

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky



Bakalářská práce

Analytické a experimentální vyšetřování vlastností  
nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic

Plzeň, 2012

Tereza Dadáková



---

## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala sama pouze s použitím uvedené literatury.

V Plzni dne . . . . .

. . . . .  
Tereza Dadáková

---

## Poděkování

Chtěla bych poděkovat vedoucímu práce Ing. Aleši Matasovi, Ph.D. za trpělivost, ochotu a cenné rady.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Obyčejná diferenciální rovnice</b>	<b>2</b>
2.1	Cauchyova úloha . . . . .	2
2.2	Věty o existenci a jednoznačnosti řešení . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Rovnice <math>y' = \sin(x^2 + y^2)^p</math></b>	<b>12</b>
3.1	Existence řešení . . . . .	13
3.2	Jednoznačnost řešení . . . . .	13
3.3	Obecné vlastnosti řešení . . . . .	19
3.3.1	Extrémy řešení . . . . .	19
3.3.2	Inflexní body, konvexnost, konkávnost . . . . .	19
3.3.3	Symetrie . . . . .	21
3.4	Numerická řešení . . . . .	23
3.5	Numerické vlastnosti . . . . .	27
3.6	Asymptotické chování řešení . . . . .	29
3.6.1	Zlomový parametr . . . . .	29
3.6.2	Omezení . . . . .	30
3.6.3	Atraktory . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>39</b>
	<b>Literatura</b>	<b>40</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Tato práce se zabývá existencí, jednoznačností a dalšími vlastnostmi obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Diferenciální počet vynalezli nezávisle na sobě v různých formách Isaac Newton a Wilhelm Leibniz v roce 1676 a objevili tak velice silný a užitečný aparát pro řešení problémů především v přírodních a technických vědách. Pomocí diferenciálních rovnic lze modelovat různé dynamické systémy a lépe tak porozumět světu kolem nás.

Řešení diferenciálních rovnic často nelze vyjádřit analyticky a k objasnění vlastností řešení je třeba použít buď metod numerické matematiky, někdy i v kombinaci s jinými příbližnými metodami, nebo analytických metod pro studium kvalitativních vlastností řešení diferenciální rovnice.

V první části této práce se věnujeme otázce, kdy řešení diferenciální rovnice existuje a kdy je dáno jednoznačně. Jsou zde formulovány věty týkající se tohoto tématu, mezi nimiž má významné místo Picard-Lindelöfova věta. Její důkaz je zde uveden ve dvou podobách pro bližší objasnění celé problematiky a také jako ukázka využití aparátu funkcionální analýzy.

Druhá část práce se už věnuje konkrétní nelineární diferenciální rovnici s reálným parametrem  $p$

$$y' = \sin(x^2 + y^2)^p, \quad p > 0. \quad (1.1)$$

Aplikujeme zde poznatky z první části textu při vyšetřování existence a jednoznačnosti řešení dané rovnice a zkoumáme jeho další vlastnosti, jako jsou například závislost na počáteční podmínce a parametru, oscilace, omezenost, konvergence apod. Ke stanovení hypotéz nebo jejich ověření jsou využívány numerické experimenty a proto je také část textu věnována numerickým aspektům úlohy.

Rovnice (1.1) vykazuje velmi zajímavé zejména asymptotické chování. Přestože se jedná o rovnici prvního řádu, bude pro plné pochopení vlastností řešení potřeba využít dalších analytických metod například aplikace Gronwallova lemmatu, atd. Práce samotná navazuje již na dříve publikovaný text [6], který se věnoval především existenci a jednoznačnosti řešení a dalším kvalitativním vlastnostem řešení.

# Kapitola 2

## Obyčejná diferenciální rovnice

Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu jsou rovnice, které obsahují jako neznámou funkci jedné proměnné a první derivaci této funkce. Obecně má tvar

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad (2.1)$$

kde  $F$  je reálná funkce definovaná na množině  $G \subset \mathbb{R}^3$ .

Funkce  $y(x)$  definovaná na  $I \subset \mathbb{R}$  je řešením rovnice (2.1), pokud je na  $I$  diferencovatelná, bod  $(x, y(x), y'(x))$  leží v  $G$  pro všechna  $x \in I$  a je pro všechna  $x \in I$  splněna rovnost (2.1).

V dalším textu předpokládejme, že lze rovnici (2.1) vyjádřit v explicitním tvaru

$$y' = f(x, y), \quad (2.2)$$

kde reálná funkce  $f(x, y)$  je definovaná na množině  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Nebude-li řečeno jinak, předpokládejme, že množina  $D$  je definována jako obdélník

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \quad a, b > 0.$$

### 2.1 Cauchyova úloha

Řešením rovnice (2.2) nemusí být pouze jedna funkce, ale obecně těchto funkcí může být nekonečně mnoho. Přidáním tzv. počáteční podmínky  $y(x_0) = y_0$  z nich vybereme pouze řešení, která procházejí bodem  $(x_0, y_0)$ . Úlohu najít funkci  $y = y(x)$  splňující

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

pro všechna  $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$  nazveme počáteční úlohou nebo Cauchyovou úlohou.

**Lemma 2.1** (Ekvivalentní úloha). *Pokud je  $f(x, y)$  spojitá na obdélníku  $D$ , pak úloha najít funkci  $y \in C^1[x_0 - a, x_0 + a]$  splňující (2.3) je ekvivalentní s úlohou najít řešení*

## 2.1. CAUCHYOVA ÚLOHA

---

$y \in C[x_0 - a, x_0 + a]$  integrální rovnice

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt. \quad (2.4)$$

*Důkaz.* a) Mějme úlohu (2.3), jejímž řešením je  $y = y(x)$ ,  $y \in C^1[x_0 - a, x_0 + a]$ . Pro toto řešení pak platí

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t)dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

a odtud

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt.$$

Dostáváme tak integrální rovnici 2.4. Protože  $C^1(I) \subset C(I)$  a  $y \in C^1[x_0 - a, x_0 + a]$ , platí že  $y \in C(x_0 - a, x_0 + a)$ , tj dostáváme spojitě řešené integrální rovnice (2.4).

b) Mějme naopak úlohu vyjádřenou ve tvaru integrální rovnice (2.4), jejímž řešením je  $y = y(x)$ . Pro jeho derivaci platí

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt = f(x, y(x)).$$

Dosazením bodu  $x_0$  do integrální rovnice dostáváme počáteční podmínku:

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))dt = y_0.$$

Protože funkce  $f \in C(x_0 - a, x_0 + a)$ , je i  $y' \in C(x_0 - a, x_0 + a)$ , tj.  $y \in C^1(x_0 - a, x_0 + a)$ . Dostáváme tak spojitě diferencovatelnou funkci, která splňuje (2.3). □

Otázkou je, zda pro funkci  $f(x, y)$  a bod  $(x_0, y_0)$  řešení úlohy (2.3) vůbec existuje a zda je určeno jednoznačně. Dále nás také zajímá, pro jaké hodnoty  $x$  je definováno, tedy jedná-li se jen o lokální řešení, definované pouze na nějakém okolí bodu  $x_0$ , nebo o řešení globální, definované na nějakém podintervalu  $I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$ . Další otázkou je, jak ho případně sestojit. Těmto otázkám je věnována následující kapitola.



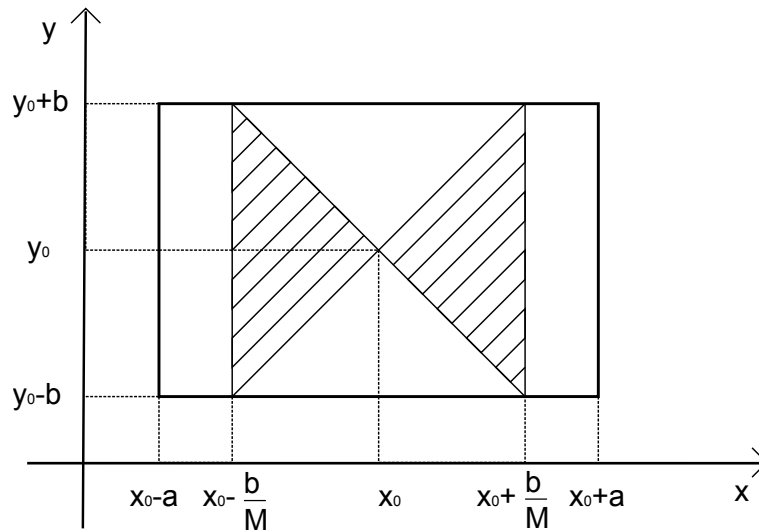
## 2.2 Věty o existenci a jednoznačnosti řešení

Nyní uvedeme dvě věty týkající se existence a jednoznačnosti řešení. Peanova věta formuluje postačující podmínky existence řešení, zatímco věta Picard-Lindelöfova odpovídá i na otázku jednoznačné řešitelnosti počáteční úlohy. Podrobněji se budeme věnovat druhé jmenované větě a zvláště jejímu důkazu.

**Věta 2.2** (Peanova). *Nechť je reálná funkce  $f = f(x, y)$  spojitá na obdélníku  $D$ , potom existuje alespoň jedno řešení úlohy (2.3) na intervalu*

$$I = [x_0 - h, x_0 + h], \quad \text{kde } h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_D |f(x, y)|.$$

Existence řešení je tedy zaručena již při spojitosti funkce  $f(x, y)$ . Věta nám dává i odhad délky intervalu na kterém je řešení definováno. Díky této volbě délky intervalu  $I$  je zaručeno, že řešení  $y(x)$  leží celé uvnitř obdélníka  $D$ , na kterém je funkce  $f(x, y)$  definována, viz také obrázek (2.1). Podrobný důkaz Peanovy věty viz [1].



Obrázek 2.1: Obdélník, na kterém je funkce  $f(x, y)$  definovaná.

Následující věta nám říká, kdy je řešení určeno jednoznačně. Její důkaz provedeme dvakrát, a to nejprve za využití klasické analýzy a poté pomocí funkcionální analýzy. Následně jsou oba důkazy srovnány. Nejprve uveďme klasický důkaz Picard-Lindelöfovy věty.

**Věta 2.3** (Picard-Lindelöf). *Nechť je reálná funkce  $f = f(x, y)$  definovaná na obdélníku  $D$  a je na něm spojitá. Je-li funkce  $f(x, y)$  Lipschitzovská na  $D$  v proměnné  $y$ , tj. podmínku*

$$\exists L > 0 \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] \forall y, \tilde{y} \in [y_0 - b, y_0 + b] : |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|,$$

## 2.2. VĚTY O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ

---

potom na intervalu  $I$  existuje právě jedno řešení počáteční úlohy (2.3), kde

$$I = [x_0 - h, x_0 + h], \quad h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_D |f(x, y)|.$$

*Důkaz.* Díky lemmatu 2.1 je úloha (2.3) ekvivalentní s integrální formulací (2.4). Budeme větu 2.3 proto dokazovat ve tvaru integrální rovnice.

### 1. Existence řešení

Sestrojíme posloupnost tzv. Picardových aproximací na intervalu  $I$  pomocí integrální rovnice, které budou stejnoměrně konvergovat k funkci  $y(x)$  – hledanému řešení.

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aby takto definovaná posloupnost měla smysl, musí pro všechna  $n$  ležet  $y_n$  v definičním oboru funkce  $f(x, y)$ , tedy v obdélníku  $D$ , což ukážeme indukcí. Platí následující

$$|y_0 - y_0| = 0 \leq b. \tag{2.6}$$

Předpokládejme, že

$$|y_{n-1} - y_0| \leq b, \tag{2.7}$$

potom

$$\begin{aligned} |y_n - y_0| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt - y_0 \right| = \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t))| dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x \max_I |f(t, y(t))| dt \leq M|x - x_0| \leq M \frac{b}{M} = b. \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\tag{2.9}$$

Posloupnost  $y_n$  má smysl pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ . Nyní ukážeme, že konverguje. Člen posloupnosti  $y_n$  můžeme zapsat v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

## 2.2. VĚTY O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ

---

Pro členy řady z výrazu (2.10) platí:

$$\begin{aligned}
 |y_k(x) - y_{k-1}(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y_{k-2}(t)) dt \right| \leq \\
 &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))| dt \leq \\
 &\leq \int_{x_0}^x L |y_{k-1} - y_{k-2}| dt. \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

Postupně pro  $k = 1, 2, \dots$  dostáváme s využitím (2.11)

$$\begin{aligned}
 |y_1 - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh, \\
 |y_2 - y_1| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t)) dt \right| \leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0| dt \leq \\
 &\leq LM \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| = LM \frac{|x - x_0|^2}{2} \leq LM \frac{h^2}{2}, \\
 &\vdots \\
 |y_k - y_{k-1}| &\leq ML^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^k}{k!}. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme omezení shora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - y_{k-1}| \leq \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Lh)^k}{k!}. \tag{2.13}$$

Řada z výrazu (2.10) má tedy konvergentní majorantu nezávislou na  $x \in I$ , a proto posloupnost  $\{y_n(x)\}$  stejnoměrně konverguje k funkci  $y(x)$  na  $I$ . Limitní funkce  $y(x)$  řeší integrální rovnici ekvivalentní s úlohou (2.3)

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt = \\
 &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_{n-1}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

## 2.2. VĚTY O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ

Záměna limity a integrálu v posledním výrazu je možná, pouze pokud  $f(t, y_n(t))$  stejnoměrně konverguje. To je ale splněno díky stejnoměrné konvergenci posloupnosti  $\{y_n\}$  s využitím předpokladu Lipschitzovskosti

$$|f(t, y_n) - f(t, y)| \leq L|y_n - y|. \quad (2.15)$$

Tedy funkce  $y(x)$  řeší integrální rovnici a tím i úlohu (2.3).

### 2. Jednoznačnost

Předpokládejme, že existují dvě různá řešení  $y(x)$  a  $\hat{y}(x)$ . Pak pro jejich rozdíl dostáváme

$$\begin{aligned} |y(x) - \hat{y}(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, \hat{y}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, \hat{y}(t))| dt \leq L \int_{x_0}^x |y(t) - \hat{y}(t)| dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Označíme  $A := \max_I |y(x) - \hat{y}(x)|$  a postupným dosazováním dostáváme

$$\begin{aligned} |y(x) - \hat{y}(x)| &\leq L \int_{x_0}^x |y(t) - \hat{y}(t)| dt \leq LA|x - x_0| \leq LAh, \\ |y(x) - \hat{y}(x)| &\leq L \int_{x_0}^x LA|t - x_0| dt = AL^2 \frac{|x - x_0|^2}{2} \leq AL^2 \frac{h^2}{2}, \\ &\vdots \\ |y(x) - \hat{y}(x)| &\leq AL^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq A \frac{(Lh)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pro  $n \rightarrow \infty$  posloupnost z výrazu (2.17) konverguje k nule, tedy i  $|y - \hat{y}| \rightarrow 0$  a obě řešení splývají pro všechna  $x \in I$ . □

K druhému důkazu využijeme Banachovu větu o pevném bodě a její důsledek uvedený jako lemma 2.5.

**Věta 2.4** (Banach). *Nechť  $T$  je kontrahující operátor, tedy platí*

$$\rho(Tu, Tv) \leq \alpha \rho(u, v), \quad 0 < \alpha < 1,$$

*zobrazující úplný metrický prostor  $(X, \rho)$  do sebe. Pak existuje právě jeden pevný bod  $u_0$  pro který platí  $Tu_0 = u_0$  a navíc*

$$u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u_0) = 0,$$

## 2.2. VĚTY O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ

---

kde  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost určená jako

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

s libovolně zvoleným prvkem  $u_1 \in X$ .

*Důkaz.* Z předpokladu, že operátor  $T$  zobrazuje prostor do sebe můžeme definovat posloupnost  $u_{n+1} = Tu_n$  s libovolným prvkem  $u_1 \in X$ . Nejdříve ukážeme, že tato posloupnost je na prostoru  $X$  konvergentní:

$$\begin{aligned} \rho(u_1, u_2) &= \rho(u_1, Tu_1), \\ \rho(u_2, u_3) &= \rho(Tu_1, Tu_2) \leq \alpha\rho(u_1, u_2) = \alpha\rho(u_1, Tu_1), \\ \rho(u_3, u_4) &= \rho(Tu_2, Tu_3) \leq \alpha\rho(u_2, u_3) = \alpha^2\rho(u_1, Tu_1), \\ &\vdots \\ \rho(u_n, u_{n+1}) &\leq \alpha^{n-1}\rho(u_1, Tu_1), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dále pro  $m > n$  platí

$$\begin{aligned} \rho(u_n, u_m) &\leq \rho(u_n, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \dots + \rho(u_{m-1}, u_m) \leq \\ &\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^n + \dots + \alpha^{m-2})\rho(u_1, Tu_1) = \\ &= \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1})\rho(u_1, Tu_1) \leq \\ &\leq \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots)\rho(u_1, Tu_1) = \\ &= \alpha^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha} \rho(u_1, Tu_1). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Protože výsledná posloupnost ve (2.19) pro  $\alpha < 1$ ,  $n \rightarrow \infty$  a  $m \in \mathbb{N}$  libovolné jde k nule, musí i  $\rho(u_n, u_m) \rightarrow 0$ . Posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  je tedy cauchyovská. Protože prostor  $X$  je úplný, je tato posloupnost konvergentní s limitou  $u_0$ . Nyní ukážeme že tato limita je hledaným pevným bodem operátoru  $T$ .

$$\begin{aligned} \rho(u_0, Tu_0) &\leq \rho(u_0, u_n) + \rho(u_n, Tu_0) = \rho(u_0, u_n) + \rho(Tu_{n-1}, Tu_0) \leq \\ &\leq \rho(u_0, u_n) + \alpha\rho(u_{n-1}, u_0) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Pro  $n \rightarrow \infty$  konverguje poslední výraz k nule. Z toho vyplývá, že  $\rho(u_0, Tu_0) = 0$  a odtud dostáváme

$$u_0 = Tu_0. \tag{2.21}$$

Ještě ukážeme že takový bod je právě jeden. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existují dva různé pevné body operátoru  $T$   $u_0$  a  $\hat{u}_0$ .

$$\rho(u_0, \hat{u}_0) = \rho(Tu_0, T\hat{u}_0) \leq \alpha\rho(u_0, \hat{u}_0). \tag{2.22}$$

Kdyby byly oba pevné body různé, pak by platilo  $\rho(u_0, \hat{u}_0) > 0$  a z posledního vztahu by vyplývalo  $\alpha \geq 1$ . To je ale ve sporu s předpokladem, že  $0 < \alpha < 1$ . Pak musí ale platit  $\rho(u_0, \hat{u}_0) = 0$  a oba pevné body splývají -  $u_0 = \hat{u}_0$ .

□

## 2.2. VĚTY O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ

---

**Lemma 2.5.** *Pokud pro operátor  $T$ , zobrazující úplný metrický prostor  $(X, \rho)$  do sebe, existuje  $k \in \mathbb{N}$  tak, že  $T^k$  je kontrakcí, pak  $T$  má právě jeden pevný bod.*

*Důkaz.*  $T^k$  také zobrazuje prostor  $X$  do sebe a pokud je  $T^k$  kontrakcí na  $X$ , pak má podle věty 2.4 právě jeden pevný bod  $x$ :

$$T^k x = x. \quad (2.23)$$

Z rovnosti

$$T^k T x = T^{k+1} x = T T^k x = T x \quad (2.24)$$

plyne, že  $T x$  je pevným bodem operátoru  $T^k$ . Protože pevný bod je na základě tvrzení Banachovy věty určen jednoznačně, dostáváme  $T x = x$ , tj.  $x$  je jediným pevným bodem operátoru  $T$ . □

Na řešení úlohy (2.3) můžeme také pohlížet jako na pevný bod nějakého operátoru a k důkazu věty 2.3 o existenci a jednoznačnosti řešení využít Banachovy věty o pevném bodě. Nyní již známe vše potřebné a můžeme uvést druhou variantu důkazu Picard-Lindelöfovy věty.

*Důkaz.* (Picard-Lindelöf) Uvažujeme prostor funkcí spojitých na  $I := [x_0 - h, x_0 + h]$ , tj.  $y \in C(I)$ , s metrikou  $\rho(u(x), v(x)) = \max_I |u(x) - v(x)|$ . Dále uvažujeme uzavřenou kouli

$$\bar{K}(y_0, b) = \{y \in C(I); \rho(y(x), y_0(x)) \leq b\}. \quad (2.25)$$

Pro všechny funkce  $y \in \bar{K}$  má funkce  $f(t, y(t))$  smysl, proto můžeme definovat operátor

$$T(y(t)) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.26)$$

Cílem je ukázat, že operátor  $T$  má na  $\bar{K}$  jediný pevný bod. Využijeme tedy věty 2.4 a ověříme její předpoklady. Prostor  $(\bar{K}, \rho)$  je úplný a operátor  $T$  ho zobrazuje do sebe:

$$\begin{aligned} \rho(Ty, y_0) &= \max_I |Ty - y_0| = \max_I \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x \max_I |f(t, y(t))| dt \leq \\ &\leq M|x - x_0| \leq b. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Odtud vyplývá  $Ty \in \bar{K}$  a i výraz  $f(t, Ty(t))$  má smysl pro libovolné  $y \in \bar{K}$ .

Dále pro všechny funkce  $u, v \in \bar{K}$  platí

$$\begin{aligned} \rho(Tu, Tv) &= \max_I |Tu - Tv| = \max_I \left| \int_{x_0}^x (f(t, u(t)) - f(t, v(t))) dt \right| \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x \max_I |u(t) - v(t)| dt = L|x - x_0| \rho(u, v) \leq \\ &\leq Lh \rho(u, v). \end{aligned} \quad (2.28)$$

## 2.2. VĚTY O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ

---

Operátor  $T$  je tedy kontrakcí, pouze pokud  $h < \frac{1}{L}$ . Označíme  $h_0 = \min \{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$ , které definuje interval  $I_0 = [x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ . Pak podle Banachovy věty existuje právě jeden pevný bod  $y(x)$  tak, že

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.29)$$

Existuje tedy právě jedno řešení integrální rovnice, resp. dle lemmatu 2.1 úlohy (2.3) na intervalu  $I_0$ . Můžeme ale využít lemmatu 2.5 a pro oprátor  $T^k$  postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \rho(Tu, Tv) &\leq L|x - x_0|\rho(u, v) \leq Lh\rho(u, v), \\ \rho(TTu, TTv) &\leq \max_I \left| \int_{x_0}^x (f(t, Tu(t)) - f(t, Tv(t))) dt \right| \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x \max_I |Tu(t) - Tv(t)| dt = L \int_{x_0}^x \rho(Tu, Tv) dt \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x L|t - x_0|\rho(u, v) dt = L^2 \frac{|x - x_0|^2}{2} \rho(u, v) \leq \\ &\leq \frac{L^2 h^2}{2} \rho(u, v), \\ &\vdots \\ \rho(T^k u, T^k v) &\leq \frac{L^k h^k}{k!} \rho(u, v). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Jistě existuje dostatečně velké  $k \in \mathbb{N}$  tak, že  $\frac{L^k h^k}{k!} < 1$  a  $T^k$  je kontrakcí nezávisle na konstantě  $L$ . Díky lemmatu 2.5 má proto operátor  $T$  právě jeden pevný bod, a to na intervalu  $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ , kde  $h = \min \{a, \frac{b}{M}\}$ . □

Vidíme, že důkaz věty 2.3 pomocí metody postupných aproximací je myšlenkově analogický s důkazem věty 2.4 o pevném bodě: definování posloupnosti na nějakém prostoru, existence jejího limitního prvku, který je řešením resp. pevným bodem a následný důkaz jednoznačnosti. Právě díky této analogii důkazů vět 2.3 a 2.4 můžeme důkaz Picard-Lindelöfovy věty zkrátit využitím věty Banachovy. Nedokazujeme již postupně existenci ani jednoznačnost pevného bodu, které jsou díky Banachově větě zaručeny a stačí nám už jen ověřit její předpoklady. Zvláště zajímavý je předpoklad, že je operátor  $T$  kontrakcí. Tento požadavek lehce komplikuje fakt, že pokud je konstanta  $L$  příliš velká, délka intervalu na kterém máme zaručenu existenci a jednoznačnost řešení se rapidně zmenší. Pokud ale nepožadujeme, aby byl kontrakcí přímo operátor  $T$ , můžeme problém obejít využitím lemmatu 2.5. Tato část důkazu je formálně stejná jako důkaz jednoznačnosti v první variantě

## 2.2. VĚTY O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ

---

důkazu. Situace s délkou intervalu se dá případně vyřešit i jinak, pomocí tzv. kontinuační věty, kterou dále ještě uvedeme.

První důkaz, s využitím klasické analýzy, je konstruktivní. Dává nám přímo metodu, jak řešení sestavit, a to právě konstrukcí Picardových aproximací. Obecně nám dává i lepší představu o celé problematice existence a jednoznačnosti řešení.

Důkaz pomocí Banachovy věty je naopak spíše existenčním důkazem, i přes to, že posloupnost  $\{u_n\}$  definovaná v této větě aplikovaná na náš operátor  $T$  je právě posloupností Picardových aproximací. Jeho konstrukce, spočívající v ověření předpokladů Banachovy věty, je ve srovnání s prvním důkazem mnohem jednodušší, díky tomu, že  $C(I)$  je úplný prostor se vyhneme vyšetřování stejnoměrné konvergence řady, ovšem za předpokladu znalosti abstraktnějších pojmů.

Na závěr této kapitoly uvedeme ještě jednu větu týkající se existence a jednoznačnosti řešení a to kontinuační větu.

**Věta 2.6** (Kontinuační věta [1]). *Nechť je  $f(x, y)$  spojitá funkce definovaná na oblasti  $G \subset \mathbb{R}^2$  a je na ní omezená. Pokud je  $y(x)$  řešením úlohy (2.3) na intervalu  $(a, b)$ , potom limity  $y(a+0)$  a  $y(b-0)$  existují. Pokud je  $(a, y(a+0)) \in G$  resp.  $(b, y(b-0)) \in G$ , potom může být řešení prodlouženo vlevo od  $a$ , resp. vpravo od  $b$ .*

Důkaz této věty viz [1].

Víme tedy, kdy existuje prodloužení řešení na větší interval. Věta ale nemluví o jednoznačnosti. Bez újmy na obecnosti můžeme jako oblast  $G$  opět uvažovat obdélník. Řešení můžeme prodloužit jednoznačně, pokud funkce  $f(x, y)$  splňuje na obdélníku  $G$  i podmínku Lipschitzovskosti v proměnné  $y$ . Jsou pak totiž splněny předpoklady Picard-Lindelöfovy věty, díky čemuž je už řešení na větším intervalu dáno jednoznačně.



## Kapitola 3

### Rovnice $y' = \sin(x^2 + y^2)^p$

Dále se v textu budeme zabývat nelineární diferenciální rovnicí s konkrétní pravou stranou s reálným kladným parametrem  $p$

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)^p, \quad p > 0, \quad (3.1)$$

tedy počáteční úlohou

$$\begin{cases} y' = \sin(x^2 + y^2)^p, & p > 0, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

I přes to, že rovnice nemodeluje žádnou reálnou situaci, důvodů pro tuto konkrétní volbu je několik. Krom toho, že je nelineární a její řešení nelze analyticky vyjádřit, má zajímavou vlastnost – křivky spojující místa se stejnou derivací (izokliny) jsou kružnice se středem v počátku. Díky funkci sinus se hodnoty derivací podél těchto kružnic s rostoucím poloměrem periodicky opakují. V závislosti na hodnotě parametru  $p$  se k sobě izokliny s rostoucí vzdáleností od počátku přibližují nebo oddalují. Díky tomu vykazují řešení rovnic s jiným parametrem kvalitativně rozdílné vlastnosti, zvláště co se týče asymptotického chování.

Nejdříve se zaměříme na existenci a jednoznačnost řešení, kde využijeme poznatky z předchozí kapitoly. Dále vyšetříme obecné vlastnosti řešení, které úzce souvisí s tím, že izoklinami jsou právě kružnice. Bude nás zajímat, kde má řešení extrémy, inflexní body a jaké další vlastnosti jsou s tvarem izoklin spojené.

Většina vyslovených hypotéz o chování řešení je založena na numerických experimentech. Právě při numerickém řešení úlohy jsme narazili na problém nepřesností výpočtu, který je způsoben další zajímavou vlastností rovnice. Řešení vzkazuje oscilatorický charakter a při některých hodnotách parametru se frekvence kmitů zvyšuje a numerické metody selhávají. To, které metody jsou vhodné, které ne a které jsou v této práci použity, je rozebráno v kapitole 3.4.

Poslední část textu se věnuje závislosti řešení na změně parametru. Při některých hodnotách se řešení jeví jako konvergentní, při jiných jako divergentní. Naším cílem bude najít zlomový parametr a případně najít funkce či hodnoty, ke kterým by řešení mohlo konvergovat.

### 3.1 Existence řešení

Funkce  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)^p$  je spojitá na celém svém definičním oboru  $D(f) = \mathbb{R}^2$ , tedy i na libovolném obdélníku  $D$

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \quad a, b > 0.$$

Z Peanovy věty (věta 2.2) vyplývá, že řešení počáteční úlohy (3.2) existuje na intervalu

$$I = [x_0 - h, x_0 + h], \quad \text{kde } h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \text{ a } M = \max_D |f(x, y)|.$$

Protože

$$M = \max_D |\sin(x^2 + y^2)^p| = 1, \quad (3.3)$$

je interval  $I$ , na kterém existuje řešení, určen číslem  $h = \min \{a, b\}$ . Vzhledem k tomu, že obdélník  $D$  a tedy i čísla  $a, b$ , jsou dány libovolně, existuje alespoň jedno řešení počáteční úlohy (3.2) na celém oboru reálných čísel  $\mathbb{R}$  pro všechna  $p > 0$ .

### 3.2 Jednoznačnost řešení

Řešení úlohy (3.2) je dle Picard-Lindelöfovy věty (věta 2.3) dáno jednoznačně, pokud je funkce  $f(x, y)$  kromě spojitosti i lipschitzovská v proměnné  $y$ . Zároveň lze využít faktu, že pokud má funkce spojitou parciální derivaci podle proměnné  $y$ , pak je v této proměnné lipschitzovská.

Funkce  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)^p$  je spojitá na  $\mathbb{R}^2$ , proto je spojitá také na libovolném obdélníku  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Parciální derivace  $f_y(x, y)$  má tvar

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2py \cdot \cos(x^2 + y^2)^p \cdot (x^2 + y^2)^{p-1}. \quad (3.4)$$

Vyšetření Lipschitzovskosti funkce  $f(x, y)$  v proměnné  $y$  rozdělíme podle hodnoty parametru  $p$  na několik kvalitativně odlišných případů.

- $p \geq 1$

Parciální derivace  $f_y(x, y)$  je pro  $p \geq 1$  spojitá, z čehož vyplývá, že je funkce  $f(x, y)$  lipschitzovská v proměnné  $y$ . Jsou tak splněny předpoklady Picard-Lindelöfovy věty na libovolném obdélníku  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Číslo  $h$ , určující délku intervalu na kterém je zaručena existence jednoznačného řešení, je ze stejných důvodů jako v předchozí kapitole dáno jako  $h = \min \{a, b\}$ . Vzhledem k tomu, že jsou čísla  $a, b$  libovolná, existuje pro  $p \geq 1$  jednoznačné řešení úlohy (3.2)  $y = y(x)$  na  $\mathbb{R}$ .

- $0 < p < 1$

V tomto případě je potřeba vyšetřit spojitost  $f_y(x, y)$  v počátku  $(0, 0)$ . Z definice

### 3.2. JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ

---

derivace dostáváme:

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + (y+h)^2)^p - \sin(x^2 + y^2)^p}{h}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Konkrétně pro bod  $(0, 0)$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^{2p}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2p \cdot \cos h^{2p} \cdot h^{2p-1}. \quad (3.6)$$

Vzhledem k výrazu (3.6) výrazu se situace mění v závislosti na parametru  $p$ ; nastávají tři případy:

- $\frac{1}{2} < p < 1$   
Parciální derivace  $f_y(x, y)$  v bodě  $(0, 0)$  existuje a je rovna 0, neboť

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} 2ph^{2p-1} = 0. \quad (3.7)$$

Ukážeme její spojitost. Musí platit  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f_y = 0$ . Pomocí transformace do polárních souřadnic dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} 2py \cos(x^2 + y^2)^p (x^2 + y^2)^{p-1} &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi]}} 2pr \sin \varphi \cos(r^{2p}) r^{2p-2} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi]}} 2pr^{2p-1} \sin \varphi \cos(r^{2p}) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Funkce  $f_y(x, y)$  je tedy pro  $\frac{1}{2} < p < 1$  spojitá na  $\mathbb{R}^2$ , a proto lipschitzovská v proměnné  $y$ . Předpoklady Picard-Lindelöfovy věty jsou splněny pro libovolný obdélník  $D \subset \mathbb{R}^2$  a ze stejných důvodů jako v případě  $p \geq 1$  existuje jednoznačné řešení úlohy (3.2)  $y = y(x)$  na  $\mathbb{R}$ .

- $p = \frac{1}{2}$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin |h|}{h} \quad (3.9)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin |h|}{h} = 1 \quad (3.10)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin |h|}{h} = -1 \quad (3.11)$$

Derivace  $f_y(x, y)$  v bodě  $(0, 0)$  neexistuje. Existence jednostranných limit nám však ještě dává možnost vyšetřit lipschitzovskost funkce  $f(x, y)$  vzhledem k proměnné  $y$  na okolí bodu  $(0, 0)$ . Chceme tedy najít konstantu  $L > 0$  tak, aby platilo

$$\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] \forall y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b] : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \quad (3.12)$$

### 3.2. JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ

V našem případě

$$\begin{aligned}
 & \left| \sin \sqrt{x^2 + y_1^2} - \sin \sqrt{x^2 + y_2^2} \right| = \\
 & = \left| 2 \cos \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{x^2 + y_2^2}}{2} \sin \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2}}{2} \right| \leq \\
 & \leq \left| 2 \sin \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2}}{2} \right| \leq \left| 2 \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2}}{2} \right| = \\
 & = \left| \sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2} \right| = \frac{|y_1^2 - y_2^2|}{|\sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{x^2 + y_2^2}|} \leq \frac{|y_1^2 - y_2^2|}{|\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}|} = \\
 & = \frac{|y_1 + y_2||y_1 - y_2|}{|y_1| + |y_2|} \leq \frac{|y_1| + |y_2|}{|y_1| + |y_2|} |y_1 - y_2| = |y_1 - y_2|. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Nalezli jsme pro  $p = \frac{1}{2}$  konstantu  $L = 1$  na oblasti obsahující bod  $(0, 0)$ . Funkce  $f(x, y)$  je tedy vzhledem k proměnné  $y$  lipchitzovská na libovolném obdélníku  $D \subset \mathbb{R}^2$  a splňuje tak předpoklady Picard-Lindelöfovy věty. Jednoznačné řešení úlohy (3.2) pro  $p = \frac{1}{2}$  existuje opět na  $\mathbb{R}$ .

- $0 < p < \frac{1}{2}$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} 2ph^{2p-1} \cdot \cos h^{2p} \tag{3.14}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} 2ph^{2p-1} = +\infty \tag{3.15}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} 2ph^{2p-1} = -\infty \tag{3.16}$$

Derivace  $f_y(x, y)$  v bodě  $(0, 0)$  neexistuje. Protože jsou jednostranné limity v počátku neomezené, nemůže existovat konstanta  $L > 0$  tak, aby

$$\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] \forall y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b] : \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L. \tag{3.17}$$

Funkce  $f(x, y)$  proto nemůže být na obdélníku obsahujícím počátek lipschitzovská v proměnné  $y$ .

Předpoklady Picard-Lindelöfovy věty jsou pro tento parametr díky spojitosti funkce  $f_y(x, y)$  splněny pouze na obdélníku neobsahujícím bod  $(0, 0)$ .

Protože

$$\max_{\mathbb{R}} y'(x) = \max_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2)^p = 1,$$

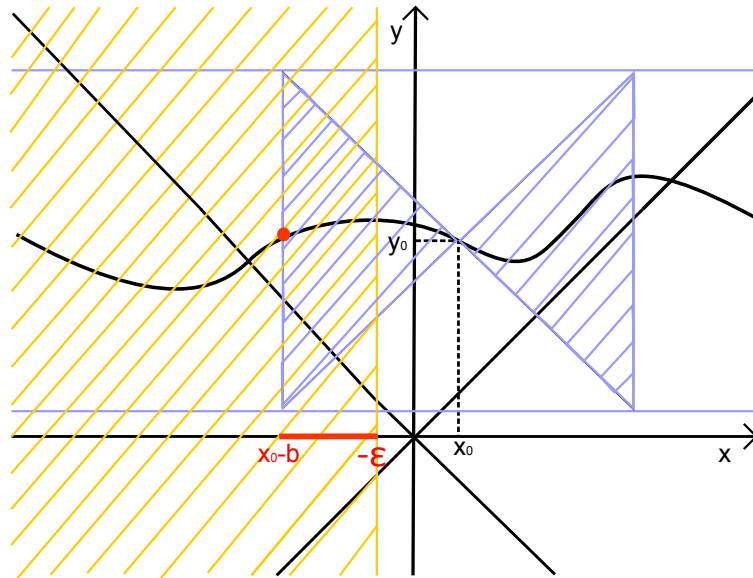
nemůže řešení s počáteční podmínkou, která splňuje  $|y_0| > |x_0|$ , procházet počátkem. Pokud volíme obdélník  $D$  tak, že  $b < |y_0|$  a  $a > b$ , je  $h = b$  a obdélník  $D$  neobsahuje počátek. Řešení je na intervalu daném tímto  $h$  určeno jednoznačně. Číslo  $b$  lze zvolit

### 3.2. JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ

tak, aby  $x_0 - h < 0$  a jednoznačné řešení existovalo na intervalu  $[x_0 - h, -\epsilon] \subset I$ ,  $\epsilon > 0$ . Zvolme nyní nový obdélník

$$G = \{(x, y) : x \leq -\epsilon, |y| \leq c\}, \quad \epsilon, c > 0,$$

ve kterém také leží část řešení s počáteční podmínkou  $(x_0, y_0)$  na intervalu  $[x_0 - h, -\epsilon]$ . Protože funkce  $f(x, y)$  je na obdélníku  $G$  spojitá a omezená, lze využít kontinuační věty (věta 2.6) a řešení prodloužit. Obdélník  $G$  neobsahuje bod  $(0, 0)$ , funkce  $f(x, y)$  je na něm lipschitzovská v proměnné  $y$  a proto můžeme řešení jednoznačně prodloužit směrem vlevo. Analogicky můžeme volit číslo  $b$  také tak, aby  $x_0 + h > 0$  a řešení prodloužit na pravou stranu. Situace je pro ilustraci zobrazena na obrázku 3.1. Řešení úlohy (3.2) je proto pro  $0 < p < \frac{1}{2}$  s takto danou počáteční podmínkou určeno jednoznačně na  $\mathbb{R}$ .



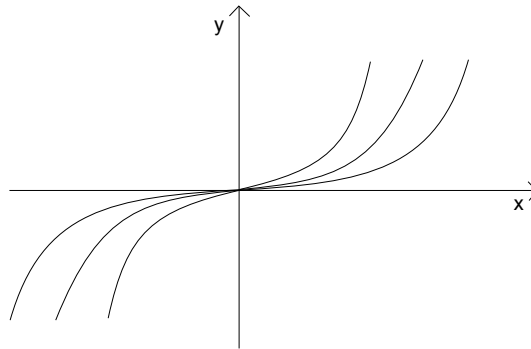
Obrázek 3.1: Kontinuace řešení pro počáteční podmínku  $|y_0| > |x_0|$ .

Pro počáteční podmínku, pro kterou platí  $|y_0| \leq |x_0|$ , můžeme obdélník  $D$  volit tak, že  $a < |x_0|$  a  $a < b$ , abychom zaručili, že nebude obsahovat bod  $(0, 0)$ . Pro číslo  $h$  určující interval  $I$  platí  $h = a$ . S využitím kontinuační věty (věta 2.6) lze řešení prodloužit tak, že výsledné intervaly, na kterých je řešení určeno jednoznačně, jsou  $I = [\epsilon, +\infty)$  pro  $x_0 > 0$  a  $I = (-\infty, -\epsilon]$  pro  $x_0 < 0$ , kde  $\epsilon > 0$ .

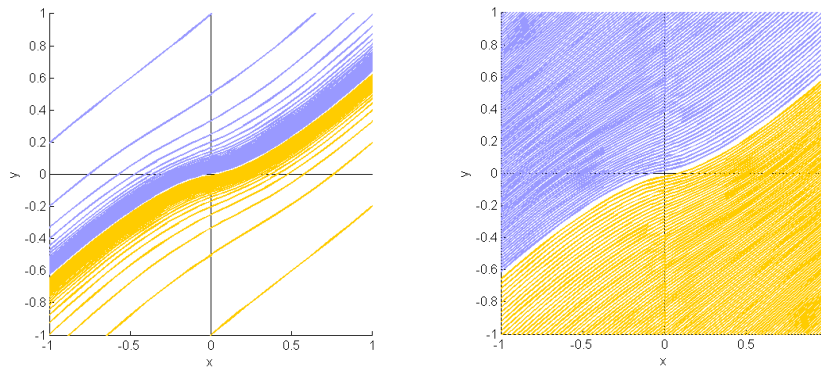
V případě, že obdélník  $D$  obsahuje i počátek, nejsou předpoklady Picard-Lindelöfově věty splněny. To ale neznamená, že by řešení nemohlo být dáno jednoznačně. Protože vně libovolně malého okolí bodu  $(0, 0)$  jsou řešení dána jednoznačně, může hypoteticky nastat pouze případ nejednoznačnosti řešení v bodě  $(0, 0)$  vytvořením „vějíře“ řešení, viz obrázek 3.2. Provedeme numerický experiment, kdy počáteční podmínku volíme

### 3.2. JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ

jako  $y(0) = \frac{1}{n}$ , pro  $|n|$  dostatečně velké. Přibližujeme se tedy s počáteční podmínkou k počátku pro  $n > 0$  shora a pro  $n < 0$  zdola. Na obrázku (3.3) vlevo je vidět, že se k sobě řešení s těmito počátečními podmínkami přibližují a není tak prostor pro onen „vějíř“ řešení vycházející z počátku. Podobně lze jednoznačnost ilustrovat obrázkem 3.3 vpravo, kde jsou počáteční podmínky voleny ekvidistantně. Na základě numerických experimentů a výše uvedených úvah lze vyslovit hypotézu, že řešení diferenciální rovnice (3.2) s hodnotou parametru  $p \in (0, \frac{1}{2})$  procházející počátkem je určeno jednoznačně. Důkaz této hypotézy však bude vyžadovat jiné analytické metody než je využití Picard-Lindelöfovy věty.



Obrázek 3.2: Případné nejednoznačné řešení pro  $x(0) = 0$ .



Obrázek 3.3: Vlevo - Řešení s počátečními podmínkami, které se přibližují k počátku. Vpravo - Řešení s ekvidistantními počátečními podmínkami.

Shrňme tedy, že pro  $p \geq \frac{1}{2}$  je řešení úlohy (3.2)  $y(x)$  dáno jednoznačně na  $\mathbb{R}$ . Pro parametr  $p > \frac{1}{2}$  je to díky spojitosti  $f_y(x, y)$ , která nám zaručuje i lipschitzovskost v proměnné  $y$ , a pro  $p = \frac{1}{2}$  díky samotné lipschitzovskosti funkce  $f(x, y)$  v proměnné  $y$ . Pro  $0 < p < \frac{1}{2}$  je řešení dáno jednoznačně na  $\mathbb{R}$  pro počáteční podmínky, které splňují  $|y_0| >$

### 3.2. JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ

---

$|x_0|$ , díky využití kontinuační věty. Pro počáteční podmínky, pro které platí  $|y_0| \leq |x_0|$ , jsou řešení dána jednoznačně na intervalech  $I = [\epsilon, +\infty)$  pro  $x_0 > 0$  a  $I = (-\infty, -\epsilon]$  pro  $x_0 < 0$ ,  $\epsilon > 0$ . Na intervalu obsahujícím nulu řešení existuje, ale o jeho jednoznačnosti neumíme rozhodnout.

### 3.3 Obecné vlastnosti řešení

#### 3.3.1 Extrémy řešení

Řešení má extrémy ve stacionárních bodech, kde je nenulová jeho druhá derivace a to kladná v případě minima a záporná v případě maxima.

Protože  $f(x, y)$  je spojitá funkce na  $\mathbb{R}^2$ , dostáváme stacionární body jako řešení rovnice  $y'(x) = 0$ , tj.

$$\sin(x^2 + y^2)^p = 0. \quad (3.18)$$

Řešení vyjádříme v implicitním tvaru v závislosti na parametru  $k \in \mathbb{N}$

$$x^2 + y^2 = \sqrt[p]{k\pi}. \quad (3.19)$$

Jedná se o kružnice se středem v počátku a poloměrem  $\sqrt[p]{k\pi}$ . Bod  $(0, 0)$  je také řešením rovnice (3.18), ale budeme se mu věnovat až v závěru kapitoly 3.3.2 a do té doby jej nebudeme uvažovat.

Druhá derivace podle proměnné  $x$  má tvar

$$y'' = \cos(x^2 + y^2)^p \cdot p(x^2 + y^2)^{p-1} \cdot 2(x + y \sin(x^2 + y^2)^p). \quad (3.20)$$

Ve stacionárních bodech nabývá hodnot

$$y'' = \begin{cases} 2p(k\pi)^{\frac{p}{p-1}} x, & k = 2l, \\ -2p(k\pi)^{\frac{p}{p-1}} x, & k = 2l - 1, \quad l \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Pro  $x > 0$  leží na kružnicích s poloměrem  $\sqrt[p]{2l\pi}$  minima a na kružnicích s poloměrem  $\sqrt[p]{2l-1\pi}$  maxima. Pro  $x < 0$  je to naopak, jak je také zobrazeno na obrázku 3.4. Pro body  $(0, \sqrt[p]{k\pi})$  je  $y''$  nulová. Tyto body nejsou extrémy řešení, ale jsou inflexními body, jak bude ukázáno v kapitole 3.3.2 nebo je také vidět z obrázku 3.5.

Znaménko derivace se střídá pravidelně při přechodech přes kružnice s extrémy. Řešení proto střídavě roste a klesá, můžeme říct, že má oscilatorický charakter, viz obrázek 3.4.

Pro  $p > \frac{1}{2}$  se k sobě kružnice s extrémy přibližují a frekvence oscilací narůstá, pro  $p = \frac{1}{2}$  jsou od sebe konstantně vzdáleny a pro  $p < \frac{1}{2}$  se od sebe oddalují, frekvence oscilací klesá obrázek 3.6.

#### 3.3.2 Inflexní body, konvexnost, konkávnost

V inflexních bodech je  $y'' = 0$  a  $y''' \neq 0$ . Pro duhou derivaci podle proměnné  $x$  ze vztahu (3.20) musí platit

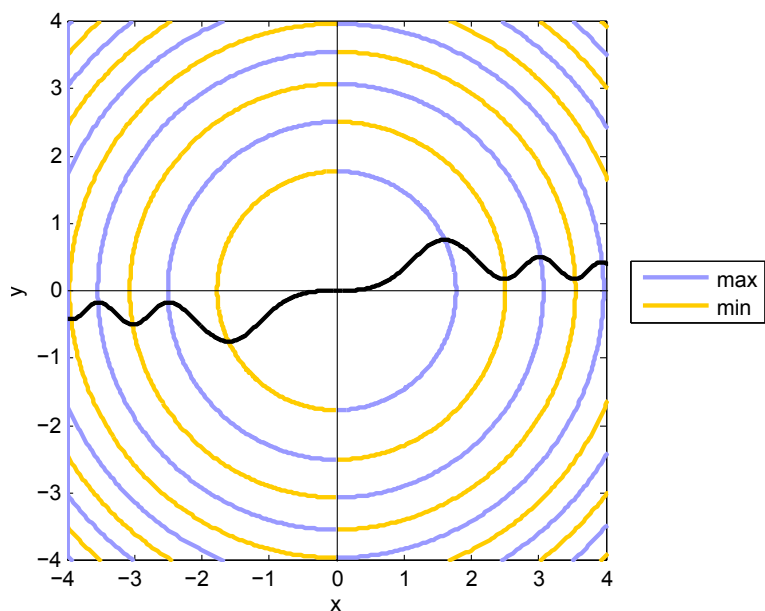
$$\cos(x^2 + y^2)^p \cdot p(x^2 + y^2)^{p-1} \cdot 2(x + y \sin(x^2 + y^2)^p) = 0. \quad (3.22)$$

Tuto rovnost splňují body ležící na křivkách

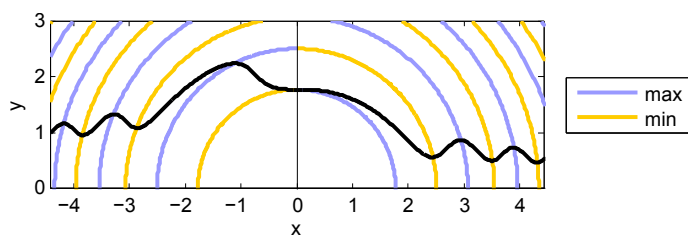
- $x^2 + y^2 = \sqrt[p]{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \quad k \in \mathbb{N},$



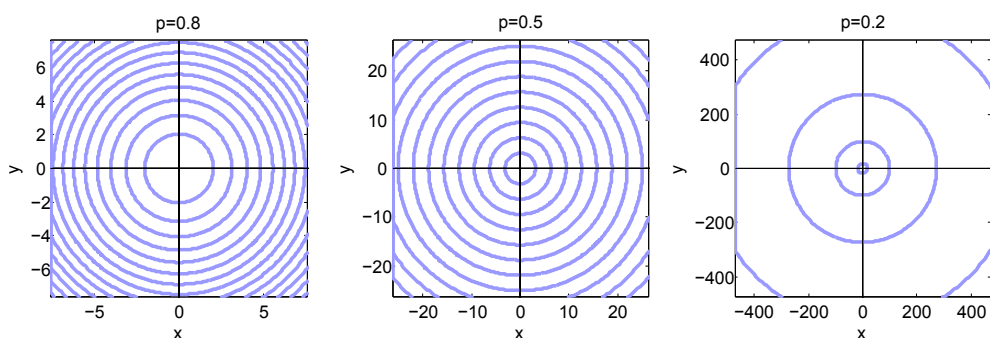
### 3.3. OBECNÉ VLASTNOSTI ŘEŠENÍ



Obrázek 3.4: Stacionární body.



Obrázek 3.5: Průchod řešení bodem styku kružnic s extrém.



Obrázek 3.6: Vzdálenost kružnic, na kterých leží stacionární body řešení pro různé hodnoty parametru  $p$ .

### 3.3. OBECNÉ VLASTNOSTI ŘEŠENÍ

- $x + y \sin(x^2 + y^2)^p = 0$ .

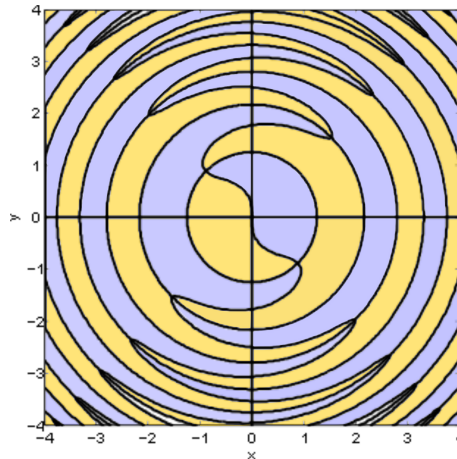
Třetí derivace

$$y''' = 2p(1 + y''y + y'y') \cos(x^2 + y^2)^p (x^2 + y^2)^{p-1} + 4p(x + yy')^2 \cos(x^2 + y^2)^p (x^2 + y^2)^{p-2} - 4p^2(x + yy')^2 \sin(x^2 + y^2)^p (x^2 + y^2)^{p-1} \quad (3.23)$$

je pro body ležící na těchto křivkách (až na body kde se křivky protínají) nenulová a tyto body jsou proto inflexní. Jsou zobrazeny na obrázku 3.7. Body, kde se obě křivky protínají, se také projevují jako inflexní viz. obrázek 3.8. Tyto průsečíky leží na přímkách  $y = \pm x$ .

Vraťme se nyní k bodu  $(0, 0)$ . První derivace je v něm nulová pro libovolné  $p > 0$ , druhá pouze pro  $p > 1$  a třetí pro  $p > 2$ , jinak neexistují. Nelze takto v žádném z případů rozhodnout, zda je bod inflexní. Protože ale spojitě řešení při průchodu počátkem změni znaménko druhé derivace, bod  $(0, 0)$  se jeví jako inflexní pro všechny parametry  $p > 0$ .

Podobně jako tomu bylo u extrémů, se znaménko druhé derivace přechodem přes křivky pravidelně střídá, konvexnost se mění na konkávnost a naopak, viz obrázek 3.7.



Obrázek 3.7: Inflexní body, oblasti konkávnosti řešení žlutě, oblasti konvexnosti modře.

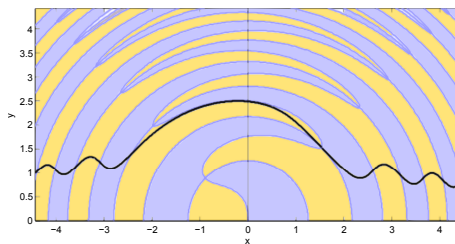
#### 3.3.3 Symetrie

Jak jsme se zmínili v úvodu kaptioly 3, izoklinami naší rovnice jsou kružnice se středem v počátku. Všechna řešení procházející jednou izoklinou mají v bodech průniku stejnou derivaci, jejíž hodnota je dána funkcí sinus v závislosti na poloměru této kružnice. Díky symetrii izoklin podle počátku a lichosti funkce sinus musí být symetrická i každá dvě řešení úlohy (3.2) daná počátečními podmínkami symetrickými podle počátku viz obrázek (3.9). Pokud je tedy řešením rovnice  $y' = \sin(x^2 + y^2)^p$  funkce  $y = y(x)$ , je jejím řešením také funkce  $z(x) = -y(-x)$ :

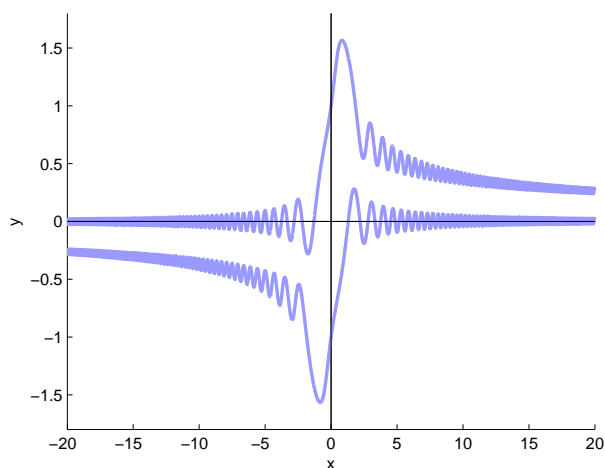
$$z'(x) = y'(-x) = \sin(x^2 + (y(-x))^2)^p = \sin(x^2 + (z(x))^2)^p. \quad (3.24)$$

### 3.3. OBECNÉ VLASTNOSTI ŘEŠENÍ

---



Obrázek 3.8: Průchod řešení bodem, kde se křivky s inflexními body protínají.



Obrázek 3.9: Symetrie řešení.

Této skutečnosti využijeme a budeme se v některých částech textu bez újmy na obecnosti zabývat pouze kladnými hodnotami proměnné  $x$ .

## 3.4 Numerická řešení

Nyní již máme obecnou představu o tom, jak řešení vypadá. Vykazuje oscilatorické chování, izoklinami jsou kružnice, a proto i maxima, minima a inflexní body leží na kružnicích. Ukázali jsme také, že řešení jsou určitým způsobem symetrická a můžeme tak bez újmy na obecnosti zobrazovat řešení spíše pro  $x > 0$ .

Víme také, jak se chovají izokliny v závislosti na parametru  $p$ . Pro  $p = \frac{1}{2}$  jsou rovnoměrně rozloženy, pro  $p < \frac{1}{2}$  se od sebe oddalují a pro  $p > \frac{1}{2}$  se k sobě přibližují stejně, jako to bylo popsáno pro v kapitole 3.3.1 pro kružnice se stacionárními body.

Proto si zobrazme některá numericky spočtená řešení právě pro parametry  $p > \frac{1}{2}$ ,  $p = \frac{1}{2}$  a  $p < \frac{1}{2}$ , které zvolíme pevně a budeme měnit počáteční podmínku.

Počáteční podmínku volíme tak, aby neležela na žádné význačné kružnici a vykreslené řešení tak bylo co možná nejobecnější. Na základě skutečností, které jsme uvedli v kapitole 3.2 o jednoznačnosti řešení můžeme bez újmy na obecnosti volit  $x_0 = 0$ . Předpokládáme tedy jednoznačné řešení procházející bodem  $(0, 0)$  i pro parametr  $p \in (0, \frac{1}{2})$ . Hodnotu  $y_0$  pak volíme jako malou odchylku od nějaké význačné kružnice.

Na obrázcích jsou zobrazena řešení společně s křivkami, na nichž leží stacionární a inflexní body.

- $p > \frac{1}{2}$

Zvolme konkrétně  $p = 1$ . Obrázky 3.11 až 3.10

- $p = \frac{1}{2}$

Obrázky 3.14 až 3.13.

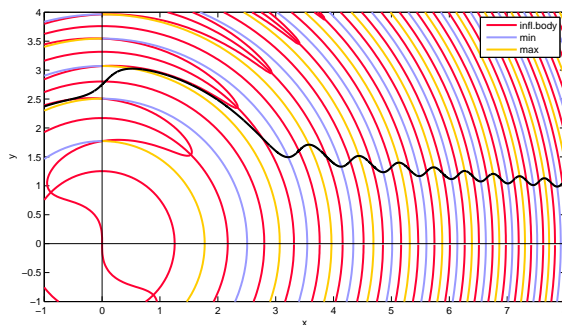
- $p < \frac{1}{2}$

Zvolme konkrétně  $p = \frac{1}{4}$ . Obrázky 3.17 až 3.16

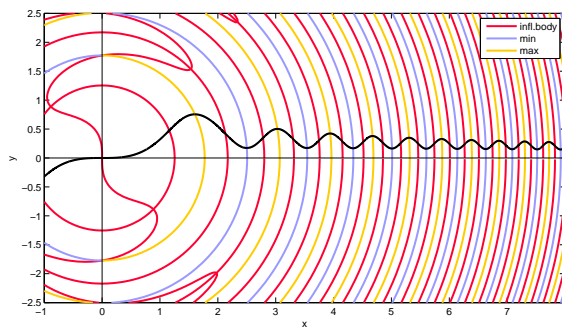
Z obrázků je zřejmé, že v případě  $p = 1$  je amplituda klesající, zatímco pro  $p = \frac{1}{4}$  je rostoucí. To nás vede na úvahy o asymptotickém chování řešení. Nabízí se otázky, pro které parametry by mohla být řešení konvergentní, pro které divergentní a zda je tato jejich vlastnost závislá na počátečních podmínkách. Tomuto tématu se budeme věnovat v kapitole 3.6.

### 3.4. NUMERICKÁ ŘEŠENÍ

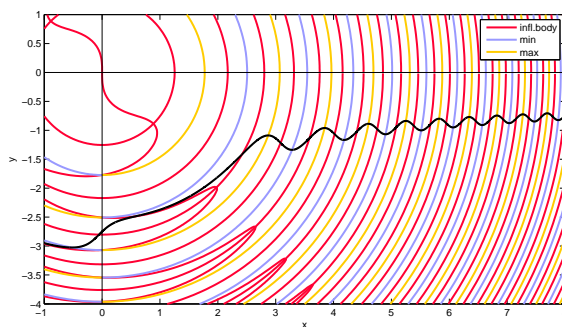
---



Obrázek 3.10: Řešení pro  $y(0) = \sqrt{\frac{5}{2}}\pi - \epsilon$ ,  $p = 1$ .



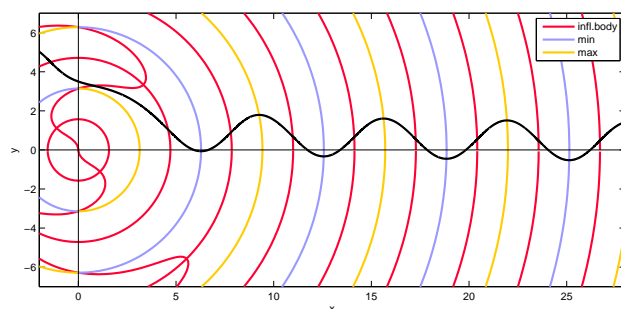
Obrázek 3.11: Řešení pro  $y(0) = 0$ ,  $p = 1$ .



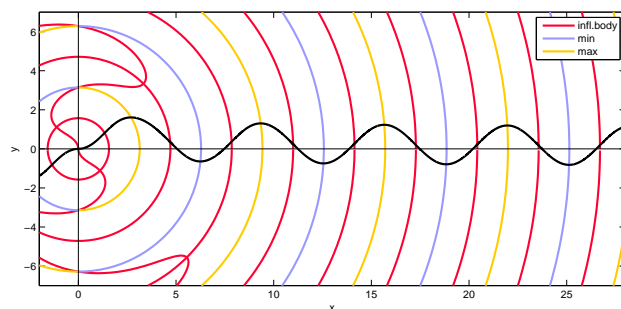
Obrázek 3.12: Řešení pro  $y(0) = -\sqrt{\frac{5}{2}}\pi + \epsilon$ ,  $p = 1$ .

### 3.4. NUMERICKÁ ŘEŠENÍ

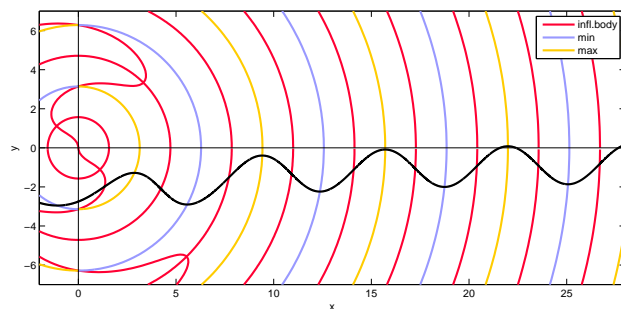
---



Obrázek 3.13: Řešení pro  $y(0) = \pi + \epsilon$ ,  $p = 0.5$ .



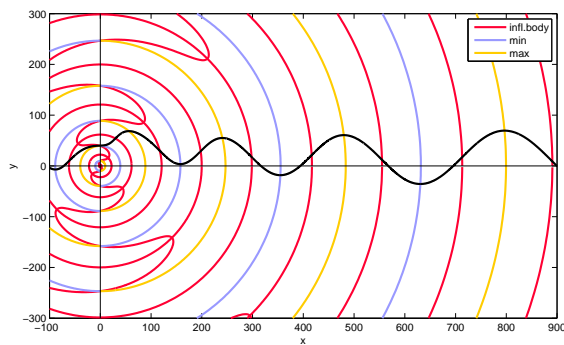
Obrázek 3.14: Řešení pro  $y(0) = 0$ ,  $p = 0.5$ .



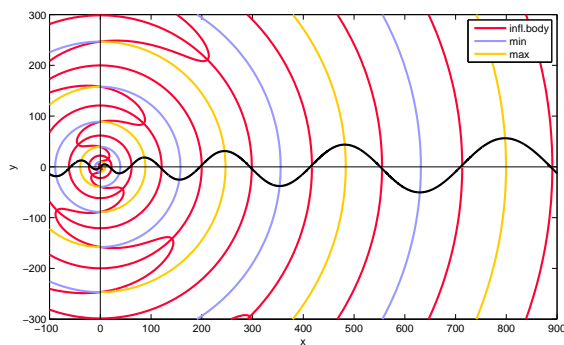
Obrázek 3.15: Řešení pro  $y(0) = -\pi + \epsilon$ ,  $p = 0.5$

### 3.4. NUMERICKÁ ŘEŠENÍ

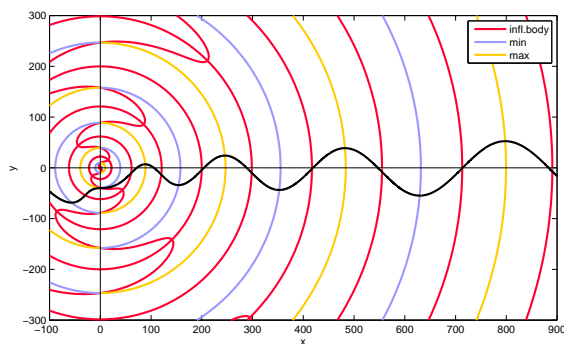
---



Obrázek 3.16: Řešení pro  $y(0) = 4\pi^2 + \epsilon$ ,  $p = 0.25$ .



Obrázek 3.17: Řešení pro  $y(0) = 0$ ,  $p = 0.25$ .

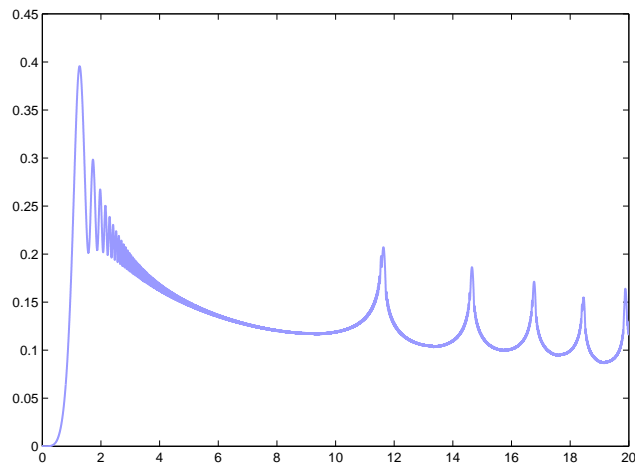


Obrázek 3.18: Řešení pro  $y(0) = -4\pi^2 - \epsilon$ ,  $p = 0.25$ .

### 3.5 Numerické vlastnosti

Při numerickém výpočtu řešení úlohy (3.2) jsme narazili na následující problém: Jak bylo řečeno, pro hodnoty parametru  $p > \frac{1}{2}$  s rostoucí hodnotou proměnné  $x$  narůstá také frekvence oscilací a při výpočtu pak dochází ke ztrátě požadované přesnosti. Tento problém se projevuje více či méně v závislosti na volbě metody.

Metody s pevným krokem jsou v tomto případě naprosto nevhodné a to ani při zmenšení dělicího kroku. Na obrázku 3.19 je pro ilustraci zobrazeno řešení vypočtené pomocí Eulerovy explicitní metody s krokem  $10^{-3}$ , parametrem  $p = 2$  a počáteční podmínkou  $y_0 = 0$ .



Obrázek 3.19: Řešení vypočtené Eulerovou explicitní metodou.

Ale ani metody s proměnným krokem nemusí být vždy efektivní. Na obrázku 3.20 je zobrazeno řešení opět pro parametr  $p = 2$  a počáteční podmínkou  $y_0 = 0$ , tentokrát ale pomocí metody `ode45` systému MATLAB, která pracuje s proměnným krokem.

Pro zajištění dobrých výsledků je třeba zmenšit toleranci relativní a absolutní chyby při výpočtu a to za cenu případné větší časové náročnosti. Řešení pomocí metody `ode45` se zvýšenými nároky na přesnost je pro stejný parametr a počáteční podmínku jako v předchozích příkladech zobrazeno na obrázku 3.21.

V některých případech lze využít substituce  $x = \ln(t + 1)$  a převedení úlohy (3.2) na úlohu

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{t+1} \sin((\ln(t+1))^2 + y^2)^p, & p > 0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.25)$$

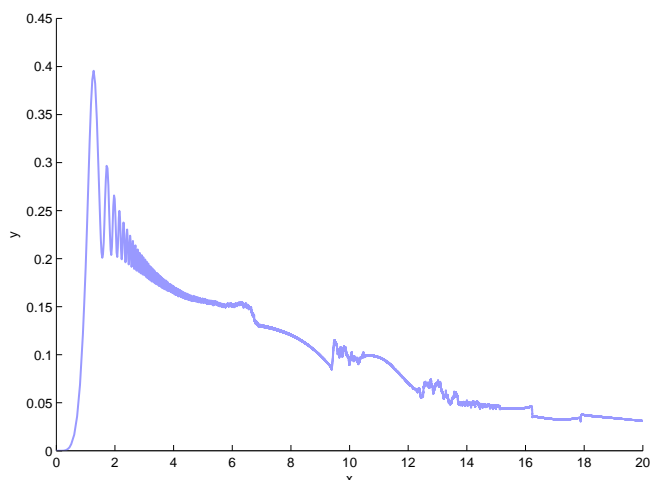
Zajistí se tak, že nárůst frekvence se zpomalí a výpočet řešení tak i s menšími nároky na přesnost dává lepší výsledek než výpočet řešení původní úlohy, viz obrázek 3.22.

Tato substituce ale není vhodná pro výpočty s velkou hodnotou proměnné  $x$  kvůli časové a paměťové náročnosti. Není také vždy spolehlivá a řešení často nevykazuje o mnoho lepší

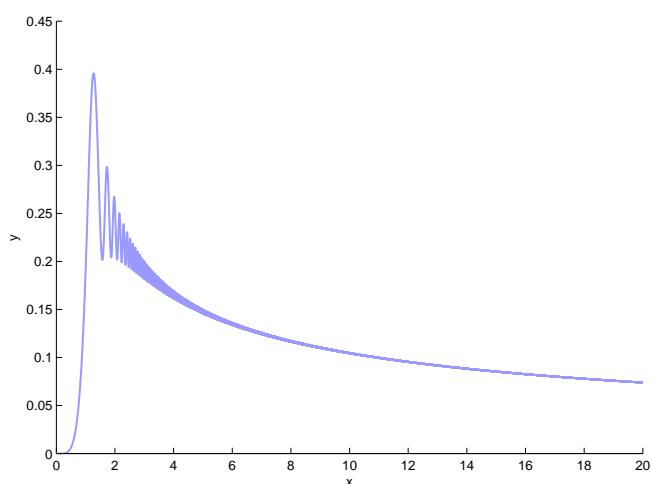


### 3.5. NUMERICKÉ VLASTNOSTI

---

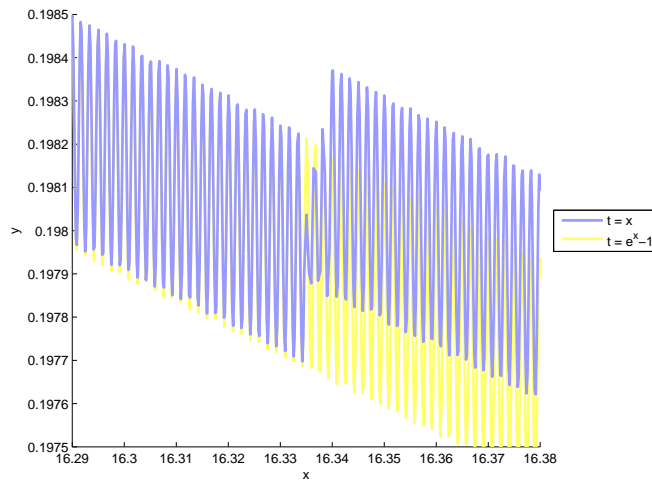


Obrázek 3.20: Řešení metodou ode45.



Obrázek 3.21: Řešení metodou ode45 se zvýšenými nároky na přesnost.

výsledky než řešení původní úlohy. Nedá se proto použít univerzálně. Vzhledem k těmto faktům jsou nakonec v celé práci všechny výpočty prováděny metodou ode45 se zvýšenými nároky na přesnost, s ohledem na velikost parametru  $p$  a maximální hodnotu proměnné  $x$ , pro kterou chceme řešení vypočítat a to tak, abychom optimalizovali kvalitu výsledků a čas věnovaný výpočtu.



Obrázek 3.22: Detail řešení metodou ode45 původní a substituované úlohy se stejnou tolerancí.

## 3.6 Asymptotické chování řešení

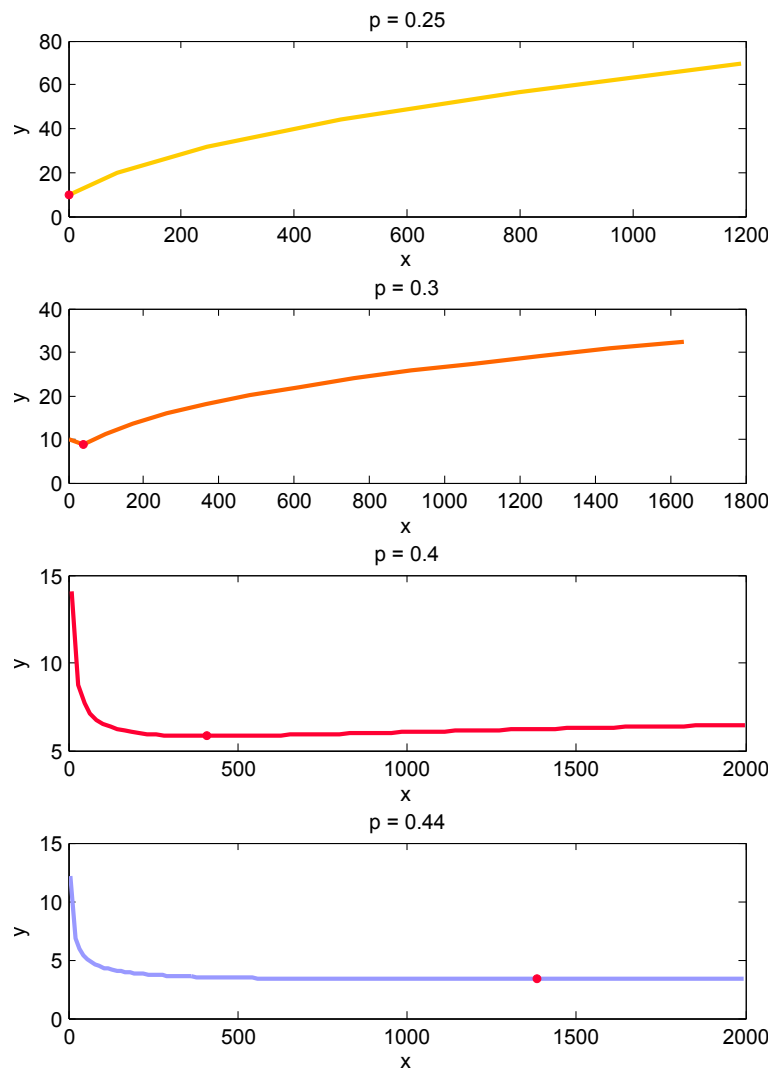
V kapitole 3.4 jsme zobrazili řešení pro některé parametry a uvedli, že se zdá, že je amplituda řešení pro některé hodnoty parametru  $p$  klesající a proto konvergentní a pro některé hodnoty rostoucí. V této kapitole se proto budeme věnovat tomu, za jakých podmínek by řešení mohlo být konvergentní, kdy je omezené a kdy jeho amplituda roste a řešení diverguje.

### 3.6.1 Zlomový parametr

Nabízí se otázka, zda existuje parametr  $p$  takový, že amplituda řešení zůstává konstantní a zda je tato hodnota závislá na počáteční podmínce. Z předchozího textu je zřejmé, že hodnota tohoto parametru bude v okolí  $\frac{1}{2}$ . Toto je podpořeno také faktem, že právě pro parametr  $p = \frac{1}{2}$  jsou od sebe kružnice, na kterých leží extrémy řešení, konstantně vzdáleny. Provedme nyní numerický experiment, kdy zvolíme pevně počáteční podmínku a měníme hodnotu parametru  $p$ . Na obrázku 3.23 jsou zobrazeny linie spojující pouze maxima řešení a červeně jsou vyznačeny jejich minimální hodnoty.

Zdá se, že pro všechny počáteční podmínky a pro  $p < \frac{1}{2}$  vždy existuje hodnota proměnné  $x_m$  taková, že se amplituda řešení pro  $x > x_m$  začne zvětšovat, tj. že existuje minimum z maxim. Ani při dalších experimentech se nepodařilo najít parametr  $p < \frac{1}{2}$ , který by toto nespĺňoval. Oproti tomu, pro parametr  $p = \frac{1}{2}$  se nepodařilo najít dostatečně velkou hodnotu proměnné  $x$  takovou, aby se amplituda zvětšovala, ale ani takovou, aby zůstala konstantní a její hodnota neustále klesá. Stejně tak je amplituda klesající pro parametr  $p > \frac{1}{2}$ . Usuzujeme tedy, že hodnota parametru  $p = \frac{1}{2}$  je zlomová pro všechny počáteční

### 3.6. ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ ŘEŠENÍ



Obrázek 3.23: Linie spojující maxima řešení pro počáteční podmínku  $y(0) = 10$

podmínky. Hypoteticky by tedy pro parametr  $p \leq \frac{1}{2}$  byla amplituda řešení od nějaké hodnoty proměnné  $x$  rostoucí a pro parametr  $p > \frac{1}{2}$  pro  $x > 0$  vždy klesající.

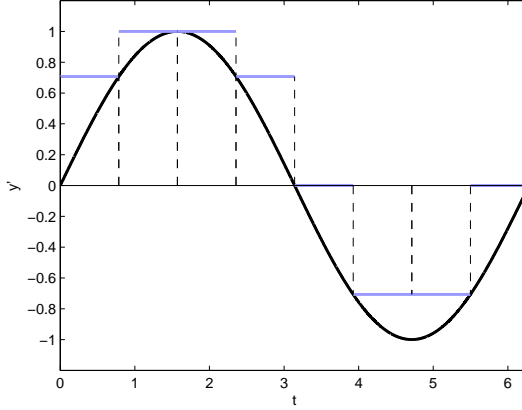
#### 3.6.2 Omezení

V této části textu budeme bez újmy na obecnosti uvažovat  $x_0 = 0$ .

Pro řešení s klesajícími maximy by nás mohlo zajímat, zda se řešení asymptoticky blíží k nějaké například periodické funkci nebo třeba ke konkrétní hodnotě. Ukázat, že řešení klesá, by šlo omezením shora funkcí, která by byla také klesající. Abychom omezili shora řešení, musíme shora omezit jeho derivaci. Využijeme toho, že izoklinami jsou kružnice. Derivaci pak můžeme vyjádřit v závislosti na proměnné  $t = r^{2p}$ , kde  $r$  je poloměr izoklin, jako  $y' = \sin t$ . Nejjednodušším způsobem je omezení derivace po částech konstantní funkcí

### 3.6. ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ ŘEŠENÍ

tak, že její periodu  $2\pi$  rozdělíme na sudý počet stejně dlouhých intervalů, na kterých derivaci omezíme, viz obrázek 3.24.



Obrázek 3.24: Omezení derivace po částech konstantní funkcí.

Protože derivace je omezena po částech konstantní funkcí, je samotné řešení omezeno funkcí po částech lineární.

Uvažujme rozdělení periody derivace na  $n = 2d$  intervalů  $[i\frac{\pi}{d}, (i+1)\frac{\pi}{d})$ , kde  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Délka každého z nich je tedy  $\frac{\pi}{d}$ . Označme  $i$ -tý interval jako  $I_i$ . Hodnota konstantní funkce, která na něm omezuje derivaci je

$$a_i = \sup_{t \in I_i} \sin t.$$

Tato hodnota dává směrnici lineární funkce  $y = ax + b$  omezující řešení mezi dvěma kružnicemi s poloměry  $r_i$  a  $r_{i+1}$ , které jsou dané krajními hodnotami intervalu  $I$  jako

$$r_i = \sqrt[2p]{i\frac{\pi}{d}} \quad \text{a} \quad r_{i+1} = \sqrt[2p]{(i+1)\frac{\pi}{d}}. \quad (3.26)$$

Svislý posun  $b$  je určen tak, aby byla výsledná funkce spojitá. Každý přechodový bod, ve kterém se lineární funkce stýkají je dán jako řešení soustavy

$$x_i^2 + y_i^2 = \sqrt[2p]{i\frac{\pi}{d}}, \quad (3.27)$$

$$y_i = a_i(x_i - x_{i-1}) + y_{i-1}, \quad \text{kde} \quad a_i = \sup_{t \in I} \sin t. \quad (3.28)$$

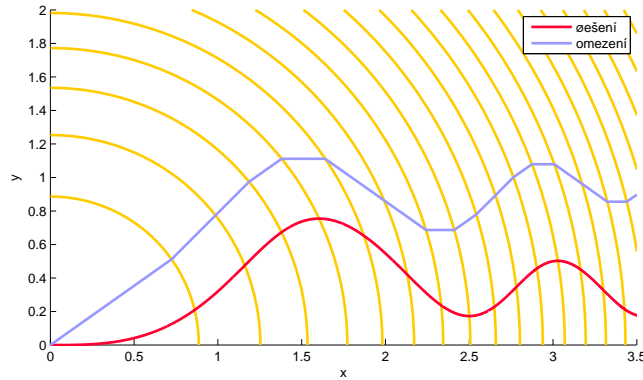
Tyto body se dají rekurentně vyjádřit jako

### 3.6. ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ ŘEŠENÍ

$$x_i = \frac{-a_i b + \sqrt{(a_i^2 + 1) \sqrt[2p]{(i \frac{\pi}{d})} - b^2}}{a_i^2 + 1}, \quad (3.29)$$

$$y_i = \frac{b + a_i \sqrt{(a_i^2 + 1) \sqrt[2p]{(i \frac{\pi}{d})} - b^2}}{a_i^2 + 1}, \quad (3.30)$$

kde  $b = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$  pro zkrácení zápisu. První bod je dán počáteční podmínkou  $(x_0, y_0)$ . Výsledné omezení je zobrazeno na obrázku 3.25.



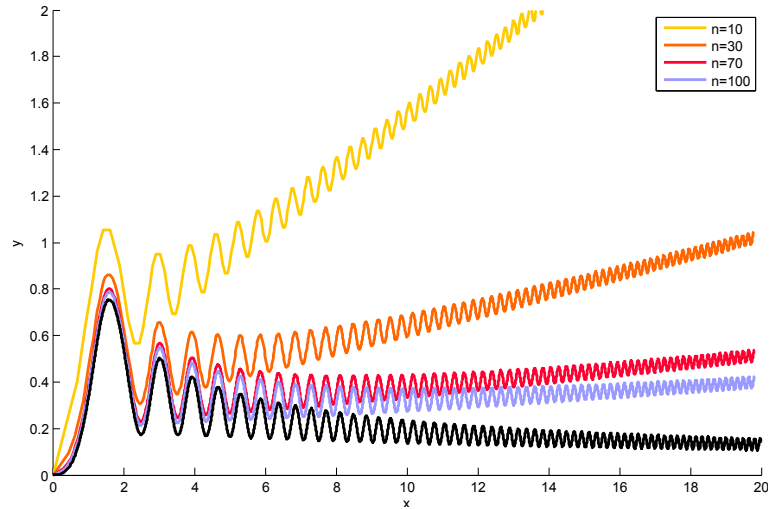
Obrázek 3.25: Omezení řešení po částech lineární funkcí pro  $n = 8$ .

Abychom určili, zda je tato omezující funkce klesající, bylo by vhodné mít vztah pro dvě po sobě následující maxima. Tento vztah je samozřejmě analogický vztahu (3.30) s tím rozdílem, že uvažujeme pouze  $i = (2k - 1)d$ ,  $k \in \mathbb{N}$  a postupné dosazení  $(n - 1)$  předchozích bodů. Dostaneme tak vztah pro hodnotu  $k$ -tého maxima  $y_{M_k}$  závislou na hodnotě předchozího maxima  $y_{M_{k-1}}$ . První maximum je ale potřeba určit zvlášť, dosazením pouze  $d - 1$  předchozích bodů a počáteční podmínky. Složitost tohoto vztahu pro maxima je úměrná číslu  $n$ , tj. dělení periody derivace.

Protože nás toto omezení zajímá pouze pro parametr  $p > \frac{1}{2}$ , ilustrujme výsledky například pro hodnotu  $p = 1$ . Při dělení periody  $n = 6$ , resp.  $d = 3$ , jsou maxima omezující funkce pouze rostoucí. Při zvětšování hodnoty  $n$  sice maxima nejdříve klesají, ale za nějakou hodnotou opět začnou růst, jak je vidět z obrázku (3.26) pro některé hodnoty  $n$ .

Pro neomezenou hodnotu  $n$  by mohly být hodnoty maxim neustále klesající, ale kvůli jejich rekurentnímu vyjádření se nám tuto hypotézu nepodařilo dokázat.

Obdobné problémy nastávají při analogickém omezování zdola abychom případně ukázali rostoucí tendenci maxim pro  $p < \frac{1}{2}$ .



Obrázek 3.26: Omezení řešení po částech lineární funkcí pro různé hodnoty  $n$ .

#### 3.6.3 Atraktory

S ohledem na skutečnosti, které jsme uvedli v kapitole 3.6.1, se nejdříve zaměříme pouze na parametr  $p = \frac{1}{2}$ .

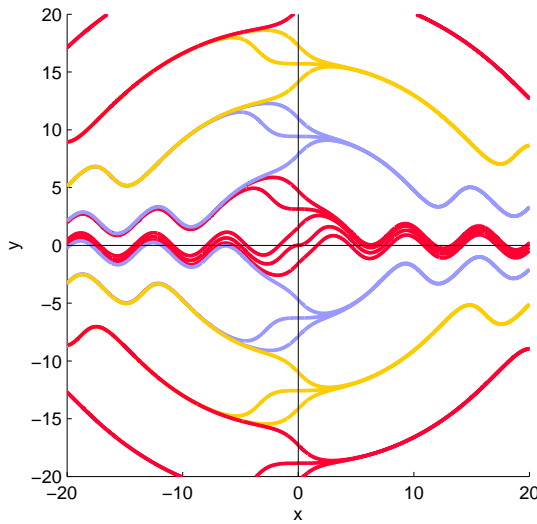
Zobrazme si pro tento parametr několik řešení s různými počátečními podmínkami. Pro počáteční podmínky z určité oblasti se k sobě řešení rychle přibližují a vykazují obdobné chování. Bez újmy na obecnosti se omezíme na počáteční podmínky, pro které je  $x_0 = 0$ . Pak lze oblasti charakterizovat pomocí hodnoty  $y_0$ . Vezměme si například  $x > 0$  a  $y_0 = 3\pi$ . Protože pro počáteční podmínky z intervalu  $y_0 \in [2\pi, 3\pi)$  je v bodě  $(0, y_0)$  derivace kladná, řešení jsou rostoucí v okolí počáteční podmínky a přibližují se k řešení splňující podmínku  $y(0) = 3\pi$ . Naopak řešení s počáteční podmínkou z intervalu  $y_0 \in (3\pi, 4\pi)$  mají v bodě  $(0, y_0)$  derivaci zápornou a k zmíněnému řešení s počáteční podmínkou  $y(0) = 3\pi$  se blíží shora. Intervaly lze pro parametr  $p = \frac{1}{2}$  zobecnit následovně

- $x > 0$ 
  - $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$  pro  $y_0 \geq 2\pi$ ,
  - $[-\pi, 2\pi)$ ,
  - $[-(2k+1)\pi, -(2k-1)\pi)$  pro  $y_0 < -\pi$ ,
  
- $x < 0$ 
  - $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$  pro  $y_0 \geq \pi$ ,
  - $[-2\pi, \pi)$ ,
  - $[-2(k+1)\pi, -2k\pi)$  pro  $y_0 < -2\pi$ ,

kde  $k \in \mathbb{N}$ . Celá situace je na obrázku 3.27.

Nabízí se dvě otázky, které spolu úzce souvisí:

### 3.6. ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ ŘEŠENÍ



Obrázek 3.27: Oblasti na kterých se k sobě řešení přitahují.

- Přibližují se k sobě řešení z jedné oblasti opravdu nekonečně blízko?
- Pokud ano, konvergují k funkci, která je pro každou z oblastí různá? Nebo se k sobě přibližují i funkce z různých oblastí a existuje pouze jedna funkce, která přitahuje všechna řešení nezávisle na počáteční podmínce?

Pokud by se k sobě řešení nepřibližovala, neměla by druhá otázka vůbec smysl. Ačkoli se skutečnost, že se k sobě řešení opravdu přibližují nepodařilo analyticky dokázat, byla ověřena experimentálně.

Pro lepší orientaci si můžeme zobrazit pouze maxima, jako na obrázku 3.28, kde jsou barevně odlišena řešení s počátečními podmínkami z různých oblastí. Odtud můžeme také pozorovat ono přibližování řešení ze stejných oblastí, ale zdá se, že konvergují k různým funkcím. Podívejme se nyní na to, jak vypadají křivky řešení v rovině dané  $y$  a  $y'$ . Jsou na obrázku 3.29. Na základě obdobných experimentů usuzujeme, že křivky konvergují k jednotkové kružnici se středem v počátku a to nezávisle na oblasti, ze které byly počáteční podmínky. To ale znamená, že řešení konvergují k periodické funkci s amplitudou rovnou jedné, pro jejíž maxima musí platit  $x_M = (2k - 1)\pi, k \in \mathbb{N}$  pro  $x > 0$ . Tyto vlastnosti má funkce  $y(x) = -\cos(x)$ .

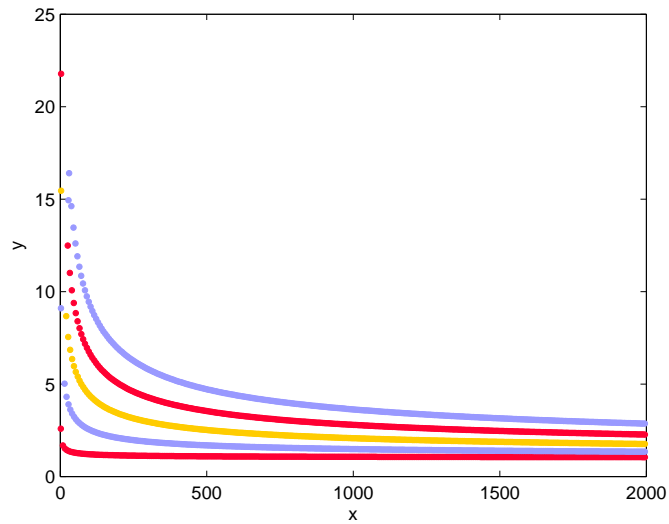
**Hypotéza 3.1.** *Řešení úlohy*

$$\begin{cases} y' = \sin(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.31)$$

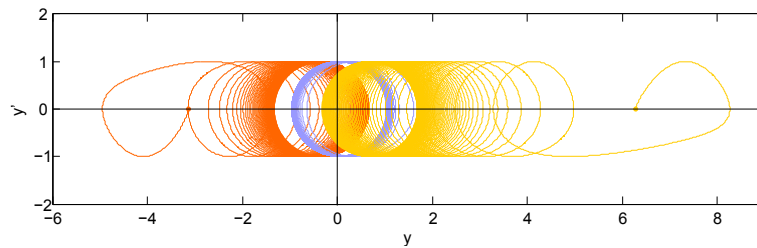
s libovolnou počáteční podmínkou se pro  $x > 0$  asymptoticky blíží k funkci

$$f(x) = -\cos x. \quad (3.32)$$

### 3.6. ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ ŘEŠENÍ



Obrázek 3.28: Maxima řešení s různými počátečními podmínkami.



Obrázek 3.29: Křivky zobrazující řešení v rovině  $y, y'$ .

Hypotéza 3.1 zatím není dokázána, ale numerický rozdíl řešení a atraktoru  $y(x) - f(x)$  řádově klesá k nule.

Vyvstává otázka, zda lze předchozí úvahy a z nich odvozenou hypotézu 3.1 zobecnit pro libovolný parametr  $p > 0$ . Pokusme se nyní odvodit, jaké vlastnosti by měla mít funkce, která by byla atraktorem.

Analogicky s případem  $p = \frac{1}{2}$  se řešení rozdělují podle hodnoty  $y_0$  i pro obecný parametr  $p > 0$

- $x > 0$ 
  - $\left[ \sqrt[p]{2k\pi}, \sqrt[p]{2(k+1)\pi} \right)$  pro  $y_0 \geq \sqrt[p]{2\pi}$ ,
  - $\left[ -\sqrt[p]{\pi}, \sqrt[p]{2\pi} \right)$ ,
  - $\left[ -\sqrt[p]{(2k+1)\pi}, -\sqrt[p]{(2k-1)\pi} \right)$  pro  $y_0 < -\sqrt[p]{\pi}$ ,



### 3.6. ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ ŘEŠENÍ

---

- $x < 0$   

$$\left[ \sqrt[p]{2^p(2k-1)\pi}, \sqrt[p]{2^p(2k+1)\pi} \right] \text{ pro } y_0 \geq \pi,$$

$$\left[ -\sqrt[p]{2^p 2\pi}, \sqrt[p]{2^p \pi} \right],$$

$$\left[ -\sqrt[p]{2^p 2(k+1)\pi}, -\sqrt[p]{2^p 2k\pi} \right] \text{ pro } y_0 < -\sqrt[p]{2^p 2\pi},$$

kde  $k \in \mathbb{N}$ . Opět bylo experimentálně ověřeno, že se k sobě řešení s různými počátečními podmínkami přibližují.

Předpokládejme, že atraktor existuje a označme ho  $g(x)$ . Prozatím uvažujme pouze  $x > 0$ . Vyjdeme z faktu, že extrémy řešení leží na kružnicích. Ty se s rostoucí hodnotou proměnné  $x$  narovnávají a tak se pro omezená řešení musí hodnota proměnné, ve které má řešení extrém, posouvat k hodnotě poloměru kružnice s extrémy. Aby měla funkce  $f(x)$  minima v bodech  $x = \sqrt[p]{2^p 2l\pi}$  a maxima v bodech  $x = \sqrt[p]{2^p(2l-1)\pi}$ ,  $l \in \mathbb{N}$  a byla periodická, měla by mít tvar

$$g(x) = -A(x) \cos x^{2p} + b, \quad (3.33)$$

kde  $A(x)$  je kladná funkce popisující průběh amplitudy a  $b$  svislý posun. Derivace  $f(x)$  má tvar

$$g'(x) = -A'(x) \cos x^{2p} + A(x) 2px^{2p-1} \sin x^{2p}. \quad (3.34)$$

Chceme, aby derivace v nekonečnu co nejlépe odpovídala dané rovnici. Zvolme

$$A(x) = \frac{1}{2px^{2p-1}} \text{ a } b = 0. \quad (3.35)$$

Tak dostáváme funkci  $f(x)$  ve tvaru

$$g(x) = \frac{-1}{2px^{2p-1}} \cos x^{2p}. \quad (3.36)$$

a derivaci funkce  $f(x)$  ve tvaru

$$g'(x) = \frac{2p-1}{2p} \frac{1}{x^{2p}} \cos x^{2p} + \sin x^{2p}. \quad (3.37)$$

Ověřme pro takto definovanou funkci  $f(x)$  limitu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y'(x) - g'(x)] = 0, \quad (3.38)$$

za předpokladu, že pro  $x \rightarrow +\infty$  můžeme  $y(x)$  ve výrazu  $\sin(x^2 + y^2)^p$  nahradit funkcí  $g(x)$ .

Dostáváme

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sin(x^2 + (\frac{-1}{2px^{2p-1}} \cos x^{2p})^2)^p - \frac{2p-1}{2p} \frac{1}{x^{2p}} \cos x^{2p} - \sin x^{2p} \right] = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sin(x^2 + \frac{1}{4p^2} x^{2-4p} \cos^2 x^{2p})^p - \sin x^{2p} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.6. ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ ŘEŠENÍ

---

Protože

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{4p^2} x^{2-4p} \cos^2 x^{2p}\right)^p = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p} \left(1 + \frac{1}{4p^2} x^{-4p} \cos^2 x^{2p}\right)^p = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p}, \quad (3.40)$$

lze výraz (3.39) upravit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x^{2p} - \sin x^{2p}) = 0. \quad (3.41)$$

Protože víme, že řešení jsou určitým způsobem symetrická podle počátku, můžeme definici funkce  $g(x)$  rozšířit pro  $x < 0$  jako

$$\frac{1}{2p|x|^{2p-1}} \cos |x|^{2p} \quad x < 0. \quad (3.42)$$

**Hypotéza 3.2.** *Řešení úlohy*

$$\begin{cases} y' = \sin(x^2 + y^2)^p, & p > 0, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.43)$$

*s libovolnou počáteční podmínkou se asymptoticky blíží k funkci*

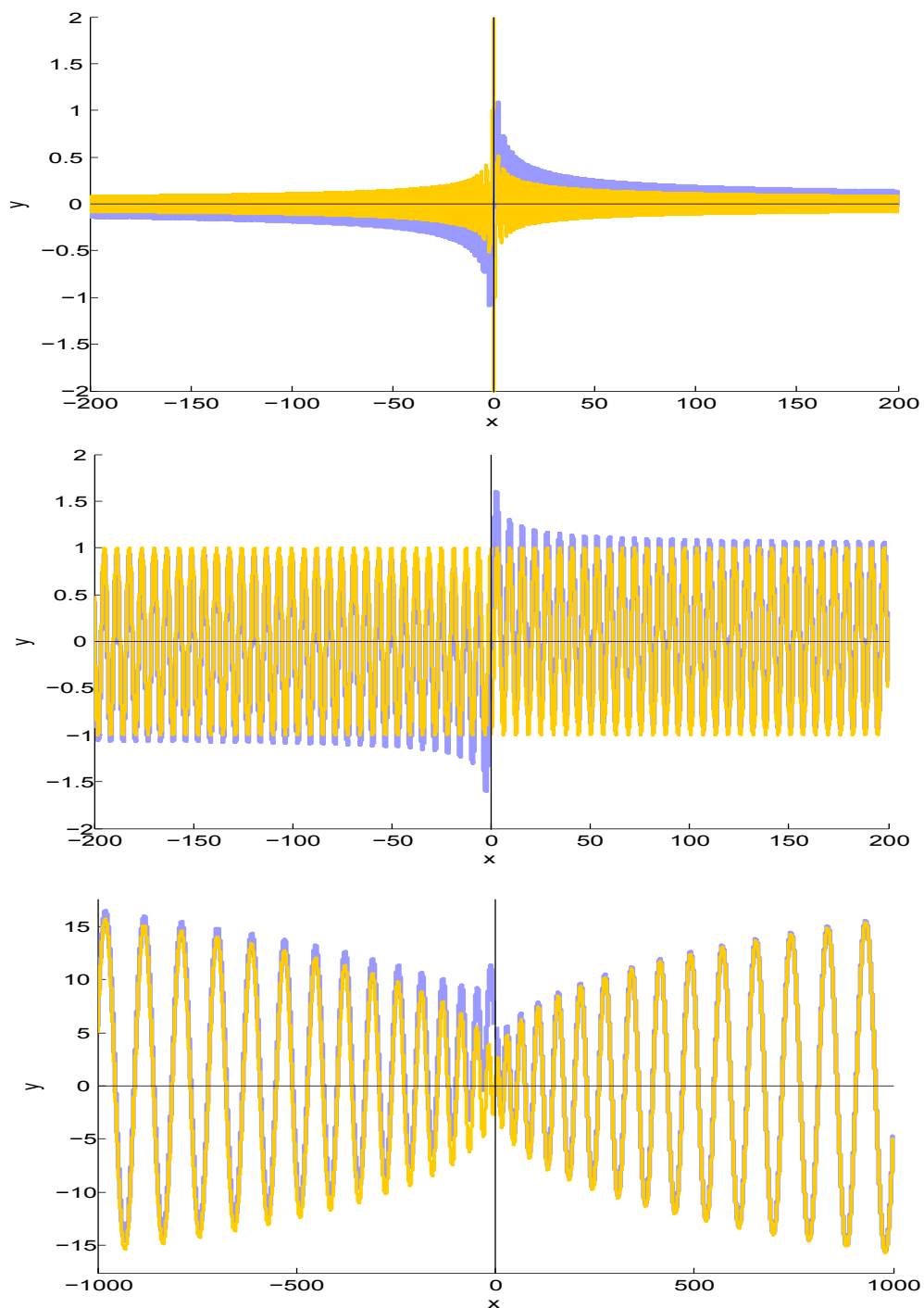
$$g(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2px^{2p-1}} \cos x^{2p} & x > 0, \\ \frac{1}{2p|x|^{2p-1}} \cos |x|^{2p} & x < 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Tvar funkce  $A(x)$  byl volen tak, aby derivace funkce v nekonečnu nabývala pouze hodnot v intervalu  $[-1, 1]$ , stejně jako funkce  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)^p$ . Svislý posun  $b = 0$  byl určen pomocí numerických experimentů tak, aby rozdíl  $|y(x) - g(x)|$  klesal řádově k nule.

Funkce  $g(x)$  má vlastnosti, kterými se pro  $x \rightarrow \pm\infty$  vyznačuje také řešení dané rovnice. Pro parametr  $p = \frac{1}{2}$  a  $x > 0$  dostáváme  $g(x) = -\cos(x)$ , což je funkce, kterou jsme označili jako atraktor v hypotéze 3.1. Přesto, že předchozí úvahy byly založeny na tom, že řešení je omezené, výsledná funkce  $g(x)$  dobře odpovídá i řešením rovnice pro parametr  $p < \frac{1}{2}$ , která se jeví jako divergentní. Pokud by nalezená funkce  $f(x)$  byla atraktorem, pak by bylo dokázáno, že řešení pro  $p < \frac{1}{2}$  jsou divergentní, pro  $p = \frac{1}{2}$  jsou omezená a pro  $p > \frac{1}{2}$  všechna konvergují k nule. I když se nepodařilo hypotézu 3.2 dokázat, numericky jsme ověřili, že rozdíl řešení  $y(x)$  a funkce  $f(x)$  se řádově blíží k nule pro různé parametry  $p > 0$  a různé počáteční podmínky. Její důkaz může být případně náplní další práce. Některá řešení s atraktory jsou na obrázku 3.30.

### 3.6. ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ ŘEŠENÍ

---



Obrázek 3.30: Řešení s různými parametry a různými počátečními podmínkami (modře) a jejich atraktory (žlutě).

# Kapitola 4

## Závěr

První, teoretická část textu, která se věnuje existenci a jednoznačnosti řešení, zde slouží spíše jako úvod k celé problematice obyčejných diferenciálních rovnic.

Cílem druhé části práce bylo obsáhnout co nejširší spektrum vlastností řešení dané diferenciální rovnice. Získali jsme obecnou představu o chování řešení a to jak v okolí počátku, tak jsme získali představu i o jeho asymptotickém chování.

Ukázali jsme, že řešení jsou dána jednoznačně, krom případu, kdy  $p \in (0, \frac{1}{2})$  a počáteční podmínka je  $(0, 0)$ . I v tomto případě se ale řešení jeví jako jednoznačné.

Dále byly popsány obecné vlastnosti řešení, jako jeho oscilace, extrémy, inflexní body, symetrie apod.

Zajímavým úkolem se ukázalo být zkoumání chování řešení při změně parametru. Cílem bylo určit, pro kterou hodnotu parametru by maxima řešení měla konstantní hodnotu a zjistit, kdy je řešení konvergentní a kdy diverguje. Tyto vlastnosti nejspíš nezávisí na hodnotě počáteční podmínky a docházíme k závěru, že parametr pro který by hodnota maxim zůstávala konstantní neexistuje. Nicméně vyslovujeme hypotézu, že pro hodnotu  $p = \frac{1}{2}$  řešení konverguje k periodické funkci s amplitudou rovnou jedné a je proto omezené. Pro  $p > \frac{1}{2}$  je řešení podle téže hypotézy konvergentní a blíží se k nulové hodnotě a pro  $p < \frac{1}{2}$  řešení diverguje.

Při zkoumání vlastností řešení se jako velice užitečné ukázalo využití numerických experimentů, nejen pro utváření představy o celé problematice, ale také jsme s jejich pomocí vyslovili a následně podpořili hypotézy ohledně asymptotického chování řešení. Právě díky spojení numerických experimentů a analytických metod se tak podařilo obecně popsat většinu vlastností této nelineární diferenciální rovnice.

# Literatura

- [1] CODDINGTON Earl A.- LEVINSON Norman: Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York 1955.
- [2] DRÁBEK, Pavel- MÍKA, Stanislav: Matematická Analýza I., ZČU, Plzeň, 1993.
- [3] DRÁBEK, Pavel- KUFNER, Alois: Úvod do funkcionální analýzy, ZČU, Plzeň, 1994.
- [4] DRÁBEK, Pavel- KUFNER, Alois: Funkcionální analýza, ZČU, Plzeň, 1994.
- [5] KUFNER, Alois: Obyčejné diferenciální rovnice, ZČU, Plzeň, 1993.
- [6] TIGAY, Yulia: Vlastnosti řešení nelineární obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu v závislosti na parametru, ZČU, Plzeň, 2010.

