

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Křivosti ploch a jejich aplikace

Plzeň, 2012

Jiří Hellus

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných zdrojů.

V Plzni, 30. května 2012

Jiří Hellus

Poděkování

Děkuji všem, kteří mě při sepisování bakalářské práce podpořili, především pak vedoucímu práce, panu Doc. RNDr. Františku Ježkovi, CSc., za jeho ochotu, vstřícnost, pozitivní přístup a nekonečnou trpělivost.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá diferenciální geometrií ploch. Zavádí pět typů křivosti ploch a jejich vztahy. Prezentuje plochy s konstantními a nulovými křivostmi, jejich příklady, vlastnosti a využití. Přináší také zprávu o vybraných galeriích ploch dostupných na internetu. Dále se věnuje problematice přechodových ploch. Uvádí souvislosti s technickou praxí a obsahuje i návrh a implementaci algoritmu konstrukce rozvinutelné přechodové plochy mezi dvěma křivkami.

Klíčová slova

Regulární plocha, Gaussova křivost, střední křivost, CMC, minimální plocha, CGC, rozvinutelná plocha, přechodová plocha, algoritmus

Abstract

This Bachelor Thesis deals with differential geometry of surfaces. It introduces the five types of surface curvature and their relations. It presents surfaces with constant or zero curvature, their examples, properties and utilization. Also, it reports on a chosen set of surface galleries available on the internet. Further, it pursues the topic of transition surfaces. It gives context with engineering practice and contains the design and implementation of an algorithm for constructing transition developable surfaces between two given curves.

Key words

Regular surface, Gaussian curvature, mean curvature, CMC, minimal surface, CGC, developable surface, transition surface, algorithm

Obsah

Úvod	1
1 Plochy a jejich křivosti	2
1.1 Základní pojmy	2
1.2 Normálová křivost	4
1.3 Hlavní křivosti	5
1.4 Gaussova křivost	5
1.5 Střední křivost	7
1.6 Geodetická křivost	8
2 Plochy s konstantní a nulovou křivostí	9
2.1 CGC plochy	9
2.2 Rozvinutelné plochy	14
2.3 CMC plochy	18
2.4 Minimální plochy	21
3 Herbáře ploch	24
3.1 Postup	24
3.2 Wikipedia, The Free Encyclopedia [14]	25
3.3 GeometrieWerkstatt, Universität Tübingen [8]	26
3.4 Algebraic Surfaces, Universität Wien [9]	27
3.5 Virtual Math Museum [10]	27
3.6 Curves and surfaces, Harvey Mudd College, Claremont [11]	28
4 Konstrukce rozvinutelné přechodové plochy	30
4.1 Motivace	30
4.2 Zadání problému	31
4.3 Rozbor	32
4.4 Řešitelnost	34
4.5 Stavba algoritmu	36
4.6 Implementace	38
4.7 Zhodnocení výsledků	39
Závěr	43
Reference	45

Úvod

Diferenciální geometrie ploch je polem, na kterém toho bylo již mnoho dokázáno. C. F. Gauss se křivostí ploch zabýval v 18. století, kdy byly definovány základní pojmy a formulovány důležité věty [3]. Nový kontext a nové požadavky přinesl rozvoj počítačového zpracování geometrické informace, přesto ani tyto moderní systémy nejsou bezchybné a téma stále skýtá dostatek prostoru k dalšímu studiu.

Práce se skládá ze čtyř částí a využívá několik metod: kompilace odborných textů pro vybudování teoretických podkladů, nalezení, zhodnocení a prezentování obrazového materiálu pro příklady, a odvození a implementaci vlastního algoritmu. Zmíníme se i o praktické stránce tématu. Zálžitosti týkající se technické praxe a používaných softwarů byly konzultovány s ing. Jiřím Hellusem, vedoucím oddělení programování CNC strojů, Škoda TVC s.r.o.

První část práce je zaměřena na pět typů křivosti ploch a jejich vzájemné vztahy. Přináší přehled definic a vět, utříděných do systému zaměřenému na pochopení vzájemných souvislostí. Podrobněji jsou zpracovány střední a především Gaussova křivost, jimiž se budeme v textu dále zabývat.

Ve druhé části se zaměříme na plochy se speciálními hodnotami křivosti: Plochy s konstantní a nulovou Gaussovou křivostí (CGC, rozvinutelné plochy), a konstantní a nulovou střední křivostí (CMC, minimální plochy). Uvedeme některé příklady a použití v praxi.

Třetí část je věnována prohledání a zhodnocení internetových zdrojů obrazového materiálu k tématu ploch. Hodnocení je vedeno podle několika kritérií, mezi nimiž nechybí kvalita obrazového materiálu, komplexnost zpracování a také celkový dojem a přínos pro uživatele.

Závěrečná část obsahuje úvod do tématu rozvinutelných přechodových ploch a její hlavní náplní je konstrukce takové plochy mezi dvěma křivkami. Po zvážení různých přístupů k problematice následuje rozbor, vytvoření algoritmu a popis implementace v prostředí *Mathematica*. V závěru části je zhodnocena funkčnost algoritmu i programu, popsány nedostatky a navržena možná vylepšení.

Cílem tohoto textu je seznámit čtenáře s tématem ploch a jejich křivosti, ukázat vlastnosti, příklady a použití speciálních typů ploch a prezentovat výsledky vlastní práce autora. Pro plné porozumění se předpokládají znalosti z lineární algebry, matematické analýzy, diferenciální geometrie a uživatelská znalost PC.

1 Plochy a jejich křivosti

V této části se budeme zabývat vyjádřením plochy, pěti typy křivosti ploch, jejich významem, výpočtem, vlastnostmi, a uvedeme speciální případy křivosti, které budou dále rozvedeny v části druhé. Velké množství literatury se věnuje plochám z přísně analytického hlediska a podrobně dokazuje popis plochy pomocí tenzorů. To není obsahem této práce, přestože tenzorová vyjádření a některé vzorce budou uvedeny, na jejich odvození a důkazy bude čtenář odkázán do jiných spisů. Je zde zpracován především přehled a důraz je kladen na geometrickou představu a naznačení souvislostí, bez vyčerpávajícího množství definic, vět a odvození vztahů, které je možné nalézt jinde.

1.1 Základní pojmy

Nejprve je potřeba zavést základní pojmy, se kterými budeme pracovat. Začneme definicí plochy:

Definice 1.1. *Regulární plochou* třídy C_n v E_3 rozumíme množinu $\mathcal{P} \subset E_3$, pro níž existuje vektorová funkce $\mathbf{P}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in \Omega$, kde Ω je oblast (otevřená kompaktní množina), taková že

- (a) $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ je zobrazení na množinu,
- (b) \mathbf{P} je třídy C_n ($n \geq 3$),
- (c) $\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta u^1}$ a $\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta u^2}$ jsou lineárně nezávislé ve všech bodech oblasti Ω ,
- (d) $(u_0^1, u_0^2) \in \Omega$, $(u_1^1, u_1^2) \in \Omega$ a $(u_0^1, u_0^2) \neq (u_1^1, u_1^2) \Rightarrow \mathbf{P}(u_0^1, u_0^2) \neq \mathbf{P}(u_1^1, u_1^2)$.

Tato definice vylučuje některé důležité plochy, bez nichž se v praxi neobejdeme. *Uzavřené plochy* nemající hranici a tedy hranice oblasti Ω se zobrazí do křivky, případně část hranice do jednoho bodu plochy \mathbf{P} (např. sféra (obr. 2.1)). Další plochy mohou obsahovat *samoprůnik*, hranu, či vrchol (kuželové plochy (obr. 2.8)), nebo mohou mít být „jen“ nevhodně parametrizované. Při zkoumání lokálních vlastností navíc obecně stačí, aby byla plocha *po částech regulární*, neboli se skládala z regulárních ploch. Dále proto budeme pracovat již jen s pojmem *plocha* (bez přívlastku), kde konečný počet křivek či bodů může porušovat vlastnosti 2-4.

V [1] je definován pojem *tenzoru* na ploše, jeho vlastnosti a operace s tenzory. Zde pro potřeby výpočtů uvedeme tenzory, které se vztahují ke křivosti ploch:

Definice 1.2. Označme

$$\mathbf{P}_i = \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta u^i}.$$

Pak tenzor

$$g_{ij} = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j$$

se nazývá *prvním* (neboli *metrickým*) tenzorem plochy.

Výpočtem lze ukázat, že pro g_{ij} platí příslušné transformační vztahy a tedy skutečně tvoří tenzor [1]. S pomocí metrického tenzoru můžeme měřit úhly a velikosti vektorů na ploše. Díky komutativitě skalárního součinu v E_3 $g_{ij} = g_{ji}$ a tenzor je symetrický. Později ukážeme jeho další zajímavou vlastnost.

Definice 1.3. Označme

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\delta^2 \mathbf{P}}{\delta u^i \delta u^j}.$$

Pak tenzor

$$h_{ij} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_{ij}$$

se nazývá *druhým* tenzorem plochy.

Opět lze výpočtem dokázat, že se jedná o tenzor. Druhý tenzor plochy udává tvar plochy vzhledem k tečné rovině v daném bodě, jak je ukázáno v oddílu **1.2**. Vzhledem k zaměnitelnosti pořadí derivace platí $h_{ij} = h_{ji}$ a tento tenzor je také symetrický.

Dále budeme využívat pojem *regulární křivka* (definice, zobecnění a parametrizace např. v [1]). Zajímat nás budou křivky na ploše, využijeme je například v oddílu **1.2**. Jsou to takové křivky, jejichž všechny body jsou zároveň body plochy. Mějme plochu

$$\mathbf{P}(u^1, u^2),$$

pak křivka

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(u^1(t), u^2(t)),$$

kde t je parametr křivky, je křivkou na ploše.

Připomeňme 1k , *první křivost* prostorové křivky [1]. Najdeme souvislost mezi křivostí křivky na ploše a vlastnostmi plochy - hledáme způsob, jak vyjádřit křivost plochy. Nyní studujeme křivost křivky na ploše \mathbf{P} . Uvažujeme křivku

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(u^1(s), u^2(s)),$$

která je parametrizována obloukem. Pro první křivost platí:

$$\ddot{\mathbf{P}} = {}^1k \cdot \boldsymbol{\nu},$$

$\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor hlavní normály křivky.

1.2 Normálová křivost

Připomeňme, že \mathbf{n} je jednotkový vektor normály plochy a označme $\gamma = \angle \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}$ odchylku tohoto normálového vektoru od hlavní normály křivky.

Definice 1.4. Normálovou křivostí křivky k v bodě X plochy P rozumíme číslo

$${}^n k = \ddot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n}.$$

Platí také

$${}^n k = {}^1 k \cdot \cos \gamma.$$

$${}^n k = \frac{h_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}{g_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}$$

V definici jasně stojí, že normálová křivost je vlastností křivky na ploše, ale dá se dokázat (např. [1]) následující věta:

Věta 1.1. Normálová křivost všech křivek plochy se společnou tečnou v daném bodě je stejná.

Z této věty vyplývá význam normálové křivosti jako vlastnosti tečny křivek na ploše - *směru plochy*. Pojmenujeme ty významné:

Definice 1.5. Směr plochy v daném bodě je

- *hlavní*, je-li normálová křivost v něm extrémální (maximální, resp. minimální),
- *asymptotický*, je-li normálová křivost v něm nulová.

O významu hlavních směrů budeme mluvit v dalším oddílu, asymptotický směr nám spolu s druhým tenzorem plochy umožní klasifikovat body plochy podle jejího tvaru v okolí daného bodu. Jestliže označíme

$$h = h_{11} \cdot h_{22} - (h_{12})^2$$

diskriminant druhého tenzoru, můžeme určit následující rozdělení:

Definice 1.6. Bod na ploše se nazývá

- *planární*, je-li ${}^n k = 0$ v každém směru,
- *kruhový*, je-li ve všech směrech ${}^n k = \text{konst.} \neq 0$,
- *eliptický*, je-li $h > 0$ a bod není kruhový,
- *parabolický*, je-li $h = 0$ a bod není planární,
- *hyperbolický*, je-li $h < 0$.

V planárním bodě je zřejmě každý směr asymptotický, kruhový bod naopak očividně žádný asymptotický směr nemá. Všimneme-li si podobnosti vzorce v definici normálové křivosti a jednotlivých složek druhého tenzoru plochy, tedy i pravděpodobné souvislosti, můžeme odhadnout, že v eliptickém bodě má normálová křivost ve všech směrech stejné znaménko, tedy se zakřivuje od tečné roviny jen na jednu stranu, vzniká jakýsi „vrchol“. Intuitivně jde

o zobecnění kruhového bodu a nemá žádný asymptotický směr. V hyperbolickém bodě naopak existují křivky s opačným znaménkem normálové křivosti. To nám dává představu „sedla“, díky spojitosti plochy tedy někde mezi nimi existují dva asymptotické směry. Nejméně názorná je představa parabolického bodu. Využijeme zbývající možný tvar plochy, „hřbet“, jako přechod mezi „vrcholem“ a „sedlem“, s jedním asymptotickým směrem a ostatními směry se shodným znaménkem křivosti. Závěry této intuitivní úvahy lze skutečně dokázat [1].

1.3 Hlavní křivosti

V předchozím oddílu jsme zmínili hlavní směry na ploše, významné extrémními hodnotami normálové křivosti. Počet těchto směrů je očividně závislý na typu bodu plochy, kde se nacházíme. Planární a kruhový bod mají ve všech směrech normálovou křivost stejnou, všechny směry jsou tedy rovnocenné a říkáme, že jsou všechny hlavní. Hlavní směry v ostatních typech bodů určujeme podle následující věty:

Věta 1.2. Nenulový vektor (du^1, du^2) plochy určuje hlavní směr, právě když

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Z důkazu v [1] zároveň plyne, že v eliptickém, parabolickém a hyperbolickém bodě existují právě dva na sebe kolmé hlavní směry. Máme-li hlavní směry nalezeny, je vhodné nějak označit jejich normálové křivosti:

Definice 1.7. *Hlavními křivostmi* plochy v daném bodě rozumíme normálové křivosti v hlavních směrech. Označme je

$${}^n k_{min}, {}^n k_{max}.$$

Je zřejmé, že pro planární a kruhový bod, kde jsou všechny směry považovány za hlavní, platí

$${}^n k_{min} = {}^n k_{max},$$

v planárním bodě je křivost navíc nulová.

Hlavní křivosti určují rozsah zakřivení plochy v okolí bodu. Můžeme z nich v omezené míře vyvozovat závěry o tvaru plochy v okolí bodu, hlavně je ovšem využijeme dále k definici dalších typů křivosti, z nichž lze jednoduše vyčíst vlastnosti plochy a klasifikovat její body.

1.4 Gaussova křivost

V tomto oddíle budeme zkoumat typ křivosti, který je pravděpodobně nejvíce využívaným, co do praktické aplikace a charakteristiky ploch (viz dále). Plochám se speciálními hodnotami Gaussovy křivosti se budeme věnovat ve druhé a čtvrté části tohoto textu. Nyní začneme definicí:

Definice 1.8. *Gaussovou křivostí plochy* v daném bodě rozumíme číslo

$$K = {}^n k_{min} \cdot {}^n k_{max}.$$

Jak již bylo zmíněno, k definici používáme hodnoty hlavních křivostí plochy v bodě. Při změně orientace plochy (opačný normálový vektor) změní normálová křivost znaménko, ale hlavní křivosti stále zůstávají extrémny. Navíc je Gaussova křivost jejich násobkem, takže její znaménko zůstává a již podle něj poznáme typ bodu, z čehož je vidět souvislost s druhým základním tenzorem plochy, respektive jeho diskriminantem. Nyní ukážeme i souvislost s metrickým tenzorem plochy a jeho diskriminantem

$$g = g_{11} \cdot g_{22} - (g_{12})^2 > 0$$

Kladnost diskriminantu g vyplývá z vlastností skalárního součinu ve složkách tenzoru. V [3] je pak dokázána následující věta:

Věta 1.3. Pro Gaussovu křivost platí

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - (h_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{h}{g}$$

Je jasně vidět, že znaménko Gaussovy křivosti se shoduje se znaménkem h a můžeme tedy opět provést klasifikaci bodů:

- Eliptický bod pro $K > 0$
- Parabolický bod pro $K = 0$
- Hyperbolický bod pro $K < 0$

Gaussova křivost se jmenuje po Carlu Friedrichu Gaussovi (1777-1855), který se, mimo jiné, intenzivně zabýval křivostí ploch. Jedním z nejdůležitějších a zároveň nejpřekvapivějších z jeho poznatků je takzvaná „*Theorema Egregium*“, latinsky „Pozoruhodná věta“.

Věta 1.4 (*Theorema Egregium*). Gaussova křivost plochy je invariantní vůči izometrickým zobrazením.

Věta 1.5. Tvrzení *Theoremy Egregium* je ekvivalentní s následujícími výroky:

- i) Gaussova křivost se nemění, je-li plocha ohýbána, ale ne natahována, nebo smršťována.
- ii) Gaussova křivost je intrinsická (vnitřní) vlastnost plochy.
- iii) Gaussova křivost lze vyjádřit pouze pomocí tenzoru g_{ij} a prvních a druhých derivací jeho složek.

Důkaz nalezneme například v [4], stejně jako konkrétní vzorec pro tvrzení **iii)** věty **1.5**.

Věta je skutečně pozoruhodná, jelikož podle ní Gaussova křivost, definovaná jako násobek hlavních křivostí, které se ale mohou ohýbáním měnit, zůstává při ohýbání neměnná. To zároveň znamená, že plochy, které na sebe lze rozvinout,

mají v odpovídajících si bodech stejnou Gaussovu křivost. Nyní postoupíme od lokálních vlastností ke globálním a budeme klasifikovat celé plochy podle jejich Gaussovy křivosti. Tato klasifikace nezahrnuje všechny plochy, ty nezařazené jsou z hlediska Gaussovy křivosti obecné.

Definice 1.9. Plocha se nazývá

- *Synklastická*, je-li $K > 0$ v každém bodě.
- *Rozvinutelná*, je-li $K = 0$ v každém bodě.
- *Antiklastická*, je-li $K < 0$ v každém bodě.

Synklastické plochy se očividně sestávají pouze z eliptických a kruhových bodů. Jako příklady uvedeme elipsoid [10]. V případě konstantní křivosti označujeme plochy anglickou zkratkou *CGC* (Constant Gaussian Curvature), například sféra (obr. 2.1).

Antiklastické plochy jsou naopak složeny výlučně z hyperbolických bodů. *CGC* se zápornou křivostí je pseudosféra (obr. 2.2) a plochy z ní odvozené: Diniho plocha (obr. 2.3) a Mindingovy plochy (obr. 2.6), dále například Kuen plocha (obr. 2.4).

Rozvinutelné plochy obsahují pouze parabolické nebo planární body a navíc platí, že každým bodem prochází přímka, která náleží ploše [12]. Název vychází z faktu, že jestliže mají Gaussovu křivost shodnou s rovinou, identicky nula, je podle Theoremu Egregium možné je *rozvinout do roviny* ([1],[3]). Rozvinutelné plochy jsou jako speciální případ *CGC* popsány v části 2.

1.5 Střední křivost

Další typ křivosti opět využívá hlavních křivosti:

Definice 1.10. *Střední křivost plochy* v daném bodě je dána vztahem

$$H = \frac{{}^n k_{min} + {}^n k_{max}}{2}.$$

Opět ukážeme souvislost se základními tenzory plochy, postup odvození je vysvětlen v [1]:

Věta 1.6. Pro výpočet střední křivosti platí vztah

$$H = \frac{g_{11} \cdot h_{22} - 2g_{12} \cdot h_{12} + g_{22} \cdot h_{11}}{2g}.$$

Na rozdíl od Gaussovy křivosti, střední křivost mění znaménko při změně orientace plochy. Nemá proto smysl při klasifikaci dělit na kladnou a zápornou křivost. Pojmenujeme proto pouze dva speciální typy ploch:

Definice 1.11. Plocha se nazývá

- *CMC plochou*, je-li $H = konst. \neq 0$ v každém bodě,

- *minimální plochou*, je-li $H = 0$ v každém bodě.

CMC plochy (Constant Mean Curvature) jsou poměrně mladou a složitou skupinou ploch, příklady uvedeme v části 2. Minimální plochy jsou, jak napovídá název, plochy s nejmenším možným obsahem na daných okrajích. Příkladem uveďme katenoid (obr. 2.14) a helikoid (obr. 2.15), podrobněji se jimi budeme zabývat opět v části 2.

1.6 Geodetická křivost

Definice 1.12. Necht' $\mathbf{P}(t)$, $t \in \mathcal{I}$, je křivka na ploše κ . Velikost průmětu vektoru první křivosti \mathbf{P}' křivky do tečné roviny plochy nazýváme *geodetická křivost* křivky na ploše.

Jelikož geodetickou křivost nebudeme v této práci dále využívat, uvedeme pouze nejdůležitější definici a věty, které se jí týkají. Tato tematika je více do hloubky rozvedena v [1] a [4].

Definice 1.13. Křivka na ploše, která má ve všech bodech nulovou geodetickou křivost, se nazývá *geodetika*.

Věta 1.7. V každém bodě geodetiky splývá její hlavní normála s normálou plochy v tomto bodě.

Věta 1.8. Je-li křivka nejkratší spojnici mezi dvěma body na ploše, pak je geodetikou.

Věta 1.9. Geodetikami na kulové ploše jsou hlavní kružnice. Geodetikami na rotační válcové ploše jsou površky, rovnoběžkové kružnice a šroubovice.

Věta 1.10. Rozvinutím geodetiky ležící na rozvinutelné ploše je přímka, nebo úsečka.

2 Plochy s konstantní a nulovou křivostí

Nyní představíme plochy se speciálními hodnotami křivosti. Jednotlivé příklady těchto ploch jsou velmi dobře zpracovány a popsány například v [2],[11]. Uvedeme zde pro ilustraci jejich obrázky s případným krátkým popiskem, parametrizací či hodnotou křivosti.

2.1 CGC plochy

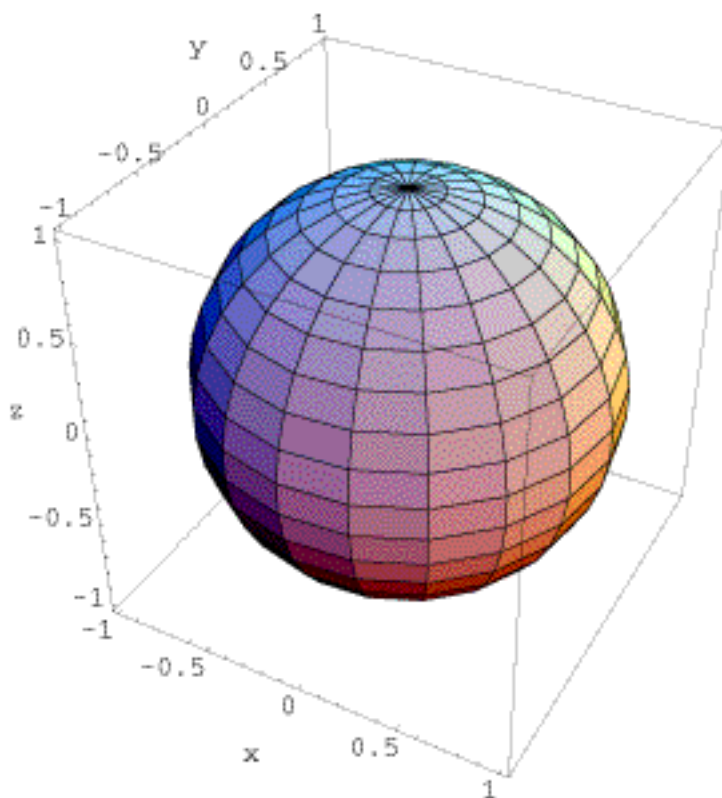
Jednou ze skupin jsou plochy s konstantní Gaussovou křivostí, takzvané CGC plochy (viz oddíl 1.4). Uvedeme si tyto příklady:

Sféra (obr. 2.1) je nejjednodušší plochou s konstantní křivostí. Patří jak do CGC, tak i CMC ploch.

$$\mathbf{P}(u, v) = (r \cdot \cos(u) \cos(v), r \cdot \cos(u) \sin(v), r \cdot \sin(u))$$

$$u \in (0, 2\pi), v \in (0, 2\pi)$$

$$K = \frac{1}{r^2}$$



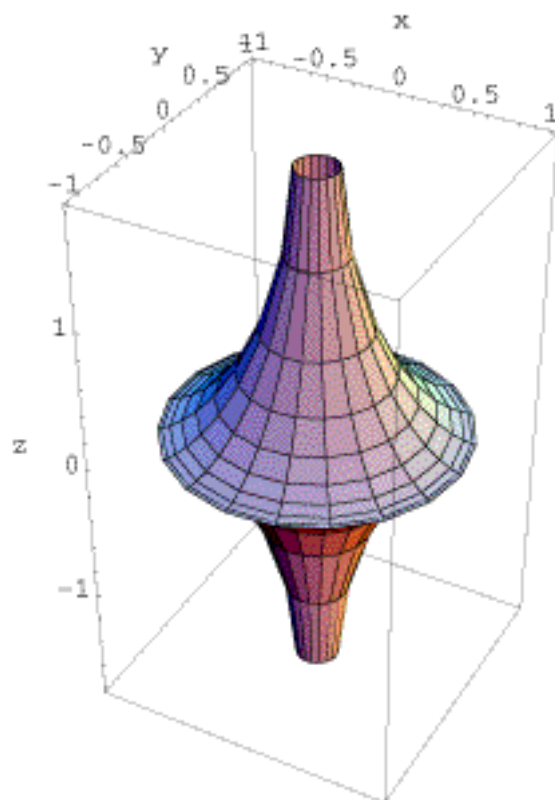
Obrázek 2.1: Sféra [11]

Pseudosféra (obr.2.2) je rotační plochou křivky s názvem *tractrix*.

$$\mathbf{P}(u, v) = \left(r \cdot \cos(u) \sin(v), r \cdot \sin(u) \sin(v), a(\cos(v) + \log(\tan(\frac{v}{2}))) \right)$$

$$u \in (-\infty, +\infty), v \in (0, 2\pi)$$

$$K = -\frac{1}{r^2}$$



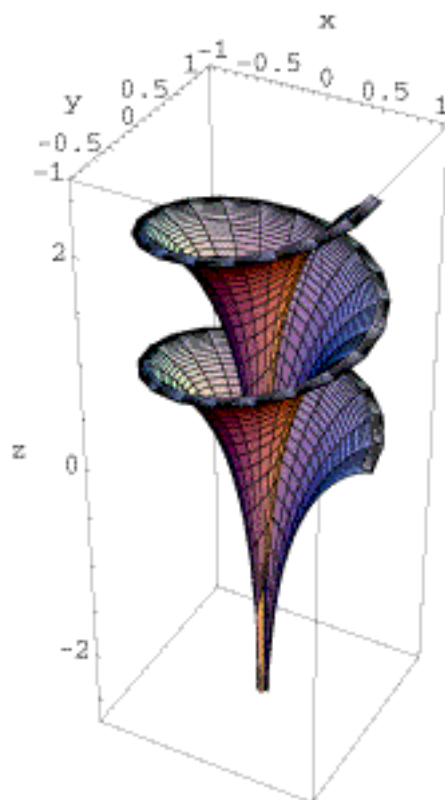
Obrázek 2.2: Pseudosféra [11]

Diniho plocha (obr. 2.3) vzniká "šroubováním" pseudosféry.

$$\mathbf{P}(u, v) = \left(r \cdot \cos(u) \sin(v), r \cdot \sin(u) \sin(v), s \cdot u + a(\cos(v) + \log(\tan(\frac{v}{2}))) \right)$$

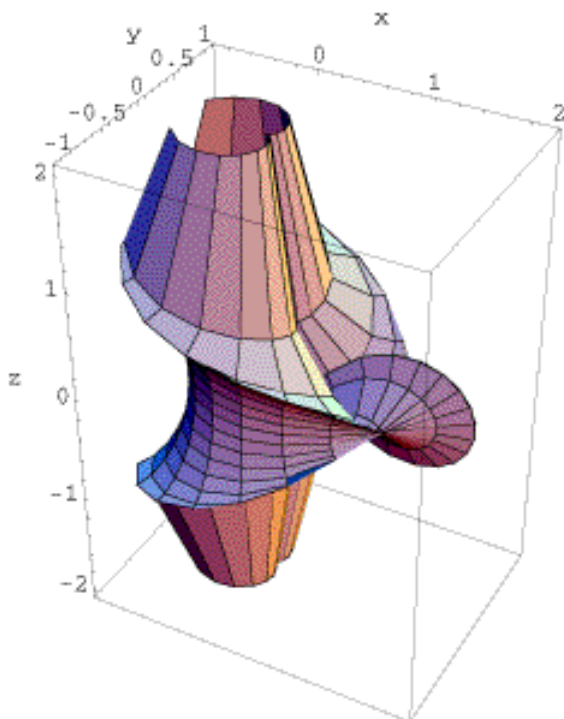
$$u \in (0, +\infty), v \in (0, +\infty), r, s > 0$$

$$K = -\frac{1}{r^2 \cdot s^2}$$



Obrázek 2.3: Diniho plocha [11]

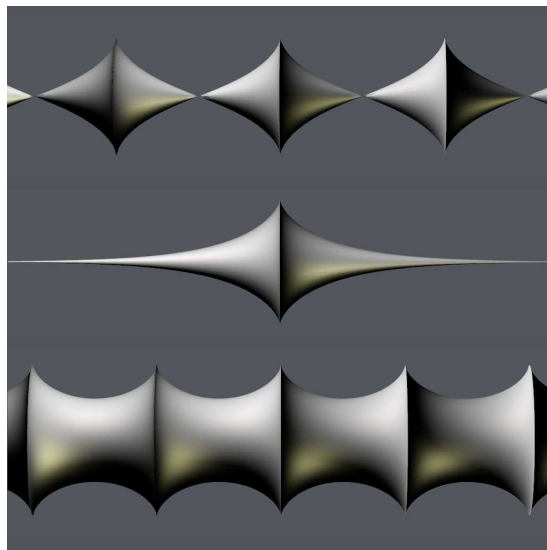
Dalšími příklady jsou *Kuen plocha* (obr. 2.4), *breathery* (obr. 2.5), *Mindingovy plochy* (obr. 2.6) a další [10].



Obrázek 2.4: Kuen plocha [11]



Obrázek 2.5: Breathery [8]



Obrázek 2.6: Mindingovy plochy, srovnání s pseudosférou [8]

2.2 Rozvinutelné plochy

Zvláštní podskupinou CGC ploch jsou plochy rozvinutelné. Rozvinutelnou plochu jsme definovali v oddílu 1.4. Nyní ukážeme její další vlastnosti. Nejprve zavedeme následující pojem:

Definice 2.1. Plocha je *přímková*, pokud ji můžeme vyjádřit jako jednoparametrický systém přímek. Tyto přímky se pak nazývají *površkami* plochy.

Příkladem může být například jednodílný hyperboloid [11]. Ten je přímkovou plochou, ale není rozvinutelný. Rozvinutelná plocha je přímková (viz oddíl 1.4) a má navíc ještě podél celé površky stejnou tečnou rovinu. V [1] je zavedena jako obalová plocha jednoparametrického systému rovin. Tyto vlastnosti využijeme v části 4. Nyní uvedeme zástupce rozvinutelných ploch:

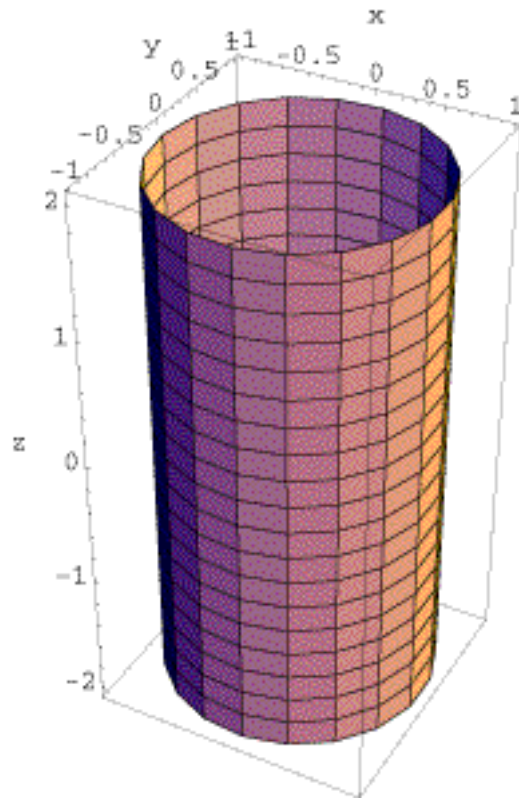
Válcová plocha je obecně dána křivkou $\mathbf{R}(u)$ a směrovým vektorem \mathbf{w}

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{R}(u) + v \cdot \mathbf{w}.$$

Ukážeme konkrétní příklad, rotační válcovou plochu (obr. 2.7):

$$\mathbf{P}(u, v) = (r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u), v)$$

$$u \in (0, 2\pi), v \in (-\infty, +\infty), r > 0$$



Obrázek 2.7: Válcová plocha [11]

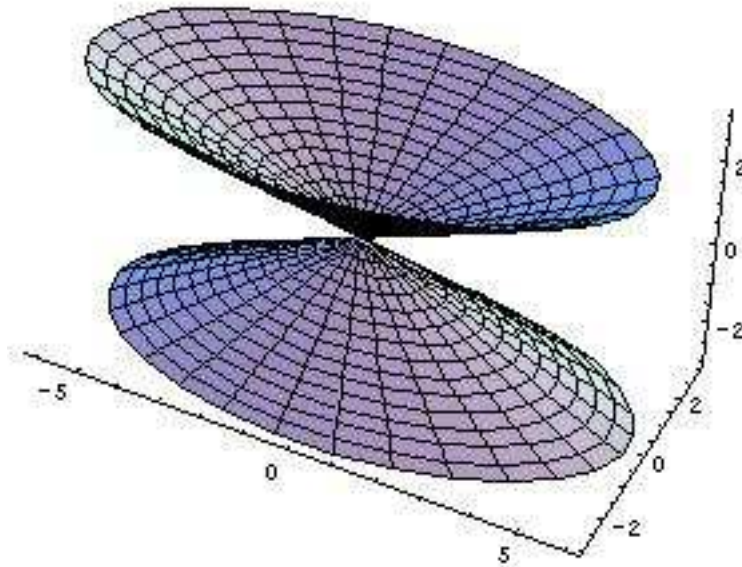
Kuželová plocha je dána křivkou $\mathbf{R}(u)$ a vrcholem \mathbf{V} :

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{R}(u) + v \cdot (\mathbf{R}(u) - \mathbf{V}) = (1 - v) \cdot \mathbf{R}(u) + v \cdot \mathbf{V}$$

Zobrazíme například kuželovou plochu, jejíž řídicí křivkou je elipsa (obr. 2.8):

$$\mathbf{P}(u, v) = (r \cdot v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), v)$$

$$u \in (0, 2\pi), v \in (-\infty, +\infty), r > 0$$



Obrázek 2.8: Kuželová plocha [2]

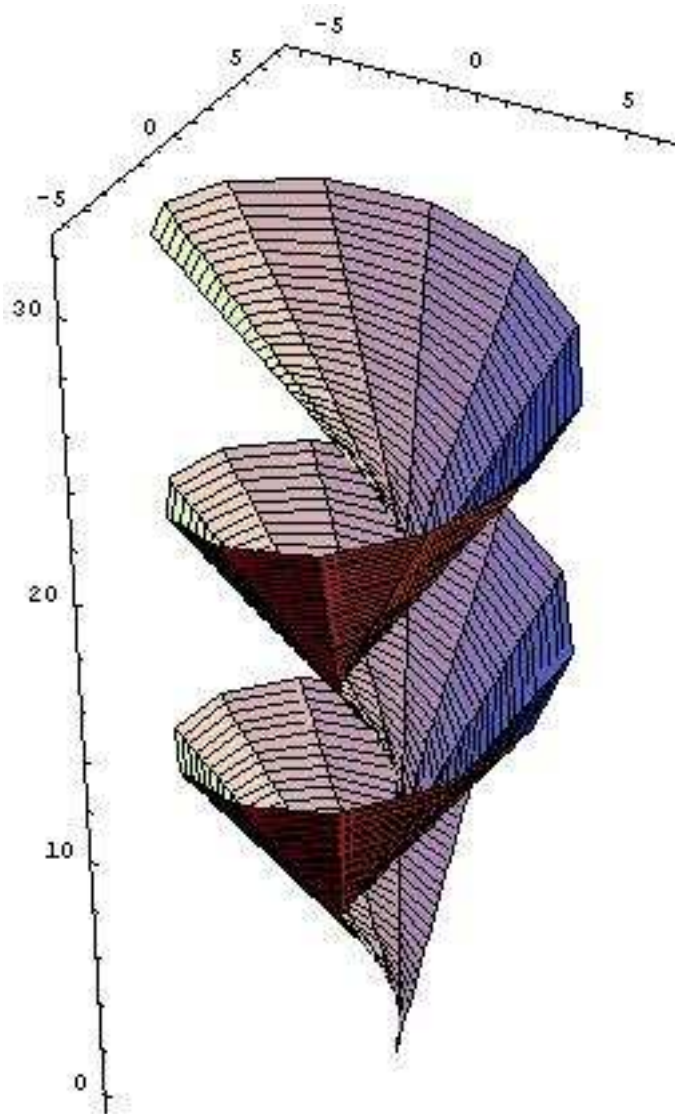
Plocha tečen prostorové křivky je obecně dána křivkou $\mathbf{R}(u)$ a jejím tečným vektorem $\mathbf{R}'(u)$:

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{R}(u) + v \cdot \mathbf{R}'(u)$$

Jako příklad uvedeme plochu tečen šroubovice (obr. 2.9):

$$\mathbf{P}(u, v) = (\cos(v) - u \cdot \sin(v), \sin(v) + u \cdot \cos(v), v + u)$$

$$u \in (0, 2\pi), v \in (-\infty, +\infty)$$



Obrázek 2.9: Plocha tečen šroubovice[2]

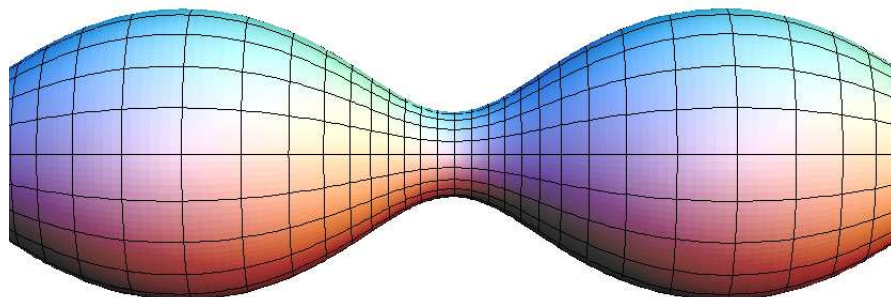
V [1] je dokázáno, že rozvinutelné jsou právě jen tyto tři typy ploch a jejich kombinace (viz plátování, [5]).

Rozvinutelné plochy mají dalekosáhlé využití. Jsou vhodné v počítačové grafice, neboť se na ně například snadno nanášejí rovinné textury [5]. Používají se v kartografii, kdy se nejprve zemský povrch zobrazí na rozvinutelnou plochu a ta se pak rozvine do roviny. Jelikož rozvinutelného tvaru lze dosáhnout prostým ohýbáním rovinné plochy, používají se v technice k vytváření tvarů z plechu, kartonu, či překližky. Ve velké míře se rozvinutelných ploch využívá v konstrukci letadel a lodí. [14]

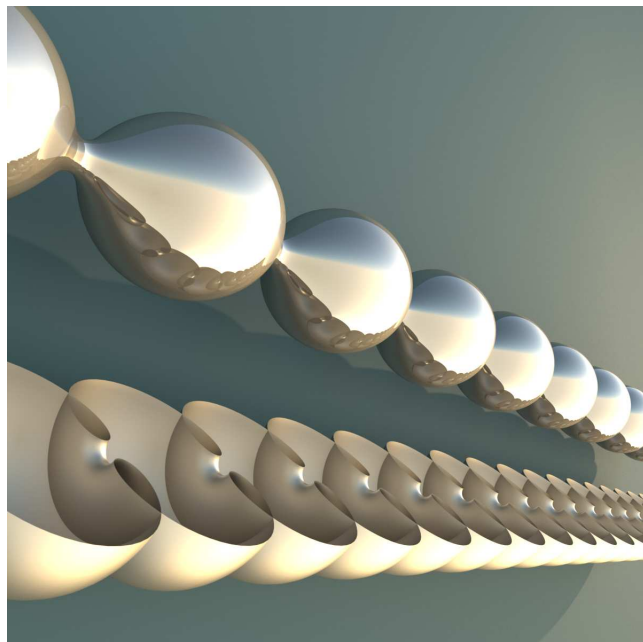
2.3 CMC plochy

Plochy s konstantní nenulovou střední křivostí jsou velmi bouřlivě se rozvíjející třídou ploch. Ukažme ty nejjednodušší:

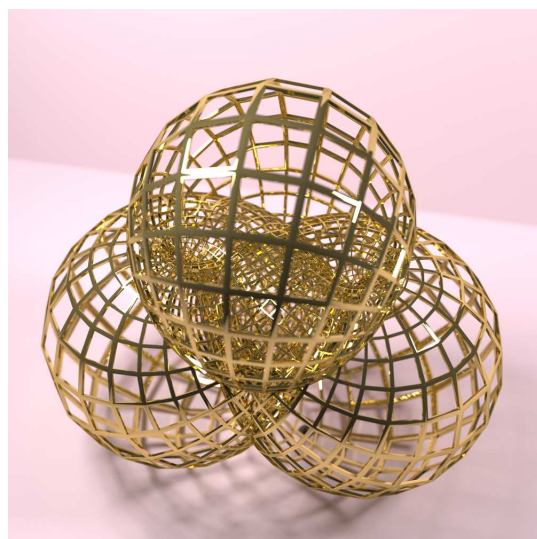
Unduloid (obr. 2.10) vzniká jako rotační plocha eliptické řetězovky (křivka po odvalení elipsy po přímce) [10],[14]. Dalšími příklady mohou být *Dealunayovy plochy* (obr. 2.11), *Wenteův torus* (obr. 2.12), *Noidy* (obr. 2.13) a další [8].



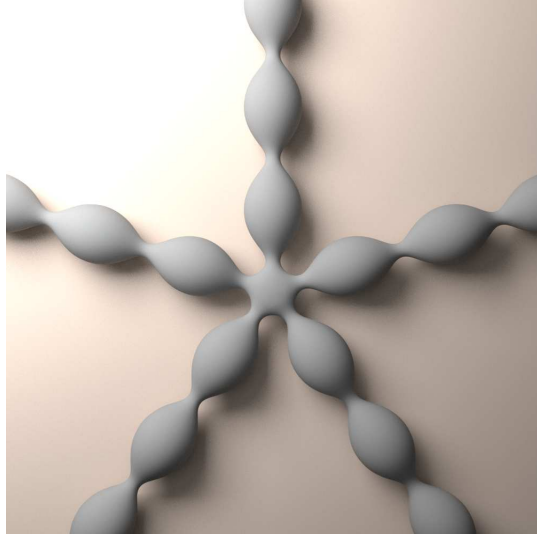
Obrázek 2.10: Unduloid [10]



Obrázek 2.11: Delaunayho unduloid a řez Delaunayovým nodoidem [8]



Obrázek 2.12: Wenteův torus [8]



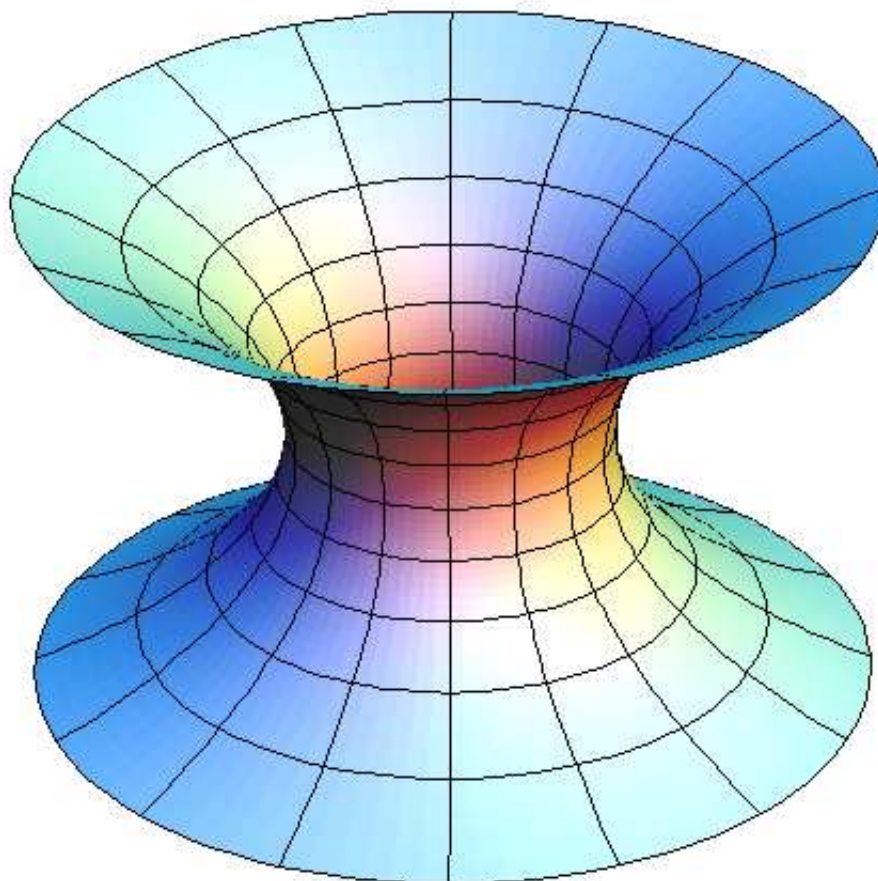
Obrázek 2.13: Rovnoramenný pětícípý noid [8]

2.4 Minimální plochy

Katenoid (obr. 2.14) vznikne rotací řetězovky (anglicky Catenary):

$$\mathbf{P}(u, v) = \left(r \cdot \cos(u) \cdot \cosh\left(\frac{v}{r}\right), r \cdot \cosh\left(\frac{v}{r}\right) \cdot \sin(u), v \right)$$

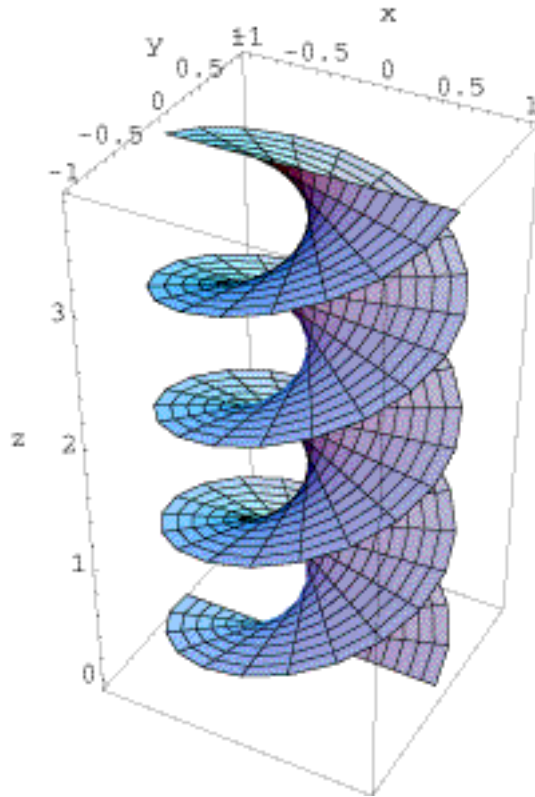
$$u \in (0, +\infty), v \in (0, +\infty), r, s > 0$$



Obrázek 2.14: Katenoid [11]

Helikoid (obr. 2.15) je jediná známá přímková minimální plocha (pokud pomineme rovinu). Vzniká současnou rotací i translací přímky podél osy na ní kolmé.

$$\mathbf{P}(u, v) = (r \cdot v \cdot \cos(u), r \cdot v \cdot \sin(u), s \cdot u)$$
$$u \in (-\infty, +\infty), v \in (0, +\infty), r, s > 0$$

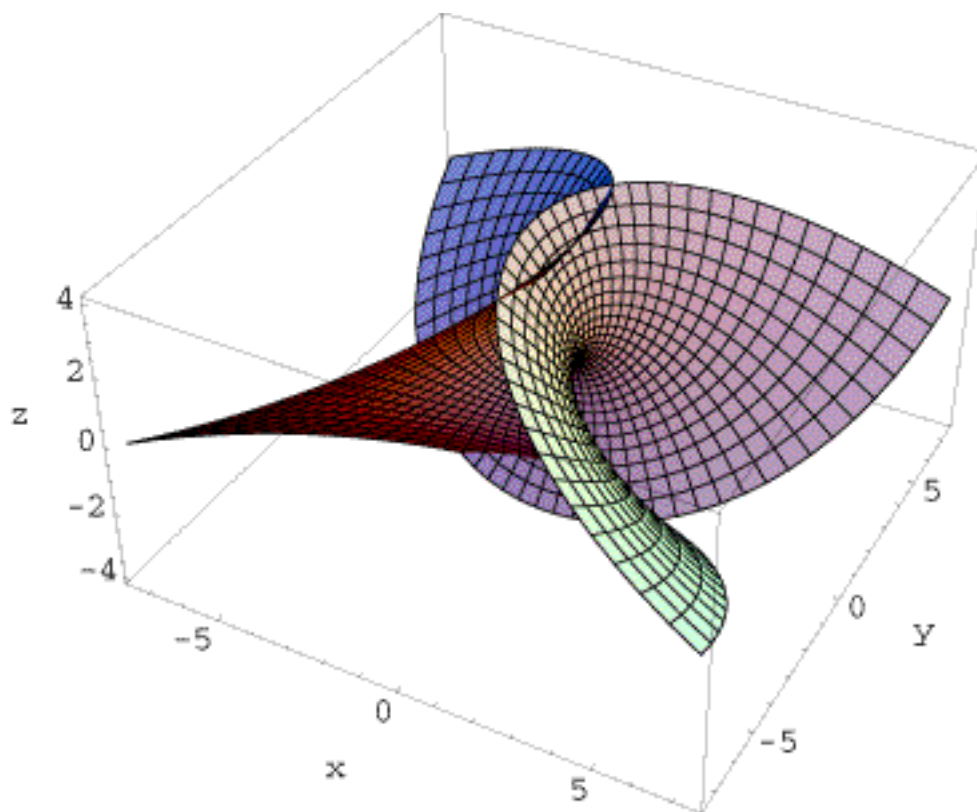


Obrázek 2.15: Helikoid [11]

Enneperova plocha (obr. 2.16)

$$\mathbf{P}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + u \cdot v^2, -v - u^2 \cdot v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2 \right)$$

$$u \in (-\infty, +\infty), v \in (-\infty, +\infty)$$



Obrázek 2.16: Enneperova plocha [11]

Dalšími příklady jsou Costa plocha (obr. 3.4), Scherkova minimální plocha (obr. 3.5) a další ([11],[10]).

Jak již bylo zmíněno v části 1, minimální plochy jsou plochy s nejmenším obsahem pro danou hranici. Nabízí se například představa mýdlové bubliny na nějakém drátěném profilu. V posledních dvou desetiletích jsou zkoumány z hlediska možného využití v molekulárním a materiálovém inženýrství, dále se uplatňují při návrhu konstrukcí v architektuře (membránové konstrukce) a sochařství (R. Engman, R. Longhurst, Ch. Perry) [14]

3 Herbáře ploch

V následující části se budeme věnovat online zdrojům obrazového materiálu k tématu ploch. Cílem je nalézt pokud možno co nejšířší paletu stránek, poskytujících kvalitní obrázky ploch a zhodnotit jejich obsah, bohatost, zajímavost, dostupnost a přínos.

3.1 Postup

Nejprve se pokusíme navrhnout strukturu objektivního hodnocení. U nalezených stránek budeme sledovat několik faktorů:

1. Dostupnost - jak snadno je možné stránku najít, omezení pro uživatele.
2. Téma - co by mělo být obsahem stránky.
3. Kvalita obrázků - velikost, rozlišení, zpracování.
4. Kvantita obrázků - množství, rozmanitost.
5. Ucelenost - doplňující informace k plochám, zpracované systémy, klasifikace a třídění ploch.
6. Věrohodnost - autorství, druh stránek.
7. Přínos - celkový dojem, využitelnost.

Je třeba si uvědomit, že přes snahu tuto strukturu dodržet nemůže být hodnocení úplně objektivní a promítne se do něj názor autora. Může ale sloužit jako ukázka zajímavých stránek, které se týkají ploch, a inspirace, aby čtenář sám uvedené odkazy navštívil a udělal si vlastní úsudek.

Protože hlavním účelem těchto „herbářů“ ploch na internetu by mělo být poskytnout přístup k informacím a materiálu nejen odborné veřejnosti, ale i širokému spektru laických uživatelů, použijeme k vyhledávání klasickou uživatelskou metodu: Dva v našich podmínkách nejznámější vyhledávače, *Seznam.cz* a *Google.com*, a internetovou encyklopedii *Wikipedia.org*.

Do vyhledávačů postupně zadáváme hesla „galerie ploch“, „obrázky ploch“, „surface gallery“, „pictures of surfaces“ (Při vyhledávání byla použita mnohá další hesla, ovšem získané výsledky jsou přesto dosažitelné z této omezené skupiny). Vybereme stránky odpovídající požadavkům mezi prvními přibližně padesáti

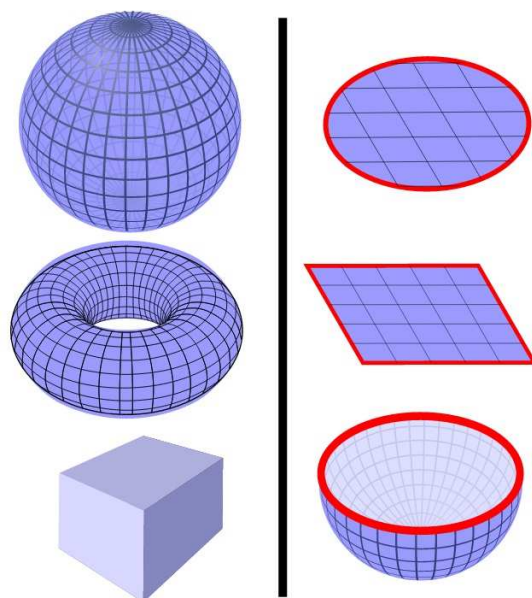
odkazy (dál už je nalezení použitelných výsledků silně nepravděpodobné). Je nutno podotknout, že český vyhledávač naprosto selhal, jak při zadávání českých hesel, tak hesel v angličtině. *Google.com* poskytl čtyři relevantní stránky, všechny v anglickém jazyce.

K vyhledávání na serveru *Wikipedia.org* musíme přistoupit poněkud jinak. Začneme na článku o plochách a budeme používat křížové odkazy k pohybu po webu. Obrázky ploch jsou dostupné přes články o těchto plochách.

Nyní přistupme ke zhodnocení jednotlivých pramenů a galerií:

3.2 Wikipedia, The Free Encyclopedia [14]

Tato internetová encyklopedie je k dispozici v mnoha jazykových mutacích, převážná většina článků existuje v anglické verzi (viz statistiky wiki [14]). Při srovnání české a anglické verze je anglická velmi často propracovanější, s více informacemi a podstatně více obrázky. Německá verze má podobnou úroveň té anglické. S pomocí křížových odkazů se lze dostat k široké nabídce obrazového materiálu, kolektiv autorů serveru dbá na náležité popsání a vysvětlení, navíc obrázky jsou v naprosté většině přiloženy k článkům o konkrétních plochách. To může být ale i nevýhodou, pro uživatele neovládající na dostatečné úrovni cizí jazyk, neboť je jim tím ztížena navigace uvnitř encyklopedie. Druhým úskalím je otevřenost celého projektu, náhodní uživatelé mohou jednoduše upravovat články a tím je snížena věrohodnost informací v nich obsažených. Je to kompenzováno velkou návštěvností, případné chyby mohou být brzy detekovány a opraveny.

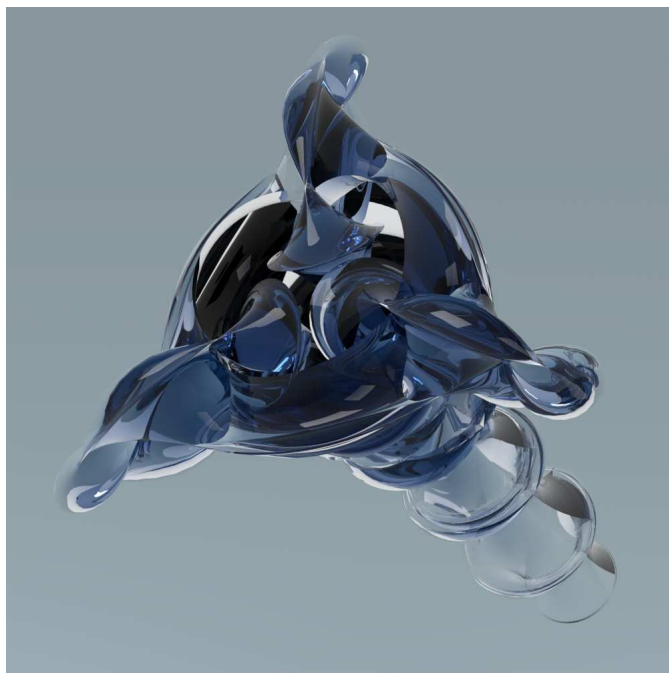


Obrázek 3.1: Příklady uzavřených a otevřených ploch z [14]

Shrnutí: Wikipedia nabízí velké množství dostatečně kvalitního obrazového materiálu k tématu ploch (obr. 3.1), znalost cizího jazyka je při vyhledávání výhodou. Všechny informace z tohoto serveru je ale třeba brát s rezervou.

3.3 GeometrieWerkstatt, Universität Tübingen [8]

GeometrieWerkstatt je stránka oddělení geometrie matematického institutu univerzity v německém Tübingenu, která slouží k prezentaci práce akademických pracovníků a doktorandů. Obsahuje i rozsáhlou galerii převážně CMC ploch, jsou zastoupeny i CGC plochy, například Mindingovými plochami (viz oddíl 2.1). Obrázky jsou velké s dobrým rozlišením, velmi působivě graficky zpracované, spíše pro navození vizuálního dojmu, než čistě zobrazení plochy (obr. 3.2). Galerie oplývá barvami a různými typy modelů, od hladkých ploch po modely „drátěné“, někde se objevují i videa nebo možnost prohlížet plochy ve 3D. Celkově působí stránky dojmem, že mají popularizovat diferenciální geometrii ploch. Tomu napovídá i úplná absence parametrizací ukázaných ploch, přestože nechybí slovní popis v angličtině. Velkým kladem je systematická klasifikace podle vzniku a příbuznosti. Společně s vysvětlujícími texty jsou uvedeny i odkazy do literatury. U některých ploch se navíc jedná o vlastní objevy akademických pracovníků ústavu, například některé uvedené Willmoreovy plochy spoluobjevil Prof. Dr. Franz Pedit.

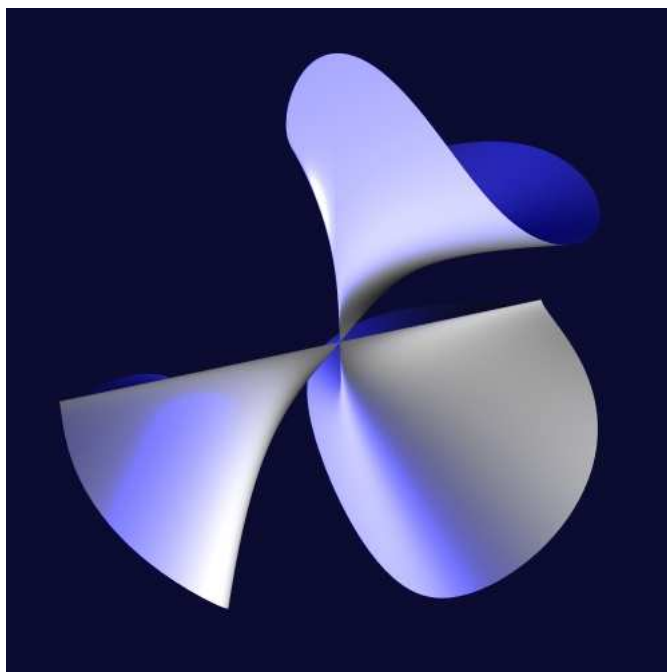


Obrázek 3.2: Minding Breather z [8]

Shrnutí: Galerie zobrazuje CMC a CGC plochy, rozříděné podle původu a příbuznosti. Obrázky jsou kvalitní a okomentované, naprosto ale chybí parametrizace. Znalost angličtiny nutná.

3.4 Algebraic Surfaces, Universität Wien [9]

Stránky se nacházejí na serveru Vídeňské univerzity, v osobním adresáři profesora Herwiga Hausera. Galerie obsahuje sedmdesát tři ploch zadaných implicitní funkcí tří proměnných - algebraických ploch. Autor zde vytvořil barevné obrázky ploch zajímavých tvarů (obr. 3.3). Při kliknutí na obrázek nebo funkci se otevře nové okno s obrázkem v rozlišení 500x500. Nic jiného galerie nenabízí.



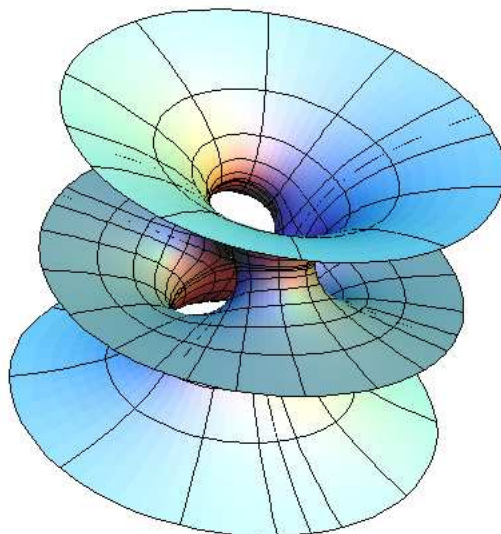
Obrázek 3.3: Sněhová vločka z [9]

Shrnutí: Stránky předvádějí jiný popis ploch, než se kterým pracujeme obvykle (přestože je možné počítat křivosti implicitních ploch, viz [3]). Podobných ukázek algebraických ploch můžeme na internetu najít více, tato nad nimi vyniká rozsahem. Autor ještě podnítl fantazii návštěvníků galerie pestrými barvami.

3.5 Virtual Math Museum [10]

Stránky galerie ploch na serveru Virtual Math Museum dělí plochy do skupin podle hodnoty Gaussovy a střední křivosti a podle orientovanosti. Největší skupinu

tvoří minimální plochy (např. obr. 3.4), kterým je věnována vlastní stránka. Většina ploch postrádá parametrizaci, jsou však anglicky popsány, včetně odkazů na literaturu. Ke každé ploše je nabízeno několik obrázků v dobré kvalitě a dále skript, který umožňuje otáčení, zoom a také libovolné přebarvení plochy.

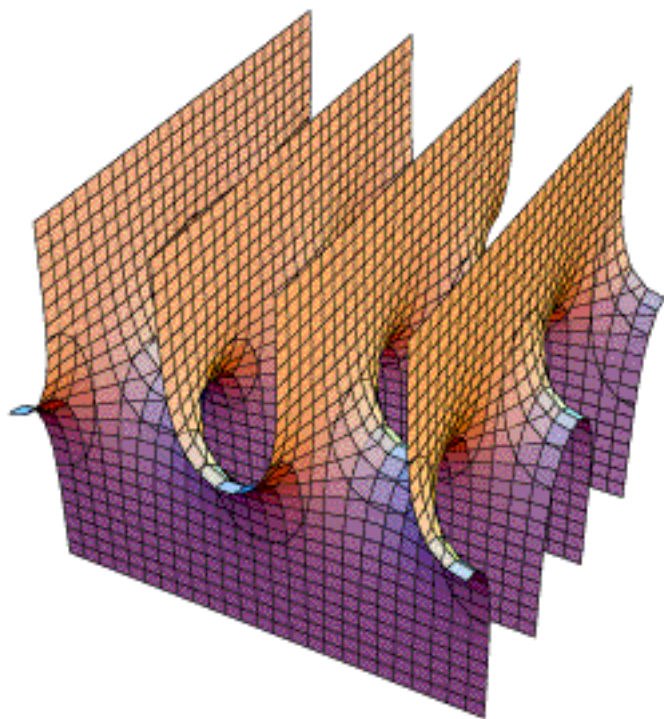


Obrázek 3.4: Costa plocha z [10]

Shrnutí: Galerie obsahuje velké množství dobrých obrázků, k tomu navíc i interaktivní vizualizaci. Zvláště rozsáhlá je skupina minimálních ploch. Většina ploch nemá uvedenou parametrizaci, ale jsou okomentovány. Znalost angličtiny nutná.

3.6 Curves and surfaces, Harvey Mudd College, Claremont [11]

Tato galerie je dostupná na serveru Harvey Mudd College v Claremontu v USA. Kromě ploch obsahuje také křivky. Oddělení ploch nabízí propracovaný systém klasifikace podle mnoha parametrů. Kategorie jsou slovně popsány (v angličtině). Z velkého množství kategorií ploch uveďme příkladem třeba kvadriky, rozvinutelné plochy, minimální plochy (například obr. 3.5), rotační plochy a mnoho dalších. Ke každé jednotlivé ploše je uvedeno několik obrázků v menším, ale dostačujícím rozlišení. U většiny dále následuje parametrizace, diferenciál plochy, vypočtená Gaussova a střední křivost, znázorněny grafy křivostí a plocha obarvená podle hodnot křivostí. Celá galerie je zároveň propojena křížovými odkazy, vedoucími na související plochy. Nikde na stránkách není zmínka o autorovi celého projektu, webová adresa však vede do osobního adresáře profesorky Weiqing Gu, která se zabývá diferenciální geometrií, tedy lze předpokládat, že se jedná o její dílo.



Obrázek 3.5: Scherkova minimální plocha z [11]

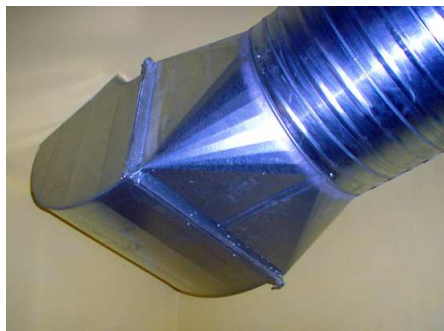
Shrnutí: Stránky obsahují strukturovaný přehled velkého množství kategorií ploch i s popisem. Obrázky nejsou v nijaké zvláštní kvalitě, ale pro představu dostačují. Doplnující údaje k plochám jsou skvěle zpracované a mohou velmi pomoci zorientovat se v problematice diferenciální geometrie ploch.

4 Konstrukce rozvinutelné přechodové plochy

Tato část práce je orientována na návrh algoritmu, který by byl schopen konstruovat rozvinutelné plochy mezi dvěma prostorovými křivkami (korektní zadání v oddílu 4.2), a jeho implementaci v softwaru *Mathematica*. Pokusíme se nejprve shrnout důvody, proč je užitečné se tomuto tématu věnovat.

4.1 Motivace

Na problém konstrukce přechodu mezi dvěma objekty (rozuměj tělesy) často narazíme v technické praxi, nejčastějším případem je propojení dvou daných profilů (**obr. 4.1**). Navíc se často požaduje, aby byl přechod snadno realizovatelný pomocí běžně dostupných materiálů, pro názornost uveďme pláty plechu [14]. Dalším kritériem je ne příliš náročná manipulace - nabízí se ohýbání plechu nebo obrábění kovových masivů (frézování, broušení). V ohýbání plechu vidíme přímou analogii s rozvinutelnou plochou, při obrábění je možné využít rozvinutelné plochy jakožto obálky systému rovin (viz část 2 tohoto textu) pro snadnější opracování. Taková specifikace vede na úlohu hledání rozvinutelné plochy s hranicemi danými objekty, které chceme propojit. Obecně tyto objekty mohou mít libovolně tvarovaný okraj (při napojování částí potrubí nás kupříkladu zajímá tvar jejich koncových průřezů) a zaujímat jakoukoli vzájemnou polohu.



Obrázek 4.1: Přechodová plocha v praxi [13]

Výhody rozvinutelných přechodových ploch jsou tedy jasně patrné, ovšem množství komerčních softwarů přesto využívá (byť velmi dobře ovladatelné) spline plochy, jejichž realizace je podstatně složitější (například obecně nejdou modelovat právě z plechu, bez využití natahování či stříhání), nebo obecné přímkové plochy. Ani modelovací software *Rhinoceros*, který možnost rozvinutelné přechodové plochy nabízí, nedává ve sto procentech správné výsledky (viz 4.7). Další studium v této oblasti je žádoucí a mohlo by přinést nové výsledky.

4.2 Zadání problému

Jsou dána dvě tělesa s daným tvarem, velikostí a vzájemnou polohou. Dále je na každém z těles zadána hranice, na níž má dojít k napojení druhého tělesa (nemusí nutně jít o hranici tělesa!). Tyto dvě hranice jsou prostorovými křivkami.

Definice 4.1. Jsou dány dvě různé prostorové křivky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{Q}(r)$. Plocha $\mathbf{R}(u^1, v^1)$, pro kterou platí že

- i) $\mathbf{P}(t), \mathbf{Q}(r)$ jsou hranice plochy,
- ii) Gaussova křivost $K = 0$ v každém bodě,
- iii) neobsahuje samoprůnik,

se nazývá *rozvinutelná přechodová plocha* mezi křivkami $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{Q}(r)$.

Všimneme si požadavku absence samoprůniku. Je to opodstatněná podmínka, neboť samoprůnik by v praxi znehodnocoval všechna pozitiva rozvinutelnosti plochy (oddíl 4.1) a vytvářel slabé místo. Rozvinutelná plocha je přímková, její povrch je tvořen přímkami, které procházejí oběma křivkami zadání. Podmínka **iii)** tedy jednoduše znamená, že površky se nesmí na ploše křížit.

Problém konstrukce rozvinutelné přechodové plochy mezi dvěma křivkami můžeme pojmut několika způsoby

- a) Nalezení parametrizace $\mathbf{R}(u^1, v^1)$
- b) Sestrojení konkrétních přímek plochy
- c) Aproximace plochy pomocí rozvinutelných plátů

Nalezení konkrétní parametrizace je samozřejmě ideální stav. Na základě parametrizace plochy je možné zkoumat její vlastnosti a lze získat libovolný bod plochy. Musíme si ale uvědomit, že hledání takové parametrizace je obecně velmi složitý problém, který vůbec nemusí mít řešení (příklad v oddílu 4.4). Pro některá triviální zadání lze parametrizaci naopak stanovit velice snadno. Jsou to ovšem konkrétní případy, na které je potřeba lidský náhled. Rešerše provedené v rámci této práce nedávají jasnou odpověď na otázku řešitelnosti této úlohy. V oddílu 4.4 se proto pokusíme stanovit alespoň nějakou množinu řešitelných zadání a uvést neřešitelné příklady.

Když sestrojujeme jednotlivé površky plochy, převedli jsme problém na jednodušší: Hledáme ke každému bodu jedné křivky odpovídající bod křivky druhé tak, abychom je mohli propojit přímkou. Ploše náleží pouze část přímky ohraničená křivkami zadání, tedy úsečka. Sestrojení konkrétních přímek plochy má oproti hledání parametrizace tu výhodu, že můžeme postupovat po dané křivce diskrétně, bod po bodu (samozřejmě s požadovanou přesností) a dostaneme vždy soustavu rovnic (viz 4.5). Je to tedy univerzální postup, o řešitelnosti ale zatím také nic nevíme. Tento způsob je analyzován a použit v algoritmu. Je to metoda vhodná k použití při praktických konstrukcích, neboť můžeme dostat tvar plochy s požadovanou přesností.

Plátováním rozvinutelnými pláty se v minulosti zabývalo množství autorů (zajímavá metoda a shrnutí v archivním článku [5]). Jak uvidíme dále, je možné tento způsob navázat na předchozí.

4.3 Rozbor

Soustředíme se na zkonstruování jednotlivých přímek plochy. Jak už bylo zmíněno, hledáme ke každému bodu

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}(t_0)$$

bod

$$\mathbf{B} \in \mathbf{Q}(r)$$

tak, aby ležely na téže površce plochy. V části 2 jsme viděli, že rovina tečná v libovolném bodě površky je tečná podél celé této přímky. V jedné rovině by tedy musely ležet tečna ke křivce \mathbf{P} v bodě \mathbf{A} , tečna ke křivce \mathbf{Q} v bodě \mathbf{B} i spojnice bodů \mathbf{A} a \mathbf{B} (což by vlastně byla ona površka). Použijeme obvyklé značení

$$\mathbf{P}' = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

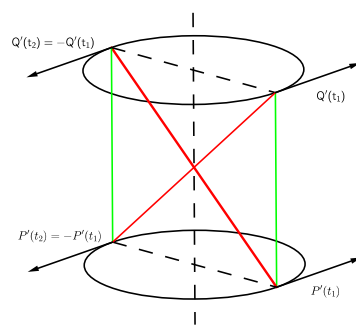
$$\mathbf{Q}' = \frac{d\mathbf{Q}}{dr},$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}.$$

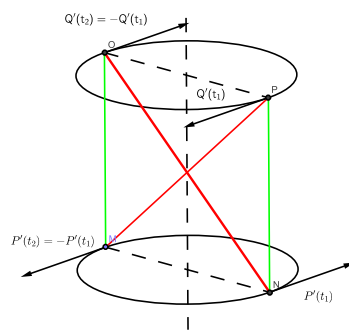
Vektory prvních derivací jsou směrovými vektory tečen [1], vektor \mathbf{AB} je směrovým vektorem površky. Spojnice \mathbf{A} a \mathbf{B} může být površkou, pokud tyto vektory budou koplanární (patřící do zaměření jedné roviny), neboli, ekvivalentně, pokud tečna křivky \mathbf{P} v bodě \mathbf{A} a tečna křivky \mathbf{Q} v bodě \mathbf{B} bude náležet jedné rovině.

Že o hledanou přímku nutně jít nemusí ukážeme na příkladu dvou kružnic, ležících v rovnoběžných rovinách. Pro jednoduchost nechť spojnice středů těchto kružnic je kolmá na jejich roviny (obr. 4.2a). Je zřejmé, že ke každé tečně kružnice existují další tečna, která je s ní rovnoběžná a body dotyku leží naproti sobě přes kružnici. Použijeme-li bod \mathbf{B}_1 , získáme površku válcové plochy, zatímco použití \mathbf{B}_2 vede na površku kuželové plochy s vrcholem mezi kružnicemi. Površky takové kuželové plochy se ale kříží a proto nemůže být přechodovou plochou. Máme řešení, úsečka \mathbf{AB} náleží rozvinutelné přechodové ploše mezi křivkami

$\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{Q}(r)$.



(a)



(b)

Obrázek 4.2: Konstrukce površky

Nalézt mezi možnými řešeními to správné můžeme pomocí dodatečné podmínky na vektory \mathbf{P}' a \mathbf{Q}' : Vektory musí mířit do stejné poloroviny ohraničené površkou.

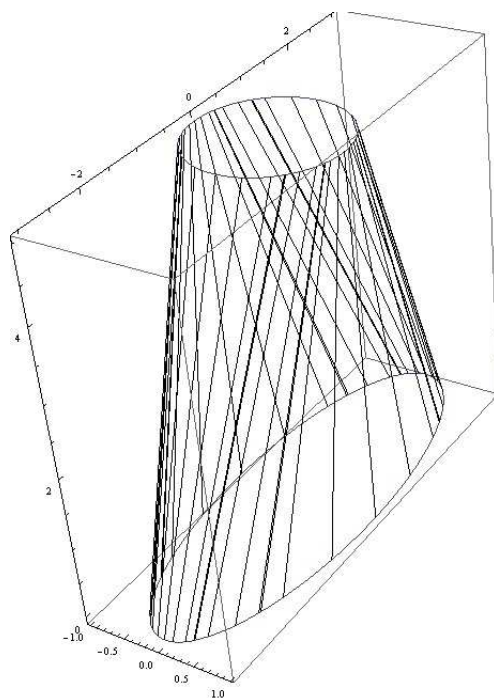
Ani tato zkouška ovšem stále ještě stoprocentně nezajišťuje správnost řešení. Využijme předchozího příkladu, pouze obrátíme parametrizaci kružnice $\mathbf{Q}(r)$, její tečné vektory teď budou mít opačný směr (obr. 4.2b). Jak je vidět, křivky se nezměnily a tím pádem se nemění ani přechodová plocha, ale test tečných vektorů chybně určí bod \mathbf{B}_2 za vyhovující.

Máme tedy dvě možnosti: sladit parametrizace, což se může ukázat jako obtížné, ne-li nemožné, nebo kontrolovat, zda nedochází ke křížení površek, to by ale při velké požadované přesnosti bylo značně výpočetně náročné. Dalším omezením tohoto přístupu je fakt, že využíváme derivace křivek, jsme tedy teoreticky schopni zpracovat pouze ty křivky, které mají derivace v každém svém bodě. Protože ale v praxi neexistuje dokonalá hrana ani dokonalý vrchol, lze si při použití výše popsané metody (za cenu určité nepřesnosti) dovolit křivky zaoblit a tím získat chybějící derivace. Při dosažení požadované husté struktury površek pak naopak můžeme mezi jejich koncovými body aproximovat křivku

úsečkami, čímž získáme čtyřúhelníkové pláty. Tak mohl vzniknout i přechod mezi čtvercem a kružnicí na obr. 4.1

4.4 Řešitelnost

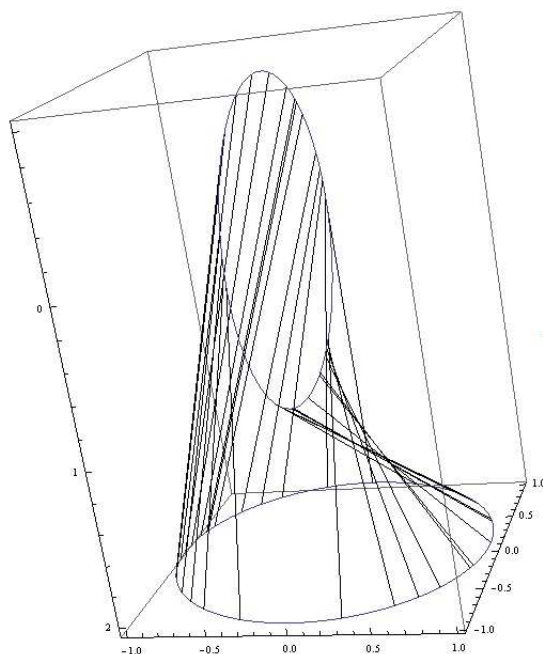
Nyní zkusíme najít příklady řešitelných a neřešitelných zadání. Začneme u nejjednodušších případů, rovinných křivek v prostoru. Když α, β jsou dvě navzájem různé roviny a $P \in \alpha, Q \in \beta$ *jednoduché hladké konvexní rovinné křivky* ([1]), pak se zdá, že rozvinutelná přechodová plocha mezi P a Q existuje. Korektní důkaz uvádět nebudeme, uvědomíme si jen, že hladká křivka má derivaci v každém bodě, navíc spojitou. Odvalováním tečny po křivce otočíme tečnu o 360° , tím otočíme i tečný vektor. Dále se konvexní křivka odchyluje od tečny stále na stejnou stranu, nejvýše tečnu kopíruje, pokud je v tom místě přímá. Tím také tečný vektor mění směr stále na jednu stranu (a spojitě). Víme, že se tečný vektor točí stále jedním směrem, a otočí se o plný úhel. Protože $\alpha \parallel \beta$, existuje pro každý vektor v v α (tedy i tečné vektory křivky P) tečný vektor křivky Q , který má stejný směr (je kolineární, tím i koplanární), navíc existuje i nejméně jeden tečný vektor ke Q , který má směr opačný. To nám ovšem ke konstrukci povrchy přechodové plochy stačí, podle parametrizace zbývá zvolit ten správný z rovnoběžných vektorů. Jako příklad nám můžou sloužit kružnice a elipsa na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Přechodová plocha mezi kružnicí a elipsou

Můžeme dále vyslovit domněnku, že stejně půjdou sestrojít rozvinutelné

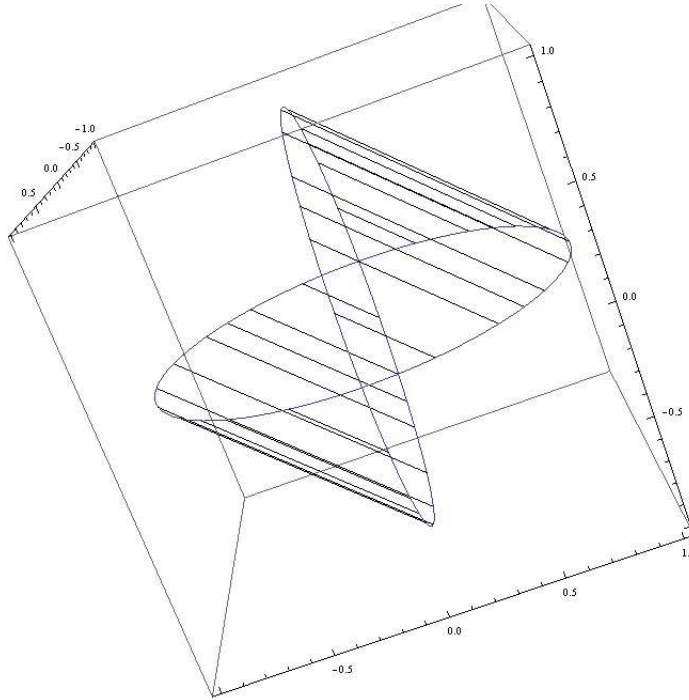
přechodové plochy pro jednoduché konvexní uzavřené křivky, pokud roviny α, β budou různoběžné, ale jejich průsečnice bude ležet **mimo** obě křivky. Když se protnou tečna křivky P a tečna křivky Q , znamená to, že tyto tečny jsou různoběžné a tedy náležejí jedné rovině (jak ještě ukážeme v oddílu 4.5). Body dotyku takových tečen jsou možné koncové body površky. (příklad takové plochy najdeme v oddílu 4.7 na obrázku 4.7d). To vysvětluje požadavek průsečnice ležící mimo křivky: Žádná tečna konvexní křivky neprochází vnitřkem oblasti ohraničené touto křivkou. Tam ale nevyhnutelně směřují některé tečny druhé křivky, čímž se odhalují body, pro které neexistují površky, příklad vidíme na obrázku 4.4. Výjimkou jsou křivky, které se na této průsečnici ve dvou bodech protínají, takže žádné tečny nemíří do vnitřku oblasti vymezené druhou křivkou (obr. 4.5).



Obrázek 4.4: Přechodová plocha dvou kružnic v kolmých rovinách není rozvinutelná

Další skupinou zadání jsou přechodové plochy na hranici určené dvěma Bézierovými křivkami ([5]). V literatuře lze najít podmínku, kdy je řešitelnost zaručena: Je dána jedna Bézierova křivka s koncovými body x_1 a x_2 , druhá s koncovými body y_1 a y_2 . Pokud tyto Bézierovy křivky leží v rovnoběžných rovinách, x_1, y_1 a x_2, y_2 jsou rovnoběžné přímky a průmět této hranice do souřadnicové roviny je obdélník, pak lze sestavit rozvinutelnou Bézierovu plochu na těchto hranicích ([6]). Z dalších pramenů například v [7] jsou dány podmínky pro tvar Bézierovy křivky tak, aby přechodová plocha mezi ní a danou libovolnou Bézierovou křivkou byla rozvinutelná.

Uvedli jsme již jeden příklad neřešitelného zadání, zmíníme ještě další: Obecně



Obrázek 4.5: Přechodová plocha dvou protínajících se kružnic

budou potíže působit přechody mezi uzavřenými a otevřenými křivkami, ač budou-li konečné, řešení existovat může. Dalším problémem jsou přechodové plochy konvexních a nekonvexních rovinných křivek. V praxi naštěstí většina profilů, které je třeba propojit, má „rozumný“ tvar.

4.5 Stavba algoritmu

Připomeňme značení z oddílu 4.3:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}(t_0)$$

$$\mathbf{B} \in \mathbf{Q}(r)$$

$$\mathbf{P}' = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

$$\mathbf{Q}' = \frac{d\mathbf{Q}}{dr},$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}.$$

Využijeme poznatků z rozboru. Předpokládejme, že křivky nejsou parametrizovány protichůdně (algoritmus testování parametrizace zde není zahrnut). Nejprve je třeba zajistit, že křivky budou regulární (vyhladit případné zlomy). To můžeme udělat například nahrazením křivky v okolí singularity obloukem kružnice.

Poznámka: Převod nebude součástí implementace v rámci této práce, jelikož diskrétní postup umožňuje singulární body jednoduše přeskočit. Implementace zde bude především za účelem demonstrace funkčnosti algoritmu konstrukce površek, nemá za cíl vytvoření kompletního softwaru.

Dále postupujeme v krocích (počet kroků je dán požadovanou přesností) po křivce P a hledáme ke každému bodu A takové r , že vektory \mathbf{P}' , \mathbf{Q}' a \mathbf{AB} jsou koplanární. Tečné vektory \mathbf{P}' a \mathbf{Q}' podle definice regulární křivky existují a jsou nenulové. Hledáme postup, jakým koplanárnost vektorů ověřit. Víme, že vektory náleží zaměření jedné roviny, pokud jsou lineárně závislé, neboli existuje lineární kombinace

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{P}' + \lambda_2 \cdot \mathbf{Q}' + \lambda_3 \cdot \mathbf{AB} = 0.$$

Nevýhoda takové rovnice je, že obsahuje čtyři neznámé, protože

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AB}(r)$$

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}'(r).$$

Pokusíme se jednu neznámou eliminovat. Vydělíme celou rovnici číslem λ_3 . Tím se nám ovšem rovnice rozpadá na dva případy:

1. $\lambda_3 \neq 0$, v tom případě získáváme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \mathbf{P}' + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \mathbf{Q}' + \mathbf{AB} &= 0 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \mathbf{P}' + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \mathbf{Q}' &= -\mathbf{AB} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \mathbf{P}' + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \mathbf{Q}' &= -\mathbf{B} + \mathbf{A} \\ \mathbf{B} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \mathbf{Q}' &= \mathbf{A} - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \mathbf{P}' \\ \mathbf{B} + u \cdot \mathbf{Q}' &= \mathbf{A} + s \cdot \mathbf{P}' \end{aligned} \quad (\text{I})$$

což je rovnice průsečíku tečen křivek v bodech \mathbf{A} a \mathbf{B} .

2. $\lambda_3 = 0$, v tom případě nemůžeme provést vydělení, ale jedna neznámá nám stejně zmizí:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \mathbf{P}' + \lambda_2 \cdot \mathbf{Q}' + 0 \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\ \lambda_1 \cdot \mathbf{P}' + \lambda_2 \cdot \mathbf{Q}' &= 0 \\ \lambda_1 \cdot \mathbf{P}' &= -\lambda_2 \cdot \mathbf{Q}' \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \mathbf{P}' &= \mathbf{Q}' \\ v \cdot \mathbf{P}' &= \mathbf{Q}' \end{aligned} \quad (\text{II})$$

což je rovnice kolinearity (rovnoběžnosti) dvou vektorů.

Rovnice **I** má již jen tři neznámé, rovnice **II** pouze 2 a můžeme je řešit, numericky, nebo symbolicky. Začneme obecnějším případem, hledáním průsečíku tečen, a řešíme rovnici **I**. Pokud nenajdeme žádné řešení, může to znamenat, že tečny jsou rovnoběžné. Řešíme tedy rovnici **II**. Pokud ani zde nenajdeme

řešení, znamená to, že tečny jsou mimoběžné a v bodě \mathbf{A} neexistuje povrchka. Když ale nějaké řešení máme, musíme se přesvědčit, zda je správné. Chceme získat parametr r , řešení ovšem dostaneme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ u \end{pmatrix},$$

pro rovnici **I** a

$$\begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}.$$

pro rovnici **II** (při implementaci v počítači jsou vektory v naprosté většině řádkové).

V první rovnici jsou s a u hodnoty parametrů tečen v průsečíku. Pokud je parametr kladný, leží bod ve směru tečného vektoru, v případě záporného parametru je směr opačný. Tečné vektory tedy směřují do stejné poloroviny, pokud je $s \cdot u > 0$. U druhé rovnice je situace ještě jednodušší, číslo v udává přesný poměr mezi tečnými vektory. Je-li $v > 0$, mají vektory stejný směr. Vybereme nyní jen ta řešení, která dodatečné kritérium o směru vektorů, stanovené v oddílu 4.3, splňují. Pokud je jich více, vybereme jedno řešení tak, aby $\mathbf{AB}(\mathbf{r})$ bylo co nejkratší, a prohlásíme úsečku \mathbf{AB} povrchkou.

Nalezenou povrchku \mathbf{AB} uložíme do pole površků a postup opakujeme v dalším bodě křivky \mathbf{P} . Po zpracování celé křivky \mathbf{P} aplikujeme stejný algoritmus na křivku \mathbf{Q} , abychom docílili rovnoměrnějšího rozložení površků po obvodu obou křivek.

4.6 Implementace

Algoritmus byl implementován v prostředí *Mathematica 8.0* jako soubor notebook s několika metodami a aktivním prvkem k ovládní vstupu a výstupu. Jako hlavní a jediný viditelný výstup je použito dynamické komponenty *Manipulate*, která poskytuje interaktivní vyhodnocování vnořeného výrazu na základě ovládacích prvků. Tímto výrazem je zobrazení zadaných křivek, sloučené s voláním hlavní metody *prechod*. Zdrojový kód je přímo okomentován, program se nachází na příloženém CD (Příloha 1). Nyní následuje přehled všech implementovaných metod s jejich vstupními parametry a popisem funkčnosti:

- *method1[AB]* - tato metoda má za vstupní parametr pouze vektor \mathbf{AB} a hledá takovou hodnotu parametru $r = r_0$, aby $\mathbf{B} = \mathbf{Q}(r_0) = \mathbf{A}$.
- *method2[tp, tq, t0]* - vstupními parametry metody jsou tečné vektory křivek a hodnota $t = t_0$ parametru t v bodě \mathbf{A} . Hledá hodnotu parametru $r = r_0$ tak, aby $\mathbf{P}'(\mathbf{t}_0) \parallel \mathbf{Q}'(\mathbf{r}_0)$.
- *method3[Q, tp, tq, t0, Pt0]* - vstupními parametry jsou celá křivka \mathbf{Q} , tečné vektory k oběma křivkám, hodnota parametru $t = t_0$ v bodě $\mathbf{A} = \mathbf{P}(t_0)$ a sám bod \mathbf{A} . Hledá hodnotu parametru $r = r_0$ takovou, že tečna ke křivce \mathbf{Q} v bodě $\mathbf{Q}(r_0)$ protíná tečnu křivky \mathbf{P} v bodě \mathbf{A} .

- *plocha1*[*P*, *Q*] - vytváří pole površek, vypočtených z křivky **P** na křivku **Q**. Krokuje parametr $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ s krokem $\frac{\pi}{20}$ (přednastavená hodnota) a v každém kroku hledá površku z bodu $\mathbf{A} = \mathbf{P}(t)$. Volá metody *method1*, *method2* a *method3* pro výpočet možných koncových bodů površky. Poté zkontroluje, zda řešení prochází kritériem směru tečných vektorů (viz oddíly **4.3**, **4.5**) a určí bod **B**, řešení nejbližší bodu **A**. Nakonec uloží površku jako dvojici bodů **A**, **B** a pokračuje dalším krokem.
- *prechod*[*P*, *Q*] - hlavní metoda, vstupními parametry jsou křivky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{Q}(r)$, tříšložkové vektorové funkce jedné reálné proměnné. Metoda spouští metodu *plocha1* z jedné křivky na druhou a potom naopak. Oba výsledky sloučí do jednoho pole površek a připraví k vykreslení.

Chybové a varovné hlášky jsou ošetřeny pouze nejzákladnějším způsobem, většina z nich je jednoduše potlačena. Vzhledem k pouze demonstračním účelům této implementace je to dostatečné. Samozřejmě se nám ale snižuje schopnost rozpoznat nastalou situaci a vyhodnotit, zda je zadání řešitelné. Skutečně důkladné zpracování chybových výstupů by umožňovalo stanovit existenci nebo neexistenci řešení s velkou pravděpodobností.

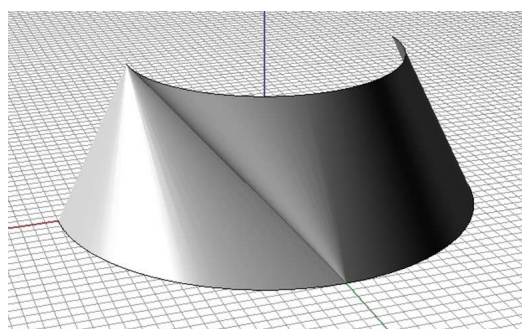
Program se spouští v prostředí *Mathematica* a slouží ke konstrukci čárové kostry rozvinutelné přechodové plochy mezi dvěma křivkami. Je v něm předdefinováno několik křivek, další může uživatel přidat připsáním do notebooku. Po prvotním vyhodnocení notebooku (funkce *Evaluate notebook*) se zobrazí panel s ovládacími prvky: Dva posuvníky, *k* a *l*, pro výběr křivek a tlačítko *Generovat*. Také je vykresleno zadání a řešení počáteční konfigurace [*k* = 1, *l* = 1]. Uživatel může zadat některou z kombinací křivek a klepnout na tlačítko *Generovat*. V zobrazovacím okně jsou vypsány hodnoty konfigurace, do jednoho grafu se vykreslí zadané křivky a ve druhém grafu se po přepočtení objeví čárová kostra plochy. Pokud systém neumí plochu vypočítat, nahlásí selhání.

4.7 Zhodnocení výsledků

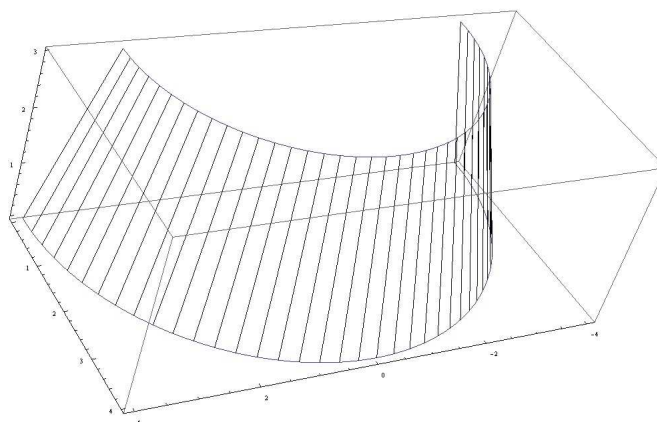
Program *Generátor ploch* je spíše ukázkovou implementací vytvořeného algoritmu. Je schopen konstruovat površky rozvinutelné přechodové plochy mezi dvojicemi předdefinovaných hladkých křivek (obrázky **4.3**, **4.5**, **4.6b**, **4.7d**). Tyto křivky jsou vybrány tak, aby reprezentovaly několik reálných možností, ač jistě ne všechny. Jedná se o kružnice, elipsy a šroubovice. Po spuštění se program pokusí najít co největší množství površek podél jedné i druhé křivky, a zobrazit je. Nekontroluje parametrizace ani křížení površek, uživatel musí tedy sám zajistit, aby křivky nebyly parametrizovány protichůdně (viz rozbor v oddílu **4.3**). Předdefinované křivky jsou parametrizovány „správně“. Program také nehlídá celistvost ploch, neexistenci řešení oznámí pouze, pokud nenalezne ani jednu površku. Tyto funkce jsou velmi podstatné, co se týče dalšího rozvoje softwaru, ovšem pro demonstraci algoritmu nutné nejsou a jejich vynechání má pozitivní vliv na přehlednost a srozumitelnost kódu.

Generátor ploch v současném stavu je vhodným základem pro další rozšíření a vylepšení: Poměrně jednoduchým krokem by bylo umožnit uživateli zadávat vlastní křivky. Dále by bylo možné přejít od úseček ke skutečné ploše pomocí čtyřúhelníkových plátů mezi površkami (viz oddíl 4.3). Vhodná optimalizace použitých výpočtových metod i programových struktur může snížit výpočetní a časovou náročnost. Plné zprovoznění systému rozpoznání řešitelnosti by vyžadovalo implementaci aparátu na podchycení a vyhodnocení chybových hlášek a varování prostředí *Mathematica*.

V oddílu 4.1 jsme zmínili chyby, kterých se dopouští při konstrukci ploch systém *Rhinoceros*. Uvedme nyní další příklady těchto chyb a srovnáme je s výsledky našeho programu.



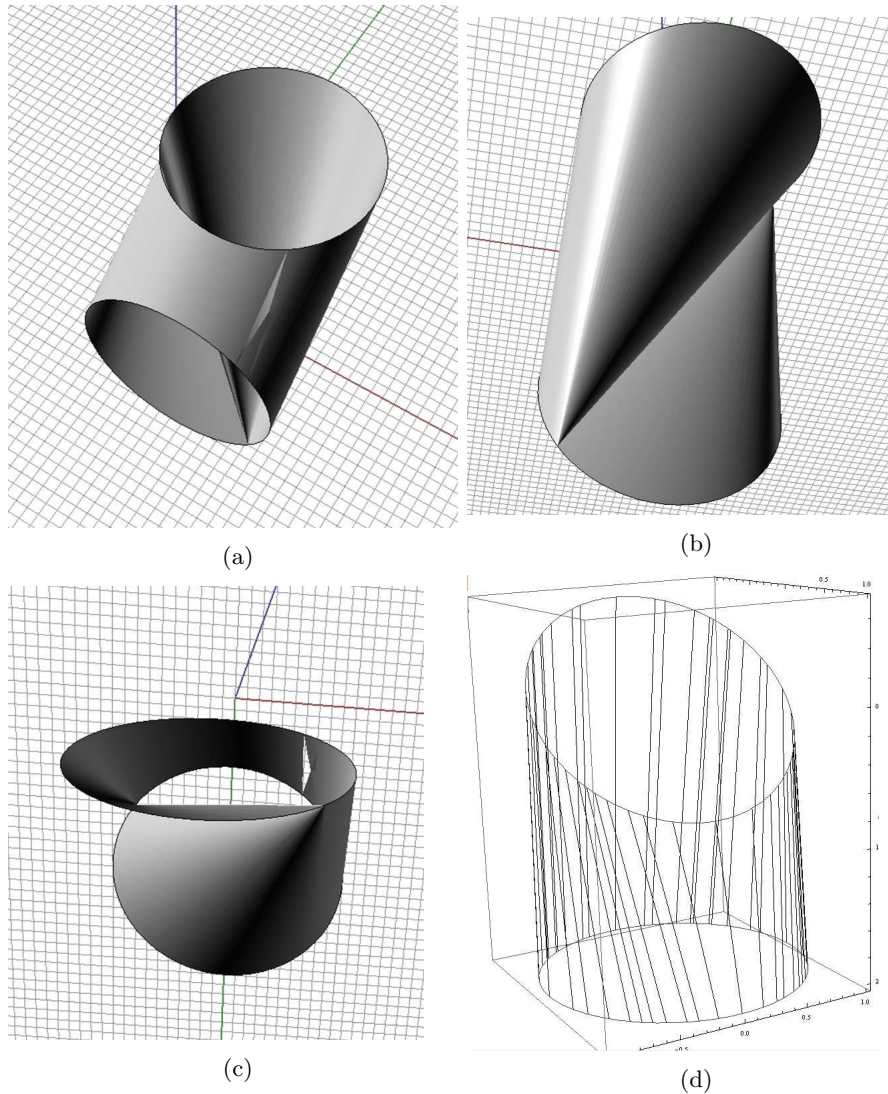
(a)



(b)

Obrázek 4.6: Přechodová plocha mezi dvěma půlkružnicemi

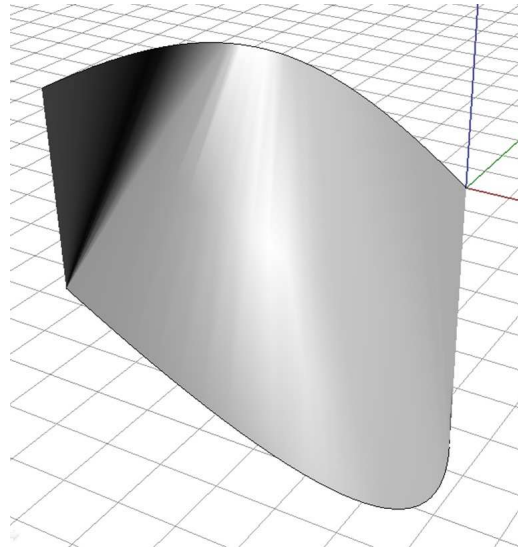
Mějme dvě půlkružnice v rovnoběžných rovinách (obr. 4.6a). Vidíme, že výsledná plocha vytvořená v prostředí *Rhinoceros* obsahuje „hranu“ - množinu singulárních bodů. Na obrázku 4.6b je stejná úloha řešená programem *Generátor ploch*, je celistvá plocha. Protože jednotlivé úsečky splňují kritéria površek rozvinutelné plochy (což vychází ze struktury algoritmu), můžeme řešení považovat za správné. Toto zadání je k dispozici předdefinované v programu na příloženém CD (příloha 1), nastavení $[k = 1, l = 1]$



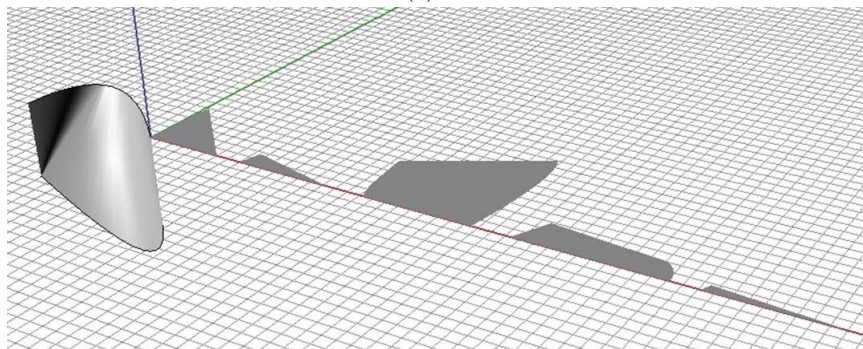
Obrázek 4.7: Přechodová plocha dvou kružnic v různoběžných rovinách

Zadány jsou dvě kružnice v různoběžných rovinách. Na obrázcích **4.7a-c** je opět patrná chyba (ve skutečnosti dokonce dvě chyby, „hrana“, a „díra“ v ploše). Na takto zadaných kružnicích lze totiž sestavit hladkou plochu, jak jsme viděli v oddílu **4.4**. Program *Generátor ploch* vytvoří plochu na obrázku **4.7d**. Jedná se opět o celistvou plochu, jednotlivé úsečky jsou površkami a máme tedy řešení (Příloha 1, předdefinované zadání [$k = 3, l = 3$]).

Poslední příklad uvedeme bez srovnání. Jak je napsáno v oddílu **4.4**, lze sestavit rozvinutelnou přechodovou plochu i mezi dvěma Bézierovými křivkami, pokud spojnice jejich počátečních bodů a spojnice koncových bodů jsou rovnoběžné. Máme dvě Bézierovy křivky (nyní navíc v různoběžných rovinách,



(a)



(b)

Obrázek 4.8: Přejídná plocha mezi dvěma Béziovými křivkami

obr. 4.8a). *Rhinoceros* správně vypočte přejídnou plochu, její rozvinutí (obr. 4.8b) se však nepochopitelně rozpadá na několik segmentů.

Závěr

V bakalářské práci *Křivosti ploch a jejich aplikace* jsme se zabírali několika hlavními body:

Zavedli jsme pojmy normálové, Gaussovy a střední křivosti ploch, popsali třídění ploch podle křivosti a ukázali příklady. Obsáhleji jsme se věnovali minimálním, a hlavně rozvinutelným plochám.

Dále byly jmenovány a komentovány internetové zdroje, pojednávající o plochách, hlavně z hlediska dostupného obrazového materiálu. Provedli jsme hodnocení internetových stránek s galeriemi ploch na základě několika kritérií, jmenovitě přístupnosti, kvality, kvantity, ucelenosti a dalších. U každého zdroje byl pak shrnut celkový přínos.

Na závěr jsme prozkoumali téma rozvinutelných přechodových ploch. Poukázali jsme na souvislost mezi modelováním ploch a technickou praxí, také jsme zaznamenali některé nedokonalosti používaných softwarů. Jako hlavní produkt této části práce se podařilo navrhnout univerzální algoritmus, který je schopen konstruovat rozvinutelné přechodové plochy mezi prostorovými křivkami, a částečně ho implementovat (v tom smyslu, že, program nedokáže spolehlivě určovat celkovou řešitelnost a není stoprocentně účinný).

Práce může sloužit jako pomůcka při studiu základů diferenciální geometrie ploch, neboť je kladen důraz na vizuální představu a pochopení souvislostí. Téma rozvinutelných přechodových ploch zde však není zdaleka vyčerpané a je možné se jím do budoucna dále zabývat.

Reference

- [1] Ježek, F.: *Diferenciální geometrie (pomocný učební text)*. Západočeská univerzita, Plzeň, 2010
- [2] Kozlová, I.: *Plochy se speciálními hodnotami křivosti (bakalářská práce)*. Západočeská univerzita, Plzeň, 2008
- [3] Semotánová, Z.: *Gaussova křivost a Gaussovo zobrazení (bakalářská práce)*. Západočeská univerzita, Plzeň, 2006
- [4] Pressley, A.: *Elementary differential geometry*. Springer, London 2001
- [5] Sun M., Fiume E.: *A Technique for Constructing Developable Surfaces*. V: Graphics Interface 1996, s. 176-185. Canadian Human-Computer Communications Society , Toronto 1996
- [6] Chu Ch., Chen J.: *Geometric design of developable composite Bezier surfaces*. V: Computer-Aided Design and Applications, Vol. 1, No. 1-4 (2004), s. 531-539. CAD Solutions, LCC, 2004
- [7] Aumann G.: *A simple algorithm for designing developable Bézier surfaces*. V: Computer Aided Geometric Design 20 (2003), s. 601–619 , Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam 2003
- [8] *GeometrieWerkstatt Surface Gallery* [online] (24.5.2012)
<http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~nick/gallery>
- [9] *Algebraic surfaces* [online] (25.5.2012)
<http://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/bildergalerie/gallery.html>
- [10] *Geometry: Gallery of Surfaces* [online] (25.5.2012)
<http://virtualmathmuseum.org/Surface/>

- [11] *Curves and Surfaces: A digital library of mathematically interesting and important curves and surfaces* [online] (25.5.2012) http://www.math.hmc.edu/~gu/curves_and_surfaces/
- [12] *Wolfram Mathworld* [online] (29.5.2012) <http://mathworld.wolfram.com>
- [13] *Matematická sekce Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze* [online] (24.5.2012) <http://www.karlin.mff.cuni.cz>
- [14] *Wikipedia, The Free Encyclopedia* [online] (24.5.2012) <http://wikipedia.org>

Přílohy

1. *Generátor ploch.nb* - soubor notebooku prostředí Mathematica, obsahuje program generátoru čárových modelů ploch. Na přiloženém CD.
2. *pics.zip* - soubor archivu s obrázky, použitými v práci, v plném rozlišení. Na přiloženém CD.
3. *BP_Hellus.pdf* - soubor s elektronickou verzí tohoto textu. Na přiloženém CD.