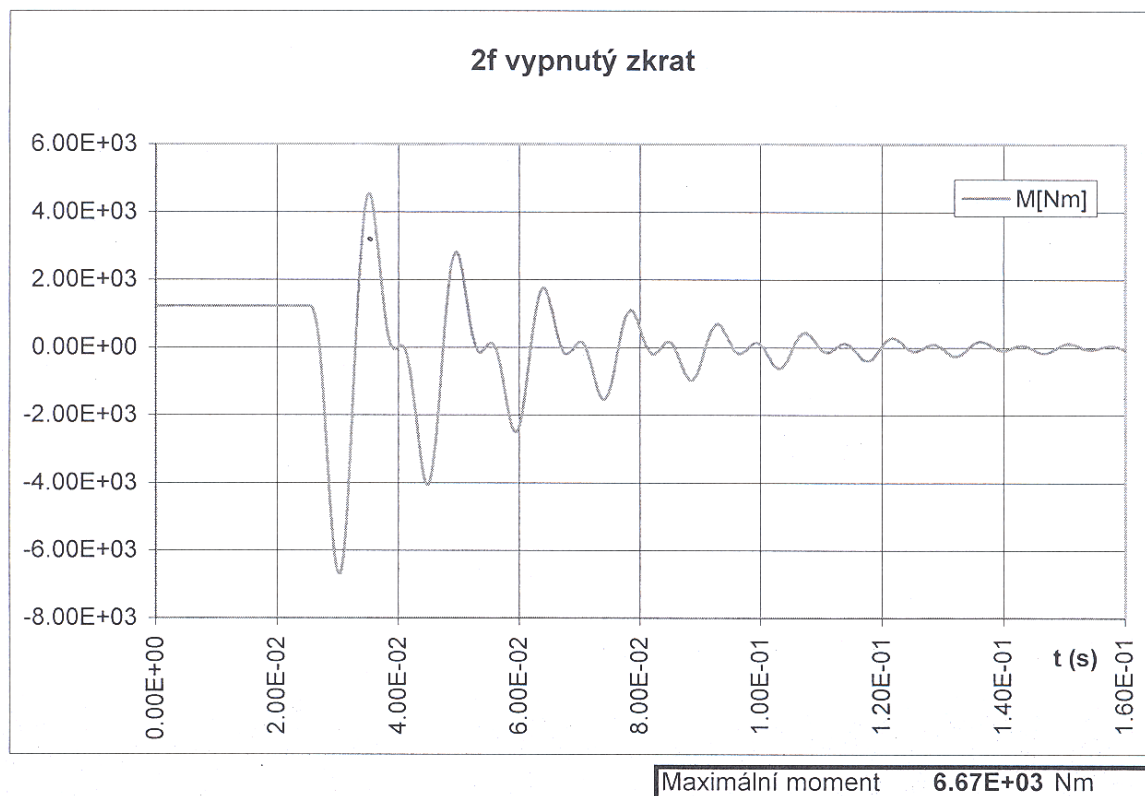
3.3. Výpočty zkratových momentů výrobcem motorů

Jak bylo uvedeno pro návrh elektrického stroje je důležité dobře dimenzovat elektrické prvky a znát dobře zkratové poměry. Současně existuje řada výpočetních programů pro výpočet zkratového momentu. Díky spolupráci s výrobcem byly poskytnuty výsledky výpočtů zkratového momentu pro 3 základní stavy: dvoufázový nevypnutý, dvoufázový vypnutý a třífázový vypnutý, viz **Obr. 3-2** - **Obr. 3-4**. Názvy jednotlivých stavů znamenají, že pokud se jedná o nevypnutý zkrat nedochází po vzniku zkratu k vypnutí a motor je stále sycen napětím a moment neustává a teoreticky stále periodicky kmitá. Pokud se, ale jedná o vypnutý zkrat, po vzniku zkratu dochází k vypnutí a moment klesá do nuly. Označení 2fázový a 3fázový definuje počet zkratovaných fází. V případě 3fázového se jedná o symetrický zkrat. Použití těchto výsledků bylo provedeno z důvodu nesymetrického zkratu, který nelze nasimulovat pomocí náhradního schématu a odvozených rovnic uvedených v následujících kapitolách. [5]

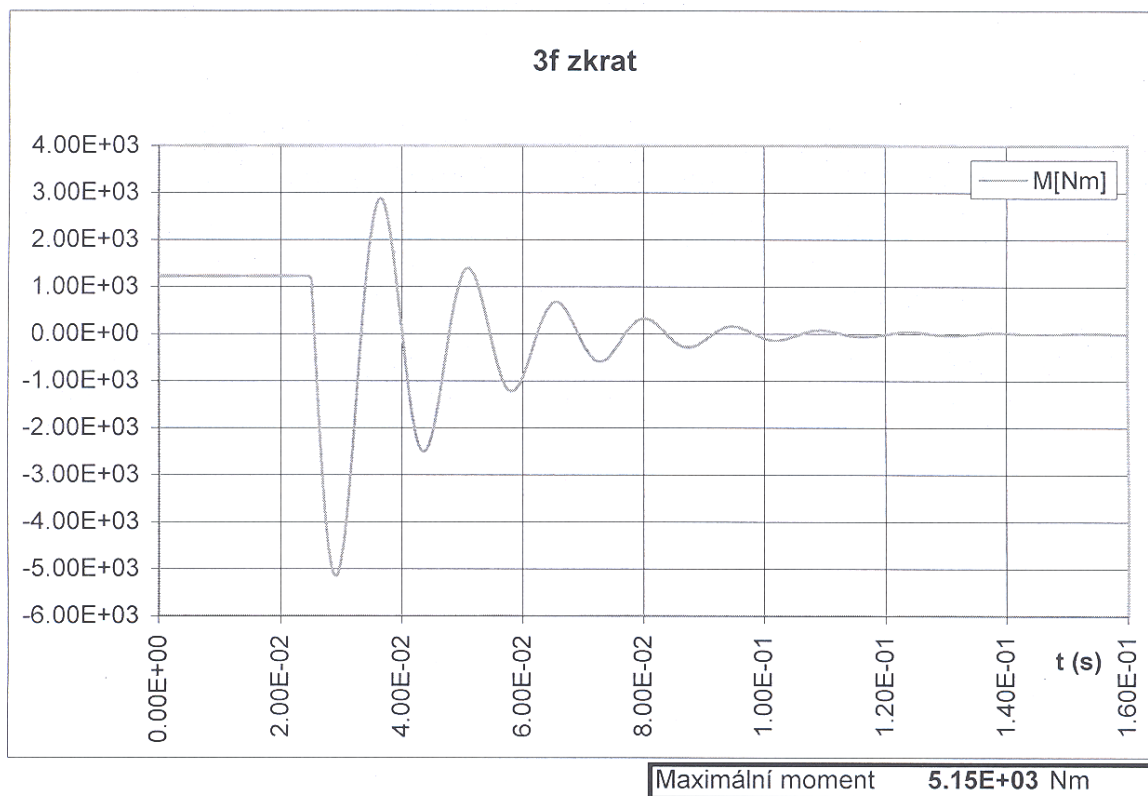
Z následujících obrázků je vidět, že k maximálnímu mechanickému momentu 6670Nm dochází při nesymetrickém 2 fázovém vypnutém zkratu, **Obr. 3-3**.



Obr. 3-2 Dvoufázový zkratový moment – nevypnutý [5]



Obr. 3-3 Dvoufázový zkratový moment – vypnutý [5]

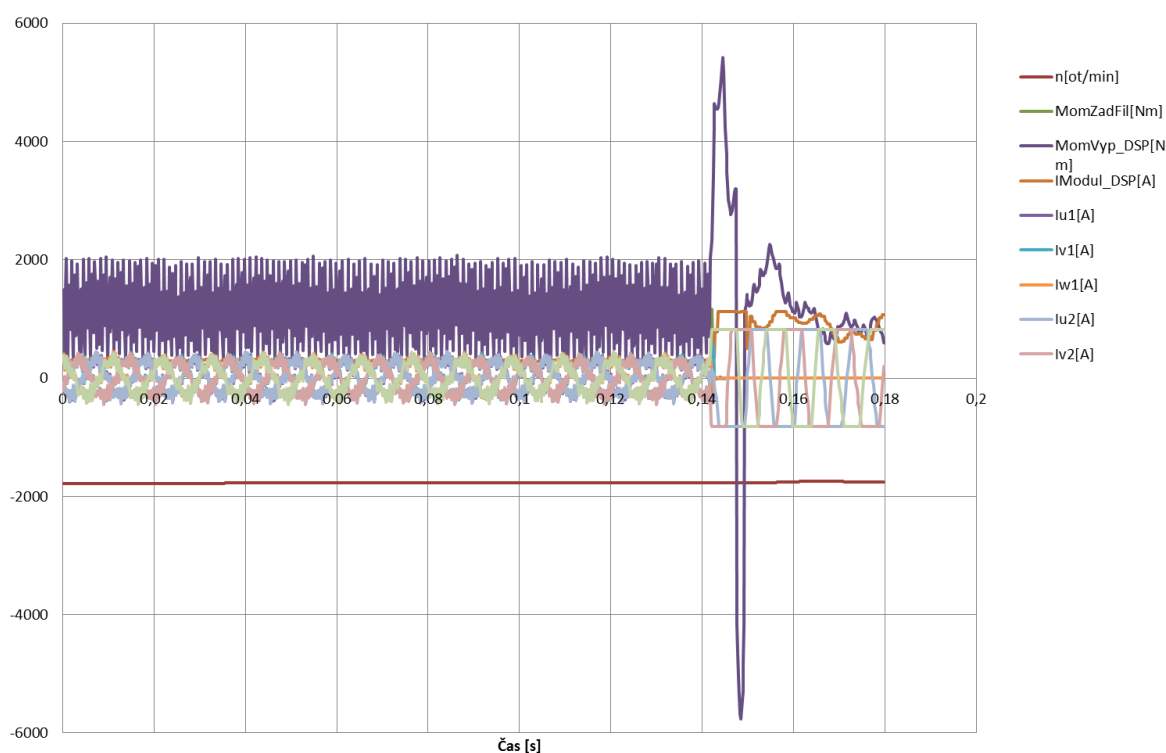


Obr. 3-4 Třífázový zkratový moment – vypnutý [5]

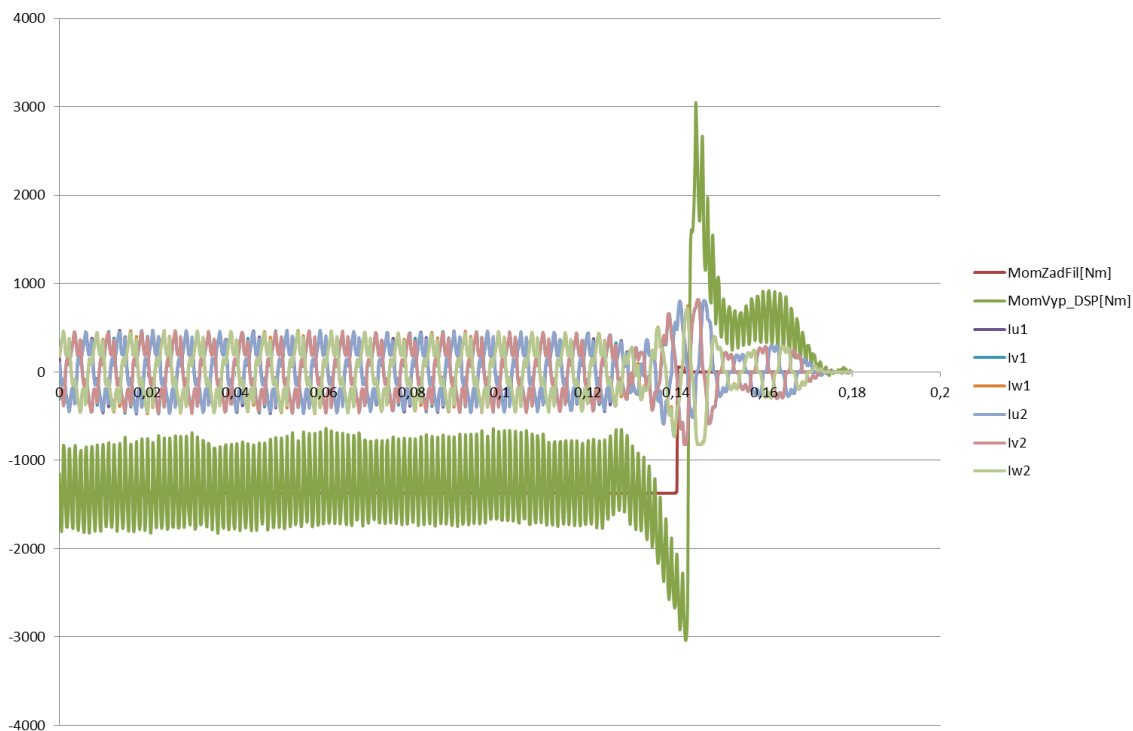
3.4. Naměřená data z diagnostického systému vozidla

Dalším možnou cestou jak získat průběh zkratového momentu je záznam z diagnostického systému vozidla. Každé vozidlo sleduje vybrané veličiny (napětí, proudy, otáčky atd.) a při překročení mezních hodnot dochází k záznamu případné poruchy. Díky těmto záznamům existují reálné průběhy momentu, které vznikají přímo na trati v provozu. Zaznamenaný moment diagnostickým zařízením je vypočítáván na základě elektrických veličin, jako jsou satorové proudy, magnetické toky a hlavní a satorová indukčnost. Za určité časové období byly vybrány reprezentativní stavy, kde při poruchách dosahuje moment extrémních hodnot nebo časový průběh moment je „nestandardní“ v krátkém časovém intervalu, viz **Obr. 3-5 - Obr. 3-8**.

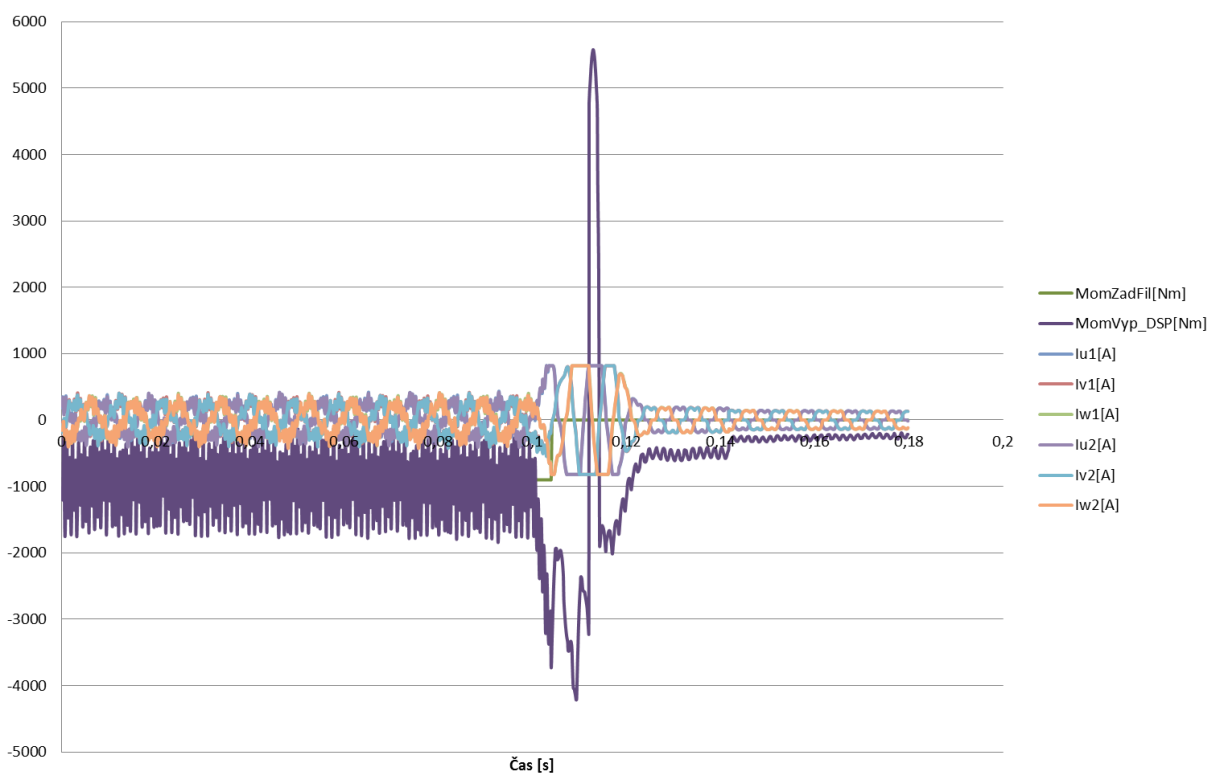
V následujících grafech (**Obr. 3-5 - Obr. 3-8**) jsou zobrazeny pouze časové průběhy momentu a satorových proudů na hvězdě z důvodu větší přehlednosti. Pro další práci byly otáčky motoru uvažovány za konstantní z důvodu krátkého časového intervalu, maximálně do 0,02s. Např.: u poruchy 1 (**Obr. 3-5**) byly otáčky 1800 ot/min = 30 ot/s.



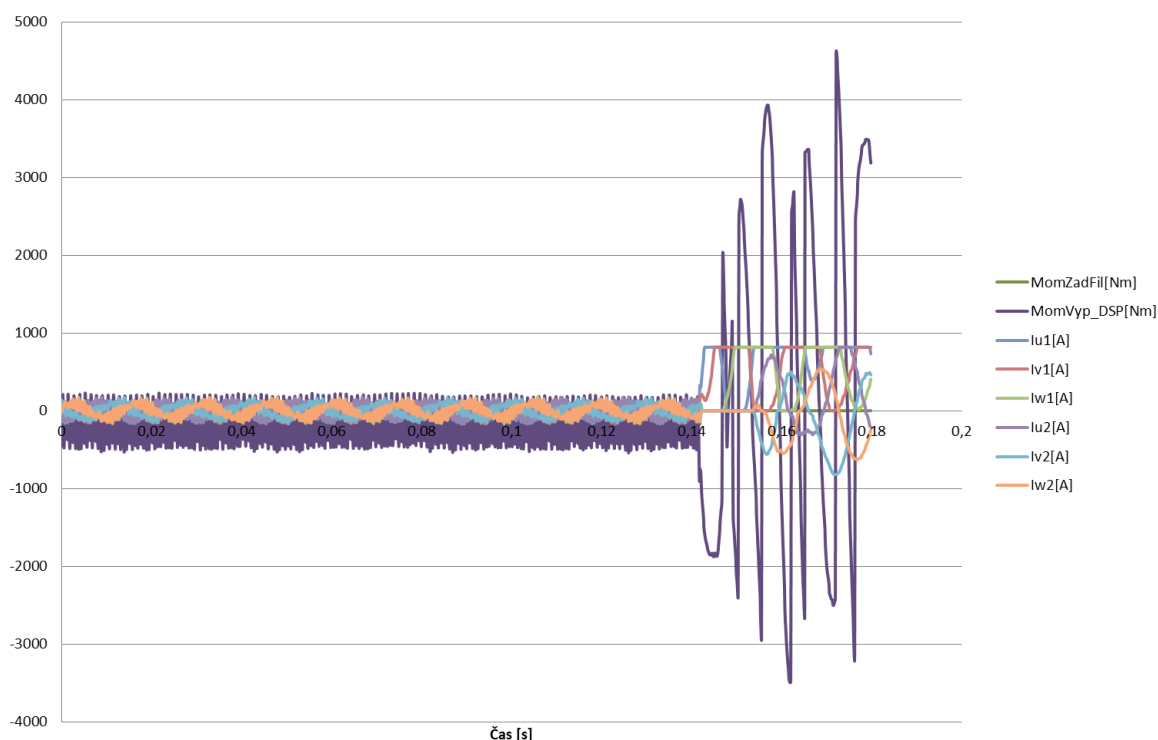
Obr. 3-5 Porucha 1– velký rozptyl momentu, $M_{t_{max}} = 5765\text{Nm}$



Obr. 3-6 Porucha 2 – překmit do protifáze, $M_{t_{max}} = 3048\text{Nm}$



Obr. 3-7 Porucha 3 – překmit do protifáze, $M_{t_{max}} = 5578\text{Nm}$



Obr. 3-8 Porucha 4 – kmitání momentu, $M_{t_{max}} = 4618\text{Nm}$

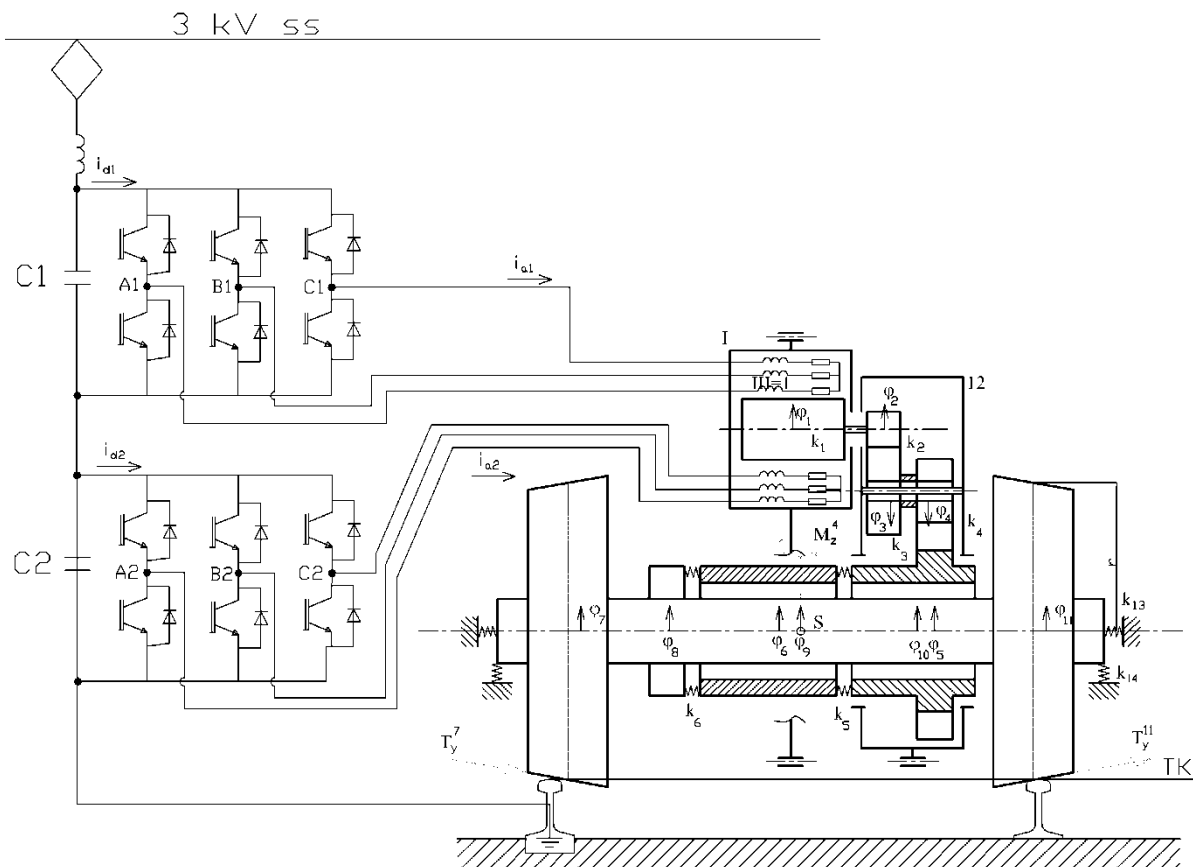
U každého z předchozích grafů jsou uvedeny v popisku hodnoty lokálních maxim momentu pro větší přehlednost. Hlavním důvodem využití záznamů z diagnostického zařízení je fakt, že i když tyto stavy nastávají v reálu jen výjimečně, jejich extrémní síly mají pravděpodobně za následek poškození pastorku. Krátké slovní zhodnocení poruch je uvedeno v Tab. 3-2.

Tab. 3-2 Seznam poruch z diagnostického systému

| Porucha číslo | Maximální moment $M_{t_{max}}$ [Nm] | Poznámka |
|---------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | 5765 | Velký kladný lokální extrém a následuje další velký lokální extrém do záporných hodnot necelých 6000Nm. |
| 2 | 3048 | Lokální extrém a následuje další lokální extrém do záporných hodnot 3000Nm. |
| 3 | 5578 | Záporný lokální extrém a následuje utlumení. |
| 4 | 4618 | Kmitání o velké amplitudě v rozsahu $\pm 3000\text{Nm}$. |

3.5. Výpočet zkratových momentů pomocí numerické simulace

Z důvodu lepšího pochopení a chování zkratového momentu byl na základě rešerše navržen a sestaven numerický model popisující chování elektrické a následně i mechanické části pohonu. Rešerše byla provedena v rámci rigorózní práce na jejichž základě vznikla prvotní myšlenka řešení pohonu jako soustavy diferenciálních rovnic popisující individuální pohon jednoho dvojkolí, viz **Obr. 3.9**. Systém pohonu byl rozdělen na elektrický a mechanický subsystém. Elektrický systém lze nahradit vypočteným zkratovým momentem od výrobce motorů nebo záznamem momentu z diagnostického systému.



Obr. 3.9 Schéma individuálního pohonu dvojkolí s popisem [25]

Obr. 3.9 zobrazuje jak vstupní napětí je odebíráno polopantografem přímo z trolejového vedení, které má hodnoty v rozptylu 2 – 3,6 kV DC. Toto napětí je rozděleno na kapacitním filtru, který se skládá ze dvou sériově zapojených filtračních kondenzátorů C1 a C2. Dva napěťové střídače, které obstarávají napájení statorových vinutí motoru, jsou svými stejnosměrnými svorkami připojeny na tyto filtrační kondenzátory. Na stator třífázového asynchronního motoru s kotvou nakrátko jsou navinuty oba systémy vinutí, jež jsou vzájemně izolované a mají každý vlastní napěťový střídač. Systémy vinutí jsou geometricky sousedé, tzn. statorová vinutí nejsou elektricky pootočena. Asynchronní motor s dvojitou hvězdou se chová jako transformátor (toto tvrzení bylo podloženo v literatuře [31]). Dvojitá hvězda dovoluje poloviční namáhání polovodičových prvků, které jsou napájeny polovičním napětím. Poloviční napětí dovoluje užití IGBT tranzistorů, které mají jednoduché zapojení do obvodu. Oba systémy vinutí vytváří magnetické točivé pole, které pohání rotor motoru(1). Motor je uchycen přes pružné uložení v rámu podvozku a přes přírubu na převodovku. Pastorek (2) je vstupním členem do dvoustupňové předlohové převodovky(12) a velké ozubené kolo druhého stupně(4) je pevně spojeno s dutým hřídelem převodovky(5). Dutý hřídel převodovky(5) je

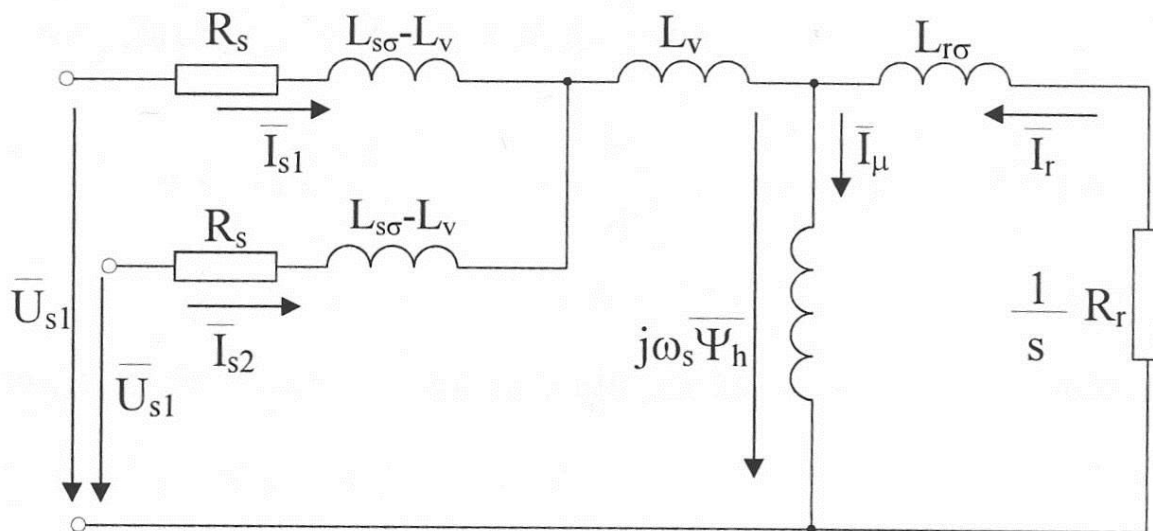
spojen ojničkami se silentbloky s hlavním dutým hřídelem(6), který je opět spojen ojničkami se silentbloky s nalisovaným nábojem (8) na dvojkolí. Dvojkolí je tvořeno dutou nápravou a nalisovanými koly a nábojem pro přenos momentu. [25]

3.5.1. Rešerše

Elektrický subsystém slouží jako vstup pro mechanickou část pohonu a bude popsán diferenciálními rovnicemi. Pro matematické popsání asynchronního motoru s dvojitou hvězdou existují v odborné literatuře dva možné přístupy. První z nich je jednodušší a uvažuje pouze jedno statorové vinutí o dvojnásobných hodnotách napětí (4 diferenciální rovnice). Druhý přístup uvažuje obě statorová vinutí, matematický model je rozšířen o další dvě stavové rovnice oproti motoru s jedním statorovým vinutím(6 diferenciálních rovnic). Asynchronní motor zapojený do dvojitě hvězdy byl v minulosti řešen na Západočeské univerzitě v Plzni, konkrétně na katedře výkonové elektroniky. Obecné odvození použitých rovnic bylo popsáno v kvalifikační práci [31] a odborných publikacích [33], [37] a [38] pracovníků zmiňované katedry. V práci jsem použil pouze konečné vztahy, ale posloupnosti jednotlivých odvození byly zachovány. Popisovaný matematický model motoru v literatuře [31] byl odzkoušen na reálném modelu v laboratořích KEV a proto tento model je považován za důvěryhodný [31].

3.5.2. Úprava diferenciálních rovnic

Z disertační práce [31] byly použity vztahy popisující matematický model asynchronního motoru s dvojitým statorovým vinutím v souřadném systému otáčející se s rotorem. Rotace je definována vztahem $\omega = 2\pi f_s$, v souřadném systému otáčející se s rotorem se projeví hodnoty rychlosti a momentu, které jsou nezbytné jako vstupy pro mechanický subsystém. Odvození rovnic vychází ze zjednodušeného náhradního schématu (Obr. 3-10).



Obr. 3-10 Napět'ové zjednodušené náhradní schéma asynchronního motoru [31]

Náhradní schéma (Obr. 3-10) a následně z něho odvozené rovnice (3.5.1) obsahuje následující:

- u_{s1x} – statorové napětí prvního vinutí ve směru x, analogicky se značí pro směr y [V]
- u_{s2x} – statorové napětí druhého vinutí ve směru x, analogicky se značí pro směr y [V]
- i_{s1x} – statorový proud prvního vinutí ve směru x, analogicky se značí pro směr y [A]
- i_{s2x} – statorový proud druhého vinutí ve směru x, analogicky se značí pro směr y [A]
- i_{r1} – rotorový proud ve směru x, analogicky se značí pro směr y [A]
- $L_{s\sigma}$ - rozptylové statorové fáze
- $L_{r\sigma}$ - rozptylové rotorové fáze
- R_s – odpor statoru [ohm]
- R_r – odpor rotoru [ohm]
- L_v – vzájemná indukčnost [H] – pojem uveden v literatuře [31], [33], [37] a [38]
- ω - úhlová rychlost [rad/s]

V disertační práci [31] jsou uvedeny určité předpoklady a zjednodušení, které jsou akceptovány pro další řešení. Uvedená soustava 6 rovnic (3.5.1) je vhodná pro použití v programu, který umožňuje řešit více derivací v jedné rovnici. Bohužel pro použití v programu MATLAB byly rovnice upraveny tak, aby v každé rovnici byla vždy jen jedna derivace.

$$\begin{aligned}
 u_{s1x} &= R_s \cdot i_{s1x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1x}}{dt} + L_v \frac{di_{s2x}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt} \\
 u_{s1y} &= R_s \cdot i_{s1y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1y}}{dt} + L_v \frac{di_{s2y}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt} \\
 u_{s2x} &= R_s \cdot i_{s2x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2x}}{dt} + L_v \frac{di_{s1x}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt} \\
 u_{s2y} &= R_s \cdot i_{s2y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2y}}{dt} + L_v \frac{di_{s1y}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt} \\
 0 &= R_r \cdot i_{rx} + L_{r\sigma} \frac{di_{rx}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt} + \omega \cdot (\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) \\
 0 &= R_r \cdot i_{ry} + L_{r\sigma} \frac{di_{ry}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt} - \omega \cdot (\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})
 \end{aligned} \tag{31}$$

3.5.1

Odvození matematického modelu je pomocí magnetického toku a proto se může uvažovat nelinearita sycení magnetického obvodu stroje. Vliv magnetického sycení je vyjádřeno

nelineární závislosti hlavního magnetizačního toku ψ_h na magnetizačním proudem i_μ .

$$|\bar{\psi}_h| = f(|\bar{i}_\mu|) = f(|\bar{i}_{s1} + \bar{i}_{s2} + \bar{i}_r|)$$

3.5.2

Magnetizační proud ve složkovém tvaru je popsán následujícími rovnicemi

$$i_{\mu x} = i_{s1x} + i_{s2x} + i_{rx} = \frac{\psi_{hx}}{L_h}, \quad i_{\mu y} = i_{s1y} + i_{s2y} + i_{ry} = \frac{\psi_{hy}}{L_h}, \quad |i_{\mu}| = \sqrt{i_{\mu x}^2 + i_{\mu y}^2} \quad 3.5.3$$

A proto dále pro jednotlivé složky hlavního magnetického toku platí:

$$\psi_{hx} = i_{\mu x} \frac{|\bar{\psi}_h|}{|i_{\mu}|}, \quad \psi_{hy} = i_{\mu y} \frac{|\bar{\psi}_h|}{|i_{\mu}|} \quad 3.5.4$$

$$i_{rx} = \frac{1}{L_h} \cdot \psi_{hx} - i_{s1x} - i_{s2x} \Rightarrow \frac{di_{rx}}{dt} = \frac{1}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} - \frac{di_{s1x}}{dt} - \frac{di_{s2x}}{dt}$$

$$\frac{di_{ry}}{dt} = \frac{1}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} - \frac{di_{s1y}}{dt} - \frac{di_{s2y}}{dt}$$

3.5.5

Výchozí soustava 6 rovnic (3.5.1) navíc obsahuje 8 neznámých a proto z podmínky magnetického toku budou přidány další 2 rovnice (3.5.5) a soustava 8 rovnic bude pro 8 neznámých (3.5.6). Ale v průběhu odvozování se opět díky substituci zredukuje počet rovnic a neznámých na 6.

$$u_{s1x} = R_s \cdot i_{s1x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1x}}{dt} + L_v \frac{di_{s2x}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt} \quad a)$$

$$u_{s1y} = R_s \cdot i_{s1y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1y}}{dt} + L_v \frac{di_{s2y}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt} \quad b)$$

$$u_{s2x} = R_s \cdot i_{s2x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2x}}{dt} + L_v \frac{di_{s1x}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt} \quad c)$$

$$u_{s2y} = R_s \cdot i_{s2y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2y}}{dt} + L_v \frac{di_{s1y}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt} \quad d)$$

$$0 = R_r \cdot i_{rx} + L_{r\sigma} \frac{di_{rx}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt} + \omega \cdot (\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) \quad e)$$

$$0 = R_r \cdot i_{ry} + L_{r\sigma} \frac{di_{ry}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt} - \omega \cdot (\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx}) \quad f)$$

$$\frac{d\psi_{hx}}{dt} = L_h \cdot \left(\frac{di_{sx1}}{dt} + \frac{di_{sx2}}{dt} + \frac{di_{rx}}{dt} \right) \quad g)$$

$$\frac{d\psi_{hy}}{dt} = L_h \cdot \left(\frac{di_{sy1}}{dt} + \frac{di_{sy2}}{dt} + \frac{di_{ry}}{dt} \right) \quad h)$$

3.5.6

Z důvodu analogie směru x a y byl úpraven jen směr x a směr y se analogicky odvodí. V rámci zjednodušení a řešení pouze jednoho směru bylo pracováno pouze s rovnicemi 3.5.6 a), c) a e). Proto vznikne soustava 3 rovnic pro 3 neznámé.

Prvním krokem byla provedena úprava rovnice 3.5.6 g) a dosazení do rovnice 3.5.6 e).

$$\frac{di_{rx}}{dt} = \frac{1}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} - \frac{di_{sx1}}{dt} - \frac{di_{sx2}}{dt} \quad 3.5.7$$

$$0 = R_r \cdot i_{rx} + L_{r\sigma} \left(\frac{1}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} - \frac{di_{sx1}}{dt} - \frac{di_{sx2}}{dt} \right) + \frac{d\psi_{hx}}{dt} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) \quad 3.5.8$$

Dalšími úpravami (3.5.9 - 3.5.13) se vytkne derivace hlavního magnetického toku (3.5.13).

$$0 = L_{r\sigma} \left(\frac{1}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} - \frac{di_{sx1}}{dt} - \frac{di_{sx2}}{dt} \right) + \frac{d\psi_{hx}}{dt} + R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) \quad 3.5.9$$

$$0 = \frac{L_{r\sigma}}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} - L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} - L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt} + R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) \quad 3.5.10$$

$$0 = \left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right) \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} - L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} - L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} + R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) \quad 3.5.11$$

$$\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right) \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} = L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} - R_r \cdot i_{rx} - \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) \quad 3.5.12$$

$$\frac{d\psi_{hx}}{dt} = \frac{L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} - R_r \cdot i_{rx} - \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right)} \quad 3.5.13$$

Následně se dosadila derivace magnetického toku (3.5.13) do rovnice 3.5.6 a) a c) a byla provedena separace derivací proudů pro jednotlivá vinutí.

$$u_{s1x} = R_s \cdot i_{s1x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1x}}{dt} + L_v \frac{di_{s2x}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt}$$

$$u_{s2x} = R_s \cdot i_{s2x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2x}}{dt} + L_v \frac{di_{s1x}}{dt} + \frac{d\psi_{hx}}{dt}$$

3.5.14

$$u_{s1x} = R_s \cdot i_{s1x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1x}}{dt} + L_v \frac{di_{s2x}}{dt} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} - R_r \cdot i_{rx} - \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)}$$

$$u_{s2x} = R_s \cdot i_{s2x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2x}}{dt} + L_v \frac{di_{s1x}}{dt} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} - R_r \cdot i_{rx} - \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)}$$

3.5.15

$$u_{s1x} = R_s \cdot i_{s1x} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1x}}{dt} + L_v \frac{di_{s2x}}{dt} + \frac{L_{r\sigma}}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + \frac{L_{r\sigma}}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)} \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)}$$

$$u_{s2x} = R_s \cdot i_{s2x} + L_v \frac{di_{s1x}}{dt} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2x}}{dt} + \frac{L_{r\sigma}}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + \frac{L_{r\sigma}}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)} \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)}$$

3.5.16

$$\begin{aligned}
 u_{s1x} &= R_s \cdot i_{s1x} + \left(\frac{L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + \left(\frac{L_{r\sigma} + L_v \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right)} \\
 u_{s2x} &= R_s \cdot i_{s2x} + \left(\frac{L_{r\sigma} + L_v \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \cdot \frac{di_{s1x}}{dt} + \left(\frac{L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \cdot \frac{di_{s2x}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right)}
 \end{aligned}$$

3.5.17

Pro lepší přehlednost bylo zavedeno následujících pět konstant α , β , γ , δ , ε , které byly dosazeny do rovnice 3.5.17.

$$\alpha = \left(\frac{L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \quad \beta = \left(\frac{L_{r\sigma} + L_v \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \quad \gamma = \alpha - \beta \quad \delta = \alpha^2 - \beta^2 \quad \varepsilon = \frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1$$

3.5.18

$$\begin{aligned}
 u_{s1x} &= R_s \cdot i_{s1x} + \alpha \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + \beta \cdot \frac{di_{sx2}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\beta} & \text{a)} \\
 u_{s2x} &= R_s \cdot i_{s2x} + \beta \cdot \frac{di_{s1x}}{dt} + \alpha \cdot \frac{di_{s2x}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \cdot \left(-\frac{1}{\alpha} \right) & \text{b)}
 \end{aligned}$$

3.5.19

Nyní byly rovnice 3.5.19 vynásobeny a následně sečteny.

$$\frac{u_{s1x}}{\beta} = \frac{R_s \cdot i_{s1x}}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{di_{sx1}}{dt} + \frac{di_{sx2}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \beta}$$

$$-\frac{u_{s2x}}{\alpha} = -\frac{R_s \cdot i_{s2x}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{di_{s1x}}{dt} - \frac{di_{s2x}}{dt} + \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \alpha}$$

3.5.20

$$\frac{u_{s1x}}{\beta} - \frac{u_{s2x}}{\alpha} = \frac{R_s \cdot i_{s1x}}{\beta} - \frac{R_s \cdot i_{s2x}}{\alpha} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \frac{di_{s1x}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \beta} + \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \alpha}$$

3.5.21

$$\left(\frac{\delta}{\alpha \cdot \beta} \right) \cdot \frac{di_{s1x}}{dt} = \frac{u_{s1x}}{\beta} - \frac{u_{s2x}}{\alpha} - \frac{R_s \cdot i_{s1x}}{\beta} + \frac{R_s \cdot i_{s2x}}{\alpha} + \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \beta} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \alpha} \Bigg| \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{\delta}$$

3.5.22

Po vyjádření derivace statorového proudu prvního vinutí podle času byla dosazena rovnice 3.5.23 zpět do rovnice 3.5.19 a) a vznikne rovnice .

$$\frac{di_{s1x}}{dt} = \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon}$$

3.5.23

$$\frac{u_{s1x}}{\beta} = \frac{R_s \cdot i_{s1x}}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \right) +$$

$$+ \frac{di_{sx2}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \beta}$$

3.5.24

Postupnými úpravami byla opět vyjádřena další derivace statorového proudu druhého vinutí (3.5.25 - 3.5.27)

$$\frac{di_{sx2}}{dt} = \frac{u_{s1x}}{\beta} - \frac{R_s \cdot i_{s1x}}{\beta} + \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \beta} -$$

$$- \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \right)$$

3.5.25

$$\frac{di_{sx2}}{dt} = \frac{u_{s1x}}{\beta} - \frac{R_s \cdot i_{s1x}}{\beta} + \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon \cdot \beta} - \frac{\alpha^2}{\delta \cdot \beta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\alpha^2}{\delta \cdot \beta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} -$$

$$- \frac{\alpha \cdot \gamma}{\delta \cdot \beta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon}$$

3.5.26

$$\frac{di_{sx2}}{dt} = \frac{\delta - \alpha^2}{\delta \cdot \beta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha^2 - \delta}{\delta \cdot \beta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\delta - \alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon}$$

3.5.27

Opět pro zlepšení přehlednosti a další práci bylo upraveno vyjádření vztahu $\delta = \alpha^2 - \beta^2$ a dále se rovnice upraví :

$$\delta - \alpha \cdot \gamma = \alpha^2 - \beta^2 - \alpha \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2 - \alpha^2 + \alpha \cdot \beta = \beta \cdot (\alpha - \beta) = \beta \cdot \gamma$$

3.5.28

$$\frac{di_{sx2}}{dt} = -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon}$$

3.5.29

Odvozené derivace statorových proudů pro obě vynutí (3.5.23 a 3.5.29) byly dosazeny do rovnice magnetického toku (3.5.13).

$$\varepsilon \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} = L_{r\sigma} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \right) - R_r \cdot i_{rx} -$$

$$- \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) + L_{r\sigma} \cdot \left(-\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \right)$$

3.5.30

Dále probíhaly zjednodušení rovnice pro vyjádření derivace hlavního magnetického toku (3.5.31- 3.5.33)

$$\varepsilon \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} = -R_r \cdot i_{rx} - \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) +$$

$$L_{r\sigma} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\gamma}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\gamma}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \right)$$

3.5.31

$$\varepsilon \cdot \frac{d\psi_{hx}}{dt} = -R_r \cdot i_{rx} - \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry}) + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} +$$

$$+ L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon}$$

3.5.32

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{hx}}{dt} = & -\frac{R_r \cdot i_{rx}}{\varepsilon} - \frac{\omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \\ & + L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

3.5.33

Po odvození rovnic ve směru x byly vyjádřeny kombinace konstant α a β a jejich mocniny.

$$\begin{aligned} \gamma = \alpha - \beta &= \frac{L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} - L_{r\sigma} - L_v \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}\right)} = \frac{(L_{s\sigma} - L_v) \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}\right)} = (L_{s\sigma} - L_v) \\ \alpha^2 &= \left(\frac{L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}\right)}\right)^2 = \left(\frac{\frac{L_{r\sigma} \cdot L_h + L_{s\sigma} \cdot L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot L_h}{L_h}}{\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}\right)^2 = \left(\frac{L_{r\sigma} \cdot L_h + L_{s\sigma} \cdot L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot L_h}{L_{r\sigma} + L_h}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{L_{r\sigma} \cdot L_h + L_{s\sigma} \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{L_{r\sigma} + L_h}\right)^2 = \left(\frac{L_{r\sigma} \cdot L_h}{L_{r\sigma} + L_h} + L_{s\sigma}\right)^2 \\ \beta^2 &= \left(\frac{L_{r\sigma} \cdot L_h}{L_{r\sigma} + L_h} + L_v\right)^2 \end{aligned}$$

$$\delta = \alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{L_{r\sigma} \cdot L_h}{L_{r\sigma} + L_h} + L_{s\sigma} \right)^2 - \left(\frac{L_{r\sigma} \cdot L_h}{L_{r\sigma} + L_h} + L_v \right)^2 = \frac{2 \cdot L_{s\sigma} \cdot L_{r\sigma} \cdot L_h + L_{r\sigma} \cdot L_{s\sigma}^2 - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot L_h \cdot L_v - L_{r\sigma} \cdot L_v^2 - L_h \cdot L_v^2}{L_{r\sigma} + L_h}$$

3.5.34

Po vyjádření konstant budou upraveny rovnice pro maticový zápis, tzn. že každá proměnná musí být v rovnici jen jednou. Úpravy byly provedeny současně pro všechny 3 rovnice.

$$\begin{aligned} \frac{di_{s1x}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \\ \frac{di_{s2x}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} \\ \frac{d\psi_{hx}}{dt} &= -\frac{R_r \cdot i_{rx}}{\varepsilon} - \frac{\omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \\ &+ L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

3.5.35

Pro zlepšení přehlednosti byl upraven poslední člen rovnice separátně (3.5.35)

$$\frac{R_r \cdot i_{rx} + \omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} = \frac{R_r \cdot i_{rx}}{\varepsilon} + \frac{\omega \cdot \psi_{hy}}{\varepsilon} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} \cdot i_{ry}}{\varepsilon} = \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{rx} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{ry} + \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \psi_{hy}$$

3.5.36

$$\begin{aligned}
 \frac{di_{s1x}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \left(\frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{rx} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{ry} + \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \psi_{hy} \right) = \\
 &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{rx} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{ry} + \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hy} \\
 \frac{di_{s2x}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \left(\frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{rx} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{ry} + \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \psi_{hy} \right) = \\
 &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{rx} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{ry} + \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hy} \\
 \frac{d\psi_{hx}}{dt} &= -\frac{R_r \cdot i_{rx}}{\varepsilon} - \frac{\omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \\
 &+ L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \left(\frac{R_r}{\varepsilon^2} \cdot i_{rx} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon^2} \cdot i_{ry} + \frac{\omega}{\varepsilon^2} \cdot \psi_{hy} \right) = \\
 &= -\frac{R_r \cdot i_{rx}}{\varepsilon} - \frac{\omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \\
 &+ \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{rx} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{ry} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot \psi_{hy}
 \end{aligned}$$

3.5.37

Dále bylo provedeno dosazení statorového proudu z rovnice (3.5.3) ve tvaru $i_{rx} = \frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{sx1} - i_{sx2}$, $i_{ry} = \frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{sy1} - i_{sy2}$ do rovnice (3.5.37).

$$\frac{di_{s1x}}{dt} = \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{sx1} - i_{sx2} \right) + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{sy1} - i_{sy2} \right) + \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hy}$$

$$\frac{di_{sx2}}{dt} = -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{sx1} - i_{sx2} \right) + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{sy1} - i_{sy2} \right) + \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hy}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{hx}}{dt} = & -\frac{R_r \cdot i_{rx}}{\varepsilon} - \frac{\omega(\psi_{hy} + L_{r\sigma} \cdot i_{ry})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \\ & + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{sx1} - i_{sx2} \right) + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{sy1} - i_{sy2} \right) + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot \psi_{hy} \end{aligned}$$

3.5.38

$$\begin{aligned} \frac{di_{s1x}}{dt} = & \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hx}}{L_h} - \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx1} - \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx2} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hy}}{L_h} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy1} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy2} + \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hy} = \\ = & \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot R_s + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1x} + \frac{\beta \cdot \varepsilon \cdot R_s - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2x} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy1} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy2} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{sx2}}{dt} = & -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hx}}{L_h} - \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx1} - \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx2} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hy}}{L_h} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy1} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy2} + \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hy} = \\ = & -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\beta \cdot R_s \cdot \varepsilon - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha \cdot R_s \cdot \varepsilon + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2x} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy1} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy2} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi_{hx}}{dt} &= -\frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{rx} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{ry} - \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \psi_{hy} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2x} + \\
 &+ \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sx1} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sx2} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy1} - \\
 &- \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy2} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot \psi_{hy} = \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} - \\
 &- \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy1} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy2} - \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{s1x} - i_{s2x} \right) - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{s1y} - i_{s2y} \right) + \\
 &+ \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \frac{\omega \cdot (2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma + 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h - \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} = \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} - \\
 &- \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy1} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy2} - \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hx}}{L_h} + \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{s1x} + \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{s2x} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hy}}{L_h} + \\
 &+ \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{s1y} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{s2y} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \frac{\omega \cdot (2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma + 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h - \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} = \\
 &= \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} + \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} + \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} + \\
 &+ \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} \cdot (\delta \cdot \varepsilon - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy1} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} \cdot (\delta \cdot \varepsilon - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy2} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r - R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \\
 &+ \frac{\omega \cdot (2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma + 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h - \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h - L_{r\sigma} \cdot \delta \cdot \varepsilon)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy}
 \end{aligned}$$

3.5.39

Dále bylo provedeno jen zjednodušení a zavedení dalších konstant pro zjednodušení maticového zápisu v programu MATLAB.

$$\begin{aligned}
 \frac{di_{s1x}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot R_s + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1x} + \frac{\beta \cdot \varepsilon \cdot R_s - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2x} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy1} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy2} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \\
 &+ \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} \\
 \frac{di_{s2x}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + \frac{\beta \cdot R_s \cdot \varepsilon - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1x} - \frac{\alpha \cdot R_s \cdot \varepsilon + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2x} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy1} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sy2} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \\
 &+ \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} \\
 \frac{d\psi_{hx}}{dt} &= \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1x} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2x} + \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} + \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} + \\
 &+ \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} \cdot (\delta \cdot \varepsilon - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy1} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} \cdot (\delta \cdot \varepsilon - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{sy2} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r - R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \\
 &+ \frac{\omega \cdot (2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma + 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h - \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h - L_{r\sigma} \cdot \delta \cdot \varepsilon)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy}
 \end{aligned}$$

3.5.40

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot R_s + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \quad , \quad B = \frac{\beta \cdot \varepsilon \cdot R_s - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \quad , \quad \Gamma = \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \quad , \quad \Delta = \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \quad , \quad E = \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \\
 H &= \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \quad , \quad K = \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \quad , \quad \Lambda = \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} \cdot (\delta \cdot \varepsilon - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \quad , \\
 M &= \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r - R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \quad , \quad N = \frac{\omega \cdot (2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma + 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h - \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h - L_{r\sigma} \cdot \delta \cdot \varepsilon)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h}
 \end{aligned}$$

3.5.41

Po zavedení dalších konstant A, B, Γ , Δ , E, H, K, Λ , M a N (3.5.41) se rovnice zjednoduší do srozumitelné podoby. Jak bylo již uvedeno jedná se o směr x.

$$\begin{aligned}\frac{di_{s1x}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1x} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2x} - A \cdot i_{s1x} + B \cdot i_{s2x} - \Gamma \cdot i_{sy1} - \Gamma \cdot i_{sy2} + \Delta \cdot \psi_{hx} + E \cdot \psi_{hy} \\ \frac{di_{s2x}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1x} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2x} + B \cdot i_{s1x} - A \cdot i_{s2x} - \Gamma \cdot i_{sy1} - \Gamma \cdot i_{sy2} + \Delta \cdot \psi_{hx} + E \cdot \psi_{hy} \\ \frac{d\psi_{hx}}{dt} &= H \cdot u_{s1x} + H \cdot u_{s2x} + K \cdot i_{s1x} + K \cdot i_{s2x} + \Lambda \cdot i_{sy1} + \Lambda \cdot i_{sy2} + M \cdot \psi_{hx} + N \cdot \psi_{hy}\end{aligned}$$

3.5.42

Analogicky byly odvozeny rovnice pro směr y a výsledkem je rovnice (3.5.43). Odvození je uvedeno v příloze.

$$\begin{aligned}\frac{di_{s1y}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} + \Gamma \cdot i_{s1x} + \Gamma \cdot i_{s2x} - A \cdot i_{s1y} + B \cdot i_{s2y} - E \cdot \psi_{hx} + \Delta \cdot \psi_{hy} \\ \frac{di_{s2y}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \Gamma \cdot i_{s1x} + \Gamma \cdot i_{s2x} + B \cdot i_{s1y} - A \cdot i_{s2y} - E \cdot \psi_{hx} + \Delta \cdot \psi_{hy} \\ \frac{d\psi_{hy}}{dt} &= H \cdot u_{s1y} + H \cdot u_{s2y} - \Lambda \cdot i_{s1x} - \Lambda \cdot i_{s2x} + K \cdot i_{s1y} + K \cdot i_{s2y} - N \cdot \psi_{hx} + M \cdot \psi_{hy}\end{aligned}$$

3.5.43

Takto připravená soustava 6 rovnic pro 6 neznámých umožňuje řešit obecně průběh momentu pro asynchronní motor s dvěma statorovými vinutími s kotvou na krátko.

Jen pro zopakování maticový zápis obsahuje vektor $\dot{\mathbf{e}}$ s derivacemi proměnných podle času (i_{s1x} - statorový proud prvního vinutí ve směru x , analogicky je uveden druhý směr y a druhé statorové vinutí a ψ_{hx} hlavní magnetický tok opět pro oba směry), který se rovná součinu matice \mathbf{X} odvozeným konstantám ($A, B, \Gamma, \Delta, E, M, \Lambda$ a N podle rovnic 3.5.41), závislých na indukčnostech a odporech a vektoru \mathbf{e} s aktuálními hodnotami statorového proudu a magnetického toku. A také přírůstku od druhému součinu matice \mathbf{Y} s odvozené konstanty ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ a H podle rovnic 3.5.18 a 3.5.41), které jsou také závislé na poměrech indukčností a vektoru \mathbf{u} s napětími ze střídače pro jednotlivé směry a vinutí ($u_{sx1}, u_{sx2}, u_{sy1}, u_{sy2}$). Následná rovnice pouze zjednoduší zápis předchozích rovnic 3.5.42 a 3.5.43.

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{s1x} \\ i_{s2x} \\ i_{s1y} \\ i_{s2y} \\ \psi_{hx} \\ \psi_{hy} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -A & B & -\Gamma & -\Gamma & \Delta & E \\ B & -A & -\Gamma & -\Gamma & \Delta & E \\ \Gamma & \Gamma & -A & B & -E & \Delta \\ \Gamma & \Gamma & B & -A & -E & \Delta \\ K & K & \Lambda & \Lambda & M & N \\ -\Lambda & -\Lambda & K & K & -N & M \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_{s1x} \\ i_{s2x} \\ i_{s1y} \\ i_{s2y} \\ \psi_{hx} \\ \psi_{hy} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\delta} & -\frac{\beta}{\delta} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\delta} & \frac{\alpha}{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{\delta} & -\frac{\beta}{\delta} \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\delta} & \frac{\alpha}{\delta} \\ 0 & 0 & H & H \\ 0 & 0 & H & H \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{s1x} \\ u_{s2x} \\ u_{s1y} \\ u_{s2y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

3.5.44

Pro výpočet mechanického momentu byla soustava rovnic (3.5.44) rozšířena o tzn. momentovou rovnici (3.5.45), která je přímo závislá na počtu pólpárů p_p , transformačním koeficientu k_p , poměru hlavní a rotorové indukce $\frac{L_h}{L_r}$, velikosti proudu $i_{sx1}, i_{sx2}, i_{sy1}, i_{sy2}$ a magnetického toku Ψ_{rx}, Ψ_{ry} .

$$M = p_p \cdot k_p \cdot \frac{L_h}{L_r} \cdot (\Psi_{rx} \cdot (i_{sy1} + i_{sy2}) - \Psi_{ry} \cdot (i_{sx1} + i_{sx2}))$$

3.5.45

Nejjednodušší zápis elektrického subsystému je uveden v rovnici 3.5.46, kde \mathbf{X} a \mathbf{Y} jsou matice konstant popisující asynchronní motor a vektor \mathbf{e} je stavový a vektor \mathbf{u} reprezentuje budící účinky střídačů.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$$

3.5.46

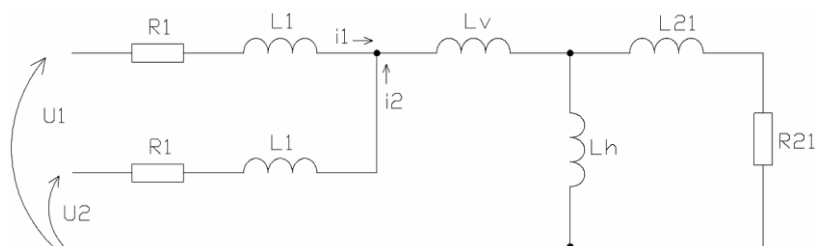
3.5.3. Parametry motoru

Po teoretickém odvození budou do rovnic dosazeny konstanty pro asynchronní trakční motor MLU 4245 K/6. Při použití odvozeného matematického modelu nebude uvažováno řízení, tzn. že hodnoty statorového napětí a statorové frekvence jsou zadány nominálními hodnotami předepsaných výrobcem $u_s = 1130V$, $f_s = 100Hz$. Na základě těchto dvou veličin bude střídač napájet motor periodicky se opakujícím pilovým signálem. Pro správný chod asynchronního

motoru je poměr $f_s/u_s = konst.$ Pro uvažování řízení by se model musel rozšířit, což by přesahovalo rozsah práce. Jak již bylo uvedeno matematický model je odvozen ze zjednodušeného náhradního schématu (bez zdrojů, Obr. 3-11), podle něj jsou doplněny konstanty pro řešení asynchronního motoru od výrobce motoru ŠKODA ELECTRIC. Protože se obě satorová vinutí mají shodné parametry, je zobrazeno na náhradním schématu odpor fáze satoru R_1 a rozptylová indukčnost satorové fáze L_1 dvakrát,[5].

Parametry motoru:

| | |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|
| Odpor fáze satoru | $R_1 = 0,0314\Omega$ |
| Odpor fáze rotoru přepočteného na sator | $R_{21} = 0,02\Omega$ |
| Rozptylová indukčnost satorové fáze | $L_1 = 0,000566H$ |
| Rozptylová indukčnost rotorové fáze | $L_{21} = 0,000431H$ |
| Hlavní indukčnost | $L_h = 0,0156H$ |
| Počet pólů | $Pp = 3 []$ |
| Jmenovitá frekvence | $f_s = 100Hz$ |
| Jmenovité otáčky hřídele za minutu | $n = 1989 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ |



Obr. 3-11 Zjednodušené náhradní schéma asynchronního motoru [31]

Dále pro řešení je nutné doplnit vstupní parametry matematického modelu. Na základě jmenovité frekvence počtu pólů se určí synchronní otáčky n_s (3.5.47). Ze synchronních a jmenovitých otáček se určí skluz asynchronního motoru s_e (3.5.48). [25]

$$n_s = \frac{f_s \cdot 60}{Pp} = \frac{100 \cdot 60}{3} = 2000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$$

3.5.47

$$s_e = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{2000 - 1989}{2000} \cdot 100 = 0.55\%$$

3.5.48

Převod z úhlové rychlosti hřídele v elektrické obloukové míře w_s (3.5.49) do otáček za vteřinu je důležitý z hlediska správného dosazování hodnot a hlavně jednotek pro další řešení v oblasti mechaniky. Pro převod na úhlovou rychlost hřídele v elektrické obloukové míře w_{hel} je třeba uvažovat skluz $s_e=0,55\%$ (3.5.48), který je dosazen do rovnice 3.5.50 v vztahu $(1 - 0,55) = 0,9945$. Spočtená úhlová rychlost hřídele v elektrické obloukové míře w_{hel} se převede na jmenovité otáčky hřídele za vteřinu n (3.5.51)

$$w_s = 2 \cdot \pi \cdot f_s = 2 \cdot \pi \cdot 100 = 628,3185 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

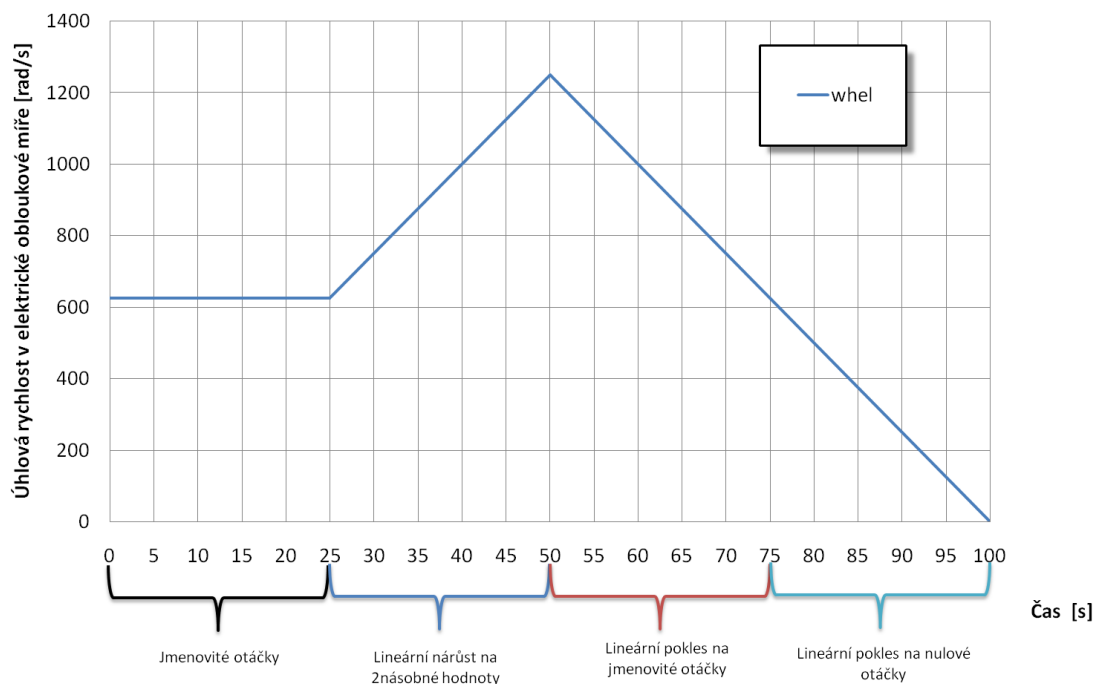
3.5.49

$$w_{hel} = 0.9945 \cdot w_s = 624.8628 \text{ rad} \cdot s^{-1} \quad 3.5.50$$

$$n = \frac{w_{hel}}{Pp \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{624.8628}{3 \cdot 2 \cdot \pi} = 33.15 \text{ ot} \cdot s^{-1} \quad 3.5.51$$

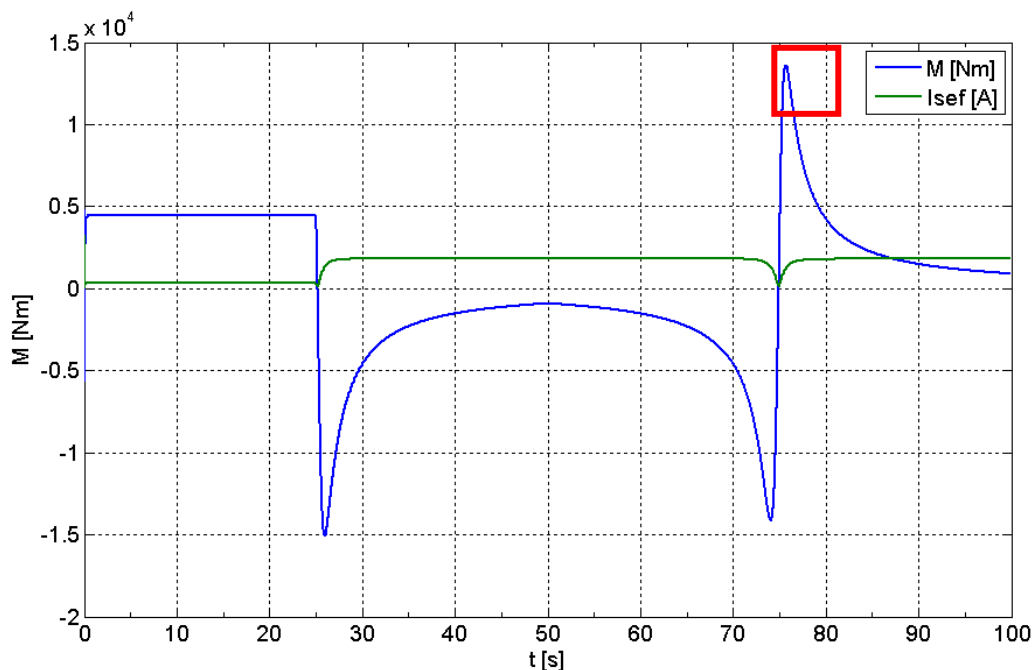
V literatuře [31] byl používán pojem vzájemná indukčnost, který popisuje vliv dvojitého vinutí. Výrobce motorů uvažuje hodnotu vzájemné indukčnosti L_v jako nenulovou hodnotu, ale přesné číslo nikde neuvádí. Proto pro ověření funkčnosti upraveného matematického modelu by bylo vhodné zohlednit vliv vzájemné indukčnosti, jejíž konkrétní hodnota nebývá výrobcem obvykle uvedena. V literatuře [31] je uvažována hodnota vzájemné indukčnosti L_v v rozsahu intervalu $(0.1 \div 0.7) L_{s\sigma}$. Jiné odborné literatury naopak uvádějí hodnotu vzájemné indukčnosti až $0.9 L_{s\sigma}$. Zatím nebyl nalezen způsob jak tuto hodnotu spočítat, ani změřit ve zkušebně. Proto v rámci řešení byla provedena série výpočtů s různými hodnotami vzájemné indukčnosti L_v . Cílem bylo zmapovat vliv velikosti vzájemné indukčnosti na výpočtový model a jeho chování. Jako „výchozí stav“ byl matematický model s jednoduchou hvězdou, podle kterého se mohl vliv vzájemné indukčnosti porovnávat. Jedná se o výpočet s dvojnásobnými hodnotami, jak již bylo uvedeno v úvodu kapitoly. Oba modely (s jednoduchou a dvojitou hvězdou) by se měly chovat přibližně stejně, neboť simulují stejný asynchronní motoru s kotvou na krátko **se stejnými vstupními parametry**. Navíc matematický model asynchronního motoru s jednoduchou hvězdou je všeobecně znám. [28]

Převzaté zjednodušené schéma (Obr. 3-11) z literatury [31] uvažuje hodnotu rozptylové satorové fáze L_l ve vztahu $L_{s\sigma}$ - L_v , kde teoreticky vzájemná indukčnost L_v může být v intervalu $(0 \div 1) L_{s\sigma}$. Pro zvolení konkrétní hodnoty vzájemné indukčnosti např.: $L_v = 0,5$ lze hodnotu vzájemné indukčnosti vyčíslit $L_v=0,5 L_{s\sigma}$ a následně se upraví hodnota rozptylové satorové fáze $L_l = (1-0,5) L_{s\sigma}$. Tento vztah platí pro všechny hodnoty v intervalu $\langle 0-1 \rangle$.

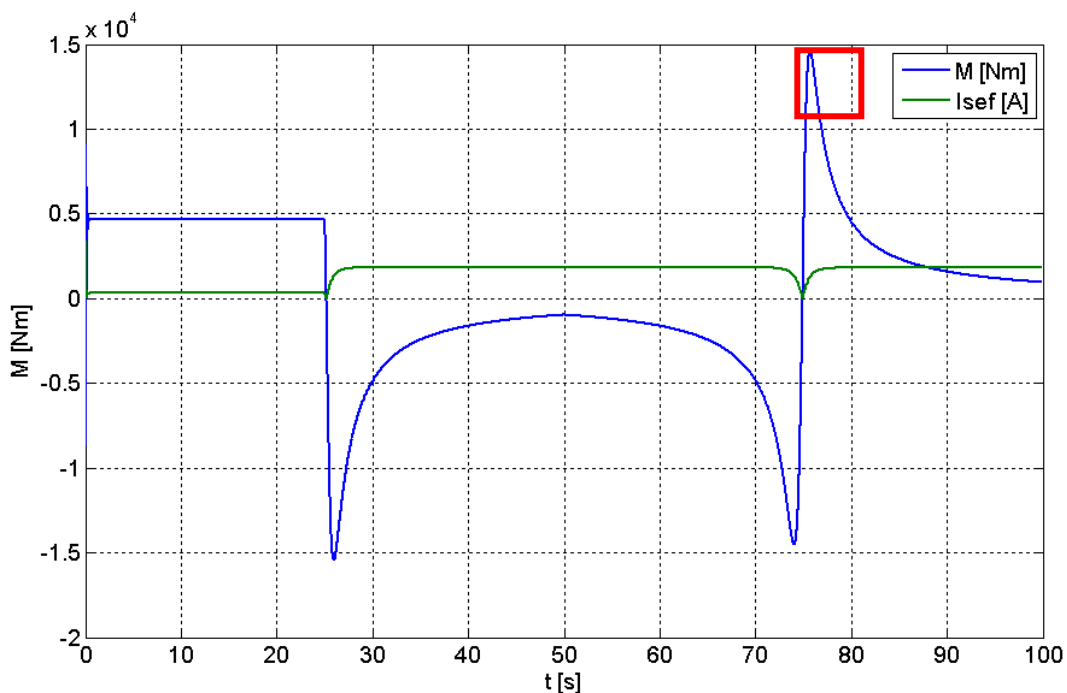


Obr. 3-12 Časový průběh testovacího režimu motoru [28]

Řídicí signál v podobě otáček rotoru byl udáván úhlovou rychlostí hřídele asynchronního motoru v elektrické úhlové délce $w_{hel} [rad/s]$, viz **Obr. 3-12**. Celková doba řešení je rozdělena na čtvrtiny, kde v první $\frac{1}{4}$ jsou otáčky při jmenovité hodnotě frekvence 100Hz, dále v druhé $\frac{1}{4}$ stoupají na dvojnásobek a nakonec ve zbývajícím čase otáčky klesají na nulu. Tento časový průběh byl převzatý z literatury [31]. A výsledky obou modelů s jednoduchou (**Obr. 3-13**) a dvojitou hvězdou (**Obr. 3-14**) jsou vidět na následujících obrázcích, kde byl vykreslen časový průběh momentu $M[Nm]$ a efektivního proudu $I_{sef} [A]$.



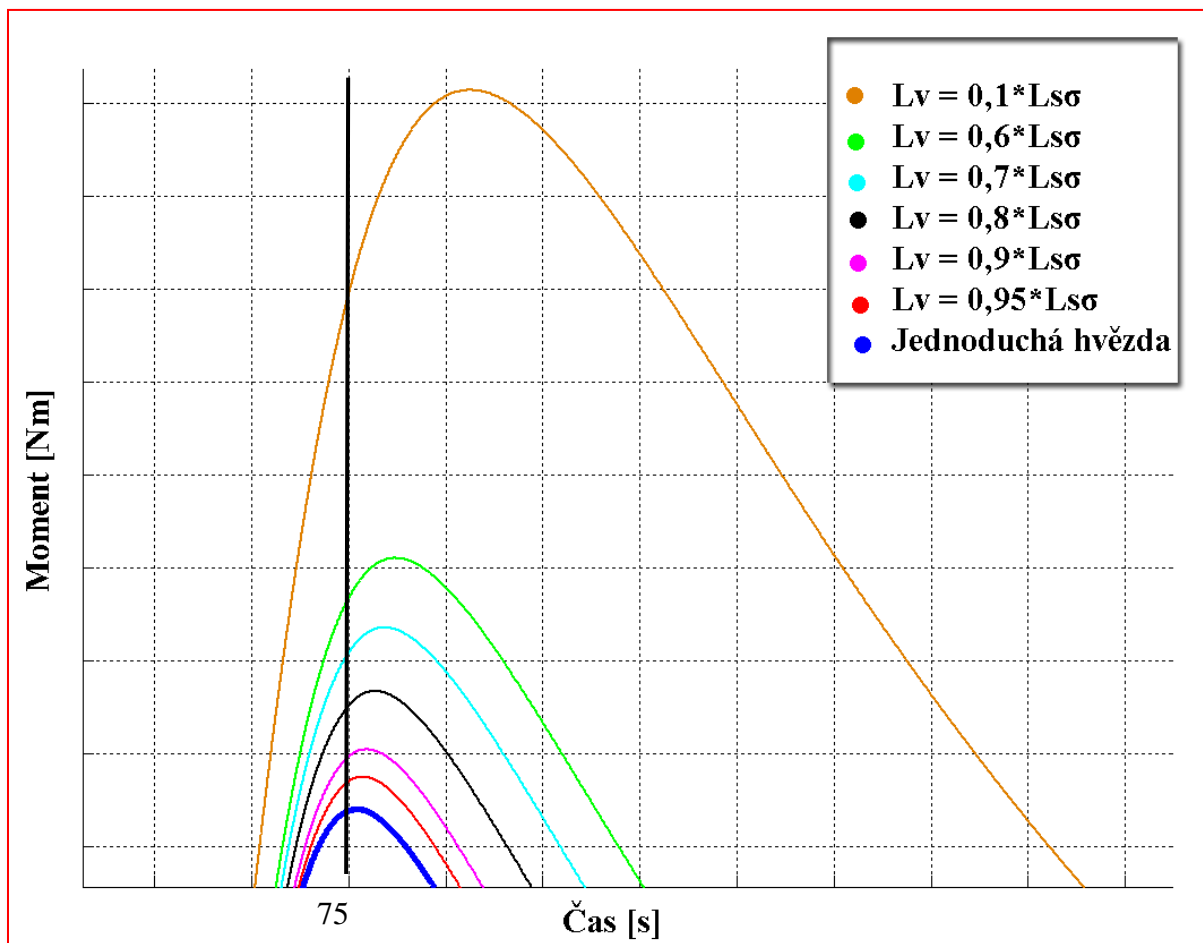
Obr. 3-13 Časový průběh momentu $M [Nm]$ a efektivního proudu $I_{sef} [A]$ – model s jednoduchou hvězdou [28]



Obr. 3-14 Časový průběh momentu $M [Nm]$ a efektivního proudu $I_{sef} [A]$ – model s dvojitou hvězdou ($L_v=0.9$) [28]

Oba předchozí grafy zobrazují podobný průběh momentu pro modely s jednoduchou a dvojitou hvězdou a proto lze tvrdit, že upravený model s dvojitou hvězdou, je korektní. Navíc lze vidět i dobrou odezvu na vstupní signál v podobě úhlové rychlosti hřídele asynchronního motoru v elektrické úhlové délce $w_{hel} [rad/s]$, viz **Obr. 3-12**. Doba řešení byla 100s z důvodu podmínky ustáleného stavu, [28].

Vliv vzájemné indukčnosti L_v na chování modelu s dvojitou hvězdou a současně porovnání s modelem s jednoduchou hvězdou je nejlépe vidět v bodě zvratu (**Obr. 3-15**), který nastává v čase cca 75s testovacího režimu (**Obr. 3-12**). Tento časový okamžik je vyznačen červeným rámečkem na **Obr. 3-13** a **Obr. 3-14**.

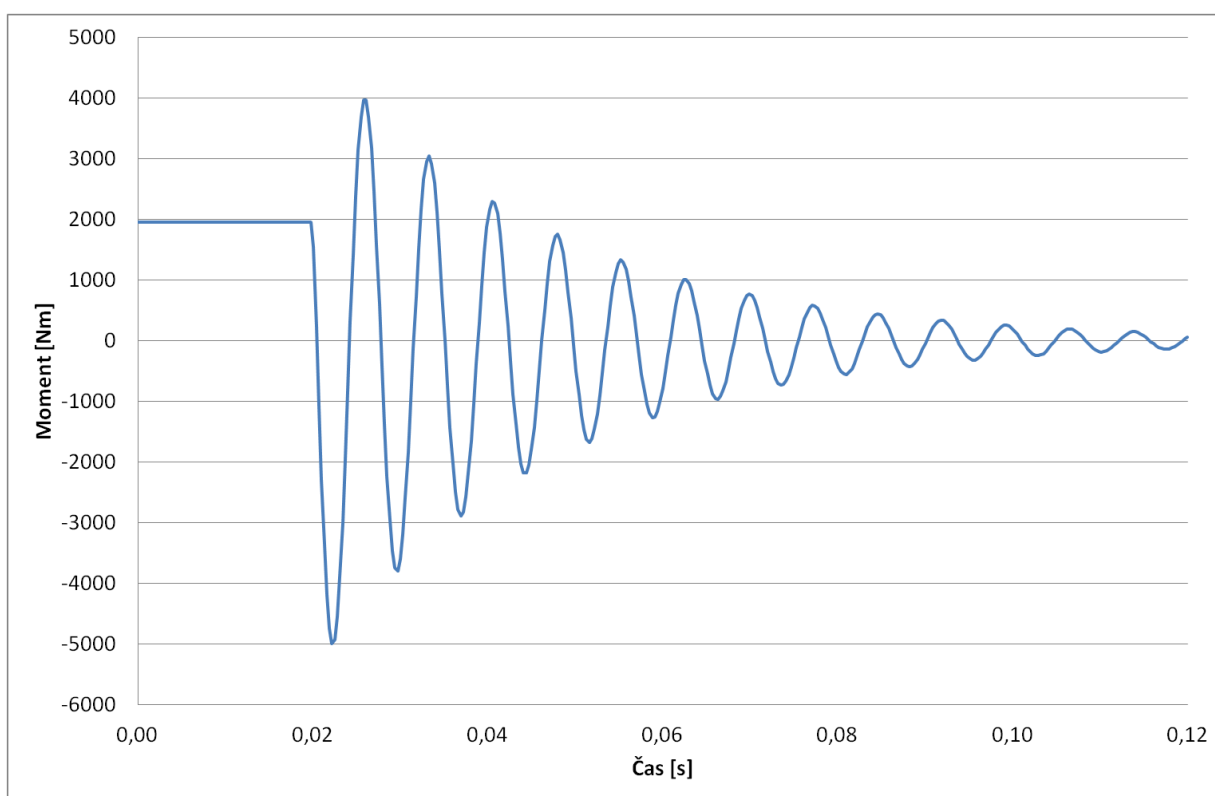


Obr. 3-15 Vliv vzájemné indukčnosti na moment zvratu [28]

Výsledky prokázaly, že nižší hodnoty vzájemné indukčnosti posouvají moment zvratu k vyšším hodnotám momentu. Graf (**Obr. 3-15**) zobrazuje vliv vzájemné indukčnosti, kde byly simulovány hodnoty vzájemné indukčnosti $L_v = 0,1; 0,6 - 0,9$. Na **Obr. 3-15** silná modrá čára představuje model s jednou hvězdou a ostatní tenké čáry představují modely s dvojitou hvězdou s různými hodnotami vzájemné indukčnosti. Největší shoda mezi modely s jednoduchou a dvojitou hvězdou byla u výpočtu s dosazenou vzájemnou indukčností $0,9 L_{s\sigma}$. Vliv vzájemné indukčnosti nemůže být úplně zanedbán a proto se dále bude počítat s hodnotou $0,9 L_{s\sigma}$, kterou lze najít i v odborné literatuře. Cílem této části řešení bylo získat představu o vlivu vzájemné indukčnosti na celkové chování modelu a současně prověřit vlastní matematický model a proto není uvedena škála u momentové osy.

3.5.4. Simulace teoretických poruch pomocí náhradního schématu

Hlavním cílem předchozích kapitol bylo získat lepší pochopení chování elektrického stroje na základě provedené rešerše a následné úpravy matematického modelu s dvojitou hvězdou. A pomocí odvozeného matematického modelu je možnost nasimulovat libovolný symetrický zkrat. V případě řešení nesymetrického zkratu, jako bylo provedeno v literatuře [5], by se rovnice (3.5.44) musela rozšířit 3x pro každou fázi. Pro řešení zkratu pomocí matematického modelu bylo použito náhradní schéma (**Obr. 3-11**) a ve zvolený časový okamžik 0,02s bylo uvažováno napětí na jednom vinutí nulové. Při nulovém napětí došlo k rozkmitání momentu a následné ustálení v nule (**Obr. 3-16**). Uvedený moment je ukázkou možnosti využití popsaného modelu, který lze využít při řešení zkratového momentu. Zobrazený průběh odpovídá grafu s 3fázovým vypnutým zkratem (Obr. 3-4). Rozdíl mezi grafy je počtu amplitud do ustálení k nule, to může být způsobeno způsobem řízení modelu a také uvažováním hmotnosti rotoru.



Obr. 3-16 Teoretický zkratový moment (M=5000Nm)

3.6. Zhodnocení zkratového momentu

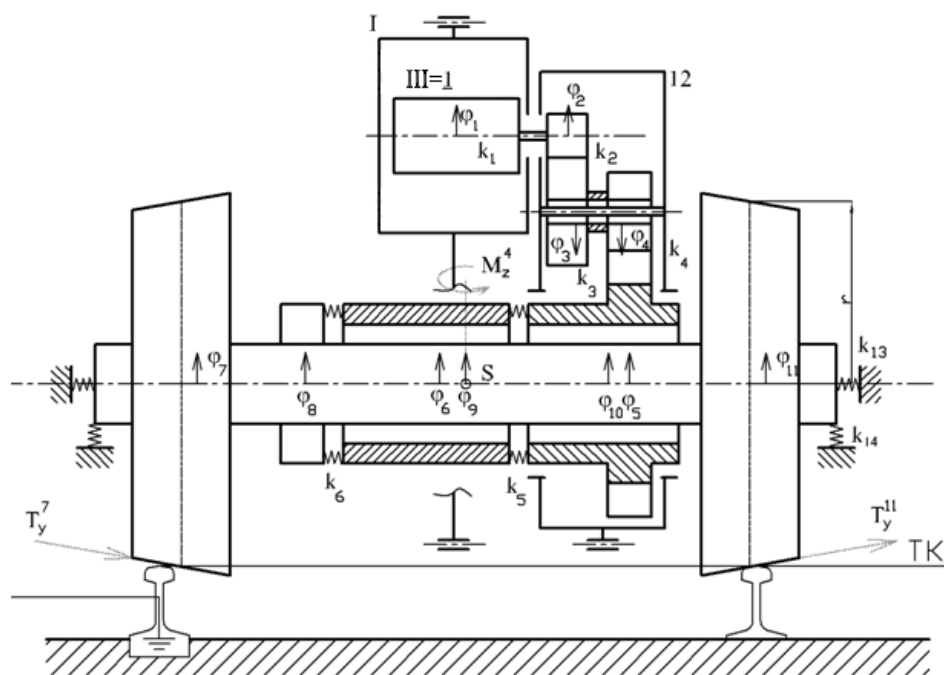
V předchozích kapitolách byly představeny tři možné cesty jak naměřit nebo spočítat průběh zkratového momentu. První z nich byl použití průběhů zkratového momentu spočtených výrobcem motorů (maximální špička byla 6 670Nm). Druhý způsob bylo získání záznamu z diagnostického systému vozidla od výrobce resp. provozovatele vozidla (maximální špička byla 5 765Nm). A poslední možnost byla použití odvozených rovnic pro výpočet zkratového momentu v programu MATLAB (maximální špička byla 5 000Nm).

3.7. Vliv zkratového momentu na mechanickou část pohonu

Původní myšlenkou popsanou v rigorózní práci bylo uvažování mechanické části pohonu jako soustavu torzně kmitající tuhých těles s poddajnými vazbami. Současně v rámci výzkumných aktivit Výzkumného centra kolejových vozidel byl popsán pohon elektrické jednotky 471, který byl přepracován pro účely simulace zkratového momentu. V době přípravy rigorózní práce jsem měl k dispozici pouze záznam zkratového momentu od výrobce motorů (kap. 3.3) a neznal jsem důsledky poškození ozubení, které jsou popsány v dalších kapitolách. Výhoda daného přístupu byla ve sledování vlivu momentu na celkové chování pohonu, ale nelze s ním sledovat např.: kontakt v ozubení. Zmiňovaný přístup bude popsán v následujících podkapitolách.

3.7.1. Kinematická analýza pomocí maticové počtu

Matematický popis mechanické části pohonu vychází ze schématu na **Obr. 3-17**. Kde mezi jednotlivými členy (i) jsou viskózní vazby $k_{i,j}$, kde indexy i a j u vazby označují členů mezi nimiž vazba působí. Schéma (**Obr. 3-17**) začíná v místě působení točivého momentu, kde může být aplikován jeden ze tří uvedených způsobů zjištění zkratového momentu v předchozích kapitolách. Moment vzniká ve vzduchové mezeře mezi státorem a rotorem (1), který je nasazen na hřídeli, u nichž se uvažuje absolutně tuhá vazba. Na druhém konci hřídele je přes vazbu $k_{1,2}$ je nasazen pastorek (2), který přes ozubení o tuhosti $k_{2,3}$ přenáší moment na velké ozubené kolo předlohy (3). Toto kolo na stromečku je spojeno lícovanými šrouby o tuhosti $k_{3,4}$ s malým kolem předlohy (4), které přenáší opět moment přes ozubení o tuhosti $k_{4,5}$ na velké ozubené kolo spojené s dutým hřídel převodovky (5). Oba převodové stupně jsou uloženy ve skříní převodovky (12), která je zavěšena na rám podvozku pomocí závěsek. Moment z dutého hřídele převodovky je dále přenášen na dutý hřídel (6) přes ojníčky se silentbloky o tuhosti $k_{5,6}$. Stejným způsobem je spojen dutý hřídel s nábojem nápravy, $k_{6,8}$. Tento náboj je nalisován i společně s koly (7 a 11) na nápravu. Náprava je uvažována jako deformovatelné těleso a bude vyšetřována jako 4 hřídelové spojité prvky mezi uzly $i=7,8,9,10,11$ a na dva diskretní kotouče v uzlech 7 a 11. [39]



Obr. 3-17 Schéma pohonu jako torzně kmitající soustavy tuhých těles

Zobrazená mechanická část pohonu (**Obr. 3-17**) je obecně buzena točivým momentem trakčního motoru a dalšími budícími účinky jsou momenty vznikající v kontaktech kol s kolejnicí. Při uvažování těchto momentů bude soustava pohybových rovnic zapsána ve tvaru:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$$

3.7.1

Kde matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} jsou matice hmotnosti, matice tlumení a matice tuhosti. Vektor zobecněné souřadnice $\mathbf{q} = [\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{13}]^T$ představují pootočení jednotlivých členů a matice $\mathbf{f}(t)$ zohledňuje budící vnější budící účinky.[39]

Pro vyjádření jednotlivých vztahů popisujících mechanickou část pohonu bylo zapotřebí odvodit obecné vztahy a aplikovat je pro tento případ.

3.7.1.1 Tuhost ozubení

Pro nadefinování tuhosti ozubení se obecně vychází z potenciální energie ozubeného převodu, která je dána schématem na **Obr. 3-18** z něhož odvozených rovnic (**3.7.2 -3.7.4**). Kde R_1 a R_2 jsou poloměry základní kružnice, k je tuhost ozubení, x je výchylka tuhosti ozubení a ρ_1 a ρ_2 jsou torzní výchylky ozubených kol. U momentové podmínky(**3.7.4**) síla F působí na rameni R_1 a je rovna tuhosti ozubení. Současně je zaveden předpoklad malých torzních výchylek, kde platí $\sin \varphi = \varphi$. [39]

Potenciální energie

Skalárně :

$$E_k = \frac{1}{2} k x^2$$

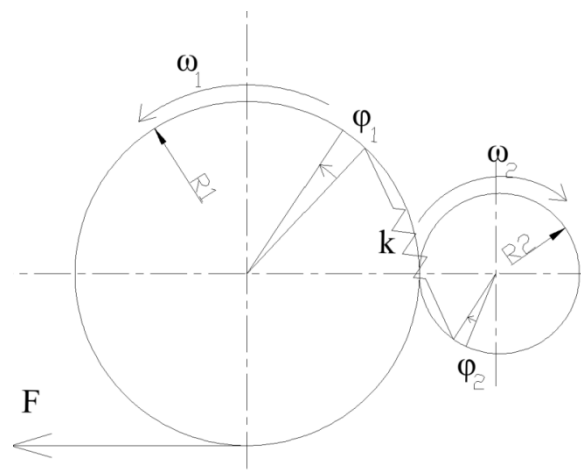
$$E_k = \frac{1}{2} k (R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2)^2$$

Vektorově :

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \quad 3.7.3$$

3.7.2 Momentová podmínka

$$M = F \cdot R_1 = k \cdot x \cdot R_1 \quad 3.7.4$$

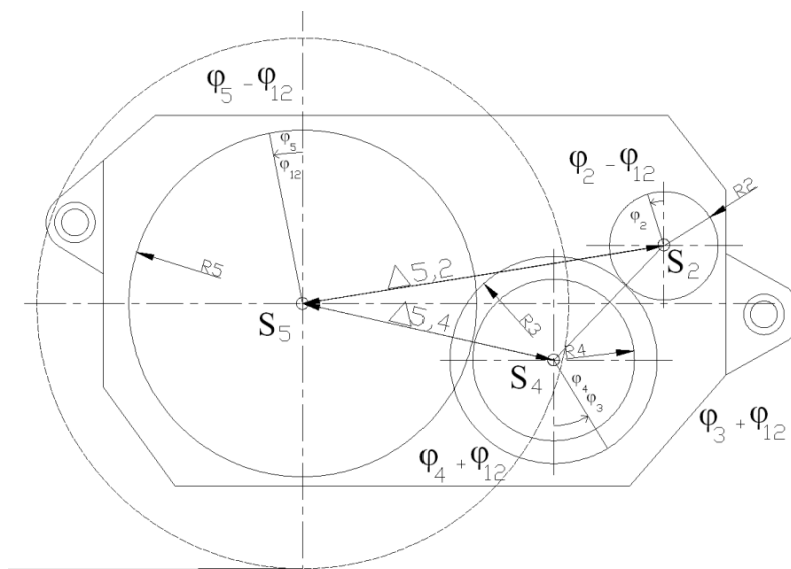


Obr. 3-18 Tuhost ozubení

Popsaný obecný postup byl aplikován pro případ elektrické jednotky 471, který je zobrazen na **Obr. 3-19**. Postup určení výchylky x_i , kde $i=1,2$ je dán vzdálenostmi ozubených kol v převodovce. Při určování energii je zapotřebí uvažovat natočení ozubených kol kolem vlastní osy a současně natočení skříně převodovky, která rotuje kolem středu S_8 . Motor a pastorek se nahradí hmotným bodem S_2 o hmotnosti $m_1 + m_2$, který se natáčí na rameni $\Delta_{5,2}$ o úhel φ_{12} . Ozubená kola předlohy se nahradí hmotným bodem S_4 o hmotnosti $m_3 + m_4$, který se natáčí na rameni $\Delta_{5,4}$ o úhel φ_{12} . Popsané výchylky komponentu skříně budou kmitat spolu se skříní a nebo v protifazi. Kladná orientace je zavedena natočením převodové skříně φ_{12} a i ostatní torzní výchylky jsou vidět na schématu(**Obr. 3-19**). Jednotlivé výchylky mají pak následující tvar, který se dosadí do matice tuhosti a potenciální energie. [39]

$$\begin{aligned}x_{2,3} &= R_2(\varphi_2 - \varphi_{12}) - R_3(\varphi_3 + \varphi_{12}) = R_2\varphi_2 - R_3\varphi_3 - (R_2 + R_3)\varphi_{12} \\x_{3,2} &= -R_2(\varphi_2 - \varphi_{12}) + R_3(\varphi_3 + \varphi_{23}) = -R_2\varphi_2 + R_3\varphi_3 + (R_2 + R_3)\varphi_{12} \\x_{4,5} &= -R_5(\varphi_5 - \varphi_{12}) + R_4(\varphi_4 + \varphi_{12}) = -R_5\varphi_5 + R_4\varphi_4 + (R_4 + R_5)\varphi_{12} \\x_{5,4} &= R_5(\varphi_5 - \varphi_{12}) - R_4(\varphi_4 + \varphi_{12}) = R_5\varphi_5 - R_4\varphi_4 - (R_4 + R_5)\varphi_{12}\end{aligned}$$

3.7.5



Obr. 3-19 Natočení ozubených kol

Současně **Obr. 3-19** zobrazuje excentrické uložení ozubení v převodovce, kde jsou naznačeny valivé kružnice ozubených kol. Výchozí rovina je uvažována v ose dvojkolí. Vzdálenost mezi osami nápravy a stromečku je $\Delta_{5,4} = 444\text{mm}$ a mezi nápravou a pastorkem je $\Delta_{5,2} = 633\text{mm}$.

Tab. 3-3 Převody poměry v převodovce

| název dílu | počet zubu | poměr | rychlosti |
|----------------------|------------|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Pastorek (2) | 24 | $i_{2,3} = \frac{24}{53}$ | $\dot{\varphi}_2$ |
| Mezikolo – velké (3) | 60 | | $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_2 \cdot i_{2,3}$ |
| Mezikolo – malé (4) | 28 | $i_{4,5} = \frac{28}{60}$ | $\dot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_2 \cdot i_{2,3}$ |
| Ozubené kolo (5) | 53 | | $\dot{\varphi}_5 = \dot{\varphi}_4 \cdot i_{4,5} = \dot{\varphi}_2 \cdot i_{2,5}$ |

Celkový převodový poměr : $i_{2,5} = i_{2,3} \cdot i_{4,5} \doteq 0.211$

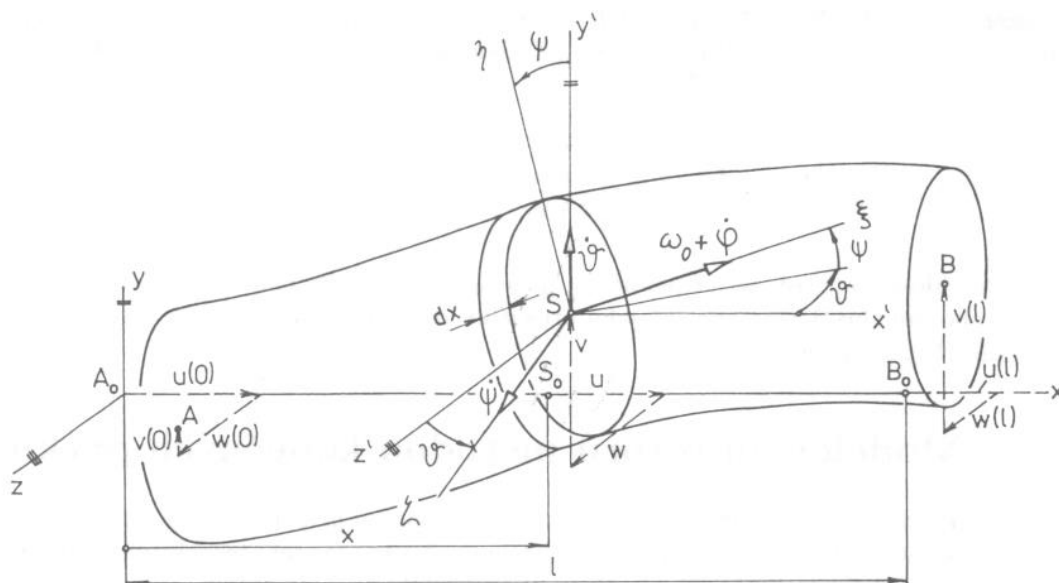
3.7.1.2 Teorie o hřídelových prvcích

Problematika metody modelování rotoru pomocí konečných prvků je popsána v literatuře [39], kde hmotný hřídelový prvek (**Obr. 3-20**) má v obou uzlech 6 stupňů volnosti, tj. posuvy x, y, z a rotace $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Hmotný element o délce d_x ve vzdálenosti x od počátku hřídelového prvku koná obecný pohyb, který je rozložen základním rozkladem ve středu S na unášivý pohyb rychlostí v , vyjádřena ve složkách u, v, w , a relativní sférický pohyb okamžitou úhlovou rychlostí ω , kterou vyjádříme s souřadnicích ξ, η, ζ (3.7.6). [39]

$$v(x) = [\dot{u}(x), \dot{v}(x), \dot{w}(x)]^T$$

$$\omega(x) = \omega_0 + \dot{\vartheta}(x) + \dot{\psi}(x) + \dot{\phi}(x) = [\omega_0 + \dot{\phi}(x) + \dot{\vartheta}(x)\sin\psi(x), \dot{\vartheta}(x)\cos\psi(x), \dot{\psi}(x)]_{\xi, \eta, \zeta}^T$$

3.7.6



Obr. 3-20 Hřídelový prvek [39]

Dále bude vyjádřena kinetická a potenciální energie hřídelového prvku, kde je plocha definována plocha A a kvadratický moment $J = \text{diag}(J_p(x), J(x), J(x))$. Index e značí hodnotu vztahující se k elementu (hřídelový prvek). U potenciální energie jsou uvedeny poměrné deformace podélné ve směru osy ε_x a smykové kolmé na osu rotace γ_{xy} a γ_{xz} .

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(x) \cdot v^T(x) \cdot v(x) + \omega^T(x) \cdot J(x) \omega(x)] \rho \cdot dx$$

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A(x))} [E \varepsilon_x^2(x) + G [\gamma_{xy}^2(x) + \gamma_{xz}^2(x)]] dA(x) \cdot dx$$

3.7.7

Pokud budou dosazeny rychlosti v a ω (3.7.6) a budou uvažovány malé úhly $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ a $\dot{\phi}(x) \ll \omega_0$ upraví se rovnice 3.7.7 do následujícího tvaru.

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ A(x) [\dot{u}^2(x) + \dot{v}^2(x) + \dot{w}^2(x)] + J_p(x) [\omega_0 + \dot{\phi}(x)]^2 + 2J_p(x) \omega_0 \dot{\vartheta}(x) \psi(x) + J(x) [\dot{\vartheta}^2(x) + \dot{\psi}^2(x)] \right\} \rho \cdot dx$$

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A(x))} [E [u'(x) - v''y(x) - zw''(x)]^2 + G \varphi'^2(x) [y^2 + z^2]] dA(x) \cdot dx$$

3.7.8

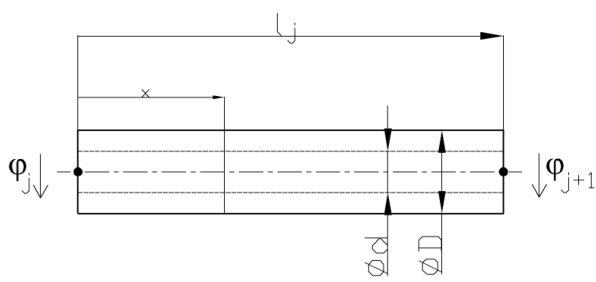
3.7.1.3 Odvození matice tuhosti a hmotnost hřídelového prvku s torzní deformací

Jelikož byla mechanická soustava uvažována pouze jako torzně kmitající, lze u hřídelových prvků uvažovat pouze torzní deformace a prizmatický hřídelový prvek (**Obr. 3-21**). Na základě uvedených zjednodušení se rovnice s kinetickou a potenciální energie **3.7.8** upraví na následující vztah, kde budou jednotlivé posuvy nulové a budou uvažovány pouze vlastní rotace hřídelového prvku o délce l vnějším průměru D a vnitřním průměru d .

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ J_p(x) [\omega_0 + \dot{\varphi}(x)]^2 \right\} \rho \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^l J_p [\omega_0 + \dot{\varphi}(x)]^2 \rho \cdot dx$$

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A(x))} G \varphi'^2(x) [y^2 + z^2] dA(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^l G \varphi'^2(x) A \cdot dx$$

3.7.9



Obr. 3-21 Torzní hřídelový prvek

Dále budou torzní deformace $\varphi(x)$ lineárně aproximovány v obecném místě x pomocí vektoru \mathbf{c} koeficientu bázevých funkcí (polynomy). Kde Ψ je pomocný vektor.

$$\varphi(x) = \Psi(x) \cdot \mathbf{c}$$

$$\Psi(x) = [1 \quad x]$$

3.7.10

Dále vektor natočení $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(l) \end{bmatrix}$ hřídelového prvku v souřadném systému x, y, z bude popsán v krajních uzlech. A díky aproximaci vyplývá závislost vektoru natočení \mathbf{q} , kde \mathbf{S} je pomocná matice pro aproximaci torzní deformace.

$$\mathbf{q} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{c} \quad \text{kde} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}$$

3.7.11

Po vyjádření vektoru $\mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{q}$ z rovnice (3.7.11) bude aproximační vztah (3.7.10) upraven.

$$\varphi(x) = \Psi(x) \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{q}$$

3.7.12

Pro aproximační vztah (3.7.12) bude třeba určit inverzní matici \mathbf{S}^{-1} a inverzní transponovanou matici \mathbf{S}^{-T} , které se určí pomocí jednotkové matice v následujícím vztahu (3.7.13).

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{E}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 1 \cdot A + 0 \cdot B &= 1 \Rightarrow A = 1 \\ 1 \cdot C + 0 \cdot D &= 0 \Rightarrow C = 0 \\ 1 \cdot A + l \cdot B &= 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{l} \\ 1 \cdot C + l \cdot D &= 1 \Rightarrow D = \frac{1}{l} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

3.7.13

Po dosazení inverzní matice \mathbf{S}^{-1} a inverzní transponované matice \mathbf{S}^{-T} :

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{l}(-1+x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(l) \end{bmatrix} = \varphi(0) + \frac{(x-1)}{l} \cdot \varphi(l)$$

3.7.14

Matice hřídelového prvku bude odvozena z podmínky ekvivalence z levých stran Langrangeových rovnic aplikovaný na netlumený hřídelový prvek.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{G}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}$$

3.7.15

Z rovnice 3.7.15 dostaneme v obecném odvození matice hmotnosti $\mathbf{M}^{(e)}$, gyroskopického účinku $\mathbf{G}^{(e)}$ a tuhosti hřídelového prvku $\mathbf{K}^{(e)}$. Při uvažování pouze torzní deformace se matice zjednoduší na členy $a_{4,4}$ v maticích (3.7.16). Pro další odvozování byl spočten polární průřezový moment J_p pro dutý hřídelový prvek a matice momentů setrvačnosti $\mathbf{I}_1^{(e)}$ a $\mathbf{I}_2^{(e)}$ (3.7.17), které se vyjádří pomocí materiálových vlastností (hustoty ρ a modulu pružnosti ve smyku G).

$$\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{S}^{-T} \cdot \mathbf{I}_1^e \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{S}^{-T} \cdot \mathbf{I}_2^e \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

3.7.16

$$\mathbf{I}_1^e = \rho \cdot J_p \cdot l \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} \\ l & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2^e = G \cdot J_p \cdot l \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_p = 2J = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4),$$

3.7.17

Po dosazení matic momentů setrvačnosti \mathbf{I}_1^e a \mathbf{I}_2^e do vztahu 3.7.16 jsou získány rovnice Matice hmotnosti a tuhosti ve následujícím tvaru.

$$\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{S}^{-T} \cdot \mathbf{I}_1^e \cdot \mathbf{S}^{-1} = \rho \cdot J_p \cdot l \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} =$$

$$= \rho \cdot J_p \cdot l \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{l}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{l}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = \rho \cdot J_p \cdot l \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{S}^{-T} \cdot \mathbf{I}_2^e \cdot \mathbf{S}^{-1} = G \cdot J_p \cdot l \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} =$$

$$= G \cdot J_p \cdot l \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = G \cdot J_p \cdot l \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} = \frac{G \cdot J_p}{l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

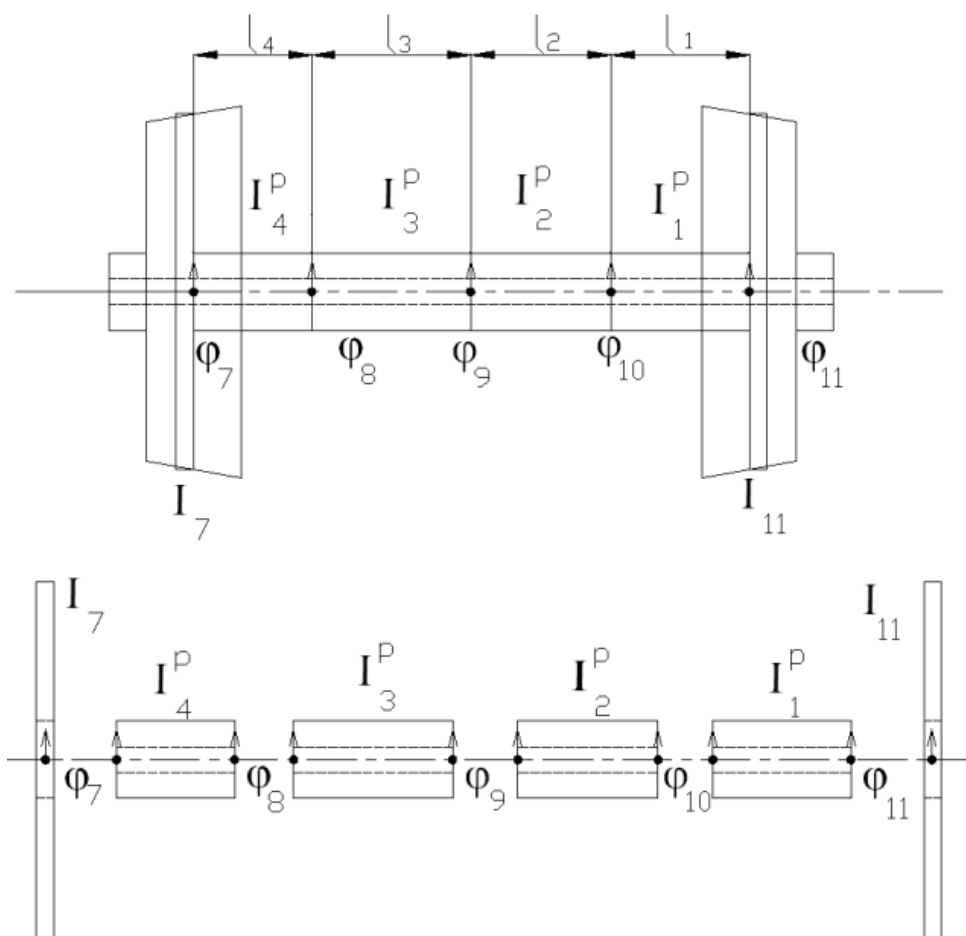
3.7.18

Potom pro jednotlivé hřídelové prvky jsou členy maticí hmotnosti a tuhosti zapsány obecně v následujícím tvaru a jsou označeny indexem p . Kvadratické momenty se spočtou na základě vnějšího průměru hřídelového prvku D , vnitřního průměru hřídelového prvku d , délky hřídelového prvku l , a indexy $i = 1,2,3,4$ resp. $j = 7,8,9,10$.

$$I_i^p = \frac{\rho\pi}{32} (D^4 - d^4) \cdot l_i \quad k_{j,j+1}^p = G \cdot \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \cdot \frac{1}{l_i}$$

3.7.19

Konkrétně v tomto případě je náprava rozdělena na 4 hřídelové prvky $1^p, 2^p, 3^p, 4^p$ a dvě jízdní kola označená 7 a 11, viz **3.7.21**. Natočení φ_i je uvažováno ve spoji jednotlivých hřídelových prvků.



Obr. 3-22 Rozdělení nápravy na hřídelové prvky

3.7.1.4 Tlumení

Tlumení mezi jednotlivými členy je obtížné zjišťovat a proto obecně je uvažováno matice tuhosti a matice tlumení mají stejnou strukturu a jednotlivé členy matice tuhosti k_{ij} jsou nahrazeny členy matice viskozního tlumení b_{ij} . Z literatury [39] byl použit vztah pro závislost tlumení na tuhosti.

$$b_{ij} = 1e^{-4} \cdot k_{ij}$$

3.7.20

3.7.2. Kinetická a potenciální energie

Při testování matematického modelu pohonu bylo zapotřebí vyjádřit potenciální a kinetickou energii pomocí Langraengových rovnic pro soustavu torzně izolovaného ze strany kol dvojkolí. Energie byly odvozeny na základě hmotnosti rotoru m_1 , pastorku m_2 a stromečku $m_3 + m_4$. Dále bylo nutné vyjádřit poloměry pastorku $R_2 = r_2 \cdot \cos \alpha_z \cdot \cos \beta_{z1}$, velkého ozubeného kola předlohy $R_3 = r_3 \cdot \cos \alpha_z \cdot \cos \beta_{z1}$, malého ozubeného kola předlohy $R_4 = r_4 \cdot \cos \alpha_z \cdot \cos \beta_{z2}$ a velkého ozubeného kola $R_5 = r_5 \cdot \cos \alpha_z \cdot \cos \beta_{z2}$. Nakonec byly vyjádřeny vektory hřídelových prvků \mathbf{q}_i , kde index je $i=1,2,3,4$.

$$\mathbf{q}_1 = [\varphi_7, \varphi_8]^T, \quad \mathbf{q}_2 = [\varphi_8, \varphi_9]^T, \quad \mathbf{q}_3 = [\varphi_9, \varphi_{10}]^T, \quad \mathbf{q}_4 = [\varphi_{10}, \varphi_{11}]^T \quad 3.7.21$$

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 I_i \cdot \dot{\varphi}_i^2}_1 + \underbrace{\frac{1}{2} ((m_1 + m_2) \cdot \Delta_{5,2}^2 + (m_3 + m_4) \cdot \Delta_{5,4}^2 + m_{12}) \dot{\varphi}_{12}^2}_2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=7}^{11} \dot{\mathbf{q}}_j^T \cdot \mathbf{M}_j \cdot \dot{\mathbf{q}}_j}_3 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=7,11} I_i \cdot \dot{\varphi}_i^2}_4 \quad 3.7.22$$

$$E_p = \underbrace{\frac{1}{2} k_{1,2} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2}_1 + \underbrace{\frac{1}{2} k_{2,3} \cdot (R_2 \varphi_2 - R_3 \varphi_3 - (R_2 + R_3) \varphi_{12})^2}_2 +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} k_{3,4} \cdot (\varphi_3 - \varphi_4)^2}_3 + \underbrace{\frac{1}{2} k_{5,4} \cdot (R_5 \varphi_5 - R_4 \varphi_4 + (R_4 + R_5) \varphi_{12})^2}_4 +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} k_{12} \cdot \varphi_{12}^2}_5 + \underbrace{\frac{1}{2} k_{5,6} \cdot (\varphi_5 - \varphi_6)^2}_6 + \underbrace{\frac{1}{2} k_{6,8} \cdot (\varphi_8 - \varphi_6)^2}_7 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=7}^{11} \mathbf{q}_j^T \cdot \mathbf{K}_j \cdot \mathbf{q}_j}_8 \quad 3.7.23$$

Člen 1 rovnice 3.7.22 je kinetická energie rotujících součástí, tj. motoru, převodovky včetně ozubených kol a dutých hřídelů. Člen 2 zohledňuje rotační pohyb skříně převodovky včetně vnitřních komponentu kolem nápravy. Člen 3 popisuje nápravu, která byla rozdělena na 4 hřídelové prvky duté nápravy mezi uzly 7,8,9,10,11. Poslední člen je energie kol dvojkolí.

Rovnice 3.7.23 vyjadřuje potenciální energie poddajných vazeb a skládá se z členů 1 a 3 představují tuhosti hřídelů a členů 2 a 4 popisující tuhost v ozubení. Člen 5 je potenciální energie skříně převodovky a členy 6 a 7 představují vazbu mezi dutými hřídeli, které jsou spojeny ojníčkami se silentbloky. Poslední člen opět popisuje energii dvojkolí.

Obecný zápis rovnice 3.7.1 byl rozepsán na jednotlivé rovnice, který vychází ze schématu Obr. 3-17 a všech přípravných odvození v předchozích odstavcích. Kde pro první ověření funkčnosti byly nastaveny konstantní budící účinky, kterými byly točivý moment motoru M_{MOT} , a momenty v kolech M_{L_KOL} a M_{P_KOL} . Pro zjednodušení pohybových rovnic nebude v pohybových rovnicích vyjádřeno tlumení z důvodu větší přehlednosti rovnic. Tlumení jak již bylo řečeno, bude mít stejnou strukturu jako matice tuhosti.

Pro korektní vyjádření chování skříně převodovky byl zaveden celkový moment setrvačnosti $I_{12}^c = I_{12} + (m_1 + m_2) \cdot \Delta_{5,2}^2 + (m_3 + m_4) \cdot \Delta_{5,4}^2$, který popisuje převodovku včetně vnitřních komponent, navíc z literatury [39] je vidět, že chování skříně nemá zanedbatelný vliv.

$$I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + k_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = M_{MOT}$$

$$I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - k_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + R_2 \cdot k_2 \cdot [R_2 \varphi_2 - R_3 \varphi_3 - (R_2 + R_3) \varphi_{12}] = 0$$

$$I_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 + k_3 \cdot (\varphi_3 - \varphi_4) - R_3 \cdot k_2 \cdot [R_2 \varphi_2 - R_3 \varphi_3 - (R_2 + R_3) \varphi_{12}] = 0$$

$$I_4 \cdot \ddot{\varphi}_4 - k_3 \cdot (\varphi_3 - \varphi_4) - R_4 \cdot k_4 \cdot [R_5 \varphi_5 - R_4 \varphi_4 - (R_4 + R_5) \varphi_{12}] = 0$$

$$I_5 \cdot \ddot{\varphi}_5 + k_5 \cdot (\varphi_5 - \varphi_6) + R_5 \cdot k_4 \cdot [R_5 \varphi_5 - R_4 \varphi_4 - (R_4 + R_5) \varphi_{12}] = 0$$

$$I_6 \cdot \ddot{\varphi}_6 - k_5 \cdot (\varphi_5 - \varphi_6) + k_6 \cdot (\varphi_6 - \varphi_8) = 0$$

$$\frac{I_1^p}{6} \cdot \ddot{\varphi}_8 + \left(I_7 + \frac{I_1^p}{3} \right) \cdot \ddot{\varphi}_7 + k_7 \cdot (\varphi_7 - \varphi_8) = M_{L_KOL}$$

$$\frac{I_2^p}{6} \cdot \ddot{\varphi}_9 + \left(I_8 + \frac{I_1^p + I_2^p}{3} \right) \cdot \ddot{\varphi}_8 + \frac{I_1^p}{6} \cdot \ddot{\varphi}_7 + k_9 \cdot (\varphi_8 - \varphi_9) - k_7 \cdot (\varphi_7 - \varphi_8) - k_6 \cdot (\varphi_6 - \varphi_8) = 0$$

$$\frac{I_3^p}{6} \cdot \ddot{\varphi}_{10} + \frac{I_2^p + I_3^p}{3} \cdot \ddot{\varphi}_9 + \frac{I_2^p}{6} \cdot \ddot{\varphi}_8 + k_{10} \cdot (\varphi_9 - \varphi_{10}) - k_9 \cdot (\varphi_8 - \varphi_9) = 0$$

$$\frac{I_4^p}{6} \cdot \ddot{\varphi}_{11} + \frac{I_3^p + I_4^p}{3} \cdot \ddot{\varphi}_{10} + \frac{I_3^p}{6} \cdot \ddot{\varphi}_9 + k_{11} \cdot (\varphi_{10} - \varphi_{11}) - k_{10} \cdot (\varphi_9 - \varphi_{10}) = 0$$

$$\left(I_{11} + \frac{I_4^p}{3} \right) \cdot \ddot{\varphi}_{11} + \frac{I_4^p}{6} \cdot \ddot{\varphi}_{10} - k_{11} \cdot (\varphi_{10} - \varphi_{11}) = M_{P_KOL}$$

$$I_{12}^c \cdot \ddot{\varphi}_{12} - R_2 \cdot k_2 \cdot (R_2 + R_3) \varphi_2 + R_3 \cdot k_2 \cdot (R_2 + R_3) \varphi_3 - R_4 \cdot k_4 \cdot (R_5 + R_4) \varphi_4 + \\ + R_5 \cdot k_4 \cdot (R_5 + R_4) \varphi_5 + k_{12} \cdot \varphi_{12} + [k_2 \cdot (R_2 + R_3)^2 + k_4 \cdot (R_4 + R_5)^2] \cdot \varphi_{12} = 0$$

3.7.24

Uvedená soustava pohybových rovnic byla převedena do maticového tvaru, který je nutný pro další práci. Vektor zobecněných souřadnic \mathbf{q} a jeho derivací má následující tvar.

$$\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{12}]^T$$

3.7.25

Dále matice hmotnosti \mathbf{M} a tuhosti \mathbf{K} jsou následující tvar. Matice \mathbf{B} je shodná s maticí \mathbf{K} , pouze je pronásobena, tak aby bylo nadefinováno správné tlumení ($\mathbf{B} = \mathbf{K} \cdot 1e^{-4}$).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_7 + I_{p1}/3 & I_{p1}/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p1}/6 & I_8 + (I_{p1} + I_{p2})/3 & I_{p2}/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p2}/6 & (I_{p2} + I_{p3})/3 & I_{p3}/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p3}/6 & (I_{p3} + I_{p4})/3 & I_{p4}/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p4}/6 & I_{11} + I_{p4}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \cdot r_2^2 & -k_2 \cdot r_2 \cdot r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_2 \cdot k_2 \cdot (r_2 + r_3) \\ 0 & -k_2 \cdot r_2 \cdot r_3 & k_3 + k_2 \cdot r_3^2 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 \cdot k_2 \cdot (r_2 + r_3) \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \cdot r_4^2 & -k_4 \cdot r_4 \cdot r_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 \cdot k_4 \cdot (r_4 + r_5) \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \cdot r_4 \cdot r_5 & k_5 + k_4 \cdot r_5^2 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_5 \cdot k_4 \cdot (r_4 + r_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 & 0 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_p(1) & -k_p(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & -k_p(1) & k_p(1) + k_p(2) + k_6 & -k_p(2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_p(2) & k_p(2) + k_p(3) & -k_p(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_p(3) & k_p(3) + k_p(4) & -k_p(4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_p(4) & k_p(4) & 0 & 0 \\ 0 & -r_2 \cdot k_2 \cdot (r_2 + r_3) & r_3 \cdot k_2 \cdot (r_2 + r_3) & r_4 \cdot k_4 \cdot (r_4 + r_5) & -r_5 \cdot k_4 \cdot (r_4 + r_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12} + (k_2 \cdot (r_2 + r_3))^2 + k_4 \cdot (r_4 + r_5)^2 \end{bmatrix}$$

3.7.26

Sestavené matice (3.7.26) a vektory (3.7.25) jsou členy rovnice 3.7.1, která popisuje silně nekonzervativní systém, který bylo nutné rozšířit o další vztah 3.7.27 a). Tato rovnice je rovna nulové matici.

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$$

a)

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F}$$

b)

3.7.27

Po spojení dvou rovnic v jednu vznikne následující vztah, kde byl zaveden stavový vektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} \in R^{2n} \text{ a jeho derivace } \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \in R^{2n} \text{ a matice s mechanické budícími účinky}$$

\mathbf{F}_2 .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_2}$$

3.7.28

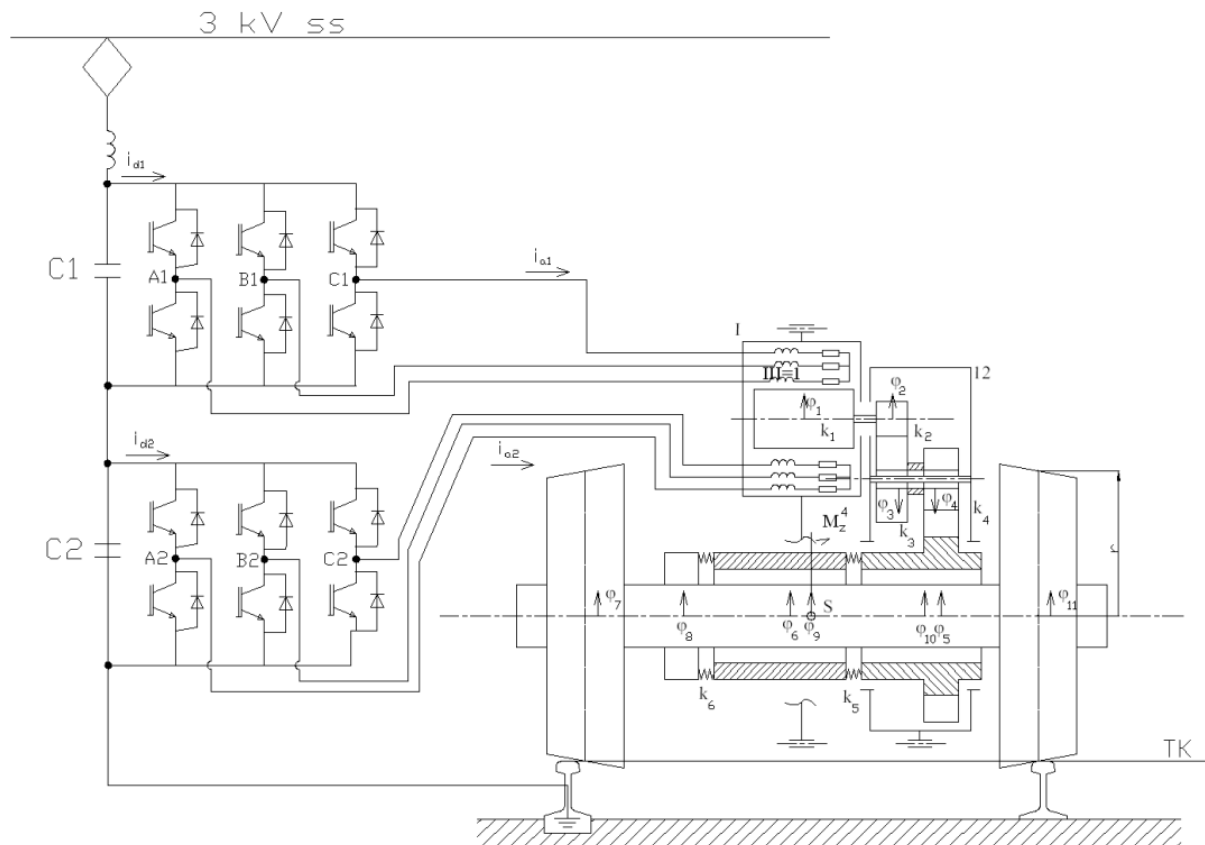
Matematický model popisující mechanický subsystem vycházející z pohybových rovnic, je připraven pro spojení obou částí pohonu (elektrické a mechanické).

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_2(t)$$

3.7.29

3.8. Spojení mechanické a elektrické části

Po odvození matematických modelů pro mechanický a elektrický systém lze oba systémy spojit a řešit je jako jeden velký model popisující elektrickou a mechanickou část pohonu vycházející z schématu na **Obr. 3-23**.



Obr. 3-23 Schematické znázornění výpočtového modelu podle rigorózní práce [25]

Nejjednodušší zápis elektrického subsystému uvedený v rovnici 3.5.46 se upraví tím, že dojde k pronásobení matice konstant \mathbf{Y} s vektorem napětí \mathbf{u} a vznikne nová matice elektrických budících účinků \mathbf{F}_1 .

$$\dot{\mathbf{e}}(t) - \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}(t) = \mathbf{F}_1(t)$$

3.8.1

Pokud se spojí matice 3.8.1 a 3.7.29 vznikla nová soustava rovnic (3.8.2), která se následně upraví pro řešení v softwaru MATLAB. Dále v rovnici byl zaveden stavový vektor $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix}$ a jeho derivace $\dot{\mathbf{z}}(t)$, matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} popisující konstanty modelu a matice \mathbf{S} s budícími účinky obou částí pohonu.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}}(t)$$

3.8.2

$$\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{R} \cdot \mathbf{z}(t) = \mathbf{S}(t)$$

3.8.3

Konečná podoba rovnice použitá v softwaru MATLAB komplexně popisující individuální pohon je:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Q} \setminus \mathbf{R} \cdot \mathbf{z}(t) - \mathbf{S}(t)$$

3.8.4

Zásadní pro spojení obou částí byla první pohybová rovnice mechanického subsystému (3.7.24), u které byla zpřesněna podoba pravé strany (vyjádření hodnoty M_{MOT}). Tato rovnice vytváří spojení mezi subsystémy, resp. mechanický subsystém reaguje na chování elektrické. Neboť levá část představuje mechanický subsystém a pravá elektrický subsystém. Konkrétně pro připomenutí členy uvedené levé strany rovnice jsou moment setrvačnosti rotoru I_1 , útlum b_1 a tuhost rotoru k_1 . Ostatní členy levé strany rovnice jsou proměnné a tvoří je zrychlení $\ddot{\varphi}_1$, rozdíl rychlosti $(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$ a výchylek $(\varphi_1 - \varphi_2)$ mezi rotorem a pastorkem (2). Vzniklý moment z asynchronního motoru je přímo závislý na elektrických stavových veličinách, jako jsou statorový proud prvního vinutí i_{sx1} , i_{sy1} a druhého vinutí i_{sx2} , i_{sy2} a rotorové magnetické toky ψ_{rx} , ψ_{ry} a na konstantách jako jsou počet pólpárů p_p , transformační koeficient k_p a poměr hlavní a rotorové indukce L_h/L_r . Systém je sestaven tak, že elektrická část ovlivňuje mechanickou a lze tyto části řešit odděleně. Proto také lze nahradit elektrickou část, např.: signálem z diagnostického zařízení.

$$I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + b_1 \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + k_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = p_p \cdot k_p \cdot \frac{L_h}{L_r} \cdot (\psi_{rx} \cdot (i_{sy1} + i_{sy2}) - \psi_{ry} \cdot (i_{sx1} + i_{sx2}))$$

3.8.5

3.8.1. Testování modelu

Testování modelu proběhlo pomocí signálu uvedeného na **Obr. 3-12**, kterým byl nejprve testován model popisující elektrickou část pohonu. Zmiňovaný signál byl časový průběh frekvence f_s po dobu 100s. Na následujících obrázcích je zobrazena časová závislost řešených veličin, kterými jsou otáčky jednotlivých dílů soustavy pohonu v závislosti na chování motoru (**Obr. 3-24** a také rychlosti (**Obr. 3-25**). Uvedené graf byly spočteny pro tyto konkrétní parametry.

Parametry náhradního schématu

| | |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $k_p = 3/2$ [-] | transformační koeficient |
| $P_p = 3$ [-] | počet pólpárů |
| $R_s = 0,0314 \Omega$ | náhradní odpor statoru asynchronního motoru R_1 |
| $R_r = 0,02 \Omega$ | náhradní odpor rotoru asynchronního motoru R_{21} |
| $L_{es} = 0,000566 \text{ H}$ | rozptylová indukčnost statoru asynchronního motoru |
| $L_{er} = 0,000431 \text{ H}$ | rozptylová indukčnost rotoru asynchronního motoru |
| $L_h = 0,156 \text{ H}$; | hlavní indukčnost asynchronního motoru |
| $L_s = L_h + L_{es}$ | celková indukčnost statoru asynchronního motoru |
| $L_r = L_h + L_{er}$ | celková indukčnost rotoru asynchronního motoru |
| $L_v = 0,9 \cdot L_{es}$ | vzájemná indukčnost $L_v = 3/2 \cdot l_v$ |
| $u_c = 1500 \text{ V}$ | napětí meziobvodu |
| $u_s = 1130 \text{ V}$ | napětí statoru |
| $f_{\text{modul}} = 66 \text{ Hz}$ | modulační frekvence |

Materiálové parametry oceli

$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ hustota oceli
 $G = 8e^{10} \text{ Pa}$ Modul pružnosti ve smyku

Moment setrvačnosti

$I_1 = 6.85 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti motoru
 $I_2 = 0.064 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti pastorku
 $I_3 = 0.73 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti velkého kolo předlohy
 $I_4 = 1.00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti malého kolo předlohy
 $I_5 = 13.23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti dutého hřídele převodovky + velké kolo
 $I_6 = 5.74 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti dutého hřídele
 $I_7 = 47.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti levého kola
 $I_8 = 2.77 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti náboje
 $I_{11} = 47.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti pravého kola
 $I_{12} = 505.15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ moment setrvačnosti skříně převodovky

Parametry hřídelových prvků duté nápravy: vnější průměry D [m], vnitřní průměry d [m],
délky [m] a moment setrvačnosti prvků [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$].

$D = [0.208 \ 0.196 \ 0.195 \ 0.196]$

$d = [0.04 \ 0.04 \ 0.04 \ 0.04]$

$l = [0.264 \ 0.486 \ 0.384 \ 0.366]$

$I_p = 1/32 \cdot \rho \cdot \pi \cdot ((D^4) - (d^4)) \cdot l$

Parametry prvního převodového stupně

$\alpha = 20^\circ$ úhel záběru
 $\beta_1 = 6^\circ$ úhel sklonu
 $R_2 = 0.0845 \text{ m}$ roztečný poloměr pastorku
 $R_3 = 0.1865 \text{ m}$ roztečný poloměr velkého předlohového kola
 $k_2 = 2e^9 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ torzní tuhost ozubení
 $b_2 = k_2 \cdot 2e^{-4}$ tlumení ozubení
 $r_2 = R_2 \cdot \cos(\alpha/180 \cdot \pi) \cdot \cos(\beta_1/180 \cdot \pi)$
 $r_3 = R_3 \cdot \cos(\alpha/180 \cdot \pi) \cdot \cos(\beta_1/180 \cdot \pi)$

Parametry druhého převodového stupně

$\beta_2 = 4^\circ$ úhel sklonu
 $R_4 = 0.1403 \text{ m}$ roztečný poloměr malého předlohového kola
 $R_5 = 0.3007 \text{ m}$ roztečný poloměr velkého kola
 $k_4 = 2.16e^9 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ torzní tuhost ozubení
 $b_4 = k_4 \cdot 2e^{-4}$ tlumení ozubení
 $r_4 = R_4 \cdot \cos(\alpha/180 \cdot \pi) \cdot \cos(\beta_2/180 \cdot \pi)$
 $r_5 = R_5 \cdot \cos(\alpha/180 \cdot \pi) \cdot \cos(\beta_2/180 \cdot \pi)$

Tuhosti vazeb

$k_3 = 1e^6 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ torzní tuhost mezi převodovými stupni
 $b_3 = k_3 \cdot 2e^{-4}$ útlum mezi převodovými stupni
 $k_1 = 2.6e^6 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ torzní tuhost mezi hřídelem a pastorkem
 $k_{12} = 36.3e^6 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ torzní tuhosti skříně
 $k_5 = k_6 = 4.42e^6 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ torzní tuhost pryžových spojek
 $D_b = .063$ poměrný útlum
 $b_{12} = 17000$ tlumení převodové skříně
 $\beta = 3.4e-4$ proporciální tlumení

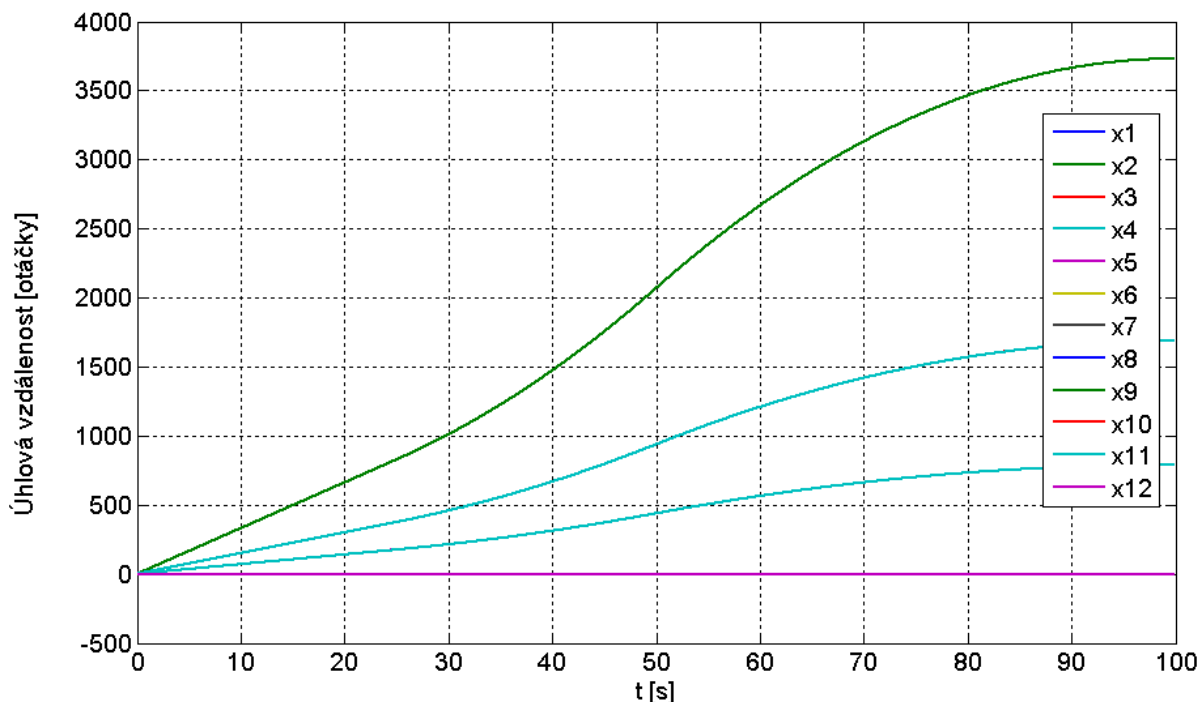
$b_5 = b_6 = 1500$
 $b_1 = 1350$

tlumení pryžových spojek
 tlumení motoru

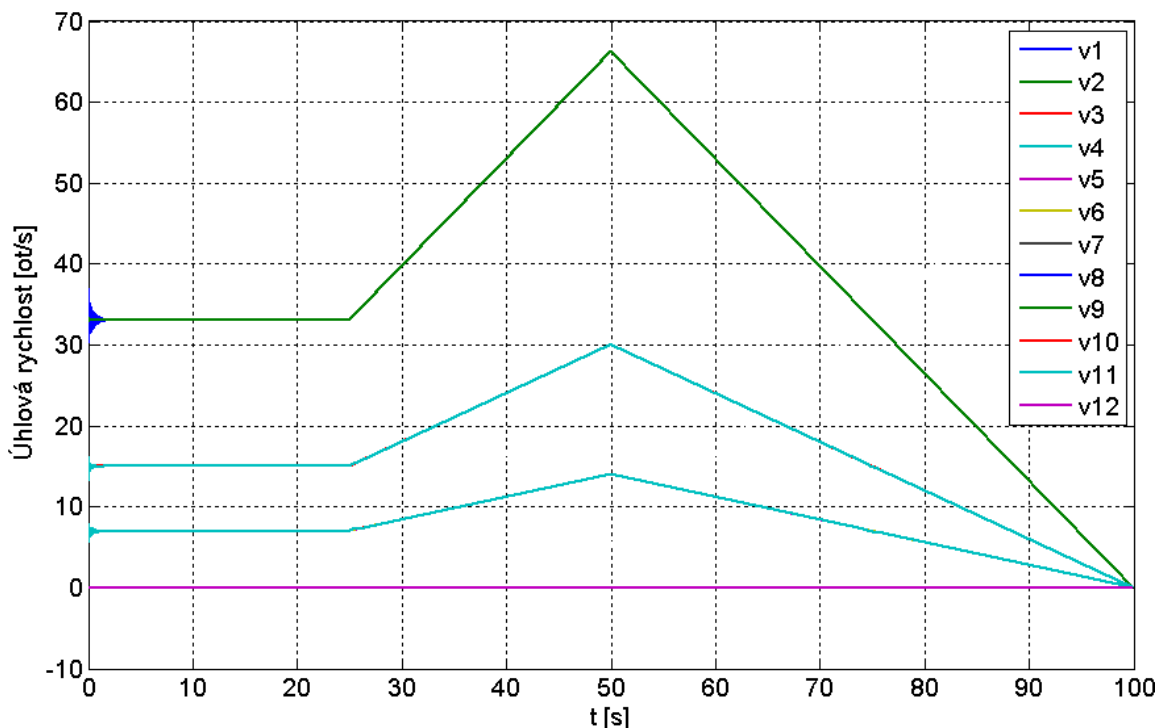
Ostatní parametry

$N_{\text{kola}} = 16e^4 \text{ N}$
 $\lambda = 0.15 \text{ m}$
 $s = 1.435/2 = 0.7175 \text{ m}$

statická síla na kole, hmotnost vozu 62.7t
 úhel kuželovitosti kola
 polovina rozchodu



Obr. 3-24 Průběh otáček v závislosti na čase [28]



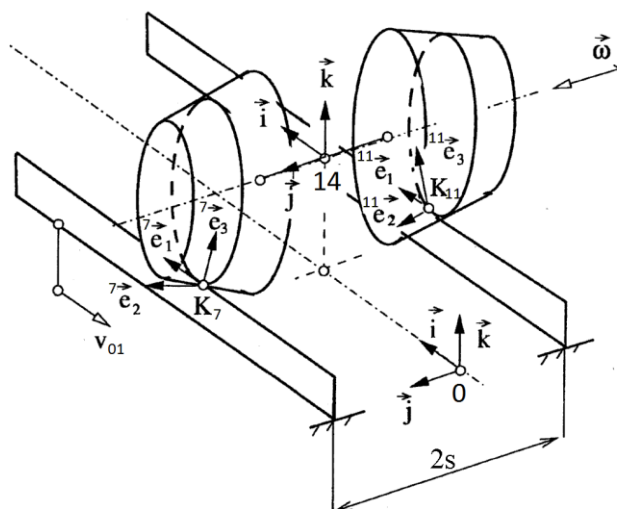
Obr. 3-25 Průběh rychlosti v závislosti na čase [28]

Jelikož mechanický pohon se skládá z dvoustupňové předlokové převodovky a jednotlivé komponenty se pohybují stejnou rychlostí (v_i , kde $i = 1 - 12$) a posouvají se při shodném průběhu (x_i). Proto v grafech zobrazující časovou závislost rychlosti a posuvu, jsou vždy jen 4 křivky, protože se křivky jednotlivých komponent navzájem překrývají. Vstupní otáčky a úhlovou rychlost mají stejné členy 1 a 2, tj. rotor asynchronního motoru a pastorek. Přes první převodový poměr $i_{2,3} = \frac{24}{53}$ se úhlová rychlost zmenší pro členy 3 a 4, tj. ozubené kolo prvního převodu a malé kolo druhého převodu. A přes druhý převodový poměr $i_{4,5} = \frac{28}{60}$ se opět zpomalí otáčky a úhlová rychlost pro členy 5 – 11, tj. velké kolo druhého převodu, oba duté hřídele a náprava. Rychlost a natáčení převodové skříně 12 vypadá jako nulová v porovnání s ostatními členy, ale při použití vhodnější měřítka se zobrazí kmitání i tohoto tělesa.

Pomocí vytvořeného modelu lze simulovat různé symetrické zkraty nebo lze použít jiné vstupy než je elektrický subsystém popsán rovnicí 3.5.46, např.: záznam z diagnostického zařízení (např.: Obr. 3-5) a nebo výpočet zkratového momentu od výrobce motorů (např.: Obr. 3-4).

3.8.2. Kinematické poměry v bodech kontaktu kola s kolejnici

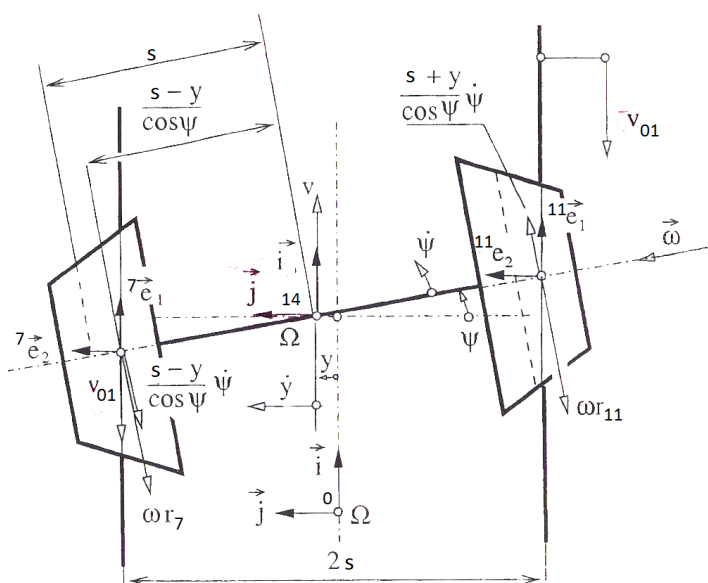
Pro lepší popis chování dvojkolí v kolejovém kanálu byl stávající model ještě rozšířen o matematické vztahy popisující pohyb volného dvojkolí pomocí Kalkerovy teorie, [12]. Při odvození byly použity vstupní parametry z výkresové dokumentace a z CAD modelů a byl počítán časový průběh rychlosti dvojkolí v příčném směru a úhlové rychlosti natáčení dvojkolí kolem osy z, tj. osy kolmé na tečnou rovinu v bodě dotyku ploch obou kol. Dalšími sledovanými veličinami byly výchylka dvojkolí v příčném směru (y) a úhlová výchylka dvojkolí kolem osy z. Podélný směr se neřeší, protože je dán unášivým pohybem dvojkolí. Pro určení kinematických poměrů byly uvažovány dokonale tuhá tělesa, která se dotýkají v bodě. V důsledku vybočení dvojkolí vůči pevnému souřadnému systému kolejového kanálu (0 posuv jednotkového vektoru j) a jeho natočení kolem svislé osy (14 pootočení kolem jednotkového vektoru k) dochází při pohybu dvojkolí v kolejovém pásu v dotykových bodech obou kol (7,11) s kolejnici (0) k porušení podmínky valení a vznikají zde jisté skluzové rychlosti (creep velocity) a dotykové body přestávají být póly pohybu. [23]



Obr. 3-26 Souřadnicové systémy dvojkolí [23]

| pro levé kolo (7) | pro pravé kolo (11) | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Podélný směr | | |
| ${}^7\gamma_{e1} = {}^7\gamma_1 = \frac{v_{7e1} - v_{0e1}}{v_{0e1}} = \frac{ v_{71} - v_{01} }{ v_{01} }$ | ${}^{11}\gamma_{e1} = {}^{11}\gamma_1 = \frac{v_{11e1} - v_{0e1}}{v_{0e1}} = \frac{ v_{111} - v_{01} }{ v_{01} }$ | 3.8.6 |
| Příčný směr | | |
| ${}^7\gamma_{e2} = {}^7\gamma_2 = \frac{v_{7e2} - v_{0e2}}{v_{0e1}} = \frac{ v_{72} - v_{02} }{ v_{01} }$ | ${}^{11}\gamma_{e2} = {}^{11}\gamma_2 = \frac{v_{11e2} - v_{0e2}}{v_{0e1}} = \frac{ v_{112} - v_{02} }{ v_{01} }$ | 3.8.7 |
| Rotace kolem svislé osy | | |
| ${}^7\gamma_{e3} = {}^7\gamma_3 = \frac{v_{7e3} - v_{0e3}}{v_{0e1}} = \frac{ v_{73} - v_{03} }{ v_{01} }$ | ${}^{11}\gamma_{e3} = {}^{11}\gamma_3 = \frac{v_{11e3} - v_{0e3}}{v_{0e1}} = \frac{ v_{113} - v_{03} }{ v_{01} }$ | 3.8.8 |

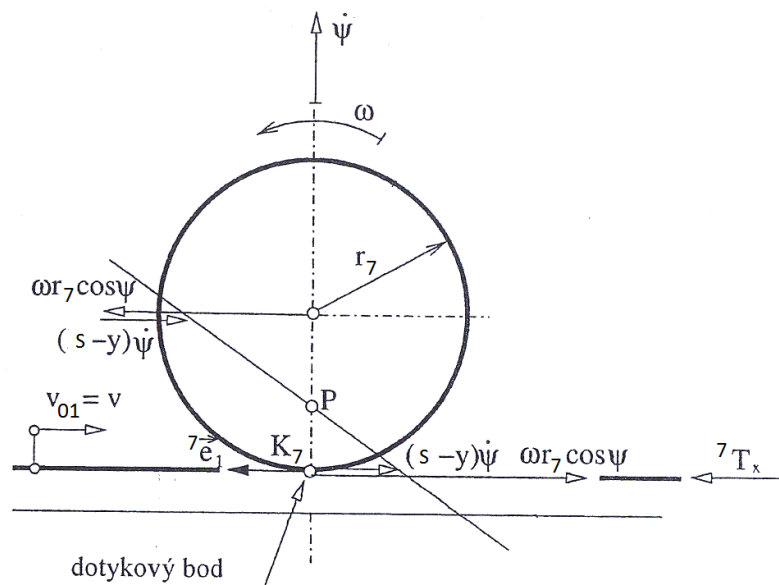
Kinematické poměry v dotykových bodech jsou popsány pomocí bezrozměrných skluzových součinitelů (creepages) v podélných a v příčném směru a ve směru rotace kolem osy kolmé na tečnou rovinu v bodě dotyku ploch obou těles. Obecně je skluzový součinitel definován jako zlomek, kde čítec je dán rozdílem aktuální rychlosti a rychlosti odpovídající kinematicky přesnému pohybu v daném směru a ve jmenovateli je opět odpovídající kinematicky přesnému pohybu v kolejovém pásu. [23]



Obr. 3-27 Kinematické poměry v kontaktních bodech [23]

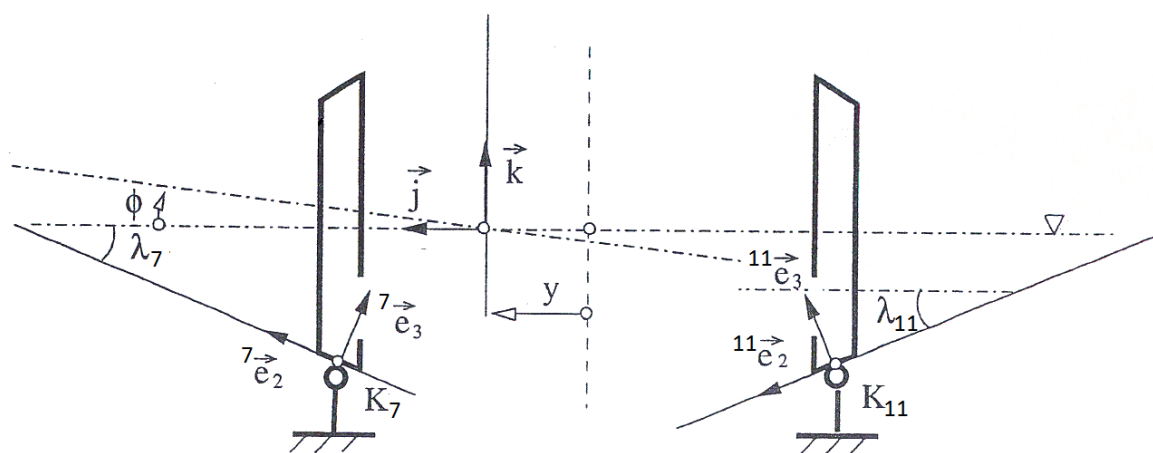
V předchozích rovnicích (3.8.6- 3.8.8) je $v_{iej} = v_{ij}$, kde index $i = 0,7,11$ je označení tělesa (značení těles je zachováno podle Obr. 3-23) a index $j = 1,2,3$ je směr působení rychlosti pro daný skluz v souřadnicovém systému. Rychlost dvojkolí je dána základním rozkladem kde rychlost středu dvojkolí (14) dvojkolí je pouze posuvná $= -v_{01}$. Prostory K7 resp. K11 jsou v dotykových bodech levého resp. pravého kola, které jsou určeny jednotkovými vektory: i, j, k .

Obr. 3-27 je pohled na kolejový pás shora, na kterém je vidět kolejový pás o rozchodu $2s$, v jehož středu je pevný souřadný systém (0). Dvojkolí koná obecně prostorový pohyb, který je rozložen podle základního rozkladu v bodě souřadného systému (14) na unášivý posuvný a druhotný sférický v počátku (14). Využijeme záměny pohybu obou a udělíme kolejovému pásu rychlost v_{01} a dvojkolí bude konat sférický pohyb kolem pevného bodu v počátku (14). Dvojkolí je udělena příčné posunutí y a natočení kolem středu (14) o úhel ψ ve vodorovném směru a o úhel Φ ve svislém směru. Dvojkolí se otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω . A pro další řešení se je pohyb levého kola myšlenkovitě oddělen od kolejnice, kde tento stav je zobrazen na **Obr. 3-28**. [23]



Obr. 3-28 Pohyb levého kola (7) [23]

Skutečné jízdní profily kol jsou nahrazeny kužely a při vybočení a natočení je dvojkolí vychýleno i ve vodorovném směru v obecné poloze o úhel Φ . Tento stav zobrazuje **Obr. 3-29**, kde je naznačeno vychýlení dvojkolí. Další předpoklad je, že úhel kuželovitosti je velmi malý, tj. 1:20 což po přepočtu je přibližně $2,86^\circ$. A při provozu se tato kuželovitost zmenšuje, opotřebením profilů. Opotřebením jízdních profilů je popisována Herzem, kde se mění velikost dotykové plošky. [23]



Obr. 3-29 Vychýlení dvojkolí z vodorovné polohy [23]

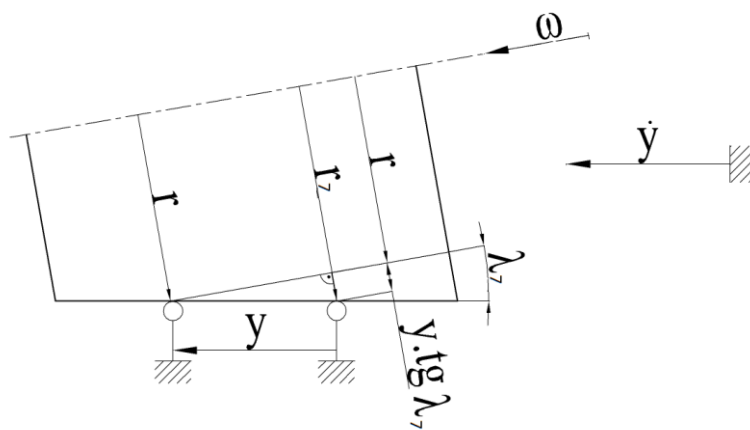
Následující **Obr. 3-31** a **Obr. 3-32** zobrazují detail levé kola (7) ve vodorovné a svislé rovině. A jsou zde naznačeny rychlosti od jednotlivých pohybů, tj. příčného posunu \dot{y} , natočení ve vodorovném směru $\dot{\psi}$ a natočení ve svislém směru $\dot{\Phi}$. Tyto tři pohyby se vyjádří v souřadných systémech obou kol (K_7 a K_{11}).

Poloměry r_7 a r_{11} (levého a pravého kola) jsou aktuální valivý poloměry v obecné poloze dvojkolí. Poloměry jsou definovány rovnicí 3.8.9 a jejich odvození je zobrazeno na **Obr. 3-30**. Kde r je valivý poloměr ve výchozí poloze a úhly λ_7, λ_{11} jsou úhly kuželovitosti kola. [23]

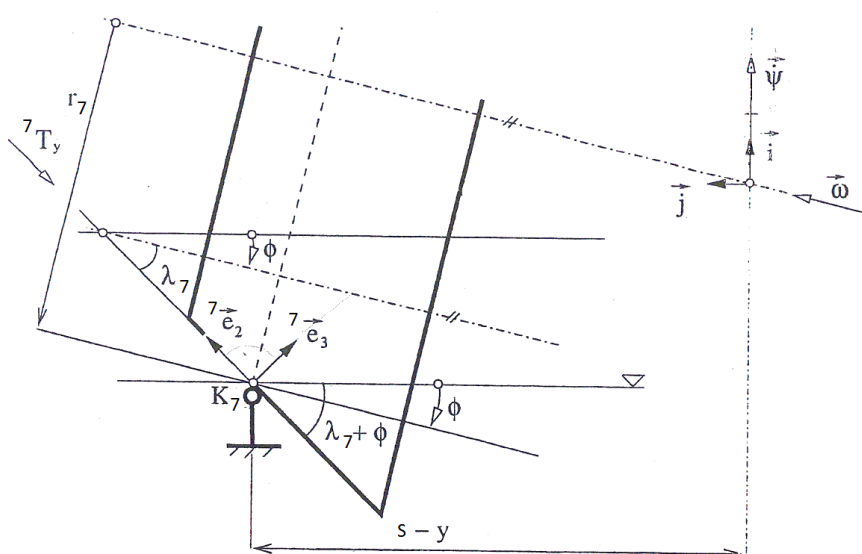
$$r_7 = r + y \cdot \operatorname{tg} \lambda_7$$

$$r_{11} = r - y \cdot \operatorname{tg} \lambda_{11}$$

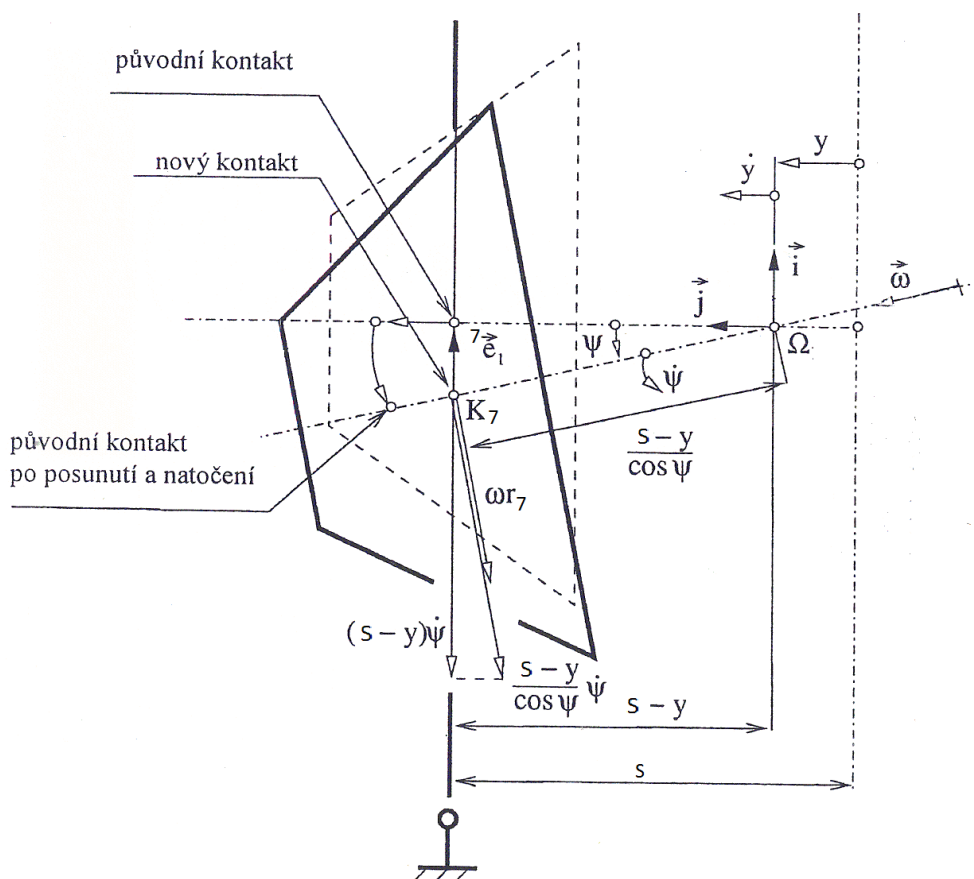
3.8.9



Obr. 3-30 Určení poloměru valení r_7



Obr. 3-31 Detail levého kola (7) ve vodorovné rovině [23]



Obr. 3-32 Detail levého kola (7) ve vvislé rovině [23]

Vyjádření skluzových poměrů v jednotlivých směrech bude provedeno za určitých předpokladů, jako jsou

- kolejnice mají stejné parametry
- uvažují se malé výchylky úhlu $\Phi, \psi \Rightarrow \cos \Phi = 1, \cos \psi = 1, \sin \Phi = \Phi, \sin \psi = \psi$
- $s \pm y = s$
- $\omega = \frac{v}{r}$
- $\cos(\lambda_7 + \Phi) = 1, \cos(\lambda_{11} - \Phi) = 1$

Podélný směr :

Rychlost v_{71} je rychlost levého kola 7 ve podélném směru kolejového pásu $0e_1$. Analogicky je rychlost pravého kola v_{111} . Při určení skluzového součinitele se relativní rychlost (jmenovatel) vztahuje ke skutečné rychlosti (čitatel). Skutečnou rychlost v koná při pohybu dvojkolí kolejový pás z důvodu již zmíněné kinematické záměny pohybu a koná v opačném směru, viz Obr. 3-32 a rovnice 3.8.11.

$$v_{71} = -\omega \cdot r_7 \cdot \cos \psi - (s - y) \cdot \dot{\psi} = -\omega \cdot r_7 \cdot \psi - s \cdot \dot{\psi} = -v \cdot \frac{r_7}{r} - s \cdot \dot{\psi}$$

$$v_{111} = -\omega \cdot r_{11} \cdot \cos \psi + (s + y) \cdot \dot{\psi} = -\omega \cdot r_{11} \cdot \psi + s \cdot \dot{\psi} = -v \cdot \frac{r_{11}}{r} + s \cdot \dot{\psi}$$

3.8.10

$$v_{01} = -v$$

3.8.11

Tyto tři rovnice 3.8.10 a 3.8.11 se dosadí do rovnic 3.8.6 a vzniknou následující vztahy :

$${}^7\gamma_1 = \frac{\left| -v \cdot \frac{r_7}{r} \cdot \psi - s \cdot \dot{\psi} \right| - |-v|}{|-v|} = \frac{v \cdot \frac{r_7}{r} \cdot \psi + s \cdot \dot{\psi} - v}{v} = \frac{v \left(\frac{r_7}{r} - 1 \right) + s \cdot \dot{\psi}}{v} \quad 3.8.12$$

$${}^{11}\gamma_1 = \frac{\left| -v \cdot \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + s \cdot \dot{\psi} \right| - |-v|}{|-v|} = \frac{v \cdot \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi - s \cdot \dot{\psi} - v}{v} = \frac{v \left(\frac{r_{11}}{r} - 1 \right) - s \cdot \dot{\psi}}{v} \quad 3.8.13$$

Analogicky se odvodí zbývající dva skluzové součinitelé. Kde opět jsou v poměru relativní rychlosti v daném směru a skutečná rychlost. I zde budou platit předpoklady popsané výše. [23]

Příčný směr :

$$\begin{aligned} v_{72} &= \dot{y} \cdot \cos(\lambda_6 + \Phi) - \omega \cdot r_7 \sin \psi \cos(\lambda_7 + \Phi) - \frac{s-y}{\cos \psi} \dot{\psi} \sin \psi \cos(\lambda_7 + \Phi) = \\ &= \dot{y} - v \cdot \frac{r_7}{r} \cdot \psi - s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi \end{aligned} \quad 3.8.14$$

$$\begin{aligned} v_{112} &= \dot{y} \cdot \cos(\lambda_{11} - \Phi) - \omega \cdot r_{11} \sin \psi \cos(\lambda_{11} - \Phi) + \frac{s+y}{\cos \psi} \dot{\psi} \sin \psi \cos(\lambda_{11} - \Phi) = \\ &= \dot{y} - v \cdot \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi \end{aligned} \quad 3.8.15$$

$$v_{72} = v_{112} = 0 \quad 3.8.16$$

$${}^7\gamma_2 = \frac{\left| \dot{y} - v \cdot \frac{r_7}{r} \cdot \psi - s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi \right|}{|-v|} = \frac{\dot{y} - v \cdot \frac{r_7}{r} \cdot \psi - s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \quad 3.8.17$$

$${}^{11}\gamma_2 = \frac{\left| \dot{y} - v \cdot \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi \right|}{|-v|} = \frac{\dot{y} - v \cdot \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \quad 3.8.18$$

rotace kolem svislé osy :

$$\omega_{73} = -\omega \sin \lambda_7 + \dot{\psi} \cdot \cos(\lambda_7 + \Phi) = -\frac{v}{r} \cdot \lambda_7 + \dot{\psi} \quad 3.8.19$$

$$\omega_{113} = \omega \sin \lambda_{11} + \dot{\psi} \cdot \cos(\lambda_{11} + \Phi) = \frac{v}{r} \cdot \lambda_{11} + \dot{\psi} \quad 3.8.20$$

$$\omega_{73} = \omega_{1,3} = 0$$

3.8.21

$${}^7\gamma_3 = \frac{\left| -\frac{v}{r} \cdot \lambda_7 + \dot{\psi} \right|}{|-v|} = \frac{\frac{v}{r} \cdot \lambda_7 - \dot{\psi}}{v}$$

3.8.22

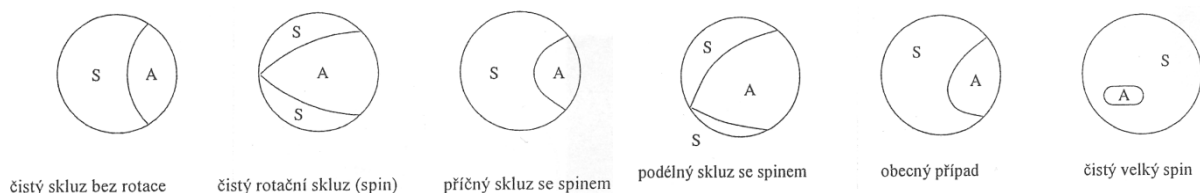
$${}^{11}\gamma_3 = \frac{\left| \frac{v}{r} \cdot \lambda_{11} + \dot{\psi} \right|}{|-v|} = \frac{\frac{v}{r} \cdot \lambda_{11} + \dot{\psi}}{v}$$

3.8.23

3.8.3. Silové účinky v bodech kontaktu kola s kolejnící

Po odvození skluzových součinitelů se vyjádří působící síly na dvojkolí. V důsledku platnosti Coulombova zákona vznikají v dotykové ploše kola a kolejnice síly závislé na relativním pohybu obou těles. Pro vyjádření skluzových sil a momentu (creep and spin forces), které jsou závislé na skluzové rychlosti. Hodnoty skluzových součinitelů budou uvažovány malé, a jejich závislost lineární mezi skluzovými součiniteli a rychlostmi.

Dále se bude vycházet z Kalkerovy teorie [12] z předpokladu, při malé velikosti skluzových součinitelů bude smyková ploška malá, a její vliv lze zanedbat. Z tohoto tvrzení vyplývá, že adhezní oblast je pokrývá přibližně celou dotykovou plošku. **Obr. 3-33** zobrazuje možné kombinace oblasti smýkání a adheze v dotykové plošce. [23]



Obr. 3-33 Oblast skluzu a adheze v dotykové ploše [23]

Situace je komplikovanější z důvodu při větších hodnotách skluzových součinitelů jsou závislosti mezi součinitelem a silou silně nelineární a skluzové síly působí nezávisle. Podle Kalkerovy teorie lze vyjádřit skluzové síly a momenty vztahem :

$$T_x = f_{11} \cdot \gamma_1,$$

$$T_y = -f_{22} \cdot \gamma_2 - f_{23} \cdot \gamma_3,$$

$$M_z = f_{23} \cdot \gamma_2 - f_{33} \cdot \gamma_3,$$

3.8.24

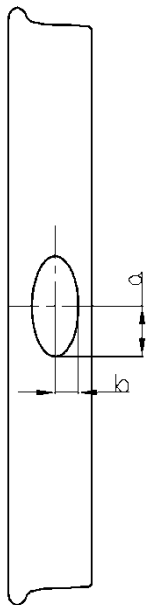
Kde f_{11} , f_{22} , f_{23} a f_{33} jsou lineární skluzové součinitelem, které se určeny Kalkerovo teorií a mají tvar :

$$f_{11} = a \cdot b \cdot G \cdot C_{11}, \quad f_{22} = a \cdot b \cdot G \cdot C_{22},$$

$$f_{23} = (a \cdot b)^{\frac{3}{2}} \cdot G \cdot C_{23}, \quad f_{33} = (a \cdot b)^2 \cdot G \cdot C_{33}$$

3.8.25

Kola a kolejnice jsou dvě rozdílné součásti a mají různé materiály, které se uvažují homogenní a izotropní. Podle Hertzovi teorie je dotyková ploška ve tvaru elipsy a podle opotřeбенí kola a kolejnice se mění její poměry poloos a a b . Modul pružnosti ve smyku G a C_{ij} jsou skluzové a rotační koeficienty. Pro různé materiály u kola a kolejnice se musí určit společný modul pružnosti G ve smyku a Poissonovo číslo μ . [23]



Obr. 3-34
Dotyková ploška

$$G = \frac{2 \cdot G_0 \cdot G_7}{G_0 + G_7},$$

$$\mu = \frac{G \cdot (G_7 \cdot \mu_0 + G_0 \cdot \mu_7)}{2 \cdot G_0 \cdot G_7}.$$

3.8.26

Poloosy elipsy jsou zobrazeny na **Obr. 3-34** a jsou dány následujícími vztahy:

$$a = m [3\pi \cdot N \cdot (K_1 + K_2) / K_3]^{1/3},$$

$$b = n [3\pi \cdot N \cdot (K_1 + K_2) / K_3]^{1/3}.$$

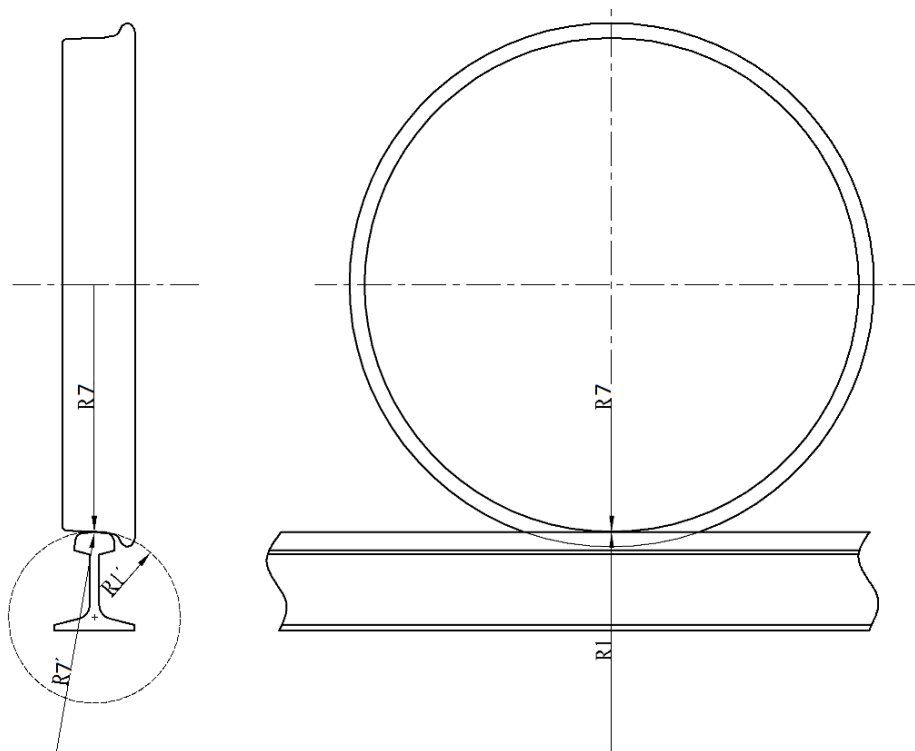
3.8.27

Kde N je celková normálová síla přenášená kontaktní plochou. Osy elipsy jsou vyjádřeny pomocí konstant (pro levé kolo):

$$K_1 = \frac{1 - \mu_0}{\pi \cdot E_0}, \quad K_2 = \frac{1 - \mu_7}{\pi \cdot E_7}, \quad K_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_7'} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0'} \right)$$

3.8.28

Analogicky pro pravé kolo, kde index 7 nahradí index 11. Konstanty K_i jsou tvořeny materiálovými vlastnostmi kolejnice resp. kol, Poissonovým číslem μ a modulem pružnosti v tahu E , kde index 0 je pro kolejnici, index 11 pro pravé kolo a index 7 pro levé kolo. K_3 jsou rozhodující poloměry kola a kolejnice, kde R_7 je poloměr valení kola a R_7' je příčný poloměr křivosti kola v kontaktní plošce. Analogicky by se dalo popsat i pravé kolo a kolejnice, viz **Obr. 3-35**. [23]



Obr. 3-35 Poloměry křivosti kola a kolejnice v kontaktním bodě

Konstanty m a n v rovnici 3.7.18 jsou určeny z literatury [39], podle vztahu:

$$\cos \vartheta = \frac{K_3}{K_4}$$

3.8.29

$$K_4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_7} - \frac{1}{R_7'} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0'} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{R_7} - \frac{1}{R_7'} \right) \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0'} \right) \cdot \cos 2\alpha \right]^{\frac{1}{2}}$$

3.8.30

Pro určení vztahu 3.8.29 je potřeba konstanta K_4 která je dána rovnicí 3.8.30. V této rovnici je úhel α , který je mezi normálovými rovinami ploch křivosti $\frac{1}{R_7}$ a $\frac{1}{R_0}$

Ze vztahu 3.8.24 je vidět, že podélná síla T_x není závislá na příčném posunu a ani na spinu. A naopak příčná síla T_y a spinový moment M_z jsou závislé na těchto pohybech. Nyní bude dosazeno do vztahu 3.8.24 skluzové součinitele pro obě kola v souřadných systéme umístěných v kontaktním bodě mezi kolem a kolejnicí, tj. K_7 resp. K_{11} :

$${}^7T_x = {}^7f_{11} \cdot {}^7\gamma_1 = {}^7f_{11} \left[\left(\frac{r_7}{r} - 1 \right) + \frac{s \cdot \dot{\psi}}{v} \right],$$

$${}^{11}T_x = {}^{11}f_{11} \cdot {}^{11}\gamma_1 = {}^{11}f_{11} \left[\left(\frac{r_{11}}{r} - 1 \right) - \frac{s \cdot \dot{\psi}}{v} \right].$$

3.8.31

Síla 7T_x vyjadřuje podélnou sílu v místě kontaktu levého kola(7) s kolejnicí. Analogické označení platí i pro ostatní silové účinky z rovnice 3.8.24.

$${}^7T_y = -{}^7f_{22} \cdot {}^7\gamma_2 - {}^7f_{23} \cdot {}^7\gamma_3 = -{}^7f_{22} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_7}{r} \cdot \psi - \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - {}^7f_{23} \cdot \left(\frac{\lambda_7}{r} - \frac{\dot{\psi}}{v} \right),$$

$${}^{11}T_y = -{}^{11}f_{22} \cdot {}^{11}\gamma_2 - {}^{11}f_{23} \cdot {}^{11}\gamma_3 = -{}^{11}f_{22} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - {}^{11}f_{23} \cdot \left(\frac{\lambda_{11}}{r} + \frac{\dot{\psi}}{v} \right).$$

3.8.32

$${}^7M_z = {}^7f_{23} \cdot {}^7\gamma_2 - {}^7f_{33} \cdot {}^7\gamma_3 = {}^7f_{23} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_7}{r} \cdot \psi - \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - {}^7f_{33} \cdot \left(\frac{\lambda_7}{r} - \frac{\dot{\psi}}{v} \right),$$

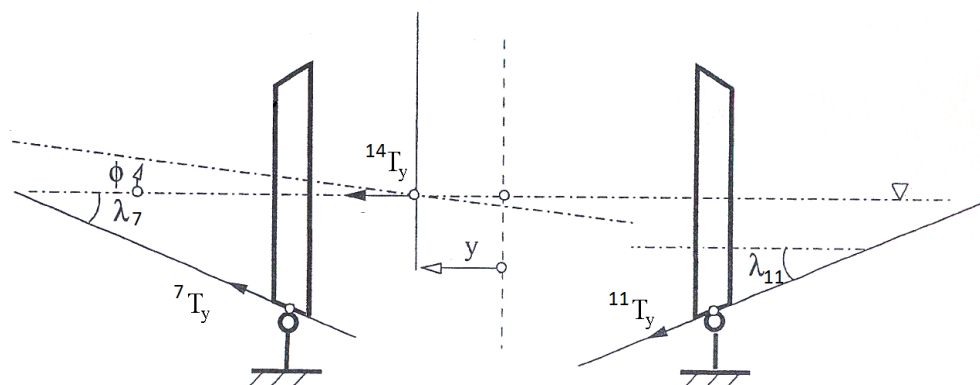
$${}^{11}M_z = {}^{11}f_{23} \cdot {}^{11}\gamma_2 - {}^{11}f_{33} \cdot {}^{11}\gamma_3 = {}^{11}f_{23} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - {}^{11}f_{33} \cdot \left(\frac{\lambda_{11}}{r} + \frac{\dot{\psi}}{v} \right)$$

3.8.33

Rovnice 3.8.31 až 3.8.33 jsou silové účinky působící na jednotlivá kola v dotykové ploše.

3.8.4. Silové účinky působící na dvojkolí

Ze silových účinků působících v dotykových ploškách jsou pouze významné příčná síla a spinový moment. Celková příčná síla ${}^{14}T_y$ působící na dvojkolí je dána součtem sil dotykových plošek podle **Obr. 3-36** a je dán následující rovnicí.



Obr. 3-36 Síly působící v příčném směru

$${}^{14}T_y = {}^7T_y \cos(\lambda_7 + \Phi) + {}^{11}T_y \cos(\lambda_{11} + \Phi)$$

3.8.34

Za předpokladu malých úhlů v rovnici **3.8.34** se rovnice zjednoduší do tvaru:

$${}^{14}T_y = {}^7T_y + {}^{11}T_y = -{}^7f_{22} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_7}{r} \cdot \psi - \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - {}^7f_{23} \cdot \left(\frac{\lambda_7}{r} - \frac{\dot{\psi}}{v} \right) -$$

$$-{}^{11}f_{22} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - {}^{11}f_{23} \cdot \left(\frac{\lambda_{11}}{r} + \frac{\dot{\psi}}{v} \right)$$

3.8.35

Spinový moment se odvodí analogicky.

$${}^{14}M_z = -{}^7T_y \cos(\lambda_7 + \Phi) \frac{s-y}{\cos \psi} \sin \psi + {}^{11}T_y \cos(\lambda_{11} + \Phi) \frac{s+y}{\cos \psi} \sin \psi -$$

$$-{}^7T_x \cdot \frac{s-y}{\cos \psi} \cos \psi + {}^{11}T_x \cdot \frac{s+y}{\cos \psi} \cos \psi + {}^7M_z + {}^{11}M_z$$

3.8.36

Za předpokladu malých úhlů v rovnici 3.8.36 se rovnice zjednoduší do tvaru:

$${}^{14}M_z = ({}^7T_y + {}^{11}T_y) \cdot s \cdot \psi + ({}^7T_x + {}^{11}T_x) \cdot s + {}^7M_z + {}^{11}M_z = \left[f_{22} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_7}{r} \cdot \psi - \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) + f_{23} \cdot \left(\frac{\lambda_7}{r} - \frac{\dot{\psi}}{v} \right) - f_{22} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - f_{23} \cdot \left(\frac{\lambda_{11}}{r} + \frac{\dot{\psi}}{v} \right) \right] \cdot s \cdot \psi + \left\{ -f_{11} \left[\left(\frac{r_7}{r} - 1 \right) + \frac{s \cdot \dot{\psi}}{v} \right] + f_{11} \left[\left(\frac{r_{11}}{r} - 1 \right) - \frac{s \cdot \dot{\psi}}{v} \right] \right\} \cdot s + f_{23} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_7}{r} \cdot \psi - \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - f_{33} \cdot \left(\frac{\lambda_7}{r} - \frac{\dot{\psi}}{v} \right) + f_{23} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{v} - \frac{r_{11}}{r} \cdot \psi + \frac{s \cdot \dot{\psi} \cdot \psi}{v} \right) - f_{33} \cdot \left(\frac{\lambda_{11}}{r} + \frac{\dot{\psi}}{v} \right)$$

3.8.37

Rovnice 3.8.35 a 3.8.37 představují silové účinky, působící na dvojkolí, které se příčně posunulo o výchylku y a natočilo úhel ψ kolem osy určující jednotkový vektor ${}^{14}\vec{k}$. Parametry y, ψ , jsou souřadnicemi dvojkolí, které má při neuvažování dopředného pohybu 2 stupně volnosti. Pro modifikaci smykových (creepových) sil se používá Johnson-Vermuelenova teorie, která upravuje velikost výsledné tečné síly působící mezi kolem a kolejnicí následujícím způsobem :

$$\tilde{T} = fN \cdot \left[\frac{T}{fN} - \frac{1}{3} \left(\frac{T}{fN} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{T}{fN} \right)^3 \right] \quad \text{pro } T \leq 3fN$$

$$\tilde{T} = fN \quad \text{pro } T > 3fN$$

3.8.38

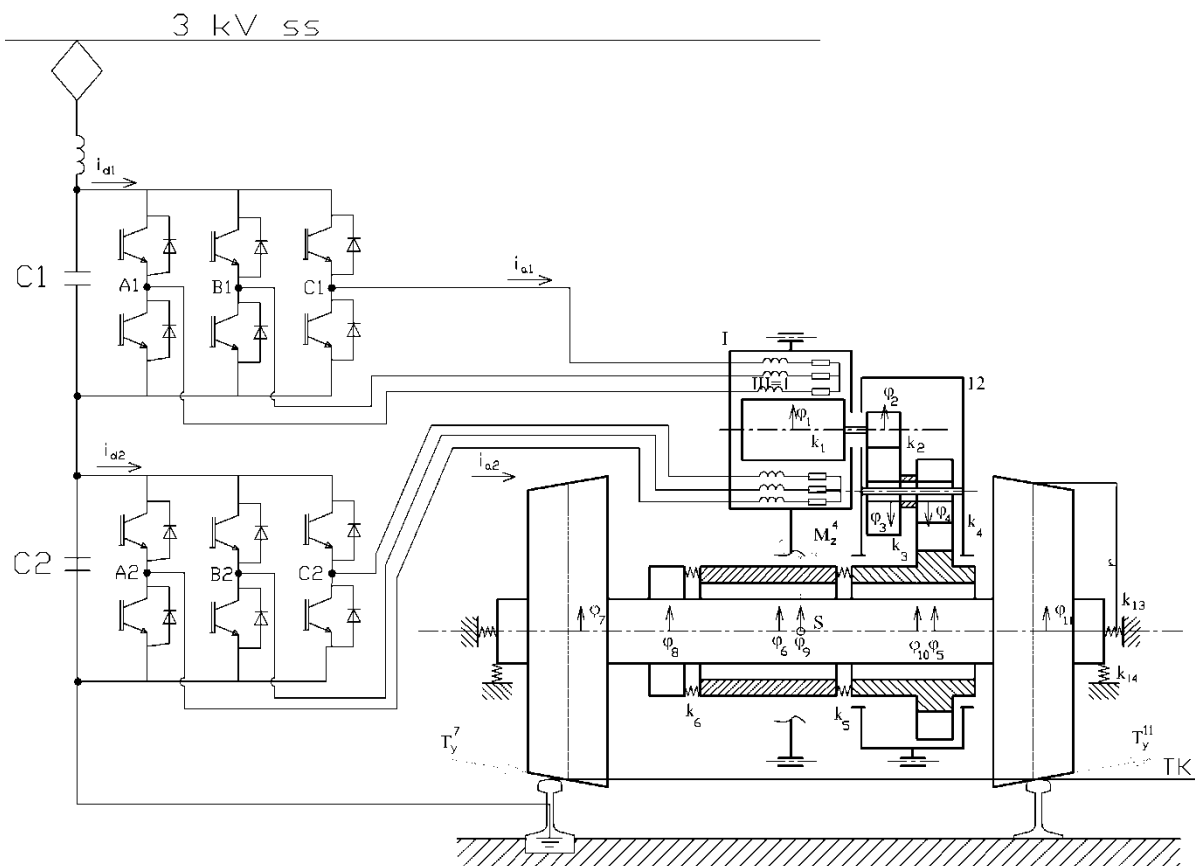
Kde $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$, f je koeficient smykového tření v kontaktním bodě a N je normálová síla přenášená kontaktním bodem. Pro složky modifikovaných creepových sil potom platí:

$$\tilde{T}_x = \frac{T_x}{T} \tilde{T}, \quad \tilde{T}_y = \frac{T_y}{T} \tilde{T}.$$

3.8.39

Modifikace tečné síly v kontaktu se uskutečňuje z důvodu linearizace creepových sil, kdy velikost výsledné síly v kontaktu může přesáhnout hraniční hodnotu fN , což je fyzikálního hlediska nepřipustné.

Pokud budou uvažovány kontaktní podmínky podle Kalkerovy teorie, schéma na Obr. 3-23 se doplní o silové účinky v kontaktních bodech, viz Obr. 3-37.



Obr. 3-37 Komplexní výpočtový model pro řešení zkratového momentu

Pro řešení modelu s kontaktními podmínkami byly použity následující parametry:

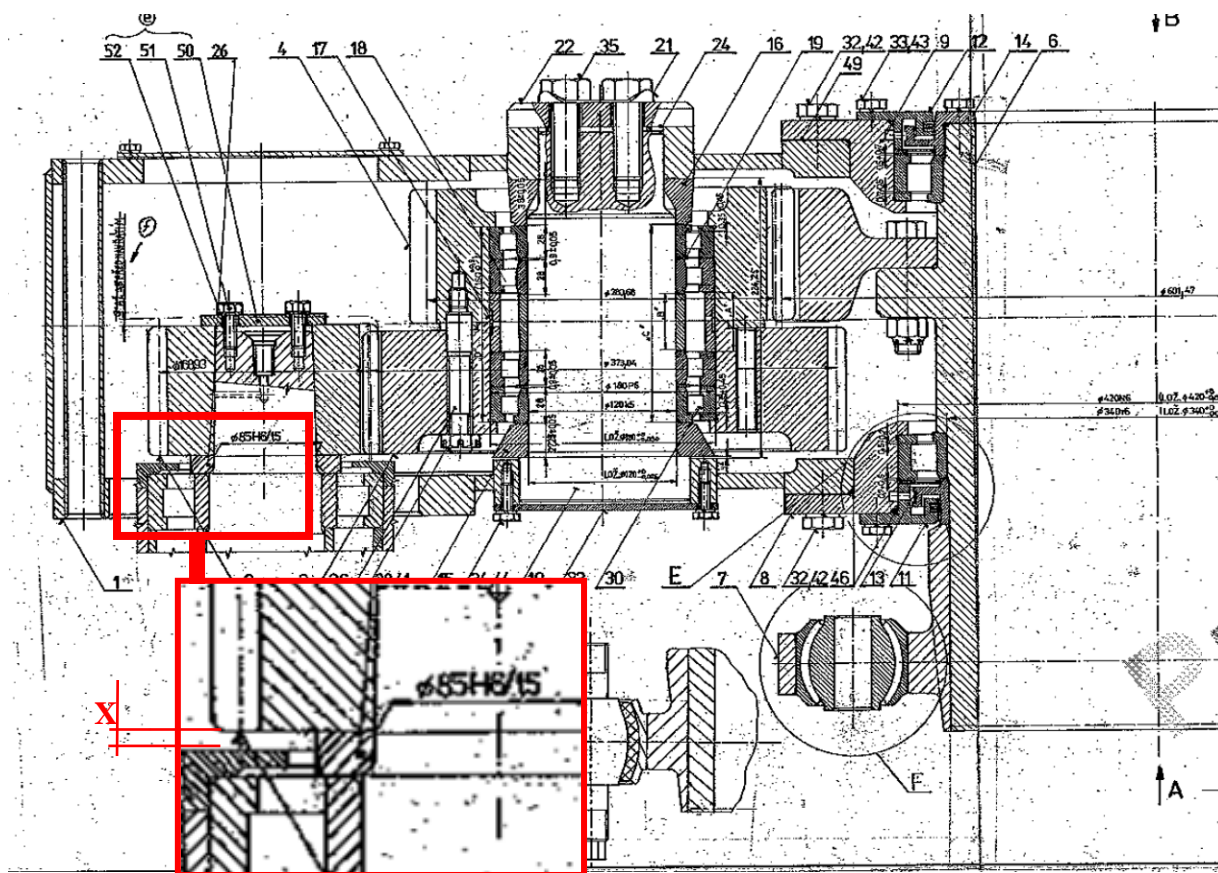
| | | | |
|--------------------|-------------------------------------------------|------------------|--------------|
| $E = 2.1e11$ Pa | Modul pružnosti v tahu pro ocel | $\alpha = 0$; | |
| $G = 0.8e11$ Pa | Modul pružnosti ve smyku pro ocel | $C_{11} = 4.36$ | |
| $m_y = 0.25$ | koeficient tření | $C_{22} = 3.99$ | konstanty |
| $m = 1.128$ | Konstanty pro určení velikosti dotkových plošek | $C_{23} = 1.75$ | |
| $n = 0.893$ | Rovinnost kolejnice | $C_{33} = 1.04$ | |
| $R_0 = \text{inf}$ | Poloměr hlavy kolejnice | $f_{11} = 1.6e8$ | lineární |
| $R_{0a} = 0.3$ m | poloměr kola | $f_{22} = 1.7e8$ | skluzové |
| $R_7 = 0.92$ m | Poloměr kuželovitosti kola | $f_{23} = 2.6e6$ | součinitelem |
| $R_{7a} = 100$ m | | $f_{33} = 1.2e3$ | |

3.8.5. Zhodnocení modelu

Odvozený a sestavený model odpovídá původně navrhovanému řešení, které uvažovalo popsání celého systému elektrické a mechanické části pohonu pomocí maticového zápisu s uvažováním Kalkerovy teorie [12] popisující silové účinky v kontaktu mezi kolem s kolejnicí. Bohužel v průběhu řešení se tento způsob ukázal jako nevhodný, z důvodu lokálních poškození mechanických komponent, konkrétně pastorku, které nelze uvedeným modelem korektně popsat.

4. Analýza poškození součástí vzniklým zkratovým momentem

Obecně analýza poškozených konstrukční celků nebo jednotlivých dílů se dělí na poruchy vzniklé špatnou konstrukcí a nebo špatným materiálem. Z dodaných podkladů vyplývá, že nejvíce namáhaným díle celé soustavy pohonu je pastorek nalisovaný na hřídeli trakčního motoru. Při hledání možných způsobů poškození byla provedena materiálová analýza pastorku a následně konstrukční kontrola pomocí analytických a numerických výpočtů pastorku a součástí v převodovce podle výkresu číslo Lo125172 - Sestavy převodovky (**Obr. 4-1**). Uvedený obrázek ukazuje uspořádání soustavy soukolí v dvoustupňové předlohoové převodovce a její napojení na motor nebo na druhém konci na dutý hřídel. Důležitý je detail obrázku (**Obr. 4-1** - červený rámeček), který odměřuje vzdálenost cca 6mm mezi pastorkem a krytem ložiska.

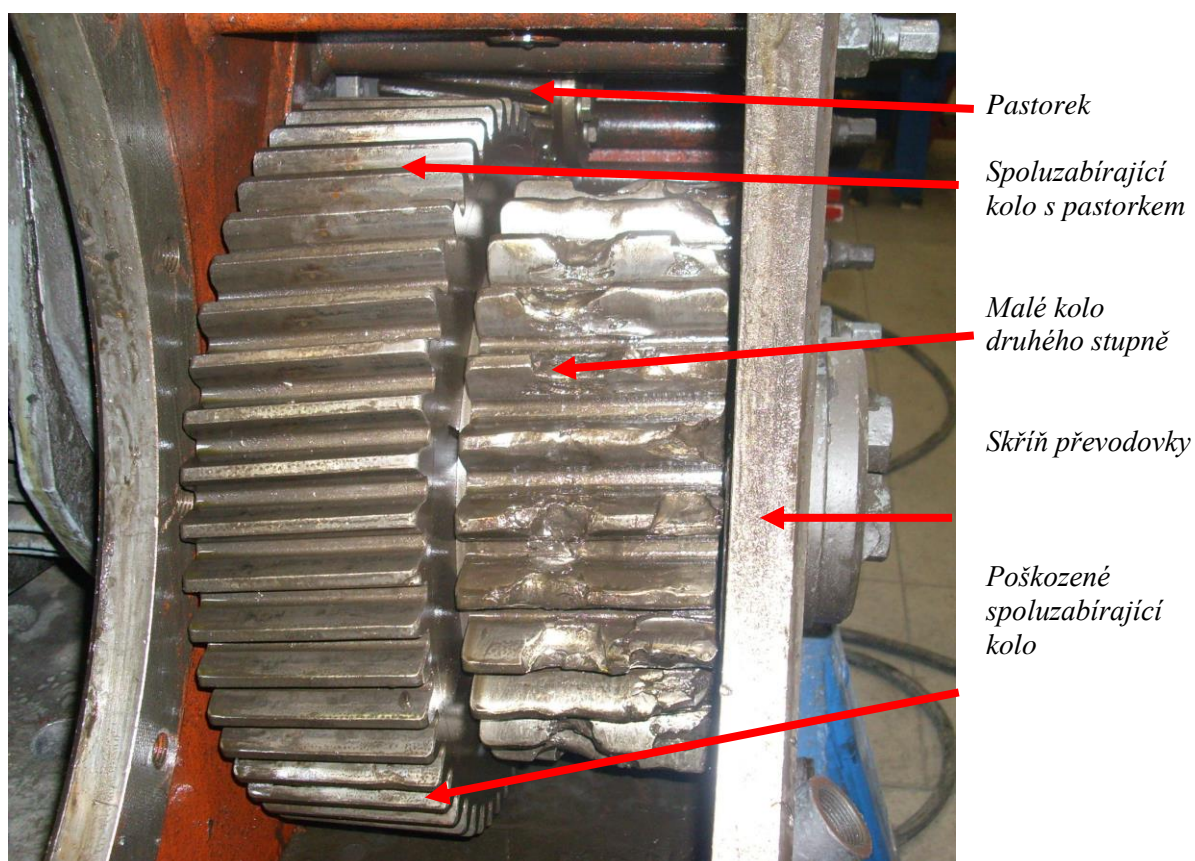


Obr. 4-1 Výkres sestavy s detailem pastorku [28]

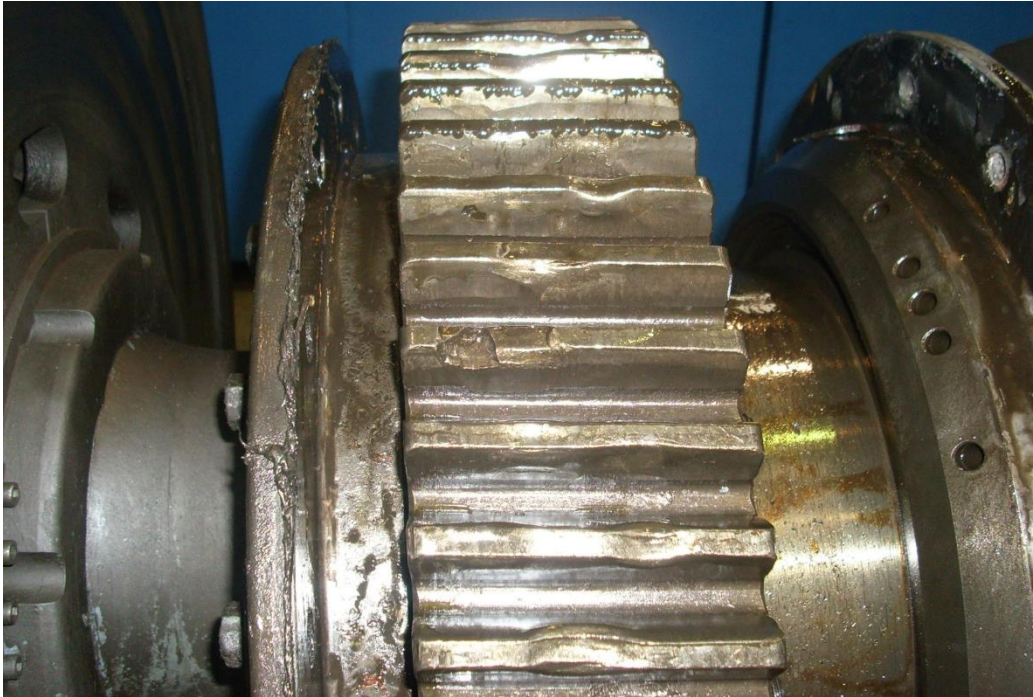
Na dodaném poškozeném pastorku od výrobce E471 jsou vidět značné rýhy na boku kola, které by mohly vzniknout při odlomení části zubu a jeho zapadnutí do mezery. Ukázky poškození jsou vidět na fotografiích **Obr. 4-2** - **Obr. 4-4**, kde v důsledku poškození ozubení pastorku se oddělený segment zubu pravděpodobně dostal do ozubení druhého stupně převodovky a poškodil se i druhý stupeň. Po demontáži je vidět poškození pastorku (**Obr. 4-2**), poškození spoluzabírajícího kola (**Obr. 4-3** - dole) a následné poškození velkého ozubeného kola druhého stupně převodovky umístěného na dutém hřídeli převodovky (**Obr. 4-4**). [29]



Obr. 4-2 Poškozený pastorek po demontáži z převodovky [29]



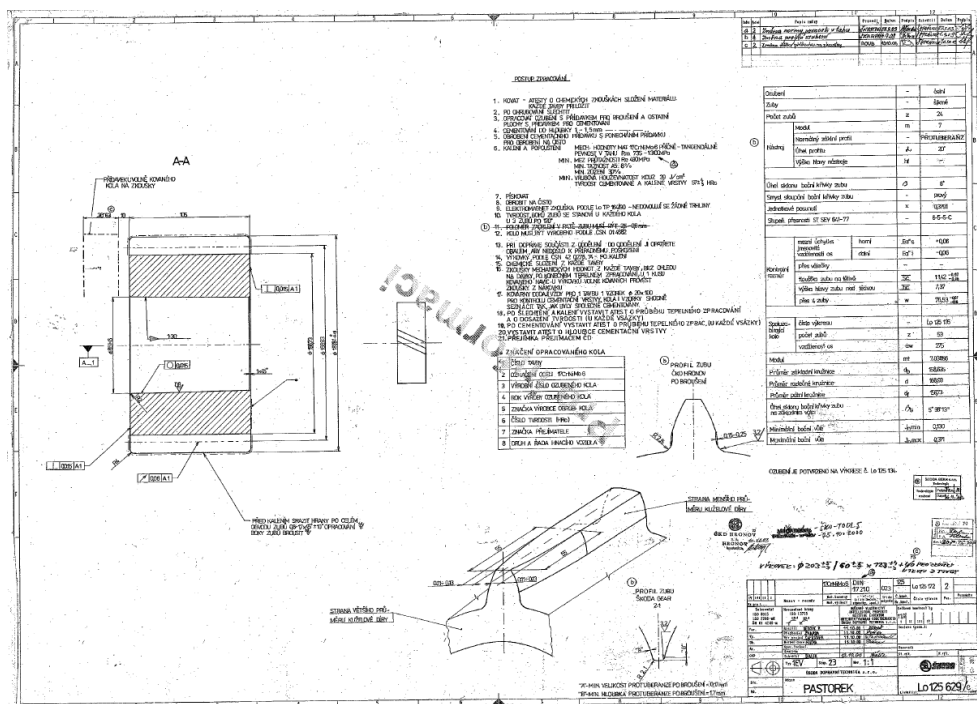
Obr. 4-3 Spoluzabírající kolo s pastorkem a poškozené malé kolo druhého stupně v převodovce [29]



Obr. 4-4 Poškození velkého kola na dutém hřídeli převodovky [29]

Z důvodu přetrvávajících problémů při provozování elektrické jednotky 471 v oblasti převodovky byl výrobcem nahrazen materiál pastorku z původní oceli 16 220.4 na ocel 17CrNiMo6.

Uvedené fotografie pastorku jsou již s nahrazeným materiálem 17CrNiMo6, ale ani provedená materiálová změna nevedla k odstranění problémů. Proto byla nejdříve provedena metalografická analýza, aby bylo prověřeno, zda byly dodrženy předepsané požadavky podle výkresu číslo Lo125629 – Pastorek, viz Obr. 4-5.



Obr. 4-5 Výkres pastorku [29]

4.1. Metalografická analýza pastorku

V metalografické analýze poškozeného pastorku byla nejprve proměřena tvrdost v jádře kola a následně v cementační vrstvě ozubení. Nejprve bylo z normy pro materiál 17CrNiMo6 určeno a zkontrolováno chemické složení (**Tab. 4-1**) a předepsána mez pevnosti v jádře kola 735-1300MPa. Součástí metalografického rozboru bylo také měření tvrdosti na odebraných vzorcích, viz **Obr. 4-6** [29]

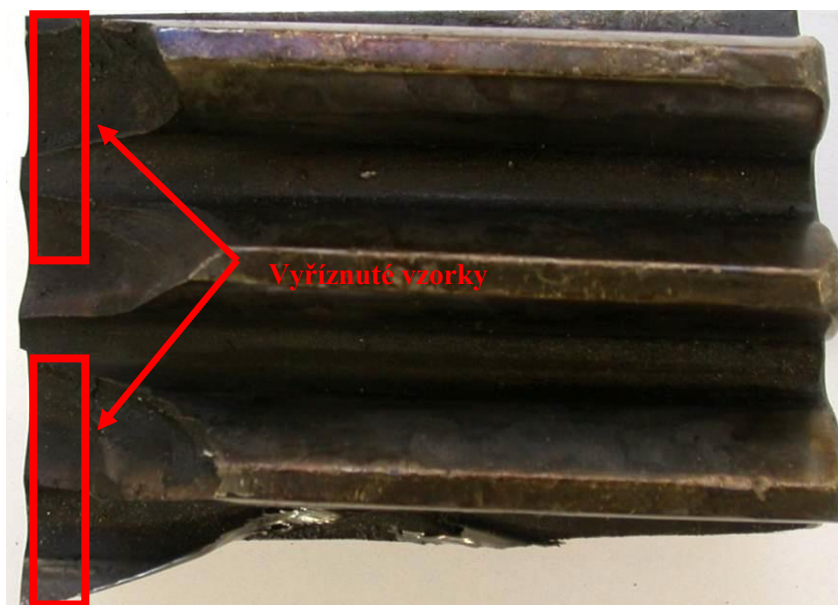
Tab. 4-1 Chemické složení 17CrNiMo6 [29]

| C | Cr | Mn | Mo | Ni | Si |
|------|------|-----|-----|------|---------|
| 0.18 | 1.65 | 0.7 | 0.3 | 1.55 | max 0.4 |

Tvrdost podle Vickerse byla měřena na vzorcích odebraných z jádra kola a průměrná hodnota tvrdosti ze tří měření je HV30=392, což po přepočtení pro ocel na ekvivalent meze pevnosti je 1282MPa. Průměrná hodnota z změření odpovídá materiálové normě oceli 17CrNiMo6. [29]

4.1.1. Hodnocení makrostruktury

Z vyříznutého segmentu pastorku (**Obr. 4-6**) byly vyříznuty příčným řezem dva vzorky z boku pastorku u lomové plochy. Na prvním vzorku byl hodnocen vzhled lomové plochy na elektronovém mikroskopu a na druhém vzorku na příčném řezu byla hodnocena metalografie na světelném mikroskopu. [29]



Obr. 4-6 Segment ozubeného kola[29]

Při detailnějším pozorování bylo zjištěno, že na povrchu boku zubu jsou nerovnosti a ozubení je nerovnoměrně opotřebeno v celé šířce. Veškeré další popsání poruchy způsobené pravděpodobně provozem jednotky se nachází v části blíže elektromotoru, viz **Obr. 4-6 vlevo**. Jedná se o vyšší opotřebení ozubení, zřetelné trhliny viditelné pouhým okem v místě paty zubu (viz **Obr. 4-17**) jsou iniciátorem k lomu části ozubení a dále jsou zde značně viditelné rýhy na boku kola. Při podrobnějším zkoumání povrchu ozubení, je vidět drobný pitting v důsledku namáhání, viz **Obr. 4-7**, [29].



Strana u motoru

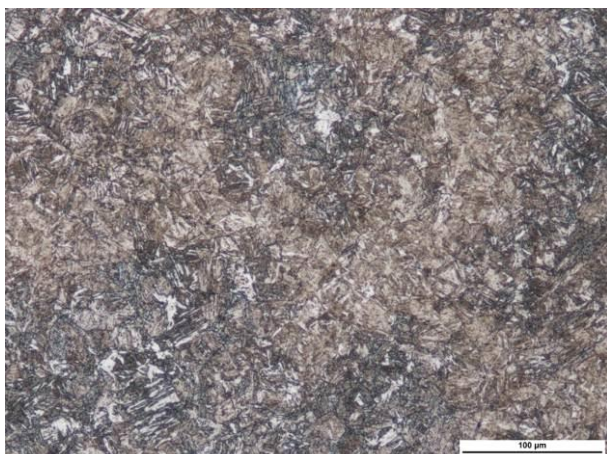
Viditelné poškození zubů

Vnější strana pastorku

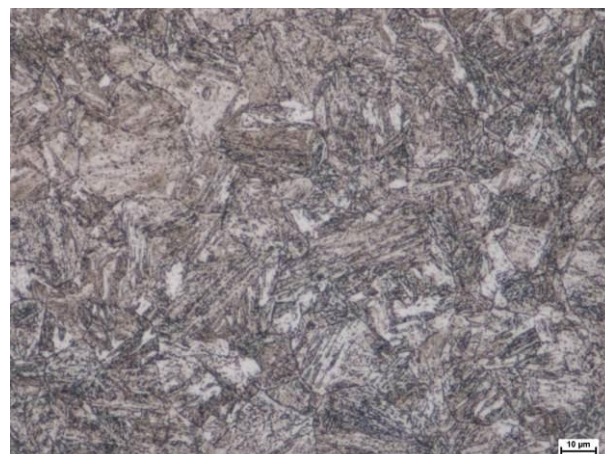
Obr. 4-7 Detail boku zubu [29]

4.1.2. Hodnocení mikrostruktury

Analyzovaný vzorek prošel standardní metalografickou přípravou – tj. broušení a následné leštění. Mikrostruktura vzorku byla vyvolána leptáním v 3% Nitalu a zdokumentována pomocí optického mikroskopu NIKON EPIPHOT 200. Mikroskop je vybaven softwarem pro digitální zpracování a analýzu obrazu NIS Elements 3.1. [29]



Obr. 4-8 Mikrostruktura pastorku, zvětšení.
200x [29]



Obr. 4-9 Mikrostruktura pastorku, zvětšení.
500x [29]

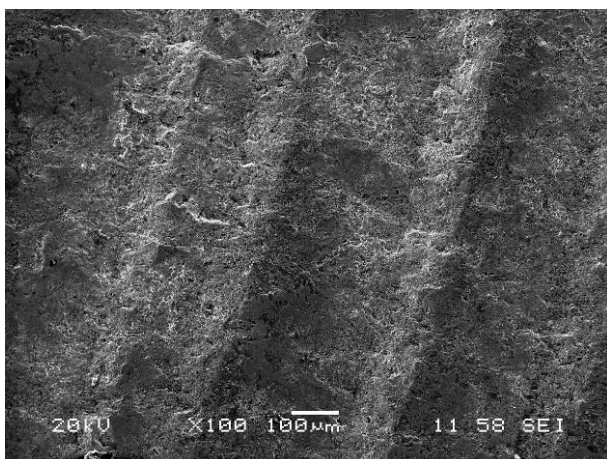
Mikrostruktura v jádře kola je tvořena popuštěným martenzitem (Obr. 4-8 a Obr. 4-9), je homogenní a nevyskytují se v ní žádné nečistoty či vměšky, což odpovídá kvalitnímu polotovaru, kterým je u pastorku výkovek.

4.1.3. Řádkovací elektronová mikroskopie

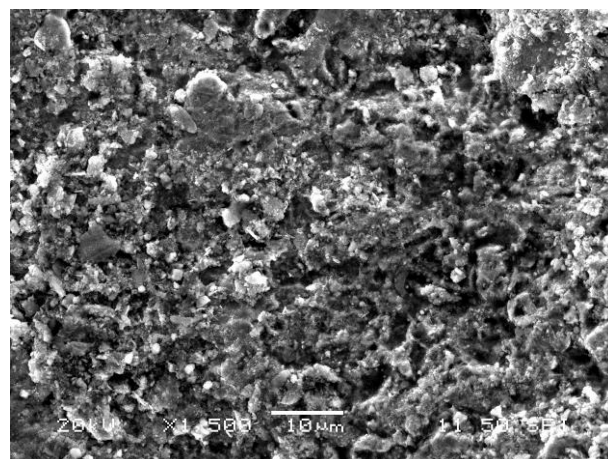
Detailní snímky lomové plochy a nerovností na povrchu boku zubu byly pořízeny na řádkovacím elektronovém mikroskopu Jeol 6380 v režimu sekundárních elektronů. Na lomové ploše jsou patrné postupové čáry, které jsou vidět i pouhým okem (Obr. 4-10). Tyto postupové čáry poukazují na únavový charakter lomu. Snímky lomové plochy z elektronového mikroskopu jsou zobrazeny na Obr. 4-11 a Obr. 4-12. [29]



Obr. 4-10 Lomová plochá ozubení pastorku [29]

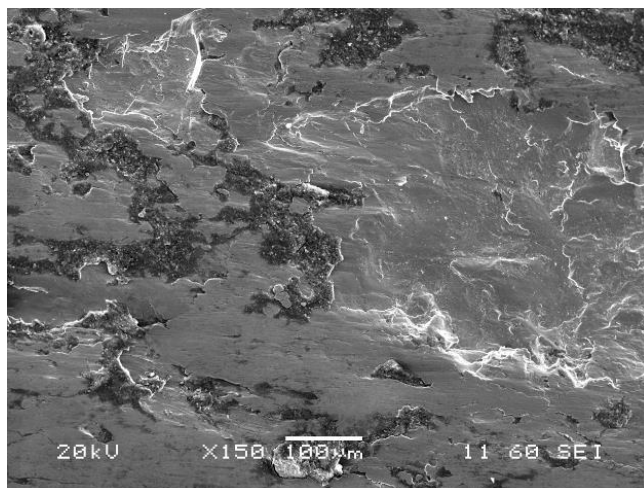


Obr. 4-11 Lomová plochá, zvětšení 100x [29]



Obr. 4-12 Lomová plocha, zvětšení 1500x [29]

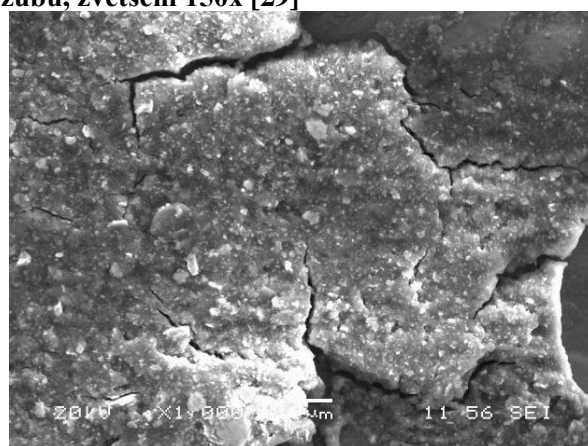
Detailní snímky nerovností na povrchu boku zubu pastorku jsou zobrazeny na **Obr. 4-13 - Obr. 4-15**. Na povrchu boku zubu se vyskytují jamky tzv. pitting a drobné trhlinky. Tyto vady povrchu jsou pravděpodobně iniciační místa pro vznik únavové trhliny a následného lomu ozubení pastorku.



Obr. 4-13 Povrchu boku zubu, zvětšení 150x [29]



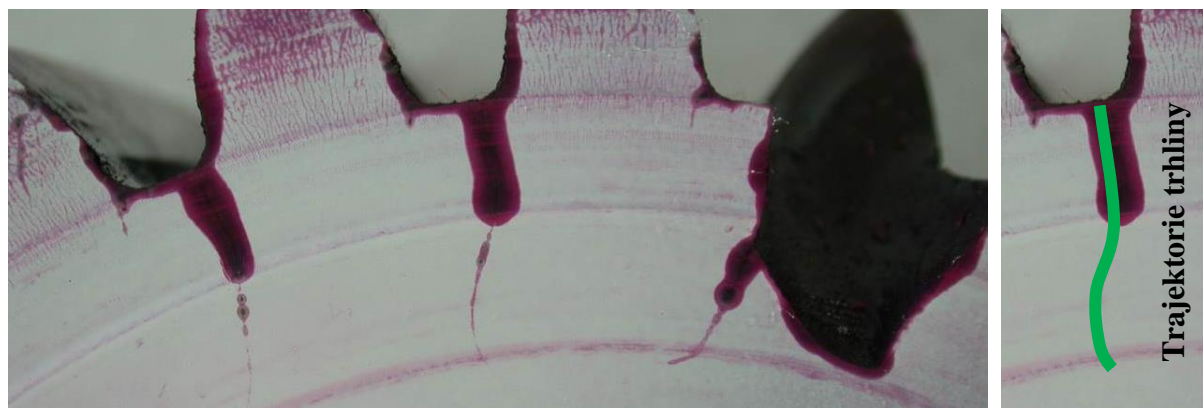
Obr. 4-14 Povrchu boku zubu, zvětšení 1000x [29]



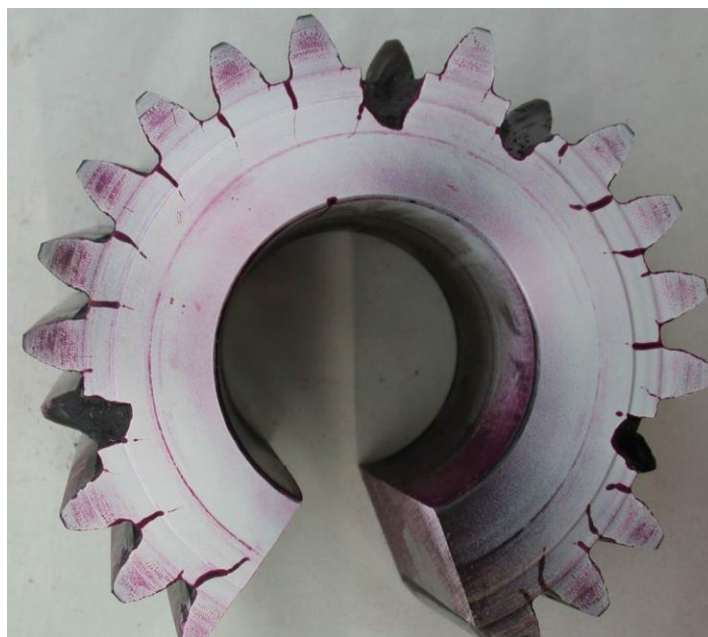
Obr. 4-15 Povrch boku zubu, zvětšení 1000x [29]

4.1.4. Kapilární zkouška

Z důvodu výskytu trhlin na boku kola, které by vedly k porušení ozubení, byla provedena z popsaných důvodů kapilární zkouška. **Obr. 4-17** zobrazuje pastorek po kapilární zkoušce, která jasně prokázala trhliny na boku zubu a to dokonce v každém patě zubu. Navíc na detailu (**Obr. 4-16**) je vidět průběh trhliny, která se od obvodu kola ke středu zužuje. Větší trhliny byly viditelné pouhým okem, ale skutečnou délku šířících se trhlin odhalila až kapilární zkouška.



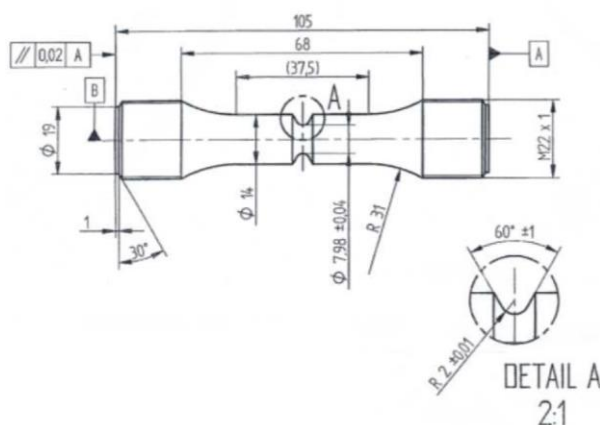
Obr. 4-16 Detail šíření trhliny [29]



Obr. 4-17 Pastorek po kapilární zkoušce [29]

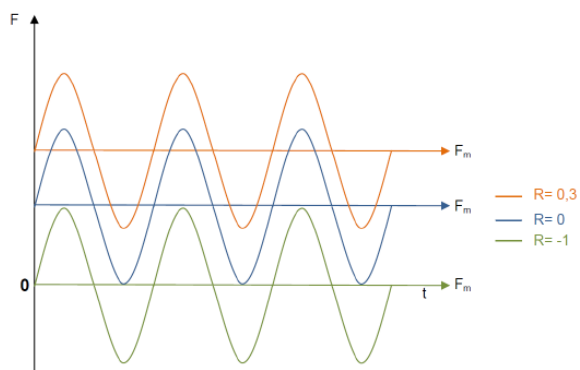
4.1.5. Únava a šíření trhliny

V předchozích kapitolách bylo poukázáno na cyklické namáhání ozubení, které vede k mikroskopickým poškozením materiálu. Cyklováním došlo k růstu majoritní trhliny a tím k porušení ozubení vlivem lokálního přetížení (vyštípnutí části zubu). Lze předpokládat, že inicializace a šíření trhliny vznikalo v módu I a II (otevřací a smykový), za působení tečných a radiálních sil v patě zubu. Tomuto tvrzení odpovídají výsledky kapilární zkoušky (Obr. 4-16), kde zakřivení trajektorie trhliny je projevem kombinací více módů.[22]



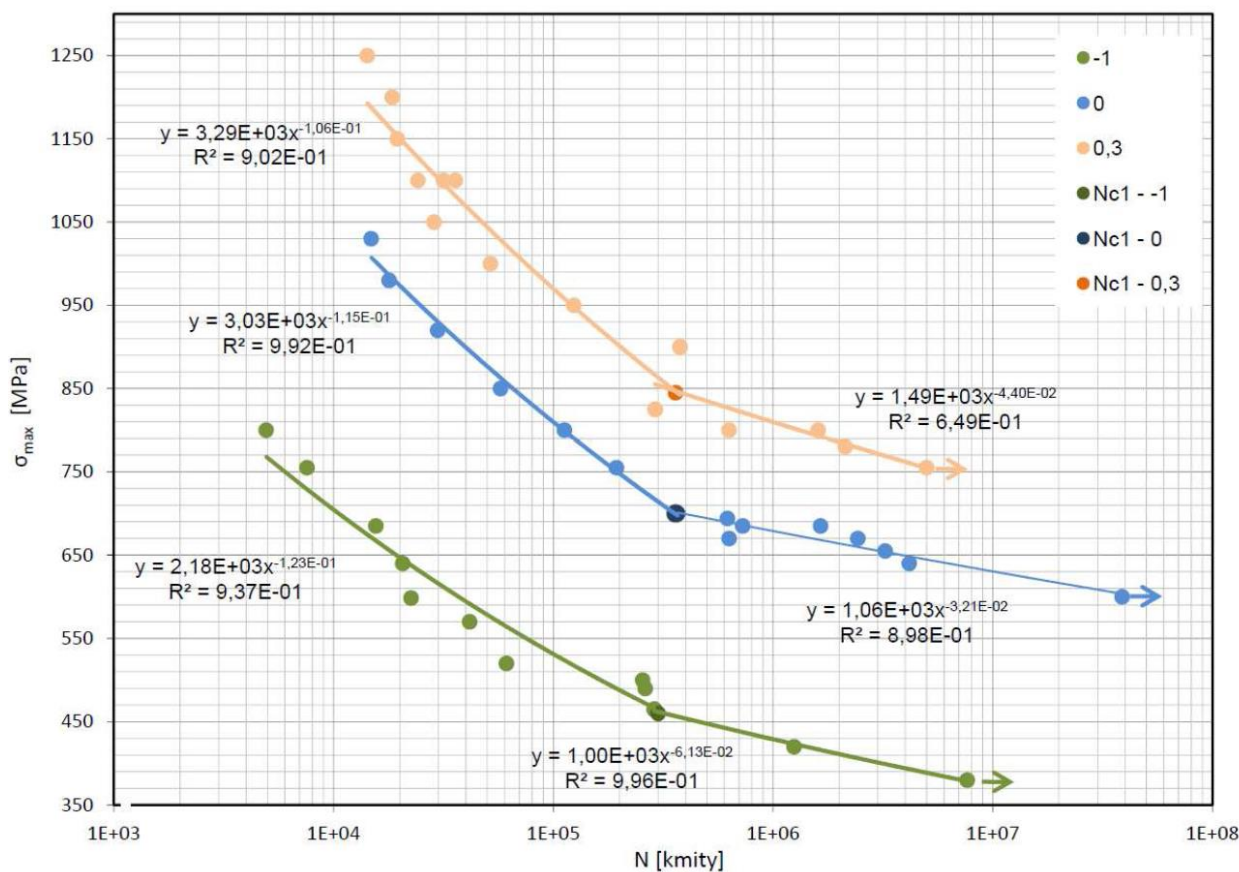
Obr. 4-18Vzorek pro únavovou zkoušku [15]

Pro posouzení únavy byla použita únavová křivka materiálu 17CrNiMo6. Konkrétně byly použity S-N křivky z literatury [15]. Pro tento případ je nejpravděpodobnější modrá křivka (Obr. 4-20) naměřena v míjivém zatěžovacím módu R=0 (Obr. 4-19). Tento typ zatěžování nejpravděpodobněji odpovídá namáhání v patě ozubení při zatěžování, kdy dochází k rozevírání a uzavírání zubové mezery do původního tvaru.



Obr. 4-19 Zatěžovací módy v literatuře [15]

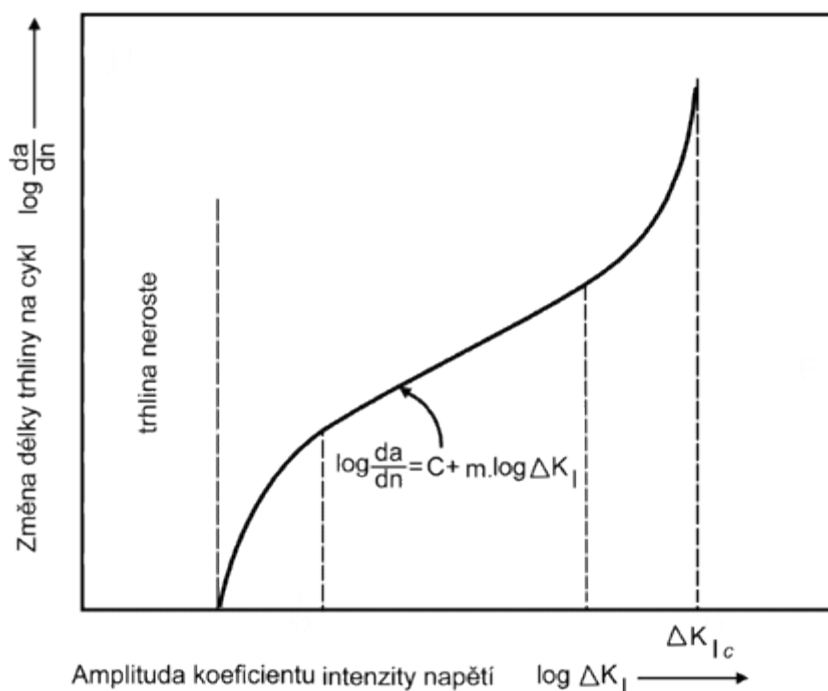
Pro naměření S-N křivky v uvedené literatuře [15] byly vyrobeny zkušební vzorky z kované tyče v zušlechťeném stavu, což odpovídá stavu pastorku (kovaný polotovár). Geometrie a povrch zkušebních těles odpovídá standardu pro tento typ zkoušky (Obr. 4-18). Měření byla provedena společností WIKOW MGI, která je jednou z divizí dodavatele řešených pastorků. Cílem popisovaného testování bylo zjištění S-N křivek pro jednoosé namáhání tah-tlak v těchto zátěžových módech $R = -1$; $R = 0$; $R = 0,3$. Kde R je napětový poměr minimálního a maximálního napětí, [15], [54].



Obr. 4-20 Únavová křivka materiálu 18CrNiMo6 [15]

777Z předchozího digramu (Obr. 4-20) je vidět, že pro míjivé zatížení byla stanovena smluvní mez únavy cca 630MPa. Obecně platí, že celkový počet cyklů do lomu je dán součtem cyklů do inicializace trhliny a cyklů šíření únavové trhliny. Kde inicializace trhliny vzniká z různých příčin jako jsou materiálová nehomogenita, vruby, u ozubení také např.: na povrchu v důsledku pettingu.

Při únavové zkoušce dochází také ke vzniku a šíření trhliny ve zkušebním tělese. V literatuře jsou definovány 3 oblasti šíření únavové trhliny da/dN jako v závislosti na rozkmitu součinitele intenzity napětí ΔK , **Obr. 4-21**.



Obr. 4-21 Rychlost šíření trhliny [22]

V oblasti I je rychlost šíření trhliny nízká a křivka se asymptoticky blíží k hodnotě označující se jako prahová K_{th} . Pod touto hodnotou není rychlost trhliny pozorovatelná a fenomén prahové hodnoty je dán odporem materiálu vůči šíření trhliny (např.: velikost a orientace zrn, dislokace, atd.). V oblasti II v logaritmických souřadnicích lze získat lineární závislost (**Obr. 4-21**) popsanou tzv. Paris-Erdoganovým zákonem (4.1.1), někdy je tato oblast nazývána jako stabilní šíření trhliny. Uvedená rovnice vyjadřuje na levé straně poměr přírůstku délky trhliny da vůči přírůstku počtu cyklů dN , která se rovná pravé straně skládající se z materiálových konstant C a m a rozkmitu maximálního a minimálního faktoru intenzity napětí ($\Delta K = K_{max} - K_{min}$).

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^m$$

4.1.1

V oblasti III dochází k vysoké rychlosti šíření trhliny, někdy je nazývána jako oblast nestabilního šíření trhliny. Mezi faktorem intenzity napětí a polem napětí ve kterém je trhlina platí vztah.

$$K_I = \beta \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a}$$

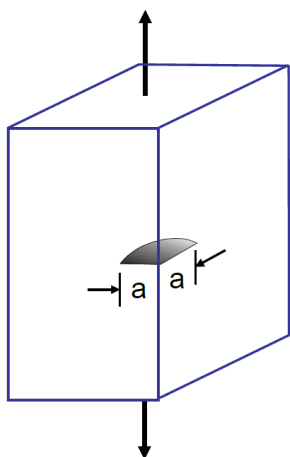
4.1.2

Kde β představuje vliv geometrie a parametr a je velikost trhliny. Je nutno poznamenat, že tento vztah platí pouze pro elastické řešení respektive pro malou plastickou oblast v kořeni trhliny. – tj. pohybujeme se v oblasti lineární elastické lomové mechaniky (LELM). Pro posouzení vzniku a šíření trhliny bylo použito řešení z literatury [21], které využívá aproximace a uvažuje trhliny v rohu tělesa se semikruhovým tvarem trhliny. Aproximační

přístup má „výhodu“, že lze použít i pro děje, o kterých nemáme všechny potřebné informace. Nevýhodou tohoto přístupu je určitá nepřesnost řešení. Při použití aproximace se určí součinitel intenzity v I módu napětí K_I podle rovnice 4.1.3 na základě napjatosti v řešeném místě a pravděpodobné velikosti trhliny.

$$K_I = \sigma \cdot 1.12^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\pi a}$$

4.1.3



Obr. 4-22 Tvar trhliny a její definice [21]

Konkrétně σ je lokální napětí na povrchu součásti v MPa a a je velikost trhliny v m.

Spočtený součinitel intenzity napětí se porovnává s materiálovou hodnotou, označovanou jako lomová houževnatost. Tato lomová houževnatost má v lomové mechanice zásadní význam, analogicky jako ve statické mez pevnosti. Lomová houževnatost pro ocel pastorku 17CrNiMo6 je $78\text{MPam}^{1/2}$ [3]. Pokud součinitel intenzity napětí překročí lomovou houževnatost dojde s velkou pravděpodobností ke vzniku a šíření trhliny. Což bylo dokázáno kapilární zkouškou, (Obr. 4-16).

4.1.6. Zhodnocení metalografické analýzy

Metalografická analýza jasně prokázala, že výchozí zpracování materiálu odpovídá požadované jakosti na výkresové dokumentaci a vznik poškození ozubení je v důsledku opakovaného nesouměrného namáhání. Na povrchu boku zubu byl pozorován výrazný pitting, který posloužil jako jedno z inicializačních míst pro vznik únavové trhliny. Dále byly objeveny trhliny ve dnech zubu (Obr. 4-17), které zde vznikly pravděpodobně z důvodu nesouměrného namáhání ozubení anebo při vzniku dynamických rázů. Popsané poruchy vedly k následnému porušení ozubení na pastorku. Na základě měření tvrdosti podle Vickerse lze konstatovat, že tepelné zpracování pastorku v jádře vyhovuje požadavkům předepsaným na výkresu Lo125629 – Pastorek, viz Obr. 4-5. [29]

Materiálová analýza ověřila správnost výrobního postupu pastorku a poukázala na nerovnoměrné namáhání v důsledku „špatné“ konstrukce. Dále je z fotografií vidět, že dochází k porušení ozubení pastorku ve vzdálenosti 35mm od kraje ze strany od asynchronního motoru, protože tento konec je tužší a u „volného“ konce hřídele může docházet k odlehnutí kontaktu v ozubení a tím i ke zvýšení namáhání na straně u motoru. Zmiňované namáhání je únavového charakteru a na základě S-N křivky a spočteného napětí pomocí např.: metody konečných prvků v oblasti trhliny lze posoudit únavu, případně vznik a šíření trhliny.

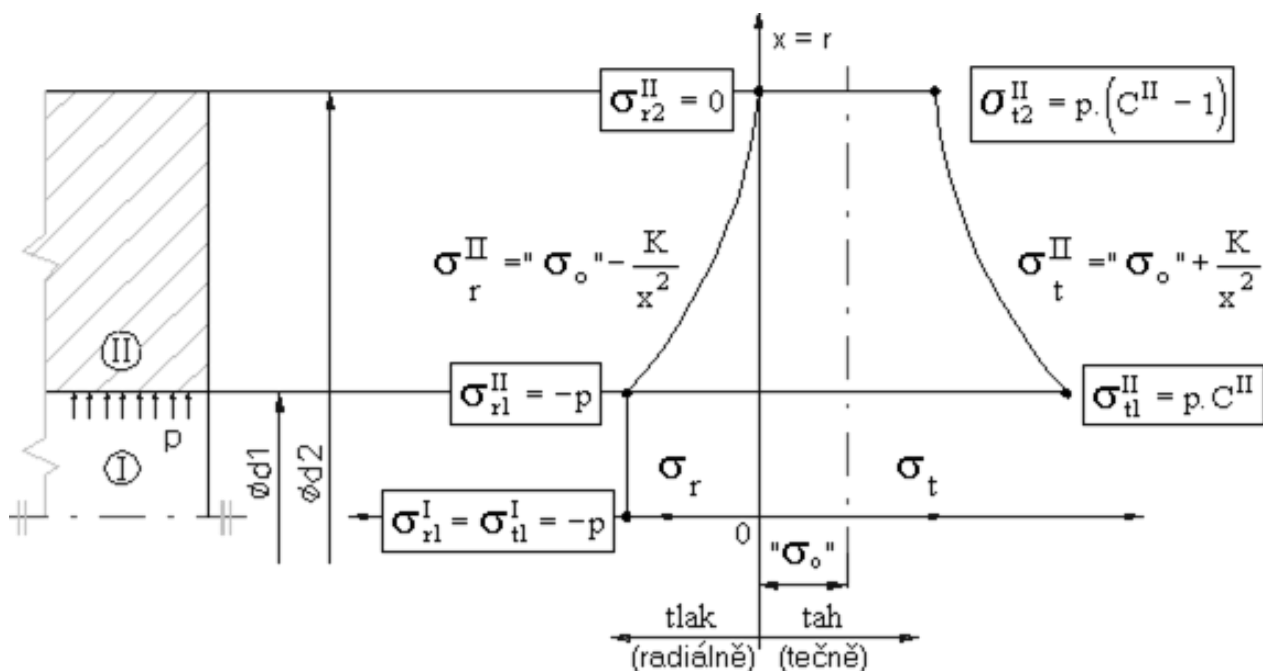
4.2. Kontrola z hlediska konstrukce

Po provedení metalografické analýzy byla provedena pevnostní analýza zaměřena na pastorek a hřídel rotoru, která byla prověřena nejprve pomocí obecně známých analytických vzorců uvedených v odborné literatuře. Jak již bylo uvedeno, pastorek je nalisován na kuželový náboj hřídele asynchronního motoru a přenáší pomocí šikmého ozubení krouticí moment na spoluzabírající kolo prvního stupně předlokové převodovky. Provedené kontrolní výpočty byly spočteny pro normální zatížení a pro extrémní hodnoty.

4.2.1. Kontrola pastorku

4.2.1.1 Kontrola nalisovaného spoje

Při kontrole nalisování je pastorek uvažován jako plný kotouč s vnitřním průměrem $d_1=85\text{mm}$ v toleranci H6 a vnějším průměrem $d_2 = 156,732\text{mm}$, což je průměr na patní kružnici. Rozložení napětí v kotouči od nalisování je zobrazeno na **Obr. 4-23**, kde je vidět nulové radiální namáhání volného povrchu kotouče $\sigma_{r2}^{\text{II}}=0$ (vnější průměr), dále namáhání tlaku p od nalisování jak na vnitřní průměr kotouče, tak na průměr hřídele. Tečná napětí jsou vypočtená na základě následujících vzorců. Uložení pastorku na hřídeli a další rozměry vychází z výkresové dokumentace č.v. Lo125172 a jsou v následující tabulce (**Tab. 4-2**). Dále v analytickém výpočtu bude zanedbána kuželovitost uložení 1:100.



Obr. 4-23 Průběh napětí po nalisování [53]

Tab. 4-2 Parametry pastorku pro analytický výpočet nalisování

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| vnitřní průměr $d_1 = 85\text{mm}$ | patní kružnice $d_2 = 156\text{mm}$ |
| koeficient $C^I = 1$, pro plnou hřídel | koeficient $C^{\text{II}} = \frac{(d_2^2 + d_1^2)}{(d_2^2 - d_1^2)} = 1,844$ |
| modul pružnosti v tahu pro ocel $E = 2100000\text{MPa}$ | |
| maximální přesah pro uložení H6/t5 $\Delta d_{\text{max}} = 106\mu\text{m} = 0.106\text{mm}$ | |
| šířka kola a ozubení $l = 100\text{mm}$ | |
| tření v kontaktu nalisovaného spoje $f = 0,2$ ocel /ocel | |
| koeficient $k_f = 2$ se volí v rozsahu 1,5 – 2,5 | |

Podle zadaných parametrů se spočte tlak p a z něho tečné napětí na patní kružnici σ_{t2}^{II} .

$$p = \frac{\Delta d \cdot E}{d_1 \cdot (C^{II} + 1)} = 92 \text{ MPa} \quad 4.2.1$$

$$\sigma_{t2}^{II} = p \cdot (C^{II} - 1) = 78 \text{ MPa} \quad 4.2.2$$

Dále v místě kontaktu pastorku s hřídelem vzniká radiální σ_{r1}^{II} a tečné napětí σ_{t1}^{II} .

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}^{II} &= -p = -92 \text{ MPa} \\ \sigma_{t1}^{II} &= p \cdot C^{II} = 170 \text{ MPa} \end{aligned} \quad 4.2.3$$

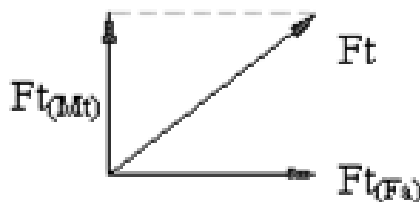
Během provozu docházelo podle výrobce ke „spadávání“ pastorku z hřídele rotoru, a proto byla prověřena velikost axiální síly F_A a točivého momentu M_t v důsledku nalisování. Ale pro tento výpočet bude uvažován minimální přesah v uložení $\Delta d_{min} = 69 \mu\text{m}$, kde se pak tlak p sníží.

$$p_{min} = \frac{\Delta d \cdot E}{d_1 \cdot (C^{II} + 1)} = 60 \text{ MPa} \quad 4.2.4$$

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{\pi \cdot d_1 \cdot l \cdot p \cdot f}{k_f} = 160035 \text{ N} \\ M_t &= F_A \cdot \frac{d_1}{2} = 6801479 \text{ Nmm} = 6801 \text{ Nm} \end{aligned} \quad 4.2.5$$

Veškeré uvedené zkratové momenty v předchozích kapitolách uvádějí maximální hodnotu momentu **6670 Nm (Obr. 3-3)**.

Což v porovnání se spočtenou hodnotou točivého momentu **6801 Nm (rov. 4.2.5)** není velký rozdíl. Je třeba ale poukázat, že obě hodnoty jsou určené na základě uvedených předpokladů a u analytického výpočtu významně ovlivňují absolutní hodnotu koeficienty f a k_f , které byly zvoleny. Naopak je třeba uvažovat současné působení axiální síly a momentu, viz **Obr. 4-24**.



Obr. 4-24 Současné působení sil [53]

4.2.1.2 Kontrola rozložení sil u ozubení

Rozložení sil u ozubených kol se šikmými zuby je obecně známo (**Obr. 4-25**) a popsáno následujícími rovnicemi, do kterých bude dosazen moment při jmenovitých otáčkách a maximální teoretický zkratový moment 6700Nm a maximální naměřený zkratový moment 5765Nm (porucha 1).

$$\begin{aligned} \text{Obvodová síla } F_o &= \frac{2M_t}{d_1} \\ \text{Radiální síla } F_r &= F_o \cdot \operatorname{tg} \alpha_t \\ \text{Axiální síla } F_a &= F_o \cdot \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

Průměr roztečné kružnice pastorku $d_1 = 168,925 \text{ mm}$

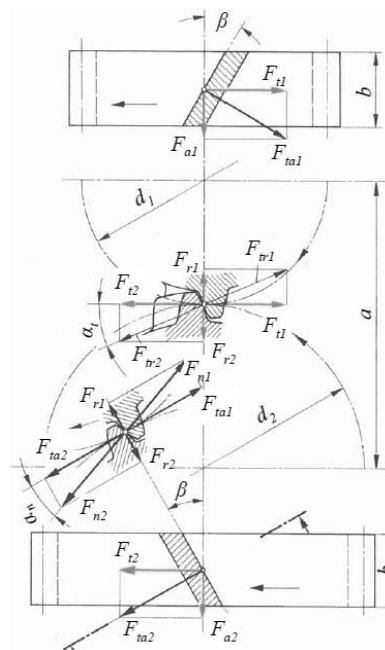
Úhel profilu $\alpha = 20^\circ$

Úhel sklonu $\beta = 6^\circ$

Úhel profilu v tečné rovině $\alpha_t = 20,10137^\circ$

Tab. 4-3 Síly v ozubení

| | Jmenovitý moment | Zkratový moment | |
|-------------------|------------------|-----------------|--------|
| | | 5 765 | 6 700 |
| Moment [Nm] | 2 400 | 5 765 | 6 700 |
| Obvodová síla [N] | 10 656 | 61 392 | 68 255 |
| Radiální síla [N] | 3 900 | 22 468 | 24 950 |
| Axiální síla [N] | 1 120 | 6 453 | 7 174 |



Obr. 4-25 Rozložení sil [53]

Při výpočtech se vždy uvažuje v záběru pouze jeden zub, i když ve skutečnosti u ozubení se šikmými zuby bývá v záběru více zubů. Počet zubů se určí ze součtu součinitelů trvání záběru evolventy a kroku.

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

4.2.6

Součinitel trvání záběru evolventy se spočte podle následující rovnice.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_{wt}) + z_2 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_{wt})}{2 \cdot \pi} = 2,06$$

4.2.7

A dále se přičte vliv součinitele úhlu ozubení.

$$\varepsilon_\beta = \frac{b \cdot \sin \beta}{\pi \cdot m} = 0,47$$

4.2.8

Sečtená hodnota $\varepsilon = 2,53$ teoreticky znamená, že jsou vždy 2 zuby v záběru a přibližně v 50% jsou 3 zuby v záběru.

4.2.1.3 Výpočet napětí v ohybu

Po určení sil v ozubení na roztečné kružnici se zkontroluje zub při namáhání v ohybu a dotyku. Pro určení správného ohybového momentu se musí přepočítat obvodová síla na hlavovou kružnici pro maximální teoretický moment 6700Nm, maximální naměřený zkratový moment 5765Nm (porucha 1) a pro moment při jmenovitých otáčkách 2400Nm.

$$F_{oa_max} = \frac{2M_t}{d_{a1}} = \frac{2 \cdot 6700}{0,187809} = 71\,349 \text{ N}, F_{oa_porucha1} = 61\,392 \text{ N}, F_{oa_jmen} = 25\,558 \text{ N}$$

4.2.9

Podle kontroly ozubení podle Merita [14] se spočítá dovolená síla F_D , která se porovnává s obvodovou silou na hlavové kružnici pro jmenovitý moment F_{oa_jmen} .

$$F_D = \pi \cdot c_{\min} \cdot m \cdot b \cdot \mu \geq F_{oa_jmen}$$

4.2.10

Hodnota c_{\min} je minimum koeficientů v ohybu a dotyku pastorku a spoluzabírajícího kola $c_{\min} = \min(c_{o1}, c_{o2}, c_{d1}, c_{d2})$ a určí se z tabulek v literatuře [14] a podle následujících vzorců.

Pro ohyb:

$$c_{o1} = \frac{\sigma_{Do1} \cdot r_{o1}}{y_{o1}} = 32.95$$

$$c_{o2} = \frac{\sigma_{Do2} \cdot r_{o2}}{y_{o2}} = 37.75$$

Pro dotyk:

$$c_{d1} = \frac{\sigma_{Dd1} \cdot r_{d1}}{U \cdot y_{d1}} = 26.52$$

$$c_{d2} = \frac{\sigma_{Dd2} \cdot r_{d2}}{U \cdot y_{d2}} = 55.84 \quad \text{kde } U = \left(\frac{m}{10}\right)^{0,2}$$

4.2.11

4.2.12

Kde jednotlivé konstanty jsou maximální provozní otáčky uvedené výrobcem motoru 4120ot/min = 68.8 ot/s, zvolená životnost $L_h = 50000$ hod a součinitel přesnosti $\mu = 1$ pro stupeň přesnosti 6. Dále pro výpočet byly odečteny koeficienty $r_{o1} = 0.39$, $r_{o2} = 0.44$, $r_{d1} = 0.33$, $r_{d2} = 0.39$, $y_{o1} = 4.38$, $y_{o2} = 4.08$, $y_{d1} = 1.47$, $y_{d2} = 0.75$ v literatuře [14]. Z rovnice 4.2.12 vyplývá, že nejmenší koeficient c_{\min} je c_{d1} a potom je dovolená síla podle Merita $F_d = 58\,320$ N. Pokud je síla porovnána s obvodovou silou na hlavové kružnici od jmenovité momentu je namáhání od dotyku po stanovenou hodnotou, naopak při uvažování zkratového momentu, resp. jeho maxim je tato hodnota překročena.

Pro další postup je nutné určit materiálové charakteristiky, které jsou uvedené v Tab. 4-4.

Tab. 4-4 Tabulková materiálová data [14]

| Součást | Materiál | Stav | Mez pevnosti | Mez kluzu | Tvrdość podle Brinella | Dovolené napětí v ohybu | Dovolené napětí v dotyku |
|----------|-----------|--------------|--------------|-------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|
| | | | R_m [MPa] | R_e [MPa] | HB | σ_{Do} [MPa] | σ_{Dd} [MPa] |
| Kolo | 16220 | cement. kal. | 950 | 490 | 285 | 350 | 100 |
| Pastorek | 17CrNiMo6 | cement. kal. | 980 | 490 | | 370 | 110 |

Namáhání v ohybu je řešeno podle obecně platných vzorců a v Tab. 4-5 jsou uvedeny hodnoty ohybových napětí při působení jednotlivých poruch.

$$\text{Napětí v ohybu } \sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{F_{oa} \cdot h}{\frac{1}{6} \cdot (m \cdot \pi)^2 \cdot b} \leq \sigma_{DOVo}$$

4.2.13

$$\text{Ohybový moment } M_o = F_{oa_jmen} \cdot h = F_{oa} \cdot 2.25 \cdot m = 25\,558 \cdot 2.25 \cdot 7 = 402\,538 \text{Nmm}$$

4.2.14

Tab. 4-5 Hodnocení ohybového namáhání v pastorku

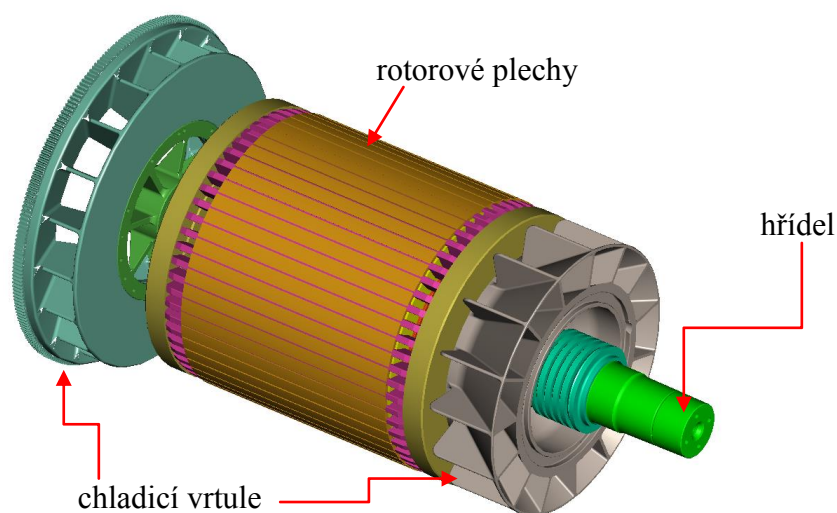
| Stav | Maximální točivý moment $M_{t_{\max}}$ [Nmm] | Obvodová síla F_o [N] | Ohybový moment M_o [Nmm] | Napětí v ohybu σ_o [MPa] | Dovolené napětí v ohybu σ_{Do} [MPa] | Hodnocení |
|----------|----------------------------------------------|-------------------------|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------|-----------|
| provozní | 2 400 000 | 25 558 | 402 538 | 50 | 370 | vyhovuje |
| zkratový | 5 765 000 | 61 392 | 966 925 | 120 | | |
| zkratový | 6 700 000 | 71 349 | 966 925 | 139 | | |

4.2.1.4 Shrnutí

Na základě analytických výpočtů uvedených v literatuře [14] lze konstatovat, že pastorek je namáhán od nalisování a současně je namáhán od zatížení provozními podmínkami. Při extrémním přesahu dochází k tečným napětím v patě zubu o velikosti 78MPa a při působení maximálního teoretického momentu 6 700Nm dochází v patě zubu k napětí 139MPa. Pokud by se tyto dvě hodnoty pouze sečetly, pak by se napětí koncentrovalo v patě o velikosti 217MPa, což opět je pod dovoleným napětím v ohybu. Spočtené hodnoty jsou uvažovány po celém délce zubu, což neodpovídá skutečnosti, protože z metalografického rozboru vyplývá, že dochází k nerovnoměrnému zatěžování zubů.

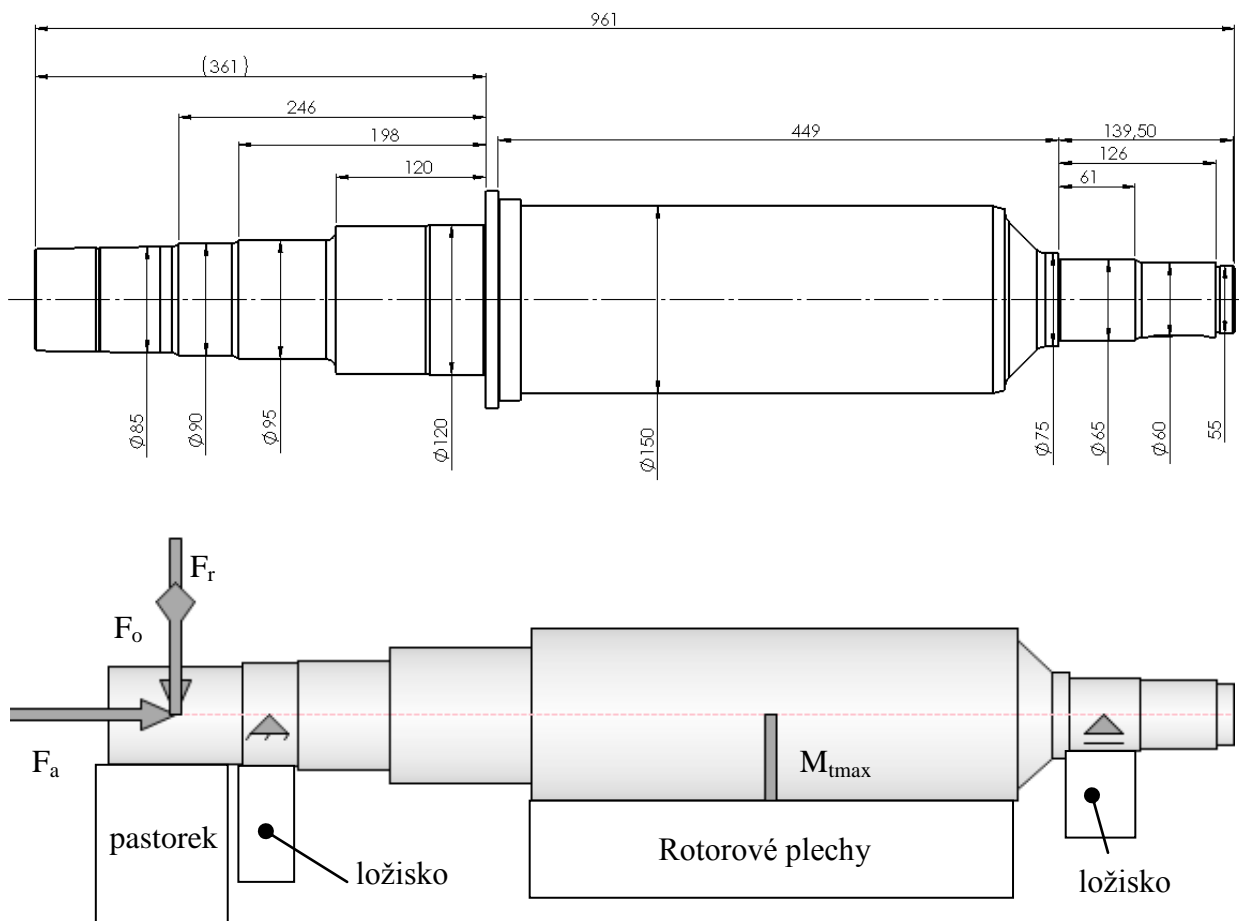
4.2.2. Kontrola hřídele rotoru

Předchozí výpočty uvažovaly pouze dokonalý kontakt mezi jednotlivými ozubenými koly, ale při působení momentu dochází k deformaci nejenom pastorku a jeho ozubení, ale také rotorové hřídele na němž je pastorek nalisován. V následující výpočtech bude uvažován pouze tvar vlastního hřídele a také bude prověřena tuhost hřídele s uvažováním nalisovaných plechů. Protože nejsou známi přesahy jednotlivých dílu na hřídeli, bude uvažována hřídel s rotorovými plechy jako monoblok.



Obr. 4-26 Rotoru trakčního motoru

Rozměry a okrajové podmínky jsou zobrazeny na obrázku **Obr. 4-27**. Dále je vidět v na schématu interakce hřídele s dalšími komponenty motoru (**Obr. 4-27 b**). Vliv chladicích vrtulí byl zanedbán z důvodu jejich nízké hmotnosti a silové účinky na ně jsou v porovnání s ostatními zatíženími řádově nižší. Dále vlastní tvar hřídele byl zjednodušen, nebyly uvažovány středící důlky, mazací drážky, osazení pro rotorové plechy a kužel u pastorku. Opory hřídele jsou uvažovány absolutně tuhé, což ve skutečnosti není. Musí se uvažovat vliv poddajnosti ložisek, skříně převodovky a skříně motoru.



Obr. 4-27 Hřídel rotoru a) rozměry b) okrajové podmínky [28]

Okrajovými podmínkami pro výpočet jsou zatěžující účinky (krouticí moment a síly v ozubení). Jako materiálové parametry oceli byly použity modul pružnosti v tahu $E = 2.06e5$ MPa, modul pružnosti ve smyku $G = 0,8e5$ MPa a hustota $\rho = 7860$ kg/m³. Výsledky výpočtů jsou uvedeny v Tab. 4-6 a jedná se o maximální namáhání v ohybu a krutu (napětí, deformace, průhyb).

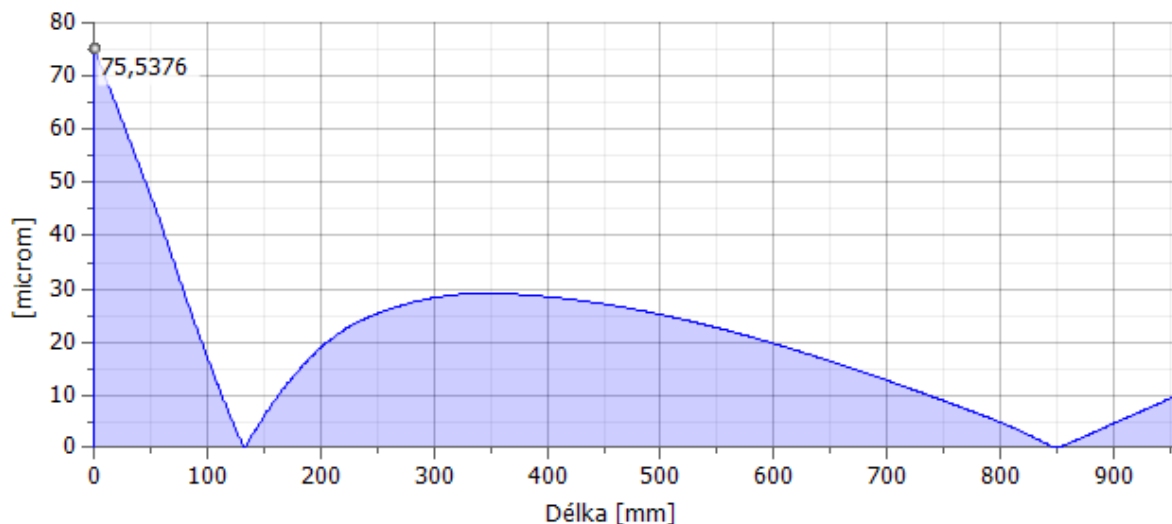
Tab. 4-6 Výsledky analytického výpočtu hřídele

| | | Jmenovitý moment | Zkratový moment | | Uvažování rotorových plechů * |
|-----------------------------|----------------|------------------|-----------------|----------|-------------------------------|
| Moment | M_t | 2 400Nm | 5 765Nm | 6 700Nm | 2 400Nm |
| Maximální napětí v ohybu | σ_B | 33 MPa | 74 MPa | 84 MPa | 33 MPa |
| Maximální smykové napětí | τ_s | 5 MPa | 11 MPa | 13 MPa | 5 MPa |
| Maximální napětí v krutu | τ | 19 MPa | 48 MPa | 56 MPa | 20 MPa |
| Maximální napětí v tahu | σ_T | 0,5 MPa | 1 MPa | 1 MPa | 0,5 MPa |
| Maximální redukované napětí | σ_{red} | 45 MPa | 106 MPa | 125 MPa | 45 MPa |
| Maximální průhyb | f_{max} | 0,075 mm | 0,178 mm | 0,205 mm | 0,067 mm |
| Úhel zkroucení | φ | 0,07 ° | 0,16 ° | 0,22 ° | 0,06 ° |

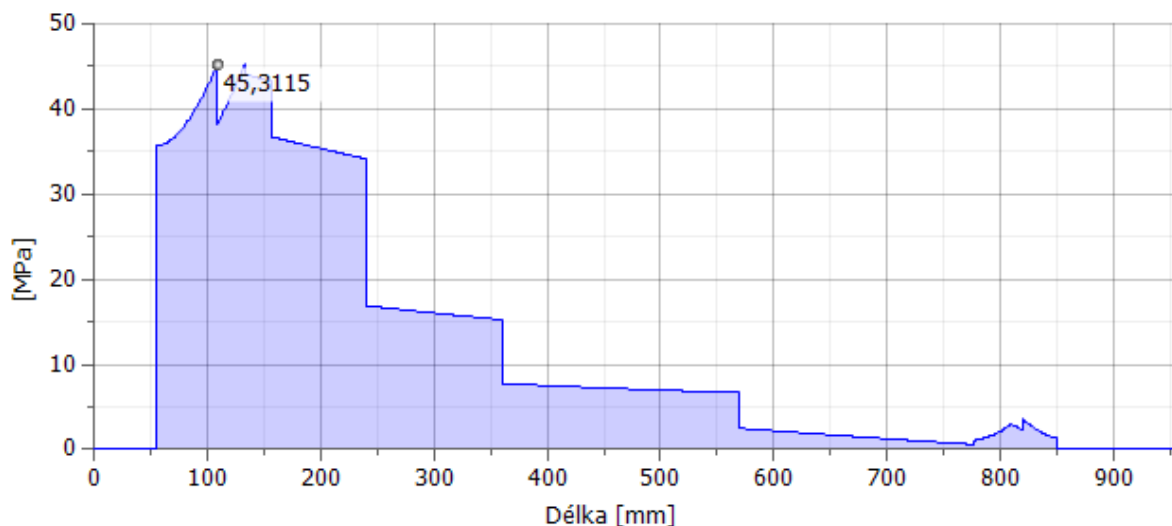
Pozn.: * schéma je uvedeno na Obr. 4-30

Průběhy průhybů a redukovaných napětí po délce hřídele jsou na následujících obrázcích pod zatížením jmenovitého a zkratového momentu a od také sil v ozubení. Obecně z výsledků je vidět nárůst průhybu a napětí při zvýšení momentu z asynchronního motoru.

V běžných provozních podmínkách (jmenovitý moment 2400Nm) jsou deformace hřídele malé a hřídel je pro tyto stavy navržena správně, protože hodnoty průhybů a napětí dosahují běžných hodnot technické praxe. Konkrétně, spočtený průhyb přibližně 0,07 mm a maximální redukované napětí cca 45MPa zdaleka nedosahuje dovolené napětí materiálů 17CrNiMo6, který má minimální mez kluzu v tahu 815 MPa.

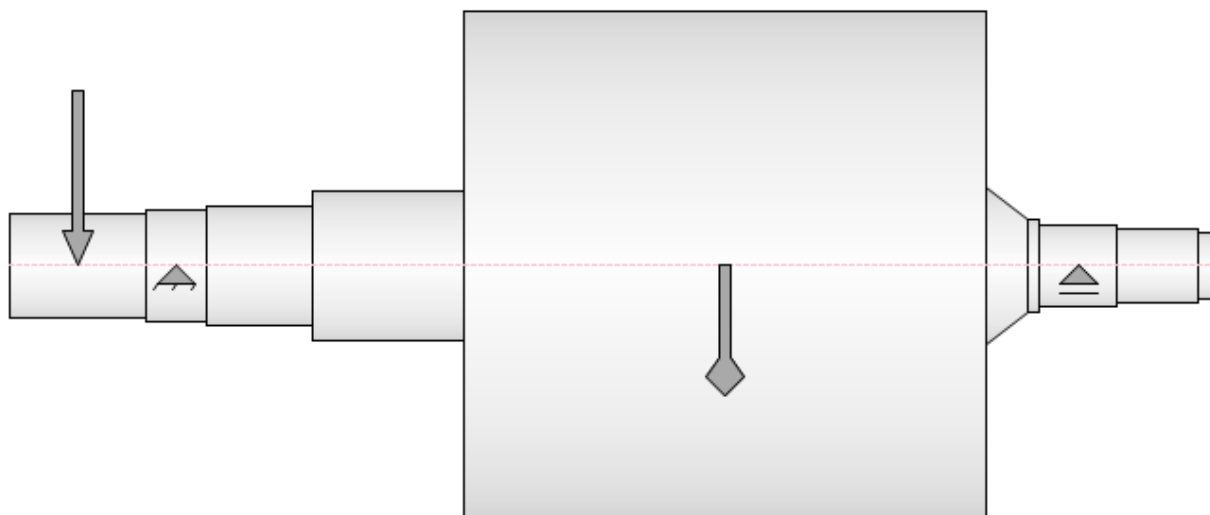


Obr. 4-28 Průhyb od momentu 2400Nm

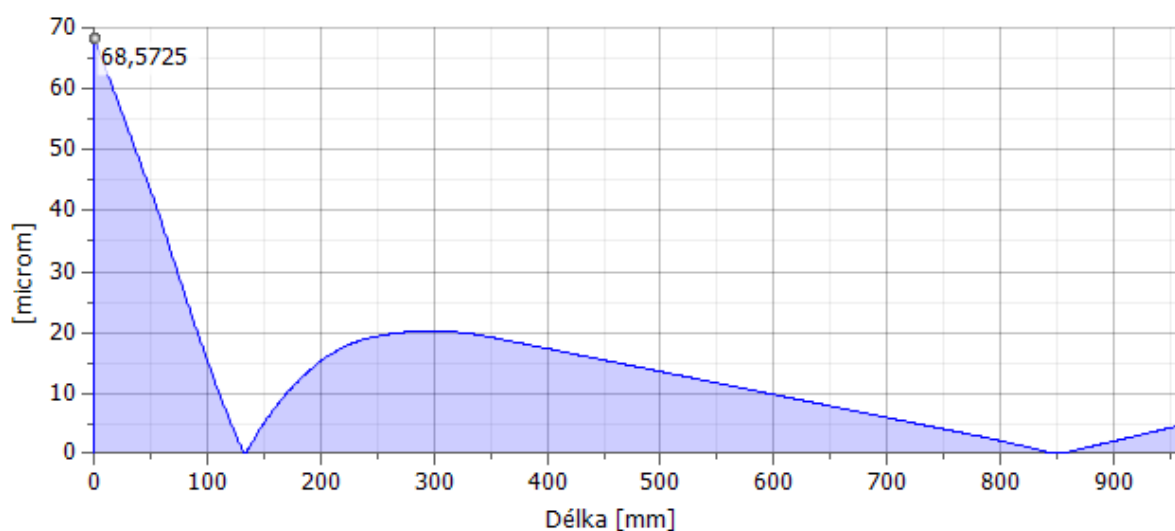


Obr. 4-29 Redukované napětí podle von Misesa od momentu 2400Nm

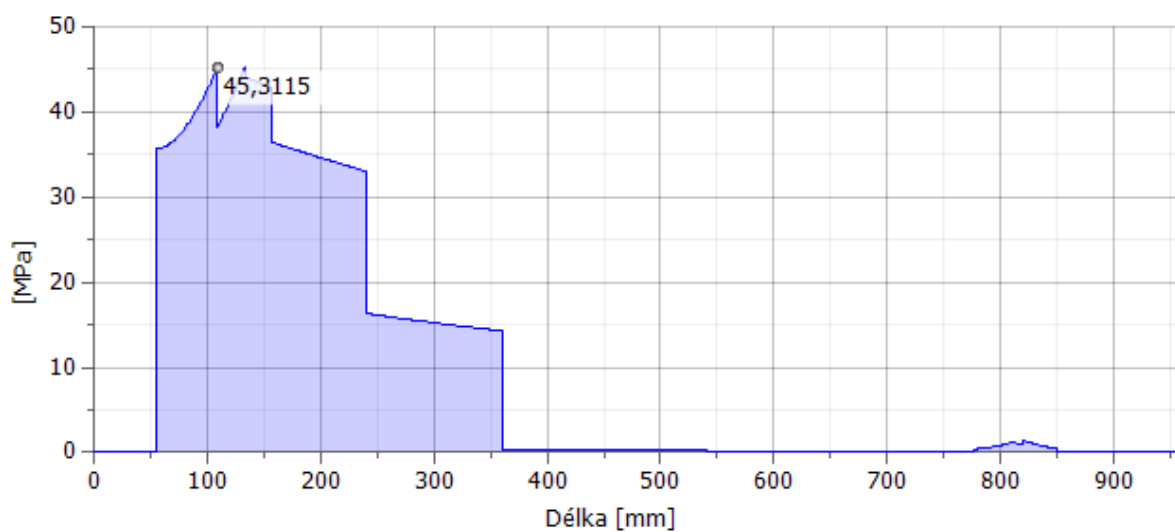
V rámci řešení byl prověřen případ, kdy byly uvažovány rotorové plechy na hřídeli a tím byla zvýšena celková tuhost hřídele (Obr. 4-30 Schéma hřídele s rotorovými plechy Obr. 4-30). Z porovnání výsledků hřídele bez rotorových plechů a s rotorovými plechy je vidět, že průhyb klesl o 0,008mm a maximální redukované napětí zůstalo stejné v místě axiálně radiálního ložiska.



Obr. 4-30 Schéma hřídele s rotorovými plechy



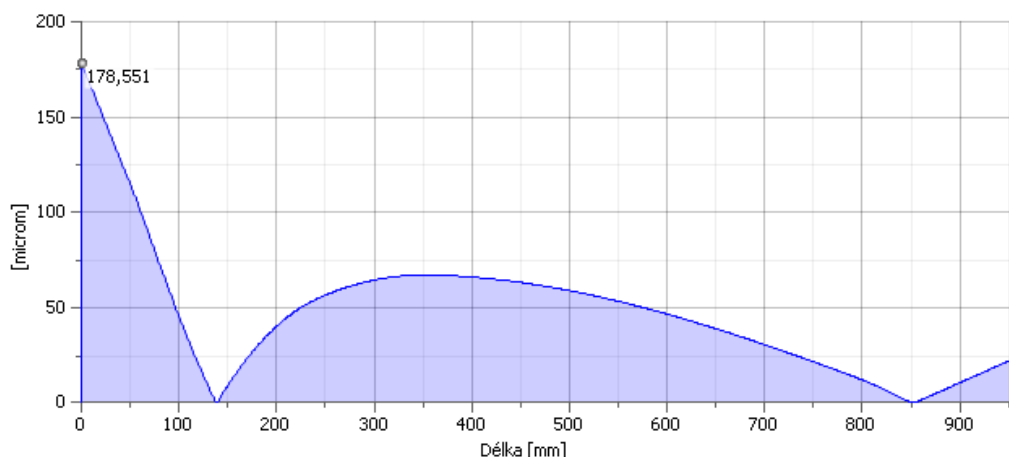
Obr. 4-31 Průhyb od momentu 2400Nm při uvažování rotorových plechů



Obr. 4-32 Redukované napětí podle von Misesa od momentu 2400Nm při uvažování rotorových plechů

Naopak při zatěžování pohonu reálným zkratovým momentem (5765Nm) dochází v místě pastorku k průhybu hřídele statoru o 0,178mm, viz **Obr. 4-33**. Tento průhyb má negativní vliv na plynulý chod ozubení a při takto velké deformaci hřídele nedochází k záběru po celé šířce ozubení. Zub je lokálně namáhán a tím dochází k rychlejšímu opotřebení a destrukci zubu. Navíc při uvažování teoretického zkratového momentu došlo ještě k větším deformacím a namáhání. Kompletní výsledky jsou přehledně shrnuty v Tab. 4-6.

Uvažovány jsou ty nejhorší zatěžující stavy a cílem předkládaných výsledků je poukázat na možné nebezpečí a dále rozvíjet tyto trendy v dalších kapitolách.



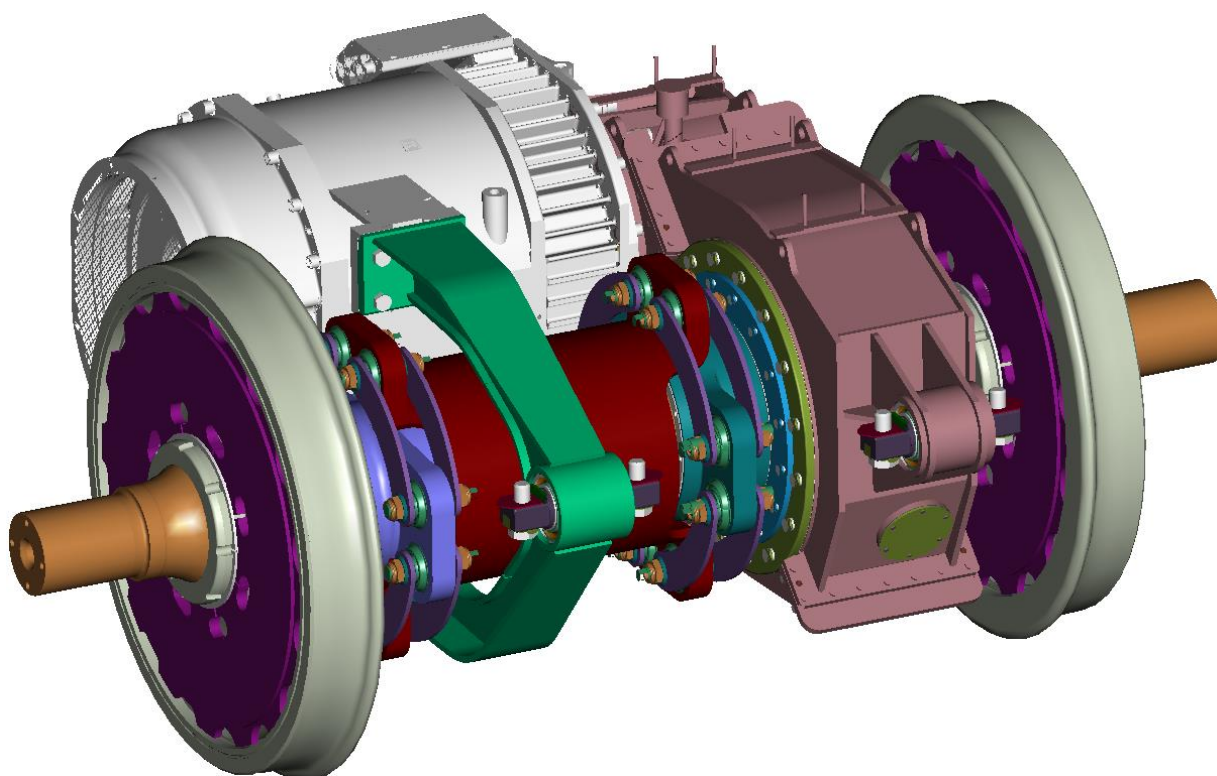
Obr. 4-33 Průhyb od reálného zkratového momentu 5765Nm

4.2.3. Zhodnocení

Na základě analytických výpočtů lze konstatovat, že při zatížení zkratovým momentem dochází ke zvýšeným deformacím a napětím v jednotlivých komponentech individuálního pohonu dvojkolí elektrického vozu 471. Pro zpřesnění výsledků a rozložení namáhání v součástech byla použita metoda konečných prvků v následující kapitole 5, jejíž cílem je zpřesnit uvedené výsledky úvodních analýz.

5. Definice modelu pro detekci poškození mechanické části pohonu

Pro dokázání předchozích tvrzení (metalografická analýza) a zpřesnění analytických výpočtů byl sestaven konečně prvkový model mechanické části pohonu. Numerický model umožňuje řešit detailní chování zájmových komponent a jejich interakcí mezi sebou při dodržení jejich geometrických členitostí. Pro sestavení numerického modelu sloužil CAD modelu (**Obr. 5.1**) jako vstupní geometrie. Pomocí numerického modelu byla řešena pevnostní analýza, jejichž hlavním výstupem bylo rozložení napětí a deformací v komponentech, [25].



Obr. 5.1 Kompletní CAD model individuální pohonu dvojkolí [25]

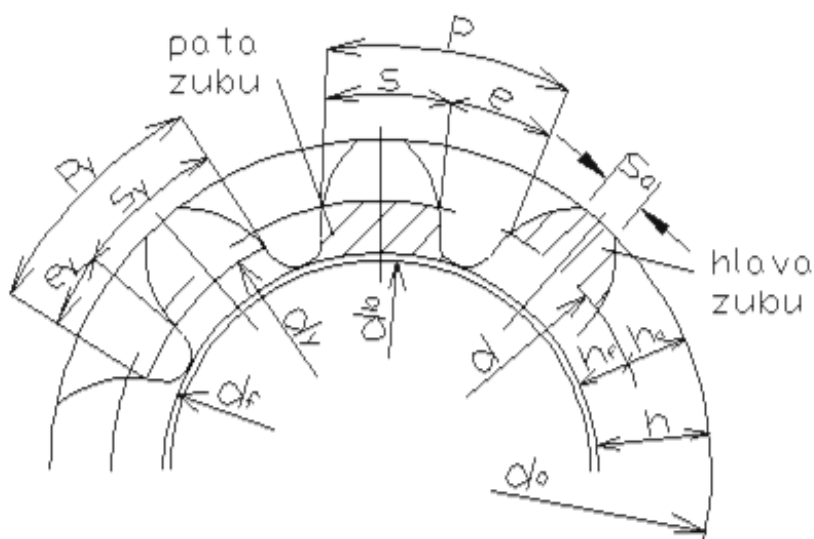
Pevnostní analýzou pomocí numerické simulace byly nejprve řešeny elementární modely simulující kontakt v soukolí, které se následně rozšiřovaly až po komplexní model popisující pohon od rotoru po převodovku. První elementární model se zabýval pouze kontaktem v ozubení. Druhý elementární model navíc řešil nalisování pastorku na hřídel a kombinaci namáhání od nalisování a kroutícího momentu. Dalším vývojovým stupněm bylo rozšíření modelu o rotor včetně všech komponent (**Obr. 5-19**). Paralelně byl sestaven model skříní, který obsahoval skříně převodovky, stator motoru a nosné konzole. A po spojení modelu s rotorem a modelu skříní byl vytvořen komplexní MKP model popisující chování pohonu dvojkolí při působení zkratového momentu. Další komponenty pohonu byly zanedbány z důvodu minimálního namáhání od zkratového momentu. Výsledky všech provedených analýz na elementárních modelech byly porovnávány mezi sebou s cílem ověření správnosti.

5.1. Modelování ozubení

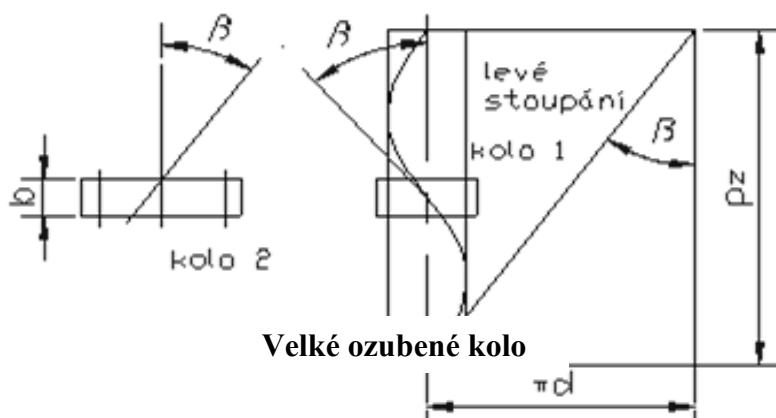
Definice modelu pro detekci porušení byla založena na numerické simulaci, která je nevhodnějším nástrojem pro řešení této problematiky. Největší důraz byl kladen na sestavení funkčního modelu soukolí ozubených kol, **Obr. 5-5**. Předloková převodovka má dva převodové stupně a primárně bude řešen pouze první převodový stupeň, který má kola s čelní ozubením se šikmými zuby. Ve skutečnosti jsou tyto zuby šroubově zakřivené a cílem řešení bylo postihnout co nepřesněji tvar ozubení. Pro modelování byl nejprve proveden výpočet tvaru zubu korigovaného ozubení a po definici jednotlivých charakteristických rozměrů (dle **Tab. 5-1** a **Obr. 5-2**) bylo ozubení namodelováno v CAD programu Pro\Engineer a následně sestaven konečně prvkový model v programu MSC.Mentat. Ozubené soukolí bylo připraveno jako 2D profily jednotlivých kol (**Obr. 5-4**), které byly následně vytaženy s definovanou rotací podle šroubovice se stoupáním p_{zi} uvedeného v **Tab. 5-1** na **Obr. 5-3**. Na základě výkresové dokumentace byly použity parametry ozubení a podle obecně známých vzorců pro výpočet čelního korigovaného ozubení se šikmými zuby, např.: uvedených v literatuře [14], byly spočteny souřadnice bodů popisující evolventu. Evolventy byly v tomto případě linearizovány a popsány úsečkami. Velikost úsečky byla 0,5 mm, což odpovídá velikosti elementu na ploše zubu. Toto zjednodušení vnáší do řešení určitou nepřesnost, protože jak je uvedeno v literatuře [14], ozubená kola se počítají s přesností na 3 desetinná místa a použitý rozměr je o dva řady vyšší. Pokud by se dodržela přesnost, nebylo by možné dále pracovat s takto jemným modelem, proto bylo zavedeno toto zjednodušení vzhledem k dalším postupu řešení.

Tab. 5-1 Parametry prvního převodového stupně

| | jednotky | pastorek | kolo |
|------------------------------------------------------------|----------|-----------|----------|
| Modul ozubení | mm | 7 | |
| Úhel záběru α | ° | 20 | |
| Úhel $\beta = 6^\circ$ | ° | 6 | |
| Modul v tečné rovině m_t | mm | 7,03856 | |
| Úhel záběru v tečné rovině α_t | ° | 20,10137° | |
| Osová vzdálenost a | mm | 275 | |
| Šířka b | mm | 100 | |
| Počet zubů z_i | - | 24 | 53 |
| Korekce x_i | mm | 0,3791 | 0,2247 |
| Roztečná kružnice d_i | mm | 168,925 | 373,044 |
| Hlavová kružnice d_{ai} | mm | 187,8093 | 389,7667 |
| Patní kružnice d_{fi} | mm | 156,732 | 358,690 |
| Základní kružnice d_{bi} | mm | 158,635 | 350,3204 |
| Šířka zubu na roztečné kružnici s_{ni} | mm | 12,927 | 12,141 |
| Šířka zubu na roztečné kr. v tečné rovině s_{ti} | mm | 12,99821 | 12,20788 |
| Šířka zubní mezery na roztečné kružnici e_{ni} | mm | 9,064 | 9,851 |
| Šířka zubní mezery na roztečné kr. v tečné rovině e_{ti} | mm | 9,113927 | 9,905262 |
| Zubová rozteč $p_i = s_{ni} + e_{ni}$ | mm | 21,991 | 21,992 |
| Zubová rozteč v tečné rovině $p_{ti} = s_{ti} + e_{ti}$ | mm | 22,11213 | 22,11314 |
| Úhel záběru na hlavové kružnici α_{ai} | ° | 32,30597 | 25,92388 |
| Stoupání šroubovice p_{zi} | mm | 5049 | 11150 |



Obr. 5-2 Schéma ozubení [14]



Obr. 5-3 Schéma šroubovice ozubení [14]

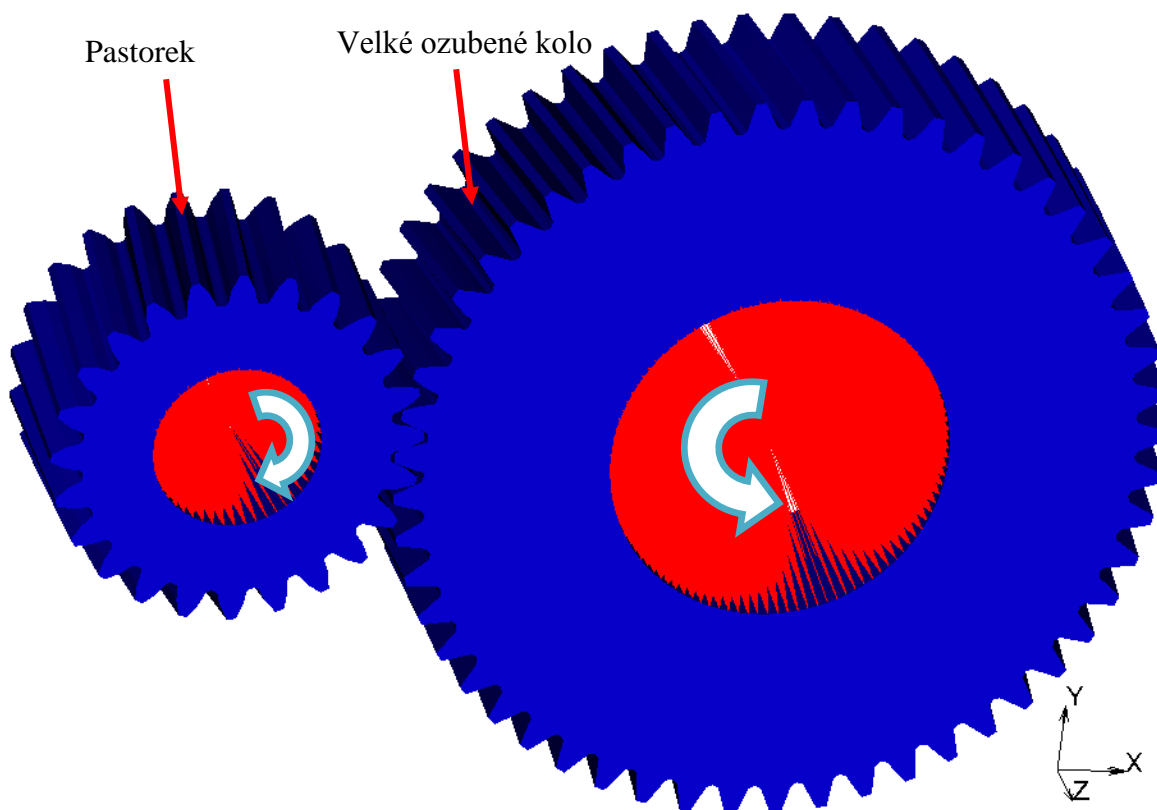
Velikost elementů je přizpůsobena danému problému, v rámci ověření správnosti byl proveden výpočet s lineárními a kvadratickými prvky a výsledky se lišili o 5%, což potvrzuje teoretické předpoklady a proto byla zvolená síť posouzena jako dostatečná pro další výpočty.



Obr. 5-4 Detail 2D profilů jednotlivých kol

V průběhu řešení bylo prověřeno několik způsobů přípravy numerického modelu s cílem, co nejlépe popsat chování šroubového ozubení. Postup byl obvykle následující: vytvoření CAD modelu ozubení, vytvoření MPK modelu a spočtení statické analýzy z cílem vyhodnocení kontaktu v čase mezi zuby. Bohužel se ukázalo, že převodem mezi softwary dochází ke geometrickým nepřesnostem, které zásadně ovlivňují výsledky kontaktu v ozubení. Použitý způsob vykazoval nejlepší výsledky, jednalo o načtení linearizované křivky z Excelu do CAD softwaru Pro/Engineer a dále ve formátu dxf do prostředí MSC.Mentat, kde bylo provedeno domodelování zubů (**Obr. 5-4**), a následovalo vytažení celého soukolí (**Obr. 5-5**).

Jak již bylo uvedeno, jako nejjednodušší výpočetní model byl zvolen první stupeň předlokové převodovky, kde primárně byl řešen kontakt mezi ozubením a naladění okrajových a počátečních podmínek. Pro urychlení naladění výpočtu byly použity pouze malé segmenty kol (**Obr. 5-7**). Jednoduchost modelu ukazovala trend zatížení od ustáleného stavu až po následné poruchy. Okrajovými podmínkami byly konstantní rychlost otáčení velkého ozubeného kola definována v ose otáčení a časový průběh momentu působící v ose pastorku. Podle dané analýzy byl moment konstantní nebo měl časový průběh odpovídající řešenému stavu, např.: reálný zkratový moment označený jako porucha 1. Samozřejmě podle velikosti momentu byla definována rychlost otáčení ozubeného kola. Pomocí absolutně tuhých linků byly pohyby a momenty přenášeny na vnitřní průměr kol. Jelikož doba výpočtu byla maximálně 0,02s byla uvažována rychlost kola v tomto krátkém časovém okamžiku jako konstantní. Velké ozubené kolo je současně spojeno s druhým převodovým stupněm, který je spojen s nápravou přes duté hřídele až na dvojkolí. Tato popsaná sestava má velké setrvačné hmoty a proto není možné skokově, bez destrukce některých komponent, změnit rychlost otáčení.

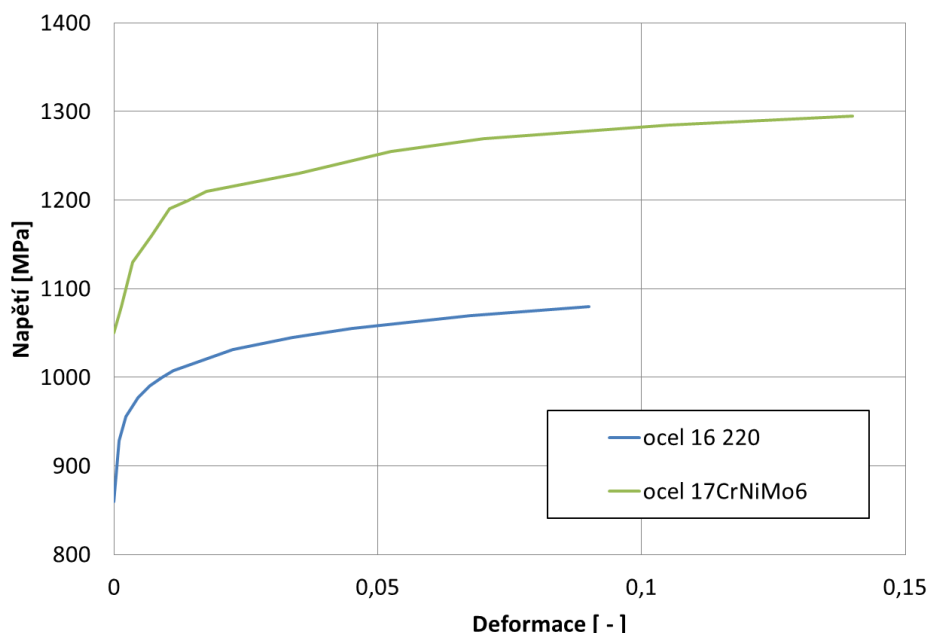


Obr. 5-5 Soukolí prvního stupně předlokové převodovky

5.2. Namáhání ozubení

V kapitole 3 byly ukázány různé průběhy zkratových momentů a z nich byly vybrány dva a použity v numerické simulaci. Jsou to nominální moment 2400Nm a reálný maximální zkratový moment 5765Nm, který je označen jako porucha 1 (Obr. 3-5).

První simulace kontaktu ozubení u soukolí (Obr. 5-5) byla zjednodušena a skládá se pouze ze segmentů ozubených kol prvního převodového stupně (Obr. 5-7), jak již bylo uvedeno. Použití tohoto modelu je vhodné pro popis chování ozubení v průběhu namáhání od zkratového momentu v čase. Materiálové vlastnosti byly uvažovány jako elasto-plastické. Konstrukční ocel byla uvažována jako perfektně plastická s mezí kluzu 275MPa. Jelikož hlavním cílem bylo sledování chování ozubení, byly spočteny napět'ově-deformační křivky pro oceli 16 220 (ozubené kolo) a 17CrNiMo6 (pastorek) v programu JMatPro. Program JMatPro definuje na základě chemického složení a např.: meze kluzu napět'ově-deformační křivky (Obr. 5-6.), které jsou určeny za pokojové teploty 20°C a rychlosti deformace 1 s⁻¹.

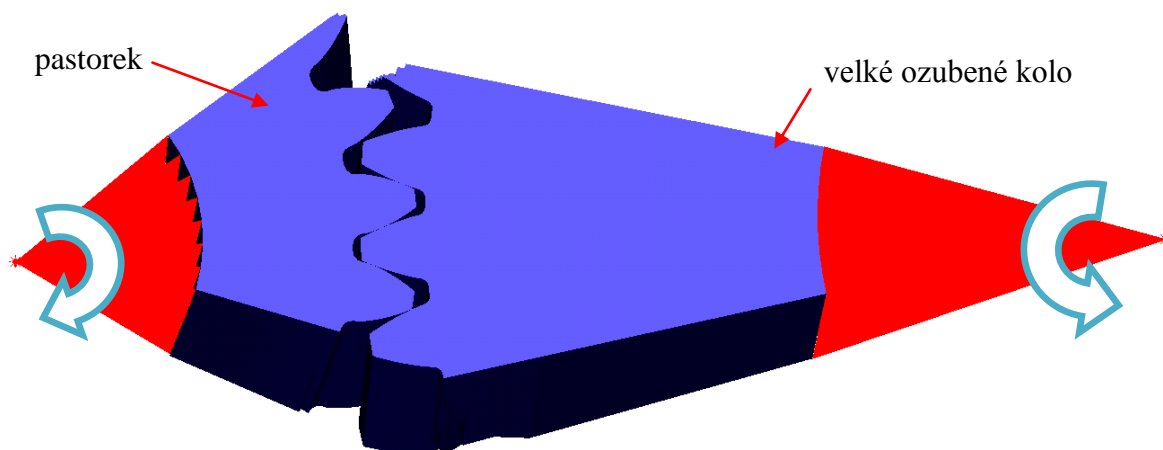


Obr. 5-6 Napět'ově- deformační křivka pro oceli 16 220 a 17CrNiMo6

Okrajové podmínky jsou rychlost otáčení spoluzabírajícího kola a zjednodušený časový průběh momentu působící na pastorek (Obr. 5-11). Zjednodušení momentu bylo z důvodu lepší přehlednosti a zpětného analyzování výsledků. Obě kola resp. segmenty kol mohou konat pouze rotaci kolem osy a ostatní posuvy a rotace jsou nulové. Rychlost a velikost momentu vychází z výkonu motoru nebo z diagnostického systému vozu.

Sledované veličiny v simulaci byly pohyb kol, rozložení kontaktu, rozložení napětí v kontaktu a celkové chování kol. Geometrie spoluzabírajícího kola byla zjednodušena, protože jeho funkcí ve výpočtu bylo pouze udržovat konstantní rychlost otáčení. Rozložení napětí v ozubení je přibližně stejné jako u pastorku.

Jmenovitý provozní moment 2400Nm byl použit jako referenční hodnota, stejně jako to bylo použito v kap. 4.2. V následujících podkapitolách budou zobrazeny výsledky z pevnostních analýz od nejjednoduššího modelu až po komplexní model.

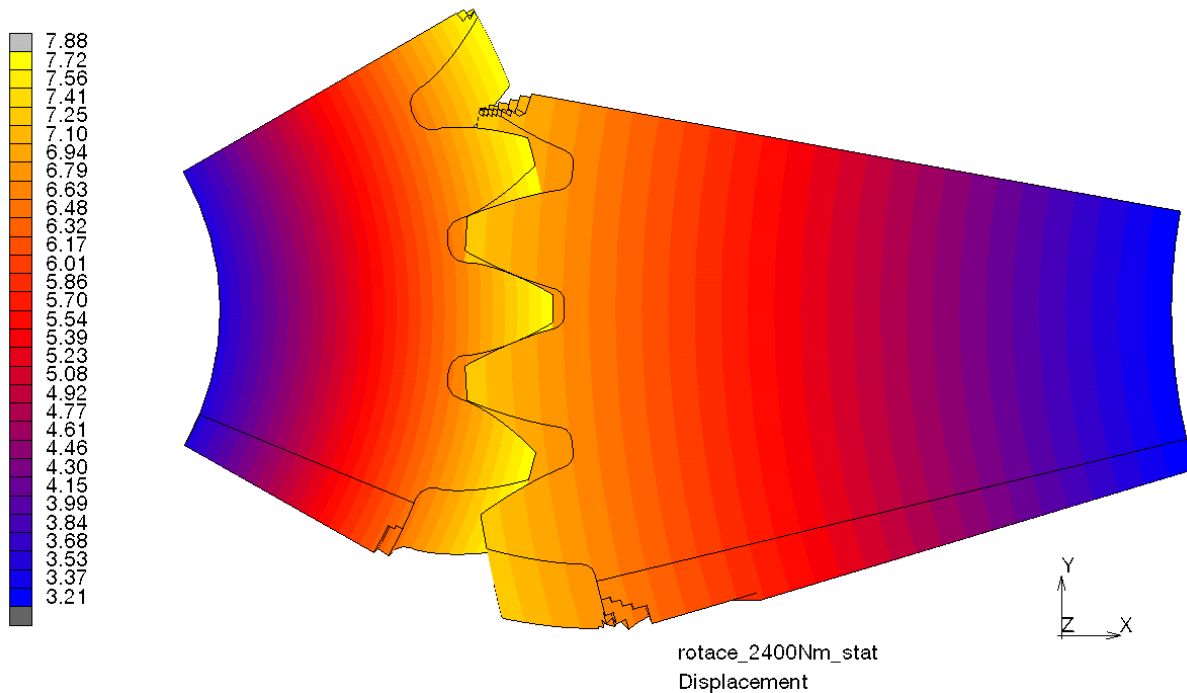


Obr. 5-7 Segmenty ozubených kol

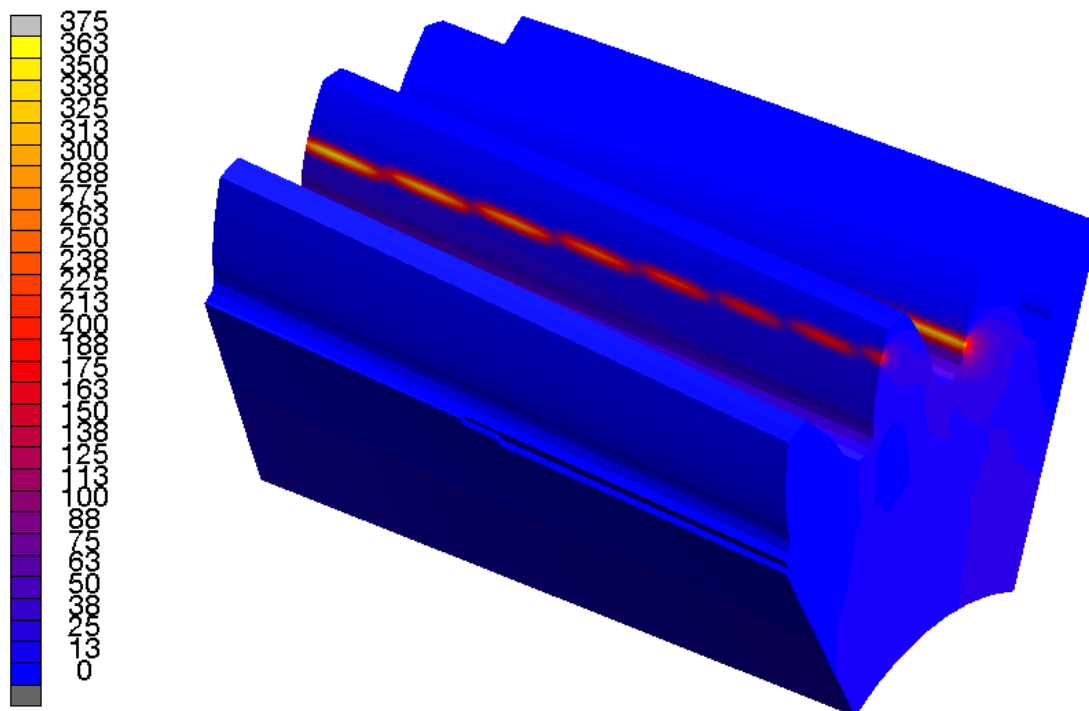
5.2.1. Výsledky simulace při působení jmenovité momentu 2400Nm

Sledovanými veličiny na testovacím modelu , který se skládal ze segmentů kola byl laděn kontakt ozubení na šroubově zakřivených zubech. Parametrem nastavení byly kontaktní podmínky, jako jsou velikost kontaktní mezery (0,01), velikost tření (0,05) a nastavení separačního napětí (0,01). Na **Obr. 5-10** je vidět kontakt mezi oběma koly a detailní rozložení po celé šířce zubu je vidět na **Obr. 5-9**. Právě takovýto průběh rozložení je správný, kdy kontaktní křivka je po šroubovici ozubení.

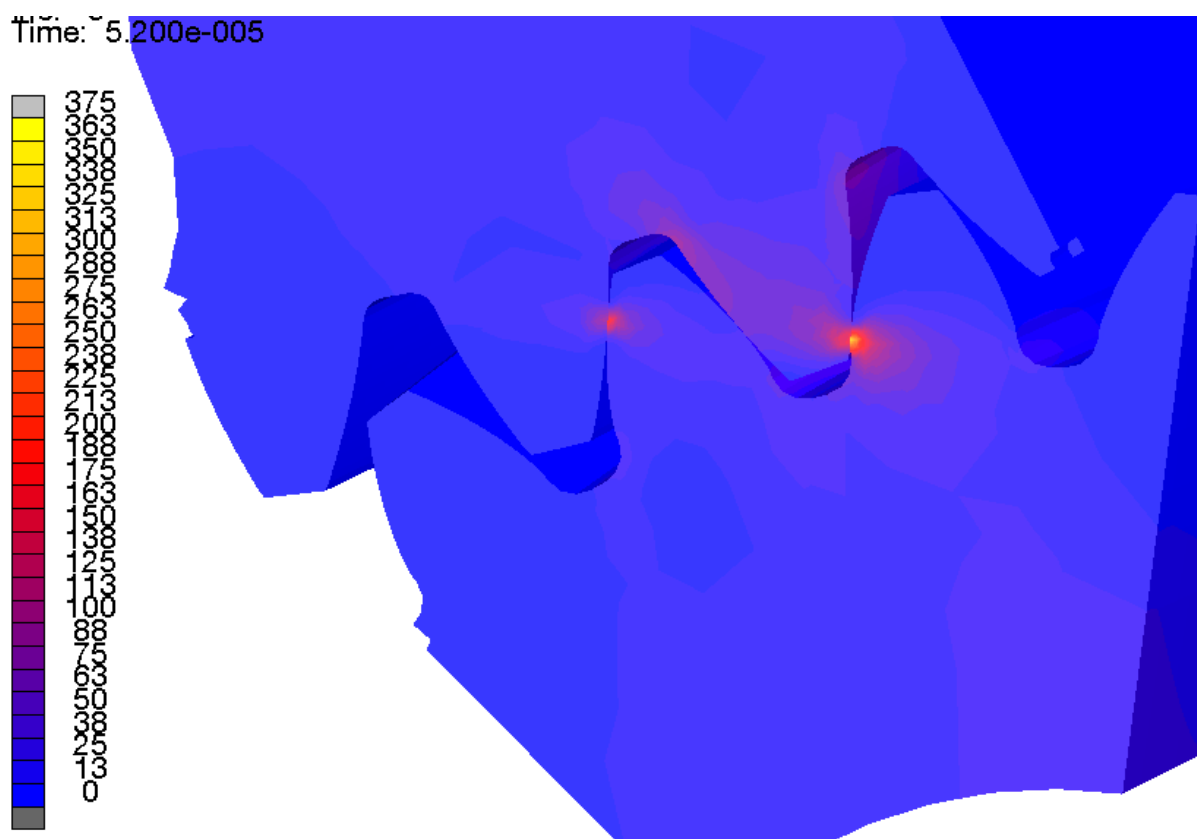
Inc: 18
Time: 2.000e-002



Obr. 5-8 Posunutí kol v čase [mm]



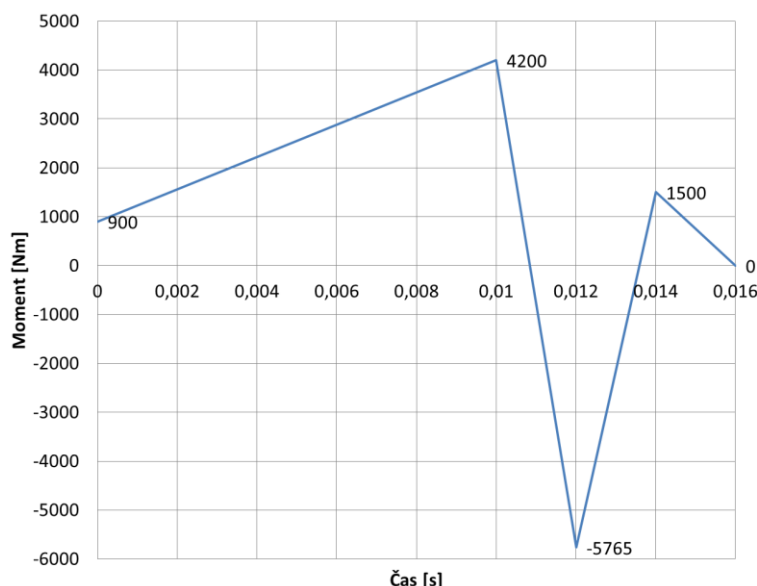
Obr. 5-9 Rozložení redukovaného napětí od provozní momentu 2400Nm v MPa



Obr. 5-10 Rozložení redukovaného napětí od provozní momentu 2400Nm v MPa

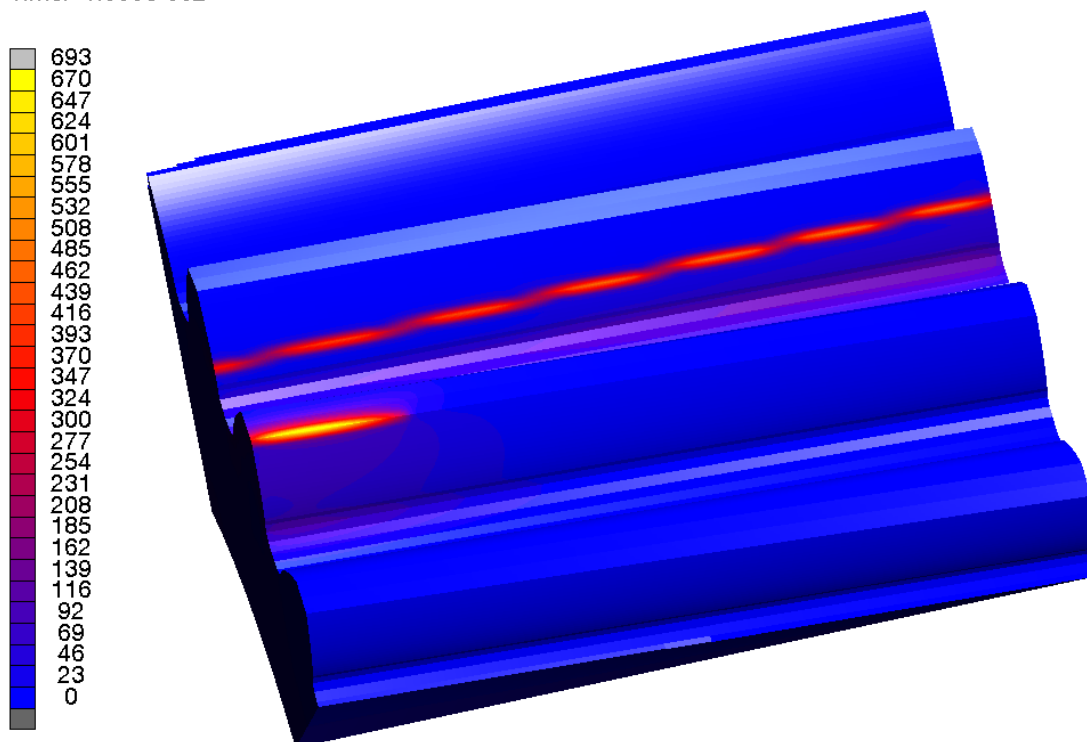
5.2.2. Výsledky simulace při působení zkratového momentu 5765Nm

Pro snadnější práci byl zjednodušen časový průběh reálného zkratového momentu podle **Obr. 3-5**, s kterým se následně pracovalo. Na zjednodušeném časovém průběhu momentu **Obr. 5-11** je vidět místo a velikost působícího momentu. Při provozním momentu 900Nm je redukované napětí dle hypotézy HMM v kontaktu cca 200MPa. Všechna uvedená napětí budou redukovaná podle hypotézy HMM. Dále při nárůstu momentu na 4200Nm se zvýší také hodnota redukovaného napětí na necelých 350MPa a při dalším působení momentu o velikosti cca 5765Nm a opačné orientaci dochází k namáhání už druhé strany ozubení o velikosti cca 500MPa. Při provozním momentu 900Nm je zobrazeno rozložení redukovaného napětí na **Obr. 5-12**, ale při zvýšení momentu na 4200Nm v čase 0,010s je vidět rozložení **Obr. 5-13**. Posledním sledovaným časovým okamžikem je 0,012s, kdy dochází k extrémnímu momentu, ale opačně orientovanému, kde na **Obr. 5-13** je vidět, že nedochází ke kontaktu mezi koly ve směru jízdy, ale v opačném směru, viz **Obr. 5-14**. Dále jak je vidět na grafu (**Obr. 5-11**), moment klesá na nulu a tím klesá i napětí.



Obr. 5-11 Zjednodušený časový průběh momentu – porucha 1

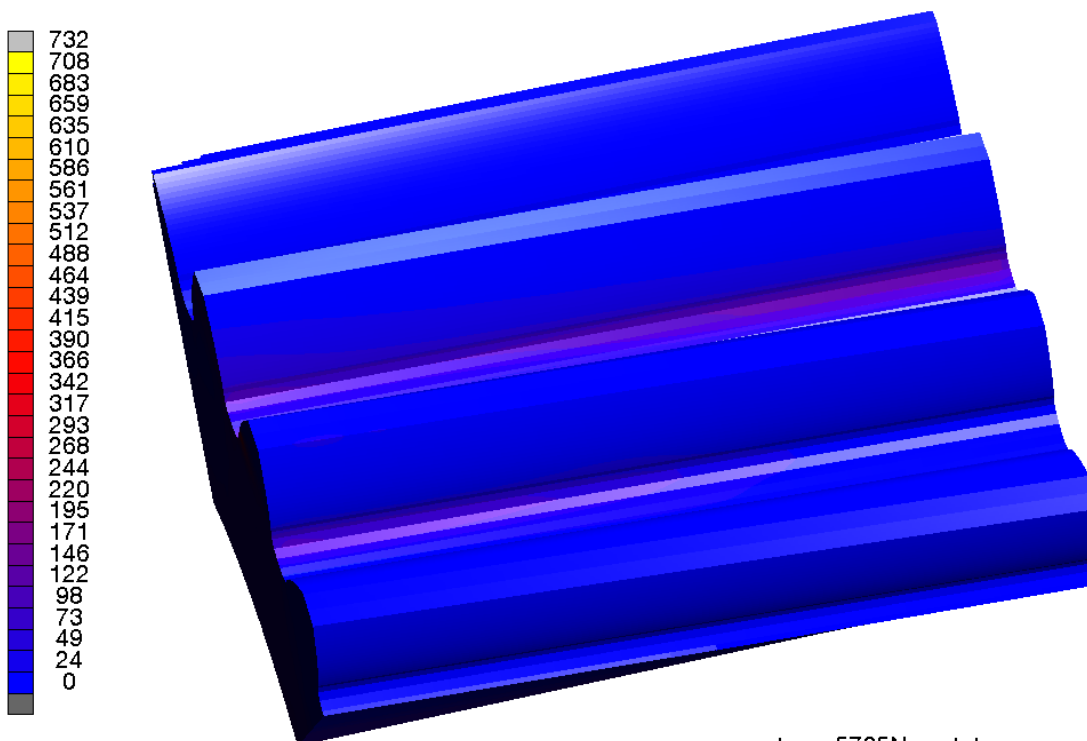
Time: 1.000e-002



rotace_5765Nm_stat
Equivalent Von Mises Stress

Obr. 5-12 Redukované napětí při působení momentu 4200Nm v MPa v čase 0,010s

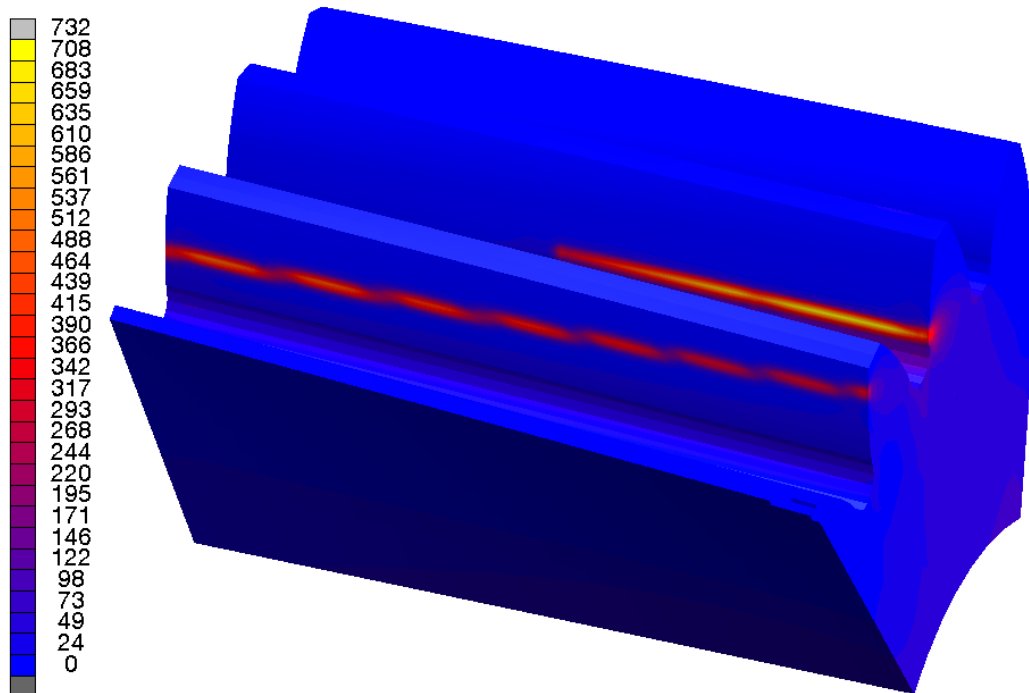
Time: 1.200e-002



rotace_5765Nm_stat
Equivalent Von Mises Stress

Obr. 5-13 Redukované napětí při působení momentu 5765Nm v MPa v čase 0,012s

Time: 1.200e-002



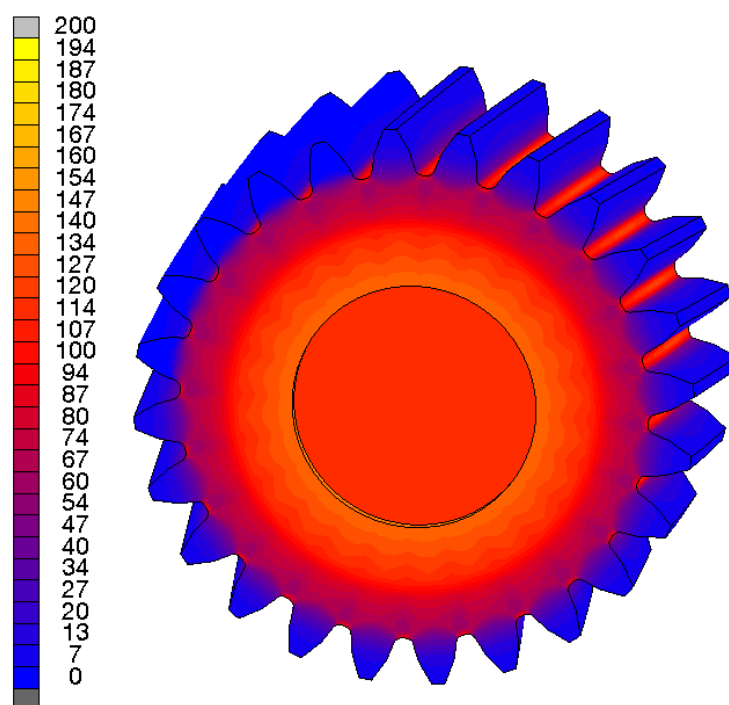
rotace_5765Nm_stat

Equivalent Von Mises Stress Obr.

5-14 Redukované napětí při působení momentu 5765Nm v MPa v čase 0,012s – pohled zezadu

5.3. Napětí v pastorku po nalisování

Pro uvažování napětí od nalisování, které bylo spočteno pomocí analytických vztahů, byl vytvořen jednoduchý model, který potvrzoval závěry analytických výpočtů. V obou postupech bylo počítáno s maximálním přesahem 0,106mm na průměr 85mm, který způsobuje namáhání na roztečné kružnici v radiálním směru cca 80MPa a redukované napětí až 200MPa, viz **Obr. 5-15**.

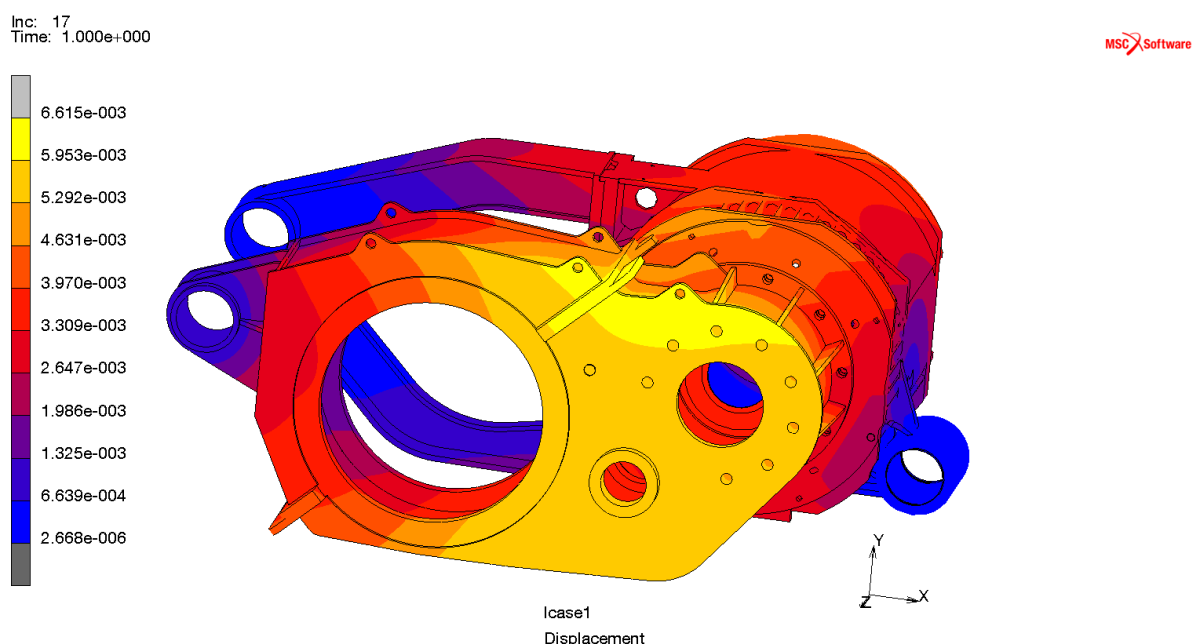


Obr. 5-15 Rozložení redukovaného napětí v pastorku po nalisování [MPa]

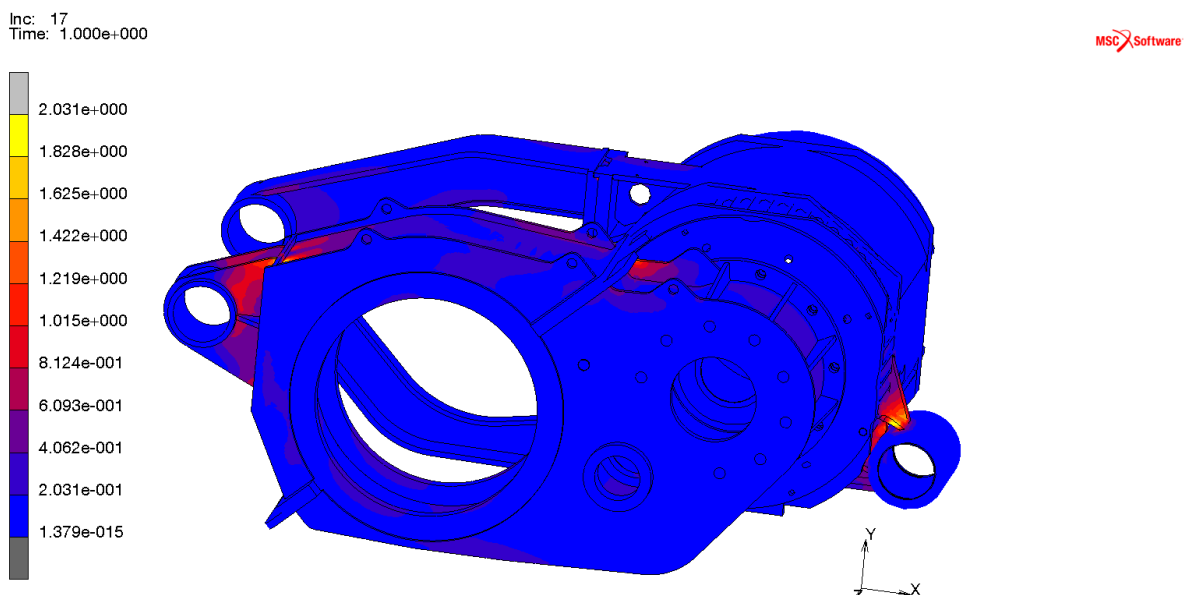
Při dalším řešení provozních podmínek bude toto vzniklé napětí akceptováno a bude tvořit složku celkového namáhání v pastorku.

5.4. Deformace skříní sestavy od vlastní hmotnosti

Další složkou vedoucí k poškození ozubení je poddajnost skříně převodovky, statoru motoru a konzoly a jejich vzájemné spojení. Při simulačním výpočtu byl nejprve simulován stav, kdy jsou uvažovány dokonale tuhé spoje, tzn. že spojovací šrouby byly nekonečně tuhé. Při uvažování dokonale tuhých spojů mezi komponentami dochází k minimální deformaci cca 0,007mm (**Obr. 5-16**), kdy jsou „namáhány“ uchycení v místě motoru a v místě uchycení skříně a napětí je cca 2MPa, (**Obr. 5-17**).



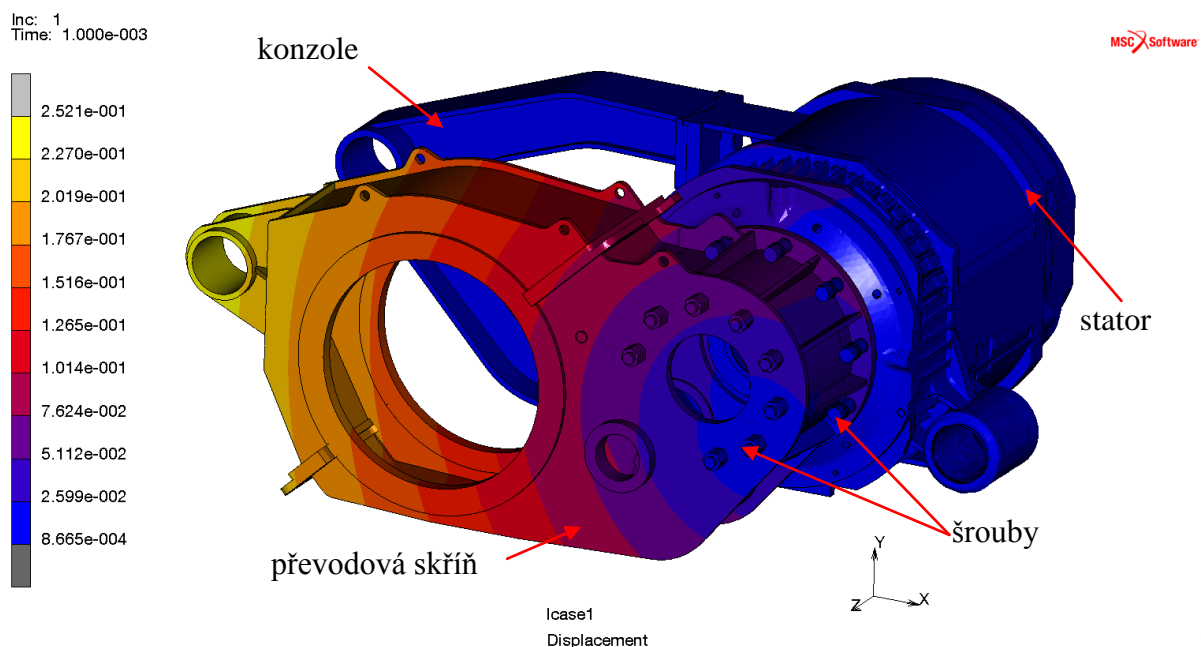
Obr. 5-16 Posunutí konstrukce od vlastní hmotnosti s dokonalými spoji [mm]



Obr. 5-17 Rozložení redukovaného napětí s dokonalými spoji [MPa]

Následný model akceptoval poddajné spojovací šrouby ve spojení mezi statorem a skříní převodovky, kde vliv spojovacích šroubu se projevil v natočení skříně převodovky kolem osy rotace pastorku, ale toto natočení je minimální v řádech desetin mm (max. 0.25mm), **Obr. 5-18**.

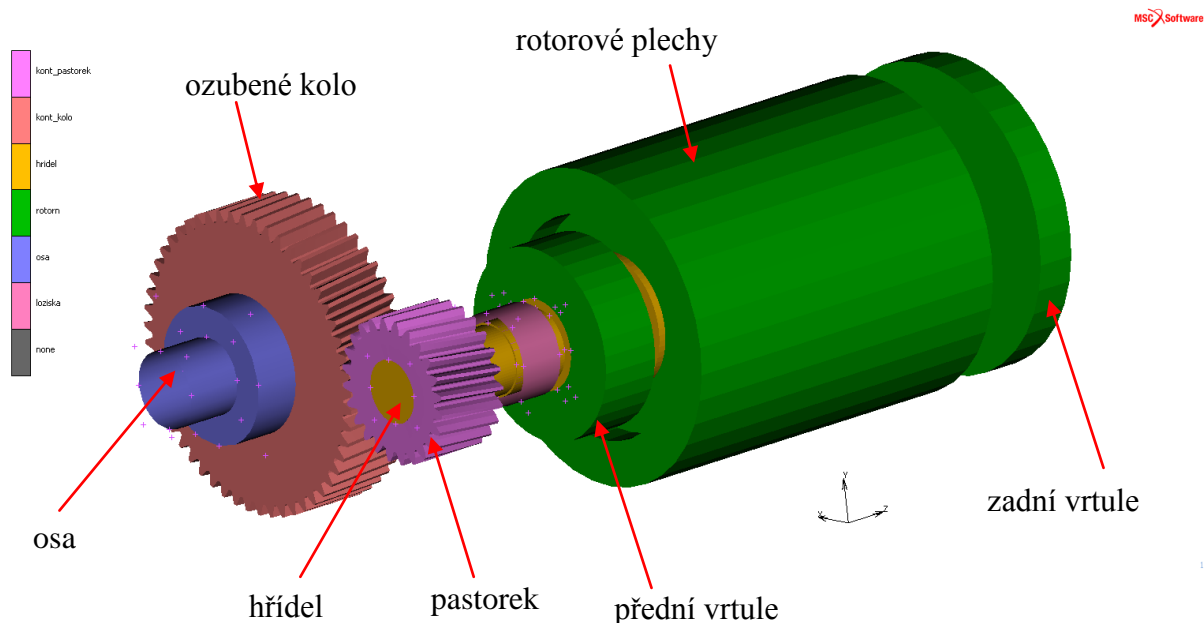
Uchycení skříní je provedeno přes silentbloky a ty jsou simulovány přes absolutně tuhé linky, které řízeny uzlem uprostřed objímky. Tento uzel se nemůže posouvat, pouze koná rotační pohyb kolem osy objímky. Oproti skutečnosti zpevňují linky objímky a tím nedochází k jejich deformaci. Jelikož cílem řešení není zkoumání vlivu poddajnosti uchycení skříní, ale namáhání pastorku a jeho okolí lze s tímto předpokladem dále pracovat.



Obr. 5-18 Posunutí skříně od vlastní hmotnosti s uvažováním šroubů [mm]

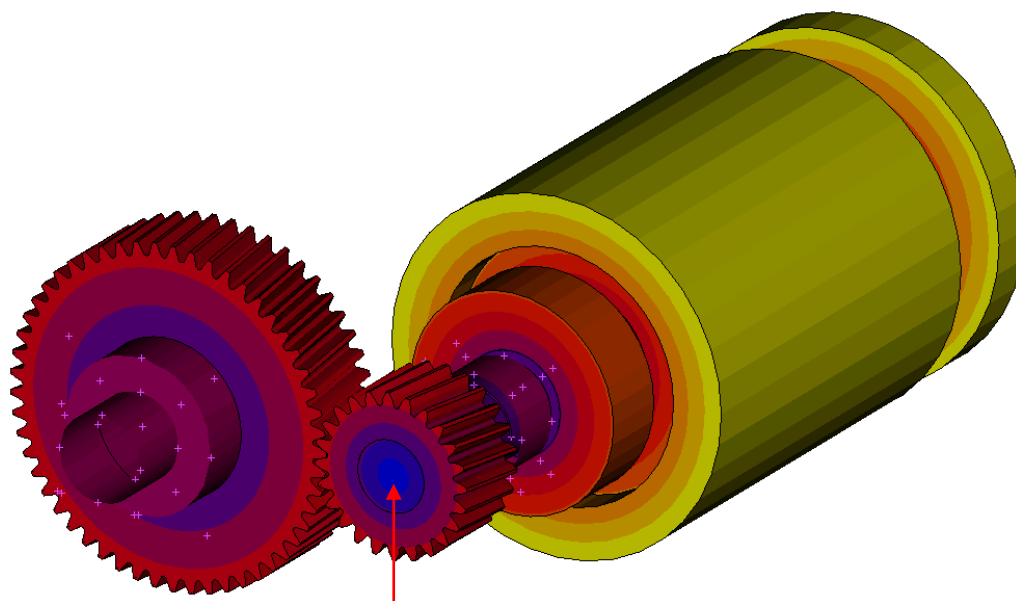
5.5. Namáhání pastorku, kola a statoru

Dalším vývojovým stupněm byla simulace soukolí již s rotorem trakčního motoru, kdy byla uvažována absolutně tuhá skříň převodovky a stator. Simulace se skládala z poddajných a tuhých těles, **Obr. 5-19**. Poddajná tělesa jsou ozubené kolo, pastorek, hřídel, rotorové plechy a zjednodušená geometrie vrtulí. Naopak absolutně tuhá tělesa jsou osa nesoucí ozubené kolo a ložiska vedoucí hřídel. Tato ložiska jsou umístěna ve statorové skříni.



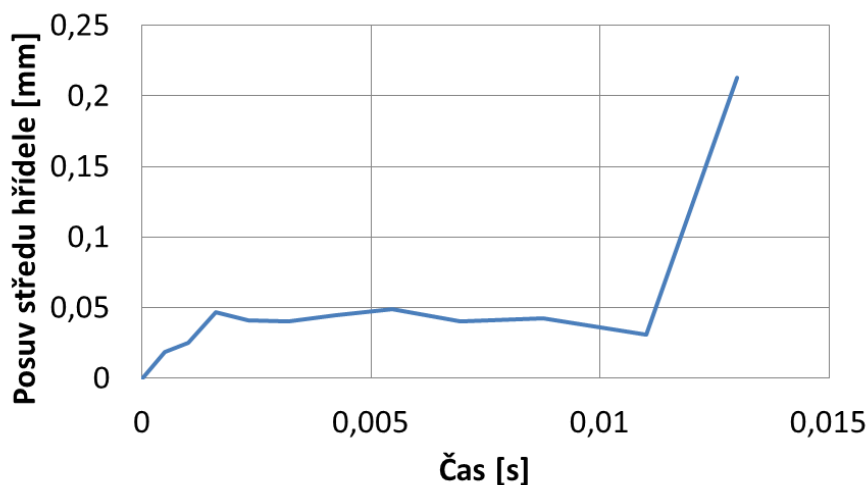
Obr. 5-19 Numerický model soukolí včetně hřídele s plechy a vrtulemi [mm]

Numerická simulace ukázala správnou funkčnost ozubeného převodu, kdy je vidět rovnoměrné posunutí po obvodech rotujících těles, **Obr. 5-20**. Další výsledkem tohoto modelu je ukázka deformace hřídele rotoru **Obr. 5-22** a kombinované namáhání v hřídeli a pastorku způsobené nalisováním a momentem.



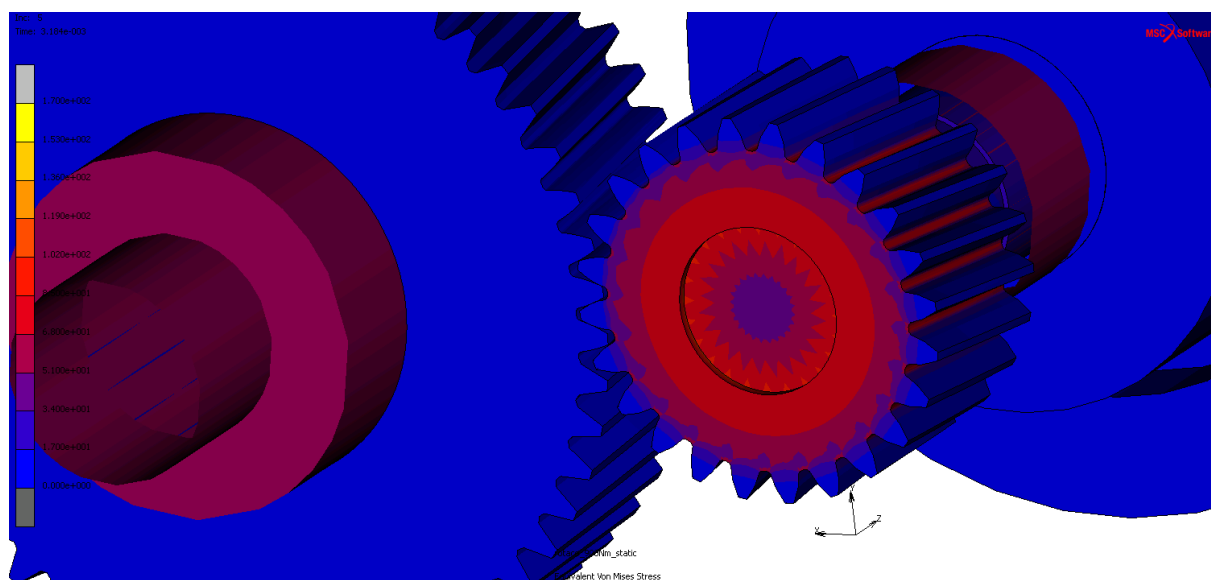
Obr. 5-20 Posuvy při rotaci těles

Lze porovnat posuv volného konce hřídele mezi analytickým (max. 0.178mm) a numerickým výpočtem (max. 0.22mm - **Obr. 5-21**). Označení středu je vidět **Obr. 5-20** červenou šipkou.

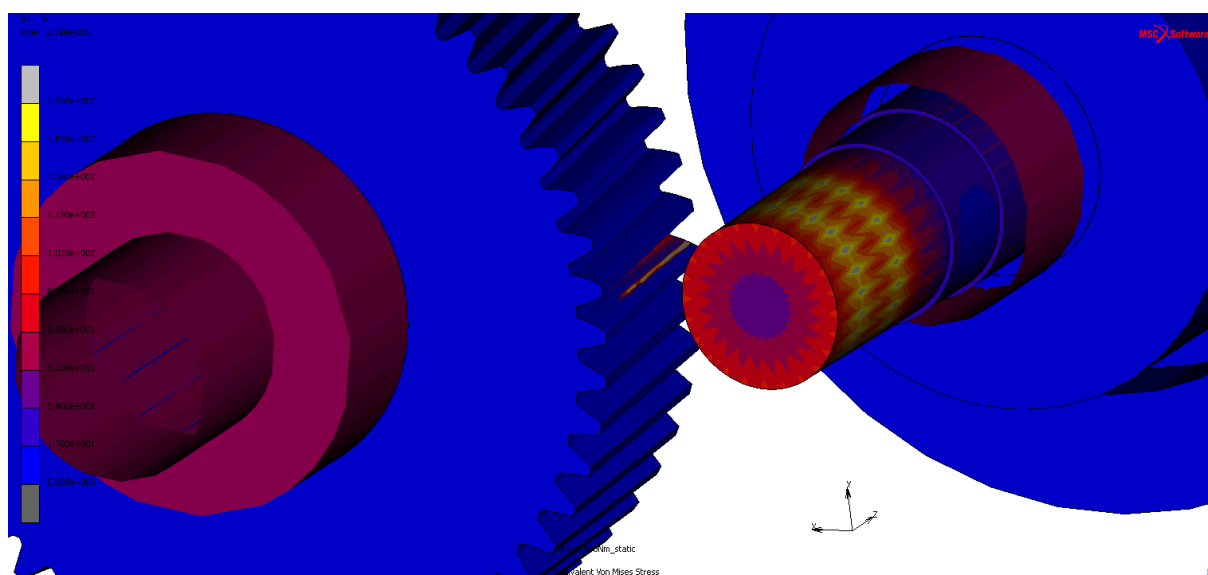


Obr. 5-21 Posuv středu hřídele na volném konci

Na **Obr. 5-22** je vidět vliv nalisování pastorku a toto předpětí působí jako složka do celkového namáhání. Na dalším obrázku (**Obr. 5-23**) je vidět, že napětí působící v kontaktu není rovnoměrné a zvýšené hodnoty vznikají na straně u uložení. Vznik nedokonalého kontaktu je způsoben poddajností hřídele a ozubeného kola, protože uložení v ložiskách je nekonečně tuhé. Visuálně zobrazený nedokonalý kontakt, který je výsledkem simulace, koresponduje s důsledky namáhání pastorku v reálném provozu, viz **Obr. 4-6**. Navíc toto namáhání vzniká již při provozních hodnotách 900Nm. Nerovnoměrné rozložení napětí v nalisování je způsobenou hrubou sítí na hřídeli. Cílem numerické simulace není sledovat vliv nalisování, ale zkratového momentu a proto byla použita tato hrubší síť.

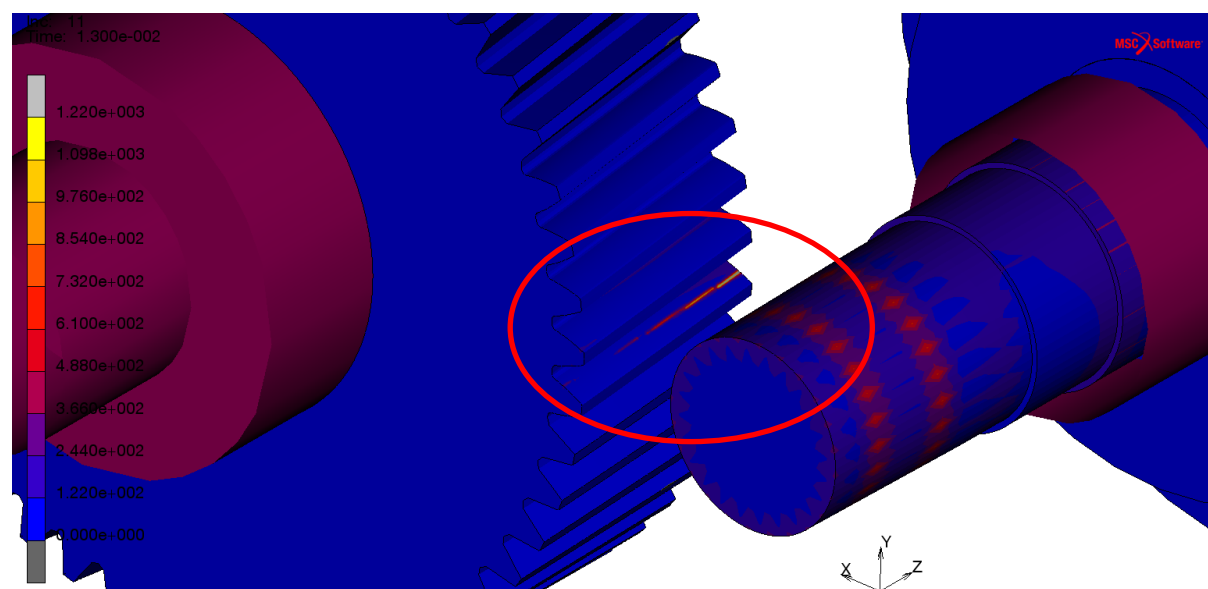


Obr. 5-22 Rozložení redukované napětí v pastorku v MPa v čase 0,003s

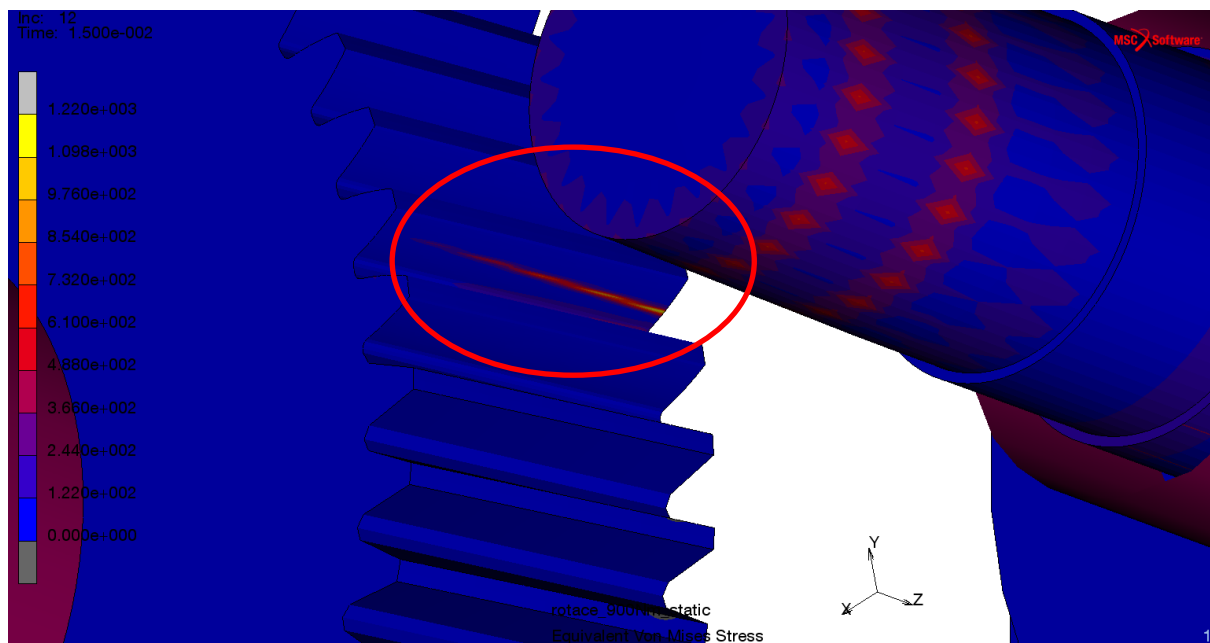


Obr. 5-23 Rozložení redukované napětí v ozubení v MPa v čase 0,003s

V dalších časových okamžicích dochází ke stejnému rozložení napětí, ale ho vyšší hodnotách, **Obr. 5-24**, **Obr. 5-25**. Navíc dochází ke zmenšení kontaktu mezi ozubenými koly, protože s rostoucím momentem (**Obr. 5-11**) roste deformace hřídele. Na následujících obrázcích dochází k maximálnímu napětí přes 1220MPa v místě lokálního dotyku ozubení. Tato lokální přetížení na boku zubu s velkou pravděpodobností vedou k inicializaci pittingu. Současně dochází k ohybu zubu a tím i ke zvýšenému napětí. Opět toto zvýšené napětí s velkou pravděpodobností bude iniciátorem trhlin a následně dojde k vyštípnutí zubů, jako bylo zdokumentováno v metalografické analýze.



Obr. 5-24 Rozložení redukované napětí v ozubení v MPa v čase 0,010s

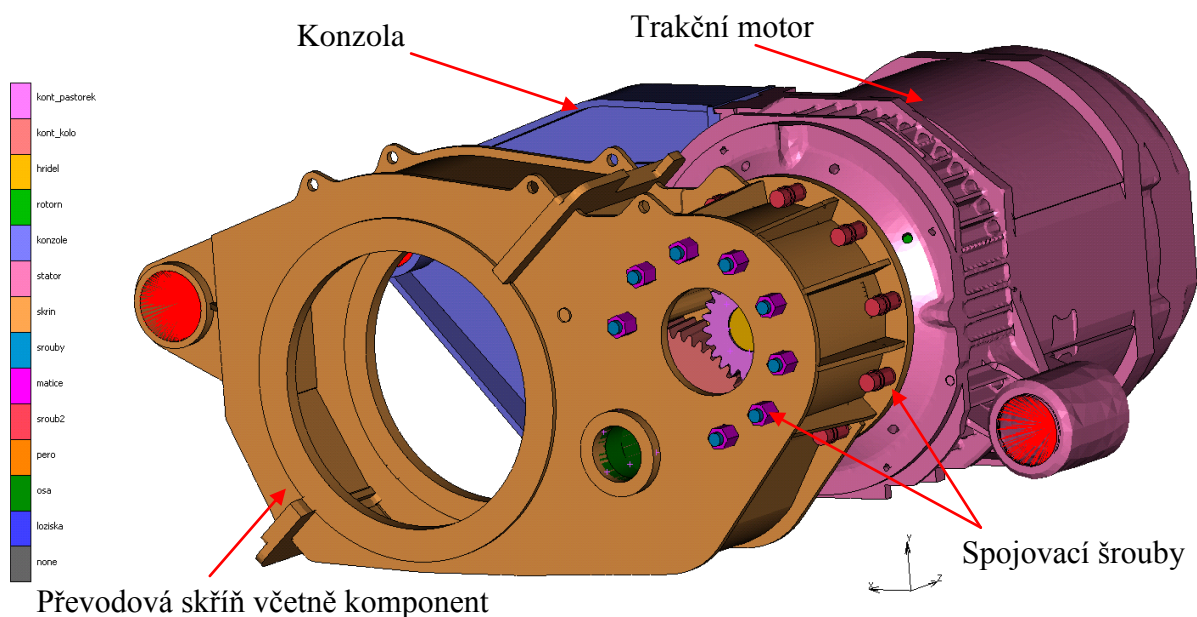


Obr. 5-25 Rozložení redukované napětí v ozubení v MPa v čase 0,012s

Vliv poddajnosti se z násobí při uvažování skříně převodovky a spojení mezi skříní převodovky a statorom asynchronního motoru. Protože při poddajném spojení šrouby skříně převodovky a statoru asynchronního motoru dochází již dochází k malým deformacím od vlastní hmotnosti, **Obr. 5-18**.

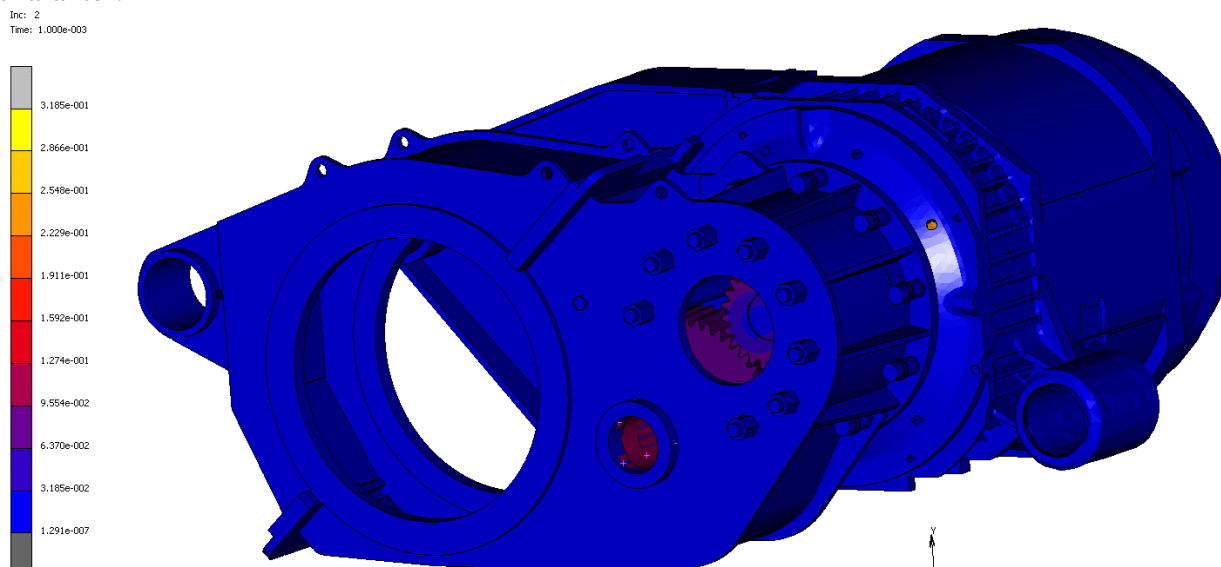
5.6. Celkové namáhání soustavy pohonu

Posledním stupněm vývoje numerického modelu bylo poskládání jednotlivých modelů do jednoho. Tento kompletní model se skládá z předchozího modelu soukolí s rotorem (ozubené kolo, pastorek, hřídel, rotorové plechy a zjednodušené vrtule) a statoru, převodové skříně, konzole a spojovacích šroubů, **Obr. 5-26**. Kompletní model popisuje celkové chování konstrukce při působení zkratového momentu. Zatěžující účinek byl použit jako v předchozím případě podle **Obr. 5-11** a výsledkem numerické simulace byla odezva konstrukce na zatížení.

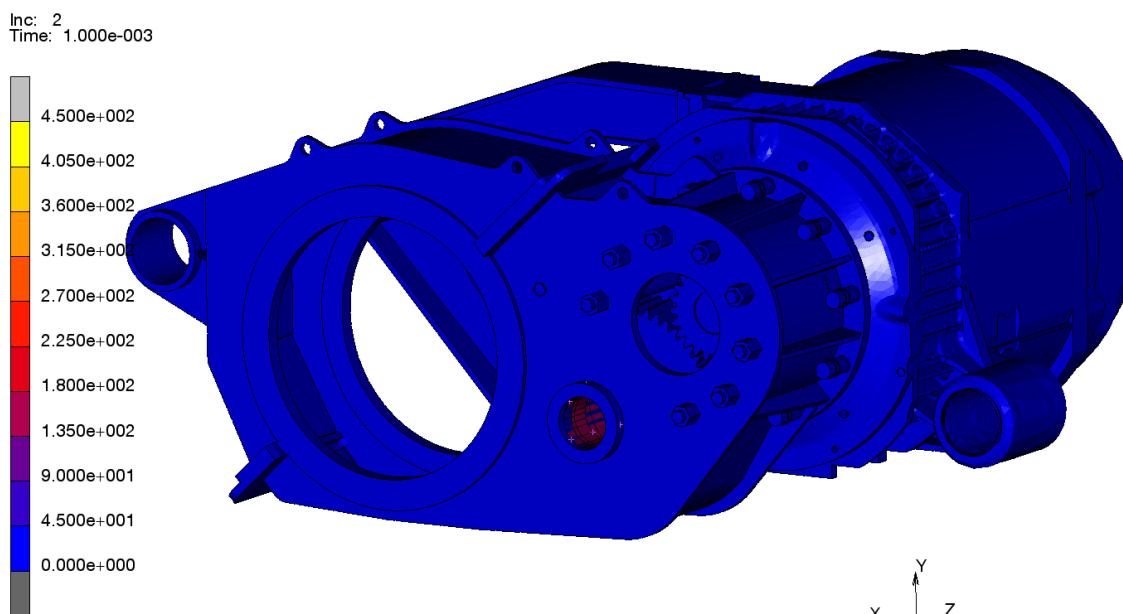


Obr. 5-26 Kompletní výpočetní model

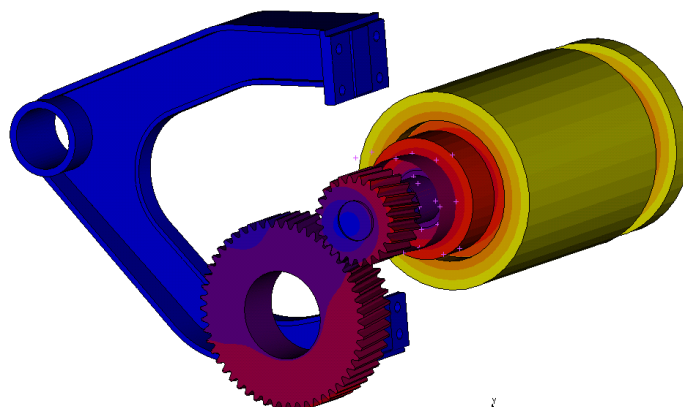
Již na první pohled je vidět (**Obr. 5-27**), že dochází k deformaci hřídele na volném konci (**Obr. 5-29**) celkové rozložení posuvů není rovnoměrné jako u statorových plechů mezi ložisky. Proto již při provozním namáhání nominálním momentem 900Nm dochází k deformaci volného konce hřídele. Tyto problémy mají za následek např.: pitting na boku zubu, který vzniká nerovnoměrným záběrem jak již bylo několikrát zmiňováno únavový charakter.



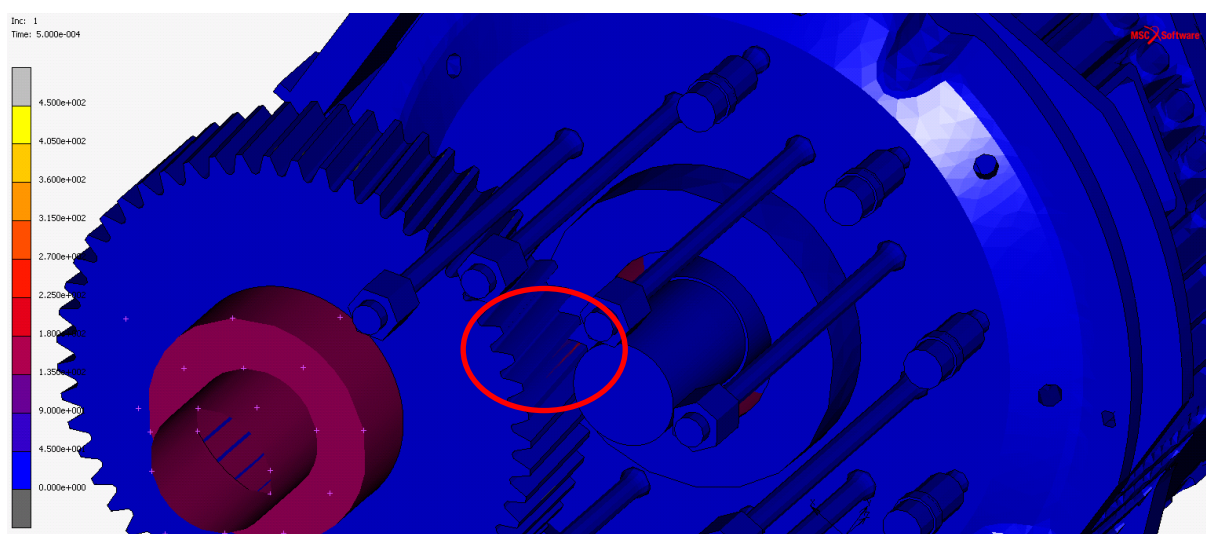
Obr. 5-27 Celkový pohled a posuvy rotačních částí (čas 0,001s)



Obr. 5-28 Rozložení redukované napětí v ozubení v MPa v čase 0,001s



Obr. 5-29 Posuvy rotačních částí (čas 0,001s)

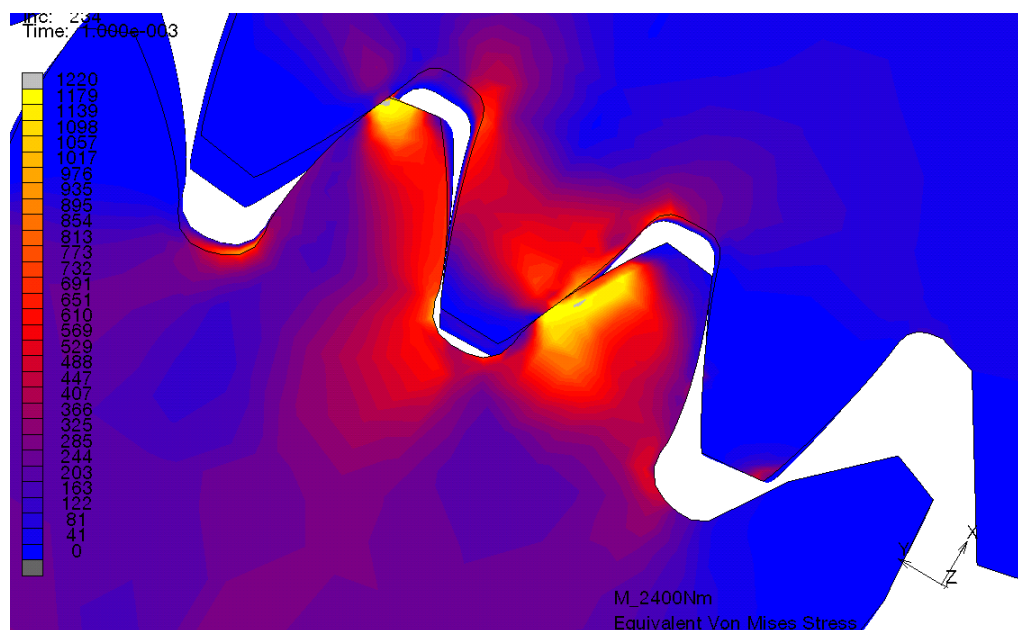


Obr. 5-30 Rozložení redukované napětí v ozubení v MPa v čase 0,001s

Z detailu na Obr. 5-30 je opět vidět nedokonalý záběr při působení momentu díky poddajnosti celé soustavy.

5.7. Posouzení únavy a vznik trhliny

Pro posouzení únavy a případný vznik trhliny byl zvolen okamžik, kdy jeden zub je v plném záběru a druhý do něho vstupuje (Obr. 5-31). To znamená, že zub vstupující do záběru je maximálně ohybově namáhán a tím dochází ke zvýšenému namáhání v patě zubu. Odolnost materiálu proti iniciaci porušení se hodnotí v oblasti s převážně elastickým chováním pomocí hodnoty K_{IC} , která se stanovuje měřením na vzorcích opatřených vrubem. Současně je možno měřit i postup trhliny a stanovit tak parametry Paris Erdoganova zákona. Tato měření vzhledem k její finanční náročnosti nebyla v rámci této práce provedena.



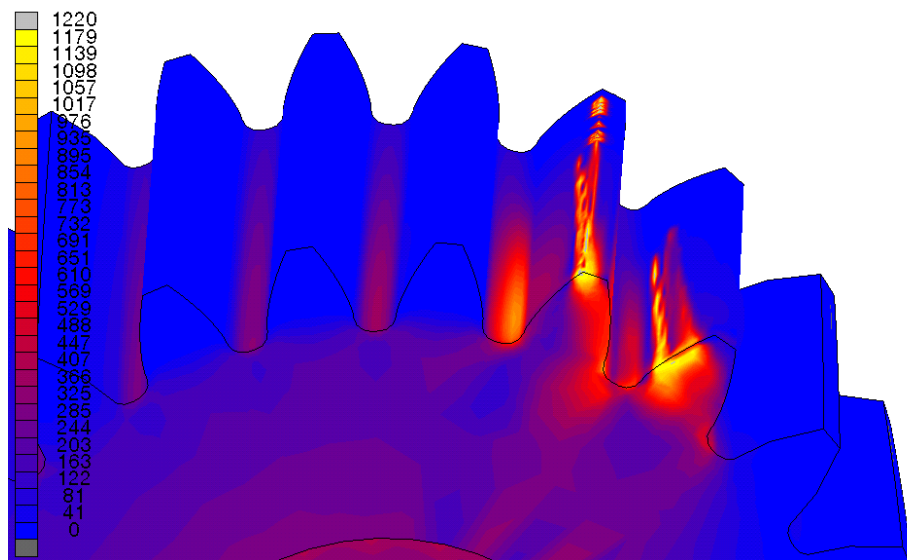
Obr. 5-31 Rozložení redukované napětí v ozubení v MPa

Protože se jedná o ozubená kola se šroubově zakřivenými zuby dochází ke kontaktu mezi koly v linii, která klesá od hlavy zubu po patu zubu. Dále je nutné uvést, že byl zvolen stav, kdy dochází k záběru zubu ze strany trakčního motoru (ze strany uložení hřídele). Opět je vidět z rozložení kontaktu v ozubení poddajnost hřídele a tím i k nedokonalému kontaktu mezi koly po celé délce ozubení (Obr. 5-32).



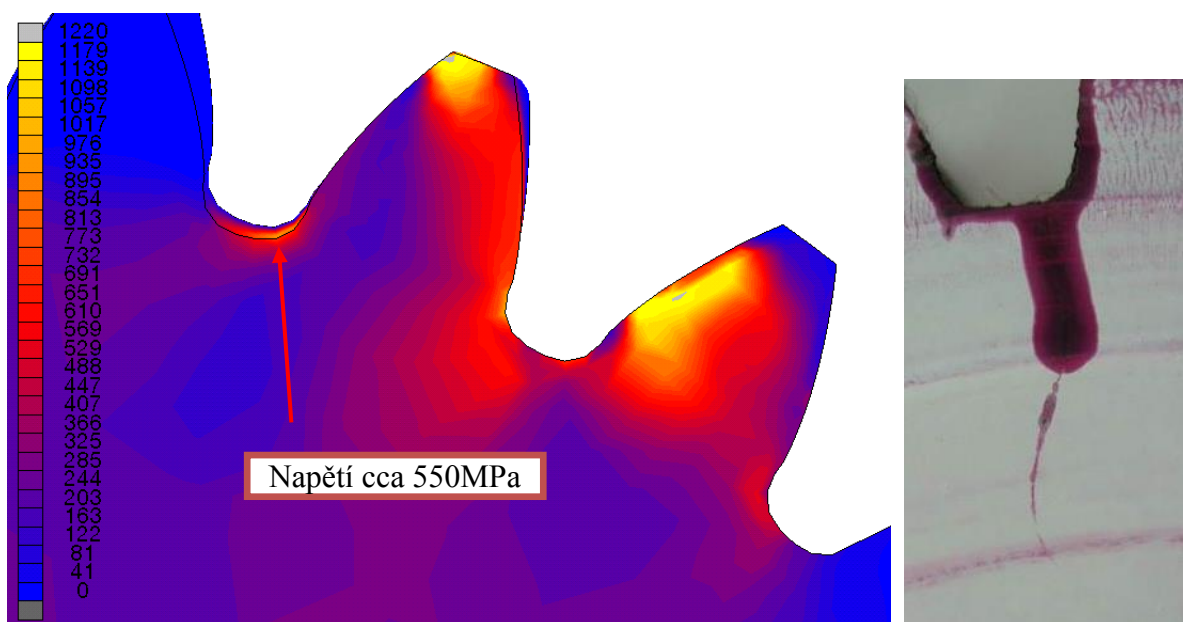
Obr. 5-32 Rozložení kontaktu mezi koly

Tomuto nedokonalému kontaktu koresponduje rozložení redukovaného napětí na následujícím obrázku **Obr. 5-33**, kde je vidět velké povrchové napětí a také zvýšení napětí v patě zubu. I když povrch ozubení je cementován a tím je povrchová vrstva zubu odolnější proti otěru, dochází vlivem nerovnoměrnému zatěžování k lokálnímu zvýšení povrchových napětí a tím ke vzniku pittingu, což bylo dokázáno v metalografické analýze.



Obr. 5-33 Rozložení redukované napětí v ozubení v MPa

Díky zvýšeným napětím, která přesahují smluvní mez trvalé únavy cca 630MPa, která byla vyhodnocena na základě grafu na **Obr. 4-20**, bude dále posuzováno šíření trhliny. Na porovnání rozložení napětí v patě zubu a výsledku z kapilární zkoušky (**Obr. 5-34**) je vidět koncentraci napětí v oblasti vzniku a šíření trhliny. Po dosazení do rovnice 4.1.3 napětí 550MPa a uvažování velikosti trhliny 0,01m dojde k šíření trhliny v materiálu, protože bude překročena lomová houževnatost $K_{IC} = 78\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ oceli 17CrNiMo6.



Obr. 5-34 Porovnání rozložení napětí a šíření trhliny v pastorku

5.8. Zhodnocení vlivu momentu na mechanickou simulaci

Pomocí numerické simulace byly ověřeny závěry z materiálových analýz, které potvrzují nerovnoměrné namáhání ozubení při provozních a extrémních podmínkách. Dále numerická simulace prokázala, že dochází k vychýlení hřídele, což způsobuje extrémní namáhání ozubení a po určitém čase může docházet k jeho únavovému poškození, které vychází z únavové křivky. Na vytvořeném modelu by mohly být simulovány a další průběhy zkratového momentu, ale výsledek numerických simulací by došly ke stejným závěrům.

Toto konstrukční řešení je vhodné pro moderní uspořádání individuálního pohonu. Pouze velké poddajnost hřídele způsobuje nerovnoměrné namáhání ozubení. A tím se zvyšuje jeho náchylnost na vznik poškození. Při současné koncepci převodovky nelze jednoduše navrhnout konstrukční změnu, protože hřídel na nichž je pastorek nalisován je součástí trakčního motoru.

Z technické praxe je známo, že byla provedena výrobce modifikace tloušťky zubu po jeho délce, ale při poddajnosti hřídele se toto řešení nejvíce jeví jako vhodné.

Vzhledem k tomu, že nebylo provedeno měření Paris Erdoganova zákona lze pouze konstatovat, že hodnota K_I dosahuje velikosti odporu materiálu proti nestabilnímu šíření trhliny K_{IC} a může tedy dojít k jejímu šíření, což potvrzují závěry v metalografické analýze.

6. Celkové shrnutí defektů při zkratovém momentu

Cílem práce bylo identifikovat defekty, vzniklé zkratovým momentem na mechanické části. Díky spolupráci s výrobcem byly poskytnuty potřebné podklady pro řešení a vzniklé defekty bylo díky dodání poškozeným dílům snadné identifikovat. V předkládané práci jsou spíše provedeny analýzy, které kontrolují navržené mechanické části konstrukce a charakterizují důvody proč dochází k jejich poškození. Výsledky analýz budou zjednodušeně popsány a budou předloženy v krátkém shrnutí.

1) Velikost zkratového momentu

- obecně byly představeny různé přístupy zjištění maximální velikosti zkratového momentu, navíc neoficiální informace uvádějí násobky nominálních hodnot a toto tvrzení bylo potvrzeno jak teoretickými výpočty, tak reálným měření z diagnostického měření
- obecně konstrukční praxe uvažuje s koeficientu bezpečnosti 2-3, který vychází meze kluzu materiálu konstrukce
- pokud bude zkratový moment několikrát vyšší než nominální hodnoty dochází k deformacím jednotlivých částí soustavy pohonu a lokálnímu zvyšování napětí

2) Materiálová analýza pastorku

- díky dodání poškozeného pastorku mohly být provedeny standardní metalografické analýzy
- bylo provedeno měření tvrdosti na boku zubu a v cementační vrstvě a naměřené hodnoty odpovídaly předepsaným hodnotám na výkrese pastorku
- byla vyhodnocena mikrostruktura, kde v jádře byl popuštěný martenzit a v cementační vrstvě byla martenzitická struktura
- byla provedena kapilární zkouška, která odhalila trhliny v patě každého zubu na straně blíže k uložení
- navíc na dodaném pastorku byl vidět pitting, který signalizoval nerovnoměrné namáhání ozubení

Předchozí dva body popisovaly velikost zkratového momentu a jeho důsledky na dodaném pastorku. Pro komplexní kontrolu byly provedeny pevnostní analýzy pomocí analytických vzorců a následně bylo provedeno zpřesnění výsledků pomocí numerické simulace, která sloužila nejen jako popis rozložení posunutí a napětí v komponentech pohonu.

3) Konstrukční návrh pastorku

- pastorek byl kontrolován na namáhání od nalisování, protože docházelo ke spadávání pastorku z hřídele, po ověření lze konstatovat, že v pastorku po nalisování vzniká předpětí 78MPa v patě zubu kde byly detekovány trhliny
- dále byla provedena kontrola ozubení, kdy při namáhání vzniká v kontaktu normálové napětí 220MPa při dokonalém kontaktu mezi koly

4) Konstrukční návrh hřídele

- hřídel asynchronního motoru byla pevnostně kontrolována při zatížení nominálními hodnotami momentu a zatížení zkratovým momentem, při nominálních hodnotách došlo k minimální deformaci, ale při působení zkratového momentu deformace volného konce cca 0,2mm není zanedbatelná

- vlivem zkratového momentu dochází k deformaci hřídele, což způsobuje špatný záběr ozubených kol

5) Konstrukční návrh skříně převodovky a její spojení

- při zatížení od nominálních hodnot momentu dochází ke zvýšenému napětí ve šroubech v oblasti uchycení v trakčním motoru na přechodu mezi závitem a kulovou plochou
- eliminovat vliv poddajného spojení na uložení pastorku na volném konci hřídele trakčního motoru
- stávající možnost natočení skříně převodovky vůči statoru umožňuje extrémní namáhání šroubů a následně k jejich destrukci

7. Splnění cílů

Na počátku práce jsem stanovil hlavní cíle.

1) Provést rozbor současného stavu elektrických pohonů

- v kapitole 1 byly představeny individuální pohony dvojkolí, které jsou běžné pro železniční vozidla
- u každého typu pohonu jsou uvedeny výhody a nevýhody a schéma uspořádání pohonu v podvozku s popisem

2) Popis elektrické jednotky 471

- na základě dostupných informací byla v kapitole 2 představena elektrická jednotka na které byly provedeny analýzy a sledován vliv zkratového momentu

3) Analýza zkratového momentu a možnosti jeho negativního působení na mechanické části pohonu

- v kapitole 3 byly představeny možné způsoby řešení jak vypočítat průběh zkratového momentu, které vycházely z návrhu vlastního řešení, výpočtů zadavatele a nebo diagnostického systému kolejového vozidla

4) Analýza poškození součástí vzniklým zkratovým momentem

- díky dostatečných podkladům, byly provedeny v kapitole 4 metalografické analýzy na poškozeném pastorku
- a také v kapitole 4 byly provedeny prvotní pevnostní analýzy, které stanovily trendy v namáhání jednotlivých komponent
- byla provedena úvaha o vzniku a šíření trhliny

5) Definovat model pro detekci poškození mechanické části pohonu

- na základě prvotních analýz byl v kapitole 5 vytvořen MKP model popisující kriticky namáhané součásti pohonu
- metodou konečných prvků lze popsat chování geometricky složitých těles

6) Provést analýzu při působení zkratového momentu

- dále v 5 kapitole byly provedeny a vyhodnoceny numerické simulace od elementárního modelu popisující kontakt mezi segmenty ozubených kol, až po komplexní model popisující trakční motor s převodkou včetně prvního převodového stupně

7) Celkové shrnutí defektů při zkratovém momentu

- v kapitole 6 byly slovně zhodnoceny defekty u řešených součástí pohonu

8) Splnění cílů

- v kapitole 7 je stručný popis naplnění definovaných cílů

9) Shrnout a zobecnit poznatky získané z provedených rozborů

- v kapitolách 8, 9 a 10 byl zhodnocen přínos práce pro praxi a popsány možnosti zlepšení současné konstrukce, které vedly ke snížení namáhání zkratovým momentem

8. Předpokládané přínosy práce

- poukázáno na vznikající problémy v oblasti zkratových jevů, které se historicky ukázaly jako nezanedbatelné
- představeny možné způsoby výpočtu zkratového momentu pomocí matematického modelu
- vyhodnocení průběhů zkratového momentu z diagnostického systému elektrické jednotky
- upravení matematického modelu popisující asynchronní motor s kotvou na krátko se dvěma satorovými vinutími zapojených do hvězdy pro řešení v programu MATLAB
- vytvořený matematický model pohonu pomocí diferenciálních rovnic, kterými lze řešit pohon dvojkolí z hlediska elektrické a mechanické části
- provedena metalografická analýza poškozeného pastorku (hodnocení mikrostruktury, měření tvrdosti, hodnocení lomové plochy a detekování trhlin pomocí kapilární zkoušky)
- provedení pevnostních výpočtů pomocí analytických a numerických výpočtů
- sestaven numerický model pro řešení zkratového momentu individuálního pohonu dvojkolí u elektrické jednotky 471
- provedení a vyhodnocení numerické simulace popisující chování jednotlivých komponent pohonu od zatížení zkratového momentu ve vzduchové mezeře trakčního motoru
- popsání zlepšení v konstrukci a eliminaci zkratového momentu

9. Doporučení pro praxi

Z přínosů disertační práce lze vyvodit některé konkrétní závěry, které lze aplikovat do konstrukční praxe.

Doporučení pro návrhy pohonu

Pohon dvojkolí dutým kloubovým hřídelem, použitý na 471, je užíván obvykle pro vysoké rychlosti. Mohl zde být použit jiný typ pohonu, například závěskový se spojkou mezi motorem a převodovkou, uvedený v kapitole 1. Pokud bude zachován tento typ pohonu bylo by vhodné změnit uložení pastorku, aby docházelo k trvalému záběru ozubených kol, např.: udělat spojení pastorku s trakčním motorem přes spojkou a vytvořit pastorku vlastní uložení dvěma radiálně axiálními ložisky. Navíc obecně konstrukční praxe uvažuje maximální namáhání s bezpečnostním koeficientem 2 -3 v porovnání s mezí kluzu materiálu produktu, pokud ale dochází k zkratovým momentům, které jsou několikrát vyšší než nominální hodnota, nelze použít standardní konstrukční přístup při návrhu pohonu. Pro tyto extrémní případy je třeba uvažovat vyšší koeficient bezpečnosti, což způsobuje větší setrvačné hmoty, a nebo použít například pojistnou spojkou

Bylo dokázáno, že technologické zpracování pastorku odpovídá předepsaným požadavkům ve výkresové dokumentaci, ale při hodnocení lomové plochy bylo poukázáno na únavový charakter (**Obr. 4-10**), který vznikl díky poddajnosti volného konce hřídele (**Obr. 5-21**) a v dalším důsledku vznikl nedokonalý kontakt mezi ozubenými koly a k jednostrannému namáhání ozubení na straně u ložení v trakčním motoru.

Všechna uvedená tvrzení o chování konstrukce pohonu byla dokázána v kapitole 5, kde z výsledků numerické simulace jsou vidět časové průběhy a rozložení napětí v ozubení a dalších namáhaných dílech.

Z popsanych důvodů je nutné do budoucna doporučit při konstruování nových pohonů využívat virtuálního modelování pro zlepšení únosnosti jednotlivých komponent a dimenzovat díly nejenom na nominální hodnoty, ale i prověřit chování konstrukce při zatížení extrémní hodnotami zkratového momentu, který podle neoficiálních informací může být 6-11x větší oproti nominálním hodnotám.

10. Závěr

Průběh zkratového momentu, jak bylo předkládanými fakty dokázáno, není zanedbatelný a jeho účinky vedou obvykle k destrukci nejslabšího článku pohonu. Na základě materiálových a pevnostních analýz bylo dokázáno, že při působení zkratového momentu dochází k překročení pevnostních a deformačních parametrů některých dílů, i když je díl vyroben podle technologického předpisu uvedeného na výkresové dokumentaci, což bylo dokázáno materiálovými analýzami, může docházet k destrukci.

Konkrétně v práci byly představeny různé přístupy k řešení zkratového momentu, které byly vytvořeny podle konkrétních požadavků. Nejprve byla realizována původní myšlenka, popsána v rigorózní práci, spojení elektrické a mechanické části pohonu, které byly maticově popsány pomocí matematických vztahů a následně řešeny numericky v prostředí softwaru MATLAB. Cílem tohoto řešení bylo popsat chování celé soustavy pohonu a odezvu na zkratový moment. Pro elektrickou část byly upraveny odvozené rovnice pro asynchronní motor s dvojitou hvězdou. Funkčnost modelu byla ověřena porovnáním s obecně známým modelem asynchronního motoru s jednoduchou hvězdou, ale s dvojnásobnými hodnotami. Při aplikaci tohoto přístupu byla mechanická část pohonu popsána pohybovými rovnicemi, kde byla uvažována absolutně tuhá tělesa s poddajnými vazbami, a kontakt kola s kolejnicí byl popsán Kalkerovými rovnicemi.

Při dalším řešení, docházelo k zpřesňování zadání a díky spolupráci s výrobcem byl dodán poškozený pastorek, na kterém byly provedeny materiálové analýzy, které dokázaly dodržení výrobního postupu podle výkresové dokumentace. Na dodaném pastorku byly zjištěny únavový charakter lomové plochy a na základě závěrů z výzkumné zprávy, byl změněn způsob řešení. Přístup řešení dokonale tuhých těles popsáných pohybovými rovnicemi, by nepopsal chování pastorku, které vedlo k destrukci ozubení na volném konci hřídele. Proto byla vytvořena série analytických a numerických výpočtů. Cílem analytických výpočtů bylo ukázat trendy namáhání jednotlivých komponent od zkratového momentu. Navíc byly od výrobce dodány časové průběhy zkratového momentu z diagnostického zařízení jednotky, které byly následně používány jako zátěžové spektrum. Numerické simulace zpřesnily výsledky z analytických výpočtů a díky metodě konečných prvků byly jednotlivé komponenty pohonu dokonale geometricky popsány. Velké úsilí bylo věnováno simulaci kontaktu mezi ozubenými koly, které muselo popsat korektně kontakt mezi pastorkem a spoluzabírajícím kolem.

Při řešení bylo zjištěno, že při zvýšených hodnotách momentu dochází k vychýlení volného konce hřídele trakčního motoru a tím i nedokonalému styku mezi ozubenými koly, což koresponduje s realitou, protože po provedení kapilární zkoušky byly detekovány trhliny v patách ozubení na straně u uložení. Dále dochází k zvýšenému namáhání spojovacích šroubů, který bylo již v historii věnováno zvýšené pozornosti, protože docházelo k praskání, buď v oblasti uchycení nebo na druhé straně s maticí. Zásadní doporučení pro konstrukci pohonu s elektrickým trakčním motorem je, uvažování hodnot zkratového momentu 6-11x větší než jsou nominální hodnoty a konstrukci přizpůsobit těmto extrémním účinkům.

11. Literatura

- [1] Brauer M., Germishuizen J., Jöckel A., Körner O., *Dynamic Short Circuits of Traction Drives – Comparison of Induction Motors with PM Synchronous Motors*
- [2] Danzer J., *Elektrická trakce 2*, Plzeň. 2000
- [3] Dehner E., Weber F., *Experience with Large, High-Speed Load Gears*, Gear Technologie, July 2007, p.42-53. ISSN: 0743-6858
- [4] Dostal V., Heller P., *Kolejová vozidla*, V Plzni : Západočeská univerzita 2007
- [5] Dvořák P., *Předběžné hodnoty zkratového momentu ve vzduchové mezeře*, 2007, výzkumná zpráva EdP0515b
- [6] Hájek E., *Pružnost a pevnost I*, ČVUT Praha 1981
- [7] Heller P., Dostal V., *Kolejová vozidla II*, V Plzni : Západočeská univerzita 2009
- [8] Heller P., Dostal V., *Kolejová vozidla III*, V Plzni : Západočeská univerzita 2011, ISBN 978-80-261-0028-7
- [9] Hlaváč Z., *Dynamika pro kombinované studium*, V Plzni: ZČU Plzeň, 2004
- [10] Javůrek J., *Regulace moderních elektrických pohonů*
- [11] Kalinčák D., Gerlici J., Kukuča P., Lálaj, J., Lack T., Polách O., Sága M., *Dopravný prostriedok výpočtové metody*, Žilina, 2005
- [12] Kalker J.J., **Wheel-rail rolling contact theory, 1991**
- [13] Kletečka J., Fořt P., *Technické kreslení*
- [14] Krátký J., Krónerová E., Hosnedl S., *Obecné strojní části 2*, V Plzni : ZČU, 2011. ISBN 978-80-261-0066-9.
- [15] Křepela J., Hruška J., *Vývoj metodiky výpočtu odhadu životnosti hřídelí převodovek*, User meeting MSC.Software, Brno, 2015
- [16] Lata M., *Konstrukce kolejových vozidel II*, Pardubice 2004
- [17] Novák J., *Elektromechanické systémy v dopravě a ve strojírenství*, ČVUT Praha 2004
- [18] Roubíček O., *Elektrické motory a pohony*, Praha 2004
- [19] Růžička M., Havlíček V., *Výpočet strojních částí na únavu za normálních a zvýšených teplot I*, Praha, 1988
- [20] Slavík J., Stejskal V., Zeman V., *Základy dynamiky strojů*, ČVUT 1997
- [21] Socie F. Darrell, *Static Strength and Fracture Stress Concentration Factors*, 2013
- [22] Ševčík M., *Vliv volného povrchu tělesa a gradientní změny materiálových vlastností na chování trhliny*, doktorská práce, VÚT Brno, 2012
- [23] Švígler J., *podklady k předmětu KME/MDP*
- [24] Švígler J., *Modelování kontaktu kola s kolejnici*, V Plzni: ZČU 2000
- [25] Urbánek M., *Průběh zkratového momentu mechanickou soustavou pohonu dvojkolí*, rigorózní práce Plzeň 2000
- [26] Urbánek M., *Průběh zkratového momentu mechanickou soustavou pohonu dvojkolí*. 2008. výzkumná zpráva H9-03/2008
- [27] Urbánek M., *Průběh zkratového momentu mechanickou soustavou pohonu dvojkolí*. 2009. H9-03/2009
- [28] Urbánek M., *Zkratový moment v mechanické soustavě pohonu dvojkolí*. 2010. výzkumná zpráva F9-01/2010.
- [29] Urbánek M., *Metalografická analýza poškozeného pastorku*. 2010. výzkumná zpráva F9-02/2010.
- [30] Urbánek M., *Vliv zkratového momentu na svěrný spoj a ozubení pastorku*. 2011. výzkumná zpráva F9-01/2011.
- [31] Valenta P., *Trakční pohon s asynchronním motorem napájený dvěma napěťovými střídači*, disertační práce, Plzeň, 1998

- [32] **Vijay K. G., Rao V.**, *Dynamics of railway vehicle system*, London: Academic publisher, 1984
- [33] **Vodrášek F.**, *Výkonová elektronika-1.svazek*, Plzeň: ZČU Plzeň. 1994
- [34] **Wiedemann E., Kellenberger W.**, *Konstrukce elektrických strojů*, Praha
- [35] **Zahradník J., Piskač L., Pfeifer V., Formánek J.**, *Elektrická výzbroj obráběcích strojů*, V Plzni: ZČU 2006
- [36] **Zelenka J., Izer J.**, Pardubice : Dopravní fakulta J. Pernera
- [37] **Zeman K., Bartoš V.**, *Matematický model trakčního pohonu- asynchronní motor napájený 2 napěťovými střídači*, výzkumná zpráva, V Plzni: ZČU 1996
- [38] **Zeman K., Peroutka Z., Janda M.**, *Automatická regulace pohonů s asynchronními motory*, V Plzni: ZČU 2004
- [39] **Zeman V., Hlaváč Z., Byrtus M., Švígler J.**, *Modelování torzních kmitů pohonu kolejového vozidla dutým hřídelem*, Výzkumná zpráva VCKV, Plzeň, 2005
- [40] ČSN 01 4686 - Výpočet ozubených kol – technická norma
- [41] ČSN EN 60909-0 (33 3022):2002, Zkratové proudy v trojfázových střídavých soustavách – Část 0: Výpočet proudů
- [42] <http://www.atlaslokomotiv.cz>
- [43] <http://www.vagonka.cz>
- [44] http://rail.czechian.net/CZ_SK_FR/CZ_RAIL/studenka.htm
- [45] http://webs.zcu.cz/fel/kev/ep/St_texty/
- [46] <http://www.metalravne.com/selector/steels/ct781.html>
- [47] <http://www.scribd.com/doc/6611217/cms206>
- [48] <http://prirucka.bolzano.cz/cz/technicka-podpora/techprirI/tycovaocel/ocelikcementovani/18CrNiMo7-6/>
- [49] <http://www.tprom.cz/tabulky/tabulka4.html>
- [50] http://dl.uk.fme.vutbr.cz/zobraz_soubor.php?id=664
- [51] <http://www.ozubeni.cz/ozubeni/vlastnosti.html>
- [52] http://dl.uk.fme.vutbr.cz/zobraz_soubor.php?id=24
- [53] http://www.kks.zcu.cz/pro-studenty-KKS/Studijni_podklady/PRIRUCKA/CADIS/MDOC/A/A3/A3_1/a3_1.htm
- [54] <http://www.scribd.com/doc/128256097/Air-Hardening-Steel-BG>
- [55] http://www.outech-havirov.cz/skola/files/knihovna_eltech/esp/asynch_motor.pdf
- [56] http://www.powerwiki.cz/attach/PrilohyVyuka/Vok_%20zkrat%20prednaskaFEL.pdf
- [57] http://en.wikipedia.org/wiki/British_Rail_Class_91
- [58] <http://cs.wikipedia.org/wiki/Zkrat>
- [59] <http://www.odbornecasopisy.cz/elektro/casopis/tema/nove-normy-csn-38--13996>
- [60] http://fei1.vsb.cz/kat420/vyuka/Bakalarske_FS/priklady/priklad_AS%20motory_bc%20FS.pdf
- [61] <http://stainless.steelandtube.co.nz/wp-content/uploads/2014/06/CaseHardeningSteel18CrNiMo7.pdf>

12. Přílohy

12.1. Odvození rovnic pro směr y

Opět bylo zavedeno zjednodušení a řešení pouze 3 rovnic pro 3 neznámé, nyní ale se jednalo o rovnice 3.5.6 b), d) a f).

Prvním krokem byla provedena úprava rovnice 3.5.6 h) a dosazení do rovnice 3.5.6 f).

směr y:

$$\frac{di_{ry}}{dt} = \frac{1}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} - \frac{di_{s1y}}{dt} - \frac{di_{s2y}}{dt}$$

12.1.1

$$0 = R_r \cdot i_{ry} + L_{r\sigma} \left(\frac{1}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} - \frac{di_{s1y}}{dt} - \frac{di_{s2y}}{dt} \right) + \frac{d\psi_{hy}}{dt} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})$$

12.1.2

Dalšími úpravami (12.1.3- 12.1.6) se vytkne derivace hlavního magnetické toku (12.1.6).

$$0 = L_{r\sigma} \left(\frac{1}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} - \frac{di_{s1y}}{dt} - \frac{di_{s2y}}{dt} \right) + \frac{d\psi_{hy}}{dt} + R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})$$

12.1.3

$$0 = \frac{L_{r\sigma}}{L_h} \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} - L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} - L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{s2y}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt} + R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})$$

12.1.4

$$0 = \left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right) \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} - L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} - L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{s2y}}{dt} + R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})$$

12.1.5

$$\frac{d\psi_{hy}}{dt} = \frac{L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} + L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{s2y}}{dt} - R_r \cdot i_{ry} + \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right)}$$

12.1.6

Následně se dosadila derivace magnetického toku (12.1.6) do rovnice 3.5.6 b) a d) a byla provedena separace derivací proudů pro jednotlivá vinutí.

$$u_{s1y} = R_s \cdot i_{s1y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1y}}{dt} + L_v \frac{di_{s2y}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt}$$

$$u_{s2y} = R_s \cdot i_{s2y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2y}}{dt} + L_v \frac{di_{s1y}}{dt} + \frac{d\psi_{hy}}{dt}$$

12.1.7

$$u_{s1y} = R_s \cdot i_{s1y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1y}}{dt} + L_v \frac{di_{s2y}}{dt} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sy1}}{dt} + L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sy2}}{dt} - R_r \cdot i_{ry} + \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)}$$

$$u_{s2y} = R_s \cdot i_{s2y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2y}}{dt} + L_v \frac{di_{s1y}}{dt} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sy1}}{dt} + L_{r\sigma} \cdot \frac{di_{sy2}}{dt} - R_r \cdot i_{ry} + \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)}$$

12.1.8

$$u_{s1y} = R_s \cdot i_{s1y} + L_{s\sigma} \frac{di_{s1y}}{dt} + L_v \frac{di_{s2y}}{dt} + \frac{L_{r\sigma}}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)} \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} + \frac{L_{r\sigma}}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)} \cdot \frac{di_{s2y}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)}$$

$$u_{s2y} = R_s \cdot i_{s2y} + L_v \frac{di_{s1y}}{dt} + L_{s\sigma} \frac{di_{s2y}}{dt} + \frac{L_{r\sigma}}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)} \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} + \frac{L_{r\sigma}}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)} \cdot \frac{di_{s2y}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1\right)}$$

12.1.9

$$u_{s1y} = R_s \cdot i_{s1y} + \left(\frac{L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} + \left(\frac{L_{r\sigma} + L_v \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \cdot \frac{di_{s2y}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{rx} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right)}$$

$$u_{s2y} = R_s \cdot i_{s2y} + \left(\frac{L_{r\sigma} + L_v \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} + \left(\frac{L_{r\sigma} + L_{s\sigma} \cdot \frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h}}{\left(\frac{L_{r\sigma} + L_h}{L_h} \right)} \right) \cdot \frac{di_{s2y}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\left(\frac{L_{r\sigma}}{L_h} + 1 \right)}$$

12.1.10

Opět se použijí konstanty α , β , γ , δ , ε podle rovnice 3.5.18.

$$u_{s1y} = R_s \cdot i_{s1y} + \alpha \cdot \frac{di_{sy1}}{dt} + \beta \cdot \frac{di_{sy2}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \Bigg| \cdot \frac{1}{\beta} \quad \text{a)}$$

$$u_{s2y} = R_s \cdot i_{s2y} + \beta \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} + \alpha \cdot \frac{di_{s2y}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \Bigg| \cdot \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \quad \text{b)}$$

12.1.11

Nyní byly rovnice 12.1.11 vynásobeny a následně sečteny.

$$\frac{u_{s1y}}{\beta} = \frac{R_s \cdot i_{s1y}}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{di_{sy1}}{dt} + \frac{di_{sy2}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \beta}$$

$$-\frac{u_{s2y}}{\alpha} = -\frac{R_s \cdot i_{s2y}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} - \frac{di_{s2y}}{dt} + \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \alpha}$$

12.1.12

$$\frac{u_{s1y}}{\beta} - \frac{u_{s2y}}{\alpha} = \frac{R_s \cdot i_{s1y}}{\beta} - \frac{R_s \cdot i_{s2y}}{\alpha} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \beta} + \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \alpha}$$

12.1.13

$$\left(\frac{\delta}{\alpha \cdot \beta} \right) \cdot \frac{di_{s1y}}{dt} = \frac{u_{s1y}}{\beta} - \frac{u_{s2y}}{\alpha} - \frac{R_s \cdot i_{s1y}}{\beta} + \frac{R_s \cdot i_{s2y}}{\alpha} + \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \beta} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \alpha} \Bigg| \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{\delta}$$

12.1.14

Po vyjádření derivace statorového proudu prvního vinutí podle času byla dosazena rovnice 12.1.15 zpět do rovnice 12.1.11 a) a vznikne rovnice .

$$\frac{di_{s1y}}{dt} = \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon}$$

12.1.15

$$\frac{u_{s1y}}{\beta} = \frac{R_s \cdot i_{s1y}}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \right) + \frac{di_{s1y}}{dt} - \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \beta}$$

12.1.16

Postupnými úpravami byla opět vyjádřena další derivace statorového proudu druhého vinutí (12.1.17 - 12.1.20).

$$\frac{di_{s2y}}{dt} = \frac{u_{s1y}}{\beta} - \frac{R_s \cdot i_{s1y}}{\beta} + \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \beta} -$$

$$- \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \right)$$

12.1.17

$$\frac{di_{s2y}}{dt} = \frac{u_{s1y}}{\beta} - \frac{R_s \cdot i_{s1y}}{\beta} + \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon \cdot \beta} - \frac{\alpha^2}{\delta \cdot \beta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\alpha^2}{\delta \cdot \beta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} -$$

$$- \frac{\alpha \cdot \gamma}{\delta \cdot \beta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon}$$

12.1.18

$$\frac{di_{s2y}}{dt} = \frac{\delta - \alpha^2}{\delta \cdot \beta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\alpha^2 - \delta}{\delta \cdot \beta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\delta - \alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon}$$

12.1.19

Opět pro zlepšení přehlednosti bude použit vztah $\delta = \alpha^2 - \beta^2$.

$$\frac{di_{s2y}}{dt} = -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon}$$

12.1.20

Odvozené derivace statorových proudů pro obě vynutí (12.1.12a 12.1.20) byly dosazeny do rovnice magnetického toku (12.1.6).

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} = & L_{r\sigma} \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \right) - R_r \cdot i_{ry} + \\ & + \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx}) + L_{r\sigma} \cdot \left(-\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

12.1.21

Dále probíhaly zjednodušení rovnice pro vyjádření derivace hlavního magnetického toku (12.1.22 - 12.1.24)

$$\varepsilon \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} = -R_r \cdot i_{ry} + \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx}) + L_{r\sigma} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\gamma}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\gamma}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \right)$$

12.1.22

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \frac{d\psi_{hy}}{dt} = & -R_r \cdot i_{ry} + \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx}) + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \left. \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \right| \cdot \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

12.1.23

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{hy}}{dt} = & -\frac{R_r \cdot i_{ry}}{\varepsilon} + \frac{\omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \\ & + L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

12.1.24

Po vyjádření konstant budou upraveny rovnice pro maticový zápis, tzn. že každá proměnná musí být v rovnici jen jednou. Úpravy byly provedeny současně pro všechny 3 rovnice.

$$\begin{aligned} \frac{di_{s1y}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \\ \frac{di_{s2y}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} \\ \frac{d\psi_{hy}}{dt} &= -\frac{R_r \cdot i_{ry}}{\varepsilon} + \frac{\omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \\ &+ L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

12.1.25

Pro zlepšení přehlednosti byl upraven poslední člen rovnice separátně (12.1.25)

$$\frac{R_r \cdot i_{ry} - \omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} = \frac{R_r \cdot i_{ry}}{\varepsilon} - \frac{\omega \cdot \psi_{hx}}{\varepsilon} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} \cdot i_{rx}}{\varepsilon} = \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{ry} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{rx} - \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \psi_{hx}$$

12.1.26

$$\begin{aligned}
 \frac{di_{s1y}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \left(\frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{ry} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{rx} - \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \psi_{hx} \right) = \\
 &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{ry} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{rx} - \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hx} \\
 \frac{di_{s2y}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \left(\frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{ry} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{rx} - \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \psi_{hx} \right) = \\
 &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{ry} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{rx} - \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hx} \\
 \frac{d\psi_{hy}}{dt} &= -\frac{R_r \cdot i_{ry}}{\varepsilon} + \frac{\omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \\
 &+ L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \left(\frac{R_r}{\varepsilon^2} \cdot i_{ry} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon^2} \cdot i_{rx} - \frac{\omega}{\varepsilon^2} \cdot \psi_{hx} \right) = -\frac{R_r \cdot i_{ry}}{\varepsilon} + \frac{\omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \\
 &- \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r}{\varepsilon^2} \cdot i_{ry} - L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon^2} \cdot i_{rx} - L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{\omega}{\varepsilon^2} \cdot \psi_{hx}
 \end{aligned}$$

12.1.27

Dále bylo provedeno dosazení statorového proudu z rovnice (3.5.3) ve tvaru $i_{rx} = \frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{sx1} - i_{sx2}$, $i_{ry} = \frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{sy1} - i_{sy2}$ do rovnice (12.1.27).

$$\begin{aligned} \frac{di_{s1y}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{s1y} - i_{s2y} \right) - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{sx1} - i_{sx2} \right) - \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hx} \\ \frac{di_{s2y}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{s1y} - i_{s2y} \right) - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{sx1} - i_{sx2} \right) - \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hx} \\ \frac{d\psi_{hy}}{dt} &= -\frac{R_r \cdot i_{ry}}{\varepsilon} + \frac{\omega(\psi_{hx} + L_{r\sigma} \cdot i_{rx})}{\varepsilon} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \\ &+ L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{R_r}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{s1y} - i_{s2y} \right) - L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{sx1} - i_{sx2} \right) - L_{r\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\delta} \cdot \frac{\omega}{\varepsilon^2} \cdot \psi_{hx} \end{aligned}$$

12.1.28

$$\begin{aligned} \frac{di_{s1y}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hy}}{L_h} - \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1y} - \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2y} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hx}}{L_h} + \\ &+ \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx1} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx2} - \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hx} = \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} - \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot R_s + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1y} + \frac{\beta \cdot \varepsilon \cdot R_s - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2y} + \\ &+ \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx1} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx2} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} \\ \frac{di_{s2x}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\beta}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha}{\delta} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hy}}{L_h} - \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1y} - \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2y} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hx}}{L_h} + \\ &+ \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx1} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx2} - \frac{\gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot \psi_{hx} = -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\beta \cdot R_s \cdot \varepsilon - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha \cdot R_s \cdot \varepsilon + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2y} + \\ &+ \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx1} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{sx2} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} - \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi_{hy}}{dt} &= -\frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{ry} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{rx} + \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \psi_{hx} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot R_s \cdot i_{s2y} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} - \\
 &- \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1y} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2y} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} - \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot \psi_{hx} = \\
 &= \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2y} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} - \\
 &- \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{ry} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{rx} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} + \frac{\omega \cdot (-2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h + \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} = \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \\
 &- \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2y} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} - \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hy}}{L_h} - i_{s1y} - i_{s2y} \right) + \\
 &+ \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\psi_{hx}}{L_h} - i_{s1x} - i_{s2x} \right) + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} + \frac{\omega \cdot (-2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h + \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} = \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \\
 &- \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1y} - \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2y} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma \cdot \omega}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} - \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hy}}{L_h} + \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{s1y} + \frac{R_r}{\varepsilon} \cdot i_{s2y} + \\
 &+ \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot \frac{\psi_{hx}}{L_h} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{s1x} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma}}{\varepsilon} \cdot i_{s2x} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} + \frac{\omega \cdot (-2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h + \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} = \\
 &= \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} + \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1y} + \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2y} + \\
 &+ \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} (2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma - \delta \cdot \varepsilon)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} + \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} (2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma - \delta \cdot \varepsilon)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r - R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} + \\
 &- \frac{\omega \cdot (2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma + 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h - \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h - L_{r\sigma} \cdot \delta \cdot \varepsilon)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx}
 \end{aligned}$$

12.1.29

Dále bylo provedeno jen zjednodušení a zavedení dalších konstant pro zjednodušení maticového zápisu v programu MATLAB.

$$\begin{aligned} \frac{di_{s1y}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1x} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2x} - \frac{\alpha \cdot \varepsilon \cdot R_s + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1y} + \frac{\beta \cdot \varepsilon \cdot R_s - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2y} - \\ &- \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} \\ \frac{di_{s2y}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1x} + \frac{\gamma \cdot \omega \cdot L_{r\sigma}}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2x} + \frac{\beta \cdot R_s \cdot \varepsilon - \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s1y} - \frac{\alpha \cdot R_s \cdot \varepsilon + \gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot i_{s2y} - \\ &- \frac{\gamma \cdot \omega \cdot (L_{r\sigma} + L_h)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \frac{\gamma \cdot R_r}{\delta \cdot \varepsilon \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} \\ \frac{d\psi_{hy}}{dt} &= \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s1y} + \frac{L_{r\sigma} \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon} \cdot u_{s2y} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} (\delta \cdot \varepsilon - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1x} - \frac{\omega \cdot L_{r\sigma} (\delta \cdot \varepsilon - 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2x} + \\ &+ \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s1y} + \frac{R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon - L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot (R_s \cdot \varepsilon + 2 \cdot R_r)}{\delta \cdot \varepsilon^2} \cdot i_{s2y} + \\ &- \frac{\omega \cdot (2 \cdot L_{r\sigma}^2 \cdot \gamma + 2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot L_h - \delta \cdot \varepsilon \cdot L_h - L_{r\sigma} \cdot \delta \cdot \varepsilon)}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hx} + \frac{2 \cdot L_{r\sigma} \cdot \gamma \cdot R_r - R_r \cdot \delta \cdot \varepsilon}{\delta \cdot \varepsilon^2 \cdot L_h} \cdot \psi_{hy} \end{aligned}$$

12.1.30

Opět byly použity konstant A, B, Γ, Δ, E, H, K, Λ, M a N (3.5.41) a rovnice se zjednoduší.

$$\begin{aligned} \frac{di_{s1y}}{dt} &= \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s1y} - \frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s2y} + \Gamma \cdot i_{s1x} + \Gamma \cdot i_{s2x} - A \cdot i_{s1y} + B \cdot i_{s2y} - E \cdot \psi_{hx} + \Delta \cdot \psi_{hy} \\ \frac{di_{s2y}}{dt} &= -\frac{\beta}{\delta} \cdot u_{s1y} + \frac{\alpha}{\delta} \cdot u_{s2y} + \Gamma \cdot i_{s1x} + \Gamma \cdot i_{s2x} + B \cdot i_{s1y} - A \cdot i_{s2y} - E \cdot \psi_{hx} + \Delta \cdot \psi_{hy} \\ \frac{d\psi_{hy}}{dt} &= H \cdot u_{s1y} + H \cdot u_{s2y} - \Lambda \cdot i_{s1x} - \Lambda \cdot i_{s2x} + K \cdot i_{s1y} + K \cdot i_{s2y} - N \cdot \psi_{hx} + M \cdot \psi_{hy} \end{aligned}$$

12.1.31

12.2. Naprogramované skripty

Uvedené skripty sloužily pro výpočet otáček (Obr. 3-24) a rychlostí (Obr. 3-25) v programu MATLAB. První skript (inte.m) byl řídicí a obsahoval počáteční stav. Druhý skript (motor.m) obsahuje parametry a vztahy popisující celý systém pohonu.

PRVNÍ SKRIPT

```
% ~~~~~  
% příklad zadání: inte;  
% ~~~~~  
  
function [time,x] = inte()  
  
delete sily.txt  
  
% počáteční podmínky integrace  
% ~~~~~  
global Tmax pe ws  
  
Tmax=1;  
time=(0:0.0003:Tmax);  
Pp=3;  
z2=24; % počet zubů pastorku  
z3=53; % počet zubů mezikolo - velké  
i23=z2/z3; % převodový poměr prvního stupně  
z4=28; % počet zubů mezikolo - malé  
z5=60; % počet zubů kola  
i45=z4/z5; % převodový poměr druhého stupně  
i25=i23*i45; % celkový převodový poměr  
  
% počáteční podmínky integrace  
% ~~~~~  
fs = 100; ws=2.0*pi*fs;  
se=0.9945; % celkový skluz  
whel=se*ws;  
pe=1/(2*pi*Pp);  
  
omega=whel*pe; %// mechanické otáčky za sekundu  
  
% počáteční podmínky integrace  
% ~~~~~  
% x =  
[isx,isy,PSIhx,PSIhy,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,x14,v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8,v9,v10,v11,v12,v13,v14]  
% x1-rotor,x2-pastorek,x3-velké kolo,x4-malé kolo, x5-velké kolo, x6-dyť hřídel, x7-levé kolo, x8-x10-náprava, x11-kolo,  
x12-skrín, x13=y, x14=fi_  
  
poc=[0 0 0 0, omega omega omega*i23 omega*i23 omega*i25 omega*i25 omega*i25 omega*i25 omega*i25 omega*i25  
omega*i25 0 0 0, 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.001 0.001];  
% pro motor s 2 dvěma statorovými vinutími  
  
tic  
[t,x] = ode45('motor',time,poc);  
toc  
  
% Konstanty pro přepočítání na reálné hodnoty  
% ~~~~~  
kp=3/2;  
Pp=3; %// počet polů parů  
Rs=0.0314; %// náhradní odpor statoru asynchronního motoru R1 v ohm  
Rr=0.02; %// náhradní odpor rotoru asynchronního motoru R21 v ohm  
Les=0.000566; %// rozptylová indukčnost statoru asynchronního motoru v H
```



```
Ler=0.000431;    %% rozptylová indukčnost rotoru asynchronního motoru v H
Lh=0.0156;      %% hlavní indukčnost asynchronního motoru v H
Ls=(Lh+Les);    %% celková indukčnost statoru asynchronního motoru
Lr=Lh+Ler;      %% celková indukčnost rotoru asynchronního motoru
Lv=0.9*Les;     %% vzájemná indukčnost Lv=3/2*lv -nahodna hodnota
```

```
% prepocet na realné hodnoty
```

```
%~~~~~
```

```
M=Pp*kp*(Lh/Lr)*(x(:,3).*x(:,2)-x(:,4).*x(:,1));
Isef=sqrt(0.5*(x(:,1).*x(:,1)+x(:,2).*x(:,2)));
Fr=sqrt(x(:,3).*x(:,3)+x(:,4).*x(:,4));
```

```
elek=[t,x,M, Isef];
save 'system-1hvezda.txt' -ascii -tabs elek;
```

```
grid on
figure(1);
plot(t,[M,Isef])
xlabel('t [s]'); legend('M [Nm]','Isef [A]');
```

```
hold on
figure(2);
plot(t,[x(:,5),x(:,6),x(:,7),x(:,8),x(:,9),x(:,10),x(:,11),x(:,12),x(:,13),x(:,14),x(:,15),x(:,16),x(:,17),x(:,18)])
xlabel('t [s]'); legend('v1','v2','v3','v4','v5','v6','v7','v8','v9','v10','v11','v12','v13','v14');
```

```
hold on
figure(3);
plot(t,[x(:,19),x(:,20),x(:,21),x(:,22),x(:,23),x(:,24),x(:,25),x(:,26),x(:,27),x(:,28),x(:,29),x(:,30),x(:,31),x(:,32)])
xlabel('t [s]'); legend('x1','x2','x3','x4','x5','x6','x7','x8','x9','x10','x11','x12','x13','x14');
```

DRUHÝ SKRIPT

```
%%// elektricky subsystem - motor MLU 4245 K/6
% jmenovitý výkon 500 kW
% jmenovité sdružené napeti 3 x 1130 V
% zatížení S1
% jmenovitý proud 2 x 155 A
% jmenovité otáčky 1989 1/min
% maximální otáčky 4120 1/min
% účinník 0.867
% jmenovitá frekvence 100 Hz
% počet pólů 6 => 3 pol páry
% počet fází 2 x 3
% hodnoty pro nahradni schema
% odpor faze statoru R1= 0.0314 ohm
% odpor faze rotoru přepočtený na faze R21 = 0.02 ohm
% rozptylová indukčnost statorové faze L1 = 0.566 mH
% rozptylová indukčnost rotoru statorové faze L21=0.431 mH
% hlavní indukčnost Lh = 15.6 mH
```

```
%~~~~~
```

```
function dx = fce(t,x)
```

```
global Tmax pe ws
```

```
%% elektrika
```

```
Rs=0.0314;      %% náhradní odpor statoru asynchronního motoru R1 v ohm
Rr=0.02;        %% náhradní odpor rotoru asynchronního motoru R21 v ohm
Les=0.000566;   %% rozptylová indukčnost statoru asynchronního motoru v H
Ler=0.000431;   %% rozptylová indukčnost rotoru asynchronního motoru v H
Lh=0.0156;      %% hlavní indukčnost asynchronního motoru v H
Ls=(Lh+Les);    %% celková indukčnost statoru asynchronního motoru
Lr=Lh+Ler;      %% celková indukčnost rotoru asynchronního motoru
```

```
delta=1/(Les+Ler*(Lh/Lr)); %// 1/lambda dle tab. str.35 v Zeman K. a kol.:ARP (2004)
alfa=(Rs+Rr*Lh*(Lr/Lr))*delta;
beta=(Rr*Lh/(Lr*Lr))*delta;
gama=(Lh/Lr)*delta; %// pomocné proměnné pro simulaci

uc=1500; %// napeti meziobvodu uc
fmodul=66; %//modulacni frekvence
PWM=0;

%
%~~~~~

% pro proměnou frekvenci statoru
%~~~~~
us=1130; %// napeti statoru

se=0.9945; %elktrický skluz
whel=se*ws; %první čtvrtinu doby vypocet pocatecnich podminek pri konst. skuzu s=0.01
wr=(ws-whel);
fr=wr/(2*pi);

iws=t*ws; % pro konstatní fs

x(5)=whel*pe; %// otacky za minutu

% SIMULACE NAPETOVEHO STRIDACE + VYPOCET STATOROVYCH NAPETI
%~~~~~
pi23=2*pi/3; %// 120ř
pi43=4*pi/3; %// 240ř
ucp=uc/2; %// konstanta

T=1/fmodul; %// perioda 1/frekvence modulacni
k=2*ucp*fmodul; %// strmost pily 2*540*1000
per=floor(t/T); %// počet peroid
pom=(t-per*T); %// aktuální místo v i-té periodě

pila=-pom*k; % // strmost pily
if(pila<-ucp) pila=ucp;
end; %// nesymetricka pila

uar=us*sqrt(2)*cos(iws); %// ridici napeti uar ( nenormovane !!! ) - upraveno dle disertace
ubr=us*sqrt(2)*cos(iws+pi43); %// ridici napeti ubr
ucr=us*sqrt(2)*cos(iws+pi23); %// ridici napeti ucr

if(uar>pila) ua0=ucp; else ua0=-ucp; end %//podle uar +uc/2 nebo -uc/2
if(ubr>pila) ub0=ucp; else ub0=-ucp; end %//podle ubr +uc/2 nebo -uc/2
if(ucr>pila) uc0=ucp; else uc0=-ucp; end %//podle ucr +uc/2 nebo -uc/2
if(PWM<0.5) ua0=uar; ub0=ubr; uc0=ucr; end %// místo PWM harmonické napajeni

usa=(2*ua0-ub0-uc0)/3; %//fazove napeti na motoru se statorovym vinutim do hvezdy - zkontrolovano dle disertace
usb=(2*ub0-ua0-uc0)/3; %//fazove napeti na motoru se statorovym vinutim do hvezdy
usc=(2*uc0-ub0-ua0)/3; %//fazove napeti na motoru se statorovym vinutim do hvezdy
UsxI=usa; UsyI=(usb-usc)*(1/sqrt(3)); %//transformace do stojiciho systemu I - vyzkumna zprava rov 29.

%// prepocet ze systemu I do systemu III
UsxIII=(UsxI*cos(-iws))-(UsyI*sin(-iws));
UsyIII=(UsxI*sin(-iws))+(UsyI*cos(-iws));

Usx=UsxI;Usy=UsyI;w1=0;w2=-whel;

% konstanty do matice
%~~~~~

X =[-alfa w1 beta -gama*(w2-w1);
-w1 -alfa gama*(w2-w1) beta ;
```

```
Rr*Lh/Lr 0 -Rr/Lr w2 ;
0 Rr*Lh/Lr -w2 -Rr/Lr ];

Y= [delta 0 ;
0 delta ;
0 0 ;
0 0 ];

U=[Usx;Usy];

F1=Y*U;

%% mechanika

% momenty setrvačnosti
%~~~~~

I1=6.85; % motor
I2=0.064; % pastorek
I3=0.73; % velké kolo predlohy
I4=1.00; % malé kolo predlohy
I5=13.23; % duty hřidel převodovky + velké kolo
I6=5.74; % duty hřidel
I7=47.7; % levé kolo
I8=2.77; % náboj
I11=47.7; % pravé kolo
I12=505.15; % skřín
mn=1022; % hmotnost naprawy
In=678; % naprava

% vektory rozmeru hřidelových prvku duté naprawy
%~~~~~
D = [.208 .196 .195 .196];
d = [0.04 0.04 0.04 0.04];
l = [.264 .486 .384 .366];

% parametry ozubení 1 - zaber mezi motorem a predlohou
%~~~~~
alfa = 20; % [stupne] - uhel zaberu je shodny pro oba stupne
beta1 = 6; % [stupne]
R2 = .0845; % roztečný polomer na vstupu
R3 = .1865; % na vystupu
k2 = 2e9; % tuhost ozubeni
b2 = k2*2e-4; % tlumeni ozubeni
r2 = R2*cos(alfa/180*pi)*cos(beta1/180*pi);
r3 = R3*cos(alfa/180*pi)*cos(beta1/180*pi);

% parametry ozubeni 2 - zaber mezi predlohou a vystupem
%~~~~~
beta2 = 4; % [stupne]
R4 = .1403; % roztečný polomer na vstupu
R5 = .3007; % na vystupu
k4 = 2.16e9; % tuhost ozubeni
b4 = k4*2e-4; % tlumeni ozubeni
r4 = R4*cos(alfa/180*pi)*cos(beta2/180*pi);
r5 = R5*cos(alfa/180*pi)*cos(beta2/180*pi);

% tuhosti vazeb
%~~~~~
k3 = 1e6; % torzni tuhost hřidele motor - sroubu - ilustracni hodnota
b3 = k3*2e-4;
k1 = 2.6e6; % torzni tuhost hřidele motor - pastorek
k12 = 36.3e6; % torzni tuhosti ulozeni skřine
k5 = 4.42e6; % tuhost pryzovych spojek
k6 = k5;

% odpovídající tlumicí parametry
```

```
% ~~~~~  
Db = .063;      % pomerny utlum  
b12 = 17000;   % tlumeni ulozeni skrine  
beta = 3.4e-4; % proporcipnalita tlumeni  
b5 = 1500;     % tlumeni pryz. spojek  
b6 = 1500;  
b1 = 1350;     % tlumeni motoru  
  
% ocel  
% ~~~~~  
hustota = 7800; % hustota oceli  
G = 8e10;      % modul pruznosti ve smyku  
  
% vypocet momentu setrvacnosti hridelove prvku  
% ~~~~~  
Ip = 1/32*hustota*pi.*(D.^4)-(d.^4).*1;  
  
% ~~~~~  
Nkola = 16e4;  % staticka sila na kole, hmotnost vozu 62.7  
lambda = 0.15; % uhel kuzelovitosti  
s=1.435/2;    % polovina rozchodu  
r=0.4575;    % polomer kolo na nápravě  
sm = .01;    % relativni mechanicky skluz  
  
% vypocet torznich tuhosti elementu  
% ~~~~~  
kp = G/32*pi.*(D.^4)-(d.^4)./l; % clen kp(1)=k1,2  
bp = kp*1e-4;  
  
%% kalkerova teorie  
%% ~~~~~  
E=2.1e11;  
my=0.25; % koef treni  
m=1.128;  
n=0.893;  
R3=inf;  
R3a=0.3;  
R1=r;  
R1a=100;  
alfa=0;  
  
K1=(1-my^2)/(pi*E);  
K2=(1-my^2)/(pi*E);  
K3=(1/2)*((1/R3)+(1/R3a)+(1/R1)+(1/R1a));  
K4=(1/2)*((1/R3)-(1/R3a))^2+((1/R1)-(1/R1a))^2+2*((1/R3)-(1/R3a))*((1/R1)-(1/R1a))*cos(2*alfa)^(1/2);  
  
a=m*((3*pi*Nkola*(K1+K2))/(4*K3))^(1/3);  
b=n*((3*pi*Nkola*(K1+K2))/(4*K3))^(1/3);  
  
C11=4.36;  
C22=3.99;  
C23=1.75;  
C33=1.04;  
  
%f11=a*b*G*C11;  
%f22=a*b*G*C22;  
%f23=((a*b)^(3/2))*G*C23;  
%f33=((a*b)^2)*G*C33;  
  
f11 = 1.6e8;  
f22 = 1.7e8;  
f23 = 2.6e6;  
f33 = 1.2e3;
```

```
% definice hodnot
yt=x(17);
psit=x(18);
y=x(31);
psi=x(32);

v=x(15)*r; % rychlost m/s

% definice pomocnych parametru pro vyjadreni skluzovych sil mezi kolem a kolejnici
% ~~~~~
% 7 -levé kolo, 11-prave kolo

r7 = r + y*tan(lambda); % x(3) = y
r11 = r - y*tan(lambda);

% prevzato z funkce fceviwheelset1
gamma71 = (-v+v*(r7/r) + s*psit)/v;
gamma111 = (-v+v*(r11/r) - s*psit)/v;

gamma72 = (yt-v*psi*(r7/r)- s*psit*psi)/v;
gamma112 = (yt-v*psi*(r7/r)+ s*psit*psi)/v;

gamma73 = (-v/r)*lambda + psit/(v);
gamma113 = (+v/r)*lambda + psit/(v);

% definice sil v podelnem smeru
Tx7 = f11*gamma71;
Tx11 = f11*gamma111;

% definice sil v pricnem smeru
Ty7 = - f22*gamma72 - f23*gamma73;
Ty11 = - f22*gamma112 - f23*gamma113;

% definice momentu kolem svisle osy
Mz7 = f23*gamma72 - f33*gamma73;
Mz11 = f23*gamma112 - f33*gamma113;

% oznaceni podle Dana - v textu za rovnici 40

TR = ((Tx7+Tx11)^2 + (Ty7+Ty11)^2)^.5;

if TR < 3*my*Nkola
    FR = my*Nkola*( (TR/(my*Nkola)) - 1/3*(TR/(my*Nkola))^2 + 1/27*(TR/(my*Nkola))^3 );
else
    FR = my*Nkola;
end

if TR ~= 0 %podminka stability
    Lfx = (Tx7/TR)*FR; % rov 41
    Lfy = (Ty7/TR)*FR;
    Pfx = (Tx11/TR)*FR;
    Pfy = (Ty11/TR)*FR;

    Mz9 = Mz11 + Mz7 + (-Lfy+ Pfy*(s*psi)) + (-Lfx + Pfx)*s;

else
    Lfx = 0;
    Lfy = 0;
    Pfx = 0;
    Pfy = 0;

    Mz9 = Mz11 + Mz7 + (-Lfy+ Pfy*(s*psi)) + (-Lfx + Pfx)*s;
end

% definice prave strany modelu, která zahrnuje veskere vnejsi zdroj
% buzení a pak buzení vznikající v důsledku styku kolo-kolejnice
% ~~~~~
```

```
% m**y-Ty7-Ty11+((2*N*lamda*y)/(lo))=0
% Iz*psi'-(-Ty7-Ty11)*lo*psi-(-Tx-Tx11)*l0-Mz7-Mz11=0
```

%% matice mechanika

% matice hmotnosti

```
% ~~~~~
% 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
M =[I1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 I2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 I3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 I4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 I5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 I6 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 I7+Ip(1)/3 Ip(1)/6 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 Ip(1)/6 I8+(Ip(1)+Ip(2))/3 Ip(2)/6 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 Ip(2)/6 (Ip(2)+Ip(3))/3 Ip(3)/6 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 Ip(3)/6 (Ip(3)+Ip(4))/3 Ip(4)/6 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 Ip(4)/6 I11+Ip(4)/3 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 I12 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 mn 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 In];
```

% matice tuhosti

```
% ~~~~~
% 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
K =[k1 -k1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0;
-k1 k1+k2*r2^2 -r2*r3*k2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -r2*k2*(r2+r3)
0 0;
0 -r2*r3*k2 k3+k2*r3^2 -k3 0 0 0 0 0 0 0 +r3*k2*(r2+r3)
0 0;
0 0 -k3 k3+k4*r4^2 -r4*r5*k4 0 0 0 0 0 0 +r4*k4*(r4+r5)
0 0;
0 0 0 -k4*r4*r5 k5+k4*r5^2 -k5 0 0 0 0 0 -r5*k4*(r4+r5)
0 0;
0 0 0 0 -k5 k5+k6 0 -k6 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 kp(1) -kp(1) 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 -k6 -kp(1) kp(2)+kp(1)+k6 -kp(2) 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 -kp(2) kp(2)+kp(3) -kp(3) 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 -kp(3) kp(3)+kp(4) -kp(4) 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -kp(4) kp(4) 0 0;
0 -r2*k2*(r2+r3) r3*k2*(r2+r3) r4*k4*(r4+r5) -r5*k4*(r4+r5) 0 0 0 0 0 0 0;
k12+(k2*(r2+r3)^2+k4*(r4+r5)^2) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
((2*Nkola*lamda)/s) 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
(Lfy+Pfy)*s];
```

% matice tlumeni

```
% ~~~~~
B =[b1 -b1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
-b1 b1+b2*r2^2 -r2*r3*b2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -r2*b2*(r2+r3)
0 0;
0 -r2*r3*b2 b3+b2*r3^2 -b3 0 0 0 0 0 0 0 +r3*b2*(r2+r3)
0 0;
```

```

0 0      -b3      b3+b4*r4^2  -r4*r5*b4  0 0 0      0 0 0      0 +r4*b4*(r4+r5)
0 0;
0 0      0      -b4*r4*r5  b5+b4*r5^2  -b5 0 0      0 0 0      0 -r5*b4*(r4+r5)
0 0;
0 0      0      0      -b5      b5+b6 0  -b6      0 0 0 0      0 0;
0 0      0      0      0      0  bp(1) -bp(1)  0 0 0 0      0 0;
0 0      0      0      0      0      -b6  -bp(1) bp(2)+bp(1)+b6 -bp(2)  0 0 0 0
0 0;
0 0      0      0      0      0 0  -bp(2)  bp(2)+bp(3) -bp(3)  0 0      0
0;
0 0      0      0      0      0 0 0  -bp(3)  bp(3)+bp(4) -bp(4)  0      0
0;
0 0      0      0      0 0 0 0  -bp(4)  bp(4)  0      0 0;
0 -r2*b2*(r2+r3) r3*b2*(r2+r3) r4*b4*(r4+r5) -r5*b4*(r4+r5) 0 0 0 0 0 0 0
b12+(b2*(r2+r3)^2+b4*(r4+r5)^2) 0 0;
0 0      0      0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0      0      0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;

```

% matice buzení

%~~~~~

Mmotor=3*3/2*(Lh/Lr)*(x(3).*x(2)-x(4).*x(1)); % vstupní moment motoru v Nm v 4483.4872 v ustaleném stavu

sila1=Mmotor/r2;

sila2=sila1*(r3/r4);

Mkolo=sila2*r5/2;

F2 = zeros(28,1);

F2(15) = Mmotor; % moment udává elektrický subsystém

F2(27) = Lfy+Pfy;

F2(28) = Mz9;

if t<0.8 F2(21) = -Mkolo; F2(25) = -Mkolo;

else F2(21) = Tx7*r7-my*Nkola*r7;

F2(25) = Tx11*r11-my*Nkola*r11;

end

%% upravy matic

%~~~~~

N=[zeros(size(M)) M;

M B];

P=[-M zeros(size(M));

zeros(size(M)) K];

% N=(28,28) P=(28,28) F2=(28,1)

% slození subsetemu

%~~~~~

NN=[eye(size(X)) zeros(4,28);

zeros(28,4) N];

PP=[-X zeros(4,28);

zeros(28,4) P];

FF=[F1; F2];

% Vlastní řešení rovnice

%~~~~~

dx = -NN\ (PP*x - FF);

%txt=fopen('sily.txt','a');

%fprintf(txt,'%9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f\n'

,t,Lfx,Lfy,Pfx,Pfy,Tx7,Ty7,Tx11,Ty11,Mz7,Mz11,Mz9);

%fclose(txt);