

**Západočeská univerzita v Plzni**  
**Fakulta aplikovaných věd**

# **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**PLZEŇ, 2012**

**Diana Šudentová**

**Západočeská univerzita v Plzni**  
**Fakulta aplikovaných věd**  
**Katedra matematiky**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
**Odhady výnosových křivek**  
**Estimates of yield curves**

**PLZEŇ, 2012**

**Diana Študentová**

## **Prohlášení**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 27. května 2012

.....  
vlastnoruční podpis

## **Poděkování**

Chtěla bych poděkovat RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za cenné připomínky a rady v průběhu psaní práce a své rodině za podporu během dosavadního studia.

### **Abstrakt**

Tato práce si klade za cíl především seznámení s problematikou výnosových křivek a s metodami jejich konstrukce. Z pohledu typu výnosových křivek, je tato práce zaměřena na spotové výnosové křivky a z hlediska metod jsou zde rozpracovány postupy založené na bootstrappingu a parametrických funkcích. Dále je práce zaměřena na Nelson-Sieglův a Svenssonův model. V práci je uveden příklad vygenerované spotové výnosové křivky pro ukázková data z České republiky a z Německa.

**Klíčová slova:** výnosová křivka, Nelson-Sieglův model, Svenssonův model

### **Abstrakt**

This works aim is above all to acquaint the reader with the issues connected to yield curves and their construction. In relation to yield curves types is focused on the methods which are based on bootstrapping and parametrical functions. The thesis further focuses on the Nelson-Siegel and Svensson modell. At the end of this thesis simulations of modelling yield curves of Czech republic and Germany are presented.

**Keywords:** yield curve, Nelson-Siegel model, Svensson model

# Obsah

<b>I Úvod</b>	<b>1</b>
<b>II Teoretická část</b>	<b>2</b>
1 Několik základních druhů dluhopisů a jejich podstata	2
2 Tvary výnosových křivek	4
3 Vysvětlení a definice základních pojmů	5
3.1 Úrokové míry	6
3.2 Durace	9
3.3 Zavedené značení	10
4 Teorie, které vysvětlují tvary výnosových křivek	10
4.1 Čistá teorie očekávání	11
4.2 Modifikovaná teorie očekávání	12
4.3 Teorie preferovaných tržních segmentů	12
4.4 Teorie preference likvidity	12
4.5 Teorie preferovaného umístění	13
5 Determinanty pohybu výnosových křivek	14
5.1 Měnová politika	14
5.2 Hospodářský cyklus	14
5.3 Ekonomické prostředí	15
<b>III Metody konstrukce výnosových křivek</b>	<b>16</b>
6 Bootstrapping	17
6.1 Klasický bootstrapping	17
6.2 Zobecněný bootstrapping s využitím kubických splinů	19
7 Parametrické funkce	22
7.1 Aproximace polynomy	22
7.1.1 Volba vhodného stupně polynomu	23
7.2 Minimalizační funkce	24
7.3 Funkce Nelson-Siegla	24
7.3.1 Odhad parametrů Nelson-Sieglova modelu	26
7.3.2 Schopnost predikce Nelson-Sieglova modelu	27
7.4 Svenssonova metoda - rozšíření Nelson-Sieglova modelu	28

<b>IV Praktická aplikace - konstrukce výnosové křivky několika metodami na reálných datech z České republiky a Německa</b>	<b>28</b>
<b>8 Česká republika</b>	<b>29</b>
8.1 Data . . . . .	29
8.2 Aproximace polynomem . . . . .	30
8.3 Zobecněný bootstrapping . . . . .	32
8.4 Nelson-Sieglův a Svenssonův model . . . . .	33
8.5 Interpretace výnosové křivky České republiky . . . . .	37
<b>9 Německo</b>	<b>38</b>
9.1 Data . . . . .	38
9.2 Aproximace polynomy . . . . .	40
9.3 Nelson-Sieglův a Svenssonův model . . . . .	42
9.4 Interpretace výnosové křivky Spolkové republiky Německo . . . . .	45
<b>10 Srovnání</b>	<b>46</b>
<b>V Závěr</b>	<b>49</b>
<b>VI Literatura</b>	<b>50</b>



---

## Část I

# Úvod

Pod pojmem výnosová křivka nebo také struktura úrokových měr se rozumí vztah mezi výnosem aktiva a jeho splatností. Důvody vedoucí k sestrojování těchto křivek pro různá aktiva různých států či ekonomik se liší. Při grafické interpretaci se výnos aktiva vynáší na horizontální osu a jeho splatnost se vynáší na osu vertikální.

Z tvaru výnosové křivky lze například odhadovat vývoj úrokových sazeb v budoucnosti. Teorie výnosových křivek dává nástroj investorům, kteří se rozhodují do jakých aktiv mají investovat, aby měli co největší zisk. Tento nástroj využívají také centrální a komerční banky pro odhad budoucích krátkodobých úrokových sazeb. Díky neustálému vývoji ekonomiky vzniká a bude vznikat mnoho dalších "vylepšených" teorií, které se budou snažit napravit nedostatky těch předchozích a přizpůsobit se stávající ekonomické situaci. Tyto teorie se však vždy opírají o základní teorie popsané v této práci.

Tato práce se soustředí na spotové výnosové křivky, které jsou odvozené ze státních dluhopisů. Státní dluhopisy jsou totiž obvykle považovány za bezriziková aktiva. Spotová neboli promptní výnosová křivka zaznamenává současnou posloupnost výnosových měr uspořádaných vzestupně dle doby splatnosti.

Při konstrukci těchto křivek často nastává problém se zdroji adekvátních dat, z nichž by vyplynula co nejpřesnější výnosová křivka. V ideálních podmínkách by byly potřebné dluhopisy s nulovým kupónem, jejichž doby splatnosti by byly od sebe vzdáleny po konstantních dobách. Problém nastává u dluhopisů s nenulovým kupónem, těch je na trhu většina, a rozhodně neplatí, že emitent emituje dluhopisy se splatnostmi, které jsou od sebe vzdálené po konstantní dobu. Proto je nutná úprava kupónových dluhopisů pro abstrakci od kupónového efektu, se kterým souvisí alikvotní úrokový výnos.

Cílem této práce je uplatnit teoretické postupy na reálných datech z České republiky a Spolkové republiky Německo. Pro přesnější výsledky budou obě křivky odhadnuty více metodami.

O teorii výnosových křivek lze tvrdit, že vychází především z praxe. Nicméně pro svou jednoduchost se s ní lze často setkat u investorů pro ohodnocování rizik různých investic a podobně.



## Část II

# Teoretická část

## 1 Několik základních druhů dluhopisů a jejich podstata

Inspirací ke zpracování této části práce byla zejména publikace [1], dále byly při zpracování použity zdroje [9],[10]. V knize [1] jsou podrobněji popsány jednotlivé druhy dluhopisů, zatímco v ostatních výše uvedených zdrojích jsou rozpracovány převážně pojmy týkající se těchto cenných papírů. Zdroj [10] zahrnuje plné znění zákona o dluhopisech.

Dluhopisy jsou emitovány státem, firmami a různými institucemi k získání prostředků pro rozvoj podnikání nebo, v případě státních dluhopisů, k financování různých státních výdajů včetně státního dluhu. V porovnání s klasickými úvěry lze s dluhopisy efektivně obchodovat na sekundárním trhu prostřednictvím jeho účastníků.

Dluhopis je cenný papír, který je po nějaké době od zakoupení opět splacen s určitým ziskem pro věřitele. Dle druhu dluhopisu plynou z tohoto cenného papíru emitentovi, v období mezi koupí a splacením, dodatečné výdaje, kterým se říká kupóny. Dluhopis má svou nominální hodnotu, jež se nemění po dobu držení dluhopisu. Dále existuje tržní a vnitřní hodnota dluhopisu. Tržní hodnota dluhopisu je určována trhem. Za optimálních podmínek by měla být tržní hodnota rovna současným hodnotám budoucích plateb plynoucích z držení dluhopisu. Pokud tomu tak není, dluhopis je nad nebo podhodnocen. Cizím slovem se dluhopis označuje jako obligace nebo bond. Vnitřní hodnota dluhopisu je dána současnou hodnotou všech budoucích plateb dluhopisu.

U obligací se rozlišují tři druhy výnosů: výnos do splatnosti, kupónový výnos a běžný výnos. Výnos do splatnosti je vnitřní výnosové procento, které investor obdrží, pokud do dluhopisu investuje. Blíže je tento pojem definován na následujících stránkách. Kupónový výnos je poměr mezi hodnotou následujícího kupónu a nominální hodnotou dluhopisu. Podobně běžný výnos je dán poměrem mezi hodnotou následujícího kupónu a tržní hodnotou.

Protože dluhopisy s větším kupónem mají menší relativní změnu tržní ceny, mají také nižší výnos do splatnosti. Tedy výnos do splatnosti není závislý jen na splatnosti, nýbrž i na velikosti kupónu. Proto se stává, že k jedné splatnosti náleží několik výnosů do splatnosti. Čím vyšší je kupónový výnos, tím je nižší výnos do splatnosti, neboť tržní cena takového dluhopisu je vyšší než u dluhopisu s nižším kupónem. Výnos do splatnosti je pak nižší. Aby z takového "výnosového pásu" bylo možno extrahovat výnosovou křivku, musí se dluhopisy s kupónem převést na bezkupónové. Problémem, jak z dluhopisů s nulovým kupónem sestavit výnosovou křivku, se zabývá část o metodách konstrukce výnosové křivky.

Dle legislativního rámce zákona o dluhopisech č. 190/2004 jsou kupóny dluhopisů v ČR zdaněné srážkovou daní 15 %.

---

Pro nejlepší aproximaci při sestavování výnosové křivky musí mít všechny dluhopisy stejné vlastnosti, kromě různé doby splatnosti. Je velmi těžké tento předpoklad dodržet, proto se výnosové křivky většinou sestavují jen z vládních dluhopisů nebo jen ze státních pokladničních poukázek, neboť tyto mají stejné vlastnosti a nejnižší riziko nesplacení. Pomocí těchto křivek se pak odhadují ceny rizikovějších instrumentů.

Trh dluhopisů nabízí pro investory několik druhů těchto cenných papírů. Mezi nejčastější patří tyto:

**Jednoduchý dluhopis s pevným kupónem** Anglicky *straight bond*. Tento dluhopis je nejběžnějším druhem dluhopisu. Emitent vyplácí pravidelně jednou nebo dvakrát za rok kupón. V případě státních dluhopisů v České republice vyplácí emitent (v tomto případě stát) k datu splatnosti také nominální hodnotu dluhopisu. Tento druh dluhopisu má pevně daný kupón a datum splatnosti. Nevýhoda dluhopisů s pevným kupónem je jejich vysoká citlivost na úrokovou míru, která je obvykle kvantifikována pomocí durace a konvexity.

**Dluhopis s nulovým kupónem** Anglicky *zero coupon bond*. Zero bond se vyplácí k datu splatnosti svou nominální hodnotu. Tento dluhopis je vhodný především pro emitenty, kteří vědí, že se jim investice začne vracet až po nějaké době, proto je pro ně výhodné nevyplácet kupóny, nýbrž na konci pak splatit celou částku. Splátnost těchto dluhopisů je zpravidla delší než jeden rok. Stejně vlastnosti mají i **Státní pokladniční poukázky**, které však mají splatnost mnohem kratší, obvykle do jednoho roku.

**Holé (svlečené) dluhopisy** Anglicky *strips*. Dluhopis se v tomto případě rozdělí na dvě části. Jistina a kupóny jsou obchodovány odděleně. Část obchodující s jistinou má charakter dluhopisu s nulovým kupónem a kupónová část se vyplácí jako annuita. Podle české legislativy jsou všechny kupóny obchodovatelné samostatně.

**Konzola** Anglicky *perpetual bond*. Tomuto dluhopisu se u nás také říká věčný dluhopis. Konzola vyplácí kupóny doživotně, nicméně i v těchto případech může být vyplácení ukončeno, pokud je v rámci emitování uvedena podmínka, že úrokové míry nesmí klesnout pod kupónovou míru těchto dluhopisů. Pak emitent může vyplatit nominální hodnotu a ukončit tak vyplácení.

**Dluhopisy s variabilním kupónem (s pohyblivou úrokovou sazbou)** Anglicky *floating rate notes*. Zde se kupónová míra mění dle aktuálních úrokových měr. U nás se mění například dle PRIBOR (Prague InterBank Offered Rate - pražská mezibankovní nabídková sazba). Po těchto dluhopisech vzrůstá poptávka pokud výrazněji roste úroková míra. Pak výnosnost dluhopisů s pevným kupónem klesá, ale dluhopisy s proměnlivým kupónem mohou na tuto změnu zareagovat.

Tento druh dluhopisů má tedy nižší volatilitu, tudíž tolik obávané úrokové riziko, které je hlavním rizikem při investici do dluhopisů, je nízké. V České republice byly takovými dluhopisy například povodňové dluhopisy, jejichž úroková míra byla vázána na míru inflace. Dále lze uvést aktuálně vydávané proti-inflační spořicí státní dluhopisy.

## 2 Tvary výnosových křivek

Pro ekonomickou interpretaci bylo na základě empirických zkušeností odvozeno a charakterizováno několik základních tvarů výnosových křivek.

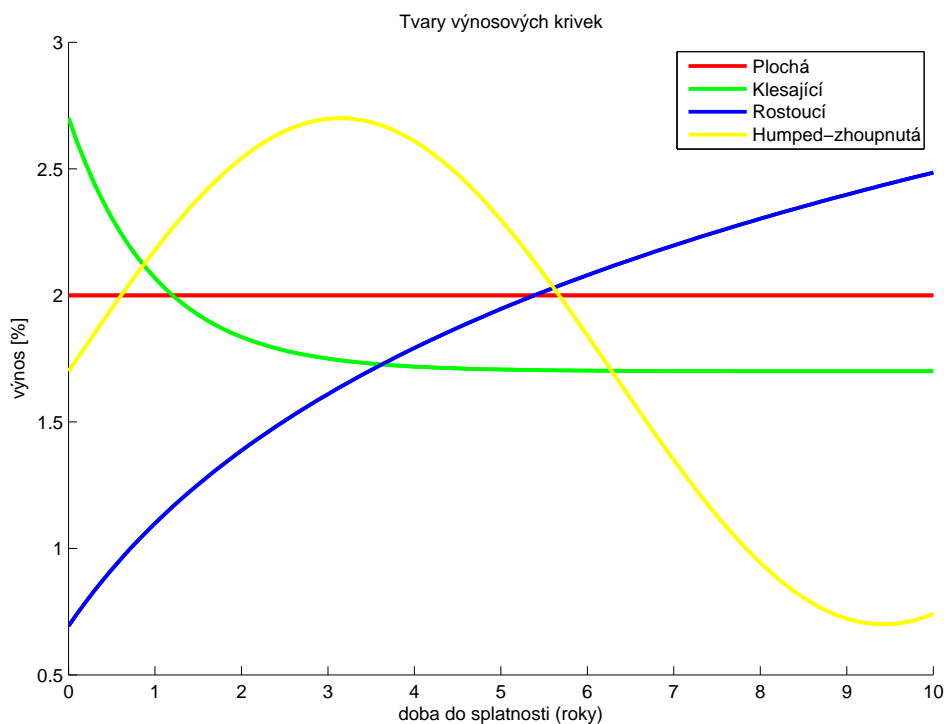
Při zpracování této části byly použity zdroje [4], [1] a [2]. Obecně se dá s určitou pravděpodobností, která vychází především z empirické zkušenosti, pomocí těchto křivek odhadovat ekonomický růst nebo recese. Toto závisí na tvaru křivky. V následujícím textu jsou popsány základní tvary výnosových křivek.

**Plochá výnosová křivka** Výnosnost dluhopisů krátkodobých i dlouhodobých je stejná. S pomocí křivek tohoto tvaru se pro svou jednoduchost často pracuje, pokud je potřeba například ohodnotit riziko investic. Pokud se v ekonomice objeví takovýto tvar výnosové křivky, očekává se pozvolný pokles dlouhodobých sazeb. Toto tvrzení vychází dle [2] z empirického pozorování. Dalo by se říci, že plochý tvar výnosové křivky je mezistupněm mezi inverzním a rostoucím tvarem.

**Rostoucí výnosová křivka** Tento tvar je ve světě nejběžnější. Krátkodobé dluhopisy podléhají nižší úrokové sazbě, zatímco střednědobé a dlouhodobé dluhopisy podléhají vyššímu úročení. V blízké budoucnosti se při tomto rostoucím tvaru nedají očekávat významnější změny úrokových sazeb. Rostoucí struktura výnosových měr vypovídá o stabilitě ekonomiky.

**Klesající (inverzní) výnosová křivka** Pokud například centrální banka z nějakého důvodu zvýší základní úrokové sazby (v ČR se jedná o krátkodobé sazby České národní banky a to diskontní, 14 denní repo a lombardní sazby), může nastat případ, že výnosová křivka bude mít inverzní tvar. Obecně by se dalo hovořit o možném indikátoru recese ekonomiky, ovšem musí se vzít v úvahu okolnosti, které ke zvýšení krátkodobých sazeb centrální bankou vedly. V této situaci je pro investory výhodnější investovat do krátkodobějších cenných papírů.

**Zhoupnutá (anglicky humped) výnosová křivka** Neboli také hrbatá výnosová křivka, se vyskytuje v ekonomice, kdy nejvyššímu zúročení podléhají střednědobé dluhopisy. V budoucnu lze očekávat pokles úrokových měr.



**Obrázek 1:** Demonstrace různých tvarů výnosových křivek

Při interpretaci se hledá, který z těchto tvarů má ke zkoumané křivce nejbliže, případně jak se bude v nejbližší čas křivka měnit (do jakého tvaru). Každý tvar má totiž svoji interpretaci. Tato práce je zaměřena na interpretaci spotových výnosových křivek. Z tohoto druhu křivek lze odhadnout pouze průměrnou výši budoucích úrokových měr, nikoliv však budoucí tvar struktury úrokových měr. V tomto textu jsou spojení výnosová křivka a struktura úrokových měr považovány za synonyma.

Jako krátký konec výnosové křivky se označuje struktura úrokových měr do několika let splatnosti. Naopak dlouhý konec výnosové křivky označuje tu část křivky, která zobrazuje výnos od deseti let až do několika desetiletí.

### 3 Vysvětlení a definice základních pojmů

V rámci této kapitoly budou uvedeny základní popisy a definice nezbytné pro odhady výnosových křivek.

Při zpracování byly použity zdroje [4], [9] a [1]. Většina definic a vzorců byla převzata z [9]. Na konci této části je ustanoveno jednotné značení, které je dodržováno v dalších částech.

**Definice 3.1.** Nechť je každý bond  $B$  charakterizován následujícím vektorem:

$$B = [n, \mathbf{C}, \mathbf{t}, F, P] \quad (3.1)$$

kde

- $n$  je doba do splatnosti dluhopisu
- $F$  je nominální hodnota dluhopisu
- $P$  je tržní cena dluhopisu v čase nákupu
- $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  představuje vektor všech nominálních hodnot kupónů daného dluhopisu
- $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  představuje vektor všech časů, kdy se vyplácí kupón daného dluhopisu

V pořadí  $k$ -tý bond je označen jako:

$$B_k = [n_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{t}_k, F_k, P_k] \quad (3.2)$$

### 3.1 Úrokové míry

**Definice 3.2.** Úroková míra je prémie, kterou věřitel (investor) obdrží za půjčení svých prostředků jinému subjektu (emitentovi) na určitou dobu. Z pohledu emitenta se jedná o cenu za zapůjčení prostředků od věřitele. Úroková míra na dobu  $t$  se značí  $i_t$ , kde doba  $t$  je vyjádřena v letech.

Úroková míra závisí mimo jiné na očekávané inflaci a očekávané míře rizika. V následujícím textu je použitý evropský standard úročení 30E/360. Označení maturita představuje datum splatnosti dluhopisu.

**Definice 3.3.** Akumulační faktor  $A(t_1, t_2)$ ,  $0 \leq t_1 \leq t_2$  označuje hodnotu jednotkové investice na dobu od  $t_1$  do  $t_2$ . Tato hodnota je kladná a konzistentní, tzn. platí:

$$A(t_1, t_2) = A(t_1, t) \cdot A(t, t_2) \quad \forall t : t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.3)$$

Pro různé druhy úročení lze akumulační faktor přepsat níže uvedeným způsobem. Jak uvádí [9] Pokud jsou  $\delta(t)$  a  $A(t_1, t_2)$  spojité funkce v  $t$ ,  $t \geq 0$ , případně  $\delta(t)$  se spočetně mnoha body nespojitosti, tak akumulační faktor mezi dobou  $t_1$  a  $t_2$  lze vyjádřit takto:

- pro složené úročení  $A^{(i)}(t_1, t_2) = (1 + i)^{t_2 - t_1}$
- pro jednoduché úročení  $A^{(i)}(t_1, t_2) = (1 + i \cdot (t_2 - t_1))$
- pro spojitě úročení s konstantní intenzitou  $A^{(i)}(t_1, t_2) = e^{i(t_2 - t_1)}$
- pro spojitě úročení s variabilní intenzitou  $A^{(i)}(t_1, t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt}$

**Definice 3.4.** Pro jednotlivé druhy úročení je diskontní faktor zaveden takto:

- pro složené úročení  $v(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$
- pro jednoduché úročení  $v(t) = \frac{1}{1+it}$
- pro spojitě úročení s konstantní intenzitou  $v(t) = e^{-it}$

Obecně lze pak diskontní faktor přepsat jako

$$v(t) = A^{-1}(0, t)$$

**Definice 3.5.** Efektivní míra úročení pro období o délce  $h$  začínající v čase  $t$  je definována jako:

$$i_{ef} = A(t, t+h) - 1 \quad (3.4)$$

**Definice 3.6.** Intenzita úročení na dobu  $t$  je  $\delta(t)$ , pokud existuje limita:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(0, t+h) - A(0, t)}{hA(0, t)} \quad (3.5)$$

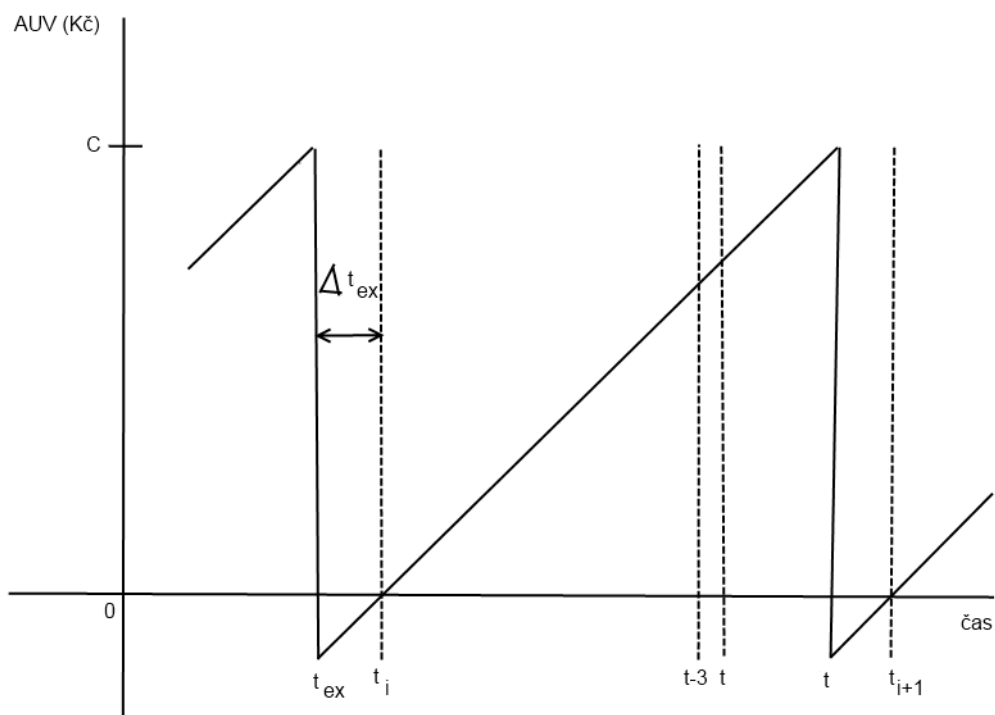
**Definice 3.7.** Forwardová úroková sazba  $f(t_1, t_2)$  na období od  $t_1$  do  $t_2$  je taková sazba, pro kterou platí:

$$(1 + i_{t_1}) \cdot (1 + f(t_1, t_2)) = (1 + i_{t_2})^2 \quad (3.6)$$

**Definice 3.8.** Za podmínky, že se pracuje pouze s jednoduchými dluhopisy s pevným kupónem, je alikvotní úrokový výnos v čase  $t$  definován jako:

$$AUV(t) = C_{i+1} \cdot \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad t \in (t_i - \Delta t_{ex}, t_{i+1} - \Delta t_{ex}) \quad (3.7)$$

kde  $C_{i+1}$  označuje hodnotu kupónu, který je vyplacen v čase  $t_{i+1}$ , časy  $t_i, t_{i+1}$  označují doby výplat dvou po sobě jdoucích kupónů,  $\Delta t_{ex}$  je doba, mezi datem ex-kupón (následující den po rozhodném dni výplaty kupónu) a datem výplaty kupónu. V níže uvedeném obrázku je také vzato v úvahu vypořádání  $t + 3$ , to znamená, že až tři dni po zadání příkazu k nákupu na burze je dluhopis zakoupen. Proto se musí zadat příkaz v čase  $t - 3$ , aby byl v čase  $t$  zakoupen dluhopis za aktuální tržní cenu.



Obrázek 2: Znázornění alikvotního úrokového výnosu

**Definice 3.9.** Nechť je zdefinován dluhopis vektorem  $B = [n, C, t, F, P]$ . Pak je současná hodnota dluhopisu (anglicky *present value*) současnou hodnotou všech budoucích plateb plynoucích z držení dluhopisu, tedy:

$$\begin{aligned} PV(B) &= \sum_{j=1}^n C_j \cdot A^{-1}(0, t_j) + F \cdot A^{-1}(0, t_n) \\ &= \sum_{j=1}^n C_j \cdot v(t_j) + F \cdot v(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Speciálně pro spojitě úročení lze současnou hodnotu vyjádřit takto:

$$PV(B, \mathbf{i}) = PV(B, (i_1, i_2, \dots, i_n)) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot e^{-i_j \cdot t_j} + F \cdot e^{-i_n \cdot t_n} \quad (3.9)$$

Pro složené úročení lze vyjádřit tuto veličinu jako:

$$PV(B, (i_1, i_2, \dots, i_n)) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot \frac{1}{(1+i_j)^{t_j}} + F \cdot \frac{1}{(1+i_n)^{t_n}} \quad (3.10)$$

kde je jako  $C_j$  označena hodnota  $j$ -tého kupónu a  $n$  je počet kupónových období do splatnosti.

**Definice 3.10.** Předpokládá se, že hodnota kupónových plateb je konstantní, tj.  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$ . Výnosem do splatnosti dluhopisu  $i^*$  se rozumí taková úroková míra, pro kterou platí  $PV(B, i^*) = P$ . Tento výnos se v literatuře často označuje YTM, z anglického yield to maturity.

**Definice 3.11.** Jako riziková premie se označuje dodatečný výnos z investice na období  $(t_1, t_2)$  za podstoupení zvýšeného rizika. Tato premie se v následujícím textu značí jako  $r(t_1, t_2)$ .

## 3.2 Durace

**Definice 3.12.** Jak je uvedeno v [1] dle teorie Fredericka Macaulay *Duraci D dluhopisu je možné definovat vztahem:*

$$D = \frac{\sum_{j=1}^n C_j \cdot v(t_j) \cdot t_j + F \cdot v(t_j) \cdot n}{\sum_{j=1}^n C_j \cdot v(t_j) + F \cdot v(t_n)} \quad (3.11)$$

Durace bývá interpretována několika způsoby. Jednak se jedná o číslo vyjadřující citlivost ceny dluhopisu při změně úrokové míry, také však říká, jaká je průměrná doba do splatnosti dluhopisu. Durace je tedy váženým průměrem jednotlivých peněžních toků, které z držení dluhopisu vyplývají. Jako příslušná váha je v tomto případě brána doba mezi současným stavem a dobou, ve které se vyplácí příslušný peněžní tok. Peněžním tokem plynoucím z držení dluhopisu je zde míněna kupónová platba a výplata nominální hodnoty v době splatnosti.

Pro investory je durace velmi důležitým pojmem, neboť pomocí výpočtu durace jednotlivých dluhopisů mohou tyto dluhopisy porovnávat z hlediska citlivosti na změnu úrokových měr. Zároveň durace zohledňuje kupónovou míru dluhopisu a jeho výnos do splatnosti.

Změnu ceny dluhopisu při změně výnosnosti do splatnosti lze vyjádřit:

$$\Delta PV \approx -D \cdot \frac{\Delta i^*}{1+i^*} \cdot PV \quad (3.12)$$

kde  $i^*$  je výnos do splatnosti dluhopisu.

V literatuře se též používá modifikovaná durace, kterou lze z durace získat takto:

$$D_{mod} = \frac{D}{1+i^*} \quad (3.13)$$



### 3.3 Zavedené značení

V dalším textu bude používáno následující značení:

- $i_t$  úroková míra na dobu  $t$  v letech
- $i^{(p)}$  úroková míra splatná  $p$  krát za období
- $PV$  současná hodnota
- $f(t_1, t_2)$  forwardová úroková míra na období od  $t_1$  do  $t_2$
- $i^*$  výnos do splatnosti
- $r(t_1, t_2)$  riziková premie na období od  $t_1$  do  $t_2$
- $n$  doba do splatnosti dluhopisu v letech

Pokud nebude uvedeno nic jiného předpokládá se splnění těchto podmínek:

- nominální hodnoty všech kupónových plateb pro jednotlivé dluhopisy jsou stejné, tedy  $C_j = C; j = 1, 2, \dots, n$ ,
- nominální (jmenovitá) hodnota dluhopisu se vyplácí vždy v datu splatnosti dluhopisu společně s poslední kupónovou platbou,
- kupóny jsou vypláceny jednou ročně,
- berou se v úvahu pouze českým státem emitované státní dluhopisy (kromě příkladu, kde se pracuje také s dluhopisy vydané Spolkovou republikou Německo),
- rovnovážná tržní cena dluhopisu je rovna současné hodnotě a řídí se dle vzorce (3.8) a platí, že  $PV = P$ ,
- na trhu je k dispozici dostatečně velké množství dluhopisů, počet dluhopisů je v této práci označen jako  $K$ .

## 4 Teorie, které vysvětlují tvary výnosových křivek

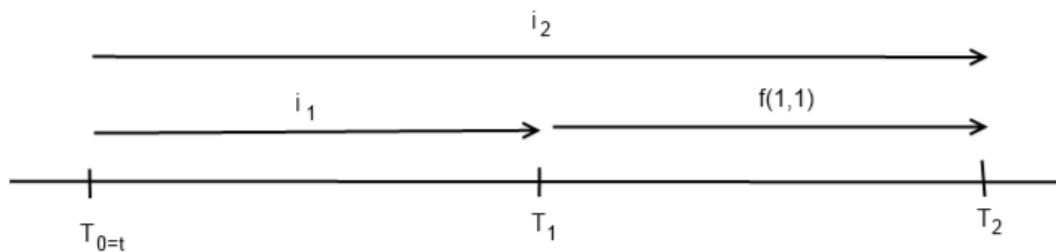
Dle teorií vysvětlujících tvary výnosových křivek lze odhadnout, jak si ekonomika daného státu vede, jak se bude vyvíjet situace na burzách a podobně. Následující část je zpracována dle zdrojů [1], [2], [3] a [11]. V [3] je popsána teorie preferovaného umístění, která v ostatních zdrojích chybí.

## 4.1 Čistá teorie očekávání

Jak je řečeno v [1] podle teorie čistého očekávání jsou forwardové úrokové míry nestrannými odhady budoucích spotových úrokových mír. Jinými slovy, dnešní forwardová úroková míra je nejlepším odhadem budoucí spotové úrokové míry pro období odpovídající forwardové úrokové míře. Nezáleží tedy, zda je například investováno dvakrát po sobě do krátkodobého dluhopisu se splatností jeden rok nebo do dvouletého dluhopisu. Jedná se tedy o konzistentnost akumulčního faktoru.

Předpokládá se, že investor bude vůči investování do jednotlivých dluhopisů indiferentní co se týče jejich doby splatnosti. Neočekává se zde žádná prémie za riziko za držení dluhopisu na delší dobu. Celkově tedy spotová výnosová křivka odráží očekávání investorů ohledně budoucího vývoje sazeb na trhu. Pokud bude například investor chtít výnos za pět let tři procenta a v té době bude očekávaná inflace jedno procento, bude požadovat nominální výnosnost čtyři procenta. Výnosová křivka v sobě proto odráží i očekávání investorů o inflaci.

Nechť existují dvě investiční strategie, jejichž výsledek bude na konci investice stejný. Podle první strategie se investuje na jeden rok do krátkodobého dluhopisu a poté se investuje ještě jednou za očekávanou úrokovou sazbu na jeden rok do jednoletého dluhopisu. Druhá investiční strategie zahrnuje jednorázovou investici do dvouletého dluhopisu. Pokud by platila čistá teorie očekávání, musely by se tyto výnosy rovnat. Tedy neexistovala by na trhu arbitráž (bezrizikový výnos). Tento případ ilustruje následující obrázek:



Obrázek 3: Obrázek pro ilustraci forwardové sazby.

Nechť se výnos z první strategie označí  $Y_1$  a výnos z druhé strategie  $Y_2$ .

$$Y_1 = (1 + i_1) \cdot (1 + f(1,1)) \quad (4.1)$$

$$Y_2 = (1 + i_2)^2 \quad (4.2)$$

Z rovnosti výnosů lze vypočítat **jednoletou forwardovou sazbu** za jeden rok:

$$(1 + i_1) \cdot (1 + f(1, 1)) = (1 + i_2)^2 \quad (4.3)$$

$$1 + f(1, 1) + i_1 + i_1 \cdot f(1, 1) = 1 + 2 \cdot i_2 + i_2^2 \quad (4.4)$$

$$f(1, 1) = 2 \cdot i_2 - i_1 + i_2^2 - i_1 \cdot f(1, 1) \quad (4.5)$$

$$f(1, 1) \approx 2 \cdot i_2 - i_1 \quad (4.6)$$

V předposlední úpravě lze výraz  $i_2^2 - i_1 \cdot f(1, 1)$  zanedbat, neboť se jedná o velmi malá čísla. Pokud jsou známy spotové úrokové míry na několik období dopředu, je možné tímto způsobem dopočítávat forwardové úrokové míry. Ty pak lze zobrazit jako forwardovou výnosovou křivku. Tyto sazby odrážejí budoucí očekávání trhu, zejména pak investorů. Forwardová výnosová křivka odráží trajektorii očekávaných úrokových sazeb v budoucnu.

## 4.2 Modifikovaná teorie očekávání

Jedná se o čistou teorii očekávání, k níž je přidána riziková premie za riziko investování do dluhopisů s delší splatností. Tyto mají také vyšší duraci, než dluhopisy s nižšími splatnostmi. Pro výše uvedený příklad by tedy platilo:

$$(1 + i_{t_1}) \cdot (1 + f(t_1, t_2)) + r(t_1, t_2) = (1 + i_{t_2})^2 \quad (4.7)$$

## 4.3 Teorie preferovaných tržních segmentů

Tato teorie odmítá jakoukoli souvislost ve formě forwardové úrokové míry, mezi krátkodobými a dlouhodobými dluhopisy. Investor, který dříve investoval své prostředky do krátkodobých cenných papírů, bude i nadále pokračovat v tomto trendu a nepřejde k investování do dlouhodobých cenných papírů ani v případě možného získání vyššího výnosu.

Trhy dluhopisů s různou dobou splatnosti se považují za striktně oddělené, to znamená, že cena těchto jednotlivých instrumentů je dána průsečíkem nabídkových a poptávkových křivek na každém z těchto trhů. Spojnice mezi těmito průsečíky se nazývá výnosová křivka.

Do sporu s realitou se tato teorie dostává již díky své podstatě, neboť v praxi existuje významná souvislost mezi trhy dluhopisů jednotlivých splatností. Teorie popírá také posunutí celé křivky, což se však často stává, jak je uvedeno v [3].

## 4.4 Teorie preference likvidity

Teorie preference likvidity vychází ze skutečnosti, že investor raději investuje své peníze na kratší dobu, neboť zde existuje určité riziko, že v budoucnu by své peníze mohl potřebovat a nebyly by k dispozici. Proto preferuje krátkodobé dluhopisy před dlouhodobými.

Za tuto výsadu větší likvidity musí však zaplatit tzv. prémii za likviditu. Díky této prémii pak lze vysvětlit konkávní rostoucí tvar výnosové křivky. Pokud bude investor postrádat své peníze dlouhodobě, bude požadovat zároveň vyšší míru výnosu, aby se mu tento krok vyplatil. Matematicky lze toto tvrzení zapsat:

$$(1 + i_{t_2})^{t_2} \geq (1 + i_{t_1})^{t_1} \cdot (1 + f(t_1, t_2)) \quad (4.8)$$

kde  $t_1 \leq t_2$ . Nereálným předpokladem teorie preference likvidity je zanedbání vlivu nabídky dluhopisů na trhu. Pokud nabídka dluhopisů určité splatnosti bude malá, pořizovací cena za tyto dluhopisy se zvýší a investorovi klesne výnos. Dle této teorie nelze vysvětlit klesající tvar výnosové křivky.

#### 4.5 Teorie preferovaného umístění

Výhodou této teorie je fakt, že dokáže vysvětlit všechny známé tvary výnosové křivky. Teorie preferovaného umístění spojuje určitým způsobem modifikovanou teorii očekávání s teorií preferovaných tržních segmentů. Investor sice upřednostňuje některé dluhopisy s určitou dobou splatnosti, ale je ochoten za určitou prémii změnit své rozhodnutí a investovat do jiného dluhopisu. V modifikované teorii očekávání se jednalo o prémii za větší riziko, zde jde o prémii za ochotu pořídit si dluhopis, který původně nebyl zamýšlen ke koupi. Jako příklad interpretace podle této teorie lze uvést interpretaci ploché výnosové křivky. Zde se očekává díky existenci premie, že výnosy u delších splatností budou pomalu klesat.

## 5 Determinanty pohybu výnosových křivek

Pro lepší pochopení významu a užitečnosti výnosových křivek jsou v této části rozebrány nejdůležitější determinanty jejich pohybu. Tyto faktory se vzájemně prolínají, proto se musí interpretovat jako celek. Inspirací pro tuto část byl zdroj [3], kde se autor zabývá problematikou výnosových křivek z hlediska jejich praktické aplikace a ekonomické interpretace.

### 5.1 Měnová politika

Centrální banka má prostředky na to, aby přímo ovlivnila výnosy u nejkratších splatností. Pokud zvýší své krátkodobé sazby o určitý procentní bod, krátký konec křivky se zvýší. Při předpokladu platnosti teorie očekávání se díky ocenění budoucího očekávání předpokládá, že měnová politika nepřímo ovlivňuje i delší konec křivky. Protože se měnová politika vyvíjí dle ekonomické situace, která změně předcházela, investoři již budoucí vývoj krátkodobých sazeb očekávají. Proto lze změny krátkodobých sazeb centrální banky pozorovat několik období dopředu.

### 5.2 Hospodářský cyklus

Jak je uvedeno v [3], empirické studie prokázaly vysokou závislost mezi tvarem výnosové křivky a fází hospodářského cyklu, ve které se daná ekonomika právě nachází. Neboť výnosová křivka v sobě odráží následující faktory, lze predikovat vývoj hospodářského cyklu až na několik čtvrtletí dopředu. Tyto faktory jsou uvedeny v [3]:

- (i) *měnová politika*
- (ii) *poptávka po úvěrech*
- (iii) *očekávání investorů*
- (iv) *mezní produktivita kapitálu*

Pokud je křivka rostoucí, odráží v sobě očekávání investorů o vyšší inflaci, na kterou centrální banka v budoucnu zareaguje vyššími úrokovými sazbami. Očekává se tedy ekonomický růst.

Naopak v případě klesající výnosové křivky je možno pozorovat očekávanou ekonomickou recesi, neboť se předpokládá pokles inflace. Vrchol hospodářského cyklu v sobě odráží vysoké krátkodobé sazby a vysokou hodnotu domácího hospodářského produktu (HDP). V tomto případě se predikuje nízká nezaměstnanost a vyšší inflace. V poslední době však někteří ekonomové upozorňují na přeceňování této závislosti.

### 5.3 Ekonomické prostředí

Stav současné ekonomiky má velký vliv na investory požadovaný výnos, tedy i na tvar výnosové křivky. Konkrétně se jedná o:

- **Měnově-politická a fiskální opatření.** Jak již bylo uvedeno, centrální banka ovlivňuje kratší konec výnosové křivky. Dále má velký vliv na tvar výnosové křivky například přijetí cizí měny nebo nadměrná emise dluhopisů vládou. Pokud stát nemá peníze, emituje velké množství dluhopisů, jejichž nabídka vzroste a při stejné poptávce musí nutně vzrůst očekávaný výnos z dluhopisů. Vyšší vládní výdaje pak vedou ke zvýšení inflace a ještě více tím vzrostou tlaky na růst úrokových měr.
- **Externí faktory.** Sentiment na světových trzích, krize v eurozóně, růst ceny ropy, to vše se odráží ve tvaru a posunu výnosové křivky.
- **Interní faktory.** Mezi interní faktory lze zařadit například snížení rizika nesplacení závazků vlivem lepšího systému řízení rizik ve firmách.

---

## Část III

# Metody konstrukce výnosových křivek

Pro konstrukci výnosových křivek jsou používány především metody bootstrapping a odhady pomocí parametrických funkcí.

Klasický bootstrapping je popsán ve zdrojích [4] a [3]. Zobecněným bootstrappingem se podrobně zabývá práce [5]. Dle [6] je zpracována část o interpolaci funkcí pomocí kubických spline, z práce [6] je také převzato značení pro tuto část. Dle zdrojů [8], [11] a [14] je zpracována část o modelu Nelson-Siegla a v [8] lze najít podklady pro Svenssonův model. Část o aproximaci pomocí polynomů je inspirována částečně [4] a částečně knihou [12], kde je zpracována volba stupně polynomu.

Při konstrukci výnosových křivek obecně se používají celkem tři zdroje konstrukce, ze kterých se odhady počítají a to

- Konstrukce výnosových křivek z dluhopisů
- Konstrukce výnosových křivek ze strips bondů
- Konstrukce výnosových křivek ze swapů

Jako swap se označuje výměna pohledávek nebo závazků ve stejné výši. Tyto pohledávky nebo závazky se můžou lišit například v měně.

Tato práce se zabývá konstrukcí výnosových křivek z dluhopisů. Z pohledu typu křivek se jedná o spotové. Konstrukce této křivky je podmíněna vyřešením řady problémů.

Předně není na českém trhu k dispozici dostatek dat k přesnému vykreslení křivky. K tomu by byly potřeba zero bondy se splatností pravidelně každé období, například jeden rok. Ve skutečnosti je však tento předpoklad nereálný, neboť jsou státní dluhopisy emitovány se splatností v rozmezí od jednoho roku po několik desetiletí. Státní dluhopisy emitované českou vládou jsou kupónové dluhopisy. Důvodem pro emitování takových dluhopisů je zejména poptávka, u které lze očekávat, že by v případě zero bondů se splatností například dvacet let byla téměř nulová. Také likvidita takového trhu by byla velmi nízká. Příčinu zmíněného chování investorů lze hledat především v rostoucí duraci zero bondů s rostoucí dobou splatnosti. V České republice se proto, tak jako ve většině zemí, emitují státní zero bondy ve splatnostech pouze do jednoho roku (v České republice se jedná o Státní pokladniční poukázky, často značené jako SPP).

Naopak u kupónových dluhopisů durace tak vysokých hodnot nedosahuje a je nepřímo úměrná velikosti kupónu (této vlastnosti se říká **kupónový efekt**). Po těchto dluhopisech pak roste poptávka, což zvyšuje jejich tržní cenu a tedy i snižuje výnos do splatnosti. Předchozí tvrzení platí pro rostoucí výnosovou křivku sestrojenou z výnosů do splatnosti. U klesající struktury úrokových měr je tomu naopak. Dluhopisy s větším kupónem mají vyšší výnos do splatnosti než bezkupónové, nebo s nižším kupónem.

---

Výnosy dluhopisů s kupónem je nutné převést na výnosy dluhopisů bez kupónů (zero bondy). Vybrané metody konstrukce výnosových křivek ze zero bondů jsou níže popsány.

## 6 Bootstrapping

### 6.1 Klasický bootstrapping

Jedná se o nejjednodušší metodu, která je však kvůli řadě nevýhod jen velmi málo používaná. Přepočtené výnosy z kupónových dluhopisů na výnosy ze zero bondů se nejprve seřadí dle splatnosti vzestupně. Předpokládá se existence jednoho dluhopisu na každé období, například na jeden rok. Pokud této posloupnosti nějaký člen chybí, lze jej dopočítat například lineární interpolací. Tato myšlenka je rozvinuta v níže popsaném zobecněném bootstrappingu. Obecně platí, že počet dluhopisů je roven počtu rovnic.

Neboť každý zadaný  $k$ -tý dluhopis v této kapitole má splatnost  $n_k$  v čase  $t_k$  budou tyto výrazy považovány za ekvivalenty. Nechť je dána sada  $K$  dluhopisů:

$$\begin{aligned} B_1 &= [t_1, (C_1), (t_1), F_1, P_1] \\ B_2 &= [t_2, (C_2, C_2), (t_1, t_2), F_2, P_2] \\ &\cdot \\ &\cdot \\ B_K &= [t_K, (C_K, C_K, \dots, C_K), (t_1, t_2, t_K), F_K, P_K] \end{aligned} \tag{6.1}$$

Pak soustava rovnic pro  $K$  dluhopisů vypadá následovně:

$$\begin{aligned} P_1 &= (C_1 + F_1) \cdot v(t_1) \\ P_2 &= (C_2) \cdot v(t_1) + (C_2 + F_2) \cdot v(t_2) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ P_K &= (C_K) \cdot v(t_1) + (C_K) \cdot v(t_2) + \dots + (C_K + F_K) \cdot v(t_K) \end{aligned} \tag{6.2}$$



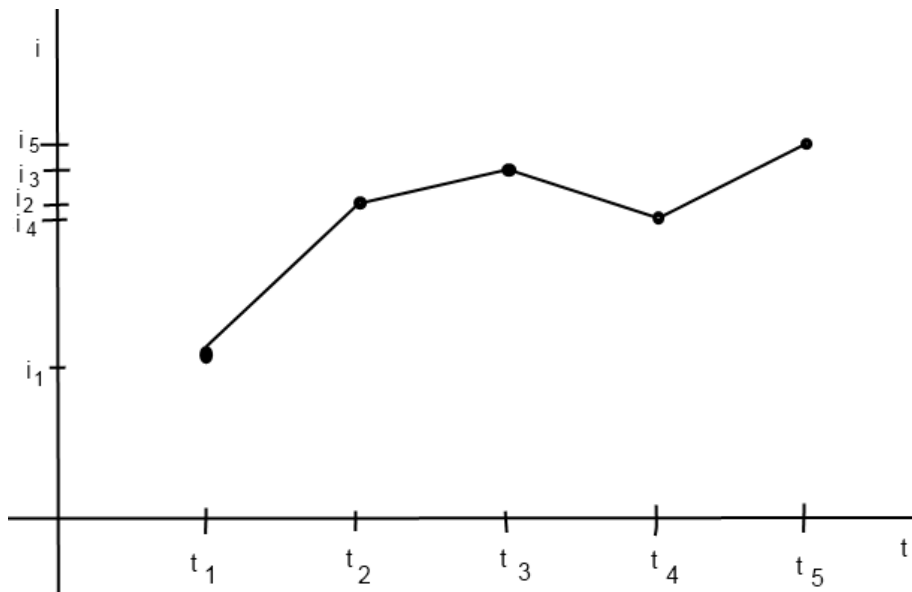
což se pro složené úročení dá přepsat jako:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{C_1 + F_1}{(1 + i_1)^{t_1}} & (6.3) \\ P_2 &= \frac{C_2}{(1 + i_1)^{t_1}} + \frac{C_2 + F_2}{(1 + i_2)^{t_2}} \\ P_3 &= \frac{C_3}{(1 + i_1)^{t_1}} + \frac{C_3}{(1 + i_2)^{t_2}} + \frac{C_3 + F_3}{(1 + i_3)^{t_3}} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ P_K &= \frac{C_K}{(1 + i_1)^{t_1}} + \frac{C_K}{(1 + i_2)^{t_2}} + \dots + \frac{C_K + F_K}{(1 + i_K)^{t_K}} \end{aligned}$$

Tuto soustavu lze vypočítat například dosazovací metodou, kdy se z  $k$  té rovnice vyjádří  $i_k$ , což se dosadí do dalších rovnic. Tento postup se zopakuje pro všechna  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ .

U reálných dat však tímto způsobem vznikne více neznámých než je samotných rovnic. Řešení by pak bylo nekonečně mnoho. Vzniklo by tedy nekonečně mnoho výnosových křivek. Důvodem jsou různá data vyplácení kupónů u jednotlivých, na trhu dostupných, dluhopisů a jejich malý počet. Nevýhodou je také předpoklad vysoké likvidity na trhu dluhopisů všech splatností, což však u dluhopisů s delší splatností neplatí. Aby bylo možné zcela přesně použít výše uvedený způsob odhadu výnosové křivky, musely by být použity dluhopisy, jejichž splatnosti jsou od sebe konstantně vzdálené.

Následující obrázek ilustruje použití klasického bootstrappingu.



**Obrázek 4:** Ukázka aplikování klasického bootstrappingu. Vzdálenosti mezi jednotlivými časy jsou konstantní.

## 6.2 Zobecněný bootstrapping s využitím kubických splinů

Pro eliminaci problému klasického bootstrappingu lze využít možnosti, které nabízí článek [4]. Jedná se o bootstrapping, u kterého se, v případě většího počtu neznámých než je rovnic, dopočítají některé neznámé pomocí interpolace kubickými spliny.

Nevýhodou této metody je především fakt, že je poměrně pracná, neboť je nutno, v případě reálných dat z České republiky či Německa, dopočítat velké množství neznámých. K tomu autoři článku používají numerických výpočtů v software MAPLE.

Metoda ve své původní podobě předpokládá, že existuje vysoce likvidní trh s dluhopisy se splatností pod jeden rok. Pomocí těchto dluhopisů se dá zkonstruovat krátký konec křivky, proto jich musí být dostatečné množství. Nicméně obecně se dá tato metoda aplikovat na státní dluhopisy všech splatností.

Každý bond bude reprezentovat jeden vektor dle definice (3.1). Pro snadnější výpočet se předpokládá spojitý typ úročení. Pro jeden dluhopis  $B$  platí:

$$P = PV(B, (i_1, i_2, \dots, i_n)) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot e^{-i_j \cdot t_j} + F \cdot e^{-i_n \cdot t_n} \quad (6.4)$$

Neboť každý zdefinovaný  $k$ -tý dluhopis v této kapitole má splatnost  $n_k$  v čase  $t_{n_k,k}$  budou tyto výrazy považovány za ekvivalenty Necht' je dáno  $K$  dluhopisů. Tyto bondy jsou určeny vektory:

$$\begin{aligned} B_1 &= [t_{n,1}, (C_1, C_1, \dots, C_1), (t_{1,1}, t_{2,1}, \dots, t_{n,1}), F_1, P_1] \\ B_2 &= [t_{n,2}, (C_2, C_2, \dots, C_2), (t_{1,2}, t_{2,2}, \dots, t_{n,2}), F_2, P_2] \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ B_K &= [t_{n,K}, (C_K, C_K, \dots, C_K), (t_{1,K}, t_{2,K}, \dots, t_{n,K}), F_K, P_K] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Za předpokladu, že  $PV(B_k) = P_k$  platí pro každý  $k$ -tý dluhopis:

$$P_k = \sum_{j=1}^{n_k} C_k \cdot e^{-i_j \cdot t_{j,k}} + F_k \cdot e^{-i_{n_k} \cdot t_{n_k,k}} \quad (6.6)$$

Dále se vyjádří z (6.6) úroková míra  $i_{n_k}$ :

$$i_{n_k} = \frac{1}{t_{n_k,k}} \ln \left( \frac{F_k}{P_k - \sum_{j=1}^{n_k} C_k \cdot e^{-i_j \cdot t_{j,k}}} \right) \quad (6.7)$$

Necht' je dána množina  $\mathbf{t}_k = (t_{1,k}, \dots, t_{n_k,k})$  pro každý  $k$ -tý dluhopis. Jedná se tedy o množinu časů, kdy je vyplácena platba z  $k$ -tého dluhopisu. Pro sjednocení  $K$  takových množin se definuje množina  $V = \cup_{k=1}^K \mathbf{t}_k = t_1, t_2, \dots, t_N$ . Množinou  $V$  je množina všech různých dob plateb ze všech dluhopisů. Tyto platby mohou být buď kupónové, nebo se může jednat o výplatu nominální částky na konci splatnosti dluhopisu. Pokud je v nějaký čas vypláceno více plateb, v množině  $V$  je tato doba pouze jednou. Počet prvků v množině  $V$  je  $N$ . Prvky množiny  $V$  se seřadí dle velikosti a označí jako

$$t_{(1)} = \min_{j=1,2,\dots,K} t_{1,j} \quad t_{(N)} = \min_{j=1,2,\dots,K} t_{n,j}$$

a prvky  $t_{(1)} < t_{(2)} < \dots < t_{(N)}$  se seřadí dle velikosti vzestupně.

Pokud  $K = N$  vznikne soustava  $K$  nelineárních rovnic o  $K$  neznámých. Pokud  $K < N$  vznikne soustava  $K$  rovnic o  $N$  neznámých, je potřeba tedy přidat některé rovnice, aby existovalo jednoznačné řešení. Tyto vzniknou použitím interpolace kubickými spliny některých maturit.

Do soustavy je tedy nutno přidat  $L = N - K$  rovnic. Řešením soustavy je pak vektor  $i_j, \forall j$ .  $L$  je množina splatností dluhopisů, u nichž je nutno kubickou interpolací dopočítat výnosnost.

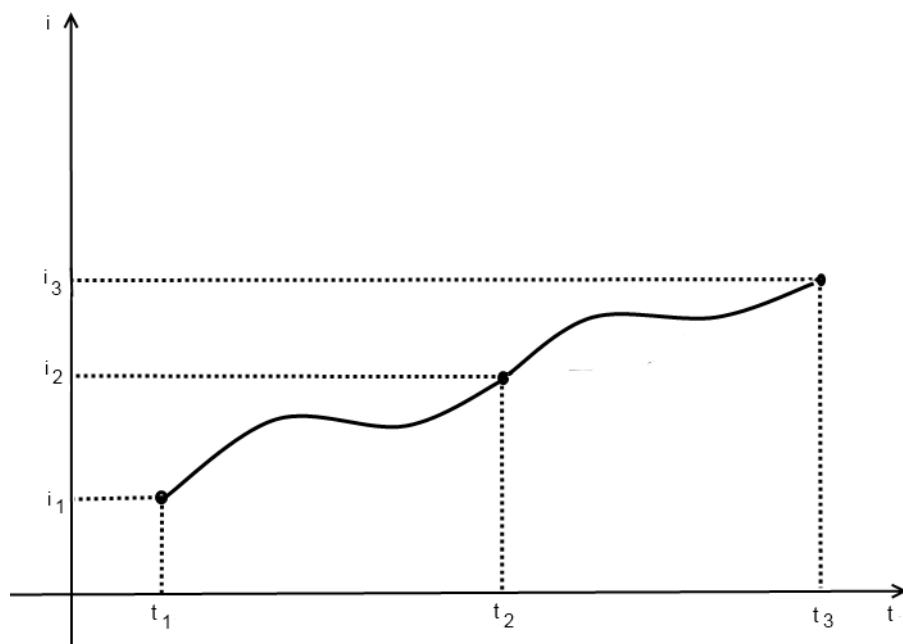
Pro přesné uchycení křivky pomocí interpolace kubickými spliny je nutno nejprve určit **uzlové body**. Těmito body budou dvojice  $[x_w, y_w], w = 1, 2, \dots, K$ , kde  $x$ -ovými souřadnicemi budou časy konečných splatností  $t_{n_k,k}, \forall k \in \{1, 2, \dots, K\}$ , zatímco  $y$ -ovými

souřadnicemi budou výnosy, zatím neznámé. Pro každý interval mezi jednotlivými dvojicemi bodů vznikne jedna splinová kubická funkce.

Pokud existují splatnosti, u nichž není znám výnos mezi každými dvěma body, dopočítají se tyto splatnosti dosazením do kubické funkce. Tímto způsobem se tyto neznámé vyjádří pomocí neznámých  $t_{n_k,k}, \forall k \in \{1, 2, \dots, K\}$ . Poté již klasickým bootstrappingem dojde k vypočítání neznámých  $t_{n_k,k}, \forall k \in \{1, 2, \dots, K\}$ . Za body, které nejsou v množině  $t_{n_k,k}, \forall k \in \{1, 2, \dots, K\}$  se dosadí, při výpočtu klasickým bootstrappingem, jejich vyjádření pomocí dosazení do interpolačních polynomů. Pak vznikne soustava  $K$  rovnic o  $K$  neznámých, která má již jednoznačné řešení.

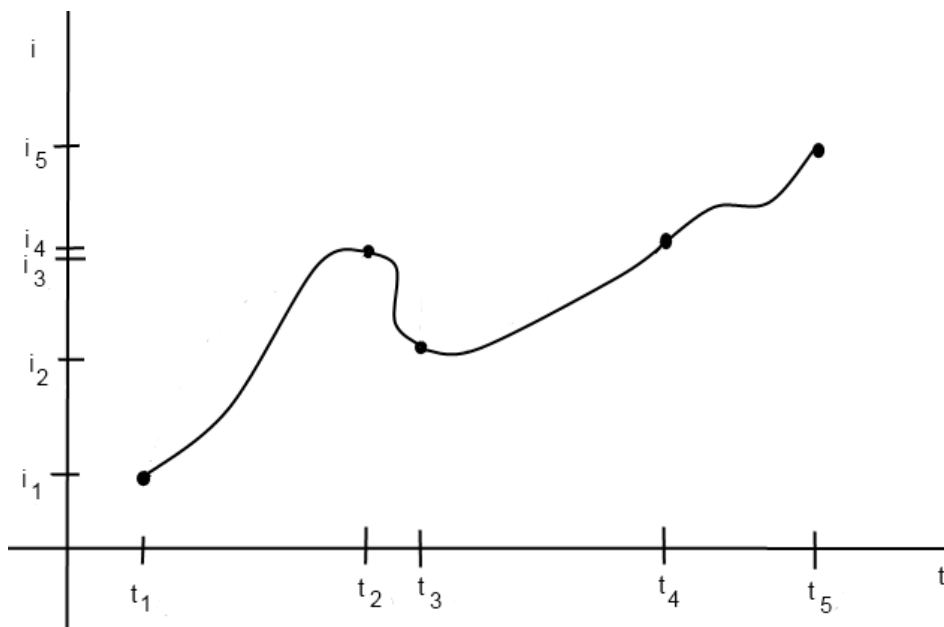
Pro realizování výše uvedeného postupu, je nutné znát způsob výpočtu kubického spline. Podrobnější informace o konstrukci lze najít v [6]. V praxi se od tohoto výpočtu abstrahuje, neboť zdlouhavý výpočet soustavy rovnic lze nahradit několika příkazy v software MAPLE nebo MATHEMATICA.

Následující obrázek ilustruje proložení spline funkce třemi body.



Obrázek 5: Ukázka proložení kubických spline funkcí.

Z následujícího obrázku lze vypočítat rozdíl mezi klasickým a zobecněným bootstrapingem. Příklad aplikace klasického bootstrapingu je vykreslen na obrázku č. 4.



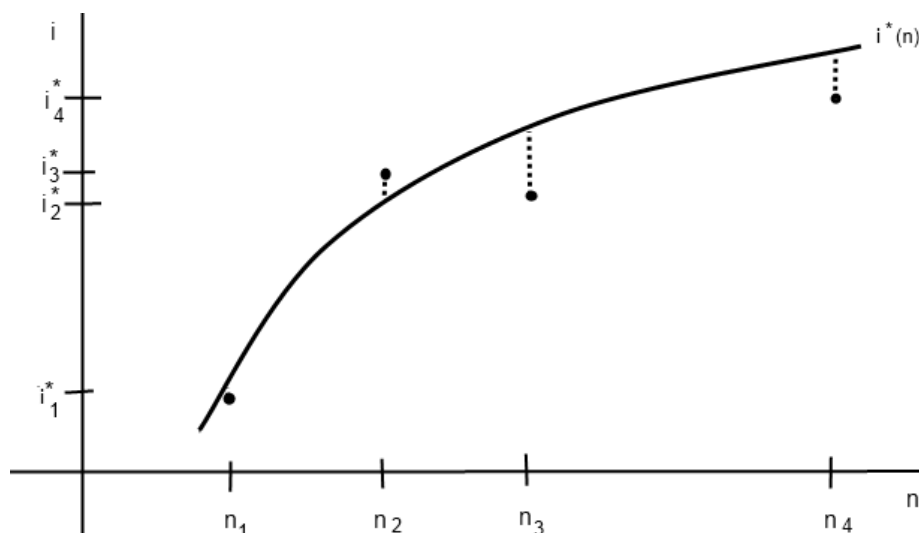
**Obrázek 6:** Ukázka aplikace zobecněného bootstrapingu. Vzdálenosti mezi jednotlivými časy již nejsou konstantní.

## 7 Parametrické funkce

Mezi nejužívanější metody odhadů výnosových křivek patří odhady pomocí parametrických funkcí. Nejčastěji se lze dnes setkat s odhadem pomocí Svenssonova modelu, kterému předcházela model Nelson-Siegl. Také aproximace polynomy jsou často pro svou jednoduchost používány.

### 7.1 Aproximace polynomy

Nechť je dána množina  $K$  dluhopisů  $B_1, B_2, \dots, B_k$  a množina jejich splatností označená jako  $M = (n_1, n_2, \dots, n_K)$ . Dále je dána množina  $I^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_K^*)$ , která obsahuje příslušné spotové výnosy do splatnosti. Cílem je zjistit předpis funkce, která nejlépe odpovídá zobrazení prvků z množiny  $M$  do množiny  $I^*$ . Při hledání vhodného polynomu lze použít například metodu nejmenších čtverců, kdy se minimalizuje suma kvadrátů vzdáleností daných bodů od bodů funkce.



Obrázek 7: Ukázka proložení polynomu.

Rovnice polynomicke funkce  $d$ -tého stupně má pro výše uvedenou sadu dluhopisů obecně tento tvar:

$$i^* = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_dn^d + \epsilon \quad (7.1)$$

kde  $\epsilon$  je chyba. Před proložením polynomu je nutno vyřešit problém, jaký stupeň polynomu zvolit, aby křivka co nejlépe odpovídala skutečnosti. Na první pohled by se mohlo zdát, že nejlepším řešením je zvolit stupeň co nejvyšší. Toto tvrzení však neodpovídá pravdě, neboť jsou polynomy velmi citlivé na změnu dat. Pokud se například zvolí nějaký bod v rámci zaokrouhlení jen o několik setin jinak, může se stát, že bude při velikém stupni polynomu výsledek zcela jiný než před zaokrouhlením. Otázkou jak zvolit vhodný stupeň polynomu se zabývá [12].

### 7.1.1 Volba vhodného stupně polynomu

Pokud je dáno  $K$  dat, pak nelze zvolit stupeň polynomu větší než  $K$  a menší než 1. Odhad stupně polynomu se označí jako  $\hat{d} - 1$ , skutečný stupeň jako  $d_0 - 1$  a skutečný počet parametrů  $d_0$ . Pro zjištění nejvhodnějšího stupně polynomu se použije penaltová funkce  $w_n$ . Tato funkce nabývá malých hodnot pro velký stupeň  $d$  a naopak. Při minimalizaci se použije funkce:

$$A_d = s_d^2(1 + d \cdot w_K) \quad (7.2)$$

kde  $s_d^2$  je reziduální rozdíl mezi odhadnutou polynomickou funkcí a přesnými hodnotami výnosů do splatnosti. Odhad počtu koeficientů je pak o jednotku větší, než stupeň polynomu.

Jak je uvedeno v [12] lze jako vhodnou penaltovou funkci zvolit například

$$w_K = K^{-\frac{1}{4}} \quad (7.3)$$

Proto se při volbě nevhodnějšího polynomu vypočítají hodnoty funkce  $A_{\hat{d}}$  pro všechny stupně  $\hat{d} \in \{1, 2, 3 \dots n\}$ . Výsledkem bude takový odhad  $\hat{d}$  jehož funkční hodnota  $A_{\hat{d}}$  bude minimální. Pro nevhodnější stupeň  $d$  proto bude platit, že:

$$d \approx \hat{d}$$

## 7.2 Minimalizační funkce

Pro minimalizaci chyb metodou nejmenších čtverců se minimalizuje jediná funkce. Pro složené úročení lze tuto funkci zapsat jako:

$$\sum_{k=1}^K \left[ P_k - \left( \sum_{j=1}^{n_k} \frac{C_k}{(1+i_j)^{t_{j,k}}} + \frac{F_k}{(1+i_{n_k})^{t_{n_k,k}}} \right) \right]^2 \rightarrow \min \quad (7.4)$$

kde se hledá minimum vzhledem ke všem úrokovým sazbám  $i$ . Pro spojitě úročení lze funkci zapsat tímto způsobem:

$$\sum_{k=1}^K \left[ P_k - \left( \sum_{j=1}^{n_k} C_k \cdot e^{-i_j \cdot t_{j,k}} + F_k \cdot e^{-i_{n_k} \cdot t_{n_k,k}} \right) \right]^2 = \sum_{k=1}^K [P_k - PV(i_k)]^2 \rightarrow \min \quad (7.5)$$

Kromě metody nejmenších čtverců lze také použít například metodu maximální věrohodnosti nebo zobecněnou metodu momentů. Podrobnější popis metody nejmenších čtverců lze najít v [12].

## 7.3 Funkce Nelson-Siegla

Dle Charlese Nelsona a Andrewa Siegla, kteří působili v roce 1987 na univerzitě ve Washingtonu, je jedním z neefektivnějších způsobů jak odhadnout výnosovou křivku, její odhadnutí pomocí třídy funkcí definované řešením diferenciálních rovnic. Bylo proto navrženo následující řešení.

Předpokládá se, že okamžitá forwardová úroková míra je určena diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantní pravou stranou:

$$f''(n) + a^* f'(n) + b^* f(n) = c^* \quad a^*, b^*, c^* > 0 \quad a^*, b^*, c^* \in R \quad (7.6)$$

Charakteristická rovnice homogenní rovnice je:

$$\lambda^2 + a^* \lambda + b^* = 0 \quad (7.7)$$

Kořeny této charakteristické rovnice jsou:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a^* \pm \sqrt{a^{*2} - 4b^*}}{2} \quad (7.8)$$

Proto řešením homogenní rovnice je:

$$f(n) = \beta_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot n} + \beta_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot n} \quad (7.9)$$

a obecným řešením diferenciální rovnice je:

$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot n} + \beta_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot n} \quad (7.10)$$

Pro lepší ekonomickou interpretaci se dosadí za  $\lambda_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_2}$  vznikne:

$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{1}{\tau_1} \cdot n} + \beta_2 \cdot e^{-\frac{1}{\tau_2} \cdot n} = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{n}{\tau_1}} + \beta_2 \cdot e^{-\frac{n}{\tau_2}} \quad (7.11)$$

Koeficienty  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  jsou určeny počátečními podmínkami a  $\tau_1, \tau_2$  jsou časové konstanty. Spotová míra se učí integrací dle vzorce uvedeného v literatuře [14] pro převod mezi forwardovou a spotovou úrokovou mírou ve tvaru:

$$i(n) = \frac{1}{n} \int_0^n f(s) ds \quad (7.12)$$

Nicméně model (7.11) autorům, kteří se ho původně snažili aplikovat na pokladniční poukázky v USA, připadal přeparametrizovaný. Jeden tvar výnosové křivky bylo možno vyjádřit pomocí několika kombinací parametrů. Proto byl tento model zjednodušen o jeden parametr na:

$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{n}{\tau}} + \beta_2 \cdot \left( \frac{n}{\tau} \cdot e^{-\frac{n}{\tau}} \right) \quad (7.13)$$

Tvar (7.13) odpovídá situaci, kdy  $\lambda_1 = \lambda_2$ , tedy v charakteristické rovnici je člen  $a^{*2} - 4 \cdot b^* = 0$ .

Po dosazení (7.13) do (7.12) a zintegrování, vznikne vyjádření pro spotovou úrokovou míru:

$$i(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}} \right) + \beta_2 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}} - e^{-\frac{n}{\tau}} \right) \quad (7.14)$$

Tato funkce má čtyři koeficienty  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau$  z nichž každý má svou interpretaci.

Koeficient  $\beta_0$  určuje hladinu výnosové křivky na ose výnosnosti, je to dlouhodobý faktor, neboť není ovlivněn délkou splatnosti, ať je jakákoli. Určuje tvar křivky v dlouhodobém období.

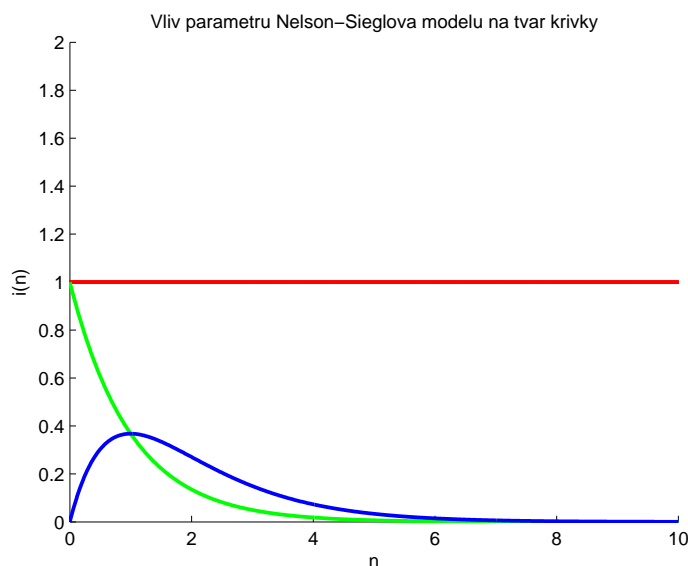
Jako krátkodobý faktor lze interpretovat koeficient  $\beta_1$ , jehož váha s rostoucí dobou do splatnosti klesá k nule. Koeficient  $\beta_1$  tak ovlivňuje nejvíce výnosy u krátkých splatností. Tento koeficient také určuje zásadním způsobem sklon výnosové křivky, který lze spočítat jako rozdíl výnosu do splatnosti v nejdelší a nejkratší době splatnosti.

Střednědobým faktorem je nazýván obvykle koeficient  $\beta_2$ , jehož váha nejprve roste a pak začíná klesat. Matematicky určuje koeficient  $\beta_2$  křivost křivky.

Posledním koeficientem je  $\tau$ , který určuje jak rychle bude funkce  $e^{-\frac{n}{\tau}}$  klesat. Koeficient  $\tau$  má proto zásadní vliv na váhy ostatních koeficientů, tedy i na míru aproximace křivky.

Na následujícím obrázku lze vysledovat, jak jednotlivé komponenty této funkce ovlivňují tvar výnosové křivky (dle interpretace pomocí segmentační teorie).





**Obrázek 8:** Komponenty výnosové křivky podle modelu Nelson-Siegla. Funkce  $i(n, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0)$  je zobrazena červeně, funkce  $i(n, \beta_0 = 0, \beta_2 = 0)$  je zobrazena modře a funkce  $i(n, \beta_0 = 0, \beta_1 = 0)$  je znázorněna zeleně.

### 7.3.1 Odhad parametrů Nelson-Sieglova modelu

Při odhadu parametru  $\tau$  autoři práce navrhují začít se zvolenou hodnotou  $\tau$  a ostatní parametry minimalizovat metodou nejmenších čtverců. Dále pak mění  $\tau$  a opakuje tento postup, dokud nedosáhnou přibližné aproximace minimalizace funkce. Při aplikaci tohoto postupu, bude cílem minimalizovat funkci (7.5).

V literatuře se objevují různé způsoby minimalizace, například metoda maximální věrohodnosti atd. Dále se lze setkat s minimalizací rozdílu výnosu do splatnosti, namísto zde uvedené minimalizace rozdílu odhadnuté a tržní ceny. Tato práce se pro jednoduchost zaměří na výše popsaný odhad, neboť je nejčastěji používaný.

Zajímavé je chování parametru  $\tau$ . Čím je tento parametr menší, tím lépe simuluje chování kratšího konce křivky. Pokud je tento parametr zvolen jako dostatečně velký, bude lépe aproximován delší konec křivky. Z toho důvodu je třeba si předem rozmyslet ve které části křivky je požadována nejlepší aproximace. Tento problém se pokouší řešit Svenssonův model.

Nelson-Sieglův model je dle [8] schopen popsat jakýkoliv ze známých tvarů křivek. Ovšem zjednodušený model popisuje jen křivky s jedním globálním extrémem.

Aby se toto tvrzení dokázalo, je potřeba najít extrém zderivováním (7.14) a položením výsledku rovno 0. První derivace je tedy rovna:

$$\frac{di}{dn} = e^{-\frac{n}{\tau}} \cdot \left( \beta_1 + \beta_2 + \beta_2 \cdot \frac{n}{\tau} - \beta_2 \cdot \frac{n^2}{\tau^2} \right) + \beta_1 \cdot \frac{n}{\tau} - \beta_1 - \beta_2 = 0 \quad (7.15)$$

Tuto rovnici nelze řešit analyticky kvůli své povaze, proto byla vyřešena pomocí toolbox MAPLE v MATLABu s konkrétními hodnotami  $\beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.3, \tau = 30$  pro proměnnou  $n$ . Tato rovnice má jedno nenulové řešení, po jehož dosazení do druhé derivace vznikne záporná hodnota. Proto má tato rovnice jeden extrém, minimum. Konkrétní výsledky pro výše uvedené hodnoty parametrů jsou následující:

$$n_1 = -27.315816, n_2 = 0 \quad (7.16)$$

Druhá derivace je:

$$\frac{di^2}{dn^2} = -\left(\frac{1}{30}\right) \cdot e^{\left(\frac{-1}{30} \cdot n\right)} \cdot (0.6 - 0.000333 \cdot n^2) - 0.000667 \cdot e^{-\frac{1}{30} \cdot n} \cdot n + 0.1 \cdot e^{-1} \quad (7.17)$$

Hodnota druhé derivace v bodě  $n_1 = -27.336578$ .

Při odhadu parametrů v praxi lze zjednodušený model (7.14) převést do ještě jednoduššího tvaru:

$$i(n) = a + b \cdot \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}} + c \cdot e^{-\frac{n}{\tau}} \quad (7.18)$$

s parametry  $a = a_0, b = a_1 + a_2, c = -a_2$  a  $\tau$ . Aby tyto výrazy dávaly smysl musí platit, že:

$$a > 0, b > 0$$

Uvedený Nelson-Sieglův model byl původně navržen pro modelování krátkého konce výnosové křivky, který je sestavován ze státních pokladničních poukázek, tedy zero bondů. Pozdější praxe však ukázala, že ho lze velmi dobře využít i k modelování středního a delšího konce výnosové křivky.

### 7.3.2 Schopnost predikce Nelson-Sieglůva modelu

Výše popsany model Nelson-Siegla dokáže celkem dobře odhadnout budoucí vývoj sazeb. Přestože model pomocí kubických splinů odhaduje výnosovou křivku lépe, jeho predikční schopnost je téměř nulová. Je to zejména kvůli limitním vlastnostem kubických funkcí.

Jak uvádí [8] Nelson-Sieglův model prokázal při odhadech budoucích sazeb v osmdesátých letech korelaci 0.963, což je velmi dobrý výsledek, přestože předpovídal celkově vyšší sazby než ve skutečnosti byly. Lze se tedy domnívat, že právě díky této vlastnosti se mnoho světových bank dodnes řídí tímto modelem (nebo jeho rozšířením ve formě Svenssonova modelu). Toto tvrzení potvrzuje například [7].

#### 7.4 Svenssonova metoda - rozšíření Nelson-Sieglova modelu

O několik let později po vzniku Nelson-Sieglova modelu bylo navrženo zlepšení stávajícího modelu pomocí rozšíření o další parametr  $\beta_3$ . Tento model je flexibilnější a na rozdíl od svého předchůdce dokáže namodelovat křivku s více lokálními extrémy. Vztah pro forwardovou úrokovou sazbu v tomto modelu odpovídá rovnici:

$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{n}{\tau_1}} + \beta_2 \cdot -\frac{n}{\tau_1} e^{-\frac{n}{\tau_1}} + \beta_3 \cdot -\frac{n}{\tau_2} \cdot e^{-\frac{n}{\tau_2}} \quad (7.19)$$

kde  $\beta_0, \tau_1, \tau_2$  jsou kladné koeficienty a  $n$  je doba do splatnosti.

Po dosazení do vzorce (7.12) a úpravách vznikne následující vyjádření spotové křivky dle Svenssonova modelu:

$$i(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_1}}}{\frac{n}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_1}}}{\frac{n}{\tau_1}} - e^{-\frac{n}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_2}}}{\frac{n}{\tau_2}} - e^{-\frac{n}{\tau_2}} \right) \quad (7.20)$$

Aby se ukázalo, že tento model dokáže namodelovat křivku s více lokálními extrémy, lze vyjádření pro spotovou výnosovou křivku zderivovat a výsledek položit rovno 0. První derivace funkce  $i(n)$  vypadá takto:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dn} = & e^{-\frac{n}{\tau_1}} \cdot \left( \beta_1 + \beta_2 + \beta_2 \cdot \frac{n}{\tau_1} - \beta_2 \cdot \frac{n^2}{\tau_1^2} \right) + \beta_1 \cdot \frac{n}{\tau_1} - \beta_1 - \beta_2 + \\ & + \beta_3 \cdot \left( e^{-\frac{n}{\tau_2}} \cdot \left( 1 + \frac{n}{\tau_2} \right) - 1 - \frac{n^2}{\tau_2^2} \cdot e^{-\frac{n}{\tau_2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Tato rovnice nelze řešit analyticky kvůli své povaze, proto byla vyřešena pomocí toolbox MAPLE v MATLABu pro konkrétní hodnoty, podobně jako u modelu Nelson-Siegla. Za konkrétní hodnoty byly dosazeny následující:

$$\beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.3, \tau = 30, \tau_2 = 20, \beta_3 = 0.2$$

Tato rovnice má více nenulových řešení. Konkrétní výsledky pro výše uvedené hodnoty parametrů jsou níže popsány.

Rovnice (7.21) má po dosazení konkrétních parametrů 4 extrémy:

$$n_1 = -26.535173, n_2 = 6.883169, n_3 = 93.891509, n_4 = 428.326277$$

Druhá derivace funkce pro spotovou křivku  $i(n)$  s konkrétními parametry je pak:

$$\begin{aligned} \frac{di^2}{d^2n} = & -\frac{1}{30} \cdot e^{-\frac{1}{30} \cdot n} \cdot (0.6 - 0.000333 \cdot n^2) - 0.000667 \cdot e^{(-\frac{1}{30} \cdot n)} \cdot n + \\ & + 0.01 - 0.02 \cdot e^{(-\frac{1}{20} \cdot n)} - 0.001 \cdot n \cdot e^{(-\frac{1}{20} \cdot n)} + 0.000025 \cdot n^2 \cdot e^{(-\frac{1}{20} \cdot n)} \end{aligned} \quad (7.22)$$

---

## Část IV

# Praktická aplikace - konstrukce výnosové křivky několika metodami na reálných datech z České republiky a Německa

Pro praktickou aplikaci konstrukce výnosové křivky byly jako zdrojová data zvoleny informace o státních dluhopisech České republiky s pevným kupónem a státní dluhopisy Spolkové republiky Německo. U obou příkladů byla při výpočtu určena cena dluhopisu jako součet tržní ceny dluhopisu a příslušného alikvotního úrokového výnosu.

## 8 Česká republika

### 8.1 Data

Data o českých státních dluhopisech jsou čerpána z oficiálních stránek Patria a.s. Tato stránka uvádí jako zdroj Českou obchodní banku (ČSOB). Jedná se o přímého účastníka obchodujícího na Burze cenných papírů Praha (BCPP). Tento zdroj se tedy dá považovat za důvěryhodný a data také. Zde následuje tabulka s daty a jejich popisem. Dluhopisy jsou s datem vypořádání 13. 4. 2012. Kromě data splatnosti je v tabulce uvedena i doba do splatnosti v letech. Při sestavování křivky výše uvedenými metodami bylo nutné zohlednit 15% daň z kupónových výnosů. Proto byla data při výpočtech upravena o tuto daň. Tento fakt také napomohl lepší porovnatelnosti české výnosové křivky s německou.

Dluhopis	Cena(Kč)	AUV	Kupon	Splatnost	V letech	Durace	YTM
3.55/12	10101.65	157.78	30	18. 10. 2012	0.05	0.82	0.73%
3.70/13	10103.2	289.83	88	16. 6. 2013	1.25	1.2	1.08%
3.8/15	10105.65	-13.72	179	11. 4. 2015	3.09	1.95	1.84%
6.96/16	10117.65	119.69	200	26. 1. 2016	3.9	2.2	1.98%
4/17	10107.2	-14.44	238	11. 4. 2017	5.13	2.54	2.45%
4.4/18	10111.1	281.11	262	18. 8. 2018	6.50	2.75	2.79%
5/19	10112.8	-18.06	288	11. 4. 2019	7.15	3.03	3.31%
3.75/20	10103.5	204.17	320	12. 9. 2020	8.60	3.33	3.42%
3.85/21	10103.4	191.43	336	29. 9. 2021	9.65	3.84	3.52%
4.7/22	10109.75	255.98	348	12. 9. 2022	10.63	3.65	3.83%
4.2/36	10106	133	358	4. 12. 2036	25.06	4.07	4.54%

Při aproximaci výnosové křivky, bylo použito prvních devět státních dluhopisů z výše uvedené tabulky. Ostatní byly vyloučeny kvůli malé likviditě.

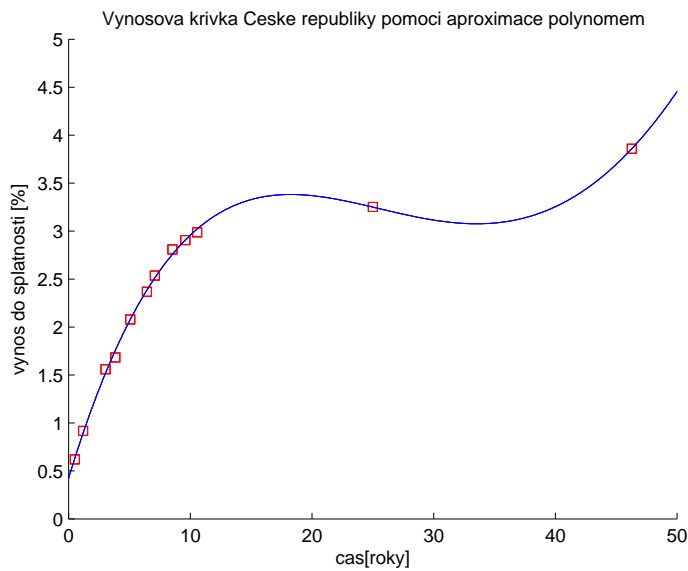
Pro lepší porovnání s německou výnosovou křivkou je však u aproximace polynomem uvedena křivka až do nejdelší splatnosti. Při interpretaci výnosové křivky sestavené ze státních dluhopisů, jejichž doba do splatnosti začíná obdobím od jednoho roku, je třeba dbát opatrnosti. Pro přesné sestrojení výnosové křivky na krátkém konci by musela být křivka sestavena ze Státních pokladničních poukázek se splatností kratší než jeden rok. Jelikož se podmínky u státních dluhopisů a Státních pokladničních poukázek liší, nelze tyto dvě křivky zaměňovat nebo konstruovat jednu křivku z obou druhů dluhopisů zároveň.

## 8.2 Aproximace polynomem

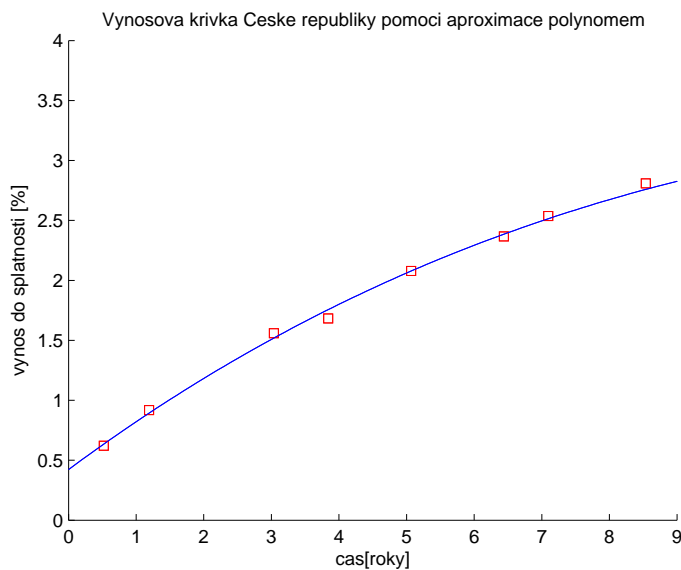
Pro konstrukci křivky aproximací polynomem byl použit polynom čtvrtého stupně. Výsledná odhadnutá křivka aproximace polynomem po výpočtu v software MATLAB je:

$$i^* = a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + a_3 \cdot n^3 + a_4 \cdot n^4 \quad (8.1)$$
$$i^* = (-1.63) \cdot 10^{-6} + 0.000341 \cdot n - 0.01980 \cdot n^2 + 0.417850 \cdot n^3 + 0.422498 \cdot n^4$$

Na obrázku č. 9 je zobrazena pro ilustraci a následné porovnání křivka do nejdelší splatnosti a na obrázku č. 10 je odhadnuta výnosová křivka do devíti let splatnosti. Tato část křivky má nejvyšší vypovídající schopnost, neboť je nejlikvidnější.



**Obrázek 9:** Odhadnutá výnosová křivka pro všechny splatnosti pomocí aproximace polynomem čtvrtého stupně. Červenými čtverci jsou vyznačeny jednotlivé výnosy do splatnosti a modře je pak vykreslena výnosová křivka.



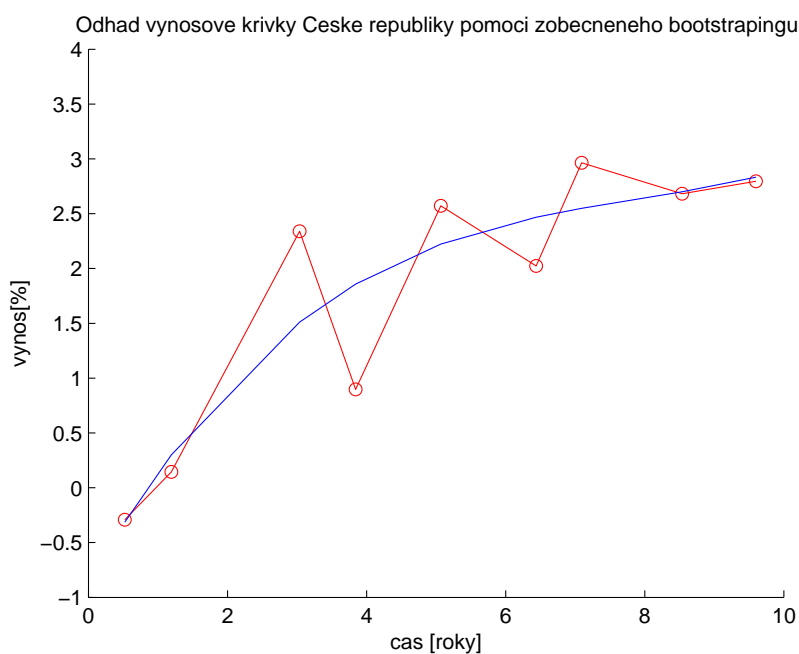
**Obrázek 10:** Odhadnutá výnosová křivka pomocí aproximace polynomem čtvrtého stupně pro prvních devět dluhopisů. Červenými čtverci jsou vyznačeny jednotlivé výnosy do splatnosti a modře je pak vykreslena výnosová křivka.

### 8.3 Zobecněný bootstrapping

Křivku zkonstruovanou pomocí zobecněného bootstrappingu bylo potřeba pro větší názornost vyhladit polynomem třetího stupně. Výsledná odhadnutá křivka po vyhlazení polynomem po výpočtu v software MATLAB je tato:

$$i^* = a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + a_3 \cdot n^3 \quad (8.2)$$

$$i^* = 5.49 \cdot 10^{-5} - 0.001301 \cdot n + 0.011282 \cdot n^2 - 0.008686 \cdot n^3$$



**Obrázek 11:** Odhadnutá výnosová křivka pro prvních devět dluhopisů pomocí zobecněného bootstrappingu. Modře je vykresleno vyhlazení křivky pomocí polynomu třetího stupně, červeně vlastní křivka.

### 8.4 Nelson-Sieglův a Svenssonův model

Pro praktické aplikace byly využity meze pro počáteční parametry modelu popsané a rozpracované v [14]. Konkrétní zvolené hodnoty parametrů byly

$$\beta_0 = 0.15 \quad \beta_1 = 0.28 \quad \beta_2 = 0.3$$

$$\tau = \tau_1 = 30 \quad \beta_3 = 0.3 \quad \tau_2 = 30$$

Je důležité sjednotit počáteční podmínky u obou modelů u obou zemí, neboť tyto modely jsou velmi citlivé na volbu počátečních podmínek. Byly provedeny experimenty s počátečními podmínkami mimo tyto meze a ukázalo se, že nevyhovují ani jedné z teorií výnosových křivek.

Výsledná odhadnutá křivka po výpočtu v software MATLAB je pro Nelson-Sieglův model:

$$i(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}} \right) + \beta_2 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}} - e^{-\frac{n}{\tau}} \right) \quad (8.3)$$

$$i(n) = 0.018770 + 0.092232 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{46.916541}}}{\frac{n}{46.916541}} - e^{-\frac{n}{46.916541}} \right)$$

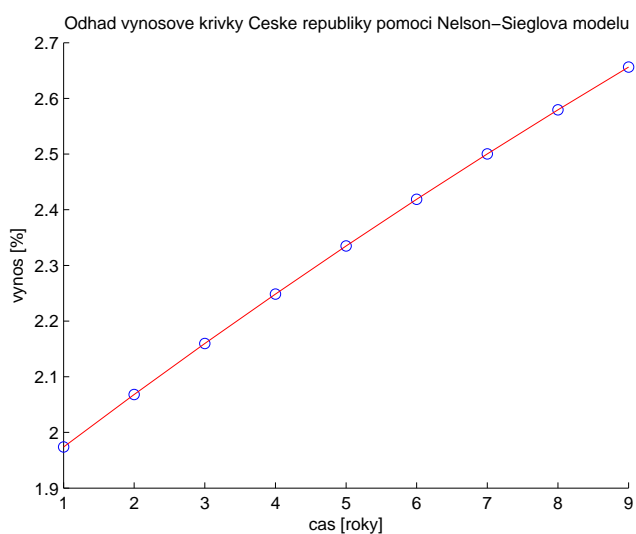
a pro Svenssonův model:

$$i(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_1}}}{\frac{n}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_1}}}{\frac{n}{\tau_1}} - e^{-\frac{n}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_2}}}{\frac{n}{\tau_2}} - e^{-\frac{n}{\tau_2}} \right) \quad (8.4)$$

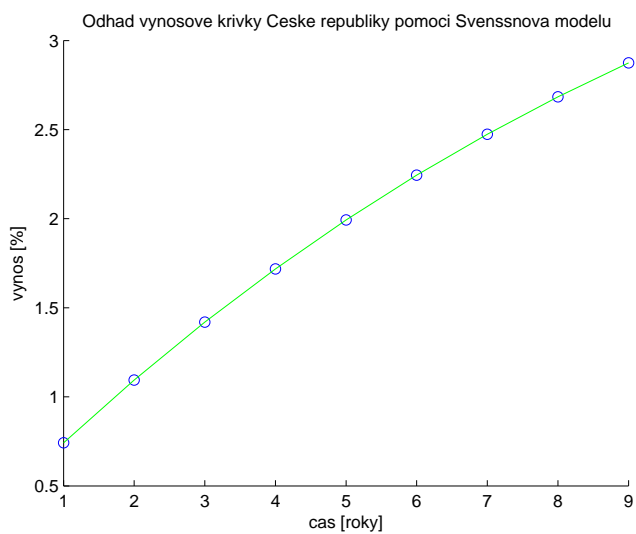
$$i(n) = 0.0036 + 0.203859 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{19.737839}}}{\frac{n}{19.737839}} - e^{-\frac{n}{19.737839}} \right) - 0.103213 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{43.2885}}}{\frac{n}{43.2885}} - e^{-\frac{n}{43.2885}} \right)$$



Následující obrázky ilustrují odhadnuté křivky obou modelů.

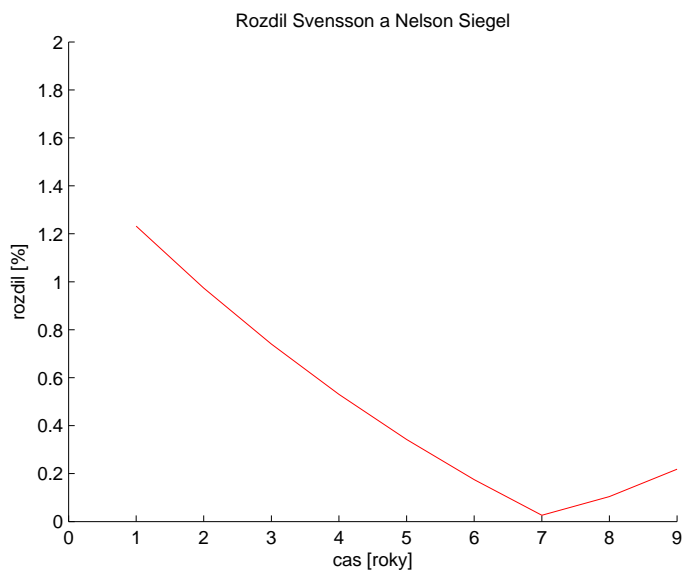


**Obrázek 12:** Odhadnutá výnosová křivka České republiky pomocí Nelson-Sieglava modelu.



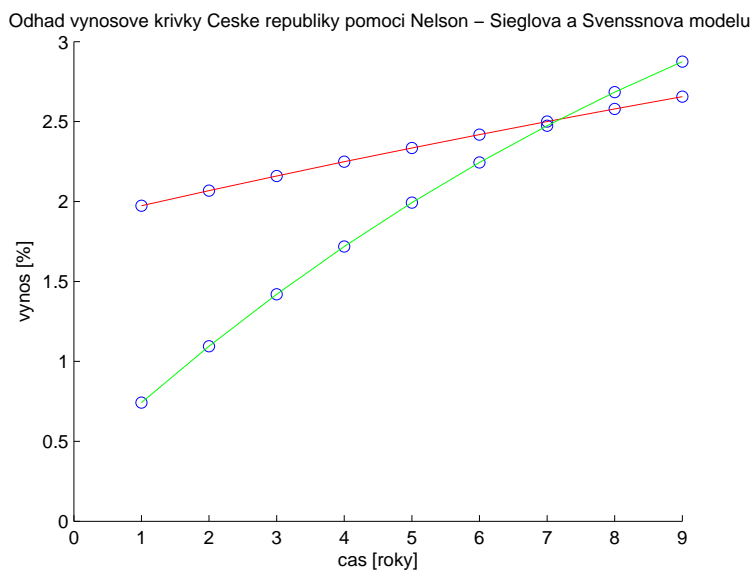
**Obrázek 13:** Odhadnutá výnosová křivka České republiky pomocí Svenssonova modelu.

V následujícím obrázku je zobrazen průběh rozdílu křivek zkonstruovaných pomocí modelu Nelson-Siegla a pomocí Svenssonova modelu. Důvod vyššího rozdílu na kratším konci křivky je zřejmě velmi malý počet dat pro krátké splatnosti na rozdíl od německých dat.



**Obrázek 14:** Absolutní hodnota rozdílu mezi odhadem křivky pomocí Svenssonova a Nelson-Sieglůva modelu.

Pro znázornění vztahu křivek byly obě dány do jediného grafu, ze kterého lze vyčíst, že křivka zkonstruovaná pomocí modelu Nelson-Siegla má menší růst.



**Obrázek 15:** Odhadnutá výnosová křivka pomocí Svenssonova modelu (zeleně) a Nelson-Sieglova modelu (červeně).

## 8.5 Interpretace výnosové křivky České republiky

Všechny výše odhadnuté výnosové křivky mají v horizontu devíti let rostoucí charakter. Tento tvar je nejběžnější a značí dobrou stabilitu ekonomiky. V blízké budoucnosti se nedá tedy očekávat výraznější pokles delšího konce výnosové křivky.

Při aproximaci výnosové křivky polynomem, bylo použito prvních devět státních dluhopisů z výše uvedené tabulky. Ostatní byly vyloučeny kvůli malé likviditě. Při interpretaci výnosové křivky sestavené ze státních dluhopisů, jejichž doba do splatnosti začíná obdobím od jednoho roku, je třeba dbát opatrnosti při interpretaci krátkého konce. Pro přesné sestavení výnosové křivky na krátkém konci by musela být křivka sestavena ze státních pokladničních poukázek se splatností kratší než jeden rok. Kratší konec křivky začíná v době jednoho roku na hodnotě 0.968 % . V čase blížícím se hodnotě 0 je tato hodnota 0.5205 % což však nelze považovat za relevantní odhad 14 denní repo sazby ČNB, díky výše uvedeným důvodům.

Také odhad křivky pomocí bootstrappingu byl do prvního roku záporný. Avšak přesnější modely pro odhadování křivky mimo nejmenší a největší zadané dluhopisy, tedy Nelson-Sieglův a přesnější Svenssonův model dokazují, že výnosy nejsou pro žádnou splatnost záporné.

V České republice jsou kupónové výnosy ze státních dluhopisů zdaněny 15% daní. Tato skutečnost posunula výnosovou křivku České republiky níže.

Dalším důvodem, proč je výnosová křivka rostoucí může být fakt, že vláda České republiky se rozhodla vydat velké množství státních dluhopisů. Díky vysoké nabídce a stejné poptávce vzrůstají tlaky na vyšší výnosnost, tedy i na vyšší úrokové míry. Dále rostoucí výnosová křivka predikuje očekávanou vyšší inflaci. Zde se očekává, že Česká národní banka zareaguje vyššími úrokovými sazbami, pokud inflace překročí inflační cíl ČNB.

## 9 Německo

### 9.1 Data

Data pro německé státní dluhopisy jsou volně stažitelná z adresy [16]. Jedná se o oficiální stránky finanční agentury Spolkové republiky Německo, proto lze data považovat za důvěryhodná. Data jsou s datem vypořádání 13. 4. 2012. V Německu se platí daň z kupónových výnosů 26.375 %. Níže uvedený čistý výnos do splatnosti je vypočten tak, že je v něm již zahrnuta daň z kupónových výnosů. Ceny dluhopisů jsou uvedeny v eurech.

Kupon	Dluhopis	Splatnost	Cena	Čistý YTM	Cena + AUV
0.5	0.500 BSA 10	15. 6. 2012	100.075	0.03	100.494
5	5.000 Bund 02 II	4. 7. 2012	101.05	0.05	104.984
0.75	0.750 BSA 10	14. 9. 2012	100.29	0.03	100.733
4.25	4.250 BO S 151	12. 10. 2012	102.03	0.05	104.213
1	1.000 BSA 10	14. 12. 2012	100.63	0.03	100.972
4.5	4.500 Bund 03	4. 1. 2013	103.17	0.05	104.449
1.5	1.500 BSA 11	15. 3. 2013	101.295	0.06	101.431
3.5	3.500 BO S 152	12. 4. 2013	103.36	0.07	103.408
2.25	2.250 BO 07 index.	15. 4. 2013	103.9	0	103.912
1.75	1.750 BSA 11	14. 6. 2013	101.92	0.07	103.546
3.75	3.750 Bund 03	4. 7. 2013	104.435	0.07	107.386
0.75	0.750 BSA 11	13. 9. 2013	100.925	0.07	101.421
4	4.000 BO S 153	11. 10. 2013	105.765	0.08	107.831
0.25	0.250 BSA 11	13. 12. 2013	100.24	0.08	100.343
4.25	4.250 Bund 03	4. 1. 2014	107.11	0.07	108.318
0.25	0.250 BSA 12	14. 3. 2014	100.24	0.09	100.276
2.25	2.250 BO S 154	11. 4. 2014	104.26	0.07	104.297
4.25	4.250 Bund 04	4. 7. 2014	109.07	0.1	112.414
2.5	2.500 BO S 155	10. 10. 2014	105.8	0.11	107.098
3.75	3.750 Bund 04	4. 1. 2015	109.595	0.15	110.661
2.5	2.500 BO S 156	27. 2. 2015	106.51	0.16	106.852
2.25	2.250 BO S 157	10. 4. 2015	105.965	0.18	106.008
3.25	3.250 Bund 05	4. 7. 2015	109.52	0.2	112.077
1.75	1.750 BO S 158	9. 10. 2015	104.905	0.24	105.818
3.5	3.500 Bund 05	4. 1. 2016	111.52	0.27	112.515
2	2.000 BO S 159	26. 2. 2016	106.08	0.3	106.359
2.75	2.750 BO S 160	8. 4. 2016	109.055	0.33	109.123
1.5	1.500 Bund 06 index.	15. 4. 2016	111.25	0	111.258
6	6.000 Bund 86 II	20. 6. 2016	122.3	0.42	127.251

Kupon	Dluhopis	Splatnost	Cena	Čistý YTM	Cena + AUV
4	4.000 Bund 06	4. 7. 2016	114.555	0.36	117.703
5.625	5.625 Bund 86	20. 9. 2016	121.7	0.46	124.927
1.25	1.250 BO S 161	14. 10. 2016	102.935	0.43	103.618
3.75	3.750 Bund 06	4. 1. 2017	114.45	0.46	115.516
0.75	0.750 BO S 162	24. 2. 2017	100.365	0.5	100.56
4.25	4.250 Bund 07 II	4. 7. 2017	117.85	0.54	121.194
4	4.000 Bund 07	4. 1. 2018	117.45	0.62	118.587
0.75	0.750 BO 11 index.	15. 4. 2018	109.9	0	109.904
4.25	4.250 Bund 08	4. 7. 2018	119.705	0.7	123.049
3.75	3.750 Bund 08	4. 1. 2019	117.29	0.77	118.356
3.5	3.500 Bund 09	4. 7. 2019	115.91	0.86	118.664
3.25	3.250 Bund 09	4. 1. 2020	114.41	0.93	115.333
1.75	1.750 Bund 09 index.	15. 4. 2020	118.5	0	118.51
3	3.000 Bund 10	4. 7. 2020	112.59	0.1	114.951
2.25	2.250 Bund 10	4. 9. 2020	106.58	1.1	107.969
2.5	2.500 Bund 10	4. 1. 2021	108.42	1.00	109.13
3.25	3.250 Bund 11	4. 7. 2021	114.47	1.00	117.615
2.25	2.250 Bund 11	4. 9. 2021	105.53	1.00	106.975
2	2.000 Bund 11	4. 1. 2022	103.08	1.00	103.867
1.75	1.750 Bund 12	4. 7. 2022	100.08	1.28	100.099
0.1	0.100 Bund 12 index.	15. 4. 2023	103.75	1.00	103.757
6.25	6.250 Bund 94	4. 1. 2024	144.65	1.00	146.426
6.5	6.500 Bund 97	4. 7. 2027	153.81	1.00	158.925
5.625	5.625 Bund 98	4. 1. 2028	142.73	1.00	144.328
4.75	4.750 Bund 98 II	4. 7. 2028	131.62	1.00	135.358
6.25	6.250 Bund 00	4. 1. 2030	154.76	1.00	156.536
5.5	5.500 Bund 00	4. 1. 2031	145.5	1.00	147.063
4.75	4.750 Bund 03	4. 7. 2034	139.12	1.00	142.858
4	4.000 Bund 05	4. 1. 2037	128.9	1.00	130.037
4.25	4.250 Bund 07 I	4. 7. 2039	136.47	1.00	139.814
4.75	4.750 Bund 08	4. 7. 2040	147.57	1.00	151.308
3.25	3.250 Bund 10	4. 7. 2042	118.36	1.73	120.917

Vzhledem k velkému množství německých dluhopisů zejména v období prvních devíti let, zde nebude uveden odhad výnosové křivky pomocí bootstrappingu. Pro porovnání s Českou republikou je důležitý model pomocí aproximace polynomem, který je doplněn modely Nelson-Siegla a Svenssona. Německé dluhopisy mají stejné podmínky emise pro všechny splatnosti, proto lze dobře aproximovat křivku i pro področní splatnosti.

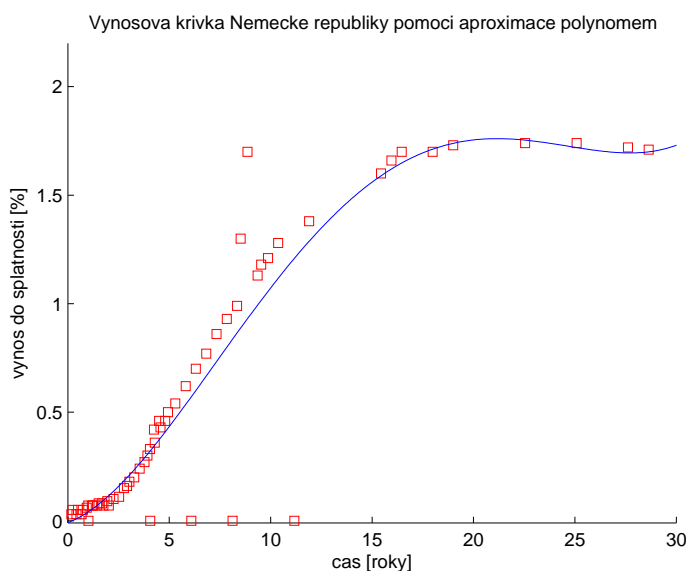
## 9.2 Aproximace polynomy

Pro data z Německa byl proložen polynom čtvrtého stupně. Opět je zde pro úplnost zobrazen odhad až do 30 let splatnosti. Nejvyšší vypovídající schopnost však má křivka do prvních devíti let. Výsledná odhadnutá křivka aproximace polynomem po výpočtu v software MATLAB je:

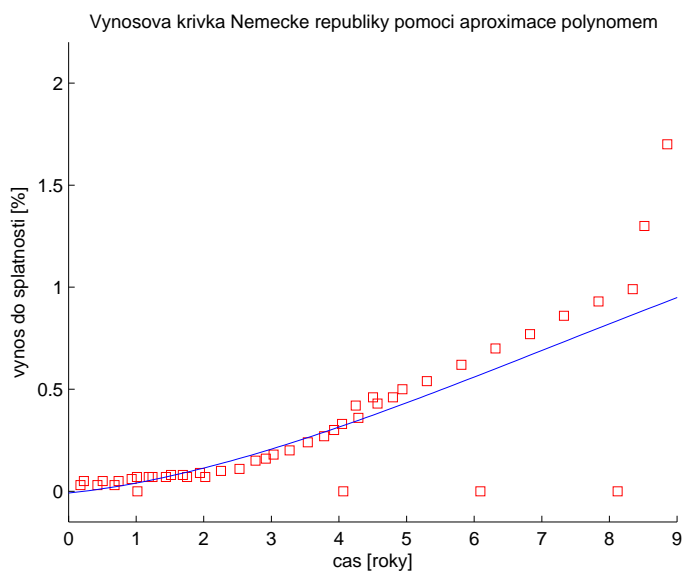
$$i^* = a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + a_3 \cdot n^3 + a_4 \cdot n^4 \quad (9.1)$$

$$i^* = 1.375542 \cdot 10^{-5} - 0.000877 \cdot n + 0.014669 \cdot n^2 + 0.035342 \cdot n^3 - 0.0088 \cdot n^4$$

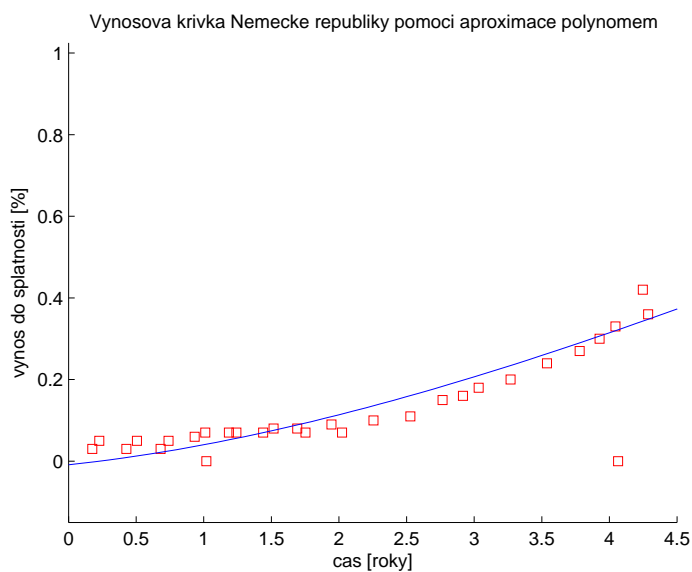
Následující obrázky č. 16 a č. 17 ilustrují odhadnutou křivku pro Spolkovou republiku Německo pro všechny roky a pro prvních devět let splatnosti. Na obrázku č. 18 je zobrazen detail křivky, ze kterého lze vyčíst rozložení dluhopisů u nejkratších splatností.



**Obrázek 16:** Odhadnutá výnosová křivka Německa pomocí aproximace polynomem čtvrtého stupně. Červenými čtverci jsou vyznačeny jednotlivé výnosy do splatnosti a modře je pak vykreslena výnosová křivka.



**Obrázek 17:** Odhadnutá výnosová křivka pomocí aproximace polynomem čtvrtého stupně pro prvních devět let splatnosti. Červenými čtverci jsou vyznačeny jednotlivé výnosy do splatnosti a modře je pak vykreslena výnosová křivka.



**Obrázek 18:** Detail odhadnuté výnosové křivky Německa pomocí aproximace polynomem čtvrtého stupně.



### 9.3 Nelson-Sieglův a Svenssonův model

Uvedené odhady jsou pro období prvních devíti let. Stejně jako u České republiky byly použity počáteční parametry

$$\beta_0 = 0.15 \quad \beta_1 = 0.28 \quad \beta_2 = 0.3$$

$$\tau = \tau_1 = 30 \quad \beta_3 = 0.3 \quad \tau_2 = 30$$

Výsledná odhadnutá křivka po výpočtu v software MATLAB je pro Nelson-Sieglův model vypadá následovně:

$$i(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}} \right) + \beta_2 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}} - e^{-\frac{n}{\tau}} \right) \quad (9.2)$$

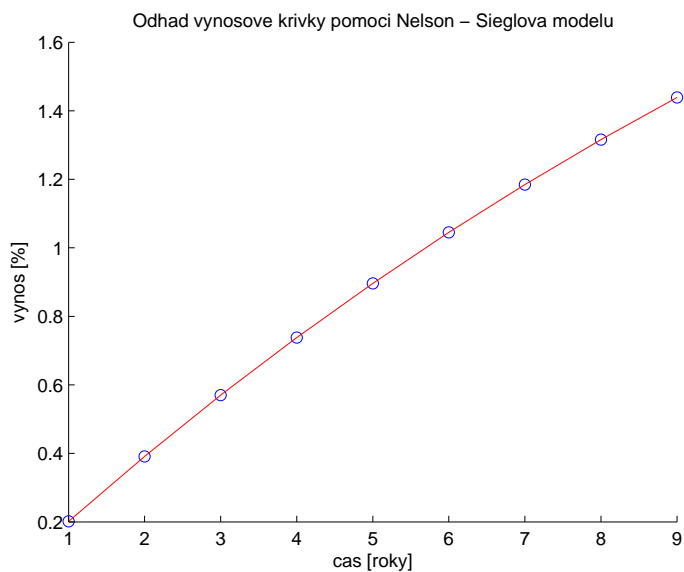
$$i(n) = 0.094027 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{22.671014}}}{\frac{n}{22.671014}} - e^{-\frac{n}{22.671014}} \right)$$

a pro Svenssonův model:

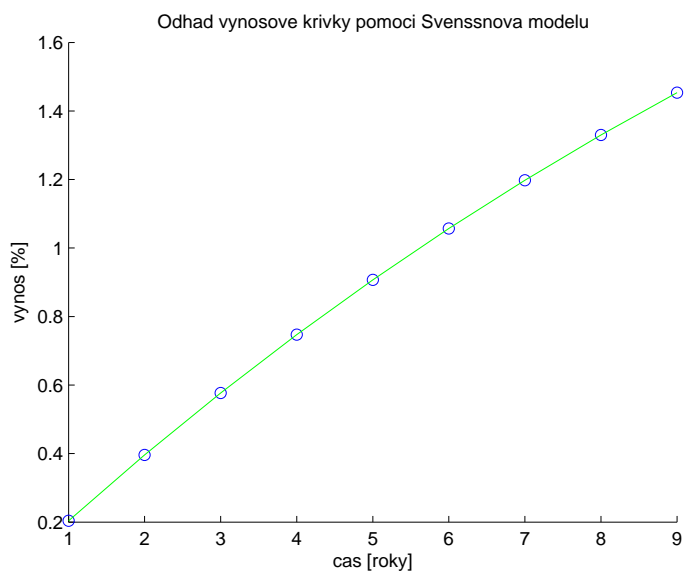
$$i(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_1}}}{\frac{n}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_1}}}{\frac{n}{\tau_1}} - e^{-\frac{n}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_2}}}{\frac{n}{\tau_2}} - e^{-\frac{n}{\tau_2}} \right) \quad (9.3)$$

$$i(n) = 0.692215 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{28.990867}}}{\frac{n}{28.990867}} - e^{-\frac{n}{28.990867}} \right) - 0.606587 \cdot \left( \frac{1 - e^{-\frac{n}{30.8264895}}}{\frac{n}{30.8264895}} - e^{-\frac{n}{30.8264895}} \right)$$

Na obrázku č. 19 je ilustrace odhadnuté výnosové křivky Německa pomocí Nelson-Sieglůva modelu. Tento odhad se příliš neliší od odhadu pomocí Svenssonova modelu, který je vyobrazen na obrázku č. 20.

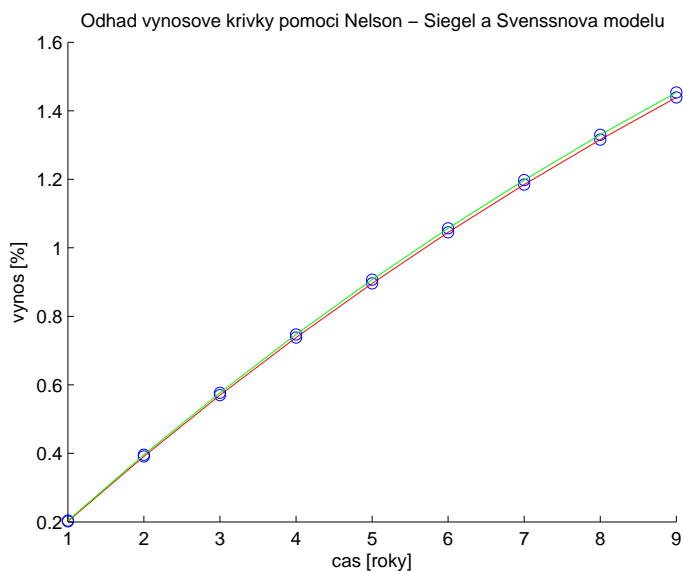


**Obrázek 19:** Odhad výnosové křivky Německa pomocí Nelson-Sieglůva modelu.

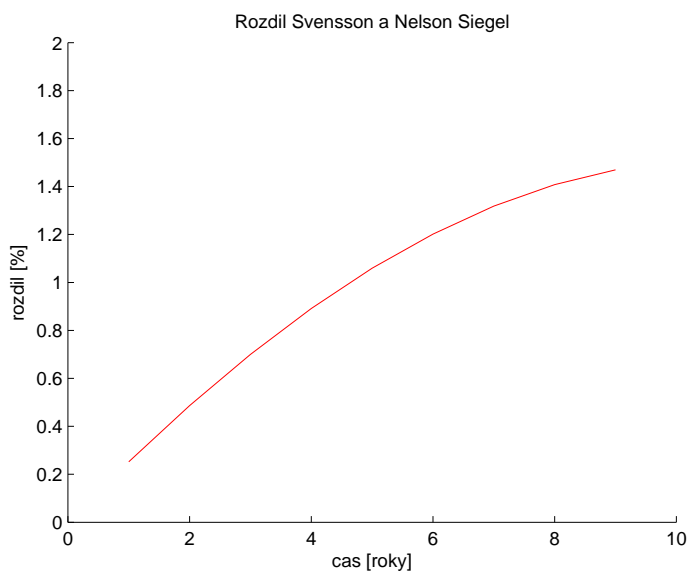


**Obrázek 20:** Odhad výnosové křivky Německa pomocí Svenssonova modelu.

Aby bylo možno porovnat rozdíl mezi těmito odhady, byly obě křivky vykresleny do jednoho grafu (viz obrázek č. 21) a zároveň byl v grafu vykreslen i absolutní rozdíl mezi těmito křivkami (viz obrázek č. 22).



**Obrázek 21:** Odhad výnosové křivky Německa pomocí Nelson-Sieglava modelu (červeně) a pomocí Svenssonova modelu (zeleně).



**Obrázek 22:** Rozdíl mezi odhadem křivky pomocí Svenssonova a Nelson-Sieglava modelu .

#### 9.4 Interpretace výnosové křivky Spolkové republiky Německo

Německá výnosová křivka je pozvolna rostoucí ve střednědobém horizontu do devíti let, což značí stabilitu ekonomiky. Výnosnosti nejsou pro menší splatnosti nijak vysoké, tedy pravděpodobně není velké riziko nesplacení. U velmi krátkých splatností jsou hodnoty výnosové křivky velmi málo pod nulou, což by značilo velmi mírnou deflaci (viz obrázek č. 17). Nicméně v takto malých splatnostech nejsou dluhopisy emitovány a hodnoty pod nulou jsou způsobené aproximací polynomem. Aproximace polynomem je mimo reálné splatnosti dluhopisů velmi nepřesná, proto není vhodné interpretaci nejkratšího konce křivky dle tohoto odhadu přikládat větší důležitost. Pro lepší odhad nejkratšího konce křivky jsou použity modely Svensson a Nelson-Siegel.

Německá ekonomika je stabilní a zároveň v nadcházejícím období neočekává prudší změny inflace. Očekává se mírná inflace do 2 %. Vzhledem k aktuálním okolnostem v Evropské unii závisí budoucnost německé ekonomiky na vývoji v eurozóně. Až třetinu německého exportu totiž tvoří země jako jsou Španělsko, Itálie nebo Francie.

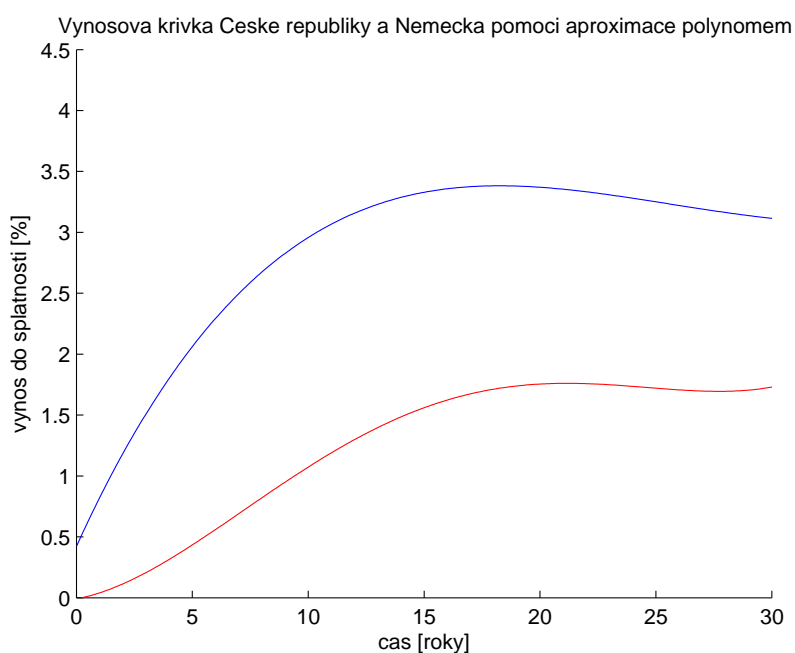
Vzhledem k malým výnosnostem německých dluhopisů a poměrně vysokým daním z kapitálových výnosů, dividend a kupónových výnosů, často němečtí investoři investují v zahraničí. Dle [15] dosahují tyto daně až 30% výše a v oblastech bývalé Spolkové republiky Německo je zde ještě připočten tzv. Solidarität Zuschlag ve výši 5%.

## 10 Srovnání

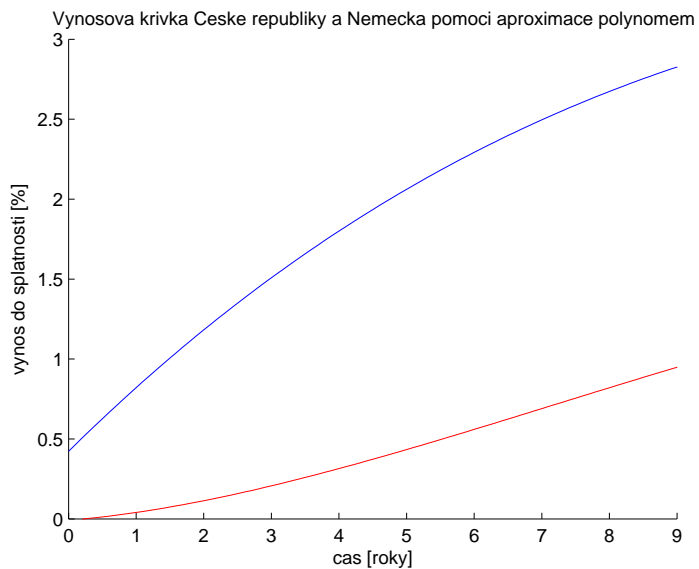
Výnosové křivky České republiky i Německa jsou obě rostoucí na krátkém konci a ve střední části. Avšak německá výnosová křivka je níže než česká. Tento fakt značí nižší očekávanou inflaci a také nižší očekávané forwardové míry Německa. Spotová výnosová křivka nedokáže predikovat budoucí strukturu úrokových měr, jen její průměrnou výši. Průměrná budoucí výše úrokových měr by se měla pro delší splatnosti v České republice pohybovat kolem 3 % a pro Německo pod 2 %.

Vyšší umístění křivky České republiky lze také interpretovat jako vyšší riziko případného nesplacení dluhopisů. I když je v tomto případě takové riziko mizivé, nelze přehlédnout vyšší vyspělost německé ekonomiky.

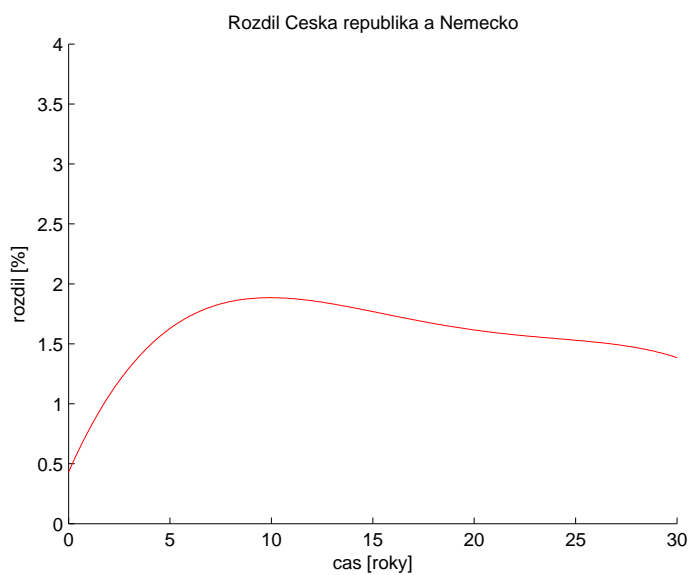
Srovnání výnosových křivek obou zemí bylo provedeno nejprve pro křivky odhadnuté aproximací polynomem. Pro lepší porovnání byly tyto křivky zobrazeny do jednoho grafu, jak lze pozorovat na obrázku č. 23. Obrázek č. 24 ilustruje situaci pro prvních devět let splatnosti a na obrázku č. 25 je zobrazen průběh absolutního rozdílu obou křivek.



**Obrázek 23:** Odhadnutá výnosová křivka České republiky (červeně) a Německa (modře).

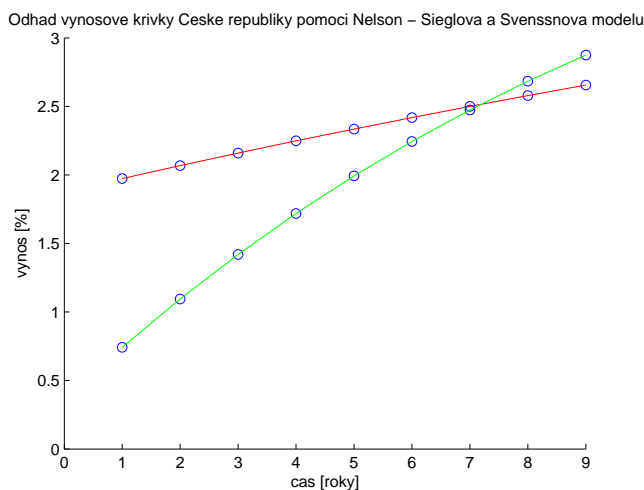


**Obrázek 24:** Odhadnutá výnosová křivka České republiky (červeně) a Německa (modře) pro prvních devět let splatnosti.

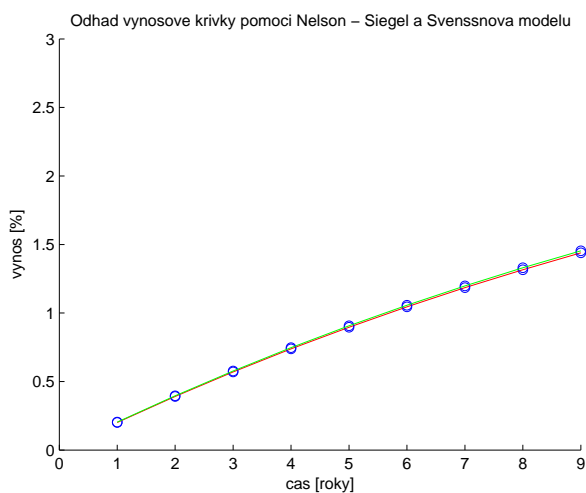


**Obrázek 25:** Rozdíl mezi výnosovými křivkami České republiky a Německa odhadnutými polynomem čtvrtého stupně.

Porovnání obou křivek je však také možné pozorovat na základě odhadů pomocí modelů Nelson-Siegla a Svenssona. Všechny křivky jsou opět rostoucí a aby byly lépe porovnatelné, jsou na obrázcích č. 26 a 27 použity stejné velikosti os.



**Obrázek 26:** Odhad výnosové křivky České republiky pomocí Nelson-Sieglova vykreslený červeně a Svenssonova modelu vykreslený zeleně.



**Obrázek 27:** Odhad výnosové křivky Spolkové republiky Německo pomocí modelu Nelson-Siegla vykreslený červeně a Svenssonova modelu vykreslený zeleně.

---

## Část V

# Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s několika způsoby sestavování spotových výnosových křivek a jejich následnou aplikací na skutečná data. Byly sestrojeny odhady pro výnosové křivky České republiky a pomocí stejných modelů byly sestaveny také odhady výnosové křivky Spolkové republiky Německo.

Pro závěrečné porovnání byly vybrány odhady pomocí aproximací polynomů, neboť přes jejich špatnou predikční schopnost mimo interval nejkratšího a nejdelšího dluhopisu, mají tyto nejlepší schopnost aproximace. Výnosové křivky vyšly rostoucí pro obě země s tím rozdílem, že křivka České republiky měla průměrně o 1.5 % vyšší výnos do splatnosti, jak dokazuje obrázek č. 25.

Dále se porovnávaly odhady obou křivek pomocí Nelson-Sieglova a Svenssonova modelu. Odhad pomocí Nelson-Sieglova modelu pro českou výnosovou křivku se lišil zejména na nejkratším konci křivky. Stalo se tak především díky výrazně menšímu počtu dluhopisů do dvou let splatnosti v porovnání s německými daty.

Tato práce se zabývá pouze odhadem spotových výnosových křivek, konstrukce forwardových výnosových křivek může být námětem jejího případného rozšíření. Další možností rozšíření práce je modifikace o duraci, neboť vážením reziduí mezi odhadnutou a skutečnou cenou dluhopisu lze dosáhnout přesnějších výsledků.



## Část VI

## Literatura

## Reference

- [1] *JÍLEK, Josef. Finanční trhy.* 1. vyd. Praha : Grada Publishing, 1997. ISBN 80-7169-453-3.
- [2] *KOHOUT, Pavel. Ekonomická analýza výnosových křivek [online].* Statistika, 2005, 3/2005, 211-226 [cit. 20.4.2012]. Dostupné z: <http://panda.hyperlink.cz/cestapdf/pdf05c3/kohout.pdf>
- [3] *BUREŠ, Jan. Úvod do problematiky výnosových křivek [online].* [cit. 20.4.2012]. Dostupné z: <http://ksp.vse.cz/KHP/WCMS-KHP.nsf/files/5HP501-vynosove-krivky-pdf-zs07/file/5HP501-vynosove-krivky-pdf-zs07.pdf>
- [4] *MÁLEK, Jiří, RADOVÁ, Jarmila, ŠTĚRBA, Filip. Konstrukce výnosové křivky pomocí vládních dluhopisů v České republice [online].* Politická ekonomie, 2007, 6/2006, 792-807 [cit. 20.4.2012]. Dostupné z: [www.vse.cz/polek/download.php?jnl=polek-and-pdf=624.pdf](http://www.vse.cz/polek/download.php?jnl=polek-and-pdf=624.pdf)
- [5] *DEAVES, Richard, PARLAR, Mahmut. A Generalized Bootstrap Method to Determine the Yield Curve [online].* Applied Mathematical Finance (7), 257-270 [cit. 20.4.2012]. <http://www.business.mcmaster.ca/finance/deavesr/yieldcur.pdf>
- [6] *DANĚK, Josef. Přednášky z předmětu Numerická matematika. [online].* [cit. 20.4.2012]. Dostupné z: <http://trial.zcu.cz/?page=predmet-and-volba=TH-and-tlink=12-070-190-and-vlink=7.19>.
- [7] *BOLDER, David, STRÉLSKY, David. Yield Curve Modelling at the Bank of Canada [online].* Technical Report No. 84, Canada, 1999, ISSN 0713-7931, ISBN 0-662-27602-7.[cit. 20.4.2012]. Dostupné z: <http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/01/tr84.pdf>
- [8] *NELSON, Charles, SIEGEL, Andrew. Parsimonious Modeling of Yield Curves [online].* The Journal of Business, Volume 60, Issue 4 (Oct.,1987), 473-489. [cit. 20.4.2012]. Dostupné z:<http://www.math.ku.dk/rolf/teaching/NelsonSiegel.pdf>

- [9] *MAREK, Patrice. Přednášky z předmětu Finanční a pojistná matematika [online].*  
[cit. 20.4.2012]. Dostupné z: <http://www.kma.zcu.cz/main.php?KMAfile=./CLENOVE/main.php-and-DRC=./STRUCTURE/02-pracovnici/001-abeceda/-and-DRL=CZ-and-DROF=0-and-nick=PaMar-and-kam=vyuka.php>
- [10] **Česká republika. Zákon o dluhopisech [online].**  
In: 190/2004 SB. 2004. [cit. 20.4.2012]. Dostupné z: <http://www.mfcr.cz/cps/rde/xchg/mfcr/xsl/zakony-1039.html>
- [11] *HVOZDENSKÁ, Jana. Analýza výnosových křivek dluhopisů s nulovým kupónem.*  
Brno, 2010. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Fakulta Ekonomicko-správní. Vedoucí práce Boris ŠTRUNC.
- [12] *ANDĚL, Jiří. Statistické metody.*  
4. vyd. Praha: matfyzpress, 2007. ISBN 80-7378-003-8.
- [13] *MÁLEK, Jiří. Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*  
1.vyd. Praha: Ekopress, 2005. ISBN 80-86119-97-1.
- [14] *HLADÍKOVÁ, Hana Disertační práce*  
Praha, 2011. Disertační práce. Vysoká škola ekonomická. Fakulta financí a účetnictví. Vedoucí práce Jarmila RADOVÁ.
- [15] *RSS-Nachrichten.de Die Kapitalertragssteuer ist Bestandteil der Einkommenssteuer [online].*  
[cit. 20.4.2012]. Dostupné z: <http://www.rss-nachrichten.de/finanzen/steuer/steuerarten/die-kapitalertragssteuer>
- [16] *Zdroj dat státních dluhopisů Spolkové republiky Německo [online].*  
[cit. 13.4.2012]. Dostupné z: <http://www.deutsche-finanzagentur.de/fileadmin/Material-Deutsche-Finanzagentur/PDF/Aktuelle-Informationen/kredit-renditetabelle-en.pdf>
- [17] *Zdroj dat státních dluhopisů České republiky [online].*  
[cit. 20.4.2012]. Dostupné z: <http://www.patria.cz/kurzy/online/dluhopisy.html>