

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Řízení systémů s více binárními vstupy a jedním výstupem

Ing. Mgr. Jan Huspeka

Disertační práce
k získání akademického titulu doktor
v oboru Kybernetika

Školitel: Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.
Katedra: Katedra kybernetiky

Plzeň, 2014

University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences

Control of systems with multiple binary inputs and one output

Ing. Mgr. Jan Huspeka

Doctoral thesis
submitted for the degree Doctor of Philosophy
in the field of Cybernetics

Advisor: Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.
Department: Department of Cybernetics

Pilsen, 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

Jan Huspeka

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval Prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc. za vedení a cenné rady při tvorbě této práce.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům za jejich trpělivost a podporu ve chvílích, kdy jsem na jejich úkor trávil veškerý volný čas nad touto prací, především slečně Mgr. Janě Kracíkové.

Rovněž bych chtěl poděkovat svým kolegům za jejich podnětné myšlenky a zpětnou vazbu při řešení nejrůznějších aspektů této práce.

Obsah

Anotace	IV
1 Úvod	1
1.1 Systémy s více vstupy a jedním výstupem	1
1.2 Přínos disertační práce	2
1.3 Motivace	2
1.4 Členění disertační práce	3
2 Přípravná kapitola - řízení s klouzavým režimem	5
2.1 Stručná historie řízení s klouzavým režimem	5
2.2 Reléové řízení	6
2.2.1 Systémy s proměnnou strukturou	6
2.2.2 Chování relé ve zpětné vazbě	7
2.3 Klouzavý režim	14
2.3.1 Existence klouzavého režimu	14
2.3.2 Dynamika v klouzavém režimu	16
2.3.3 Stabilita v klouzavém režimu	17
2.3.4 Redukce řádu	18
2.3.5 Mezní cykly	19
2.4 Návrh řízení s klouzavým režimem	20
2.4.1 Regulární forma	20
2.4.2 Návrh s měřitelným vektorem stavu	23
2.4.3 Návrh se zpětnou vazbou od výstupu	25
2.4.4 Rekonstrukce stavu	27
2.4.4.1 Řízení s rekonstruovaným vektorem stavu	28
2.4.5 Kompenzace statického zesílení	28
2.4.6 Ilustrace návrhu - SISO systém	30
2.5 Současné metody řízení s klouzavým režimem	31
2.5.1 Klouzavý režim vyššího řádu	32
2.5.2 Fuzzy sliding mode	33
2.5.3 Adaptivní zesílení	36
2.5.3.1 Dynamická adaptace	36

	2.5.3.2	Statická adaptace	37
	2.5.4	Náhrada funkce signum spojitou funkcí	38
	2.5.5	Dynamický klouzavý režim	39
	2.5.6	Řízení diskretních systémů	39
	2.5.7	Prediktivní řízení s klouzavým režimem	40
	2.5.7.1	Predikce přepínací nadplochy	40
	2.5.8	Další aplikace	42
2.6		Motivační příklad - Řízení teploty	43
2.7		Shrnutí	49
3		Formulace úlohy a cíle disertační práce	50
	3.1	Popis úlohy	50
	3.2	Formulace úlohy	50
	3.3	Cíle disertační práce	51
4		Návrh dvoustavového regulátoru	52
	4.1	Zákon řízení	52
	4.1.1	Klouzavý režim	52
	4.1.1.1	Existence klouzavého režimu	52
	4.1.1.2	Dynamika v klouzavém režimu	54
	4.1.1.3	Stabilita v klouzavém režimu	54
	4.1.1.4	Redukce řádu	54
	4.2	Návrh zákona řízení	55
	4.2.1	Regulární forma	55
	4.2.2	Návrh přepínací nadplochy	58
	4.2.3	Kompenzace statického zesílení	59
	4.2.4	Sledování trajektorie	59
	4.2.5	Speciální tvar přepínací nadplochy	60
	4.2.6	Aplikace návrhu dvoustavového regulátoru	66
	4.3	Shrnutí	73
5		Strategie přepínání dvoustavových regulátorů	75
	5.1	Princip výběru	75
	5.2	Cena řízení	76
	5.3	Algoritmus řízení	76
	5.4	Řízení nájezdu na požadovanou hodnotu	80
	5.5	Algoritmus řízení s nájezdem na požadovanou hodnotu	81
	5.6	Stabilita navržené metody	85
	5.7	Shrnutí	86
6		Aplikace - řízení bojleru s více topnými tělesy	87
	6.1	Řízený systém	87

6.2	Inicializace parametrů	87
6.2.1	Přepínací nadplocha	87
6.2.2	Množina dvoustavových regulátorů	88
6.2.3	Výběr počáteční strategie	88
6.2.4	Návrh rekonstruktoru	91
6.2.5	Návrh sledování rampové funkce	92
6.3	Průběh řízení	93
6.3.1	Řízení na požadovanou hodnotu	93
6.3.2	Řízení se sledováním referenční trajektorie	96
6.4	Diskuse výsledků	96
6.4.1	Přepínací nadplocha	97
6.4.2	Kompenzační zesílení	97
6.4.3	Volba počáteční strategie	98
6.4.4	Množina vhodných regulátorů	98
6.4.5	Rekonstruktor stavu	98
7	Závěr	101
7.1	Shrnutí výsledků disertační práce	101
7.2	Cíle dalšího výzkumu a vývoje	102
	Literatura	103
	Seznam obrázků	107
	Seznam tabulek	109
	Seznam publikací	110

Anotace

Tato práce se zabývá problematikou řízení systémů s více binárními vstupy a jedním výstupem, kde je pro přepínání binárních vstupů použitý algoritmus řízení s klouzavým režimem. V práci jsou ukázány nedostatky návrhu řízení s využitím obecné teorie řízení s klouzavým režimem pro tento typ systému, především z hlediska efektivního využívání a synchronizace jednotlivých vstupů. Práce si klade za cíl tyto nedostatky odstranit modifikováním návrhu řízení s klouzavým režimem tak, aby bylo možné některé vstupy v průběhu řízení fixovat na konstantní hodnotu.

V první části práce je představena třída systémů obsahujících nespojitost ve stavovém prostoru. Detailněji je uvedeno řízení s relé ve zpětné vazbě a jeho specifický případ - klouzavý režim. Pro současnou teorii řízení s klouzavým režimem jsou zde představeny základní definice a věty, které musí takové řízení splňovat. Na příkladech je demonstrováno možné chování takto řízených systémů.

V další části práce je formulován speciální tvar zákona řízení s klouzavým režimem, který přepíná všechny vstupy pomocí skalární přepínací proměnné. Pro navržený zákon řízení jsou ověřeny všechny definice a věty uvedené v první části práce. Navrženým postupem je stanoven nikoliv jeden univerzální zákon řízení, ale celá množina dvoustavových regulátorů, kde některé dvoustavové regulátory umožňují fixování jednoho nebo více vstupů na konstantní hodnotu a jiné spínají všechny vstupy zároveň. Součástí navrženého algoritmu je výběr posloupnosti dvoustavových regulátorů v průběhu řízení, která při zachování kvality řízení minimalizuje spínání nepotřebných vstupů.

Funkce navrženého algoritmu řízení je demonstrována na modelu řízení teploty vody v bojleru, který obsahuje tři topná tělesa o různém výkonu a jedno čidlo teploty.

Annotation

The thesis is focused on the control of multi-input single-output systems, where the inputs are binary and are switched using sliding mode based algorithm. There are demonstrated problems in such control design, mainly effective usage and synchronization of the inputs. The main goal of the thesis is to solve these problems via modification of the sliding mode control design, where one or more inputs can be fixed over time during the control.

The first part of the thesis introduces the class of systems with discontinuity called variable structure systems. In particular, relay control and its specific case sliding mode control is described. The common definitions and theorems are presented, which system with sliding modes must fulfill. The behavior of systems with this type of discontinuous control is demonstrated on basic examples.

In the next part of the thesis there is formulated special sliding mode control law, which is switching all inputs using the same scalar switching variable. All definitions and theorems formulated for the common sliding mode control theory are verified for this new control law. With this approach, there is designed a whole set of switching controllers instead of the single one. Some switching controllers from this set are fixing one or more inputs and the other ones are switching all inputs at once. Therefore, calculation of the sequence of particular used switching controllers is implemented. This sequence selects the controller minimizing switching of unnecessary inputs without impact on the quality of control.

Proposed control algorithm is used for the temperature control of the water heater model containing three heating units and one thermometer.

1 Úvod

1.1 Systémy s více vstupy a jedním výstupem

Řízení systémů s více vstupy a jedním výstupem je problém, který se běžně vyskytuje nejen v současném průmyslu, ale i v domácnostech. Na řízený systém působí zároveň několik vstupů najednou a k dispozici je pouze jedna výstupní veličina obsahující informaci o účinku vstupů na systém. Bez dodatečných informací o řízeném systému je ze změny výstupu velice obtížné identifikovat podíl vlivu jednotlivých vstupů. Teoreticky totiž existuje více možných kombinací vstupů, které vedou k dosažení stejné hodnoty výstupu. Ne všechny kombinace vstupů jsou z hlediska řízení efektivní a hlavní problém spočívá v takové synchronizaci vstupů, která zachová kvalitu řízení a zároveň zajistí minimální náklady na řízení. Speciálně pro systémy s binárními vstupy se řeší úlohu zapínání a vypínání jednotlivých vstupů v průběhu řízení.

Působení několika vstupů na průběh výstupu řízeného systému se vzájemně ovlivňuje a pokud není toto ovlivňování uvažováno již během návrhu zpětné vazby, má nezanedbatelný vliv na chování řízeného systému. První typ vzájemné interakce je působení více vstupů se stejným účinkem na výstup. Taková situace nastává například při ohřívání vody v bojleru Electrolux EWH 80R, který obsahuje až 3 topná tělesa o různém výkonu. Zapnutí všech vstupů způsobí zvyšování teploty vody v bojleru a existuje zde několik možných kombinací vstupů. Vstupy mohou být všechny vypnuté a voda v boileru pomalu chladne nebo mohou být všechny vstupy zapnuté a voda v boileru se ohřívá maximální možnou rychlostí. Další možnosti jsou zapnutí buď jednoho nebo dvou vstupů ze tří, voda se ohřívá v závislosti na jeho/jejich výkonu. Tyto kombinace se mohou samozřejmě během řízení libovolně střídat podle požadavků řídicího algoritmu. Kromě požadavku na dosažení a udržování požadované teploty zde mohou existovat vedlejší požadavky, například minimalizace ceny řízení, omezení počtu současně sepnutých vstupů atd.

Druhý typ vzájemné interakce jsou vstupy s opačným vlivem na výstup. Jedná se například o nejrůznější soustavy s topením a chlazením, kde lze tuto situaci demonstrovat na plastovém extruderu používaném při kontinuálním lisování plastových výrobků. V extruderu se nachází několik nezávisle řízených sekcí. V každé sekci se nachází senzor teploty a dva akční členy: topení a chlazení. Existují zde celkem 4 možnosti kombinací vstupů. Oba vstupy mohou být vypnuté a plastová tavenina postupně chladne. Nebo může být zapnutý pouze jeden z obou vstupů, v případě topení bude teplota taveniny růst, v případě chlazení klesat. Poslední možnost je zapnutí obou vstupů současně, což je případ současného působení vstupů proti sobě. Teplota taveniny se bude měnit podle silnějšího z obou vstupů, nicméně vliv řízení na soustavu je podstatně menší než když je zapnutý pouze jeden vstup a cena řízení je větší. Popsané kombinace vstupů se mohou během řízení opět libovolně střídat.

V obou popsáních úlohách je zřejmý hlavní problém: jak vhodně přepínat vstupy řízeného systému během řízení. Možných posloupností přepínání je mnoho, ale ne všechny vedou k rozumnému řešení. V případě bojleru je možné spínat pouze nejslabší topné těleso, protože má nízkou spotřebu a postačí pro udržení požadované teploty. Nicméně ohřátí vody potrvá déle než při využití všech topných těles. Při ohřevu je vhodnější

zapínat všechna topná tělesa současně a tím rychle dosáhnout požadované teploty vody. V ustáleném stavu to ale znamená velké kolísání teploty okolo požadovaného stavu a velkou spotřebu elektřiny. Při řízení extruderu je teoreticky možné spínat pouze topení a ignorovat aktivní chlazení. Tím se může v určitých situacích řízení zpomalit, protože soustava bude chladnout pouze pasivně. Například při snížení požadované teploty bude chlazení trvat déle.

Přepínání binárních vstupů lze velice snadno realizovat prostřednictvím reléového řízení, respektive jeho speciální formy řízení s klouzavým režimem. Použití obecné teorie řízení s klouzavým režimem pro systémy s více vstupy a jedním výstupem vede k výše popsaným situacím. Cílem této práce je modifikovat algoritmus řízení s klouzavým režimem, aby se minimalizovalo použití kombinací vstupů nevhodných pro řízení a naopak maximalizovalo využití vstupů s nejmenšími nároky na spotřebovanou energii během řízení.

1.2 Přínos disertační práce

V této práci je navržený algoritmus řízení založený na metodě řízení s klouzavým režimem, který pro systémy s více binárními vstupy a jedním výstupem bere při řízení v potaz vzájemné ovlivňování vstupů. Pro přepínání binárních vstupů je formulován speciální tvar zákona řízení s klouzavým režimem přepínající mezi určenými hodnotami vstupů, který umožňuje jak přepínání všech vstupů, tak i fixování některých vybraných vstupů na konstantní hodnotu a přepínání zbylých. Pro tento zákon řízení jsou dokázány základní věty a definice platné obecně pro řízení s klouzavým režimem.

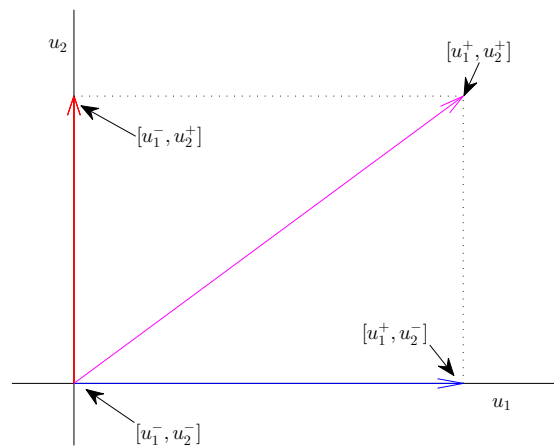
V další části této práce je navržena vlastní metoda výběru fixovaných vstupů v průběhu řízení, která je založená na chování řízení s klouzavým režimem při speciální volbě parametrů přepínání. Navržená metoda řízení je použita pro regulaci obou zmíněných modelů, jak extruderu tak bojleru.

Cílem navrženého algoritmu je eliminování případů neefektivního přepínání, ať už zapínání zbytečně mnoha vstupů nebo současné zapnutí vstupů, které bude mít minimální nebo žádný účinek na výstupní veličinu. Tím dojde ke snížení spotřeby energie řízeného systému při zachování kvality řízení. Díky použití řízení s klouzavým režimem je takto navržený algoritmus rovněž robustní vůči perturbacím, ať již v řízeném systému nebo vlivem externích poruch.

1.3 Motivace

Jako motivační příklad lze využít výše zmíněný extruder. Jedná se o systém se dvěma binárními vstupy u_1, u_2 , kde vstup u_1 spíná topení a vstup u_2 chlazení. Cílem řízení tohoto systému je nájezd a následná regulace teploty v extruderu na požadovanou hodnotu. Oba vstupy řízeného systému jsou dvoustavové a během řízení se může střídát omezený počet kombinací vstupů $[u_1, u_2]$, kde $u_i \in \{u_i^-, u_i^+\}$, $i = 1, 2$, u_i^- označuje vypnutý a u_i^+ zapnutý vstup. Celkem se jedná o čtyři možné kombinace sepnutí vstupů, které jsou ilustrativně znázorněné na grafu 1.1.

Při řízení tohoto systému dvoustavovým regulátorem je výstup takového regulátoru přepínáný mezi dvěma různými dvojicemi $[u_{1,1}, u_{2,1}]$, $[u_{1,2}, u_{2,2}]$, kde $u_{i,j} \in \{u_i^-, u_i^+\}$,



Graf 1.1: Grafická reprezentace vektoru vstupu pro systém se dvěma vstupy

$i = 1, 2, j = 1, 2$. Celkem se jedná o šest možných přepínaných dvojic jež odpovídají hranám a úhlopříčkám v obdélníku na grafu 1.1, kde každá dvojice přísluší samostatnému dvoustavovému regulátoru. Cílem úlohy je nejen navrhnout dvoustavový regulátor přepínající jednu konkrétní kombinaci vstupů, ale navrhnout celou množinu dvoustavových regulátorů pro všechny "rozumné" kombinace přepínání (každý regulátor bude přepínat jinou kombinaci vstupů) a strategii přepínání mezi jednotlivými regulátory v průběhu řízení podle stavu řízeného systému.

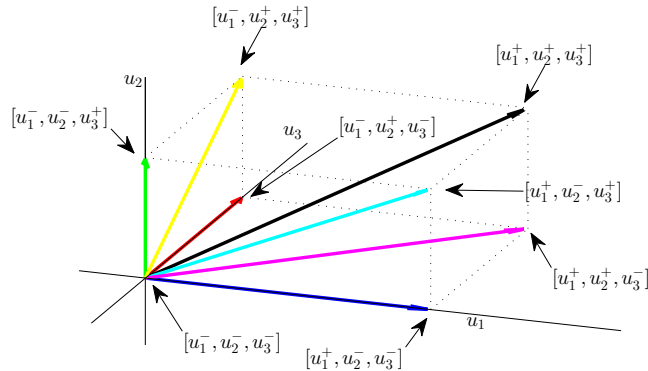
Při změně požadované hodnoty by postupně pracovaly různé dvoustavové regulátory s různými dvojicemi možných výstupů. Například pro zvýšení požadované teploty by nejprve pracoval regulátor s dvojicí výstupů $[u_1^-, u_2^-]$, $[u_1^+, u_2^-]$ (spínání topení a vypnuté chlazení), dále při přibližování k požadované hodnotě $[u_1^+, u_2^-]$, $[u_1^-, u_2^+]$ ("topit a nechladit" a "netopit a chladit") a v blízkém okolí požadované hodnoty opět s dvojicí $[u_1^-, u_2^-]$, $[u_1^+, u_2^-]$.

Řízený systém může mít i více než dva binární vstupy. V obecném případě to znamená rozšíření množiny kombinací vstupů na $[u_1, u_2, \dots, u_m]$, kde m značí počet vstupů. Ostatní vlastnosti jsou stejné jako pro systém se dvěma vstupy. Dvoustavových regulátorů je příslušně větší počet, pro systém třetího řádu jsou ilustrativně znázorněné na grafu 1.2.

Dvoustavový regulátor přepínající mezi dvěma hodnotami může být navržen různě, v této práci je realizován prostřednictvím řízení s klouzavým režimem. Požadovaným výsledkem je zdokonalený regulátor, který pomocí vhodného výběru posloupnosti dvoustavových regulátorů a vlastního přepínání jejich výstupů zvyšuje kvalitu a robustnost řízení systému.

1.4 Členění disertační práce

Úvod. Úvodní kapitola obsahuje ideový popis úlohy řízení systému s více binárními vstupy a jedním výstupem. Na dvou příkladech z praxe jsou ukázány problematické



Graf 1.2: Grafická reprezentace vektoru vstupu pro systém se dvěma vstupy

situace, které se při řízení těchto systémů vyskytují. Dále je zde popsána motivace pro řízení takové úlohy a je naznačeno očekávané řešení.

Teorie řízení s klouzavým režimem. Pro lepší seznámení čtenáře s problematikou řízení s klouzavým režimem je zahrnuta přehledová kapitola popisující návrh tohoto řízení. Nejprve je zde uvedena stručná historie řízení s klouzavým režimem a publikace zabývající se řízením systémů s více vstupy pomocí této metody řízení. Většina těchto publikací se specificky úlohou řízení s více vstupy a jedním výstupem nezabývá. Dále jsou uvedeny základní definice a věty teorie řízení s klouzavým režimem. Na jednoduchých příkladech je demonstrován vlastní návrh řízení a použitelnost klouzavého režimu je rozšířena i do oblasti rekonstrukce stavu a sledování referenční trajektorie.

Formulace problémů a cíle disertační práce. Po uvedení základních pojmů a vztahů z řízení s klouzavým režimem je možné exaktně formulovat řešenou úlohu a cíle disertační práce.

Modifikace řízení s klouzavým režimem. V této kapitole je navržený dvoustavový regulátor přepínající mezi dvěma různými kombinacemi vstupů na základě řízení s klouzavým režimem. Pro navržený zákon řízení je dokázáno, že splňuje požadavky kladené na řízení s klouzavým režimem.

Výběr posloupnosti dvoustavových regulátorů. Pátá kapitola se zabývá posloupností přepínaných dvoustavových regulátorů. Nejprve je uveden příklad uvažování lidského operátora, poté volba založená na fuzzy logice a prediktivním řízením. V další části této kapitoly je navržen nový algoritmus volby posloupnosti dvoustavových regulátorů založený na vlastnostech řízení s klouzavým režimem.

Aplikace - řízení bojleru s více topnými tělesy. V této kapitole je navržené řízení aplikováno na model bojleru s třemi topnými tělesy a jedním senzorem teploty a diskutována použitelnost navržené metody.

2 Přípravná kapitola - řízení s klouzavým režimem

V první části kapitoly je nejprve stručně popsána historie řízení s klouzavým režimem. Poté je představeno reléové řízení a detailněji jeho speciální část, řízení s klouzavým režimem. Dále jsou uvedeny vztahy pro návrh rekonstruktoru stavu s pomocí klouzavého režimu a řízení na požadovanou hodnotu. Na závěr je uveden přehled současných metod řízení využívajících klouzavý režim.

2.1 Stručná historie řízení s klouzavým režimem

První vědecké práce o řízení s klouzavým režimem se objevily v první polovině 20. století v tehdejší Sovětské Svazu v souvislosti s výskytem rychlých oscilací v reléových systémech. Tento jev byl z počátku považován za poruchu, neboť způsoboval velmi rychlé opotřebování relé a tím pádem i vysokou poruchovost systému. Z toho důvodu byly první studie zaměřeny především na omezení tohoto chování. Při analýze rychlých oscilací však byla objevena i pozitiva takového řízení, především odolnost vůči perturbacím řízeného systému a přesnost řízení, a začaly se zkoumat i jiné úlohy řízení s rychlými oscilacemi. Místo způsobů odstranění se vědci zaměřili naopak na metody syntézy a využití tohoto jevu v automatickém řízení. Mezi první publikace se řadí díla Tzypkina [46] a Emelyanova [12], kde jsou popsány základní vlastnosti systémů s proměnnou strukturou, tzv. "Variable structure systems". Jedná se o systémy obsahující nespojitosti, kde je struktura systému na každé straně nespojitosti popsána jinou diferenciální rovnicí. Nespojitost v systému může být buď "de nature", nebo uměle zanesena prostřednictvím zpětné vazby. Při řízení pak může docházet k přepínání mezi těmito odlišnými strukturami, v krajním případě může být přepínání nekonečně rychlé. Tento jev byl popsán jako klouzavý režim, neboť za určitých podmínek se stav systému pohybuje, "klouže", po nespojitosti v systému.

První významná díla s tematikou řízení s proměnnou strukturou, která se rozšířila za hranice SSSR, jsou publikace Itkise [20] zabývající se řídicími systémy s proměnnou strukturou a Utkina [47] o systémech s proměnnou strukturou s klouzavými režimy. V. I. Utkin se dále věnoval výzkumu řízení s klouzavými režimy a získané poznatky shrnul v publikaci Sliding modes in control and optimization [48], která vyšla v roce 1987 v Sovětské svazu v ruštině a o pět let později anglicky. Tato publikace je považována za jednu z fundamentálních v oblasti řízení s klouzavým režimem a je v ní detailně popsána metoda analýzy klouzavých režimů prostřednictvím tzv. ekvivalentního řízení. Metoda ekvivalentního řízení byla vypracována na základě řešení diferenciálních rovnic s nespojitostmi ve vstupní veličině metodou tzv. diferenciálních inkluzí, která je detailně popsána v publikaci Phillipova [14].

Součástí návrhu řízení s klouzavým režimem je převedení stavového popisu řízeného systému do tzv. regulární formy. Jedná se o transformaci původního řízeného systému do nových souřadnic, kde má matice \mathbf{B} tolik nenulových řádků, kolik je její hodnota. Pro SISO systémy má v regulární formě matice řízení jeden nenulový řádek, pro MIMO systémy pak tolik, kolik je dimenze vektoru vstupu. Tato problematika je uvedena rovněž v již zmíněném díle Utkina [48], dále je rozpracována např. v článku [38].

V současnosti je k analýze klouzavých režimů stále využívána metoda popisující

ekvivalentní řízení v podobě, jak byla popsána Utkinem [48]. Ideový základ této metody spočívá v chápání ekvivalentního řízení jako střední hodnoty nekonečně rychlého přepínání na ploše nespojitosti. Dosazením takové střední hodnoty do stavového popisu systému se vypočítá matematický popis chování systému v klouzavém režimu. Souhrn této metody analýzy klouzavých režimů je uveden jako přehledová kapitola ve sborníku [16].

Problematikou řízení s klouzavým režimem se zabývají i další současné disertační práce, jednou z nich je práce Nguyena [36], která má charakter přehledové práce s příklady řízení. Jsou zde jednotlivě rozebrány rozdíly v návrhu řízení s klouzavým režimem na lineární a nelineární systémy, spojitý a diskrétní stavový popis. Dále je zde naznačena teorie řízení MIMO systémů, autor zde prezentuje metodu decouplingu MIMO systému na více SISO systémů a klouzavý režim je navržen pro řízení jednotlivých rozvazbených subsystémů. V závěru práce je uvedena teorie rekonstrukce stavu s využitím klouzavého režimu.

Další disertační práci popisující řízení s klouzavým režimem je publikace G. Monseese [35], kde je popsána teorie analýzy metodou ekvivalentního řízení prostřednictvím maticového popisu v podobě, jak ji uvádí Utkin, dále je tato teorie rozšířena na diskrétní systémy. V závěru práce je uvedeno několik příkladů řízení diskrétních systémů pomocí klouzavého režimu. Problematika řízení MIMO systémů není v této práci detailně analyzována, na MIMO systémy lze aplikovat pouze obecný návrh klouzavého režimu prostřednictvím maticového popisu.

Z hlediska aplikace je v současnosti řízení s klouzavým režimem využíváno především pro řízení elektromechanických soustav, jako jsou roboty a manipulátory. Dále se řízení s klouzavým režimem používá v kombinaci s jinými metodami řízení, např. adaptace zesílení vstupu nebo adaptace přepínací nadplochy. Metoda adaptace zesílení při řízení robotického manipulátoru je popsána v článku [37]. Využití spojení metod fuzzy regulace s klouzavým režimem je navrženo v článku [39]. Řízení s klouzavým režimem se kombinuje s jinými metodami řízení především pro spojení výhod spojitého řízení a vložené nelinearity. Typicky se jako spojitě řízení používá ekvivalentní řízení a vložená nelinearita zaručuje robustní odregulování poruch a perturbací řízeného systému.

2.2 Reléové řízení

2.2.1 Systémy s proměnnou strukturou

Jak bylo řečeno v úvodu, řízení s klouzavým režimem vychází z řízení systémů s proměnnou strukturou.

Definice 2.1

Systém s proměnnou strukturou je nespojitý nelineární systém ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, t) \tag{2.1}$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je stavový vektor, $t \in \mathbb{R}$ je čas a $\varphi(\mathbf{x}, t)$ je po částech spojitá funkce. Vzhledem k charakteru funkce $\varphi(\mathbf{x}, t)$ má tento systém v různých podprostorech stavového prostoru různé dynamické chování. Podprostory s různým chováním jsou odděleny nespojitostí [47].

Nespojitost se v systému může vyskytovat přirozeně nebo může být vložena prostřednictvím zpětné vazby.

Příklad 2.1

Jako příklad systému s přirozenou nespojitostí je možné uvést systém se stavovým popisem

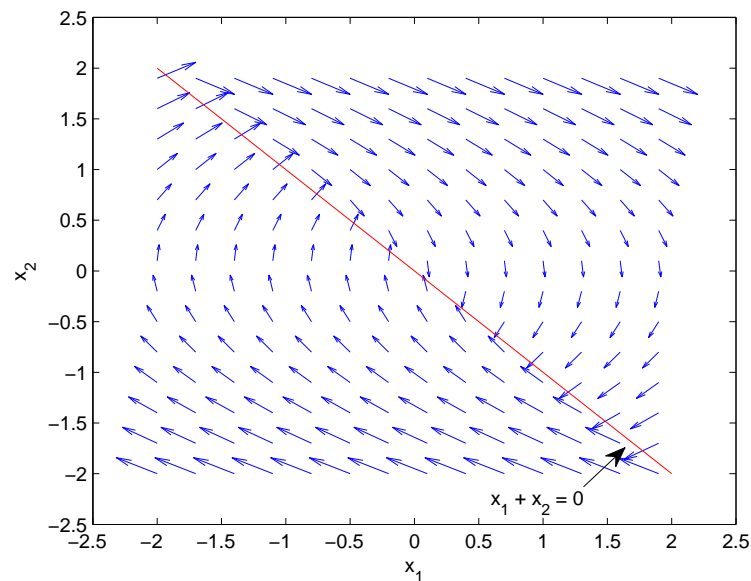
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\text{sgn}(x_1 + x_2)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Stavová rovina tohoto systému je rozdělena nespojitostí popsanou rovnicí $x_1 + x_2$, viz obrázek 2.1. Na obrázku je vidět, že na nespojitosti dochází ke skokové změně vektorového pole a systém má proměnnou strukturu.

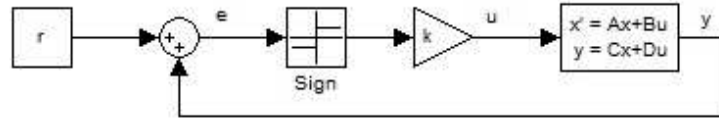
Druhá možnost realizace systému s proměnnou strukturou je vložení nespojitosti (například relé) prostřednictvím zpětné vazby. Relé ve zpětné vazbě se používá pro svou robustnost, relativně jednoduchý návrh a široký rozsah použití od regulace přes sledování trajektorie k sledování modelu a rekonstrukci stavu. Další z nesporných výhod této metody je dosažení ustáleného stavu v konečném čase, čehož lze dosáhnout právě díky nelineární zpětné vazbě.

2.2.2 Chování relé ve zpětné vazbě

Úloha řízení systému s jedním vstupem a jedním výstupem s ideálním relé ve zpětné vazbě je formulována následujícími vztahy.



Graf 2.1: Vektorové pole systému (2.2)


Graf 2.2: Regulační smyčka

Je dán lineární t-invariantní systém n-tého řádu ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (2.3)$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Systém (2.3) je řízen prostřednictvím stavové zpětné vazby, která obsahuje ideální relé (viz obr. č. 2.2). Vstup u je určen zákonem řízení

$$u = k \cdot \text{sgn}(\sigma) \quad (2.4)$$

Funkční hodnota funkce $\text{sgn}(\sigma)$ je dána předpisem

$$\text{sgn}(\sigma) \begin{cases} = 1, & \sigma > 0; \\ = -1, & \sigma < 0; \\ \in [-1, 1], & \sigma = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

a σ je přepínací proměnná definovaná vztahem

$$\sigma = e = r - y = -\mathbf{C}\mathbf{x}|_{r=0} \quad (2.6)$$

Konstanta $k \in \mathbb{R}^+$ vyjadřuje rozsah vstupního signálu, např. pro $u \in \langle -5, 5 \rangle$ je $k = 5$, r reprezentuje sledovanou požadovanou hodnotu, resp. referenční funkci. Oblast ve stavovém prostoru definovaná rovnicí $\sigma = 0$ se nazývá přepínací nadplocha. Po uzavření zpětné vazby obsahující relé mohou nastat tři různé případy chování uzavřeného systému. Tyto případy jsou demonstrovány na jednoduchých příkladech.

Příklad 2.2

První příklad je řízení systému s relativním řádem $r = 1$. Je dán řízený systém prvního řádu

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)} \quad (2.7)$$

Stavová reprezentace systému (2.7) je ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + u \\ y &= x\end{aligned}\quad (2.8)$$

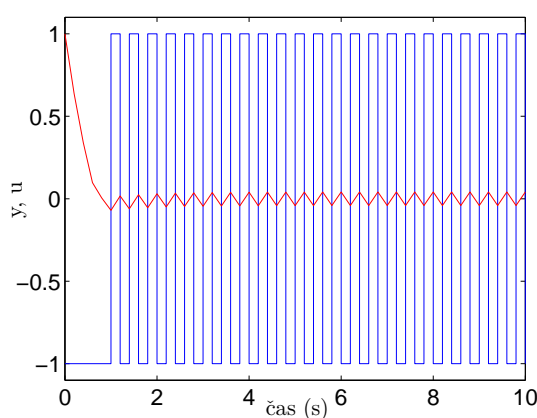
kde $x \in \mathbb{R}$ je stav řízeného systému, $u \in \mathbb{R}$ je vstup a $y \in \mathbb{R}$ je výstup. Dále je definovaná zpětná vazba podle (2.4) (pro $k = 1$, $r = 0$).

$$u = \text{sgn}(-y) = -\text{sgn}(y) \quad (2.9)$$

Uzavřením zpětné vazby vznikne systém s proměnnou strukturou

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - \operatorname{sgn}(y) \\ y &= x\end{aligned}\quad (2.10)$$

Výstup řízeného systému y a řízení u jsou znázorněny na obr. č. 2.3 pro simulaci z nenulové počáteční podmínky $x_0 = 1$ a periodu vzorkování $T_s = 0.2$ s. Výstup y (přepínací proměnná) řízeného systému po přiblížení k přepínací nadploše začne okolo přepínací nadplochy ($y = 0$) periodicky oscilovat. Z obrázku je zřejmé, že tyto oscilace jsou způsobeny pravidelným přepínáním řízení.



Graf 2.3: Odezva systému (červeně), řízení (modře)

Druhý simulační experiment pro tento řízený systém vychází ze stejné počáteční podmínky $x_0 = 1$, ale s menší periodou vzorkování $T_s = 0.01$ s. Odezva tohoto řízení je na obr. č. 2.4. Chování výstupu řízeného systému je podobné jako při simulaci s vyšší periodou vzorkování. Na detailu (obr. č. 4(b)) jsou zobrazeny oscilace výstupu okolo přepínací nadplochy a pravidelné přepínání řízení. Při spojitě realizaci regulační smyčky může dojít k teoreticky nekonečně rychlému přepínání řízení. Chování demonstrované v tomto příkladu, kdy přepínací proměnná "klouže" po přepínací nadploše při nekonečně rychlém přepínání řízení, se nazývá *klouzavý režim*.

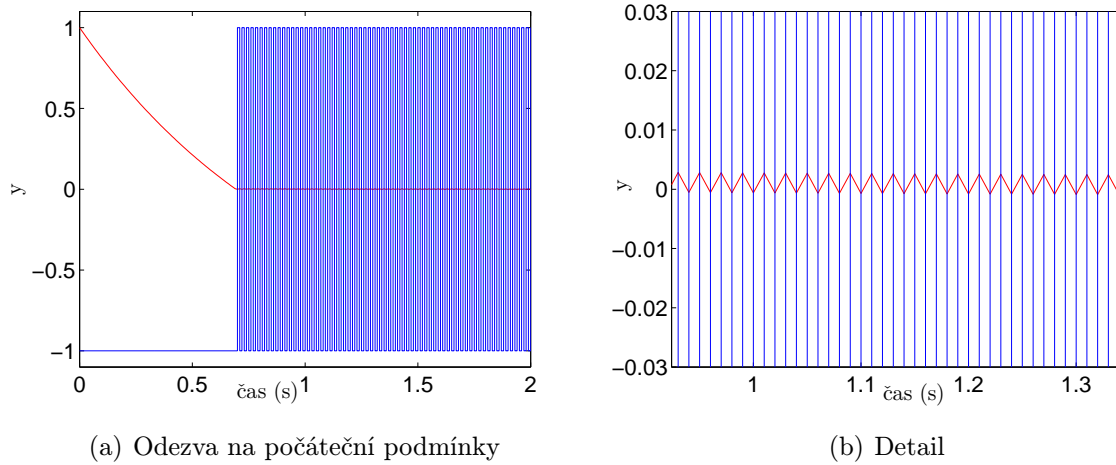
Příklad 2.3

Druhý příklad je řízení systému s relativním řádem $r = 2$. Je dán řízený systém druhého řádu.

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (2.11)$$

Stavová reprezentace je ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}\quad (2.12)$$



Graf 2.4: Výstup řízeného systému (2.10) (červeně), řízení (modře) pro periodu vzorkování $T_s = 0.01s$

Po dosazení do vztahu (2.4) bude zákon řízení tohoto systému (pro $k = 1$, $r = 0$)

$$u = \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(-y) = \text{sgn}(-x_1) = -\text{sgn}(x_1) \quad (2.13)$$

Simulace odezvy systému je provedena z nenulových počátečních podmínek $x_{10} = 1$, $x_{20} = 0$. Na obr. č. 2.5 jsou znázorněny výstup systému y , řízení u a trajektorie systému ve fázové rovině. Přepínací nadplocha je určena rovnicí $x_1 = 0$. V tomto příkladu se rovněž objevuje rychlé přepínání řízení u . O klouzavý režim se ale nejedná, protože stav systému nesetrvává na přepínací nadploše $y = x_1 = 0$, viz obr. č. 2.5. Výsledná trajektorie ve stavovém prostoru se skládá z částí trajektorií dvou subsystémů:

- Pro $\sigma > 0$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.14)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 1$$

- Pro $\sigma < 0$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.15)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 1$$

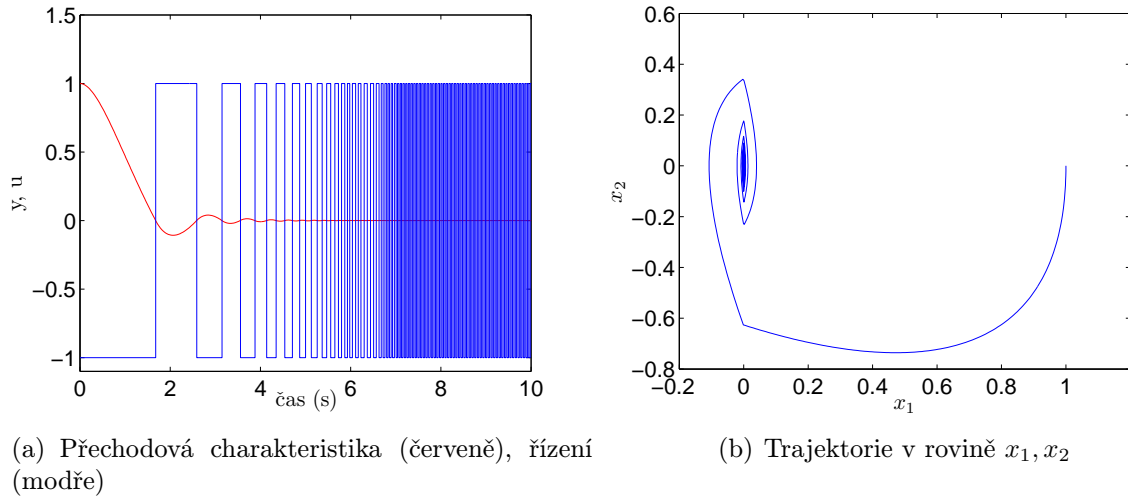
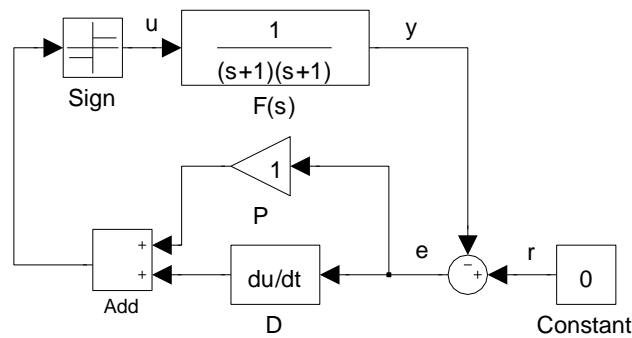
Výsledná trajektorie vzniklá složením trajektorií těchto subsystémů se s rostoucím časem limitně blíží k nule.

Přepínací nadplocha může být upravena, aby klouzavý režim nastal, přidáním PD članku před relé. Regulační smyčka systému (2.12) řízeného zpětnou vazbou obsahující PD článek a relé je zobrazena na obr. č. 2.6. Přenos ideálního PD članku s obecnými návrhovými parametry je

$$F_{PD}(s) = k_p + k_d s \quad (2.16)$$

Laplaceův obraz přepínací funkce σ na výstupu PD članku je součin přenosu (2.16) a Laplaceova obrazu regulační odchylky e .

$$\sigma(s) = (k_p + k_d s)e(s) \quad (2.17)$$


Graf 2.5: Trajektorie řízeného systému (2.12)

Graf 2.6: Regulační smyčka s PD článkem ve zpětné vazbě

Přepínací proměnná na vstupu relé σ je dána inverzní Laplaceovou transformací rovnice (2.17)

$$\sigma = k_p e + k_d \dot{e} \quad (2.18)$$

Upravená přepínací proměnná (2.18) má po dosazení z řízeného systému tvar

$$\sigma = k_p e + k_d \dot{e} = -k_p y - k_d \dot{y} = -k_p x_1 - k_d x_2 \quad (2.19)$$

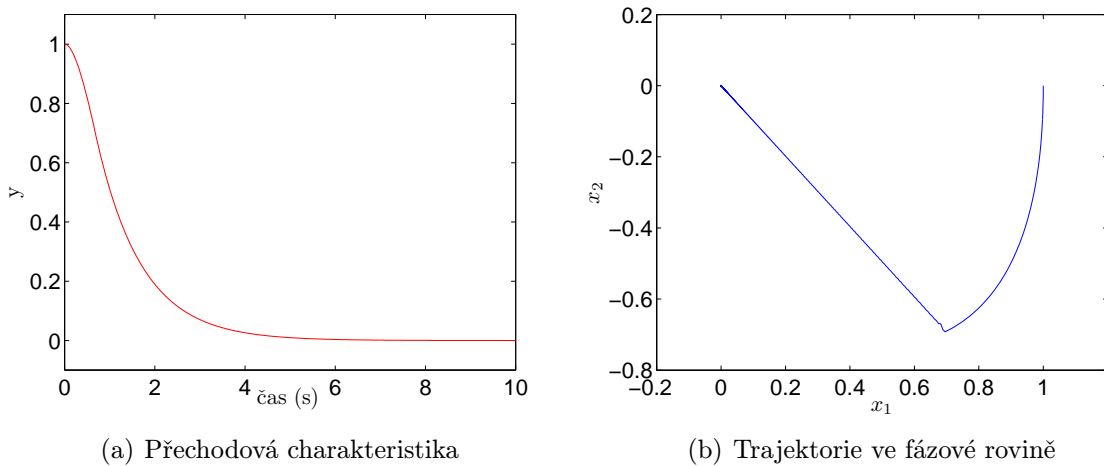
Přechodová charakteristika a trajektorie systému ve fázové rovině jsou znázorněny na obr. č. 2.7. Systém je řízen z počátečních podmínek $x_{10} = 1, x_{20} = 0$ s periodou vzorkování $T_s = 0.01$ s a parametry PD článku $k_p = 1, k_d = 1$. Výstup systému se na rozdíl od řízení bez PD článku ve zpětné vazbě bez překmitu ustálí na nule a stav systému po dosažení přepínací nadplochy (2.19) klouže do ustáleného stavu, nastal klouzavý režim.

Tvarováním přepínací nadplochy, zde parametrů PD článku, lze do určité míry tvarovat i přechodovou charakteristiku. Protože přepínací nadplocha je podle (2.19) ve tvaru

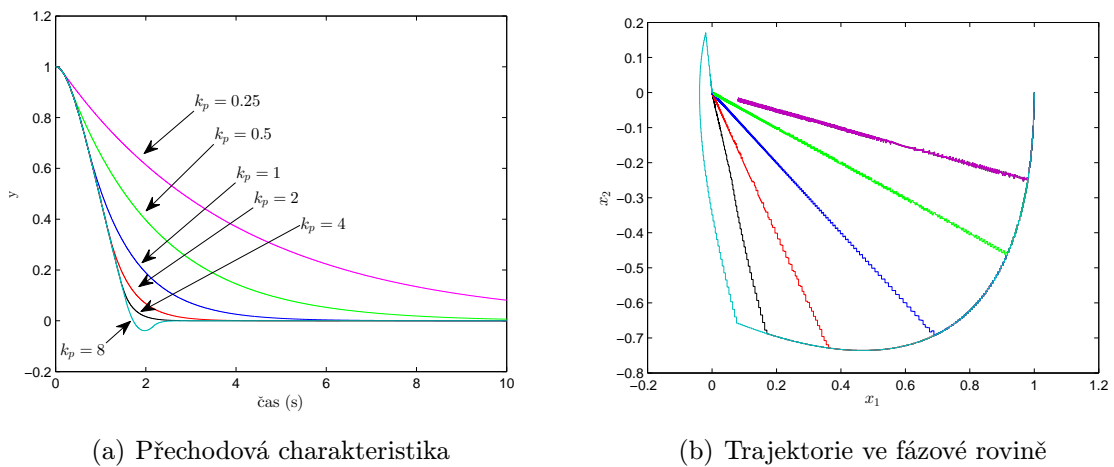
$$\sigma = -k_p x_1 - k_d x_2 = 0 \quad (2.20)$$

je možné jeden parametr (např. k_d) zafixovat a sklon přepínací proměnné určit změnou druhého parametru (např. k_p). Průběhy řízení, kdy $k_d = 1$ a k_p se mění, jsou zobrazeny na obr. č. 2.8.

Ve všech případech nastává klouzavý režim, stav systému klouže po přepínací nadploše k ustálenému stavu. Přejímová charakteristika se ustálí tím rychleji, čím větší je poměr k_p/k_d . Pokud je tento poměr příliš velký, chování se změní; v případě $k_p = 8$ klouzavý režim nenastává při prvním průchodu přepínací nadplochou a přejímová charakteristika podkmitává ustálený stav. Jak je vidět, klouzavý režim existuje v obecném případě pouze na části přepínací nadplochy, nikoliv na celé nadploše.



Graf 2.7: Trajektorie řízeného systému 2.8 s PD článkem ve zpětné vazbě



Graf 2.8: Trajektorie řízeného systému 2.8 s PD článkem ve zpětné vazbě

Příklad 2.4

V tomto příkladu se řídí systém s relativním řádem $r > 2$. Je dán systém třetího řádu

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (2.21)$$

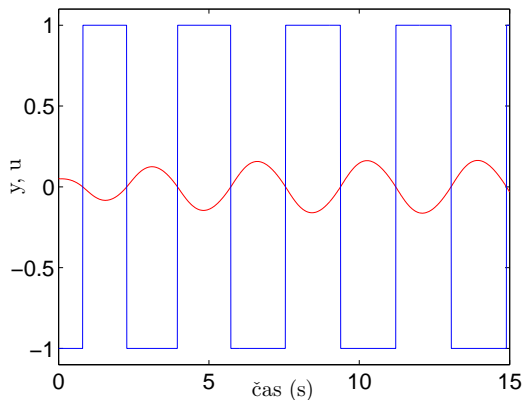
Stavová reprezentace je ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.22)$$

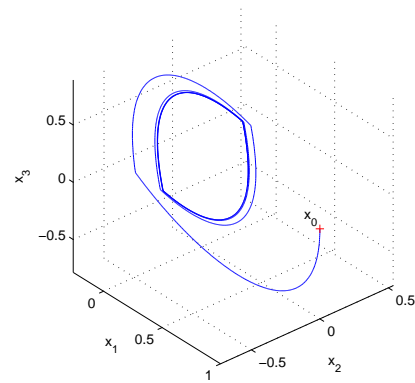
Po dosazení do vztahu (2.4) bude zákon řízení tohoto systému (pro $k = 1$, $r = 0$)

$$u = \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(-y) = \text{sgn}(-x_1) = -\text{sgn}(x_1) \quad (2.23)$$

Systém je řízen z počátečních podmínek $x_{10} = 1$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = 0$. Na obr. č. 2.9 jsou znázorněny výstup systému y , řízení u a trajektorie systému ve stavovém prostoru. Na výstupu řízeného systému se objevily periodické kmity a stav systému se ustálil na mezním cyklu.



(a) Přečtová charakteristika (červeně), řízení (modře)



(b) Trajektorie ve stavovém prostoru

Graf 2.9: Trajektorie řízeného systému (2.22), (2.23)

2.3 Klouzavý režim

V předchozí kapitole je demonstrováno, že pro některé systémy existuje za určitých podmínek klouzavý režim. V této kapitole budou podrobně popsány jeho vlastnosti. K tomu je potřeba klouzavý režim definovat.

Definice 2.2

Klouzavý režim je taková část trajektorie systému (2.3) řízeného zpětnou vazbou (2.4), (2.5), která leží na přepínací nadploše (2.6) a zároveň zde směřuje vektorové pole na obou stranách přepínací nadplochy směrem k nadploše (dochází k nekonečně rychlému přepínání relé).

2.3.1 Existence klouzavého režimu

Na základě definice klouzavého režimu 2.2 je stanovena podmínka existence klouzavého režimu. Aby existoval neprázdný klouzavý režim, musí vektorové pole na obou stranách přepínací nadplochy směřovat k přepínací nadploše. Pro zápornou hodnotu přepínací proměnné $\sigma < 0$ musí σ růst (mít kladnou derivaci), aby dosáhla přepínací nadplochy $\sigma = 0$, a naopak.

Věta 2.1. Existence klouzavého režimu

Klouzavý režim systému (2.3) řízeného zpětnou vazbou (2.4), (2.5), (2.6) je neprázdný právě tehdy, když platí

$$\sigma \dot{\sigma} < 0 \quad (2.24)$$

Důkaz 2.1

Věta 2.1 lze dokázat analýzou stability systému pomocí druhé Ljapunovovy metody. Pro systém (2.3) je zvolena Ljapunovova funkce ve tvaru

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.25)$$

Funkce (2.25) je pozitivně definitní a nulová je pouze pro $\sigma = 0$, což splňuje první dvě podmínky Ljapunovovy funkce. Její derivace je

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma \dot{\sigma} \quad (2.26)$$

Do (2.26) se dosadí z (2.6) za přepínací proměnnou σ . Referenční trajektorie r je uvažována nulová.

$$\dot{V}(\sigma) = \mathbf{C}\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{B}u \quad (2.27)$$

Do (2.27) se dosadí zákon řízení (2.4).

$$\dot{V}(\sigma) = \mathbf{C}\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} - k|\mathbf{C}\mathbf{x}| \cdot \mathbf{C}\mathbf{B} \quad (2.28)$$

Derivace funkce (2.28) se rovná nule pouze pro $\sigma = \mathbf{C}\mathbf{x} = 0$, čímž je splněna další podmínka na Ljapunovovu funkci. Poslední podmínka je negativní definitnost funkce (2.26). Derivace Ljapunovovy funkce (2.26) bude negativně definitní právě tehdy, když

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} - k|\mathbf{C}\mathbf{x}| \cdot \mathbf{C}\mathbf{B} < 0 \quad (2.29)$$

Pokud je tato podmínka splněna, stav systému setrvá na přepínací nadploše (po jejím dosažení) a nastane klouzavý režim. V opačném případě stav systému přepínací nadplochu opustí. Tuto podmínku lze dále rozvinout.

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} < k|\mathbf{C}\mathbf{x}| \cdot \mathbf{C}\mathbf{B} \quad (2.30)$$

Vztah (2.30) je třeba analyzovat ve 2 případech v závislosti na znaménku součinu $\mathbf{C}\mathbf{x}$.

$$\mathbf{C}\mathbf{x} > 0 \Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} < k\mathbf{C}\mathbf{B} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x} < 0 \Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} > -k\mathbf{C}\mathbf{B} \quad (2.32)$$

Aby byl klouzavý režim neprázdný, musí být zároveň splněny obě nerovnice (2.31), (2.32), což platí pouze pro $\mathbf{C}\mathbf{B} > 0$ (konstanta k je definovaná kladná). Splnění této podmínky implikuje splnění věty (2.1) a existenci neprázdného klouzavého režimu. Množina stavů, pro které jsou nerovnice (2.31), (2.32) splněny, tvoří klouzavý režim. Podmínka existence klouzavého režimu $\mathbf{C}\mathbf{B} > 0$ platí obecně pro všechny lineární systémy řízené zákonem řízení (2.4).

Věta 2.2.

Klouzavý režim systému (2.3) řízeného zákonem řízení (2.4), (2.6) může nastat pouze u systémů s relativním řádem $r = 1$.

Důkaz 2.2

Věta 2.2 je přímým důsledkem předcházejícího důkazu 2.1. Předpokládejme řízený systém popsany v normální formě pozorovatelnosti se stavovými maticemi ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (2.35)$$

kteří odpovídají přenosové funkci

$$F(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.36)$$

V tomto případě bude podmínka klouzavého režimu $\mathbf{C}\mathbf{B} > 0$ splněna pouze tehdy, když $b_1 > 0$. Pro $b_1 \leq 0$ není splněna čtvrtá Ljapunovova podmínka a tedy neexistuje klouzavý režim. Protože relativní řád systému je invariantní vůči stavové transformaci, platí věta 2.2 pro libovolnou formu stavového popisu.

2.3.2 Dynamika v klouzavém režimu

Dynamické chování systému řízeného pomocí relé lze obecně rozdělit na dvě fáze. První fáze se nazývá přibližovací, kdy stav řízeného systému není na přepínací nadploše. V této fázi je chování systému jednoznačně popsáno a lze spočítat exaktní průběh stavové trajektorie. Například v obrázku č. 2.8 má trajektorie v přibližovací fázi stejný průběh, dokud se stav systému nedostane na přepínací nadplochu.

Druhá fáze je vlastní klouzavý režim. Popsat chování v klouzavém režimu není triviální. Exaktní matematické řešení diferenciální rovnice popisující řízený systém nelze spočítat obvyklými metodami, protože vstupní signál není Lipschitzovská funkce kvůli nekonečně rychlému přepínání relé. Řešením takových úloh se zabývá teorie řešení diferenciálních rovnic s nespojitou pravou stranou prostřednictvím diferenciálních inkluzí [14]. Diferenciální inkluze je formulována ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x}) \quad (2.37)$$

Zadání diferenciální inkluze na množině $K \subset \mathbb{R}^n$ znamená zadat v každém bodě \mathbf{x} množiny K množinu vektorů rychlosti $F(\mathbf{x})$. Diferenciální inkluzi lze chápat jako zobecnění diferenciálních rovnic, neboť pro jednoznačné zobrazení $F(\mathbf{x})$ přejde inkluze na diferenciální rovnici. Řešením diferenciální inkluze je každá spojitá funkce, která splňuje (2.37). Použitím teorie diferenciálních inkluzí se zkoumá řešení dynamiky v klouzavém režimu během přibližování stavu řízeného systému k přepínací nadploše z obou stran za předpokladu, že požadované řešení je tečné na přepínací nadplochu [48]. Výsledkem této úlohy je výpočet spojitěho řízení, které aproximuje přepínání relé v klouzavém režimu. Požadavek na toto řízení je, aby systém setrval v klouzavém režimu stejným způsobem jako při použití relé.

Definice 2.3

Spojitě řízení u_{eq} nahrazující v klouzavém režimu rychlé přepínání relé tak, že stav systému setrvává v klouzavém režimu, se nazývá ekvivalentní řízení. Ekvivalentní řízení u_{eq} se vypočítá z rovnice

$$\dot{\sigma} = 0|_{u_{eq}=\text{sgn}\sigma} \quad (2.38)$$

Obecný vztah pro výpočet ekvivalentního řízení se vypočítá dosazením rovnic (2.3), (2.4) a (2.6) do předchozí rovnice

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}k\text{sgn}\sigma) = 0 \Rightarrow u_{eq} = - (k\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}|_{u_{eq}=\text{sgn}\sigma} \quad (2.39)$$

Věta 2.3.

Pro každou hodnotu vektoru stavu \mathbf{x} ležící v klouzavém režimu S platí

$$|u_{eq}| = |(k\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}| < 1 \quad (2.40)$$

Množina hodnot vektoru stavu \mathbf{x} , které splňují tuto podmínku, tvoří klouzavý režim.

Důkaz 2.3

Funkce signum je funkce s definičním oborem $D = \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H \in (-1; 1)$, viz (2.5). Protože ekvivalentní řízení (2.39) má nahradit relé v klouzavém režimu, nemůže nabývat hodnot mimo obor hodnot této funkce ani jeho krajních hodnot, které funkce (2.4) nabývá pouze pro $\sigma \neq 0$.

Dynamické chování systému v klouzavém režimu se spočítá dosazením vypočítaného ekvivalentního řízení do stavového popisu řízeného systému.

Definice 2.4

Popis chování systému v klouzavém režimu se nazývá ekvivalentní dynamika¹. Získá se dosazením ekvivalentního řízení do stavového popisu řízeného systému.

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{eq}} + \mathbf{B}u_{\text{eq}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{CB})^{-1}\mathbf{CA})\mathbf{x}_{\text{eq}} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{CB})^{-1}\mathbf{C})\mathbf{A}}_{\mathbf{A}_{\text{eq}}}\mathbf{x}_{\text{eq}} \quad (2.41)$$

Vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky \mathbf{A}_{eq} určují dynamické chování v klouzavém režimu.

2.3.3 Stabilita v klouzavém režimu

Aby byl systém v klouzavém režimu stabilní, musí mít všechna vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky \mathbf{A}_{eq} reálnou složku v levé komplexní polorovině. Protože matice \mathbf{A}_{eq} je závislá na maticích $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ řízeného systému, bude na nich závislá i stabilita v klouzavém režimu.

Věta 2.4.

Klouzavý režim je nestabilní právě tehdy, když řízený systém má alespoň jednu nestabilní nulu.

Důkaz 2.4

Věta 2.4 bude dokázána opět pomocí normální formy pozorovatelnosti dosazením matic (2.33), (2.34), (2.35) do matice ekvivalentní dynamiky (2.41).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{eq}} &= (\mathbf{I} - (b_1)^{-1}\mathbf{BC})\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{b_2}{b_1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{b_{n-1}}{b_1} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\frac{b_n}{b_1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{b_2 a_1}{b_1} - a_2 & -\frac{b_2}{b_1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_{n-1} a_1}{b_1} - a_{n-1} & -\frac{b_{n-1}}{b_1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{b_n a_1}{b_1} - a_n & -\frac{b_n}{b_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Za podmínky, že stav systému se nachází v klouzavém režimu, tj.

$$\sigma = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad (2.43)$$

¹Tato definice a následující vztahy jsou odvozeny za předpokladu $k = 1$.

je ekvivalentní dynamika nezávislá na stavu x_1 a stavový popis je možné redukovat

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_2}{b_1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{b_3}{b_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{b_{n-1}}{b_1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{b_n}{b_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Vlastní čísla redukované matice dynamiky odpovídají nulám přenosu řízeného systému. Ekvivalentní dynamika bude nestabilní, pokud alespoň jedna nula řízeného systému bude kladná, což dokazuje větu 2.4

2.3.4 Redukce řádu

Důkazem 2.4 je zároveň dokázána následující věta

Věta 2.5.

Řád řízeného systému n je v klouzavém režimu redukován na $n - 1$, tj. stavový popis obsahuje $n - 1$ diferenciálních rovnic prvního řádu. Poslední stavová proměnná se vypočítá na základě algebraické rovnice přepínací nadplochy $\sigma = 0$.

Na příkladech reléového řízení uvedených na začátku této kapitoly je možné demonstrovat postup výpočtu ekvivalentního řízení a ekvivalentní dynamiky.

Příklad 2.5

V příkladu 2.2 ve stavovém popisu (2.8) jsou stavové matice $\mathbf{A} = [-1]$, $\mathbf{B} = [1]$, $\mathbf{C} = [1]$. Dosazením těchto hodnot do vzorce pro ekvivalentní řízení (2.39) vyjde

$$u_{eq} = x \quad (2.46)$$

Přepínací nadplocha je v tomto případě definována $x = 0$. Je zřejmé, že klouzavý režim nastane na přepínací nadploše vždy, neboť podmínka (2.40) je splněna. Ekvivalentní dynamika je spočítána dosazením do rovnice (2.41)

$$\dot{x}_{eq} = 0 \quad (2.47)$$

Na základě věty o redukci řádu řízeného systému je systém v klouzavém režimu statický.

Příklad 2.6

V příkladu 2.3 není řízený systém v klouzavém režimu, ekvivalentní řízení a ekvivalentní dynamika může být spočítána pro modifikovanou přepínací nadplochu s použitím PD článku. Stavové matice ve stavovém popisu (2.11) jsou

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Přepínací proměnná je získána pomocí PD článku, nelze tedy použít přímo matici \mathbf{C} , ale je nutné vyjádřit z rovnice (2.20).

$$\sigma = -k_p x_1 - k_d x_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_p & -k_d \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.49)$$

Matice $\widehat{\mathbf{C}}$ se použije místo stavové matice \mathbf{C} při dosazení do vzorce pro ekvivalentní řízení (2.39)

$$u_{eq} = - \left(\begin{bmatrix} -k_p & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -k_p & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = x_1 + 2x_2 - \frac{k_p}{k_d} x_2 \quad (2.50)$$

Klouzavý režim nastane na takové části přepínací nadplochy, kde bude absolutní hodnota ekvivalentního řízení (2.50) menší než jedna. Pro konkrétní parametry PD článku je možné určit velikost klouzavého režimu, pomocí poměru k_p/k_d je také možné klouzavý režim částečně tvarovat. Ve speciálním případě, kdy $k_p/k_d = 1$, existuje klouzavý režim na celé přepínací nadploše. Ekvivalentní dynamika se spočítá dosazením do rovnice (2.41)

$$\dot{\mathbf{x}}_{eq} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-k_d)^{-1} \begin{bmatrix} -k_p & -k_d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_p}{k_d} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{eq} \quad (2.51)$$

Matice ekvivalentní dynamiky má jinou strukturu než (2.42). To je dané původní stavovou reprezentací řízeného systému ve Frobeniově formě. Matici ekvivalentní dynamiky (2.51) je možné upravit dosazením z rovnice přepínací nadplochy (2.49)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{eq,1} &= x_{eq,2} \\ \dot{x}_{eq,2} &= -\frac{k_p}{k_d} x_{eq,2} \end{aligned} \Bigg|_{x_{eq,2} = -\frac{k_p}{k_d} x_{eq,1}} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_{eq,1} &= -\frac{k_p}{k_d} x_{eq,1} \\ -\frac{k_p}{k_d} \dot{x}_{eq,1} &= \frac{k_p^2}{k_d^2} x_{eq,1} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Obě rovnice jsou lineárně závislé, k popisu ekvivalentní dynamiky stačí použít pouze jednu z nich. Druhá stavová proměnná se dopočítá pomocí rovnice přepínací nadplochy. Tím dochází k redukci řádu řízeného systému a dynamika v klouzavém režimu je popsána rovnicí

$$\dot{x}_{eq,1} = -\frac{k_p}{k_d} x_{eq,1} \quad (2.53)$$

Řád systému v klouzavém režimu se redukoval na $n = 1$. Vlastní číslo ekvivalentní dynamiky je $\lambda = -\frac{k_p}{k_d}$. Volbou parametrů PD článku je tak možné navrhnout dynamiku v klouzavém režimu a také tvarovat přechodovou charakteristiku.

2.3.5 Mezní cykly

Problematika mezních cyklů při řízení s reléovou zpětnou vazbou je podrobně analyzována v [22]. V této publikaci je uvedena věta o existenci a stabilitě mezních cyklů.

Věta 2.6.

Je dán lineární systém (2.3) se zpětnou vazbou (2.4), (2.6) a matice dynamiky \mathbf{A} není singulární. Jestliže v tomto systému existuje mezní cyklus s periodou 2δ , pak platí

$$f(\delta) = \mathbf{C} (e^{\mathbf{A}\delta} + \mathbf{I})^{-1} (e^{\mathbf{A}\delta} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = 0 \quad (2.54)$$

Mezní cyklus je stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{W} = \left(\mathbf{I} - \frac{w\mathbf{C}}{\mathbf{C}w} \right) e^{\mathbf{A}\delta}, \quad w = 2 (e^{\mathbf{A}\delta} + \mathbf{I})^{-1} e^{\mathbf{A}\delta} \mathbf{B} \quad (2.55)$$

leží uvnitř jednotkové kružnice. Mezní cyklus je nestabilní, když leží alespoň jedno vlastní číslo matice \mathbf{W} vně jednotkové kružnice.

Pro systémy s relativním řádem $r \leq 2$ je věta 2.6 splněna pouze pro $\delta = 0$, tyto systémy tedy nemají žádný mezní cyklus.

Příklad 2.7

Aplikováním věty 2.6 na příklad 2.4 se spočítá perioda mezního cyklu pro systém (2.21)

$$2\delta = 3.68 \quad (2.56)$$

Vlastní čísla matice (2.55) systému (2.22) pro periodu mezního cyklu (2.56) jsou

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.005 \\ \lambda_2 &= -0.0303 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Vlastní čísla leží uvnitř jednotkové kružnice, mezní cyklus v příkladu 2.4 je stabilní.

2.4 Návrh řízení s klouzavým režimem

Analýza klouzavého režimu metodou ekvivalentního řízení v předchozí kapitole ukázala závislost chování v klouzavém režimu na koeficientech přepínací nadplochy, viz příklad 2.6, kde byla přepínací nadplocha tvarována pomocí parametrů vloženého PD článku. Na stejném principu je založena metoda návrhu řízení s klouzavým režimem. Tvarováním přepínací nadplochy prostřednictvím jejích koeficientů se dosahuje požadovaného chování řízeného systému s relé ve zpětné vazbě.

Postup návrhu řízení s klouzavým režimem je přehledně shrnutý v práci G. Monseese [35], kde autor vychází z práce V.I. Utkina [48] a uvádí návrh přepínací proměnné v maticovém tvaru výhodnějším pro vlastní návrh. Zároveň je návrh přepínací nadplochy rozdělen na dva případy v závislosti na použitém signálu pro výpočet přepínací nadplochy: měřitelný stav a/nebo měřitelný výstup. Tyto vztahy jsou využity v dalších kapitolách této práce při návrhu nového řídicího algoritmu a byly z výše zmíněné publikace převzaty.

2.4.1 Regulární forma

Řízení s klouzavým režimem je možné navrhnout pro lineární systém v libovolné stavové reprezentaci. Při výpočtu ekvivalentního řízení se ale s výhodou uplatní tzv. "regulární forma".

Definice 2.5

Regulární forma je stavová reprezentace ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Dimenze komponent stavového popisu jsou: $\bar{\mathbf{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $\bar{\mathbf{A}}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $\bar{\mathbf{A}}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\bar{\mathbf{A}}_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{r \times n}$. Zároveň musí mít matice $\bar{\mathbf{B}}_2$ plnou hodnotu, tzn. obsahuje tolik lineárně nezávislých nenulových řádků, kolik je její hodnota.

Tato forma je speciální tím, že matice $\bar{\mathbf{B}}$ obsahuje tolik nenulových řádků, kolik je složek vektoru vstupu u . Matice $\bar{\mathbf{B}}$ je rozdělena na dvě submatice. První je obdélníková matice s dimenzí $(n - m) \times m$ obsahující nulové prvky a druhá je čtvercová matice dimenze m , která je zároveň bází matice $\bar{\mathbf{B}}$.

Věta 2.7.

Transformační matice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stavové transformace $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ převádějící systém $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ do regulární formy $\bar{\mathcal{S}}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$ je ve tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

kde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

a dimenze $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Nutná a postačující podmínka existence transformační matice \mathbf{T} je

$$\text{rank}(\mathbf{B}) = m \quad (2.61)$$

Obecný postup pro výpočet transformační matice \mathbf{T} , která převede obecný systém (lineární i nelineární) do regulární formy lze najít v publikaci V. I. Utkina [48]. Speciální tvar pro lineární MIMO systémy (2.59) je popsán v publikaci [8].

Důkaz 2.5

Důkaz, že transformační matice (2.59) převede systém do regulární formy, lze provést prostřednictvím známých vztahů stavové transformace.

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad (2.62)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} \quad (2.63)$$

Do vztahu (2.63) lze dosadit z (2.59), (2.60)

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Matice $\bar{\mathbf{B}}$ splňuje definici regulární formy.

Důkaz existence transformační matice je jednoduchý. Aby matice \mathbf{T} byla maticí transformace, musí být invertovatelná a tedy i regulární. Protože

$$\det \mathbf{T} = \det \mathbf{I}_{n-m}\mathbf{B}_2^{-1} = \det \mathbf{B}_2^{-1} \quad (2.65)$$

musí být matice \mathbf{B}_2 regulární, jinak nebude existovat její inverze a tedy ani transformace. Aby taková submatice existovala, musí mít matice \mathbf{B} m nenulových lineárně nezávislých řádků. Protože matice \mathbf{B} má zároveň m sloupců, implikuje podmínka existence m lineárně nezávislých řádků plnou hodnotu matice \mathbf{B} . Transformační matice (2.59) existuje právě tehdy, když matice \mathbf{B} má plnou hodnotu.

Obecně nemusí být řízený systém ve tvaru vhodném k dekompozici matice \mathbf{B} podle (2.60). Za předpokladu splnění podmínky (2.61) lze vhodnou transformací převést systém do tvaru, kde je možné vypočítat transformační matici (2.59).

Pro systémy s jedním vstupem a jedním výstupem je možné transformační matici napsat ve zjednodušeném tvaru pomocí složek vektoru vstupu \mathbf{B} .

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{b_1}{b_n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{b_2}{b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{b_{n-1}}{b_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{b_n} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Příklad 2.8

Na příkladu je možné demonstrovat, jak tato transformace převádí SISO systém do regulární formy při zachování dynamiky systému. Jako zadání bude použita následující rovnice dynamiky lineárního systému s jedním vstupem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (2.67)$$

Rovnice dynamiky systému v regulární formě je

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u \quad (2.68)$$

Transformační matice \mathbf{T} se získá dosazením parametrů z vektoru \mathbf{B} . Pro systém (2.67) vyjde transformační matice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Matice $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ se spočítají dosazením transformační matice \mathbf{T} do známých transformačních vztahů

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}\mathbf{B}u = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & \frac{22}{3} \\ \frac{2}{3} & 2 & \frac{41}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{16}{3} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.70)$$

Matice $\bar{\mathbf{B}}$ je v požadovaném tvaru a vlastní čísla matice $\bar{\mathbf{A}}$ zůstala zachována, jak lze snadno ověřit.

Příklad 2.9

Na dalším příkladu je demonstrována transformace MIMO systému do regulární formy. K výpočtu je použitý stavový popis z předchozího příkladu rozšířený o další vstup.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.71)$$

Matice $\mathbf{B}_{1,2}$ v tomto systému jsou

$$\mathbf{B}_1 = [1 \ 2], \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Transformační matice \mathbf{T} spočítaná dosazením matic (2.72) do vztahu (2.59) vyjde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Matice $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ se spočítají dosazením transformační matice \mathbf{T} do známých transformačních vztahů

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & -20 & -4 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.74)$$

Matice $\bar{\mathbf{B}}$ je v požadovaném tvaru a vlastní čísla matice $\bar{\mathbf{A}}$ zůstala opět zachována.

2.4.2 Návrh s měřitelným vektorem stavu

Pro návrh přepínací nadplochy s měřitelným stavem systému stačí znát stavovou rovnici dynamiky řízeného systému

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.75)$$

Stav $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je n -řádkový vektor, vektor vstupu $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ má m řádek, matice dynamiky $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je čtvercová matice řádu n a matice vstupu $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ má n řádek a m sloupců. Na řízený systém (2.75) je aplikováno nespojité řízení s klouzavým režimem ve tvaru²

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}(t))) \quad (2.76)$$

Vektor přepínacích proměnných $\boldsymbol{\sigma}(x(t))$ je funkcí vektoru stavu $\mathbf{x}(t)$ řízeného systému (2.75). Hodnota funkce $\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}(t)))$ je definována

$$\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}(t))) = \begin{bmatrix} \text{sgn}(\sigma_1(\mathbf{x}(t))) \\ \text{sgn}(\sigma_2(\mathbf{x}(t))) \\ \vdots \\ \text{sgn}(\sigma_m(\mathbf{x}(t))) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Jednotlivé složky $\text{sgn}(\sigma_i(\mathbf{x}(t)))$ jsou definovány

$$\text{sgn}(\sigma_i(\mathbf{x}(t))) \begin{cases} = 1, & \sigma_i(\mathbf{x}(t)) > 0; \\ = -1, & \sigma_i(\mathbf{x}(t)) < 0; \\ \in (-1, 1), & \sigma_i(\mathbf{x}(t)) = 0. \end{cases} \quad i = 1..m \quad (2.78)$$

Dále je definovaná diagonální matice konstant $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & k_m \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

²Za předpokladu symetrického přepínání vstupů

Prvky matice \mathbf{K} reprezentují zesílení jednotlivých akčních členů. V případě řízení SISO systémů lze zákon řízení upravit na

$$u = -k \cdot \text{sgn}(\sigma) \quad (2.80)$$

kde $k \in \mathbb{R}$. Vektor přepínacích proměnných $\boldsymbol{\sigma}$ je v obou případech (SISO i MIMO) definovaný vztahem³

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{x} \quad (2.81)$$

Matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má stejný počet řádků jako vektor vstupu a počet sloupců odpovídá počtu složek vektoru stavu. Tato matice určuje tvar přepínací nadplochy (nadploch v maticovém případě) a dále se navrhuje podle požadavků na chování systému v klouzavém režimu. V první fázi návrhu je vhodné převést řízený systém do regulární formy. S použitím transformační matice \mathbf{T} (2.59) se zavedou nové stavové souřadnice

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (2.82)$$

Tato transformace převede řízený systém (2.75) do jeho regulární formy

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2 \quad (2.83)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{21}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u} \quad (2.84)$$

Hodnota matice $\bar{\mathbf{B}}_2$ je rovna její dimenzi. Přepínací proměnná v transformovaných souřadnicích je

$$\sigma = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 & \bar{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}}_1\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{S}}_2\bar{\mathbf{x}}_2 \quad (2.85)$$

Matice $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ jsou návrhové parametry definující přepínací nadplochu a jejich volba určuje dynamiku v klouzavém režimu. Za předpokladu, že systém se nachází v klouzavém režimu (přepínací proměnná se rovná nule), je možné z rovnice (2.85) vyjádřit

$$\bar{\mathbf{x}}_2 = -\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1\bar{\mathbf{x}}_1|_{\sigma=0} \quad (2.86)$$

Po dosazení $\bar{\mathbf{x}}_2$ z (2.86) do první rovnice stavové reprezentace (2.83) vyjde rovnice dynamiky v klouzavém režimu

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1)\bar{\mathbf{x}}_1 \quad (2.87)$$

Tato rovnice úplně popisuje dynamiku v klouzavém režimu. Zbývajících m stavových proměnných (vektor $\bar{\mathbf{x}}_2$) se vypočítá z rovnice (2.86). Dynamika v klouzavém režimu je určena maticí $(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1)$. Klouzavý režim bude stabilní právě tehdy, když budou vlastní čísla této matice ležet v levé komplexní polorovině. V případě říditelnosti systému (2.75) lze tuto matici, resp. parametry přepínací nadplochy v součinu $\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1$, určit některou ze standartních metod automatického řízení, např. přiřazením pólů nebo metodami optimalizace. Z hlediska stability platí, že pokud je stabilní rovnice (2.87), je v klouzavém režimu stabilní celý řízený systém, neboť zbývajících komponenty stavu

³Při řízení na nulovou požadovanou hodnotu. Příklad řízení s nenulovou požadovanou hodnotou bude analyzován později.

jsou vázány algebraickou rovnicí (2.86). Návrhová matice $\bar{\mathbf{S}}_2$ se obvykle volí ve tvaru zaručujícím invertovatelnost

$$\bar{\mathbf{S}}_2 = \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \Rightarrow \bar{\mathbf{S}}_2^{-1} = \bar{\mathbf{B}}_2 \quad (2.88)$$

Matice \mathbf{S} v původních souřadnicích se spočítá transformací

$$\mathbf{S} = [\bar{\mathbf{S}}_1 \quad \bar{\mathbf{S}}_2] \mathbf{T} \quad (2.89)$$

Tato matice (vektor v případě SISO systémů) definující přepínací nadplochu určuje dynamické vlastnosti v klouzavém režimu. Velikost klouzavého režimu (klouzavý region) je určena konstantou \mathbf{K} (resp. k pro SISO systémy) podle lineární maticové nerovnice

$$|(\mathbf{SB})^{-1}\mathbf{SAx}| < \mathbf{K} \quad (2.90)$$

Pro SISO systémy se klouzavý region určí podle nerovnice

$$|(\mathbf{SB})^{-1}\mathbf{SAx}| < k \quad (2.91)$$

Podmínku existence klouzavého režimu lze určit v transformovaných souřadnicích. Analogicky k analýze Ljapunovovy funkce uvedené v kapitole 2.2.2 existuje neprázdný klouzavý režim za podmínky

$$\mathbf{SB} > 0 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{S}}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{B}} > 0 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}} > 0 \quad (2.92)$$

Nerovnici (2.92) je možné dále upravit

$$\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}} = [\bar{\mathbf{S}}_1 \quad \bar{\mathbf{S}}_2] \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}}_2\bar{\mathbf{B}}_2 > 0 \quad (2.93)$$

Pokud bude matice $\bar{\mathbf{S}}_2$ zvolena ve tvaru (2.88), podmínka existence klouzavého režimu se zjednoduší

$$\bar{\mathbf{S}}_2\bar{\mathbf{B}}_2|_{\bar{\mathbf{S}}_2=\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}} = \bar{\mathbf{B}}_2^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{I}_m > 0 \quad (2.94)$$

Je zřejmé, že lineární maticová nerovnost (2.94) je při volbě $\bar{\mathbf{S}}_2 = \bar{\mathbf{B}}_2^{-1}$ splněna vždy a existence neprázdného klouzavého regionu je zaručena.

2.4.3 Návrh se zpětnou vazbou od výstupu

V mnoha aplikacích automatického řízení je stav měřitelný pouze částečně nebo vůbec a k dispozici je pouze měření výstupu. Jedna možnost je zahrnout do řídicí smyčky rekonstruktor stavu a navrhnout řízení za použití rekonstruovaného stavu. Druhá možnost je pokusit se o návrh klouzavého režimu pouze s použitím výstupu. Je zde ale několik omezení. Tento algoritmus je použitelný pouze na minimálně fázové systémy, neboť v klouzavém režimu jsou nuly řízeného systému součástí vlastních čísel matice ekvivalentní dynamiky, viz věta 2.4. Druhé omezení je podmínka invertovatelnosti součinu \mathbf{CB} , viz věta 2.1. Řízený systém je uvažován ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (2.96)$$

Stav $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je n -řádkový vektor, vektor výstupu $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ má p řádek a vektor vstupu $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ má m řádek. Matice dynamiky $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je čtvercová matice řádu n , matice vstupu $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ má n řádek a m sloupců a matice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ má p řádek a n sloupců. Zákon řízení je definován stejně jako v předchozí kapitole vztahy (2.76), resp. (2.80). Přepínací proměnná σ je definovaná vztahem

$$\sigma = \mathbf{S}\mathbf{y} \quad (2.97)$$

Matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ má stejný počet řádků jako vektor vstupu a počet sloupců odpovídá počtu složek vektoru výstupu. Tato matice se dále navrhuje podle požadavků na chování systému v klouzavém režimu. Podle Edwardse a Spurgeona [10] existuje transformační matice $\mathbf{T}_{\mathbf{r}\mathbf{y}}$ definovaná

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\mathbf{r}\mathbf{y}}\mathbf{x} \quad (2.98)$$

Tato transformace převede řízený systém (2.95) do formy

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \bar{\mathbf{A}}_{14} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{32} & \bar{\mathbf{A}}_{33} & \bar{\mathbf{A}}_{34} \\ \bar{\mathbf{A}}_{41} & \bar{\mathbf{A}}_{42} & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{T}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Dimenze jednotlivých komponent stavového popisu jsou: $\bar{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^{n-p-r}$, $\bar{\mathbf{y}}_1 \in \mathbb{R}^{p-m}$, $\bar{\mathbf{y}}_2 \in \mathbb{R}^m$, všechny matice $\bar{\mathbf{A}}_{ij}$ mají příslušné dimenze a matice $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ má plnou hodnotu. Transformace (2.98) je navržena tak, že vlastní čísla submatice $\bar{\mathbf{A}}_{11}$ obsahují nuly řízeného systému. Přepínací proměnná (2.97) je v transformovaných souřadnicích

$$\sigma = \bar{\mathbf{S}}_1\bar{\mathbf{y}}_1 + \bar{\mathbf{S}}_2\bar{\mathbf{y}}_2 \quad (2.101)$$

V klouzavém režimu se z rovnice přepínací proměnné (2.101) vyjádří

$$\bar{\mathbf{y}}_2 = -\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1\bar{\mathbf{y}}_1 \quad (2.102)$$

Po dosazení z rovnice (2.102) do rovnice stavové reprezentace (2.99) vyjde rovnice ekvivalentní dynamiky v klouzavém režimu.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} & (\bar{\mathbf{A}}_{13} - \bar{\mathbf{A}}_{14}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1) \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} & (\bar{\mathbf{A}}_{23} - \bar{\mathbf{A}}_{24}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1) \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{32} & (\bar{\mathbf{A}}_{33} - \bar{\mathbf{A}}_{34}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_1 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Je zřejmé, že vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky v klouzavém režimu jsou dána sjednocením

$$\lambda(\bar{\mathbf{A}}_{\text{sm}}) = \lambda(\bar{\mathbf{A}}_{11}) \cup \lambda \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{22} & (\bar{\mathbf{A}}_{23} - \bar{\mathbf{A}}_{24}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1) \\ \bar{\mathbf{A}}_{32} & (\bar{\mathbf{A}}_{33} - \bar{\mathbf{A}}_{34}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1) \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Protože vlastní čísla matice $\bar{\mathbf{A}}_{11}$ odpovídají nulám otevřené smyčky a nemohou být zpětnou vazbou nijak změněny, musí být všechny nuly otevřené smyčky stabilní. Z toho plyne požadavek na minimálně fázový řízený systém. Za předpokladu splnění této podmínky se úloha návrhu ekvivalentní dynamiky redukuje na úlohu návrhu přiřazení vlastních čísel matice

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{22} & (\bar{\mathbf{A}}_{23} - \bar{\mathbf{A}}_{24}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1) \\ \bar{\mathbf{A}}_{32} & (\bar{\mathbf{A}}_{33} - \bar{\mathbf{A}}_{34}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Stejně jako v případě návrhu s použitím měřitelného vektoru stavu je i zde možno použít standardní metody řízení, např. přiřazení pólů nebo lineárního kvadratického kritéria. Matice \mathbf{S} v původních souřadnicích se počítá inverzní transformací

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 & \bar{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{T}_y^{-1} \quad (2.106)$$

Tato matice (vektor v případě SISO systémů) definující přepínací nadplochu určuje dynamické vlastnosti v klouzavém režimu. Velikost klouzavého regionu a podmínku existence klouzavého režimu lze určit analogicky jako v předchozí kapitole, rozšíří se pouze o matici \mathbf{C} .

$$|(\mathbf{SCB})^{-1}\mathbf{SCAx}| < \mathbf{K} \quad (2.107)$$

Pro SISO systémy se klouzavý region určí podle nerovnice

$$|(\mathbf{SCB})^{-1}\mathbf{SCAx}| < k \quad (2.108)$$

Neprázdný klouzavý režim existuje právě tehdy, když existuje inverze $(\mathbf{SCB})^{-1}$. Volba matice $\bar{\mathbf{S}}_2$ zde nelze odvodit tak jednoduše, ale obvykle se volí ve tvaru $\bar{\mathbf{S}}_2 = \bar{\mathbf{B}}_2^{-1}$ jako v případě návrhu s měřitelným stavem.

2.4.4 Rekonstrukce stavu

Při návrhu řízení se může vyskytnout situace, kdy stav řízeného systému není měřitelný a zároveň není použitelná ani metoda návrhu řízení od výstupu, například když řízený systém není minimálně fázový. V takovém případě lze využít nelineární rekonstruktor stavu využívající klouzavý režim publikovaný např. v [49]. Řízený systém je ve tvaru (2.95), (2.96). Stavový popis rekonstruktoru je podobný standardnímu Luenbergerovu rekonstruktoru s výjimkou lineárního členu $y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$, který je nahrazený nelineárním členem. Rovnice dynamiky takového rekonstruktoru je

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\text{sgn}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.109)$$

Rekonstruovaný stav $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ má stejnou dimenzi jako stav řízeného systému, matice \mathbf{L} je definovaná $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Ostatní proměnné a matice jsou definované stejně jako pro systém (2.95), (2.96). Odchylka stavu rekonstruktoru od stavu řízeného systému je definována

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (2.110)$$

Dosazením odchylky (2.110) a stavového popisu řízeného systému (2.95), (2.96) do stavového popisu rekonstruktoru (2.109) se získá dynamický popis chování odchylky (2.110)

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\text{sgn}(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}) \quad (2.111)$$

Analýzou klouzavého režimu v souřadnicích odchylového systému (2.111) vyjde ekvivalentní řízení a ekvivalentní dynamika ve tvaru

$$\bar{\mathbf{u}}_{eq} = (\mathbf{CL})^{-1}\mathbf{CA}\bar{\mathbf{x}}_{eq} \quad (2.112)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{eq} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{CL})^{-1}\mathbf{C})\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_{eq} \quad (2.113)$$

Pro odchylový systém v klouzavém režimu platí analogické definice a věty jako v případě standardního řízení s klouzavým režimem. V tomto případě se řád dynamiky v klouzavém režimu redukuje na $n-l$. Dynamika se pak určí návrhem matice \mathbf{L} některou standardní metodou automatického řízení. Podmínka existence klouzavého režimu se analyzuje opět pomocí Ljapunovovy funkce a vyjde ve tvaru

$$|\mathbf{CA}\bar{\mathbf{x}}| < \mathbf{CL} \Rightarrow \mathbf{CL} > 0 \quad (2.114)$$

Pokud je řízený systém stabilní a existuje neprázdný stabilní klouzavý režim, bude rekonstruktor v konečném čase sledovat stav řízeného systému s nulovou odchylkou.

2.4.4.1 Řízení s rekonstruovaným vektorem stavu

Rekonstruovaný vektor stavu se využije při návrhu řízení s klouzavým režimem podle kapitoly 2.4.2. Řízený systém je uvažován ve tvaru (2.75). Zákon řízení je definován

$$\mathbf{u} = -\text{sgn}\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.115)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (2.116)$$

Analýzou klouzavého režimu pro přepínací nadplochu (2.116) vyjde ekvivalentní řízení

$$\mathbf{u}_{eq} = (\mathbf{CB})^{-1}(\mathbf{CA}\hat{\mathbf{x}}_{eq} + \mathbf{CL}\text{sgn}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \quad (2.117)$$

Dosazením ekvivalentního řízení (2.117) a odchylky (2.110) do dynamické rovnice řízeného systému (2.75) vyjde ekvivalentní dynamika v klouzavém režimu

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{eq} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{CB})^{-1}\mathbf{C})\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_{eq} + \mathbf{B}(\mathbf{CB})^{-1}\mathbf{C}\underbrace{(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\text{sgn}(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}))}_{\dot{\bar{\mathbf{x}}}} \quad (2.118)$$

Za předpokladu, že rekonstruktor je v klouzavém režimu dříve než řízený systém ($\bar{\mathbf{x}} = 0$), je ekvivalentní dynamika řízeného systému stejná jako při návrhu s měřitelným vektorem stavu. Cílem návrhu rekonstruktoru je navrhnout matici \mathbf{L} tak, aby byla dynamika rekonstruktoru dostatečně rychlá a rekonstruktor se ustálil dříve než trajektorie řízeného systému poprvé protne přepínací nadplochu (2.116).

2.4.5 Kompenzace statického zesílení

Zavedením zpětné vazby lze ovlivnit pouze rozložení pólů v klouzavém režimu, nuly zůstávají beze změny. Tím dojde ke změně statického zesílení a při řízení na konstantní hodnotu je nutné statické zesílení kompenzovat. Pro řízení s klouzavým režimem na požadovanou hodnotu je úloha řízení formulována takto

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2.119)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (2.120)$$

$$\mathbf{u} = -\text{sgn}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.121)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Sx} + \mathbf{Kw} \quad (2.122)$$

Přepínací proměnná σ je rozšířena o člen $\mathbf{K}\mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l$ reprezentuje požadovanou hodnotu a $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times l}$ kompenzační zesílení. Pro zjednodušení je řízený systém uvažovaný v regulární formě

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \quad (2.123)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2.124)$$

Přepínací nadplochu (2.122) lze rozepsat do tvaru příslušného regulární formě

$$\sigma = \mathbf{S}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{S}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{K}\mathbf{w} \quad (2.125)$$

Za předpokladu, že systém se nachází v klouzavém režimu (přepínací proměnná se rovná nule), je možné z rovnice (2.125) vyjádřit

$$\mathbf{x}_2 = -\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{K}\mathbf{w}|_{\sigma=0} \quad (2.126)$$

Stejně jako v případě obecného návrhu řízení s klouzavým režimem se dosadí rovnice (2.126) do rovnice (2.123).

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1)\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{K}\mathbf{w} \quad (2.127)$$

Ekvivalentní dynamika se navrhne stejným způsobem jako v případě řízení do nuly. Dále je nutné vypočítat kompenzační zesílení \mathbf{K} . To lze vypočítat pomocí ustáleného stavu na základě požadavku, že výstup řízeného systému má v ustáleném stavu sledovat požadovanou hodnotu \mathbf{w} . Vektor $\mathbf{x}_{1,\text{ust}}$ se spočítá z rovnice (2.127) a podmínky, že v ustáleném stavu je derivace vektoru stavu rovna nule.

$$0 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1)\mathbf{x}_{1,\text{ust}} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{K}\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{x}_{1,\text{ust}} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1)^{-1} \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{K}\mathbf{w} \quad (2.128)$$

Lze předpokládat, že během návrhu přepínací nadplochy byla vlastní čísla navržena stabilní, inverze matice ekvivalentní dynamiky existuje a ustálený stav lze vypočítat. Dále se musí z rovnice (2.124) vypočítat druhá část vektoru stavu $\mathbf{x}_{2,\text{ust}}$. K tomu je třeba vypočítat ekvivalentní řízení z derivace přepínací nadplochy (2.125).

$$\dot{\sigma} = \mathbf{S}_1\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{S}_2\dot{\mathbf{x}}_2 = 0 \quad (2.129)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{S}_1(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2) + \mathbf{S}_2(\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_{\text{eq}}) = 0 \quad (2.130)$$

$$\mathbf{u}_{\text{eq}} = -\mathbf{S}_1(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2) - (\mathbf{B}_2)^{-1}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2)|_{\mathbf{S}_2=\mathbf{B}_2^{-1}} \quad (2.131)$$

Ekvivalentní řízení (2.131) se dosadí do rovnice (2.124) a vypočítá se $\mathbf{x}_{2,\text{ust}}$.

$$0 = -\mathbf{B}_2\mathbf{S}_1(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_{1,\text{ust}} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_{2,\text{ust}}) \quad (2.132)$$

$$\mathbf{x}_{2,\text{ust}} = -(\mathbf{S}_1\mathbf{A}_{12})^{-1}(\mathbf{S}_1\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_{1,\text{ust}}) \quad (2.133)$$

Z rovnic (2.128), (2.133) se spočítá ustálený stav řízeného systému v klouzavém režimu. Matice parametrů \mathbf{K} se spočítá z podmínky nulové regulační odchylky v ustáleném stavu.

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{\text{ust}} - \mathbf{w} = 0 \quad (2.134)$$

Řešením rovnice (2.134) je matice \mathbf{K} , která zajistí nulovou odchylku výstupu řízeného systému od požadované hodnoty.

2.4.6 Ilustrace návrhu - SISO systém

Příklad 2.10

Příklad navazuje na příklad č. 2.8, kde byla demonstrována transformace do regulární formy pro SISO systém. Tento příklad je uveden jako ilustrace postupu návrhu řízení s klouzavým režimem. Řízený systém se nachází v regulární formě (2.74)

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{A}}_{11}} \bar{\mathbf{x}}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{22}{3} \\ \frac{41}{3} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{12}} \bar{\mathbf{x}}_2 \quad (2.135)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{A}}_{21}} \bar{\mathbf{x}}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{16}{3} \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{A}}_{22}} \bar{\mathbf{x}}_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{B}}_2} \mathbf{u} \quad (2.136)$$

Návrh je proveden za předpokladu znalosti stavu řízeného systému, výstupní rovnice stavového popisu návrh neovlivní a není proto uvedena. Přepínací nadplocha je ve tvaru

$$\sigma = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{S}}_1} \bar{\mathbf{x}}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{s}_{22} \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{S}}_2} \bar{\mathbf{x}}_2 \quad (2.137)$$

Ekvivalentní dynamika v klouzavém režimu je podle (2.87)

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12} \bar{\mathbf{S}}_2^{-1} \bar{\mathbf{S}}_1) \bar{\mathbf{x}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{22}{3} \bar{s}_{11} & 2 - \frac{22}{3} \bar{s}_{12} \\ \frac{2}{3} - \frac{41}{3} \bar{s}_{11} & 2 - \frac{41}{3} \bar{s}_{12} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{\text{eq}}} \bar{\mathbf{x}}_1 \Big|_{\bar{\mathbf{S}}_2^{-1} = \bar{\mathbf{B}}_2} \quad (2.138)$$

Podle metody přiřazení pólů musí být charakteristický polynom matice ekvivalentní dynamiky podobný charakteristickému polynomu systému s požadovaným chováním. Charakteristický polynom matice ekvivalentní dynamiky $\bar{\mathbf{A}}_{\text{eq}}$ je ve tvaru

$$s^2 + \left(\frac{22}{3} \bar{s}_{11} + \frac{41}{3} \bar{s}_{12} - \frac{7}{3} \right) s + \frac{38}{3} \bar{s}_{11} + \frac{1}{3} \bar{s}_{12} - \frac{2}{3} \quad (2.139)$$

Požadovaná vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky budou zvolena tak, aby klouzavý režim nastal v celém stavovém prostoru. Vlastní čísla řízeného systému jsou $\lambda_i = -1$, proto budou v tomto příkladu zvolena požadovaná vlastní čísla $\lambda_{1,2} = -1$. Charakteristický polynom matice dynamiky takového systému je

$$s^2 + 2s + 1 \quad (2.140)$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých členů obou polynomů se sestaví soustava dvou rovnic o dvou neznámých

$$\frac{22}{3} \bar{s}_{11} + \frac{41}{3} \bar{s}_{12} - \frac{7}{3} = 2 \quad (2.141)$$

$$\frac{38}{3} \bar{s}_{11} + \frac{1}{3} \bar{s}_{12} - \frac{2}{3} = 1 \quad (2.142)$$

Řešením této soustavy je

$$\bar{s}_{11} = \frac{1}{8} \quad (2.143)$$

$$\bar{s}_{12} = \frac{1}{4} \quad (2.144)$$

Výsledná přepínací nadplocha pro systém v regulární formě je ve tvaru

$$\sigma = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{s}}} \bar{\mathbf{x}} \quad (2.145)$$

Transformací zpět do původních souřadnic podle (2.89) se vypočítá matice parametrů přepínací nadplochy

$$\mathbf{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{s}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

Pro kontrolu lze spočítat ekvivalentní řízení podle (2.91)

$$u_{eq} = -(\mathbf{SB})^{-1}\mathbf{SA}\mathbf{x} = \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \quad (2.147)$$

Po dosazení za $x_3 = -x_1 - 2x_2$ z rovnice přepínací nadplochy do (2.147) vyjde ekvivalentní řízení rovno nule a klouzavý režim nastává v celém stavovém prostoru.

Průběh simulace řízení systému (2.67) s parametry přepínací nadplochy (2.146) z nenulových počátečních podmínek $x_0 = [10 \ 0 \ 0]^T$ a periodou vzorkování $T_s = 0.01$ je zobrazen na obrázku č. 2.10. V tomto příkladu nastává klouzavý režim v čase simulace $t_{sm} = 0.81$ vteřin. Kontrolním výpočtem vlastních čísel matice ekvivalentní dynamiky podle (2.41) lze dokázat polohu vlastních čísel ekvivalentní dynamiky podle požadavků. Po dosazení matic systému \mathbf{A} , \mathbf{B} a matice \mathbf{S} namísto matice \mathbf{C} do (2.41) vyjde matice ekvivalentní dynamiky

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{9}{4} & -\frac{21}{8} \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

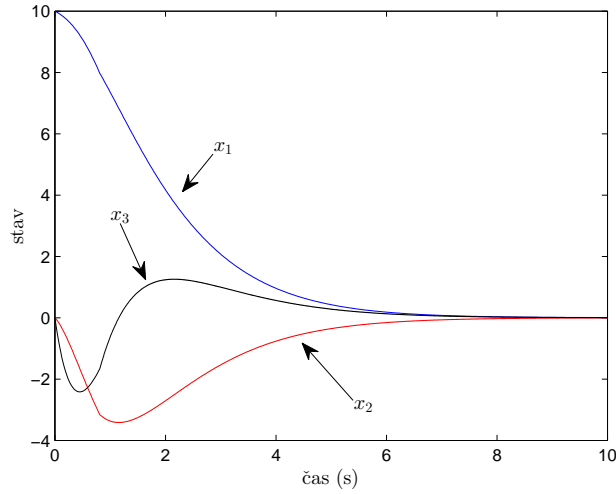
Řádky matice (2.148) jsou lineárně závislé - 1. řádek + 2x 2. řádek + 3. řádek = 0. Tím je dokázána redukce řádu řízeného systému. Vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky (2.148) jsou

$$\text{eig}(\mathbf{A}_{eq}) = \{0, -1, -1\} \quad (2.149)$$

Nulové vlastní číslo je příslušné redukované složce stavu, ostatní vlastní čísla popisují chování v klouzavém režimu.

2.5 Současné metody řízení s klouzavým režimem

Řízení s klouzavým režimem je metoda v současnosti stále atraktivní především pro schopnost konvergence k požadované hodnotě v konečném čase a robustnost vůči vnějším i vnitřním perturbacím. Současné metody řízení se zaměřují jednak na aplikaci řízení s klouzavým režimem na MIMO systémy a dále na odstranění omezení této metody, například nutnost nekonečně rychlého přepínání, omezenou velikost přepínací nadplochy nebo omezenou měřitelnost vektoru stavu.



Graf 2.10: Příklad 2.10 - průběh složek vektoru stavu

2.5.1 Klouzavý režim vyššího řádu

Jednou ze zajímavých aplikací řízení s klouzavým režimem je tzv. klouzavý režim vyššího řádu. Jedná se o rozšíření klasické metody, které obsahuje jednak výhody klasického řízení s klouzavým režimem a zároveň omezuje podmínky limitující jeho použití, především velikost relativního řádu řízeného systému. Mezi řízení s klouzavým režimem vyššího řádu patří např. algoritmus "terminal sliding mode", popsany např. v článku [28].

$$u = -k \cdot \operatorname{sgn} \left(\dot{\sigma} + \lambda \sqrt{|\sigma|} \operatorname{sgn} \sigma \right) \quad (2.150)$$

V zákonu řízení (2.150) je zavedena nelineární přepínací nadplocha ve speciálním tvaru oproti klasické lineární. Nelineární přepínací nadplocha je sestavena tak, že stav systému klouže po této nadploše (nastává klasický klouzavý režim) do rovnovážného stavu a v něm pak nastává klouzavý režim druhého řádu. Oproti klasickému algoritmu řízení s klouzavým režimem je zde použito při návrhu nelineární přepínací nadplochy o jednu složku vektoru stavu méně. To umožňuje snadnější měření, případně rekonstrukci složek vektoru stavu. Zavedení derivace přepínací nadplochy umožňuje využít klouzavý režim vyššího řádu pro systémy s relativním řádem rovným dvěma. Na základě "terminal sliding mode" algoritmu byl vyvinut "arbitrary order sliding mode controller", který umožňuje řízení s klouzavým režimem teoreticky pro systémy s libovolným relativním řádem r . Regulátor je určen následujícími rekurentními vztahy

$$\varphi(\sigma, \dots, \sigma^{r-1}) = {}_{r-1,r}(\sigma, \dots, \sigma^{r-1}) \quad (2.151)$$

$${}_{i,r} = \sigma^i + \lambda_i N_{i,r} \operatorname{sgn}({}_{i-1,r}), \quad {}_{0,r} = \sigma \quad (2.152)$$

$$N_{i,r} = \left(|s|^{\frac{p}{r}} + |\dot{s}|^{\frac{p}{r-1}} + \dots + |s^{(i-1)}|^{\frac{p}{r-i+1}} \right)^{\frac{(r-i)}{p}}, \quad N_{1,r} = |s|^{\frac{r-1}{r}} \quad (2.153)$$

Parametr p je nejmenší společný násobek čísel $1, 2, \dots, r$. V případě $r = 1$ vyjde

standartní zákon řízení s klouzavým režimem prvního řádu. Pro $r = 2$ přejdou rekurentní vztahy na zákon řízení 2.150.

Pro návrh řízení s klouzavým režimem vyššího řádu je nutné určit následující parametry: řád řízeného systému n , relativní řád řízeného systému r , $n - r$ parametrů přepínací nadplochy a $r - 1$ parametrů λ_i . Dále je nutné vypočítat $r - 1$ derivací přepínací nadplochy σ . V základní metodě řízení s klouzavým režimem je potřeba stanovit rovněž řád řízeného systému a parametry přepínací nadplochy ($n - 1$). V případě relativního řádu systému většího než 1 je rovněž nutné odhadnout $r - 1$ složek vektoru stavu. Například pro systém třetího řádu s relativním řádem $r = 2$ to znamená pro obě metody dva návrhové parametry (jeden parametr přepínací nadplochy a jeden parametr λ pro HOSM a dva parametry přepínací nadplochy v základní metodě). V obou případech bude potřeba odhadnout jeden signál: derivaci přepínací nadplochy pro HOSM a nepozorovatelnou složku vektoru stavu pro základní metodu. Jediný rozdíl spočívá v charakteru odhadovaných parametrů. Zatímco v základní metodě je možné všechny parametry vztáhnout k ekvivalentní dynamice v klouzavém režimu, pro klouzavý režim vyššího řádu to lze pouze pro parametry přepínací nadplochy, ale parametry λ nemají přímou souvislost s dynamikou v klouzavém režimu vyššího řádu. Tím je návrh řízení s klouzavým režimem vyššího řádu obtížnější oproti základní metodě jak pro ruční nastavení, tak pro případně automatické naladění.

Výhodou této metody pro řízení systémů s binárními vstupy je, že řízení je rovněž binární. To značně zjednodušuje aplikaci zákona řízení oproti metodám se spojitým řízením.

Algoritmy řízení s klouzavým režimem vyšších řádů se v současnosti zabývá především Arie Levant se svými žáky, lze uvést například články [29], [26], [27]. Z dalších autorů je možné jmenovat například článek M. K. Khana [23] popisující aplikaci tohoto řízení na MIMO systém spojených nádob nebo detailní analýzu algoritmu "terminal sliding mode" pro MIMO systémy v článku [32].

2.5.2 Fuzzy sliding mode

Při návrhu řízení s klouzavým režimem je možné využít i principy fuzzy regulace. V článku [43] je uvedený regulátor, který nevyužívá funkce signum, ale vychází z analýzy stability klouzavého režimu. Cílem publikovaného návrhu je najít taková pravidla, aby Ljapunovova funkce $\frac{1}{2}\sigma^2$ byla minimální. Analýza Ljapunovovy funkce stanovuje podmínku dosažitelnosti $\sigma\dot{\sigma} < 0$, která je základem pro definování expertních pravidel. Regulátor funguje na principu následující úvahy: jestliže $\sigma > 0$, je nutné pro splnění podmínky dosažitelnosti snížit vstup u . V opačném případě, kdy je $\sigma < 0$, je nutné vstup u zvýšit. Jako příklad návrhu fuzzy řízení s klouzavým režimem bude demonstrován postup z publikace [43], kde je popsána aplikace fuzzy řízení s klouzavým režimem při řízení chemických procesů. Další aplikaci je možné najít např. v [9], kde je tento algoritmus aplikován na systém mikrofluidního transportu, tzn. transportu mikroskopických objemů kapalin.

Vstupní hodnoty fuzzy regulátoru jsou hodnota přepínací proměnné σ a její derivace $\dot{\sigma}$, výstupem regulátoru je změna vstupu Δu . Hodnota těchto veličin je ohodnocena sedmi výrazy: kladná velká (PB - positive big), kladná střední (PM - positive medium),

kladná malá (PS - positive small), nula (ZE - zero), záporná malá (NS - negative small), záporná střední (NM - negative medium), záporná velká (NB - negative big). Pro vztahy mezi vstupními veličinami σ a $\dot{\sigma}$ a výstupem Δu je zavedena tabulka pravidel 2.1. Jako příklad formulace pravidel jsou uvedena pravidla:

- **Jestliže hodnota σ je velká negativní (NB) a hodnota $\dot{\sigma}$ velká negativní (NB), bude hodnota změny vstupu Δu velká pozitivní (PB).** Cílem tohoto pravidla je aplikovat takovou změnu vstupu, aby nastala podmínka dosažitelnosti. Protože obě sledované hodnoty (σ , $\dot{\sigma}$) jsou záporné, je nutné maximálně zvýšit hodnotu vstupu.
- **Jestliže hodnota σ je velká negativní (NB) a hodnota $\dot{\sigma}$ velká pozitivní (PB), bude hodnota změny vstupu Δu nulová (ZE).** Podmínka dosažitelnosti je při současném řízení splněna a není nutné ji měnit.
- **Jestliže hodnota σ je velká pozitivní (PB) a hodnota $\dot{\sigma}$ velká pozitivní (PB), bude hodnota změny vstupu Δu velká negativní (NB).** Toto pravidlo vyjadřuje situaci, kdy je potřeba maximálně snížit vstup systému, aby se rychle snížily sledované hodnoty (σ , $\dot{\sigma}$) a tím začala platit podmínka dosažitelnosti.

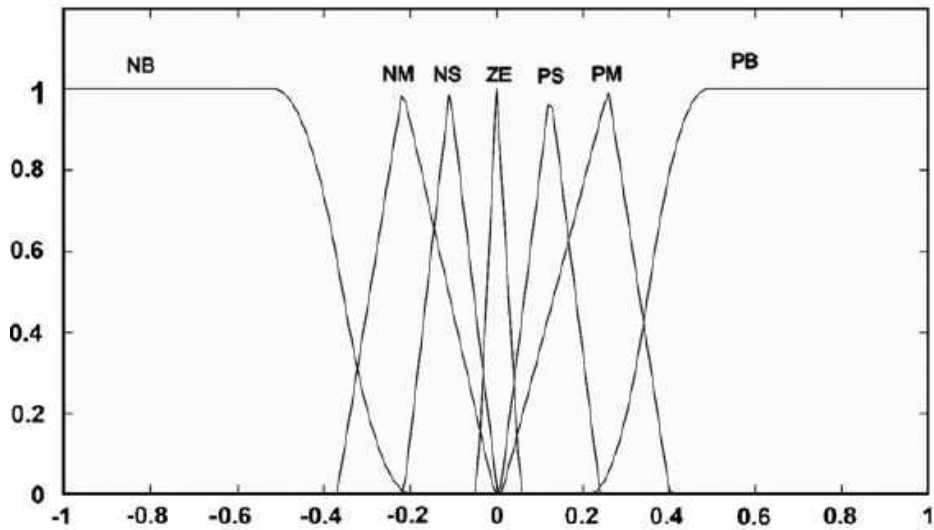
Po stanovení pravidel je nutné rovněž stanovit funkce příslušnosti pro jednotlivé signály. Funkce příslušnosti použité v článku [43] jsou uvedeny na obrázcích 2.11 a 2.12.

Pro správnou funkci fuzzy algoritmu je ještě nutné normovat vstupní proměnné na interval $\langle -1, 1 \rangle$ a naopak výstup fuzzy regulátoru denormovat aby odpovídal reálným hodnotám. V článku je za tímto účelem použito dělení, resp. násobení konstantou. Po dosažení normované hodnoty σ_n a $\dot{\sigma}_n$ se mohou inferenčním mechanismem zpracovat pravidla. V článku [43] je použit následující mechanismus inference

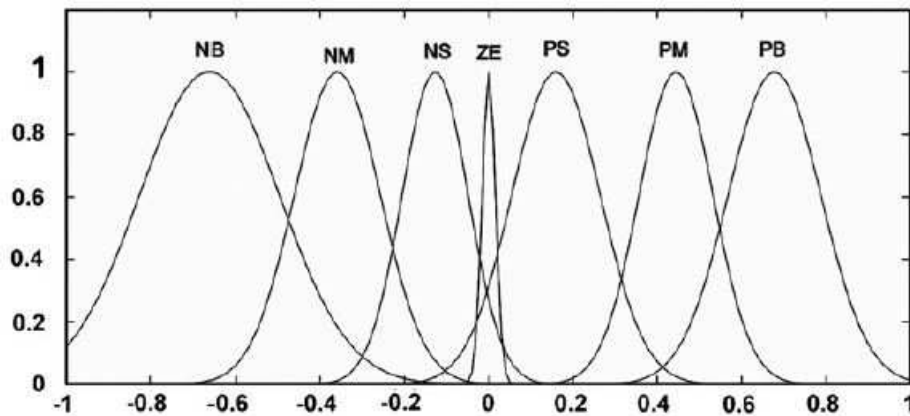
- Operátor AND znamená výběr minimální hodnoty stupně pravdivosti předpokladu z vyhodnocených funkcí příslušnosti
- Operátor OR znamená výběr maximální hodnoty stupně pravdivosti předpokladu z vyhodnocených funkcí příslušnosti
- Při určení funkce příslušnosti výstupu fuzzy regulátoru je vybráno minimum

$\sigma \backslash \dot{\sigma}$	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
PB	ZE	NS	NM	NB	NB	NB	NB
PM	PS	ZE	NS	NM	NB	NB	NB
PS	PM	PS	ZE	NS	NM	NB	NB
ZE	PB	PM	PS	ZE	NS	NM	NB
NS	PB	PB	PM	PS	ZE	NS	NM
NM	PB	PB	PB	PM	PS	ZE	NS
NB	PB	PB	PB	PB	PM	PS	ZE

Tabulka 2.1: Fuzzy pravidla



Graf 2.11: Funkce příslušnosti pro σ a $\dot{\sigma}$



Graf 2.12: Funkce příslušnosti pro Δu

- Jako agregační metoda je vybráno maximum
- Defuzzifikace je provedena metodou výběru nejmenšího maxima (SoM - Smallest of Maximum)

Po defuzzifikaci je nutné provést výše zmíněnou denormalizaci změny vektoru vstupu a aplikovat řízení. V dalším kroku řízení se celý postup opakuje.

Mezi výhody tohoto regulátoru patří jeho jednoduchá aplikace na systémy s více vstupy a výstupy a to i v případě různého počtu vstupů a výstupů. Dále pro návrh regulátoru není nutné znát popis řízeného systému, v takovém případě ale nelze exaktně určit parametry přepínací nadplochy a je nutné je odhadnout empiricky nebo jinou optimalizací. K nevýhodám tohoto přístupu patří velký počet pravidel, které zvyšují výpočetní nároky regulátoru. Z hlediska parametrů regulátoru je nutné předem empi-

ricky odhadnout funkce příslušnosti, což je komplikace v případě automatického ladění. Poslední nevýhodou je spojitý charakter řízení u , pokud by tato metoda byla aplikována na systémy s binárními vstupy, bylo by nutné zahrnout převod spojitého signálu na binární např. pulzně-šířkovou modulací.

2.5.3 Adaptivní zesílení

Při řízení systémů s perturbacemi, způsobenými buď nepřesným určením parametrů nebo poruchami, se zkoumá rovněž možnost adaptování řídicího algoritmu. Tato teorie vychází ze zákona řízení ve tvaru

$$u = u_{eq} - k \operatorname{sgn} \sigma \quad (2.154)$$

u_{eq} je ekvivalentní řízení, k zesílení a σ přepínací nadplocha. Ekvivalentní řízení je použito k odregulování dynamiky řízeného systému, funkce signum je použita pro odregulování perturbací řízeného systému. Motivace adaptace zesílení k spočívá v tom, že při dosažení ustáleného stavu je zde nutné pouze odregulovávat poruchy. Na to postačí menší rozsah akční veličiny, zatímco při přechodu mezi dvěma ustálenými stavy zajistí větší akční zásah rychlejší řízení.

2.5.3.1 Dynamická adaptace

Jeden z možných postupů při adaptaci zesílení je uveden například v článku [41]. Řízený systém je uvažován jako nelineární MIMO systém zatížený perturbacemi

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + d + u \quad (2.155)$$

Ekvivalentní řízení použité v (2.154) vyjde ve tvaru

$$u_{eq} = -f(x) - \Delta f(x) - d + \dot{x}_d \quad (2.156)$$

\dot{x}_d je derivace požadované hodnoty. Je zřejmé, že pro použití v ekvivalentním řízení není možné měřit pertubace parametrů systému ani jiné neměřitelné poruchy. Ke kompenzaci těchto složek slouží druhý člen v zákoně řízení (2.154). Protože není možné předem určit amplitudu poruch ani velikost perturbací, velikost zesílení k bude adaptována tak, aby její hodnota byla dostatečná ke kompenzaci perturbací. Rovnice adaptace zesílení je v článku [41] navržena

$$\dot{k} = -\gamma \|\sigma\|_1 \quad (2.157)$$

γ je kladná konstanta určující rychlost konvergence. Rovnice adaptace je určena na základě speciálně zvolené Ljapunovovy funkce

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma + \frac{1}{2\gamma} (k - \hat{k})^2 \quad (2.158)$$

Analýzou této Ljapunovovy funkce se spočítají dvě podmínky negativní definitnosti derivace Ljapunovovy funkce. První podmínkou je rovnice $\dot{k} + \gamma \|\sigma\|_1 \hat{k} = 0$, druhou podmínkou je volba \hat{k} , která musí být zvolena jako dostatečně velká záporná konstanta. Její velikost v absolutní hodnotě odpovídá maximální hodnotě perturbací, které budou adaptací kompenzovány při zachování stability řídicího algoritmu.

Postup návrhu řízení s klouzavým režimem s adaptací zesílení se tedy skládá ze tří kroků:

1. Návrh přepínací nadplochy σ
2. Výpočet řízení (2.154), tzn. výpočet ekvivalentního řízení a nastavení počátečního zesílení k
3. Aktualizace zesílení k v každém kroku řízení podle rovnice (2.157)

Uvedený postup lze snadno aplikovat na MIMO systémy, jak symetrické tak nesymetrické. Další výhodou tohoto algoritmu řízení je i řízení systémů, kde není dostupná znalost dynamiky pro výpočet ekvivalentního řízení. V takovém případě přejde ekvivalentní řízení do tvaru $u_{eq} = \dot{x}_d$ a vlastní dynamika řízeného systému bude kompenzována pomocí funkce signum a adaptace amplitudy zesílení.

2.5.3.2 Statická adaptace

Druhá možnost adaptace zesílení k je vážení prostřednictvím algebraické funkce. Jako příklad je možné uvést například článek [13] popisující metodu jménem exponenciální podmínka dosažitelnosti. V tomto článku je navržena adaptace zesílení v závislosti na velikosti přepínací proměnné a takto modifikovaný zákon řízení je následně aplikován na robotický manipulátor.

Zákon řízení je upraven do tvaru

$$u = u_{eq} - \frac{k}{N(\sigma)} \operatorname{sgn} \sigma \quad (2.159)$$

kde u_{eq} je ekvivalentní složka zákona řízení a funkce $N(\sigma)$ je ve tvaru

$$N(\sigma) = \delta_0 + (1 - \delta_0)e^{-\alpha|\sigma|^p} \quad (2.160)$$

Parametr δ_0 nabývá hodnot na intervalu $(0,1)$, parametr p je přirozené číslo a parametr α je kladné reálné číslo. Ze zákona řízení je zřejmé, že když se hodnota $|\sigma|$ zvětšuje, $N(S)$ se blíží k δ_0 a tedy $k/N(S)$ konverguje ke k/δ_0 , které je větší než k . To znamená, že konvergence k přepínací nadploše stoupá s rostoucí hodnotou přepínací proměnné. V opačném případě, kdy se hodnota přepínací proměnné zmenšuje, poměr $k/N(S)$ klesá. To má za následek snížení chatteringu v klouzavém režimu při zachování rychlosti konvergence ke klouzavému režimu.

Důkaz zrychlení konvergence je možné provést analýzou chování v klouzavém režimu. Dosazením zákona řízení (2.159) do funkce popisující derivaci přepínací proměnné vyjde následující podmínka

$$\dot{\sigma} (\delta_0 + (1 - \delta_0)e^{-\alpha|\sigma|^p}) = -k \operatorname{sgn} \sigma \quad (2.161)$$

Čas dosažení klouzavého režimu t'_r se spočítá integrováním rovnice (2.161) v čase od nuly do t'_r

$$t'_r = \frac{1}{k} \left(\delta_0 |S(0)| + (1 - \delta_0) \int_0^{|S(0)|} e^{-\alpha|S|^p} dS \right) \quad (2.162)$$

Odečtením času dosažení klouzavého režimu při použití základní metody $t_r = \frac{|S(0)|}{k}$ od rovnice (2.162) vyjde vztah

$$t'_r - t_r = \frac{1 - \delta_0}{k} \int_0^{|S(0)|} [e^{-\alpha|S|^p} - 1] dS \quad (2.163)$$

Funkce uvnitř integrálu je ale vždy záporná, protože $e^{-\alpha|S|^p}$ je vždy menší než 1 při splnění volby parametrů uvedených výše. To znamená, že $t'_r - t_r < 0$.

Nevýhodou adaptace zesílení pro řízení systémů s binárními vstupy je spojitá složka řízení. Při aplikaci těchto metod by opět bylo nutné zavedení dodatečného PWM členu. Při řízení nestabilních systémů pak mohou nastat situace, kdy bude zesílení k adaptací neustále zvětšováno a dojde k saturaci vstupu řízeného systému, což může vést k nestabilitě řízeného systému a selhání řízení.

2.5.4 Náhrada funkce signum spojitou funkcí

Pro odstranění negativ řízení s klouzavým režimem se využívá nahrazování funkce signum spojitou funkcí při zachování většiny ostatních vlastností řízení s klouzavým režimem. V literatuře se uvádí následující možnosti nahrazení funkce signum:

- Nahrazení pomocí funkce hyperbolického tangens. Tato metoda je použita například v aplikaci řízení polohy modelu zásobovací lodě ropné plošiny [2].
- Aproximace funkce signum v okolí nuly pomocí saturace ([35]). Tuto aproximaci popisuje vzorec

$$u_d = -k \text{sat} \left(\frac{\sigma}{\delta} \right) = \begin{cases} -k \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \Leftrightarrow \|\sigma\| \geq \delta \\ -k \frac{\sigma}{\delta} \Leftrightarrow \|\sigma\| < \delta \end{cases} \quad (2.164)$$

Parametr δ by měl být pro přesnou aproximaci funkce signum zvolen dostatečně malý

- Aproximace funkce signum pomocí hladké funkce se spojitou derivací. Je možné použít například funkci uvedenou v [35]

$$u_d = -k \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \delta} \quad (2.165)$$

- Náhrada lineární funkcí spolu s kompenzací perturbací. Tento postup je uveden např. v článku [55]. Jako náhrada funkce signum je použit proporcinální člen $u_p = -B^{-1}k\sigma$, pro kompenzaci perturbací je použito adaptivního řízení popsaného výše v kapitole 2.5.3 podle článku [41].

Obecně lze o jakékoliv aproximaci nespojitě funkce signum jinou spojitou funkcí říct, že při jejich použití už nenastává úplný klouzavý režim. To je způsobeno tím, že podmínka dosažitelnosti není splněná v blízkém ε -okolí přepínací nadplochy. Pro toto okolí platí podobné vlastnosti jako pro klouzavý režim. V případě, že je vně tohoto okolí splněna podmínka dosažitelnosti, stav systému neopustí ε -okolí přepínací nadplochy. V takovém případě se hovoří o tzv. kvazi-klouzavém režimu. Část stavového prostoru, pro kterou platí $\sigma \leq \varepsilon$ a kde nastává kvazi-klouzavý režim se nazývá kvazi-klouzavý pás. Šířka tohoto pásu je dána parametry aproximace.

2.5.5 Dynamický klouzavý režim

Základní metoda klouzavého režimu uvažuje přepínací nadplochu jako lineární kombinaci stavu systému bez ohledu na hodnotu přepínací proměnné a chová se tak jako statická vazba. Návrh přepínací nadplochy je ale možné rozšířit o dodatečnou dynamiku. Takto navržená přepínací nadplocha se nazývá dynamická přepínací nadplocha a funguje jako dynamická zpětná vazba. Podle [24] lze dynamickou přepínací nadplochu definovat

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= \mathbf{F}\chi + \mathbf{G}_1\mathbf{e} + \mathbf{G}_2\mathbf{x} \\ \sigma &= \mathbf{C}\chi + \mathbf{H}\mathbf{e} + \mathbf{K}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (2.166)$$

kde \mathbf{x} je stav řízeného systému, $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ je regulační odchylka stavu od požadované hodnoty a χ je pomocný stav pro výpočet přepínací nadplochy. \mathbf{F} , $\mathbf{G}_{1,2}$, \mathbf{C} , \mathbf{H} , \mathbf{K} jsou návrhové parametry s odpovídajícími dimenzemi. Pro minimálně fázové systémy se matice \mathbf{G}_2 , \mathbf{K} rovnají nule [44].

Jiná možnost návrhu dynamické přepínací nadplochy je prostřednictvím nelineárního systému. [24] uvádí pro výpočet dynamické přepínací nadplochy nelineární dynamický systém

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= a|\sigma|^{0.5}\text{sgn}(\sigma) - b|\chi + \sigma|^{0.5}\text{sgn}(\chi + \sigma) \\ J &= \chi + \sigma\end{aligned}\quad (2.167)$$

Parametry a, b musí být nenulové kladné a navzájem různé. Specifickou formou návrhu dynamické přepínací nadplochy je rovněž řízení s klouzavým režimem vyššího řádu zmíněné v kapitole 2.5.1.

Hlavní výhodou řízení pomocí dynamické přepínací nadplochy je zlepšení stability a odregulování perturbací pomocí vložené dynamiky, která se chová jako kompenzátor poruch. Nevýhodou je nutnost návrhu parametrů této dynamiky, resp. volba nelineární funkce v případě použití nelineární dynamiky.

2.5.6 Řízení diskrétních systémů

První možnost řízení diskrétních systémů pomocí klouzavého režimu je modifikace jak definice klouzavého režimu, tak podmínky dosažitelnosti. Rovnice dynamiky řízeného systému je ve tvaru

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d u(k)\quad (2.168)$$

Zákon řízení pro diskrétní systémy je stejný jako v případě spojitého systému.

$$u(k) = -k\text{sgn}\sigma\quad (2.169)$$

V literatuře se uvádí různé modifikace zákona řízení, např. [34] uvádí zákon řízení s přepínáním zesílení

$$u(k) = -kx(k)\quad (2.170)$$

kde zesílení k se přepíná podle následující podmínky

$$k = \begin{cases} k^+; & s(k)x(k) > 0 \\ k^-; & s(k)x(k) < 0 \end{cases}\quad (2.171)$$

Přepínací nadplocha je rovněž definována stejně jako v případě spojitého řízení

$$\sigma(k) = \mathbf{S}\mathbf{x}(k) \quad (2.172)$$

V případě diskretních systémů se ekvivalentní řízení počítá podle podmínky

$$\sigma(k+1) = \mathbf{S}\mathbf{x}(k+1) = 0 \quad (2.173)$$

Ekvivalentní řízení podle této podmínky vyjde ve tvaru

$$u_{eq}(k) = -(\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (2.174)$$

Po dosazení do stavového popisu řízeného systému vyjde rovnice ekvivalentní dynamiky

$$x(k+1)_{eq} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{S})\mathbf{A}\mathbf{x}(k)_{eq} \quad (2.175)$$

Podmínka dosažitelnosti pro takto definovaný klouzavý režim je podle [17]

$$\begin{aligned} V(k) &= \frac{1}{2}\sigma(k)^2 \\ V(k+1) - V(k) &< 0 \end{aligned} \quad (2.176)$$

Další detailnější analýza diskretního řízení s klouzavým režimem včetně analýzy podmínky stability a návrhu dynamiky v klouzavém režimu na MIMO systémy je uvedena v přehledovém článku [25].

Druhá možnost aplikace klouzavého režimu na diskretní systémy je použití spojitého řízení, kde je nutné výstup regulátoru vzorkovat. Tato metoda vede k výše zmíněnému kvazi-klouzavému režimu, kde šířka kvazi-klouzavého pásu je přímo závislá na periodě vzorkování, jak je ukázáno například v [35]. V případě diskretních systémů je toto chování velmi často zaměňováno s "chatteringem".

2.5.7 Prediktivní řízení s klouzavým režimem

Za účelem zvýšení robustnosti a lepší kompenzace poruch je analyzována možnost spojení řízení s klouzavým režimem a prediktivního řízení. Tato metoda je popsána v článku [18]. Základní myšlenka spočívá v zavedení predikce budoucích hodnot přepínací proměnné do kritériální funkce. Výsledný zákon řízení má pouze několik parametrů, které je možno snadno automaticky nastavovat. Zároveň je možné řídit i systémy s variabilním dopravním zpožděním a neminimální fází, což základní metoda řízení s klouzavým režimem neumožňuje. Aplikace je v článku realizována jako řízení chlazení solárních panelů, kde se výše uvedené vlastnosti systému vyskytují spolu s silnými poruchami způsobenými nerovnoměrným slunečním zářením.

2.5.7.1 Predikce přepínací nadplochy

Protože metoda prediktivního řízení se používá v oblasti diskretního řízení, je řízený systém popsán diskretně

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u_c(k-1) + C(z^{-1})\frac{\xi(k)}{\Delta} \quad (2.177)$$

$y(k)$ je výstupní signál řízeného procesu, $u_c(k)$ je vstupní signál řízeného procesu, $\Delta = 1 - z^{-1}$, d je dopravní zpoždění a $\xi(k)$ je bílý šum s nulovou střední hodnotou. Polynomy $A(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ jsou monické a polynom $B(z^{-1})$ obsahuje nuly modelu řízeného procesu.

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \quad (2.178)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \quad (2.179)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c} \quad (2.180)$$

Predikovaná přepínací proměnná je navržena ve tvaru

$$\hat{S}_{k+j|k} = P_S(z^{-1})(y(k + j|k) - w(k + j)) + Q_S(z^{-1})\Delta u_c(k + j - 1 - d) \quad (2.181)$$

kde $w(k)$ je referenční trajektorie, $P_S(z^{-1})$ a $Q_S(z^{-1})$ polynomy definující dynamiku v klouzavém režimu, kořeny polynomu $P_S(z^{-1})$ musí ležet uvnitř jednotkové kružnice.

$$P_S(z^{-1}) = p_{S_0} + p_{S_1} z^{-1} + \dots + p_{S_{n_p}} z^{-n_p} \quad (2.182)$$

$$Q_S(z^{-1}) = q_{S_0} + q_{S_1} z^{-1} + \dots + q_{S_{n_q}} z^{-n_q} \quad (2.183)$$

Predikovaná přepínací proměnná 2.181 je navržena tak, aby při výpočtu budoucích hodnot byly použity budoucí hodnoty vektoru vstupu. Cílem je, aby budoucí predikované hodnoty přepínací proměnné na horizontu predikce byly nulové při současné penalizaci řízení, které k tomu je potřeba. Tyto požadavky splňuje kriteriální funkce

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \left[\hat{S}(k+j|k) \right]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u_C(k+j-1)]^2 \quad (2.184)$$

kde $\hat{S}(k+j|k)$ je predikovaná hodnota přepínací proměnné v kroce $k+j$, $N_{1,2}$ je minimální, resp. maximální horizont predikce, N_u je horizont řízení a $\lambda(k)$ je váhová posloupnost, která se často volí ve formě konstanty. Minimalizací této kriteriální funkce se získá optimální hodnota změn vektoru vstupu $[\Delta u_C(k), \Delta u_C(k+1), \dots, \Delta u_C(k+N_u-1)]$. Toto kritérium lze přepsat do maticového tvaru

$$J = ((\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s) \mathbf{u}_c + \mathbf{P}_s (\mathbf{f}_s - \mathbf{w}))^T ((\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s) \mathbf{u}_c + \mathbf{P}_s (\mathbf{f}_s - \mathbf{w})) + \lambda (\mathbf{u}_c^T \mathbf{u}_c) \quad (2.185)$$

Vektor \mathbf{f}_s vyjadřuje volnou odezvu systému, vektor \mathbf{u}_c je vektor budoucích změn hodnot vektoru vstupu

$$\mathbf{u}_c = [\Delta u_c(k), \dots, \Delta u_c(k+N_u-1)]^T \quad (2.186)$$

Matice \mathbf{G} je sestavena z g_k parametrů přechodové charakteristiky modelu řízeného systému

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{N_1} & g_{N_1-1} & \dots & 0 & 0 \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & g_{N_1-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & g_{N_2-3} & \dots & g_{N_2-N_u} \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \dots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

Matice $\mathbf{P}_s, \mathbf{Q}_s$ jsou sestaveny z parametrů polynomů (2.182), (2.183)

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} p_{s0} & 0 & \dots & 0 \\ p_{s1} & p_{s0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p_{snp} & \dots & p_{s0} \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} q_{s0} & 0 & \dots & 0 \\ q_{s1} & q_{s0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_{snp} & \dots & q_{s0} \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

V optimalizační úloze jsou dále zavedeny následující omezující podmínky

$$U_{min}\mathbf{I} + |K_D|\mathbf{I} \leq \mathbf{T}\mathbf{u}_C + u(k-1)\mathbf{I} \leq U_{max}\mathbf{I} - |K_D|\mathbf{I} \quad (2.190)$$

$$u_{min}\mathbf{I} + |K_D|\mathbf{I} \leq \mathbf{u}_C \leq u_{max}\mathbf{I} - |K_D|\mathbf{I} \quad (2.191)$$

$$y_{min}\mathbf{I} - \mathbf{f}_s \leq \mathbf{G}\mathbf{u}_C \leq y_{max}\mathbf{I} - \mathbf{f}_s \quad (2.192)$$

$$-S(k)\mathbf{I} - \mathbf{P}_s(\mathbf{f}_s - \mathbf{w}) \leq (\mathbf{P}_s\mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)\mathbf{u}_C \leq S(t)\mathbf{I} - \mathbf{P}_s(\mathbf{f}_s - \mathbf{w}) \quad (2.193)$$

kde \mathbf{I} je jednotkový vektor dimenze N_u , \mathbf{T} je dolní trojúhelníková matice dimenze $N_u \times N_u$, U_{min}, U_{max} je dolní a horní mez posloupnosti řízení, u_{min}, u_{max} je dolní a horní mez přírůstku řízení a y_{min}, y_{max} jsou minimální a maximální hodnota výstupu. Hodnota vektoru \mathbf{u}_C se spočítá pomocí numerického algoritmu kvadratického programování.

Zákon řízení se skládá ze tří složek

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u_C(k) + u_D(k) \quad (2.194)$$

kde složka $\Delta u_C(k)$ je první prvek vektoru \mathbf{u}_C získaného řešením výše uvedené úlohy. Tato část řízení drží systém na přepínací nadploše. Složka u_D má za cíl dovést systém do klouzavého režimu a získá se jako první prvek vektoru nespojitého řízení \mathbf{u}_D

$$\mathbf{u}_D = \left[\frac{-K_D \hat{S}(k+d+1)}{|\hat{S}(k+d+1)| + \rho}, \dots, \frac{-K_D \hat{S}(k+d+N_u)}{|\hat{S}(k+d+N_u)| + \rho} \right] \quad (2.195)$$

V článku je při výpočtu nespojistosti použita aproximace uvedená dříve v kapitole 2.5.4, resp. v literatuře [35].

Ačkoliv je spojení prediktivního řízení s klouzavým režimem aplikováno pouze na SISO systém, spojení těchto dvou přístupů se jeví jako dobrá možnost v případě, kdy není k dispozici přesný model řízené soustavy pro návrh přepínací nadplochy. Prediktivní řízení se poté dá využít jako dodatečný mechanismus zlepšující řízení, např. redukce chatteringu, zrychlení regulace a podobně.

2.5.8 Další aplikace

Výše uvedené metody modifikace řízení s klouzavým režimem se v literatuře vyskytují v různých kombinacích. Použití fuzzy logiky a adaptace klouzavého režimu je

popsáno v [31]. Nahrazení funkce signum spojitou funkcí je použito ve výše uvedené metodě predikce přepínací nadplochy.

V literatuře se vyskytují v souvislosti s klouzavým režimem ještě jiné techniky automatického řízení. Identifikace nelineárního řízeného systému pro účely řízení s klouzavým režimem je publikována v [21]. Klouzavý režim je možné využít ve spojení s teorií neuronových sítí, což vede ke zrychlení učení sítě a zlepšení stability, jak je uvedeno v článku [54].

Použití algoritmu řízení s klouzavým režimem je možné prakticky ve všech aplikacích automatického řízení. Vyskytuje se v systémech řízení polohy a pohybu, a to jak v pohonech, tak i například v řízení polohy kosmických struktur. Využívá se v chemickém průmyslu k řízení dávkování roztoku do chemického reaktoru, a to jak v mikroskopických i makroskopických množstvích, nebo k řízení směšovacích ventilů regulujících koncentraci nebo teplotu. V řízení teploty se řízení s klouzavým režimem uplatňuje jak při topení (např. lisování plastů), tak chlazení (různé druhy klimatizací, např. výše uvedené chlazení solárního panelu).

2.6 Motivační příklad - Řízení teploty

Řízení teploty je klasická úloha regulace. Řízená veličina, teplota, je regulována prostřednictvím jednoho nebo více aktuátorů, které reprezentují topná nebo chladící tělesa. Klasický případ řízení topení s jedním vstupem je například žehlička nebo rychlovarná konvice, kde se využívá ve většině případů obyčejné reléové řízení pomocí termostatu. Opačný případ, kdy je zapotřebí pouze chlazení, je např. chlazení procesoru v počítači, klimatizace serveroven apod.

Komplikovanější aplikace řízení teploty obsahují několik aktuátorů, které se používají k přesnější regulaci teploty na požadovanou hodnotu. Jako příklad lze uvést již v úvodu zmíněný plastový extruder.

Příklad 2.11

Plastový extruder se používá při kontinuální výrobě některých plastových výrobků, např. trubek. Z hlediska řízení teploty se reguluje teplota plastové taveniny na požadovanou hodnotu pro potřeby lisování. Pokud bude teplota plastové taveniny moc vysoká, výrobek neudrží po vylisování tvar a zdeformuje se. Pokud bude teplota taveniny příliš nízká, extruder nezvládne protlačit dost materiálu potřebného pro kontinuální lisování. Teplota se v extruderu řídí v několika zónách, kde každá zóna má samostatný senzor teploty, zdroj topení (např. odporové vyhřívání) a zdroj chlazení (vodou nebo vzduchem). Konkrétní příklad extruderu je možné nalézt např. na stránkách výrobce Davis-Standard, LLC [56]. Různé možnosti řízení tohoto typu extruderu jsou popsány např. [52], v [53].

Řízení s klouzavým režimem je aplikováno na zjednodušený model jedné zóny extruderu s dvěma vstupy a jedním výstupem. Přenos tepla v tavenině je reprezentován systémem třetího řádu s dominantní časovou konstantou, působení topení a chlazení je uvažováno symetrické a je reprezentováno diferenciální rovnicí prvního řádu s vazbou mezi topným a chladícím tělesem. Tento řízený systém bude použit také v dalších kapi-

tolách při demonstraci modifikace základního algoritmu řízení s klouzavým režimem.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -0,1 \\ 0,1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

Stavový popis reprezentuje zjednodušený systém s topením a chlazením (2 vstupy) a jedním teplotním čidlem (1) výstup. Cílem řízení je udržet reaktor zahřátý na určité teplotu reprezentovanou po částech konstantní referenční trajektorií w . Stav x_1 odpovídá teplotě reaktoru, x_2 derivaci teploty reaktoru, x_3 druhé derivaci teploty reaktoru, stav x_4 , resp. x_5 popisuje přenos tepla od topného tělesa, resp. chladícího tělesa. Vstup u_1 odpovídá spínání topného tělesa a u_2 spínání chladícího tělesa. Oba vstupy jsou typu ON/OFF a přepínají mezi hodnotami nula a jedna. Návrh bude proveden s použitím rekonstruktoru stavu, jehož návrh je součástí návrhu zpětné vazby. Řízený systém je již v regulární formě a není nutné ho transformovat. Systém přepsaný do regulární formy je ve tvaru

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{A}}_{11}} \bar{\mathbf{x}}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{12}} \bar{\mathbf{x}}_2 \quad (2.197)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{A}}_{21}} \bar{\mathbf{x}}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} -0,5 & 0,1 \\ 0,1 & -0,5 \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{A}}_{22}} \bar{\mathbf{x}}_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -0,1 \\ 0,1 & -2 \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{B}}_2} \mathbf{u} \quad (2.198)$$

Počet řádků matice koeficientů přepínací nadplochy odpovídá počtu vstupů, v tomto případě se tedy ve stavovém prostoru vyskytují dvě přepínací nadplochy

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{S}}_1 \ \bar{\mathbf{S}}_2] \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & \frac{200}{399} & -\frac{10}{399} \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{23} & \frac{10}{399} & -\frac{200}{399} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \Big|_{\bar{\mathbf{S}}_2=\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} w_1 \quad (2.199)$$

Dynamika v klouzavém režimu je podle (2.87)

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{21}{20}\bar{s}_{21} - \frac{21}{20}\bar{s}_{11} - \frac{1}{100} & \frac{21}{20}\bar{s}_{22} - \frac{21}{20}\bar{s}_{12} - \frac{51}{50} & \frac{21}{20}\bar{s}_{23} - \frac{21}{20}\bar{s}_{13} - \frac{201}{100} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{\text{eq}}} \bar{\mathbf{x}}_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1 \left(\frac{21}{20}k_1 - \frac{21}{20}k_2 \right) \end{bmatrix} \quad (2.200)$$

Dynamika v klouzavém režimu bude opět navržena pomocí metody pole-placement s požadovaným umístěním pólů $\lambda_i = -1$. Charakteristický polynom matice ekvivalentní

dynamiky $\bar{\mathbf{A}}_{eq}$ je ve tvaru

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{eq}) = s^3 + \left(\frac{21}{20}\bar{s}_{13} - \frac{21}{20}\bar{s}_{23} + \frac{201}{100}\right)s^2 + \left(\frac{21}{20}\bar{s}_{12} - \frac{21}{20}\bar{s}_{22} + \frac{51}{50}\right)s + \frac{21}{20}\bar{s}_{11} - \frac{21}{20}\bar{s}_{21} + \frac{1}{100} \quad (2.201)$$

Charakteristický polynom matice požadované dynamiky je

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \quad (2.202)$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých členů obou polynomů se sestaví soustava rovnic

$$\frac{21}{20}\bar{s}_{13} - \frac{21}{20}\bar{s}_{23} + \frac{201}{100} = 3 \quad (2.203)$$

$$\frac{21}{20}\bar{s}_{12} - \frac{21}{20}\bar{s}_{22} + \frac{51}{50} = 3 \quad (2.204)$$

$$\frac{21}{20}\bar{s}_{11} - \frac{21}{20}\bar{s}_{21} + \frac{1}{100} = 1 \quad (2.205)$$

Soustava rovnic (2.203)- (2.205) je nedourčená - 3 rovnice pro 6 neznámých proměnných a řešení soustavy není jednoznačné. Pro výpočet parametrů přepínací nadplochy je nutné tři neznámé parametry specifikovat jinak. V tomto příkladu se zavede substituce

$$\bar{s}_{21} = -\frac{1}{10} \quad (2.206)$$

$$\bar{s}_{22} = -\frac{1}{2} \quad (2.207)$$

$$\bar{s}_{23} = -\frac{1}{2} \quad (2.208)$$

Substitucí se soustava rovnic (2.203), (2.204) zjednoduší na

$$\frac{21}{20}\bar{s}_{13} + \frac{21}{40} + \frac{201}{100} = 3 \quad (2.209)$$

$$\frac{21}{20}\bar{s}_{12} + \frac{21}{40} + \frac{51}{50} = 3 \quad (2.210)$$

$$\frac{21}{20}\bar{s}_{11} + \frac{21}{200} + \frac{1}{100} = 1 \quad (2.211)$$

Řešení této soustavy rovnic je

$$s_{11} = \frac{59}{70} \quad (2.212)$$

$$s_{12} = \frac{97}{70} \quad (2.213)$$

$$s_{13} = \frac{31}{70} \quad (2.214)$$

Matice parametrů přepínací nadplochy pro řízený systém je

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{59}{70} & \frac{97}{70} & \frac{31}{70} & \frac{200}{399} & -\frac{10}{399} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{399} & -\frac{200}{399} \end{bmatrix} \quad (2.215)$$

Výpočet vektoru \mathbf{K} se provede prostřednictvím ustáleného stavu. Protože je cílem sledovat po částech konstantní referenční trajektorii, je její derivace uvažována nulová. První složka ustáleného stavu se spočítá dosazením do rovnice (2.128)

$$\mathbf{x}_{1,ust} = \begin{bmatrix} -\frac{21}{20}w_1k_1 + \frac{21}{20}w_1k_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.216)$$

Druhou složku $\mathbf{x}_{2,ust}$ není nutné pro výpočet vektoru \mathbf{K} počítat, protože podmínka nulové odchylky od referenční trajektorie je podle 2.134 ve tvaru

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{ust} - \mathbf{w} = -\frac{21}{20}w_1k_1 + \frac{21}{20}w_1k_2 - w_1 = 0 \quad (2.217)$$

Výsledkem je rovnice

$$k_1 = k_2 - \frac{20}{21} \quad (2.218)$$

Parametry k_1, k_2 je nutné dále specifikovat. Protože parametr k_1 se používá při výpočtu přepínání topení a parametr k_2 při chlazení, budou se měnit tyto hodnoty podle požadované hodnoty. Když se systém bude ohřívat (požadovaná hodnota je vyšší než teplota okolí), je $k_2 = 0$ a $k_1 = -\frac{20}{21}$. Když je třeba systém chladit (požadovaná hodnota je nižší než teplota okolí), je $k_1 = 0$ a $k_2 = \frac{20}{21}$.

Stavový rekonstruktor se spočítá dosazením matic řízeného systému do rovnice (2.113). Neznámá matice \mathbf{L} bude mít pět řádků a jeden sloupec.

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{eq,rek} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{C})\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_{eq,rek} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-l_2}{l_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{100} & -\frac{l_3}{l_1} - \frac{51}{50} & -\frac{201}{100} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{l_4}{l_1} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{l_5}{l_1} & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{eq,rek}} \bar{\mathbf{x}}_{eq,rek} \quad (2.219)$$

Matice ekvivalentní dynamiky rekonstruktoru $\bar{\mathbf{A}}_{eq,rek}$ má hodnotu $n-1$, protože došlo k redukci vektoru stavu. Neznámé parametry $l_1 - l_5$ se určí porovnáním charakteristického polynomu matice $\bar{\mathbf{A}}_{eq,rek}$ s polynomem s požadovanými vlastními čísly. Charakteristický polynom matice $\bar{\mathbf{A}}_{eq,rek}$ je

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{eq,rek}) &= s \left(s + \frac{3}{5} \right) \left(s^3 + \left(\frac{l_2}{l_1} + \frac{241}{100} \right) s^2 + \left(\frac{241l_2}{100l_1} + \frac{l_3}{l_1} + \frac{228}{125} \right) s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2l_3}{5l_1} + \frac{201l_2}{250l_1} + \frac{l_5}{2l_1} + \frac{l_4}{2l_1} + \frac{51}{125} \right) \end{aligned} \quad (2.220)$$

Jedno vlastní číslo je nulové a odpovídá redukované složce vektoru stavu. Druhé vlastní číslo má hodnotu $\lambda = -0,6$ a reprezentuje neřiditelnou dynamiku. Parametry matice \mathbf{L} se podle (2.114) musí zvolit tak, aby byla splněna podmínka $\mathbf{C}\mathbf{L} > 0$. Hodnota součinu $\mathbf{C}\mathbf{L}$ se rovná l_1 , podmínka bude splněna když bude $l_1 > 0$. Rekonstruktor by měl mít rychlejší dynamiku než řízený systém, řiditelná vlastní čísla v klouzavém režimu jsou navržena $\lambda_i = -2$. Charakteristický polynom systému s požadovanou dynamikou v klouzavém režimu je ve tvaru

$$s \left(s + \frac{3}{5} \right) (s^3 + 6s^2 + 12s + 8) \quad (2.221)$$

Charakteristický polynom požadované dynamiky je uveden z ilustračních důvodů včetně redukované dynamiky a neřiditelného vlastního čísla. Parametry matice \mathbf{L} se vypočítají porovnáním koeficientů polynomů (2.220), (2.221)

$$\frac{l_2}{l_1} + \frac{241}{100} = 6 \quad (2.222)$$

$$\frac{241l_2}{100l_1} + \frac{l_3}{l_1} + \frac{228}{125} = 12 \quad (2.223)$$

$$\frac{2l_3}{5l_1} + \frac{201l_2}{250l_1} + \frac{l_5}{2l_1} + \frac{l_4}{2l_1} + \frac{51}{125} = 8 \quad (2.224)$$

Soustava tří rovnic obsahuje pět neznámých parametrů, dva parametry je možné zvolit. V tomto případě se zvolí parametr $l_1 = 1$, aby byla splněna podmínka (2.114).

Druhým volitelným parametrem je l_5 . Ten je možné zvolit na základě dodatečných podmínek. V tomto případě bude zvolený tak, aby se rovnaly parametry l_4, l_5 . Řešením soustavy rovnic je

$$l_2 = 3,59 \quad (2.225)$$

$$l_3 = 1,5241 \quad (2.226)$$

$$l_4 = 4,096 \quad (2.227)$$

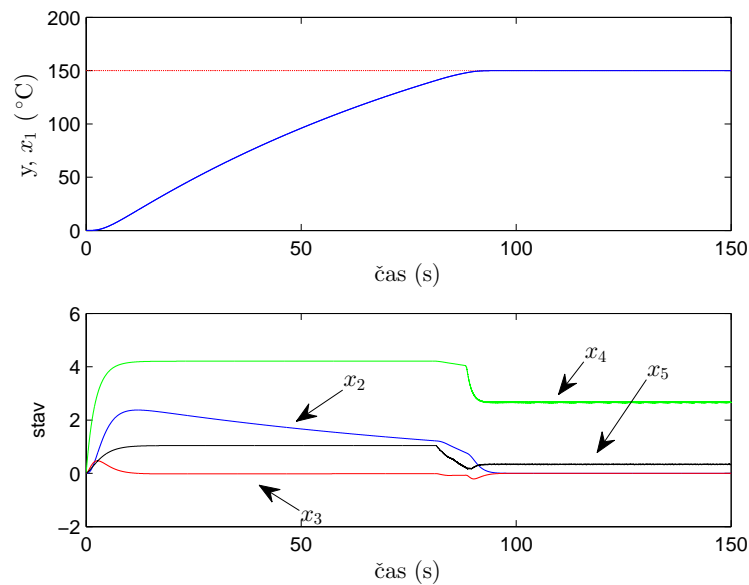
$$l_5 = 4,096 \quad (2.228)$$

Matice parametrů \mathbf{L} rekonstruktoru (2.219) je ve tvaru

$$\mathbf{L} = [1 \quad 3,59 \quad 1,5241 \quad 4,096 \quad 4,096]^T \quad (2.229)$$

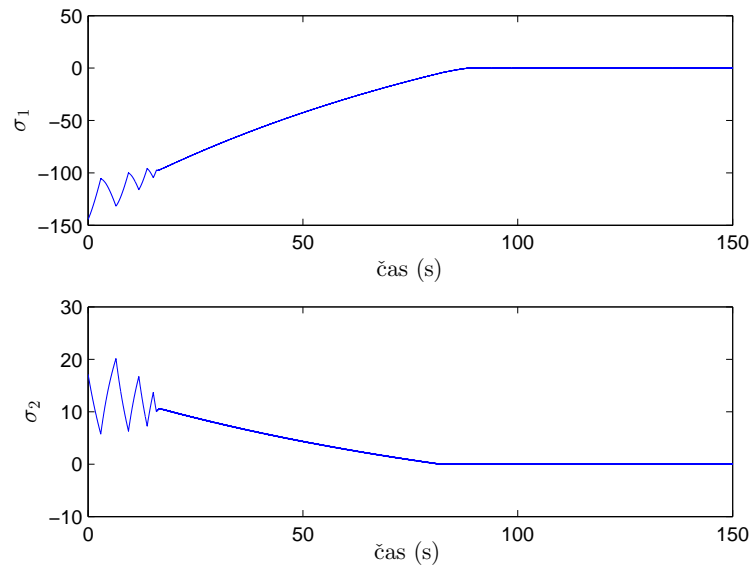
Průběh simulace řízení systému (2.196) s parametry přepínací nadplochy (2.215), parametry rekonstruktoru (2.229) a periodou vzorkování $T_s = 0.01$ je zobrazen na obrázku č. 2.13. Řízený systém vychází z nuly a počáteční stav rekonstruktoru je záměrně volen pro demonstrační účely nenulový $x_{r,0} = [20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. Výstup systému se ustálí na požadované hodnotě přibližně 95 vteřin po začátku simulace a již požadovanou hodnotu neopustí.

První složka přepínací nadplochy σ_1 dosáhne klouzavého režimu přibližně v čase simulace 88,5 vteřiny. Druhá složka přepínací nadplochy σ_2 dosáhne klouzavého režimu 81,5 vteřiny po začátku simulace. Na počátku se v průběhu obou složek přepínací proměnné objeví několik kmitů způsobených ustalováním rekonstruktoru, který má na začátku simulace jiný počáteční stav a najíždí na sledované hodnoty, viz obrázek (2.16).

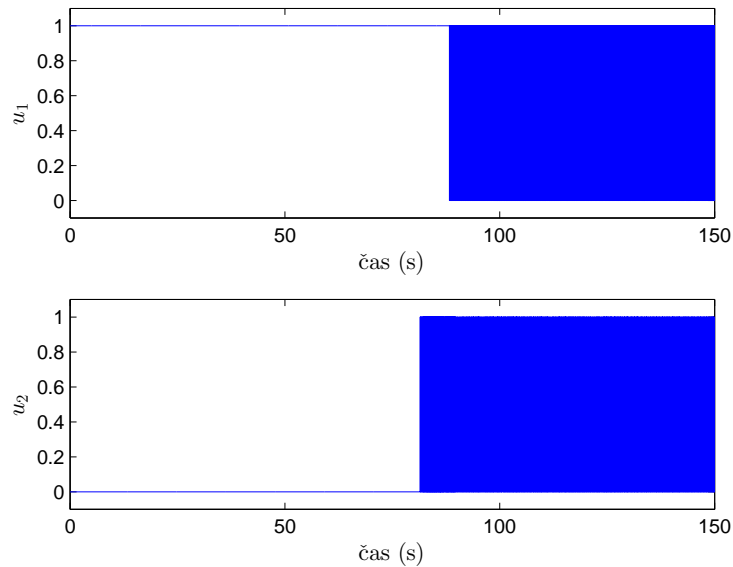


Graf 2.13: Příklad 2.11 - průběh složek vektoru stavu

Rekonstruktor začne sledovat stav řízeného systému přibližně 16 vteřin po začátku si-



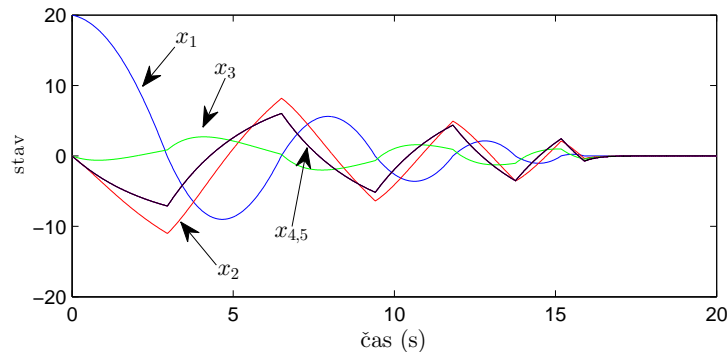
Graf 2.14: Příklad 2.11 - průběh složek vektoru přepínací proměnné σ



Graf 2.15: Příklad 2.11 - průběh složek vektoru vstupu

mulace, což je dostatečně rychlé vzhledem k době regulace výstupu řízeného systému. Ustabilování rekonstruktoru nemá na kvalitu řízení žádný vliv.

Motivační aspekt tohoto příkladu spočívá ve spínání jednotlivých vstupů. Na počátku řízení systém vytápí na požadovanou hodnotu a je zapnuté pouze topení. Během přechodového děje se dostala přepínací proměnná vstupu chlazení do klouzavého režimu a chlazení se přepíná, zatímco topení je stále zapnuto. Systém se blíží k požadované teplotě maximální možnou rychlostí a topení se tímto způsobem omezuje, aby nedošlo k přeregulování. Stejný efekt se dá docílit s menšími náklady, pokud by zůstalo chlazení



Graf 2.16: Příklad 2.11 - průběh složek odchylového vektoru stavu v rekonstruktoru

stále vypnuté a přepínalo by se pouze topení. Finální přepínání obou vstupů nastává v ustáleném stavu, kdy se do klouzavého režimu dostanou obě přepínací nadplochy. Z hlediska funkce řízení s klouzavým režimem je toto chování správně, ale z hlediska spotřeby energie se jedná o zbytečné plýtvání. V situaci, kdy regulovaná veličina sleduje požadovanou teplotu vyšší než je teplota okolí, dává větší smysl systém pouze občas zahřát, aby si udržel teplotu. Chlazení by mělo zůstat vypnuté, což by snížilo spotřebu energie. Efektivnější přepínání vstupů při snížení spotřeby energie je základní problém řešený v dalších kapitolách.

Úloha řízení teploty pomocí více vstupů se dále vyskytuje např. v aplikaci kalibrace a mapování motoru [51], kde se jedná o systém se čtyřmi vstupy (dva pro chladící kapalinu a dva pro olej) a jedním výstupem. V úloze je kladen důraz na přesné řízení teploty chladící kapaliny a oleje proudících v motoru tak, aby teplota na výstupu z motoru sledovala požadovanou hodnotu. Přesná regulace teploty je nutná proto, aby nedocházelo ke zkreslení parametrů motoru během kalibrace. Jak teplota chladící kapaliny, tak olej je řízena pomocí dvou akčních členů: topného tělesa a směšovacího ventilu, který míchá teplé a studené médium.

2.7 Shrnutí

V této kapitole byla představena třída systémů s proměnnou strukturou a speciální chování těchto systémů na nespojitosti ve stavovém prostoru. Detailněji bylo analyzováno vnesení nespojitosti pomocí relé umístěného ve zpětné vazbě a jeho speciální forma, řízení s klouzavým režimem, zabývající se studiem přepínání relé na přepínací nadploše. Dále byly pro řízení s klouzavým režimem uvedeny základní definice, věty a jejich důkazy popisující chování na přepínací nadploše pomocí metody ekvivalentního řízení. Na základě této metody byl uveden postup syntézy přepínací nadplochy a řízení na požadovanou hodnotu. V další podkapitole jsou uvedeny příklady v současnosti publikovaných řídicích algoritmů, které vycházejí z řízení s klouzavým režimem.

Na závěr kapitoly je uvedený motivační příklad návrhu řízení s klouzavým režimem na modelu jedné zóny plastikářského extruderu. Na tomto příkladu je ukázáno přepínání nezávislých vstupů v průběhu řízení a hlavní nevýhoda řízení s klouzavým režimem pro systémy s více vstupy: neekonomické přepínání vstupů.

3 Formulace úlohy a cíle disertační práce

3.1 Popis úlohy

V motivačním příkladu v předchozí kapitole je pro řízení s klouzavým režimem aplikované na systém s více vstupy a jedním výstupem demonstrováno, že základní algoritmus řízení s klouzavým režimem přepíná všechny vstupy i v případě, kdy to není nezbytně nutné pro přesné řízení. Rozšíření základního algoritmu řízení s klouzavým režimem uvedené v této práci spočívá v zavedení možnosti některé vstupy během řízení fixovat a tím snížit spotřebu energie při zachování kvality řízení.

V základním algoritmu řízení s klouzavým režimem se navrhuje m přepínacích nadploch na základě požadavků na ekvivalentní dynamiku, vlastní přepínání vstupů je nezávislé a není možné některé vstupy fixovat. Cílem této práce je navrhnout množinu dvoustavových regulátorů, kde každý dvoustavový regulátor přepíná mezi dvěma specifickými kombinacemi vstupů pomocí řízení s klouzavým režimem. Výsledná strategie řízení bude tvořena posloupností vybraných dvoustavových regulátorů. Tímto postupem bude možné u některých vstupů zafixovat jejich hodnotu během řízení. Skupina takto fixovaných vstupů se může v průběhu řízení měnit podle požadavků na řízení nebo podle předem definovaných pravidel výběru posloupnosti dvoustavových regulátorů. Výsledkem úlohy bude efektivnější řízení při zachování stejné kvality regulace jako v základní metodě řízení s klouzavým režimem.

Řešení této úlohy lze obecně použít v situacích, kdy je jedna řízená veličina regulována více binárními vstupy tak, aby chování systému splnilo předem stanovené požadavky. Konkrétně se jedná například o řízení teploty s topením a chlazením. Výsledný algoritmus bude buď zároveň přepínat topení i chlazení, nebo jeden ze vstupů zafixuje a bude přepínat pouze druhý vstup. Jiný příklad z oblasti řízení teploty je ohřívání vody v bojleru s více topnými tělesy, například typ Electrolux EWH 80R. Zde bude algoritmus řízení přepínat buď pouze jedno, dvě nebo všechny tři topná tělesa najednou, nepřepínaná topná tělesa budou mít fixovanou hodnotu.

3.2 Formulace úlohy

Je dán řízený systém ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Stav $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je n -řádkový vektor, vektor vstupu $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ má m řádek, matice dynamiky $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je čtvercová matice řádu n , matice vstupu $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ má n řádek a m sloupců. Výstup systému $y \in \mathbb{R}$ je skalární veličina a matice výstupu (vektor) $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$ má n sloupců. Všechny vstupy řízeného systému $u_i \in \{u_i^-, u_i^+\}$, $i = 1..m$, jsou binární, u_i^- označuje vypnutý a u_i^+ zapnutý vstup. Během řízení se střídá omezený počet kombinací vstupů $[u_1, \dots, u_m]$. Cílem řízení tohoto systému je nájezd a následná regulace výstupu řízeného systému na požadovanou hodnotu.

Řešením úlohy je návrh konečné množiny dvoustavových regulátorů, kde výstup každého regulátoru přepíná mezi dvěma různými kombinacemi $[u_{1,1}, \dots, u_{m,1}]$, $[u_{1,2}, \dots, u_{m,2}]$,

kde $u_{i,j} \in \{u_i^-, u_i^+\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2$ podle stavu řízeného systému s využitím řízení s klouzavým režimem. Druhou částí řešení je stanovení strategie přepínání mezi jednotlivými dvoustavovými regulátory v průběhu řízení podle stavu řízeného systému tak, aby výstup systému sledoval požadovanou hodnotu.

3.3 Cíle disertační práce

Řešením formulované úlohy je

1. Navrhnout dvoustavový regulátor využívající řízení s klouzavým režimem přepínající mezi dvěma kombinacemi $[u_{1,1}, \dots, u_{m,1}]$, $[u_{1,2}, \dots, u_{m,2}]$, kde $u_{i,j} \in \{u_i^-, u_i^+\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2$. Tento regulátor musí splňovat všechny definice řízení s klouzavým režimem a umožňovat sledování referenční trajektorie.
2. Stanovit množinu dvoustavových regulátorů odpovídajících možným kombinacím přepínání binárních vstupů.
3. Navrhnout algoritmus přepínání mezi jednotlivými dvoustavovými regulátory během řízení.

4 Návrh dvoustavového regulátoru

V této kapitole je navržen dvoustavový regulátor přepínající mezi dvěma kombinacemi vstupů s využitím řízení s klouzavým režimem. Pro tento regulátor je ukázána platnost definicí a vět formulovaných v kapitole 2.3.

4.1 Zákon řízení

Podle formulované úlohy má každý dvoustavový regulátor na výstupu přepínat mezi dvěma kombinacemi vstupů $[u_{1,1}, \dots, u_{m,1}]$, $[u_{1,2}, \dots, u_{m,2}]$, kde $u_{i,j} \in \{u_i^-, u_i^+\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2$. Pro zjednodušení zápisu se výstup dvoustavového regulátoru převede do vektorového tvaru, kde složky vektoru odpovídají jednotlivým vstupům

$$\mathbf{u} = [u_1 \ \dots \ u_m]^T, u_i \in \{u_i^-, u_i^+\}, i = 1, \dots, m \quad (4.1)$$

u_i^- označuje vypnutý a u_i^+ zapnutý vstup. Na výstupu dvoustavového regulátoru mohou nastat dvě různé hodnoty vektoru \mathbf{u} . Protože se při výpočtu výstupu regulátoru využije řízení s klouzavým režimem přepínající na základě znaménka přepínací nadplochy, jsou dále tyto dvě hodnoty označeny \mathbf{u}^- a \mathbf{u}^+ . Výstup dvoustavového regulátoru nabývá hodnoty \mathbf{u}^- , když je přepínací proměnná záporná, a \mathbf{u}^+ pro kladnou přepínací proměnnou.

Definice 4.1

Dvoustavový regulátor přepínající mezi dvěma vektory \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ pomocí skalární přepínací proměnné σ je ve tvaru

$$\mathbf{u} = \underbrace{\frac{\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-}{2}}_{=\mathbf{k}_1} \operatorname{sgn}(\sigma) + \underbrace{\frac{\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-}{2}}_{=\mathbf{k}_2} \quad (4.2)$$

Skalární přepínací proměnná σ je definovaná rovnicí

$$\sigma = \mathbf{S}\mathbf{x} \quad (4.3)$$

Vektory $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^m$ jsou funkcí přepínané dvojice \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ a spočítají se pomocí vztahu $\mathbf{u} = \mathbf{k}_1 \operatorname{sgn} \sigma + \mathbf{k}_2$ pro kladnou a zápornou hodnotu přepínací proměnné.

$$\sigma > 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}^+ = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (4.4)$$

$$\sigma < 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}^- = -\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (4.5)$$

4.1.1 Klouzavý režim

Pro zákon řízení (4.2) je nutné ověřit, zda podmínka existence klouzavého režimu a vztahy pro popis chování v klouzavém režimu odpovídají základním větám a definicím uvedeným v kapitole 2.3.

4.1.1.1 Existence klouzavého režimu

Definice klouzavého režimu pro modifikovaný zákon řízení je stejná jako definice 2.2 pro základní klouzavý režim. Stejná je i podmínka existence klouzavého režimu podle

věty 2.1. Pro řízený systém (3.1) je zvolena Ljapunovova funkce ve tvaru (2.25). Do její derivace (2.26) se za přepínací proměnnou σ dosadí z (4.3).

$$\dot{V}(\sigma) = \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{SAx} + \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{SBu} \quad (4.6)$$

Do (4.6) se dosadí zákon řízení (4.2).

$$\dot{V}(\sigma) = \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{SAx} + |\mathbf{Sx}| \cdot \mathbf{SBk}_1 + \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{SBk}_2 \quad (4.7)$$

Třetí podmínka na Ljapunovovu funkci je splněna, (4.7) se rovná nule pouze pro $\sigma = \mathbf{Sx} = 0$. Derivace Ljapunovovy funkce (4.7) bude negativně definitní právě tehdy, když

$$\mathbf{Sx} \cdot \mathbf{SAx} + |\mathbf{Sx}| \cdot \mathbf{SBk}_1 + \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{SBk}_2 < 0 \quad (4.8)$$

Výpočet se provede na dvě části

Pro $\mathbf{Sx} > 0$

$$\mathbf{SAx} + \mathbf{SBk}_1 + \mathbf{SBk}_2 < 0 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{SAx} < -\mathbf{SB}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = -\mathbf{SBu}^+ \quad (4.10)$$

Pro $\mathbf{Sx} < 0$

$$\mathbf{SAx} - \mathbf{SBk}_1 + \mathbf{SBk}_2 > 0 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{SAx} > -\mathbf{SB}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) = -\mathbf{SBu}^- \quad (4.12)$$

Nutná podmínka existence klouzavého režimu lze vyjádřit jako

$$\mathbf{SAx} \in (-\mathbf{SBu}^-, -\mathbf{SBu}^+) \quad (4.13)$$

Interval $(-\mathbf{SBu}^-, -\mathbf{SBu}^+)$ je neprázdný právě tehdy, když

$$\mathbf{SBu}^- - \mathbf{SBu}^+ > 0 \quad (4.14)$$

Tuto nerovnici lze dále upravit dosazením z (4.4), (4.5) do tvaru

$$\mathbf{SBk}_1 < 0 \quad (4.15)$$

Pro dvoustavový regulátor (4.2) přepínající mezi dvěma hodnotami \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ existuje neprázdný klouzavý režim právě tehdy, když je splněna podmínka (4.15). Protože vektor \mathbf{k}_1 je funkcí přepínané dvojice \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ , musí se existence klouzavého režimu ověřit samostatně pro všechny přípustné dvoustavové regulátory.

Každý dvoustavový regulátor je navržen tak, aby jeho výstup přepínal mezi dvěma kombinacemi vstupů $[u_{1,1}, \dots, u_{m,1}]$, $[u_{1,2}, \dots, u_{m,2}]$, kde $u_{i,j} \in \{u_i^-, u_i^+\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2$. Na počátku návrhu přepínací nadplochy se jedna hodnota zvolila jako vektor \mathbf{u}^- , který je na výstupu regulátoru pro zápornou hodnotu přepínací proměnné, a druhá hodnota jako vektor \mathbf{u}^+ , který je na výstupu regulátoru pro kladnou hodnotu přepínací proměnné. Toto přiřazení nebylo nijak specifikované a je nutné ověřit jeho správnost. K tomu se použije odvozená podmínka existence klouzavého režimu (4.15).

Pokud je pro navrženou přepínací nadplochu podmínka (4.15) splněna, klouzavý režim existuje, volba vektorů \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ byla provedena správně a dvoustavový regulátor je možné použít v navrženém tvaru.

Pokud podmínka (4.15) splněna není, je nutné přiřazení přepínaných hodnot zaměnit, tzn. regulátor bude na výstupu nabývat hodnotu \mathbf{u}^- pro kladnou hodnotu přepínací proměnné a hodnotu \mathbf{u}^+ pro zápornou hodnotu přepínací proměnné. Tato korekce zajistí splnění podmínky (4.15) a existenci klouzavého režimu. Tato záměna nemá žádný vliv chování v klouzavém režimu, způsobí pouze jeho existenci a navržený regulátor je možné po korekci použít k řízení.

4.1.1.2 Dynamika v klouzavém režimu

Pro analýzu klouzavého režimu je nutné odvodit ekvivalentní vstup a ekvivalentní dynamiku pro zákon řízení (4.2). Ekvivalentní řízení se vypočítá pomocí vztahu (2.38) dosazením rovnic (3.1), (4.2), (4.3).

$$u_{eq} = -(\mathbf{SBk}_1)^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bk}_2) \quad (4.16)$$

Analogicky k obecnému klouzavému režimu i zde platí věta 2.3 o velikosti ekvivalentního řízení. Pro ekvivalentní řízení (4.16) tvoří klouzavý region všechny hodnoty stavu \mathbf{x} splňující podmínku

$$|u_{eq}| = |-(\mathbf{SBk}_1)^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bk}_2)| < 1 \quad (4.17)$$

Ekvivalentní dynamika se spočítá podle definice 2.4 dosazením ekvivalentního řízení (4.16) do rovnice dynamiky stavového popisu řízeného systému (3.1)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{eq} &= \mathbf{Ax}_{eq} + \mathbf{B}(\mathbf{k}_1 u_{eq} + \mathbf{k}_2) = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{Bk}_1(\mathbf{SBk}_1)^{-1} \mathbf{S}) (\mathbf{Ax}_{eq} + \mathbf{Bk}_2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.1.1.3 Stabilita v klouzavém režimu

Stabilita v klouzavém režimu je určena vlastními čísly matice ekvivalentní dynamiky, kterou lze odvodit z rovnice (4.18) ve tvaru

$$\mathbf{A}_{eq} = (\mathbf{I} - \mathbf{Bk}_1(\mathbf{SBk}_1)^{-1} \mathbf{S}) \mathbf{A} \quad (4.19)$$

Klouzavý režim je stabilní právě tehdy, když jsou vlastní čísla matice (4.19) v levé komplexní polorovině.

4.1.1.4 Redukce řádu

Poslední vlastnost klouzavého režimu, redukce řádu řízeného systému (věta 2.5) je platná i pro modifikovaný zákon řízení. Pro ověření platnosti této věty je uvedený následující důkaz

Důkaz 4.1

Pro důkaz je nutné transformovat systém do regulární formy. Postup je uveden v následující kapitole 4.2.1. Rovnice ekvivalentní dynamiky v regulární formě je

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{eq} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{S}}) (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}_{eq} + \bar{\mathbf{k}}_2) \quad (4.20)$$

Vektor $\bar{\mathbf{B}}$ v regulární formě je ve tvaru

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Po dosazení (4.21) do členu $\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}})^{-1}\bar{\mathbf{S}}$ vyjde

$$\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}})^{-1}\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} (\bar{s}_n)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{n-1} & \bar{s}_n \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

kde $\mathbf{0}_{n-1}$ reprezentuje prvních $n - 1$ nulových prvků vektoru $\bar{\mathbf{B}}$ a $\bar{\mathbf{S}}_{n-1}$ reprezentuje prvních $n - 1$ parametrů návrhové matice $\bar{\mathbf{S}}$. Po roznásobení rovnice (4.22) vyjde

$$\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}})^{-1}\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n-1}}{\bar{s}_n} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Do rovnice ekvivalentní dynamiky (4.18) se dosadí vztah (4.23)

$$(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}})^{-1}\bar{\mathbf{S}}) (\mathbf{A}\bar{x}_{eq} + \mathbf{B}\mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1)} \\ \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n-1}}{\bar{s}_n} & 0 \end{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}}\bar{x}_{eq} + \bar{\mathbf{k}}_2) \quad (4.24)$$

Obecná věta o hodnotě součinu dvou matic říká, že hodnota součinu dvou matic je rovna menší z hodnot obou matic. Hodnota matice $(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}})^{-1}\bar{\mathbf{S}})$ v rovnici (4.24) je rovna $n - 1$. Za předpokladu, že matice $\bar{\mathbf{A}}$ má plnou hodnotu, má výsledná matice součinu $(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{B}})^{-1}\bar{\mathbf{S}}) \bar{\mathbf{A}}$ hodnotu $n - 1$. To implikuje lineární závislost řádků v této matici a redukci řádu ekvivalentní dynamiky v klouzavém režimu na $n - 1$. Redukovaná stavová proměnná se dopočítá prostřednictvím rovnice přepínací nadplochy $\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{x}} = 0$ a její derivace bude rovna nule, protože dojde i k eliminaci aditivní složky.

4.2 Návrh zákona řízení

V kapitole 2.4 je popsán obecný návrh řízení s klouzavým režimem. Uvedené vztahy budou modifikovány, aby vyhovovaly navrženému dvoustavovému regulátoru (4.2). Protože navržený regulátor je definovaný podle funkce stavu, je uveden pouze návrh s měřitelným vektorem stavu.

4.2.1 Regulární forma

Pro modifikovaný zákon řízení je nutné upravit transformační vztahy převádějící řízený systém do regulární formy, aby byla zaručena regularita. Řízený systém (3.1) s dosazeným zákonem řízení (4.2) je ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{k}_1 \operatorname{sgn} \sigma + \mathbf{B}\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \sigma &= \mathbf{S}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Regulární forma systému (4.25) je stavová reprezentace ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\text{sgn}\sigma + \bar{\mathbf{k}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \text{sgn}\sigma + \bar{\mathbf{k}}_2 \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \\ \sigma &= \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Dimenze komponent stavového popisu jsou: $\bar{\mathbf{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $\bar{\mathbf{A}}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$, $\bar{\mathbf{A}}_{21} \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$, $\bar{\mathbf{A}}_{22} \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Zároveň musí být $\bar{\mathbf{B}}_2 \neq 0$. Transformační vztahy mezi systémem v původních souřadnicích (4.25) a regulární formou (4.26) jsou definovány

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad (4.27)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{k}_1 \quad (4.28)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \quad (4.29)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1} \quad (4.30)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_2 = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{k}_2 \quad (4.31)$$

Parametr \mathbf{k}_1 je zahrnutý v matici $\bar{\mathbf{B}}$ v regulární formě právě z důvodu zachování regularity. V případě definování matice $\bar{\mathbf{B}}$ obvyklým způsobem ($\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B}$) by byla hodnota matice $\bar{\mathbf{B}}_2$ rovna počtu vstupů m a součin $\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{k}_1$ by za určitých podmínek měl víc nenulových řádek.

Věta 4.1.

Nechť vektor \mathbf{B}_k je ve tvaru

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(1, :)\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{B}(2, :)\mathbf{k}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}(n-1, :)\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{B}(n, :)\mathbf{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(1, 1)\mathbf{k}_1(1) + \dots + \mathbf{B}(1, m)\mathbf{k}_1(m) \\ \mathbf{B}(2, 1)\mathbf{k}_1(1) + \dots + \mathbf{B}(2, m)\mathbf{k}_1(m) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(n-1, 1)\mathbf{k}_1(1) + \dots + \mathbf{B}(n-1, m)\mathbf{k}_1(m) \\ \mathbf{B}(n, 1)\mathbf{k}_1(1) + \dots + \mathbf{B}(n, m)\mathbf{k}_1(m) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

kde $\mathbf{B}(i, :)$, $i = 1..n$ označuje n -tý řádek matice \mathbf{B} . Transformační matice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stavové transformace $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ převádějící systém $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{S})$ do regulární formy $\bar{\mathcal{S}}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{S}})$ podle vztahů (4.27)-(4.31) je ve tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & -\mathbf{B}_{k,1}\mathbf{B}_{k,2}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}_{k,2}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

kde

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{k,1} \\ \mathbf{B}_{k,2} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

a $\mathbf{B}_{k,1} \in \mathbb{R}^{(n-1)}$, $\mathbf{B}_{k,2} \in \mathbb{R}$. Nutná a postačující podmínka existence transformační matice \mathbf{T} je

$$\mathbf{B}_{k,2} = \mathbf{B}(n, :)\mathbf{k}_1 \neq 0 \quad (4.35)$$

Důkaz 4.2

Důkaz, že transformační matice (4.33) převede systém do regulární formy lze provést dosazením do transformačního vztahu (4.28)

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & -\mathbf{B}_{k,1}(\mathbf{B}(n,:\mathbf{k}_1))^{-1} \\ 0 & (\mathbf{B}(n,:\mathbf{k}_1))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{k,1} \\ \mathbf{B}(n,:\mathbf{k}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Tato matice splňuje definici regulární formy.

Důkaz existence transformační matice je jednoduchý. Aby matice \mathbf{T} byla maticí transformace, musí být invertovatelná, což implikuje její regularitu. Protože

$$\det \mathbf{T} = \det \mathbf{I}_{n-1}(\mathbf{B}(n,:\mathbf{k}_1))^{-1} = (\mathbf{B}(n,:\mathbf{k}_1))^{-1} \quad (4.37)$$

musí být součin $\mathbf{B}(n,:\mathbf{k}_1)$ nenulový, jinak nebude existovat inverze transformační matice \mathbf{T} . Pokud bude součin $\mathbf{B}(n,:\mathbf{k}_1)$ nulový, je možné stavový popis vhodnou transformací upravit tak, aby vyhovoval této podmínce.

Protože \mathbf{B}_k je sloupcový vektor, lze transformační matici (4.33) rozepsat

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\mathbf{B}(1,1)\mathbf{k}_1(1)+\dots+\mathbf{B}(1,m)\mathbf{k}_1(m)}{\mathbf{B}(n,1)\mathbf{k}_1(1)+\dots+\mathbf{B}(n,m)\mathbf{k}_1(m)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\mathbf{B}(2,1)\mathbf{k}_1(1)+\dots+\mathbf{B}(2,m)\mathbf{k}_1(m)}{\mathbf{B}(n,1)\mathbf{k}_1(1)+\dots+\mathbf{B}(n,m)\mathbf{k}_1(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\mathbf{B}(n-1,1)\mathbf{k}_1(1)+\dots+\mathbf{B}(n-1,m)\mathbf{k}_1(m)}{\mathbf{B}(n,1)\mathbf{k}_1(1)+\dots+\mathbf{B}(n,m)\mathbf{k}_1(m)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mathbf{B}(n,1)\mathbf{k}_1(1)+\dots+\mathbf{B}(n,m)\mathbf{k}_1(m)} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Příklad 4.1

Na příkladu je demonstrována transformace MIMO systému do regulární formy pro modifikovaný zákon řízení. K výpočtu je použitý stavový popis (2.196) z příkladu 2.11. Vstup systému má dvě složky, které přepínají mezi hodnotami 0 a 1. Pro výpočet je uvažován dvoustavový regulátor přepínající mezi dvěma kombinacemi $\mathbf{u}^- = [1 \ 0]^T$, $\mathbf{u}^+ = [0 \ 0]^T$, tzn. kombinace spínání prvního vstupu s druhým vstupem vypnutým.

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Matice \mathbf{B}_k je ve tvaru

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -0.1 \\ 0.1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -0,05 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Submatice $\mathbf{B}_{k,1}$, $\mathbf{B}_{k,2}$ v tomto systému jsou

$$\mathbf{B}_{k,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{k,2} = [-0.05] \quad (4.42)$$

Transformační matice \mathbf{T} spočítaná dosazením matic (4.42) do vztahu (4.33) vyjde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Matice $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{k}}_2$ se spočítají dosazením transformační matice \mathbf{T} do transformačních vztahů (4.27),(4.28),(4.31).

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{k}_1\text{sgn}\sigma + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{k}_2 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 & -0,525 \\ 0 & 0 & 0 & -2,5 & 1,995 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1,5 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sgn}\sigma + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Stavová reprezentace (4.44) je v regulární formě a vlastní čísla matice $\bar{\mathbf{A}}$ zůstala zachována.

4.2.2 Návrh přepínací nadplochy

Postup návrhu je identický jako v kapitole 2.4.2, liší se pouze některé rovnice. Při návrhu parametrů přepínací nadplochy se vyjde ze stavové reprezentace (4.25) s dosaženým zákonem řízení (4.2). S použitím transformační matice \mathbf{T} (4.33) se zavedou nové stavové souřadnice

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (4.45)$$

Tato transformace převede řízený systém (4.25) do jeho regulární formy

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{k}}_{21} \quad (4.46)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{21}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{B}}_2\text{sgn}\sigma + \bar{\mathbf{k}}_{22} \quad (4.47)$$

Dimenze jednotlivých komponent stavového popisu jsou vzhledem ke známé dimenzi vektoru vstupu závislé jen na řádu systému: $\bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $\bar{\mathbf{A}}_{12} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\bar{\mathbf{A}}_{21}^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\bar{\mathbf{A}}_{22} \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{k}}_{12} \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $\bar{\mathbf{k}}_{22} \in \mathbb{R}$. Dále je návrh přepínací nadplochy identický jako v obecném případě. Vyjádří se přepínací proměnná v transformovaných souřadnicích ve tvaru (2.85) a z ní vektor $\bar{\mathbf{x}}_2$ podle (2.86).

Po dosazení $\bar{\mathbf{x}}_2$ z (2.86) do první rovnice stavové reprezentace (4.46) vyjde rovnice dynamiky v klouzavém režimu

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1)}_{=\bar{\mathbf{A}}_{eq}} \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_{21} \quad (4.48)$$

S takto navrženou ekvivalentní dynamikou se dále pracuje stejně jako je uvedeno v kapitole 2.4.2.

V případě, kdy je stav řízeného systému neměřitelný, lze opět navrhnout rekonstruktor postupem uvedeným v kapitole 2.4.4. Zavedení dvoustavového regulátoru ve tvaru (4.2) nemá na návrh rekonstruktoru žádný vliv.

4.2.3 Kompenzace statického zesílení

Úloha řízení na konstantní hodnotu se odvodí analogicky jako pro základní návrh přepínací nadplochy. Při výpočtu se vychází z regulární formy (4.46),(4.47) a přepínací nadplochy

$$\sigma = \bar{\mathbf{S}}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{S}}_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + K w \quad (4.49)$$

Protože ve dvoustavovém regulátoru je definovaná přepínací proměnná σ skalární, jsou skalární také parametr K a požadovaná hodnota w . Z rovnice (4.49) se vyjádří subvektor x_2 (v modifikované úloze rovněž skalár)

$$\bar{\mathbf{x}}_2 = -\bar{\mathbf{S}}_2^{-1} \bar{\mathbf{S}}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{S}}_2^{-1} K w |_{\sigma=0} \quad (4.50)$$

Dosazením z rovnice (4.50) do první rovnice regulární formy (4.46) se vypočítá popis dynamiky v klouzavém režimu

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12} \bar{\mathbf{S}}_2^{-1} \bar{\mathbf{S}}_1) \bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_{12} \bar{\mathbf{S}}_2^{-1} K w + \bar{\mathbf{k}}_{21} \quad (4.51)$$

Parametr K se vypočítá prostřednictvím ustáleného stavu. Vektor $\bar{\mathbf{x}}_{1,\text{ust}}$ se spočítá z rovnice (4.51). V ustáleném stavu je derivace vektoru stavu rovna nule.

$$\bar{\mathbf{x}}_{1,\text{ust}} = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12} \bar{\mathbf{S}}_2^{-1} \bar{\mathbf{S}}_1)^{-1} (\bar{\mathbf{A}}_{12} \bar{\mathbf{S}}_2^{-1} K w - \bar{\mathbf{k}}_{21}) \quad (4.52)$$

Vektor $\bar{\mathbf{x}}_{2,\text{ust}}$ se spočítá dosazením ekvivalentního řízení do druhé rovnice regulární formy (4.47)

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = -\bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{S}}_1 (\bar{\mathbf{A}}_{11} \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12} \bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{k}}_{21}) - \bar{\mathbf{B}}_2 K \dot{w} \quad (4.53)$$

$$0 = -\bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{S}}_1 (\bar{\mathbf{A}}_{11} \bar{\mathbf{x}}_{1,\text{ust}} + \bar{\mathbf{A}}_{12} \bar{\mathbf{x}}_{2,\text{ust}} + \bar{\mathbf{k}}_{21}) - \bar{\mathbf{B}}_2 K \dot{w} \quad (4.54)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{2,\text{ust}} = -(\bar{\mathbf{S}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{12})^{-1} (\bar{\mathbf{S}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{11} \bar{\mathbf{x}}_{1,\text{ust}} + \bar{\mathbf{k}}_{21} + K \dot{w}) \quad (4.55)$$

Matice parametrů \mathbf{K} se spočítá z podmínky sledování referenční trajektorie. V ustáleném stavu platí

$$\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}_{\text{ust}} - w = 0 \quad (4.56)$$

Řešením rovnice (4.56) je kompenzační zesílení K , které zajistí nulovou odchylku výstupu řízeného systému od požadované hodnoty.

4.2.4 Sledování trajektorie

Sledování trajektorie pomocí řízení s klouzavým režimem lze realizovat pro přepínací proměnnou navrženou jako funkci regulační odchylky a jejích derivací [16]. Úloha řízení s dvoustavovým regulátorem se pro takto navrženou přepínací proměnnou modifikuje. Stavový popis řízeného systému je uvažovaný ve tvaru regulární formy podle (4.26). Přepínací proměnná je definována jako vážený součet regulační odchylky a jejích prvních $r - 1$ derivací, kde r je relativní řád řízeného systému.

$$\sigma = \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{e}} = \bar{s}_1 (y - w) + \bar{s}_2 (\dot{y} - \dot{w}) + \dots + \bar{s}_{r-1} (y^{(r-1)} - w^{(r-1)}) \quad (4.57)$$

w značí požadovanou referenční trajektorii, kterou má výstup řízeného systému sledovat. Počet derivací regulační odchylky je dán faktem, že řízení u potřebné pro výpočet

ekvivalentního řízení se poprvé vyskytuje v r -té derivaci regulační odchylky. Aby se řízení poprvé vyskytlo v derivaci přepínací proměnné, musí přepínací proměnná obsahovat prvních $r - 1$ derivací regulační odchylky. Dosazením za výstup a jeho derivace ze stavového popisu řízeného systému (4.26) se odvodí přepínací nadplocha v maticovém tvaru

$$\sigma = \underbrace{\bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} & \dots & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{r-1} \end{bmatrix}^T}_{=\bar{\mathbf{S}}_e} \bar{\mathbf{x}} - \underbrace{\bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} w & \dot{w} & \dots & w^{(r-1)} \end{bmatrix}^T}_{=\mathbf{w}} \quad (4.58)$$

Označení vektoru parametrů přepínací proměnné jako $\bar{\mathbf{S}}_e$ a vektoru referenční trajektorie a jejích derivací \mathbf{w} jsou zavedena pro zjednodušení zápisu následujících výpočtů. Ekvivalentní řízení se spočítá standardním způsobem z derivace přepínací proměnné (4.58) dosazením z rovnice dynamiky řízeného systému (4.25)

$$u_{eq} = -(\bar{\mathbf{S}}_e \bar{\mathbf{B}})^{-1} (\bar{\mathbf{S}}_e (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{k}}_2) - \bar{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{w}}) \quad (4.59)$$

Po dosazení ekvivalentního řízení do stavového popisu vyjde ekvivalentní dynamika v klouzavém režimu.

$$\dot{\mathbf{x}}_{eq} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}_e \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{S}}_e) (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{k}}_2) + \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{S}}_e \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{w}} \quad (4.60)$$

Matici návrhových parametrů $\bar{\mathbf{S}}$ lze opět vypočítat například metodou přiřazení pólů matici ekvivalentní dynamiky. Vektor $\bar{\mathbf{S}}_e$ se vypočítá dosazením navržené matice $\bar{\mathbf{S}}$ do (4.58). S vektorem $\bar{\mathbf{S}}_e$ se dále zachází obvyklým způsobem a lze jej například transformovat do původních stavových souřadnic pomocí transformační matice (4.43).

Pro systémy s relativním řádem $r < n - 1$, kde n je řád řízeného systému, obsahují póly matice ekvivalentní dynamiky také nuly otevřené regulační smyčky, viz kapitola 2.4.3. Proto je tato metoda použitelná pouze pro systémy se stabilními nulami.

4.2.5 Speciální tvar přepínací nadplochy

Problém při návrhu ekvivalentní dynamiky spočívá ve vlivu vlastních čísel matice ekvivalentní dynamiky na velikost klouzavého režimu. Jak je naznačeno již v příkladu 2.3, klouzavý režim nemusí nastat při prvním protnutí přepínací nadplochy stavovou trajektorií pro libovolně zvolená požadovaná vlastní čísla ekvivalentní dynamiky. Výsledek takové situace je nekvalitní řízení, kde výstup řízeného systému nezačne sledovat požadovanou hodnotu při jejím prvním dosažení. Tato kapitola se zabývá návrhem parametrů přepínací nadplochy tak, aby klouzavý region odpovídal celé přepínací nadploše a klouzavý režim nastal při prvním dosažení přepínací nadplochy.

Věta 4.2.

Klouzavý region odpovídá celé přepínací nadploše $\mathbf{S}\mathbf{x} = 0$ právě tehdy, když je vektor \mathbf{S} parametrů přepínací nadplochy zvolen jako levý vlastní vektor matice dynamiky \mathbf{A} systému (3.1) řízeného zákonem řízení (4.2) a zároveň je splněna podmínka

$$| -(\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{k}_1)^{-1} \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{k}_2 | < 1 \quad (4.61)$$

Důkaz 4.3

Důkaz věty 4.2 se provede analýzou ekvivalentního řízení. Velikost klouzavého režimu

je určena podmínkou (4.17). Aby existoval klouzavý režim na celé přepínací nadploše, musí být pro každé \mathbf{x} na přepínací nadploše splněna nerovnice

$$| -(\mathbf{SBk}_1)^{-1}(\mathbf{SAx} + \mathbf{SBk}_2)| < 1 \quad (4.62)$$

Aby byla tato podmínka splněna pro libovolně velkou hodnotu vektoru \mathbf{x} , musí být tento výraz na vektoru \mathbf{x} nezávislý. To lze provést pomocí následující úvahy: vektor \mathbf{x} je vyloučen z nerovnice (4.62) právě tehdy, když bude výraz \mathbf{SAx} roven nule. To může nastat ve dvou případech. První případ je pro nulový vektor stavu. Druhý případ nastává právě tehdy, když vektor parametrů přepínací nadplochy \mathbf{S} odpovídá levému vlastnímu vektoru matice dynamiky \mathbf{A} řízeného systému. V takovém případě je možné provést substituci, která vychází z definice levého vlastního vektoru příslušného vlastnímu číslu λ matice \mathbf{A}

$$\mathbf{SAx} = \lambda \mathbf{Sx} |_{\mathbf{SA}=\lambda \mathbf{S}} \quad (4.63)$$

Protože ekvivalentní řízení se počítá pouze na přepínací nadploše, tj. pro $\mathbf{Sx} = 0$, je zřejmé, že rovnice (4.63) bude v každém bodě přepínací nadplochy rovna nule. Po dosazení takto navrženého vektoru \mathbf{S} do nerovnice (4.62) dojde k vyloučení členu \mathbf{SAx} a podmínka existence klouzavého režimu přejde do tvaru

$$| -(\mathbf{SBk}_1)^{-1} \mathbf{SBk}_2| < 1 \quad (4.64)$$

Splnění podmínky (4.64) tak implikuje existenci klouzavého režimu na celé přepínací nadploše $\mathbf{Sx} = 0$ a věta je dokázána.

V případě řízení na nenulovou požadovanou hodnotu musí být věta 4.2 přeformulována.

Věta 4.3.

Klouzavý region odpovídá celé přepínací nadploše $\mathbf{Sx} + Kw = 0$ právě tehdy, když je vektor \mathbf{S} parametrů přepínací nadplochy zvolen jako levý vlastní vektor matice dynamiky \mathbf{A} systému (3.1) řízeného zákonem řízení (4.2) a zároveň je splněna podmínka

$$\lambda Kw \in (\mathbf{SBu}^+, \mathbf{SBu}^-) \quad (4.65)$$

kde λ je vlastní číslo matice dynamiky \mathbf{A} příslušné zvolenému levému vlastnímu vektoru.

Důkaz 4.4

Důkaz je obdobný předchozímu. Do nerovnice (4.62) se dosadí substituce (4.63), z rovnice přepínací nadplochy se vyjádří člen $\mathbf{Sx} = -Kw$ a podmínka (4.62) přejde do tvaru

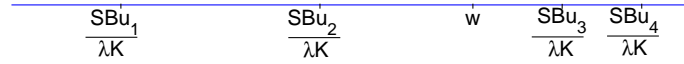
$$| -(\mathbf{SBk}_1)^{-1}(-\lambda Kw + \mathbf{SBk}_2)| < 1 \quad (4.66)$$

Dosazením podle rovnice (4.2) za parametry $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ se odvodí podmínka existence klouzavého režimu

$$\lambda Kw \in (\mathbf{SBu}^+, \mathbf{SBu}^-) \quad (4.67)$$

Tím je věta dokázána.

Graficky je věta 4.3 znázorněna na obrázku 4.1 pro řízený systém, který má dva binární vstupy a jeho složka vektoru stavu x_1 má sledovat požadovanou hodnotu w . V průběhu řízení mohou nastat celkem 4 kombinace hodnot vstupů označené u_1 až u_4 . Pro tyto čtyři hodnoty vstupu je v grafu naznačena jejich možná poloha ve vztahu k požadované hodnotě w . Požadovaná hodnota w se může nacházet kdekoli na ose x , její velikost je zvolena jako ilustrační příklad. Podle věty 4.3 musí být splněna podmínka (4.67), aby existoval klouzavý režim. Na grafu 4.1 existuje klouzavý režim pro všechny dvoustavové regulátory, pro které je požadovaná hodnota w mezi přepínanými hodnotami vstupu. Pro hodnotu w v grafu 4.1 neexistuje klouzavý režim pro dva regulátory, které přepínají mezi kombinacemi u_1, u_2 a u_3, u_4 . Pro všechny ostatní kombinace je splněna podmínka (4.67) a klouzavý režim existuje.



Graf 4.1: Grafické znázornění podmínky (4.67)

Větu 4.3 lze s drobnými úpravami formulovat i pro případ sledování referenční trajektorie pomocí odchylkového systému zavedeného v kapitole 4.2.4

Věta 4.4.

Klouzavý region odpovídá celé přepínací nadploše $\mathbf{S}_e \mathbf{x} + \mathbf{S} \mathbf{w} = 0$ právě tehdy, když je vektor \mathbf{S}_e zvolen jako levý vlastní vektor příslušný matici dynamiky \mathbf{A} systému (3.1) řízeného zákonem řízení (4.2) a zároveň je splněna podmínka

$$\mathbf{S}(\dot{\mathbf{w}} - \lambda \mathbf{w}) \in (\mathbf{S}_e \mathbf{B} \mathbf{u}^+, \mathbf{S}_e \mathbf{B} \mathbf{u}^-) \quad (4.68)$$

kde λ je vlastní číslo matice dynamiky \mathbf{A} příslušné zvolenému levému vlastnímu vektoru a $\mathbf{w} = [w \ \dot{w} \ \dots \ w^{(r-1)}]^T$.

Důkaz 4.5

Důkaz vychází z ekvivalentního řízení (4.59). I zde se množina stavů ležících v klouzavém režimu vypočítá z podmínky $|u_{eq}| < 1$. Do této podmínky se dosadí ekvivalentní řízení (4.59) a substituce

$$\mathbf{S}_e \mathbf{A} = \lambda \mathbf{S}_e \quad (4.69)$$

kteřá vychází z volby matice \mathbf{S}_e jako levého vlastního vektoru příslušnému vlastnímu číslu λ matice dynamiky \mathbf{A} . Dále se z přepínací nadplochy (4.58) vyjádří člen $\mathbf{S}_e \mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{w}$ a jeho dosazením se vyjádří tato podmínka ve tvaru

$$| -(\mathbf{S}_e \mathbf{B} \mathbf{k}_1)^{-1} (\lambda \mathbf{S} \mathbf{w} - \mathbf{S} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}_e \mathbf{B} \mathbf{k}_2) | < 1 \quad (4.70)$$

Dosažením podle rovnice (4.2) za parametry $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ se odvodí podmínka existence klouzavého režimu (4.68). Tím je věta dokázána.

Věta 4.5.

Pro vektor parametrů \mathbf{S} přepínací nadplochy $\mathbf{S}\mathbf{x} = 0$ nebo $\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{K}w = 0$ zvolený jako levý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ matice dynamiky \mathbf{A} systému (3.1) řízeného zákonem řízení (4.2) odpovídají vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky \mathbf{A}_{eq} všem vlastním číslům matice dynamiky \mathbf{A} kromě vlastního čísla λ , které se v klouzavém režimu redukuje.

Důkaz 4.6

Důkaz je proveden pro systém ve Frobeniově formě, která zároveň splňuje definici regulární formy. Věta 4.5 platí právě tehdy, když

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{A}_{eq})(s - \lambda) \quad (4.71)$$

kde λ je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru zvolenému jako vektor parametrů přepínací nadplochy \mathbf{S} . K důkazu je nejprve potřeba vypočítat parametry přepínací nadplochy do matice ekvivalentní dynamiky \mathbf{A}_{eq} , která je v regulární formě ve tvaru $(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1)$. Vektor parametrů přepínací nadplochy \mathbf{S} je zvolen jako levý vlastní vektor matice dynamiky \mathbf{A} řízeného systému podle definice $\mathbf{S}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{S}$. Z této definice se vypočítá subvektor \mathbf{S}_1

$$[\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \lambda [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2] \quad (4.72)$$

$$[\mathbf{S}_1\mathbf{A}_{11} + \mathbf{S}_2\mathbf{A}_{21} \quad \mathbf{S}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{S}_2\mathbf{A}_{22}] = [\lambda\mathbf{S}_1 \quad \lambda\mathbf{S}_2] \quad (4.73)$$

Porovnáním prvních složek se vypočítá subvektor \mathbf{S}_1

$$\mathbf{S}_1\mathbf{A}_{11} + \mathbf{S}_2\mathbf{A}_{21} = \lambda\mathbf{S}_1 \quad (4.74)$$

$$\mathbf{S}_2\mathbf{A}_{21} = \mathbf{S}_1(\mathbf{I}_{n-1}\lambda - \mathbf{A}_{11}) \quad (4.75)$$

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2\mathbf{A}_{21}(\mathbf{I}_{n-1}\lambda - \mathbf{A}_{11})^{-1} \quad (4.76)$$

Subvektor \mathbf{S}_1 se dosadí do vzorce pro výpočet matice ekvivalentní dynamiky

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{eq} &= \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}(\mathbf{I}_{n-1}\lambda - \mathbf{A}_{11})^{-1} = \\ &= \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} \frac{(\mathbf{I}_{n-1}\lambda - \mathbf{A}_{11})^{adj}}{\det(\mathbf{I}_{n-1}\lambda - \mathbf{A}_{11})} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Dále je nutné spočítat charakteristický polynom matice ekvivalentní dynamiky odvozené v (4.77). Matice dynamiky řízeného systému je ve tvaru Frobeniovy formy.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{A}_{12} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T \quad (4.80)$$

$$\mathbf{A}_{21} = [-a_1 \ -a_2 \ \dots \ -a_{n-2} \ -a_{n-1}] \quad (4.81)$$

Dále je třeba spočítat adjungovanou matici a determinant do rovnice (4.77).

$$\det(\mathbf{I}_{n-1}\lambda - \mathbf{A}_{11}) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^{n-1} \quad (4.82)$$

$$(\mathbf{I}_{n-1}\lambda - \mathbf{A}_{11})^{adj} = \begin{bmatrix} \lambda^{n-2} & \lambda^{n-3} & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^{n-2} & \dots & \lambda^2 & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{n-2} & \lambda^{n-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^{n-2} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Dosazením (4.82), (4.83) do rovnice (4.77) se spočítá matice ekvivalentní dynamiky \mathbf{A}_{eq} .

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \sum_{i=1}^1 a_i \lambda^{i-2} & \sum_{i=1}^2 a_i \lambda^{i-3} & \dots & \sum_{i=1}^{n-2} a_i \lambda^{i-n+1} & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda^{i-n} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Charakteristický polynom matice (4.84) je ve tvaru

$$\det(\mathbf{sI}_{n-1} - \mathbf{A}_{eq}) = s^{n-1} - s^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda^{i-n} - s^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2} a_i \lambda^{i-n+1} - \dots - s \sum_{i=1}^2 a_i \lambda^{i-3} - \sum_{i=1}^1 a_i \lambda^{i-2} \quad (4.85)$$

Poslední krok v důkazu je vynásobení charakteristického polynomu (4.85) členem $(s - \lambda)$, aby byla potvrzena rovnost (4.71).

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{sI}_{n-1} - \mathbf{A}_{eq})(s - \lambda) &= s^n - s^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda^{i-n} - s^{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} a_i \lambda^{i-n+1} - \\ &- \dots - s^2 \sum_{i=1}^2 a_i \lambda^{i-3} - s \sum_{i=1}^1 a_i \lambda^{i-2} - \lambda s^{n-1} + s^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda^{i-n+1} + \\ &+ s^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2} a_i \lambda^{i-n+2} + \dots + s \sum_{i=1}^2 a_i \lambda^{i-2} - \sum_{i=1}^1 a_i \lambda^{i-1} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Přeskupením členů k jednotlivým mocninám proměnné s vyjde

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{sI}_{n-1} - \mathbf{A}_{\text{eq}})(s - \lambda) &= s^n + s^{n-1} \left(-\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda^{i-n}\right) + \\ &+ s^{n-2} \left(-\sum_{i=1}^{n-2} a_i \lambda^{i-n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda^{i-n+1}\right) + \dots + \\ &+ s^2 \left(-\sum_{i=1}^2 a_i \lambda^{i-3} + \sum_{i=1}^3 a_i \lambda^{i-3}\right) + \\ &+ s \left(-\sum_{i=1}^1 a_i \lambda^{i-2} + \sum_{i=1}^2 a_i \lambda^{i-2}\right) + \sum_{i=1}^1 a_i \lambda^{i-1} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Do tohoto vztahu se dosadí substituce $\lambda = -\sum_{i=1}^n a_i \lambda^{i-n}$, jejíž platnost lze dokázat dosazením Vietových vzorců. Dále je vidět, že v každé závorce se navzájem odečtou všechny členy z obou řad kromě posledního a rovnice (4.87) se zjednoduší do tvaru

$$\det(\mathbf{sI}_{n-1} - \mathbf{A}_{\text{eq}})(s - \lambda) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (4.88)$$

Charakteristický polynom na pravé straně rovnice (4.88) je identický s charakteristickým polynomem matice dynamiky \mathbf{A} . Tím je dokázána rovnost (4.71) a také věta 4.5.

Ve větě 4.5 není zmíněn případ řízení se sledováním referenční trajektorie, kde je situace složitější. Na přepínací nadplochu (4.58) je možné nahlížet ve zjednodušeném maticovém tvaru $\sigma = \mathbf{S}_e \mathbf{x} - \mathbf{S} \mathbf{w}$ a dokázat větu 4.5 pro tento tvar přepínací nadplochy. Problém nastane ve chvíli, kdy se z vektoru parametrů přepínací nadplochy \mathbf{S}_e musí zpětně vypočítat parametry vektoru \mathbf{S} , protože se jedná o řešení soustavy n rovnic pro r neznámých. Jde vlastně o obrácený návrh parametrů přepínací nadplochy, protože obvyklým postupem je nejprve navrhnout vektor \mathbf{S} a z něj pomocí rovnice přepínací nadplochy (4.58) jednoznačně dopočítat vektor \mathbf{S}_e .

V případě, kdy řízený systém neobsahuje žádné nuly, relativní řád je stejný jako řád řízeného systému a výpočet vektoru \mathbf{S}_e je triviální. Když řízený systém nuly obsahuje, jsou pro řízení se sledováním referenční trajektorie tyto nuly obsaženy v pólech uzavřené smyčky. Zároveň platí, že pokud je \mathbf{S}_e zvolené jako levý vlastní vektor matice dynamiky řízeného systému příslušnému vlastnímu číslu λ , jsou vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky tvořena ostatními vlastními čísly matice dynamiky řízeného systému (věta 4.5 aplikovaná na návrh vektoru \mathbf{S}_e). Aby existovalo řešení výpočtu vektoru \mathbf{S} ze stanoveného vektoru \mathbf{S}_e , musí být možné navrhnout stejná vlastní čísla matici ekvivalentní dynamiky oběma způsoby, jak návrhem vektoru \mathbf{S} přímo, tak přes stanovení vektoru \mathbf{S}_e a zpětného dopočítání. Jestliže mají být stejná vlastní čísla v matici ekvivalentní dynamiky pro obě metody, musí nevyhnutelně obsahovat nuly řízeného systému, jinak neexistuje řešení návrhu vektoru \mathbf{S} . Protože vlastní čísla v matici ekvivalentní dynamiky zároveň odpovídají vlastním číslům matice dynamiky řízeného systému kromě redukovaného vlastního čísla λ (volbou vektoru \mathbf{S}_e jako levého vlastního vektoru matice dynamiky), nuly řízeného systému musí být zároveň obsaženy ve vlastních číslech matice dynamiky řízeného systému.

V případě kdy tato podmínka splněna nebude, tzn. existuje alespoň jedna nula řízeného systému, která není obsažena v pólech řízeného systému, nelze vypočítat vektor \mathbf{S} z vektoru \mathbf{S}_e stanoveného jako levý vlastní vektor matice dynamiky řízeného systému příslušného vlastnímu číslu λ .

4.2.6 Aplikace návrhu dvoustavového regulátoru

Postup návrhu dvoustavového regulátoru bude ilustrativně demonstrován na řízení systému s dvěma binárními vstupy pro úlohu sledování požadované hodnoty a úlohu sledování referenční trajektorie, konkrétně rampové funkce.

Příklad 4.2

Řízení s klouzavým režimem se sledováním požadované hodnoty bude navrženo na řízený systém ve stejném tvaru jako v příkladu 2.11. Regulární forma byla spočítána v příkladu 4.1 a je ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{TAT}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{TBk}_1\text{sgn}\sigma + \mathbf{TBk}_2 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 & -0,525 \\ 0 & 0 & 0 & -2,5 & 1,995 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1,5 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sgn}\sigma + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.89) \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \bar{\mathbf{x}} \quad (4.90) \end{aligned}$$

Návrh je proveden na základě znalosti stavu řízeného systému s požadavkem na sledování hodnoty. Pro výpočet regulární formy (4.89) je použitý dvoustavový regulátor přepínající na výstupu mezi dvěma kombinacemi $\mathbf{u}^- = [1 \ 0]^T$, $\mathbf{u}^+ = [0 \ 0]^T$, tzn. kombinace spínání prvního vstupu s druhým vstupem vypnutým. Systém (4.89) se rozepíše na dva subsystémy

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -2,5 \end{bmatrix}}_{=\bar{\mathbf{A}}_{11}} \bar{\mathbf{x}}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,525 \\ 1,995 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{12}} \bar{\mathbf{x}}_2 \quad (4.91)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \underbrace{[0 \ 0 \ 0 \ -2]}_{=\bar{\mathbf{A}}_{21}} \bar{\mathbf{x}}_1 + \underbrace{[1,5]}_{=\bar{\mathbf{A}}_{22}} \bar{\mathbf{x}}_2 + \underbrace{[1]}_{=\bar{\mathbf{B}}_2} \text{sgn}\sigma + \underbrace{[-1]}_{\bar{\mathbf{k}}_{22}} \quad (4.92)$$

Přepínací proměnná je ve tvaru

$$\sigma = [\bar{\mathbf{S}}_1 \ \bar{\mathbf{S}}_2] \bar{\mathbf{x}} + Kw = [\bar{s}_1 \ \bar{s}_2 \ \bar{s}_3 \ \bar{s}_4 \ 1] \bar{\mathbf{x}} + Kw \Big|_{\bar{\mathbf{S}}_2=\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}} \quad (4.93)$$

Dynamika v klouzavém režimu je podle (4.51)

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{eq} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{21}{40}\bar{s}_1 - \frac{1}{100} & \frac{21}{40}\bar{s}_2 - \frac{51}{50} & \frac{21}{40}\bar{s}_3 - \frac{201}{100} & \frac{21}{40}\bar{s}_4 + \frac{1}{2} \\ -\frac{399}{200}\bar{s}_1 & -\frac{399}{200}\bar{s}_2 & -\frac{399}{200}\bar{s}_3 & -\frac{399}{200}\bar{s}_4 - \frac{5}{2} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{eq}} \bar{\mathbf{x}}_{eq} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,525 \\ 1,995 \end{bmatrix} Kw \quad (4.94)$$

Ekvivalentní dynamika je čtvrtého řádu. Parametry přepínací nadplochy budou navrženy pomocí metody pole-placement tak, aby nastal klouzavý režim na přepínací nadploše v celém stavovém prostoru. Vlastní čísla řízeného systému jsou

$$\lambda_i \in \{-0,01; -1; -1; -0,6; -0,4\}$$

Vybrané vlastní číslo, které se bude redukovat, je nejpomalejší pól $\lambda = -0.01$. Charakteristický polynom matice ekvivalentní dynamiky $\bar{\mathbf{A}}_{eq}$ je

$$\det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{eq}) = s^4 + \left(\frac{399}{200}\bar{s}_4 - \frac{21}{40}\bar{s}_3 + \frac{451}{100}\right)s^3 + \left(\frac{806}{201}\bar{s}_4 - \frac{63}{200}\bar{s}_3 - \frac{21}{40}\bar{s}_2 + \frac{1209}{200}\right)s^2 + \left(\frac{1516}{745}\bar{s}_4 - \frac{63}{200}\bar{s}_2 - \frac{21}{40}\bar{s}_1 + \frac{64}{25}\right)s - \frac{63}{200}\bar{s}_1 + \frac{399}{20000}\bar{s}_4 + \frac{1}{40} \quad (4.95)$$

Charakteristický polynom matice požadované dynamiky se sestaví ze zbylých pólů řízeného systému

$$(s+1)^2(s+0,6)(s+0,4) = s^4 + 3s^3 + \frac{81}{25}s^2 + \frac{37}{25}s + \frac{6}{25} \quad (4.96)$$

Pro čtyři neznámé parametry přepínací nadplochy je možné sestavit jednoznačnou soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých porovnáním koeficientů u jednotlivých členů obou polynomů

$$\frac{399}{200}\bar{s}_4 - \frac{21}{40}\bar{s}_3 + \frac{451}{100} = 3 \quad (4.97)$$

$$\frac{806}{201}\bar{s}_4 - \frac{63}{200}\bar{s}_3 - \frac{21}{40}\bar{s}_2 + \frac{1209}{200} = \frac{81}{25} \quad (4.98)$$

$$\frac{1516}{745}\bar{s}_4 - \frac{63}{200}\bar{s}_2 - \frac{21}{40}\bar{s}_1 + \frac{64}{25} = \frac{37}{25} \quad (4.99)$$

$$-\frac{63}{200}\bar{s}_1 + \frac{399}{20000}\bar{s}_4 + \frac{1}{40} = \frac{6}{25} \quad (4.100)$$

Řešení této soustavy rovnic je

$$\bar{s}_1 = -0,7429 \quad (4.101)$$

$$\bar{s}_2 = -1,4857 \quad (4.102)$$

$$\bar{s}_3 = -0,7429 \quad (4.103)$$

$$\bar{s}_4 = -0,9524 \quad (4.104)$$

$$(4.105)$$

Matice parametrů přepínací nadplochy pro systém v regulární formě je

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} -0,7429 & -1,4857 & -0,7429 & -0,9524 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Zpětnou transformací do původních souřadnic podle rovnice $\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{T}$ se vypočítá matice koeficientů přepínací nadplochy v původních souřadnicích.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -0,7429 & -1,4857 & -0,7429 & -0,9524 & -0,9524 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Výpočtem lze snadno ověřit, že vektor parametrů \mathbf{S} je levý vlastní vektor matice dynamiky \mathbf{A} příslušný vlastnímu číslu $\lambda = -0.01$.

Parametr K se spočítá z ustáleného stavu. Stačí vypočítat jen složku $\bar{\mathbf{x}}_{1,ust}$ dosazením do (4.52), protože matice $\bar{\mathbf{C}}$ má vhodnou velikost.

$$\bar{\mathbf{x}}_{1,ust} = \begin{bmatrix} 1,3125 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0831 \end{bmatrix} Kw \quad (4.108)$$

Dosazením do (4.56) se spočítá hodnota parametru K

$$1,3125Kw - w = 0 \Rightarrow K = 0,7619 \quad (4.109)$$

Vypočítaná přepínací nadplocha je ve tvaru

$$\sigma = \begin{bmatrix} -0,7429 & -1,4857 & -0,7429 & -0,9524 & -0,9524 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 0,7619w \quad (4.110)$$

Dále je třeba ověřit, zda je dvojice \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ zvolena správně. Podmínka existence klouzavého režimu podle (4.14) je

$$\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{u}^- - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{u}^+ = -2 < 0 \quad (4.111)$$

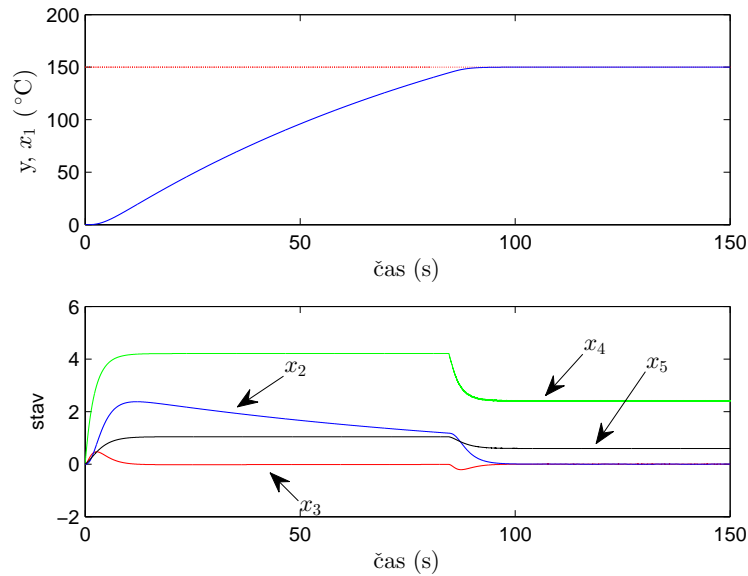
Podmínka existence klouzavého režimu není splněna pro zvolenou dvojici \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ a je nutné hodnoty obrátit, tzn. $\mathbf{u}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Navržený dvoustavový regulátor je ve tvaru

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{sgn}(\begin{bmatrix} -0,7429 & -1,4857 & -0,7429 & -0,9524 & -0,9524 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 0,7619w) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

Ekvivalentní dynamika takto řízeného systému je v původních souřadnicích podle (4.18) ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}_{eq} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 & 0,5 \\ 0,0074 & 0,0149 & 0,0074 & -0,4905 & 0,1095 \\ 0,004 & 0,007 & 0,004 & 0,1005 & -0,4995 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{eq}} \mathbf{x}_{eq} \quad (4.113)$$

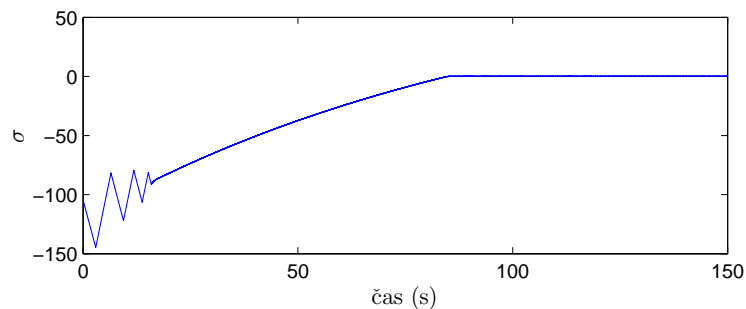
Vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky \mathbf{A}_{eq} jsou v požadovaném tvaru.



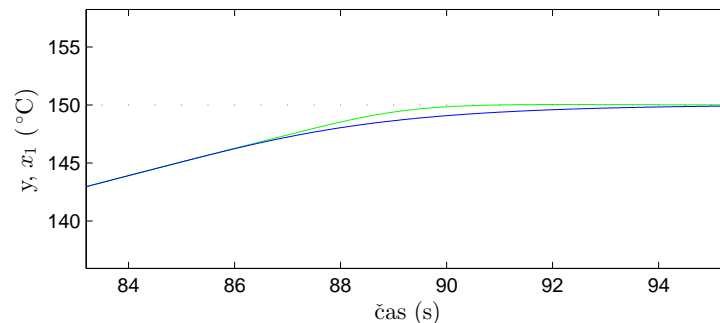
Graf 4.2: Příklad 4.2 - průběh složek vektoru stavu

Rekonstruktor stavu se během řízení použije identický jako v příkladu 2.11. Průběh simulace řízení systému (4.89) zákonem řízení (4.112) z nulových počátečních podmínek na požadovanou hodnotu $w = 150$ s periodou vzorkování $T_s = 0.01$ je zobrazen na grafu č. 4.2. Klouzavý režim nastane v čase $T_{sm} = 84,6$ s při prvním protnutí přepínací nadplochy, jak bylo navrženo. V grafu přepínací proměnné 4.3 je na počátku regulace opět zřejmé kmitání způsobené ustalováním rekonstruktoru, které nemá vliv na kvalitu regulace, protože kmity neprochází přepínací nadplochou.

Na detailu srovnání řízení základním algoritmem a modifikovaným algoritmem (graf č. 4.4) je vidět, že základní algoritmus řízení je o několik vteřin rychlejší. To je způsobeno použitím pouze jednoho navrženého dvoustavového regulátoru místo výběru vhodné posloupnosti více různých dvoustavových regulátorů, který bude ukázán v další kapitole.



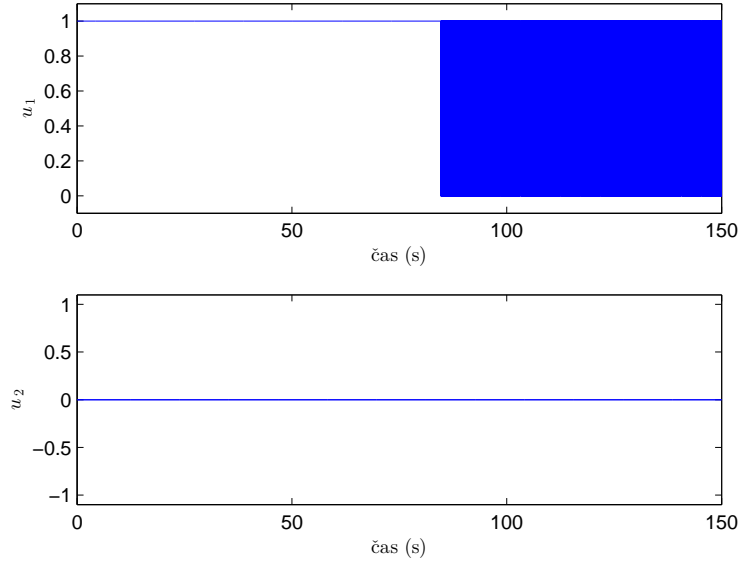
Graf 4.3: Příklad 4.2 - průběh přepínací proměnné



Graf 4.4: Příklad 4.2 - srovnání obou algoritmů řízení s klouzavým režimem: základní algoritmus zeleně, modifikovaný algoritmus modře.

Příklad 4.3

V úloze sledování referenční trajektorie je typický příklad sledování rampové funkce při nájezdu na požadovanou hodnotu. Návrh takového řízení je opět proveden pro stavový popis (4.89). Referenční trajektorie $w = kt$, kde k je sklon rampové funkce, a relativní řád řízeného systému je $r = 4$. Přepínací proměnná je po dosazení do rovnice


Graf 4.5: Příklad 4.2 - průběh složek vektoru vstupu

(4.58) ve tvaru

$$\sigma = \begin{bmatrix} \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \bar{s}_4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 & -0,525 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} - \begin{bmatrix} kt \\ k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{s}_1 - 0,01\bar{s}_4 & \bar{s}_2 - 1,02\bar{s}_4 & \bar{s}_3 - 2,01\bar{s}_4 & 0,5\bar{s}_4 & -0,525\bar{s}_4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} - \bar{s}_1 kt - \bar{s}_2 k$$

Ekvivalentní řízení se vypočítá z derivace přepínací nadplochy

$$u_{eq} = \frac{40}{21\bar{s}_4} (0,0201\bar{s}_4 - 0,01\bar{s}_3) \bar{x}_1 + (\bar{s}_1 - 1,02\bar{s}_3 + 2,0402\bar{s}_4) \bar{x}_2 +$$

$$+ (\bar{s}_2 - 2,01\bar{s}_3 + 3,0201\bar{s}_4) \bar{x}_3 + (0,5\bar{s}_3 - 1,205\bar{s}_4) \bar{x}_4 +$$

$$+ (1,2653\bar{s}_4 - 0,525\bar{s}_3) \bar{x}_5 + \bar{s}_1 k + 1 \quad (4.114)$$

Ekvivalentní dynamika se získá dosazením ekvivalentního řízení (4.114) do řízeného systému (4.89)

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{eq} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 & -0,525 \\ 0 & 0 & 0 & -2,5 & 1,995 \\ 0,0383 - \frac{2\bar{s}_3}{105\bar{s}_4} & \frac{40\bar{s}_1}{21\bar{s}_4} - \frac{68\bar{s}_3}{35\bar{s}_4} - 3,8861 & \frac{40\bar{s}_2}{21\bar{s}_4} - \frac{134\bar{s}_3}{35\bar{s}_4} + 5,7526 & \frac{20\bar{s}_3}{21\bar{s}_4} - 4,2952 & 3,91 - \frac{\bar{s}_3}{\bar{s}_4} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{eq}} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{40\bar{s}_1}{21\bar{s}_4} k \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

V matici ekvivalentní dynamiky $\bar{\mathbf{A}}_{eq}$ je možné návrhový parametr \bar{s}_4 zvolit. V tomto příkladu je zvolen $\bar{s}_4 = -\frac{40}{21}$, čímž bude splněna podmínka existence klouzavého režimu. Ostatní návrhové parametry budou stanoveny metodou přiřazení pólů matici ekvivalentní dynamiky. Charakteristický polynom této matice s dosazenou hodnotou za \bar{s}_4 je

$$\det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{eq}) = s(s + 0,6) \left(s^3 - \frac{21\bar{s}_3}{40} s^2 - \frac{21\bar{s}_2}{40} s - \frac{21\bar{s}_1}{40} \right) \quad (4.116)$$

V charakteristickém polynomu je zřejmá redukovaná dynamika reprezentovaná nulovým vlastním číslem, neřiditelná dynamika reprezentovaná vlastním číslem $\lambda_1 = -0,6$ a polynom třetího řádu, kde je možné navrhnout požadovaná vlastní čísla. Ta jsou zvolena na základě analogie s předchozím příkladem jako vlastní čísla matice dynamiky řízeného systému, konkrétně $\lambda_2 = -0,4$, $\lambda_{3,4} = -1$. Charakteristický polynom požadované dynamiky v klouzavém režimu je

$$s(s + 0,6)(s^3 + 2,4s^2 + 1,8s + 0,4) \quad (4.117)$$

Porovnáním koeficientů vyjdou neznámé parametry

$$\bar{s}_1 = -0,7619 \quad (4.118)$$

$$\bar{s}_2 = -3,4286 \quad (4.119)$$

$$\bar{s}_3 = -4,5714 \quad (4.120)$$

Dosazením vypočítaných parametrů do rovnice (4.58) vyjde přepínací proměnná

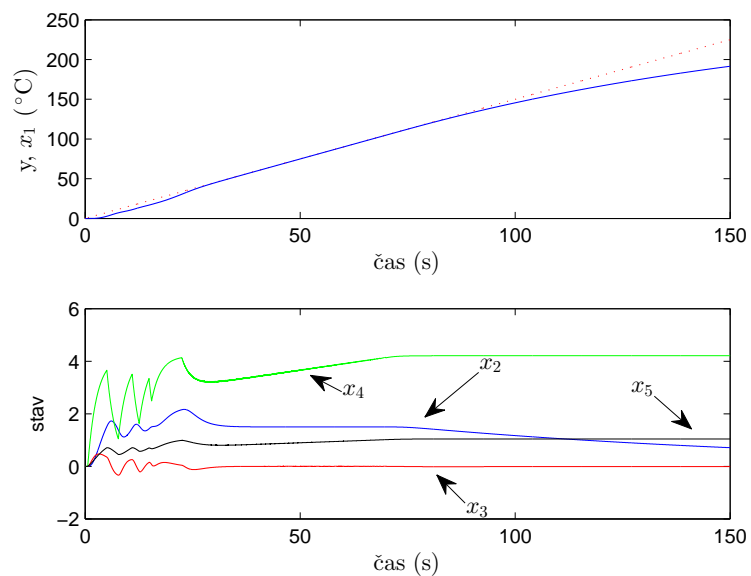
$$\sigma = [-0,7429 \quad -1,4857 \quad -0,7429 \quad -0,9524 \quad 1] \bar{\mathbf{x}} + 0,7619kt + 3,4286k \quad (4.121)$$

Ve srovnání s předchozím příkladem je zřejmé, že návrhové parametry jsou identické s parametry ve vztahu (4.106) a transformací do původních souřadnic se získají parametry přepínací nadplochy ve tvaru (4.107). Toto bylo očekávané, neboť v obou příkladech je zvolena stejná dynamika v klouzavém režimu a dále je zde nula řízeného systému obsažená ve vlastních číslech matice dynamiky řízeného systému. V tomto příkladu je možné postupovat i druhým způsobem, navrhnout nejprve vektor \mathbf{S}_e jako levý vlastní vektor matice dynamiky řízeného systému a dopočítat vektor $\bar{\mathbf{S}}$. Na základě této analogie lze rovnou stanovit zákon řízení.

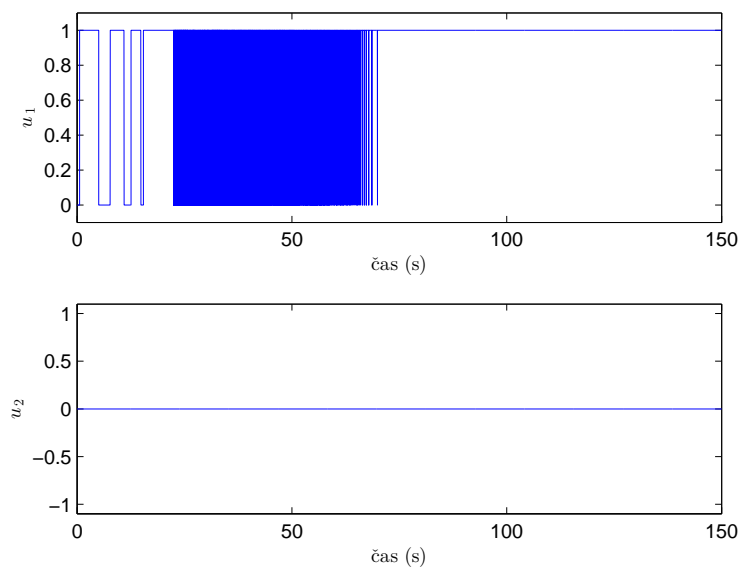
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sgn}([-0,7429 \quad -1,4857 \quad -0,7429 \quad -0,9524 \quad -0,9524] \mathbf{x} + 0,7619kt + 3,4286) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Rekonstruktor stavu se použije identický jako v příkladu 2.11. Průběh simulace řízení systému (4.89) zákonem řízení (4.122) z nulových počátečních podmínek a periodou vzorkování $T_s = 0.01$ sledující rampovou funkcí je zobrazen na grafu č. 4.6. Klouzavý režim nastane v čase $T_{sm} = 22,5s$.

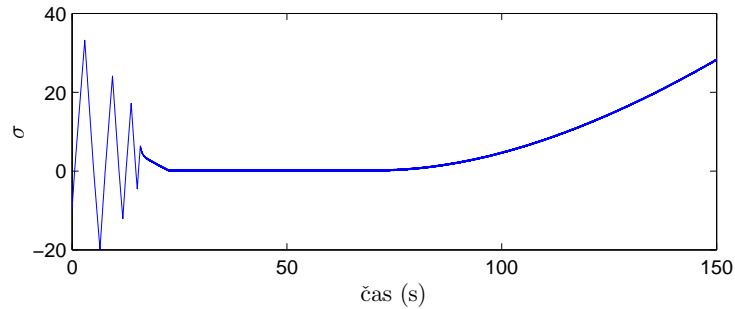
Výstup řízeného systému sleduje během řízení referenční trajektorii, ale v průběhu řízení se stav systému dostane z klouzavého režimu a výstup systému opustí referenční trajektorii. To je způsobeno omezenými možnostmi řízeného systému, kde ani při naplno zapnutém vstupu není možné udržet výstup systému na referenční trajektorii. Na grafu průběhu přepínací proměnné 4.8 je na počátku opět kmitání způsobené ustalováním rekonstruktoru. Ačkoliv v předchozím příkladu řízení na požadovanou hodnotu nemělo ustálení rekonstruktoru vliv na průběh řízení, při sledování rampové funkce je jeho vliv signifikantní. Přepínací proměnná na počátku řízení několikrát projde nulou, což způsobí přepínání vstupu, aniž by nastal klouzavý režim. Z toho důvodu byl proveden experiment srovnání řízení se současným ustalováním rekonstruktoru a již ustáleným rekonstruktořem. V grafu 4.9 je zobrazeno srovnání výstupu řízeného systému při řízení se současným ustalováním rekonstruktoru a při řízení, kde již byl rekonstruktor ustálený, v grafu 4.10 je pro tentýž experiment zobrazena přepínací nadplocha. Je zřejmé, že klouzavý režim nastane rychleji při řízení s ustáleným rekonstruktořem a výstup systému bude referenční trajektorii sledovat dříve.



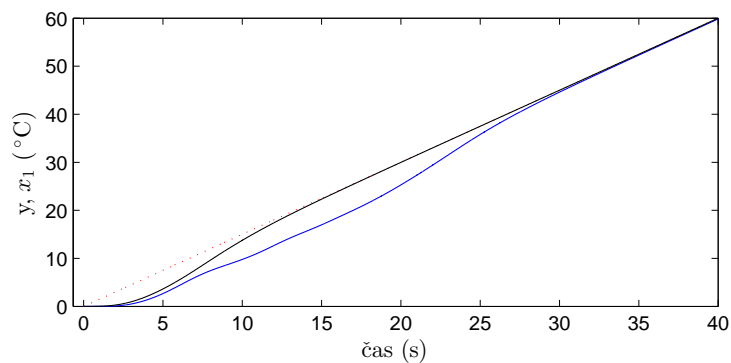
Graf 4.6: Příklad 4.3 - průběh složek vektoru stavu



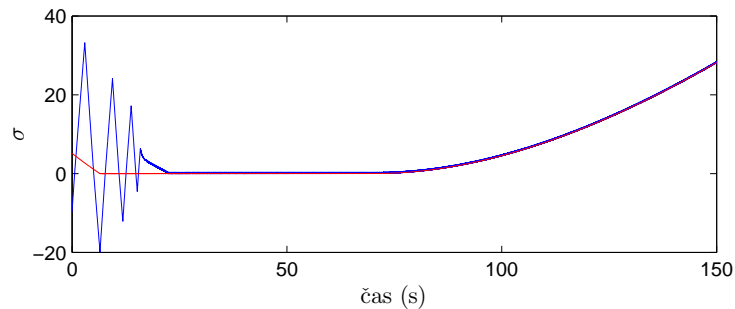
Graf 4.7: Příklad 4.3 - průběh složek vektoru vstupu



Graf 4.8: Příklad 4.3 - průběh přepínací proměnné



Graf 4.9: Příklad 4.3 - srovnání výstupu řízeného systému se současným ustalováním rekonstruktoru (modře) a s již ustáleným rekonstruktorem (černě)



Graf 4.10: Příklad 4.3 - průběh přepínací proměnné se současným ustalováním rekonstruktoru (modře) a s již ustáleným rekonstruktorem (červeně)

4.3 Shrnutí

V této kapitole byl navržen dvoustavový regulátor přepínající mezi dvěma kombinacemi vstupů na základě řízení s klouzavým režimem. Regulátor byl analyzován pomocí metody ekvivalentního řízení a byly dokázány vlastnosti řízení analogické obecné teorii řízení s klouzavým režimem. Dále byly uvedeny metody řízení na požadovanou hodnotu a se sledováním referenční trajektorie. V další části této kapitoly byla analyzována problematika návrhu klouzavého režimu vzhledem k jeho velikosti. Pro úlohu řízení na

požadovanou hodnotu byl odvozen návrh přepínací nadplochy, kde existuje klouzavý region na celé přepínací nadploše. V závěru kapitoly je uvedeno několik příkladů chování takto navrženého řízení s klouzavým režimem: sledování požadované hodnoty s výpočtem kompenzačního zesílení a sledování referenční trajektorie, konkrétně rampové funkce. Je zde srovnáno chování, kdy je rekonstruktor ustálený před vlastním řízením a kdy se ustaluje v průběhu regulace. Na základě tohoto srovnání vyplývá, že pro sledování referenční trajektorie je vhodnější řídit s ustáleným rekonstruktorem.

5 Strategie přepínání dvoustavových regulátorů

V předchozí kapitole byla definována struktura dvoustavového regulátoru přepínajícího mezi dvěma kombinacemi vstupů a demonstrován návrh jeho parametrů. Přepínaných kombinací vstupů je konečná množina a pro každou kombinaci z této množiny existuje samostatný dvoustavový regulátor. Proto je nutné během řízení vybírat "vhodný" regulátor tak, aby byly splněny cíle řízení, to znamená nájezd na požadovanou hodnotu a její sledování. V této kapitole je navržena metoda výběru "vhodného" regulátoru založená na vlastnostech řízení s klouzavým režimem, která vychází ze speciálně navrženého tvaru přepínací nadplochy odvozeného v kapitole 4.2.5

5.1 Princip výběru

Základní myšlenka metody vychází z přepínací nadplochy navržené pro všechny dvoustavové regulátory tak, aby ekvivalentní dynamika v klouzavém režimu obsahovala póly řízeného systému kromě nejpomalejšího, který se v klouzavém režimu redukuje. Matice koeficientů \mathbf{S} a tedy i ekvivalentní dynamika jsou stejné pro všechny dvoustavové regulátory. Kompenzační zesílení K je obecně různé pro každou přepínanou dvojici a musí se počítat samostatně.

Strategie výběru "vhodného" dvoustavového regulátoru pracuje s ohledem na fáze řízení s klouzavým režimem. Když je řízený systém v přibližovací fázi (tzn. $\sigma \neq 0$), použije se regulátor s největším rozsahem požadované hodnoty, pro který podle věty 4.3 existuje klouzavý režim. Pro tento regulátor je zajištěno, že se stav systému dostane do klouzavého režimu pro všechny možné požadované hodnoty w , které je řízený systém schopný dosáhnout.

Jakmile se stav systému dostane na přepínací nadplochu, nastává klouzavý režim a stav systému se bude pohybovat po přepínací nadploše do ustáleného stavu. Od tohoto okamžiku se pro ostatní regulátory monitoruje splnění podmínky (4.67) odvozené na základě návrhu přepínací nadplochy. Každý regulátor, pro který je tato podmínka splněna, lze použít k řízení. Jediná nezávislá proměnná v podmínce (4.67) je požadovaná hodnota w , ostatní veličiny se vypočítají při návrhu přepínací nadplochy. Jedná se tedy o stanovení všech regulátorů, pro které nastává při dané hodnotě w klouzavý režim.

V situaci, kdy lze použít několik různých regulátorů, je nutné jeden vybrat. Proto je nově během návrhu řízení jako kritérium výběru vhodného regulátoru zavedena cena řízení, která vyjadřuje penalizaci na používání daného regulátoru. Při rozhodování o konkrétním vybraném regulátoru je vždy vybrán regulátor s nejmenší cenou.

Popsaný princip předpokládá toto chování zpětnovazební smyčky: v přibližovací fázi je vybrán regulátor, který přivede stav řízeného systému na přepínací nadplochu a do klouzavého režimu tak rychle, jak to výkon jednotlivých vstupů dovoluje, je použito největšího výkonu aktuátorů. Jakmile se stav systému dostane do klouzavého režimu a zároveň existují jiné regulátory s menší cenou řízení, použije se nejlevnější regulátor. Při klouzání stavu systému směrem k ustálené hodnotě se neustále monitoruje existence nejlevnějšího regulátoru a může dojít k dalšímu přepnutí, dokud není stav systému v ustáleném stavu. Tímto způsobem se strategie řízení ustálí na nejlevnějším regulátoru, který je možné použít pro řízení na danou požadovanou hodnotu w . Zároveň bude

přechodový děj tak rychlý, jak je pro navrženou přepínací nadplochu maximálně možné, protože v přibližovací fázi se použil regulátor s největším výkonem aktuátorů. Popsaný algoritmus se opakuje vždy při změně požadované hodnoty a je aplikovatelný pouze pro po částech konstantní požadovanou hodnotu.

Navržené dvoustavové regulátory se liší pouze v hodnotě kompenzačního zesílení K a přepínané kombinaci vstupů. To při změně vybraného regulátoru znamená, že stav řízeného systému buď zůstane na dané přepínací nadploše (pokud bude hodnota kompenzačního zesílení K stejná) a rovnou přejde do klouzavého režimu nového regulátoru, anebo má nový vybraný regulátor jinou přepínací nadplochu. Pro tuto nadplochu nastane znovu přibližovací fáze a posléze klouzavý režim.

5.2 Cena řízení

Pro výběr použitého regulátoru je nutné stanovit cenu řízení. Celková cena $C(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)$ je definována jako suma součinů složky vstupu u_i násobeného cenou daného vstupu c_i .

$$C(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) = \sum_{i=1}^m c_i(u_i^+ + u_i^-) \quad (5.1)$$

Tato cena vyjadřuje náklady na provoz dvoustavového regulátoru. Koeficienty c_i jsou návrhové parametry, které musí být zadány uživatelem před spuštěním řízení.

Z hlediska minimalizace ceny řízení nelze prohlásit, že stanovená posloupnost přepínání vždy znamená minimální cenu řízení v čase, jedná se pouze o suboptimální řešení. Po dosažení klouzavého režimu se vždy vybírá regulátor s minimální cenou zapnutí vstupů. V průběhu řízení ale může nastat situace, kdy spínání "drahého" vstupu nastává méně často než "levnějšího" vstupu v použitém regulátoru a celkový součet ceny na delším časovém intervalu je pro regulátor s "drahým" vstupem menší. Toto chování by mělo být uvažováno již při nastavení ceny jednotlivých vstupů během návrhu regulátoru.

5.3 Algoritmus řízení

Řízení se skládá ze dvou částí. První část je inicializace parametrů nutných pro řízení s klouzavým režimem a stanovení ceny řízení pro všechny regulátory. Druhá část je vlastní řízení, kde probíhá jednak řízení s klouzavým režimem a dále výběr vhodného regulátoru v případě, kdy je více použitelných regulátorů.

Průběh řízení je popsán následujícími kroky

Inicializace parametrů

1. Výpočet přepínací nadplochy jako levého vlastního vektoru matice dynamiky řízeného systému příslušného nejpomalejšímu vlastnímu číslu
2. Určení všech dvoustavových regulátorů a nastavení ceny řízení
3. Výběr regulátoru s největším rozsahem požadované hodnoty, pro který existuje klouzavý režim, vyloučení nevhodných regulátorů

4. Nastavení vybraného regulátoru jako počáteční strategie
5. Výpočet parametrů $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, kompenzačního zesílení K pro vhodné regulátory
6. Návrh rekonstruktoru

Řízení

1. Změř stav systému (přímo nebo pomocí rekonstruktoru)
2. Nachází se stav systému na přepínací nadploše?
 - (a) Pokud ano, je splněna podmínka (4.67) pro více regulátorů?
 - i. Pokud ano, vyber regulátor s nejmenší cenou řízení
3. Pokud se změnila požadovaná hodnota, vyber regulátor nastavený jako počáteční strategie.
4. Aplikuj řízení vybraného dvoustavového regulátoru
5. V dalším kroku řízení jdi zpět na bod č. 1

Příklad 5.1

Navržená metoda řízení je aplikována na stavový popis tepelné soustavy použitý v předchozích příkladech ve tvaru (2.196)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -0,1 \\ 0,1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Stavový popis reprezentuje zjednodušený systém s topením a chlazením (2 vstupy) a jedním teplotním čidlem (1 výstup). Cílem řízení je nájezd na požadovanou teplotu a její sledování.

Pro návrh přepínací nadplochy musí být řízený systém v regulární formě. To je v tomto případě splněno a je možné provést návrh, který byl pro řízený systém demonstrován v kapitole 4.2.6. Požadovaná vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky jsou vlastní čísla matice dynamiky řízeného systému \mathbf{A} kromě $\lambda_1 = -0,01$ a vektor parametrů \mathbf{S} přepínací proměnné σ je ve tvaru

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -0,7429 & -1,4857 & -0,7429 & -0,9524 & -0,9524 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Dále je třeba nastavit cenu řízení. Protože se jedná o systém, kde je jako hlavní vstup použito topení, je jeho cena nastavena menší než cena chlazení. Cena obou vstupů je uvedena v tabulce č. 5.1, vypočítaná cena jednotlivých regulátorů je v tabulce č. 5.2. Ve stejné tabulce je rovněž uveden rozsah požadované hodnoty ve smyslu podmínky (4.67), pro který existuje klouzavý režim.

vstup	cena
u_1	1
u_2	1,5

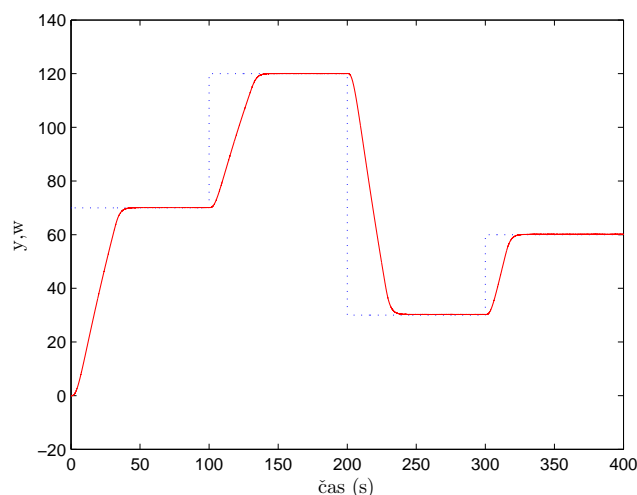
Tabulka 5.1: Cena jednotlivých vstupů systému (5.2)

Z tabulky je zřejmé, že největší klouzavý region má regulátor typu topí / chladí a proto bude vybrán jako počáteční strategie. Srovnáním ceny řízení tohoto regulátoru s ostatními je zřejmé, že poslední tři uvedené regulátory mají větší cenu řízení než počáteční strategie a nikdy nebudou vybrané k řízení. Navíc pro poslední regulátor neexistuje klouzavý režim.

V tomto příkladu je použit pouze jeden zákon řízení, protože kompenzačního zesílení K je stejné pro všechny regulátory. Zákon řízení pro všechny regulátory je stejný, liší se pouze parametry $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$.

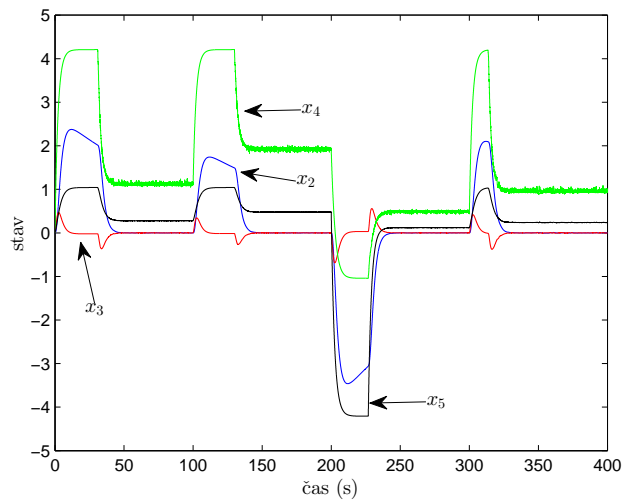
$$\mathbf{u} = \mathbf{k}_1 \text{sgn}([-0,7429 \ -1,4857 \ -0,7429 \ -0,9524 \ -0,9524] \mathbf{x} + 0,7619w) + \mathbf{k}_2 \quad (5.4)$$

Na grafech 5.1-5.4 je zobrazen průběh řízení systému (5.2) při sledování po částech konstantní referenční trajektorie. Při řízení je použitý rekonstruktor stavu navržený v příkladu 2.11. Výstup systému sleduje požadovanou hodnotu s odchylkou menší než 1% požadované hodnoty. Přepínání složek vektoru vstupu v grafu 5.3 ukazuje, že pravidelně dochází ke klouzavému režimu. Na grafu přepínání strategií 5.4 je vidět, že na počátku řízení je vždy použit regulátor typu topí / chladí. Když se stav systému dostane do klouzavého režimu, je nalezen jiný regulátor s nižší cenou řízení typu topí / netopí a použit k řízení. Tento regulátor zůstane vybraný až do další změny požadované hodnoty.

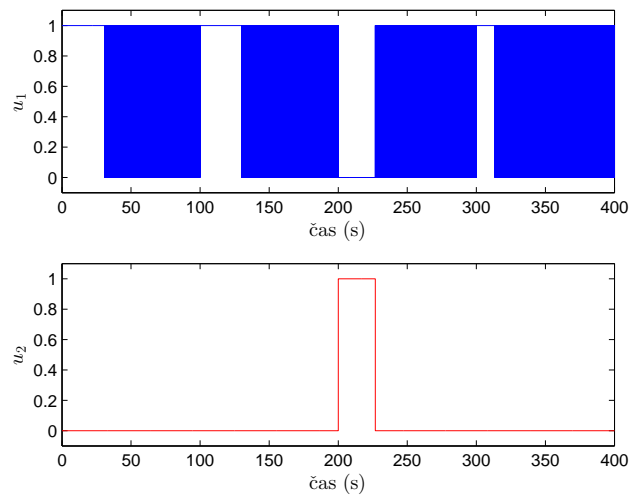

Graf 5.1: Průběh sledování referenční trajektorie - referenční trajektorie w modře, teplota na výstupu systému y červeně

dvojice vstupů	cena	SBu^+	SBu^-
topí / netopí	1	-2	0
topí / chladí	2,5	-2	2
chladí / nechladí	1,5	0	2
topí a chladí / topí	3,5	-2	0
topí a chladí / chladí	4	0	2
topí a chladí / netopí a nechladí	2,5	0	0

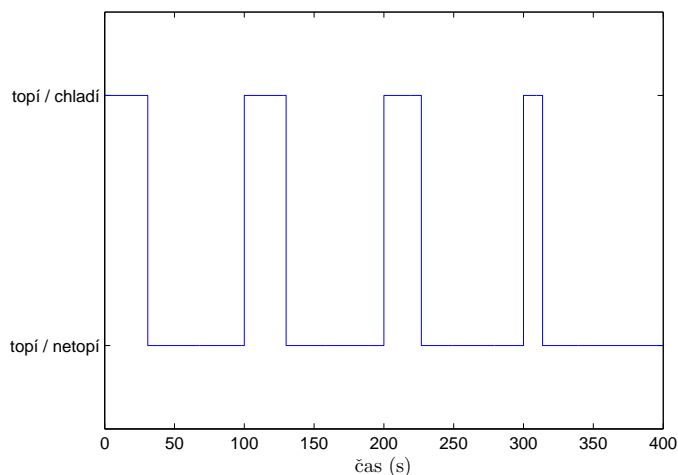
Tabulka 5.2: Cena jednotlivých dvoustavových regulátorů



Graf 5.2: Průběh ostatních složek stavu - x_2 modře, x_3 červeně, x_4 zeleně, x_5 černě



Graf 5.3: Průběh přepínání obou složek vektoru vstupu červeně



Graf 5.4: Průběh přepínání strategie řízení

5.4 Řízení nájezdu na požadovanou hodnotu

Navržený algoritmus výběru vhodného regulátoru lze snadno rozšířit o požadavek řízení nájezdu na požadovanou hodnotu. Cílem takového řízení je, aby výstup systému najel na požadovanou hodnotu definovanou rychlostí.

Regulátor musí pracovat ve dvou fázích, fázi sledování referenční trajektorie a fázi řízení na požadovanou hodnotu, a musí mezi těmito fázemi plynule přepínat. Předpokládaná funkce regulátoru je fáze sledování referenční trajektorie na začátku řízení následovaná přepnutím regulátoru do fáze řízení na požadovanou hodnotu ve vhodném okamžiku v průběhu řízení. Pro toto chování je nutné specifikovat chování regulátoru ve fázi sledování referenční trajektorie a definovat okamžik, kdy dojde k přepnutí do fáze sledování referenční trajektorie.

Pro nájezd k požadované hodnotě se vždy použije pouze dvoustavový regulátor s největším rozsahem požadované hodnoty, pro který existuje klouzavý režim. Jsou proto dva důvody: jednak je tento regulátor schopný sledovat referenční trajektorii na největším rozsahu trajektorie a dále se tentýž regulátor použije jako první při řízení na požadovanou hodnotu. Přejed mezi fázemi sledování rampové funkce a řízení na požadovanou hodnotu tak bude jednodušší.

Pro tento regulátor je nutné navrhnout řízení s klouzavým režimem podle kapitoly 4.2.4. Pokud to bude možné a nuly řízeného systému budou obsaženy v pólech řízeného systému, bude vektor parametrů přepínací nadplochy navržen jako levý vlastní vektor matice dynamiky řízeného systému příslušný nejpomalejšímu vlastnímu číslu. V opačném případě se vektor parametrů přepínací nadplochy navrhne tak, aby vlastní čísla ekvivalentní dynamiky obsahovala nuly řízeného systému a ostatních $r - 1$ vlastních čísel matice ekvivalentní dynamiky bylo totožných s nejrychlejšími vlastními čísly matice dynamiky řízeného systému, aby byl klouzavý region největší možný.

Po návrhu regulátoru, jak pro řízení na požadovanou hodnotu tak pro sledování referenční trajektorie, zbývá stanovit vhodný čas přepnutí z fáze sledování referenční trajektorie do fáze řízení na požadovanou hodnotu. Jako první intuitivní myšlenka se

nabízí přepnout ve chvíli, kdy se referenční trajektorie dostane na požadovanou hodnotu. Tento způsob je funkční ale ne moc kvalitní, protože setrvačnost systému způsobí překmit požadované hodnoty. Systém se chová jako by při řízení na požadovanou hodnotu nastal klouzavý režim až při druhém protnutí přepínací nadplochy.

Cílem návrhu řízení s klouzavým režimem je dostat systém do klouzavého režimu, aby se choval podle navržené ekvivalentní dynamiky a klouzavý režim již neopustil. Z této úvahy vychází druhá metoda stanovení vhodného času přepnutí ze sledování referenční trajektorie na řízení na požadovanou hodnotu. Protože je známý regulátor, který se použije jako první při řízení na požadovanou hodnotu, algoritmus řízení sleduje jeho přepínací proměnnou. Jako vhodný okamžik k přepnutí je určen okamžik, kdy se tato přepínací proměnná rovná nule, protože okamžitě nastane klouzavý režim regulátoru řídicího na požadovanou hodnotu. Pokud by se přepnulo dříve nebo později, přepínací proměnná regulátoru řídicího na požadovanou hodnotu by nebyla nulová a nedošlo by k přepnutí z jednoho klouzavého režimu do druhého.

V této metodě je několik variant chování, které je vhodné zmínit.

1. Fáze sledování referenční trajektorie není v klouzavém režimu a k přepnutí na řízení na požadovanou hodnotu nedojde. Tato situace může nastat pouze v případě, kdy požadovanou hodnotu není možné dosáhnout ani pro permanentně zapnuté vstupy.
2. Fáze sledování referenční trajektorie není v klouzavém režimu, když má dojít k přepnutí na řízení na požadovanou hodnotu. Toto chování je správné, může se jednat o situaci, kdy ještě neodezněl přechodový děj a výstup systému není na referenční trajektorii. Nebo systém nemůže referenční trajektorie dosáhnout kvůli fyzikálním omezením. Po přepnutí na řízení na požadovanou hodnotu bude systém ihned v klouzavém režimu.
3. Fáze sledování referenční trajektorie je v klouzavém režimu, když má dojít k přepnutí na řízení na požadovanou hodnotu. Toto chování je očekávané a žádoucí.
4. Fáze sledování referenční trajektorie je v klouzavém režimu, ale k přepnutí nedojde, protože přepínací proměnná fáze řízení na požadovanou hodnotu dojde do nuly až poté, co výstup řízeného systému dosáhl požadované hodnoty. Tato varianta nemůže nastat, protože je v přímém protikladu s chováním systémů s proměnnou strukturou. Pro stabilní klouzavý režim je přepínací proměnná při řízení na požadovanou hodnotu nulová dříve než výstup systému dosáhne požadované hodnoty. Jediná výjimka je v případě, kdy se přepínací proměnná rovná výstupu řízeného systému, resp. regulační odchylce. V takovém případě nastane klouzavý režim v okamžiku, kdy je výstup roven požadované hodnotě.

5.5 Algoritmus řízení s nájezdem na požadovanou hodnotu

Pro zahrnutí sledování referenční trajektorie musí být algoritmus řízení mírně změněn. Změny jsou vyznačeny *kurzívou*.

Průběh řízení je popsán následujícími kroky:

Inicializace parametrů

1. Výpočet přepínací nadplochy jako levého vlastního vektoru matice dynamiky řízeného systému příslušného nejpomalejšímu vlastnímu číslu
2. Určení všech dvoustavových regulátorů a nastavení ceny řízení
3. Výběr regulátoru s největším rozsahem požadované hodnoty, pro který existuje klouzavý režim, vyloučení nevhodných regulátorů
4. Nastavení vybraného regulátoru jako počáteční strategie
5. Výpočet parametrů $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, kompenzačního zesílení K pro vhodné regulátory
6. Návrh rekonstruktoru
7. *Návrh řízení se sledováním referenční trajektorie pro regulátor vybraný v bodě č. 4*

Řízení

1. Změř stav systému (přímo nebo pomocí rekonstruktoru)
2. *Došlo k přepnutí na řízení na požadovanou hodnotu?*
 - (a) *Pokud ano, pokračuj bodem č. 3*
 - (b) *Pokud ne, je přepínací proměnná řízení na požadovanou hodnotu rovna nule (resp. změnila znaménko)?*
 - i. *Pokud ano, přepni na fázi řízení na požadovanou hodnotu a pokračuj bodem č. 3*
 - ii. *Pokud ne, aplikuj řízení se sledováním referenční trajektorie a jdi zpět na bod č. 1*
3. *Nachází se stav systému na přepínací nadploše?*
 - (a) *Pokud ano, je splněna podmínka (4.67) pro více regulátorů?*
 - i. *Pokud ano, vyber regulátor s nejmenší cenou řízení*
4. *Pokud se změnila požadovaná hodnota, přepni do fáze sledování referenční trajektorie a znovu nastav počáteční strategii.*
5. *Aplikuj řízení vybraného dvoustavového regulátoru*
6. *V dalším kroku řízení jdi zpět na bod č. 1*

Příklad 5.2

Řízení s nájездem na požadovanou hodnotu prostřednictvím sledování rampové funkce bude demonstrováno rozšířením předchozího příkladu. Cílem řízení je, aby výstup systému najel na požadovanou hodnotu definovanou rychlostí a po nájезде řídil na požadovanou hodnotu. V příkladu je uvedeno pouze rozšíření nutné ke sledování rampové funkce, ostatní parametry řízení jsou stejné jako v předchozím příkladu.

Pro řízený systém je stanoven vektor parametrů přepínací nadplochy \mathbf{S} jako levý vlastní vektor matice dynamiky příslušný vlastnímu číslu $\lambda = -0.01$ ve tvaru (5.3). Protože řízený systém spadá do kategorie, kde jsou nuly řízeného systému obsaženy v jeho pólech, je možné použít stanovený vektor parametrů \mathbf{S} i pro řízení se sledováním rampové funkce.

Návrh parametrů řízení pro sledování rampové funkce se provede pro dvoustavový regulátor přepínající dvojici vstupů $\mathbf{u}^- = [1 \ 0]^T$, $\mathbf{u}^+ = [0 \ 1]^T$, protože má největší rozsah klouzavého režimu. Vektor parametrů přepínací nadplochy tohoto regulátoru pro regulární formu řízeného systému je

$$\bar{\mathbf{S}}_e = [-0,7429 \ -1,4857 \ -0,7429 \ -0,9524 \ 2] \quad (5.5)$$

Vektor parametrů je označen $\bar{\mathbf{S}}_e$, protože se jedná o řízení v odchylovém systému. Z vektoru $\bar{\mathbf{S}}_e$ je nutné vypočítat parametry řízení pro přepínací proměnnou odchylového systému podle (4.58).

$$\underbrace{[\bar{s}_1 \ \bar{s}_2 \ \bar{s}_3 \ \bar{s}_4]}_{\bar{\mathbf{s}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,01 & -1,02 & -2,01 & 0,5 & -1,05 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}}_e \quad (5.6)$$

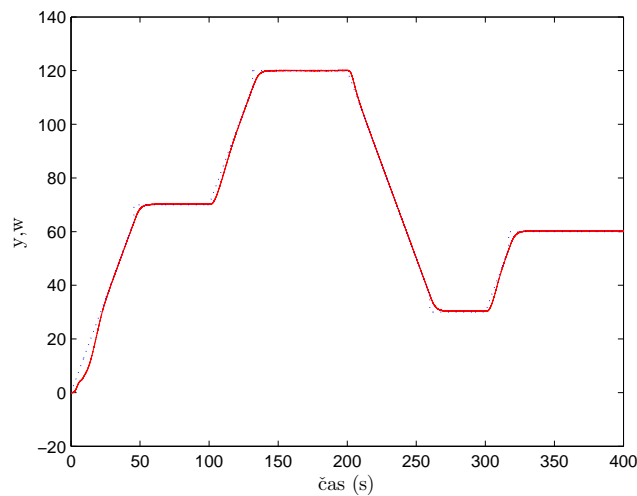
Tato rovnice má jednoznačné řešení

$$\bar{\mathbf{S}} = [-0,7619 \ -3,4286 \ -4,5714 \ -1,9048] \quad (5.7)$$

Na základě znalosti vektorů $\bar{\mathbf{S}}_e$ a $\bar{\mathbf{S}}$ se stanoví zákon řízení v původních souřadnicích. Opět je při návrhu nutné zkontrolovat, zda je přepínaná dvojice vstupů zvolena správně, v tomto případě je nutné vstupy obrátit, a tedy $\mathbf{u}^+ = [1 \ 0]^T$, $\mathbf{u}^- = [0 \ 1]^T$

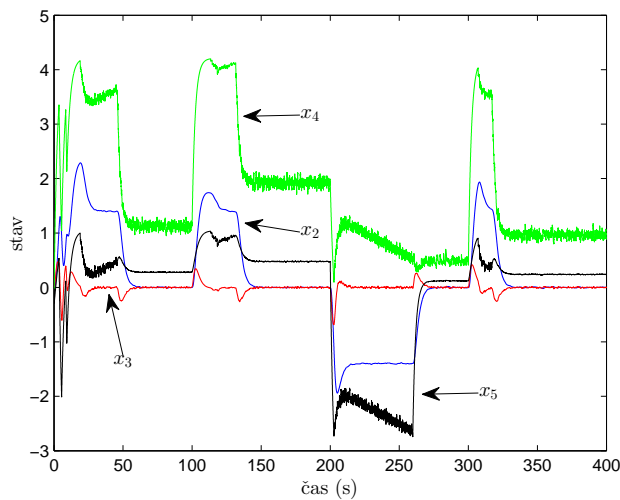
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{sgn}([-0,7429 \ -1,4857 \ -0,7429 \ -0,9524 \ -0,9524] \mathbf{x} + 0,7619kt + 3,4286) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Tím jsou stanovené všechny dodatečné parametry potřebné k řízení se sledováním rampové funkce. Na grafech 5.5-5.8 je zobrazen průběh řízení systému (5.2) při sledování po částech konstantní referenční trajektorie se současným sledováním rampové funkce při nájezdu na požadovanou hodnotu.

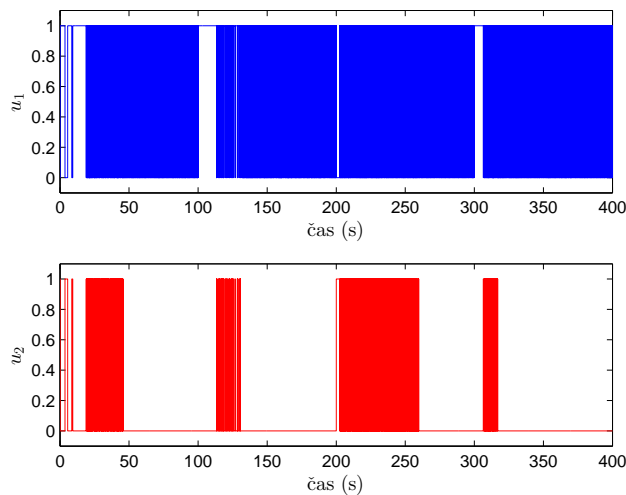


Graf 5.5: Průběh sledování referenční trajektorie - požadovaná trajektorie w modře, teplota na výstupu systému y červeně

Při řízení je použitý rekonstruktor stavu navržený v příkladu 2.11. V grafu 5.5 je kromě průběhu požadované hodnoty w ukázán rovněž průběh referenční trajektorie sledované regulátorem (černě). V průběhu stoupání sleduje výstup systému rampovou funkci, dokud nedojde k přepnutí na sledování požadované hodnoty. Pak výstup systému sleduje požadovanou hodnotu w . Na grafu 5.6 průběhu ostatních složek vektoru stavu je na počátku řízení opět zřejmý vliv ustalování rekonstruktoru, který se projeví zakmitáním přepínací proměnné a v případě sledování referenční trajektorie i přepnutím vstupů.



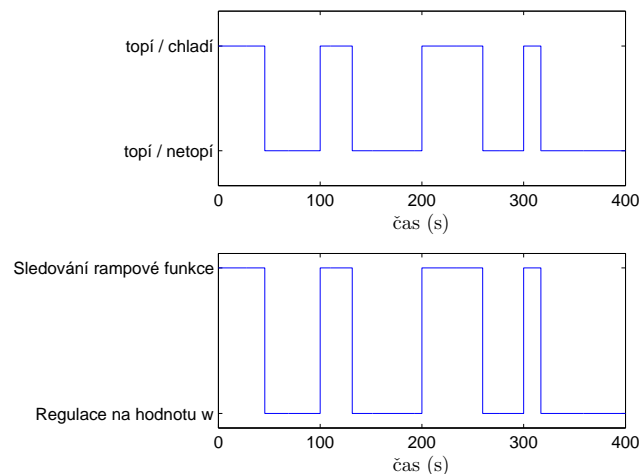
Graf 5.6: Průběh ostatních složek stavu - x_2 modře, x_3 červeně, x_4 zeleně, x_5 černě



Graf 5.7: Průběh přepínání obou složek vektoru vstupu červeně

Graf přepínání jednotlivých vstupů se podstatně odlišuje od předchozího příkladu. Při sledování referenční trajektorie přepínají oba vstupy najednou, protože je použitý dvoustavový regulátor přepínající oba vstupy. Zároveň je to jedna z možností dalšího vylepšení regulátoru, zahrnout detekci nejlevnějšího použitého regulátoru již do fáze sledování rampové funkce.

Poslední graf 5.8 ukazuje jednak přepínání mezi jednotlivými dvoustavovými regulátory, opět se použily pouze dva regulátory, a dále přepínání mezi fázemi sledování referenční trajektorie a řízení na požadovanou hodnotu w . Průběh tohoto přepínání je totožný. To znamená, že jakmile skončí sledování referenční trajektorie s regulátorem typu topí / chladí, ihned se přepne na regulátor typu topí / netopí. To rovněž naznačuje, že regulátor typu topí / netopí by mohl být použitelný již při fázi sledování referenční trajektorie.



Graf 5.8: Průběh přepínání strategie řízení

5.6 Stabilita navržené metody

V přibližovací fázi je chování řízeného systému určeno vlastní dynamikou. V případě stabilního systému směřuje systém do ustáleného stavu podle fázové trajektorie a lze analyticky vypočítat, kdy se stav systému dostane na přepínací nadplochu. Stejný výpočet v případě nestabilního systému nemusí mít řešení a nelze zaručit stabilitu při řízení obecného lineárního systému.

Při řízení na požadovanou hodnotu je přepínací nadplocha navržena tak, aby klouzavý režim nastal, když se stav systému dostane poprvé na přepínací nadplochu. Protože dynamika v klouzavém režimu obsahuje neredukovaná vlastní čísla řízeného systému, musí být všechna tato vlastní čísla stabilní. Pokud to bude splněno, výstup řízeného systému bude v klouzavém režimu konvergovat k požadované hodnotě. Pokud je součástí regulační smyčky volitelné sledování rampové funkce při náběhu na požadovanou hodnotu, musí mít řízený systém rovněž stabilní nuly, které jsou při sledování rampové funkce ob-

saženy v pólech řízeného systému. Také není vždy možné navrhnout přepínací nadplochu pro sledování rampové funkce tak, aby klouzavý režim nastal, když se stav systému dostane poprvé na přepínací nadplochu. Jak bylo řešeno výše, takový návrh lze provést pouze pro systémy bez nul nebo systémy, které mají nuly řízeného systému obsaženy v pólech.

Problémy v kvalitě regulace nastanou rovněž pro systémy s komplexně sdruženými póly. Návrhem přepínací nadplochy se tyto póly dostanou do ekvivalentní dynamiky a na výstupu řízeného systému je v přechodové charakteristice překmit nahoru nebo dolů. Proto je tato metoda řízení vhodná pouze pro mírně kmitavé systémy, kde překmit nahoru nebo dolů je menší než 5% požadované hodnoty.

5.7 Shrnutí

V této kapitole byla navržena metoda stanovení množiny použitelných dvoustavových regulátorů a výběru konkrétního dvoustavového regulátoru v průběhu řízení na požadovanou hodnotu. Tato metoda vychází z návrhu přepínací nadplochy jako levého vlastního vektoru příslušného nejpomalejšímu vlastnímu číslu matice dynamiky řízeného systému.

Výběr dvoustavového regulátoru je realizován pomocí analýzy ekvivalentního řízení. Z ekvivalentního řízení je vyjádřeno, pro jaké přípustné strategie existuje pro danou požadovanou hodnotu klouzavý režim a z těchto strategií se v klouzavém režimu vybere nejlevnější. V přibližovací fázi metoda využívá regulátor s největším rozsahem vstupů. Jako vstupní parametr regulátoru je nově zavedena cena řízení, kterou je nutno stanovit při návrhu uživatelem.

Dále byl regulátor rozšířen o volitelnou součást sledování rampové funkce při nájezdu na požadovanou hodnotu. V tomto případě je řízení pomalejší, protože klouzavý režim sledující rampovou funkci nikdy nebude tak rychlý jako permanentně zapnutý vstup při nájezdu na požadovanou hodnotu. Dále je při sledování rampové funkce použitý pouze jeden dvoustavový regulátor s největším rozsahem klouzavého regionu, což způsobí odlišné přepínání vstupů než při řízení na požadovanou hodnotu.

Použití navržené metody je limitováno na třídu stabilních mírně kmitavých systémů, kde překmit je menší než 5% požadované hodnoty. To je dáno především návrhem přepínací nadplochy, kde vlastní čísla matice dynamiky řízeného systému jsou identická s vlastními čísly matice ekvivalentní dynamiky v klouzavém režimu kromě zvoleného vlastního čísla, které se v klouzavém režimu redukuje. Kmitavost i stabilita se tak přenáší do ekvivalentní dynamiky, kde není velké kmitání přechodové charakteristiky žádoucí z hlediska kvality řízení. Při řízení se sledováním rampové funkce je rovněž kladen požadavek na stabilní nuly řízeného systému, které jsou součástí vlastních čísel matice ekvivalentní dynamiky.

6 Aplikace - řízení bojleru s více topnými tělesy

V úvodu této práce byly zmíněny dvě možné situace současného působení vstupů: vstupy působící proti sobě, např. topení a chlazení, a vstupy působící souhlasně. Jako referenční příklad byl uveden bojler s více topnými tělesy. Na tento systém s více binárními vstupy a jedním výstupem bude aplikována nově navržená metoda řízení s klouzavým režimem.

6.1 Řízený systém

Řízený systém je bojler určený k ohřevu teplé vody se třemi topnými tělesy s různým výkonem a jedním tepelným čidlem měřícím teplotu vody. Soustava je modelována stavovým popisem devátého řádu

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,02 & 0,015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,003 \\ 0,003 & -0,02 & 0,014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & -0,225 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 & -0,08 & 0,06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & -0,225 & 0,175 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02 & -0,08 & 0,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & -0,225 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & -0,06 & 0,048 \\ 0,016 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 & -0,017 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{20}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\
 y &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

Všechny vstupy řízeného systému mohou nabývat buď hodnotu nula, která odpovídá stavu vypnuto, nebo jedna odpovídající stavu zapnuto.

6.2 Inicializace parametrů

6.2.1 Přepínací nadplocha

Pro návrh přepínací nadplochy je potřeba převést řízený systém do jeho regulární formy, ze které se dále počítají ostatní parametry řízení s klouzavým režimem.

Pro návrh přepínací nadplochy je třeba určit vlastní čísla matice dynamiky řízeného systému a zvolit nejpomalejší, které se bude redukovat. Pro matici dynamiky systému (6.1) je nejpomalejší vlastní číslo

$$\lambda = -0,0025 \tag{6.2}$$

Z ostatních vlastních čísel jsou čtyři reálná a čtyři komplexně sdružená. Všechny vlastní čísla mají zápornou reálnou složku, jedná se o stabilní systém.

Levý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ a zároveň vektor parametrů přepínací nadplochy \mathbf{S} je

$$\mathbf{S} = [0,5590 \ 0,6250 \ 0,0509 \ 0,1284 \ 0,0464 \ 0,1309 \ 0,0404 \ 0,1141 \ 0,4937] \tag{6.3}$$

6.2.2 Množina dvoustavových regulátorů

Dále je třeba určit všechny přípustné dvoustavové regulátory. K tomu je třeba stanovit množinu všech kombinací vstupů, které mohou nastat na výstupu těchto regulátorů. Protože řízený systém má tři vstupy, je množina možných kombinací vstupů ve tvaru

$$\mathbf{u} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (6.4)$$

Z této množiny je možné vybrat celkem 28 možných dvoustavových regulátorů. Cena řízení zadaná při návrhu vychází ze spotřeby energie jednotlivých topných těles. Nejslabší topné těleso je použito jako reference pro určení ceny ostatním dvěma. Druhé topné těleso má 1,5krát vyšší spotřebu a třetí topné těleso má dvojnásobnou spotřebu než první topné těleso. Podle toho je stanovena cena zapnutí topných těles v tabulce č. 6.1.

vstup	cena
u_1	1
u_2	1,5
u_3	2

Tabulka 6.1: Cena jednotlivých vstupů systému (6.1)

6.2.3 Výběr počáteční strategie

Pro výběr počáteční strategie, regulátoru s největším intervalem požadované hodnoty, pro kterou může nastat klouzavý režim, je nutné vypočítat součin $\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{u}$ pro všechny kombinace vstupů v množině (6.4) a vybrat přepínanou dvojici s největším rozsahem.

Podle tabulky 6.2 je zřejmé, že největší velikost rozdílu $\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{u}^- - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{u}^+$, je pro regulátor přepínající mezi kombinacemi vstupů $\mathbf{u}^+ = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{u}^- = [1 \ 1 \ 1]^T$,

kombinace vstupů \mathbf{u}	velikost $\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{u}$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	0
$[0 \ 0 \ 1]^T$	0,8084
$[0 \ 1 \ 0]^T$	0,6187
$[0 \ 1 \ 1]^T$	1,4271
$[1 \ 0 \ 0]^T$	0,3392
$[1 \ 0 \ 1]^T$	1,1476
$[1 \ 1 \ 0]^T$	0,9578
$[1 \ 1 \ 1]^T$	1,7663

Tabulka 6.2: Velikost součinu $\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{u}$ pro všechny kombinace vstupů

a to 1,7663. Tento regulátor rovněž přivede systém nejrychleji do klouzavého režimu. Kladná přepínací proměnná nejrychleji klesne, pokud budou všechny vstupy vypnuté a naopak záporná přepínací proměnná nejrychleji stoupne při všech vstupech zapnutých. Cena řízení tohoto regulátoru je $C([0 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 1 \ 1]^T) = 1 + 1,5 + 2 = 4,5$

Po stanovení ceny je možné vyloučit regulátory, jejichž cena je stejná nebo větší než cena počáteční strategie. Po vyloučení těchto regulátorů zbyde včetně počáteční strategie třináct přípustných regulátorů, které jsou uvedené v tabulce 6.3. Všechny ostatní regulátory mají stejnou nebo větší cenu řízení než vybraný regulátor s největším klouzavým režimem a při řízení by nebyly nikdy vybrány.

Dvojce č.	$\mathbf{u}^-(\sigma < 0)$	$\mathbf{u}^+(\sigma > 0)$	\mathbf{k}_1	\mathbf{k}_2	cena	K
1.	$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$[-\frac{1}{2} \ 0 \ 0]^T$	$[\frac{1}{2} \ 0 \ 0]^T$	1	-2,2525
2.	$[0 \ 1 \ 0]^T$	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$[0 \ -\frac{1}{2} \ 0]^T$	$[\frac{1}{2} \ 0]^T$	1,5	-2,4365
3.	$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$[0 \ 0 \ -\frac{1}{2}]^T$	$[0 \ 0 \ \frac{1}{2}]^T$	2	-2,5717
4.	$[1 \ 1 \ 0]^T$	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$[-\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 0]^T$	$[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0]^T$	2,5	-2,3680
5.	$[1 \ 0 \ 1]^T$	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$[-\frac{1}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2}]^T$	$[\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}]^T$	3	-2,4683
6.	$[0 \ 1 \ 1]^T$	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$[0 \ -\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}]^T$	$[0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}]^T$	3,5	-2,5113
7.	$[1 \ 1 \ 1]^T$	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$[-\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}]^T$	$[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}]^T$	4,5	-2,4571
8.	$[0 \ 1 \ 0]^T$	$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 0]^T$	$[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0]^T$	2,5	-2,7047
9.	$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[\frac{1}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2}]^T$	$[\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}]^T$	3	-2,8652
10.	$[1 \ 1 \ 0]^T$	$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[0 \ -\frac{1}{2} \ 0]^T$	$[1 \ \frac{1}{2} \ 0]^T$	3,5	-2,4365
11.	$[1 \ 0 \ 1]^T$	$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[0 \ 0 \ -\frac{1}{2}]^T$	$[1 \ 0 \ \frac{1}{2}]^T$	4	-2,5717
12.	$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[0 \ 1 \ 0]^T$	$[0 \ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}]^T$	$[0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}]^T$	3,5	-3,1395
13.	$[1 \ 1 \ 0]^T$	$[0 \ 1 \ 0]^T$	$[-\frac{1}{2} \ 0 \ 0]^T$	$[\frac{1}{2} \ 1 \ 0]^T$	4	-2,2525

Tabulka 6.3: Vybrané dvoustavové regulátory pro systém (6.1)

Jako druhý krok při stanovení množiny dvoustavových regulátorů se spočítá pro každý regulátor kompenzační parametr K . Výpočet se musí provést individuálně pro každý různý vektor k_1 . Zde je uveden postup pouze pro regulátor zvolený jako počáteční strategie (řádek č. 7 v tabulce 6.3), při návrhu je ale postup opakovan pro každý regulátor samostatně.

K výpočtu kompenzačního zesílení K je potřeba převést řízený systém do regulární formy. První krok při transformaci je výpočet vektoru \mathbf{B}_k , viz věta 4.1.

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{20}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \\ -\frac{20}{3} \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Poslední prvek vektoru \mathbf{B}_k je roven nule. To znamená, že nelze přímo najít takovou

transformační matici, která by převedla řízený systém do regulární formy (opět viz věta 4.1). V tomto případě je nutné vhodně přeskupit řádky v rovnici dynamiky řízeného systému do tvaru, pro který je možné spočítat regulární formu. K tomu je použita transformační matice \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Transformační matice \mathbf{T} je regulární, její determinant je roven jedné. Transformační matice je zvolena v takovém tvaru, aby bylo pro každou nenulovou hodnotu vektoru \mathbf{k}_1 zajištěno, že poslední prvek ve vektoru \mathbf{B}_k je nenulový, tzn. poslední řádek vstupní matice \mathbf{B} řízeného systému nesmí obsahovat ani jednu nulu. Aplikováním stavové transformace se vypočítá stavová reprezentace řízeného systému ve tvaru vhodném k transformaci do regulární formy.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} -0,02 & 0,015 & 0,003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,003 & -0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,014 \\ 0,016 & 0 & -0,017 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,08 & 0 & 0 & 0 & 0,06 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0,048 & 0 & -0,06 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,08 & 0,06 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0,05 & -0,225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0,175 & 0 & -0,225 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,225 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ \frac{20}{3} & \frac{40}{3} & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ y &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Pro systém (6.7) se opět spočítá vektor \mathbf{B}_k .

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ \frac{20}{3} & \frac{40}{3} & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -\frac{20}{3} \\ -20 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Tento vektor splňuje podmínky na výpočet transformační matice do regulární formy a je možné tuto matici vypočítat. Transformační matice \mathbf{T}_r transformující stavový popis (6.7) do regulární formy je ve tvaru

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Aplikováním této transformační matice a dosazením zákona řízení (4.2) pro přepínání

na řádku č. 7 tabulky 6.3 se vypočítá stavový popis v regulární formě

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 &= \begin{bmatrix} -0,02 & 0,015 & 0,003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,003 & -0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,014 & -0,014 \\ 0,016 & 0 & -0,017 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,08 & 0 & 0 & -0,02 & 0,04 \\ 0 & 0 & 0,048 & 0 & -0,06 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,08 & 0,06 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0,05 & -0,225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0,175 & 0 & -0,225 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0467 \\ 0 \\ -0,0667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 &= [0 \ -0,015 \ 0 \ -0,06 \ -0,045 \ -0,0675 \ 0 \ 0] \bar{\mathbf{x}}_1 + [-0,225] \bar{\mathbf{x}}_2 + [1] \operatorname{sgn} \sigma - 1 \\ y &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$(6.11)$$

Pro výpočet je nutné do souřadnic regulární formy transformovat i již navrženou přepínací nadplochu. Ta je po transformaci ve tvaru

$$\sigma = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}_r^{-1}\bar{\mathbf{x}} + K w = [0,559 \ 0,925 \ 0,4937 \ 0,1284 \ 0,1141 \ 0,1309 \ -0,0105 \ -0,0045 \ -0,8831] \bar{\mathbf{x}} + K w \quad (6.12)$$

Nyní je možné spočítat kompenzační zesílení K . Nejprve se spočítá ustálený stav v klouzavém režimu. Vzhledem k velikosti výstupní matice \mathbf{C} v regulární formě stačí spočítat pouze první část ustáleného stavu podle (4.52).

$$\bar{\mathbf{x}}_{1,\text{ust}} = [-0,4066 \ -0,4607 \ -0,4070 \ -0,6397 \ -0,4134 \ -0,5607 \ 0,3535 \ -0,0758] K w \quad (6.13)$$

Pro zaručení nulové regulační odchylky v ustáleném stavu musí být splněna rovnice

$$\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}_{1,\text{ust}} - w = 0 \Rightarrow -0,4070 K w - w = 0 \quad (6.14)$$

Výsledkem této rovnice je kompenzační zesílení K

$$\mathbf{K} = -2,4571 \quad (6.15)$$

Regulátor s těmito parametry se použije jako počáteční strategie při řízení teploty v bojleru. Dále je třeba vypočítat hodnotu kompenzačního zesílení pro ostatní dvojice v tabulce 6.3. Ty se spočítají stejným postupem a jejich hodnoty jsou uvedeny v posledním sloupci tabulky 6.3.

6.2.4 Návrh rekonstruktoru

Protože v bojleru je měřitelná pouze jedna složka vektoru stavu, je nutné provést návrh rekonstruktoru podle kapitoly 2.4.4.

Rekonstruktor bude stejného řádu jako řízený systém. Řád ekvivalentní dynamiky rekonstruktoru je $n-l$, pro řízený systém s jedním výstupem je řád ekvivalentní dynamiky rekonstruktoru roven osmi. Aby se rekonstruktor ustálil rychleji než řízený systém, je pro návrh ekvivalentní dynamiky rekonstruktoru použita metoda přiřazení pólů s požadovanými vlastními čísly matice ekvivalentní dynamiky rekonstruktoru rychlejšími, než je dynamika řízeného systému, a tedy $\lambda_1 = -0,3$, $\lambda_{2,3} = -0,25$, $\lambda_{4,5} = -0,1$, $\lambda_{6,7} = -0,05$, $\lambda_8 = -0,02$. Vektor parametrů rekonstruktoru \mathbf{L} se vypočítá porovnáním charakteristického polynomu matice ekvivalentní dynamiky rekonstruktoru s požadovaným charakteristickým polynomem a jeho velikost je

$$\mathbf{L} = [11,76 \ -2,44 \ 342,47 \ -64,99 \ 26,87 \ -15,74 \ 35,77 \ -3,08 \ 1]^T \quad (6.16)$$

Rekonstruktor pracuje z počátečního stavu $\mathbf{x}_{0,r} = [20 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ a součástí řízení je i ustálení přechodového děje rekonstruktoru na sledovanou hodnotu.

6.2.5 Návrh sledování rampové funkce

Pro návrh sledování rampové funkce je třeba nejprve určit relativní řád řízeného systému. Řízený systém obsahuje 6 nul, jeho relativní řád je roven $r = 3$. Dále ani jedna z nul řízeného systému není obsažena v pólech řízeného systému a není tedy možné použít pro sledování referenční trajektorie vypočítané parametry přepínací nadplochy (6.3). Při sledování trajektorie je možné polohovat pouze dvě vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky. Ostatní vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky odpovídají nulám řízeného systému. Při návrhu je nutné vypočítat parametry přepínací proměnné

$$\sigma = [\bar{s}_1 \quad \bar{s}_2 \quad \bar{s}_3] \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,016 & 0 & -0,017 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,000592 & 0,00024 & 0,000385 & 0 & -0,000077 & 0 & 0,00001 & 0 & -0,0001 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} - \begin{bmatrix} kt \\ k \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (6.17)$$

Polohovatelná vlastní čísla se zvolí jako dvě nejrychlejší vlastní čísla řízeného systému, tedy $\lambda_1 = -0,2754$ a $\lambda_2 = -0,2483$. Přiřazením pólů matici ekvivalentní dynamiky se vypočítal vektor parametrů přepínací nadplochy

$$\bar{\mathbf{S}} = [0,0684 \quad 0,5237 \quad 1] \quad (6.18)$$

Dosazením vektoru $\bar{\mathbf{S}}$ do přepínací proměnné (6.17) a zpětnou transformací pomocí matic 6.9, 6.6 se vypočítá přepínací proměnná v původních souřadnicích

$$\sigma = [0,00778 \quad 0,00024 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,00001 \quad 0,00045 \quad 0,05988] \mathbf{x} - 0,06840kt - 0,52370k \quad (6.19)$$

Ačkoliv s takto navrženou přepínací proměnnou je splněna podmínka existence klouzavého režimu $\mathbf{SBk}_1 < 0$, v řízení nejsou zastoupeny všechny složky vektoru stavu. Další problém nastává při analýze ekvivalentního řízení podle (4.59)

$$u_{eq} = 8,0309x_1 + 1,1201x_2 + 0,0336x_3 + 0,0050x_6 + 0,0222x_7 + 0,3458x_8 - 9,7319x_9 + 1 \quad (6.20)$$

Vzhledem k tvaru ekvivalentního řízení je očekáván velice malý klouzavý region pro sledování referenční trajektorie, neboť množina stavů splňujících podmínku $u_{eq} < 1$ je malá.

Poslední problém může nastat v ekvivalentní dynamice, neboť nuly řízeného systému jsou silně kmitavé

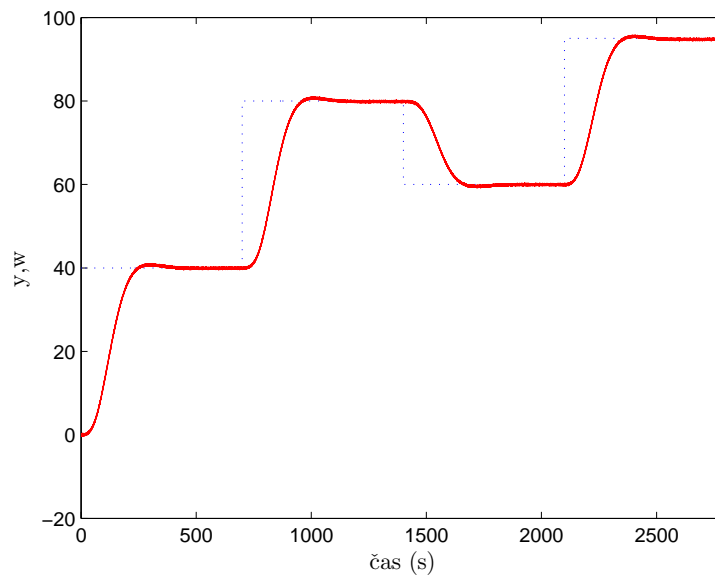
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,3164 \\ \lambda_2 &= -0,1668 + 0,0414i \\ \lambda_3 &= -0,1668 - 0,0414i \\ \lambda_4 &= -0,0271 + 0,0868i \\ \lambda_5 &= -0,0271 - 0,0868i \\ \lambda_6 &= -0,0577 \end{aligned}$$

Vzhledem k těmto faktům nelze doporučit zahrnutí sledování rampové funkce při nájezdu na požadovanou hodnotu od řízení modelu bojleru. Z toho důvodu bude nejprve proveden experiment bez sledování rampové funkce a poté bude sledování rampové funkce do řízení přidáno.

6.3 Průběh řízení

6.3.1 Řízení na požadovanou hodnotu

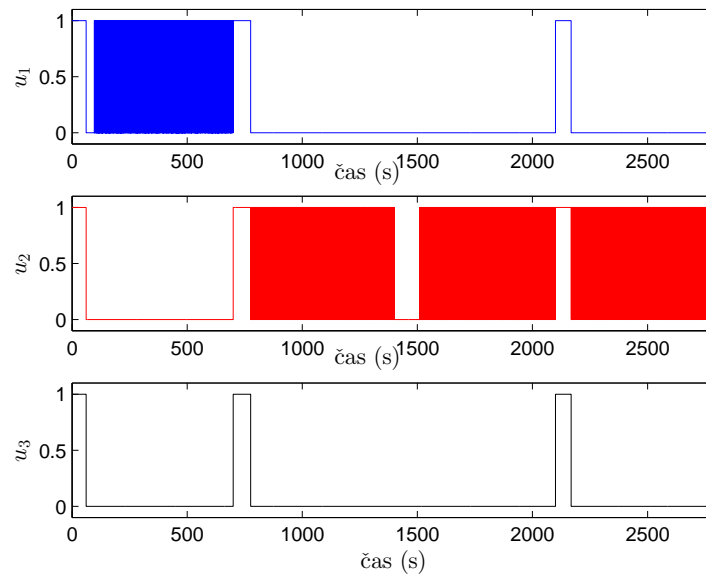
Po inicializaci všech parametrů je možné přistoupit k řízení systému. Cílem řízení je sledování po částech konstantní požadované hodnoty. Výsledek řízení je znázorněn na grafech 6.1-6.3. V grafu 6.1 je vidět, že výstup řízeného systému sleduje požadovanou hodnotu s požadovanou přesností. Během přechodového děje dochází k malému překmitu. Jak bylo ukázáno dříve, tento překmit může mít teoreticky dvě příčiny. Buď nenastal klouzavý režim při protnutí přepínací nadplochy stavovou trajektorií nebo obsahuje matice ekvivalentní dynamiky komplexně sdružené póly. V tomto případě je z návrhu přepínací nadplochy zřejmé, že komplexně sdružené póly jsou do matice ekvivalentní dynamiky zahrnuty. Rovněž z přepínání vstupů je vidět, že při překmitu výstupu systému již byl řízený systém v klouzavém režimu a překmit je důsledkem návrhu vlastních čísel matice ekvivalentní dynamiky.



Graf 6.1: Průběh sledování referenční trajektorie řízení bojleru - referenční trajektorie w modře, teplota na výstupu systému y červeně

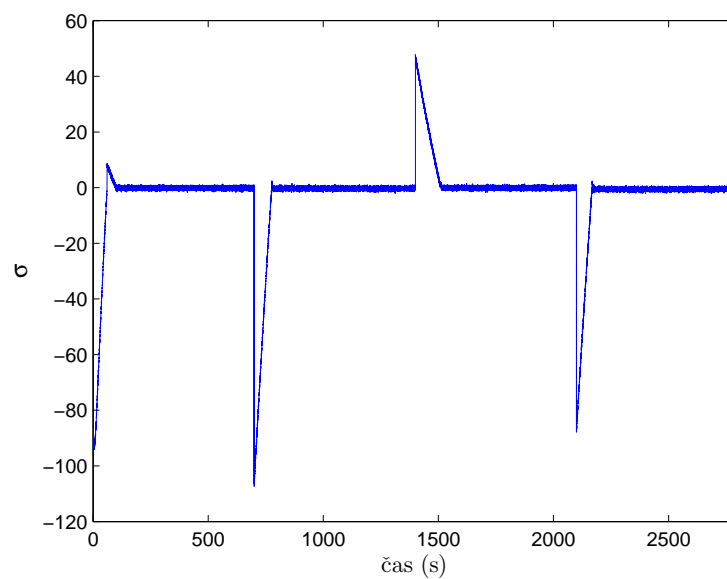
V grafu 6.2 je ukázáno spínání jednotlivých vstupů. Všechny vstupy najednou jsou zapnuté pouze tehdy, když systém nabíhá na požadovanou hodnotu a používá se regulátor zvolený jako počáteční strategie. Jakmile se tento regulátor dostane na přepínací nadplochu, najde jiný levnější regulátor, který začne systém řídit. Ten se dostane na přepínací nadplochu a zůstane v klouzavém režimu. Ani v jednom případě nenastala situace, kdy by se během řízení změnila strategie vícerorát než jednou.

V detailu přepínací nadplochy, graf 6.3, je zobrazen detail průběhu přepínací proměnné v blízkosti nuly pro první náběh na požadovanou hodnotu. V grafu je zřejmý



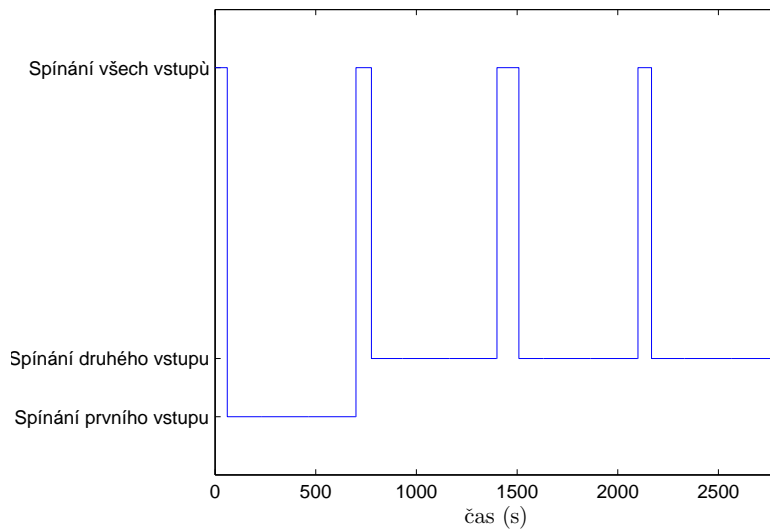
Graf 6.2: Průběh přepínání všech složek vektoru vstupu

přechod požadované hodnoty přes nulu. To může na první pohled indikovat, že klouzavý režim nenastal při prvním dosažení přepínací nadplochy. Důvod tohoto chování je ale jiný. Při dosažení přepínací nadplochy ($\sigma = 0$) detekoval řídicí algoritmus počáteční strategie, že nastal klouzavý režim, a vybral jiný levnější regulátor. V tomto případě došlo k přepnutí z regulátoru č. 7 na regulátor č. 1 v tabulce 6.3.

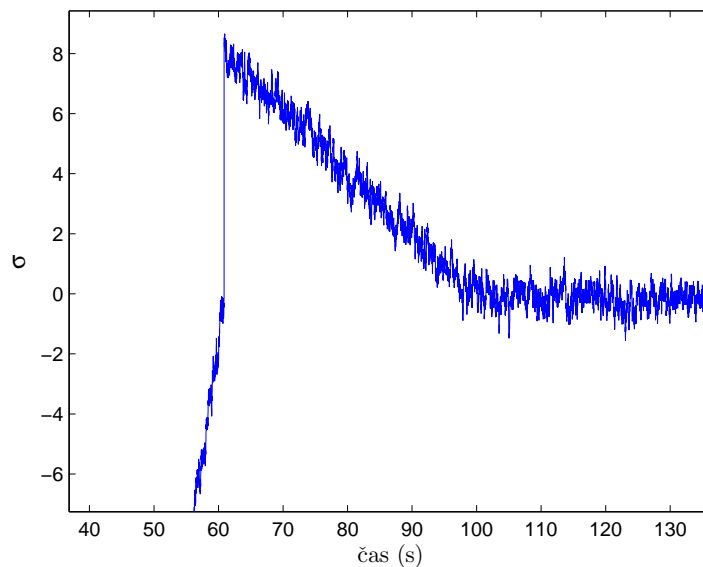


Graf 6.3: Velikost přepínací proměnné - detail

Pro tyto dva regulátory není stejná přepínací nadplocha, protože se liší kompenzační parametr K . Přepnutí regulátorů způsobí skokovou změnu v hodnotě přepínací proměnné, buď nahoru nebo dolů, v závislosti na návrhu regulátorů. Z tohoto chování je zřejmé, že systém zůstane v klouzavém režimu pouze pro takové regulátory, které mají identickou přepínací nadplochu (například regulátory č. 1 a č. 13). Toto chování ale na kvalitu řízení nemá vliv, neboť k němu dojde dřív, než se výstup systému přiblíží k požadované hodnotě.



Graf 6.4: Průběh přepínání strategie řízení

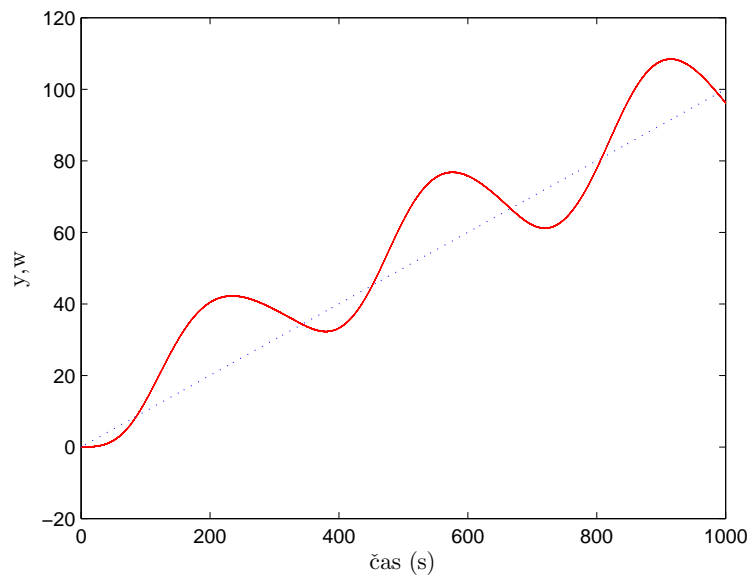


Graf 6.5: Velikost přepínací proměnné

6.3.2 Řízení se sledováním referenční trajektorie

Pro řízení se sledováním referenční trajektorie budou ukázány pouze dva grafy, jednak samotné řízení na rampovou funkci se sklonem 0,1 stupně za vteřinu a odezva výstupu řízeného systému.

V samotném sledování referenční trajektorie na grafu č. 6.6 je vidět, že výstup kmitá okolo požadované funkce a klouzavý režim nenastane. To je způsobené malým klouzavým regionem, jak bylo zmíněno výše při analýze ekvivalentního řízení.



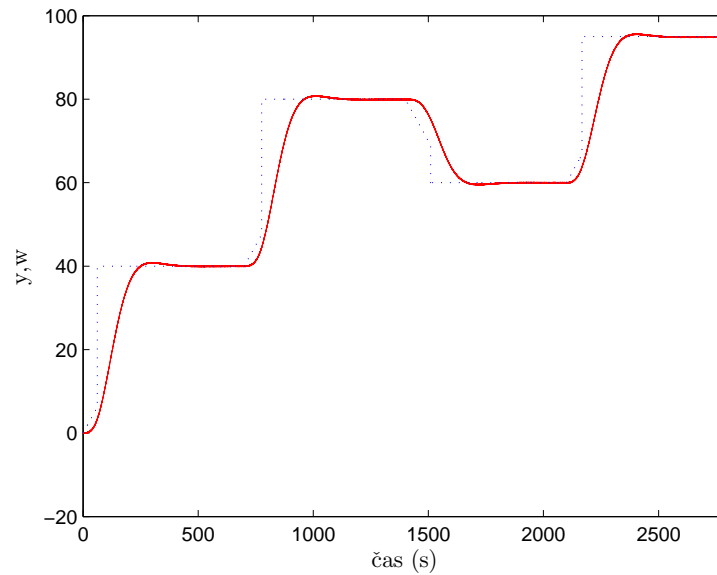
Graf 6.6: Průběh sledování rampové funkce - rampová funkce w modře, teplota na výstupu systému y červeně

Zahrnutí sledování referenční trajektorie do základního algoritmu řízení má rovněž minimální efekt. Jak je vidět na grafu č. 6.7, ve všech případech nastane dříve klouzavý režim na přepínací nadploše řízení na požadovanou hodnotu, než se výstup systému dostane k rampové funkci. Je samozřejmě možné snížit sklon rampové funkce, aby se výstup systému dostal na rampovou funkci dříve. To ale nemusí znamenat, že nastane klouzavý režim a navíc by byla referenční trajektorie výrazně pomalejší ve srovnání s řízením na požadovanou hodnotu.

Z těchto důvodů není vhodné řízení se sledováním referenční trajektorie do řídicího algoritmu pro řízení bojleru zahrnovat.

6.4 Diskuse výsledků

V této práci je navržený řídicí algoritmus parametry řízení, pro které je užitečné demonstrovat chování regulační smyčky, pokud by tyto parametry byly navrženy jinak.



Graf 6.7: Průběh sledování referenční trajektorie - referenční trajektorie w modře, teplota na výstupu systému y červeně

6.4.1 Přepínací nadplocha

Velikost přepínací nadplochy je při návrhu zvolena striktně tak, aby byla zajištěna existence klouzavého režimu na celé přepínací nadploše. Pokud toto nebude splněno, pro řízení to bude mít několik dopadů.

Existence klouzavého režimu

Při jiné volbě přepínací nadplochy není zaručena existence klouzavého režimu při prvním průchodu stavu přepínací nadplochou. Důsledek tohoto chování znamená zhoršení kvality řízení, neboť výstup řízeného systému překmitne požadovanou hodnotu, aniž by to mohl regulátor ovlivnit. Toto chování je demonstrováno při návrhu řízení se sledováním rampové funkce na model bojleru.

Změna podmínky při výběru nejlevnějšího regulátoru

Při výběru nejlevnějšího regulátoru, pro který nastává klouzavý režim, se bude muset použít podmínka ve tvaru (4.62). Důsledkem toho je, že podmínka výběru regulátoru nebude odvozena od požadované hodnoty, ale od stavu systému. Při výběru nejlevnějšího regulátoru nelze apriorně zaručit existenci klouzavého režimu pro danou požadovanou hodnotu pro vybraný nejlevnější regulátor.

6.4.2 Kompenzační zesílení

Kompenzační zesílení K je exaktně dané výpočtem. Pokud bude jeho hodnota jiná, znamená to nenulovou odchylku v ustáleném stavu. Totéž platí při výpočtu koeficientů pro sledování referenční trajektorie.

6.4.3 Volba počáteční strategie

Jako počáteční strategie je použit dvoustavový regulátor pokrývající celý rozsah požadované hodnoty, který může řízený systém dosáhnout. V případě, kdy je jako počáteční strategie zvolen jiný regulátor pokrývající pouze část z rozsahu požadované hodnoty a ta bude shodou okolností mimo pokrytý rozsah, nikdy nenastane klouzavý režim, protože výkon použitých vstupů neumožňuje dosažení přepínací nadplochy. Pro řízení to znamená, že algoritmus výběru vhodného regulátoru se nikdy nespustí a výstup systému nikdy nedosáhne požadované hodnoty.

6.4.4 Množina vhodných regulátorů

V množině vhodných regulátorů mohou být přidány regulátory s vyšší cenou než je počáteční strategie nebo naopak odebrány regulátory s cenou nižší. Pro funkci algoritmu řízení to nepřestavuje problém. Regulátory s vyšší cenou než počáteční strategie nebudou nikdy vybrány, a pokud bude chybět jiný levnější regulátor, systém bude stále pracovat v režimu nejlevnější dostupné strategie, která zaručí klouzavý režim pro danou požadovanou hodnotu. V extrémním případě, kdy nebude k dispozici jiná levnější strategie, zůstane systém v počáteční strategii.

6.4.5 Rekonstruktor stavu

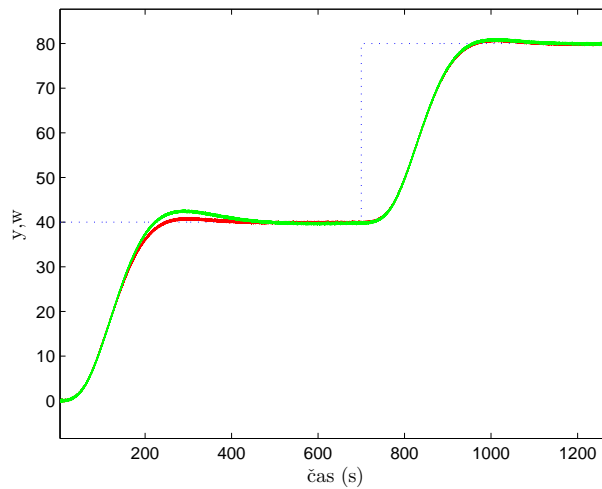
V příkladu řízení bojleru je uveden návrh rekonstruktoru, jehož požadovaná dynamika je rychlejší než dynamika řízeného systému. Důvod tohoto návrhu je požadavek na rychlejší ustálení rekonstruktoru než řízeného systému. Pro demonstrační účely byl proveden simulační experiment s rekonstruktorem, jehož vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky odpovídají reálným částem vlastním číslům matice ekvivalentní dynamiky řízeného systému (není žádoucí, aby rekonstruktor kmital). Vektor parametrů rekonstruktoru \mathbf{L} je

$$\mathbf{L} = [-1,8147 \ 10,7033 \ -116,2794 \ 0,2222 \ -9,4954 \ 4,0862 \ -106,8945 \ 43,4358 \ 1]^T \quad (6.21)$$

Tento rekonstruktor začíná ze stejné počáteční hodnoty jako v příkladu výše. Na grafu 6.8 je srovnání výstupu řízeného systému při použití původního a alternativního rekonstruktoru. Větší překmit na výstupu řízení s pomalejším rekonstruktorem je způsoben pomalejším ustalováním použitého rekonstruktoru. Po další změně požadované hodnoty je rekonstruktor ustálený a chování výstupu je stejné pro oba použité rekonstruktory. Je zřejmé, že rychlost ustálení rekonstruktoru má vliv na chování řízeného systému a je třeba navrhnout rekonstruktor, který se ustálí rychleji, než dosáhne výstup systému požadované hodnoty, aby byla zaručena kvalita řízení. Při řízení se sledováním požadované hodnoty je vliv rekonstruktoru ještě větší, protože způsobí kmitání přepínací proměnné okolo nuly. V takovém případě je doporučeno začít řídit až ve chvíli, kdy je rekonstruktor stavu ustálený.

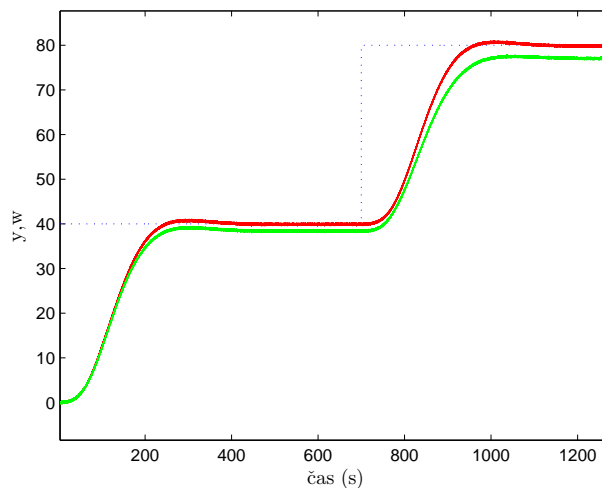
Druhý případ návrhu rekonstruktoru je příliš rychlý rekonstruktor. Na grafu 6.8 je srovnání navrženého rekonstruktoru s jiným rekonstruktorem, jehož vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky jsou dvojnásobná oproti řízenému systému s parametry. \mathbf{L} je

$$\mathbf{L} = [-1084 \ 4682 \ -36327 \ -5971 \ 12135 \ -8838 \ -20805 \ 18309 \ 1]^T \quad (6.22)$$

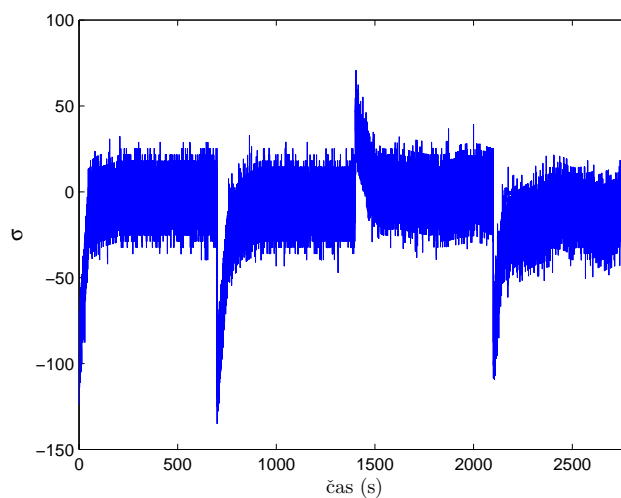


Graf 6.8: Srovnání výstupu pro různé rekonstruktory - původní rekonstruktor červeně, pomalejší rekonstruktor zeleně

Tento rekonstruktor musí začínat ze stejného počátečního stavu jako řízený systém, jinak nedojde k jeho ustálení. Dále je v ustáleném stavu konstantní odchylka od požadované hodnoty způsobená výrazným kmitáním rekonstruovaného stavu. Toto kmitání se přeneso do přepínací proměnné, viz graf 6.10 a vlastní regulace nefunguje dostatečně přesně.



Graf 6.9: Srovnání výstupu pro různé rekonstruktory - původní rekonstruktor červeně, rychlejší rekonstruktor zeleně



Graf 6.10: Přepínací nadplocha - řízení s rekonstruktorem (6.22)

Rekonstruktor tedy musí být navržen dostatečně rychlý, aby se ustálil ještě předtím, než se výstup systému dostane na požadovanou hodnotu, a to i při různých počátečních podmínkách řízeného stavu a rekonstrukturu. Zároveň nesmí stav rekonstrukturu příliš kmitat, protože to má za následek nekvalitní regulaci.

7 Závěr

7.1 Shrnutí výsledků disertační práce

Tato práce se věnuje řízení systémů s více binárními vstupy a jedním výstupem s využitím metody řízení s klouzavým režimem.

V úvodní kapitole této práce byla nastíněna problematika řízení systémů s více vstupy a jedním výstupem pomocí teorie řízení s klouzavým režimem. Jako motivace pro další kapitoly byly popsány problematické situace, k nimž při takovém řízení dochází. Pro lepší seznámení čtenáře s problematikou řízení s klouzavým režimem byla dále uvedena kapitola popisující tuto oblast od počátečního řízení s proměnnou strukturou přes reléové řízení až po obecnou teorii řízení s klouzavým režimem a jeho současné modifikace. Na jednoduchých příkladech byl demonstrován vlastní návrh řízení a použitelnost klouzavého režimu byla rozšířena i do oblasti rekonstrukce stavu pro systémy s neměřitelným stavem a sledování referenční trajektorie.

V kapitole 3 byla uvedena formulace úlohy přepínání vstupů. Cíle disertační práce byly stanoveny s ohledem na hlavní problém řešený v této práci: jak synchronizovat přepínání vstupů, aby byla zajištěna kvalita řízení.

Kapitola 4 byla zaměřena na první část řešení problému, synchronizaci vstupů. Obecný algoritmus řízení s klouzavým režimem je převeden do tvaru dvoustavového regulátoru, který přepíná mezi dvěma konkrétními hodnotami vstupů. Pro tento dvoustavový regulátor jsou dokázány všechny definice a věty, které musí splňovat zákon řízení s klouzavým režimem a na příkladech je demonstrován návrh přepínací nadplochy. Dále je v této části analyzována velikost klouzavého regionu v závislosti na parametrech přepínací nadplochy ve speciálním případě, kdy jsou tyto parametry zvoleny jako levý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu matice dynamiky. Výsledky analýzy pro takto navrženou přepínací nadplochu ukázaly, že existence klouzavého regionu je pro takto navrženou přepínací nadplochu závislá pouze na velikosti požadované referenční trajektorie a lze tak velice snadno rozhodnout o vhodné strategii přepínání. Zároveň je dokázáno, že vlastní čísla matice ekvivalentní dynamiky odpovídají vlastním číslům matice dynamiky řízeného systému s výjimkou vlastního čísla příslušného vlastnímu vektoru zvolenému jako parametry přepínací nadplochy. Toto vlastní číslo se v klouzavém režimu redukuje. Na závěr je v této části navržen algoritmus sledování referenční trajektorie a stanoveny podmínky, kdy je možné v takovém algoritmu navrhnout přepínací nadplochu rovněž jako levý vlastní vektor matice dynamiky řízeného systému.

Kapitola 5 se zabývala druhou hlavní částí řešeného problému, stanovením množiny dvoustavových regulátorů použitelných během řízení a výběrem konkrétního použitého regulátoru. Navržená metoda vybírá vhodný regulátor pomocí podmínky existence klouzavého regionu odvozené od podmínky velikosti ekvivalentního řízení v klouzavém režimu. Tato metoda vychází z analýzy návrhu přepínací nadplochy jako levého vlastního vektoru matice dynamiky a využívá vlastnosti takto navržené přepínací nadplochy k rychlé a jednoduché identifikaci použitelných dvoustavových regulátorů. Vlastní řízení je navrženo tak, že v přibližovací fázi je použitý regulátor s maximálním možným výkonem vstupů k co nejrychlejšímu dosažení klouzavého režimu. V klouzavém režimu se pak vybírá regulátor s minimální cenou vstupů. Tím se dosahuje rychlého náběhu do

blízkosti požadované hodnoty a zároveň minimalizace nákladů na řízení v klouzavém režimu. Ohodnocení ceny spínání jednotlivých vstupů také tvoří jediné parametry regulátoru. Do algoritmu řízení byla dále přidána volitelná funkce sledování rampové funkce v případě, kdy je požadován náběh systému k požadované hodnotě s omezenou strmostí.

V poslední kapitole se navržená metoda aplikovala na model bojleru se třemi topnými tělesy a jedním čidlem pro měření teploty. Na příkladu jsou ukázány vlastnosti algoritmu řízení a vliv jednotlivých parametrů je analyzován v diskusi.

7.2 Cíle dalšího výzkumu a vývoje

Navržená metoda modifikace řízení s klouzavým režimem poskytuje velmi dobré výsledky z hlediska regulace, úspory energie a jednoduchosti obsluhy. Další výzkum je možné zaměřit zejména na následující problémy:

- Návrh identifikační metody parametrů řízeného systému a spojení identifikace s řídicím algoritmem do jednoho funkčního celku
- Zlepšení optimalizace spotřeby energie, především detekce výskytu možnosti nižších nákladů řízení na delším časovém intervalu při použití přepínání s vyšší cenou.
- Rozšíření úlohy na MIMO systémy
- Rozšíření úlohy na tří- a vícestavové vstupy
- Algoritmus detekce nejlevnějšího dvoustavového regulátoru během sledování referenční trajektorie

Literatura

- [1] Bartolini, G., Ferrara A., Usai E.: *Chattering avoidance by second order sliding mode control* In IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, vol. 43, no. 2, pp. 241-246
- [2] Alfaro-Cid, E., McGookin, E.W., Murray-Smith, D.J., Fossen, T.I.: *Genetic algorithms optimisation of decoupled Sliding Mode controllers: simulated and real results*. Control engineering Practice, 2005, vol. 13, pp. 739-748.
- [3] Allen, M., Bernelli-Zazzera, F., Scattolini, R.: *Sliding mode control of a large flexible space structure*. Control engineering Practice, 2000, vol. 8, pp. 861-871.
- [4] Bosgra, O. H., Kwakernaak, H., Meinsma, G.: *Design Methods for Control Systems*. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, 2007
- [5] Cutler, C. R., Ramaker, B. L.: *Dynamic matrix control a computer control algorithm*. AIChE national meeting, Houston, 1979
- [6] Cutler, C. R., Ramaker, B. L.: *Dynamic matrix control a computer control algorithm*. Proceedings of the joint automatic control conference, 1980
- [7] Cutler, C. R., Morshedi, A., Haydel, J.: *An industrial perspective on advanced control*. Proceedings of the AIChE Annual Meeting, Washington, D.C., 1980
- [8] Chi, Y., Hongwei, W., Yuanwei, J.: *Sliding Mode Control for Two-input and Two-output (TITO) Looper Systems*. In Proceedings of Chinese Control and Decision Conference, 2011, pp. 1300-1303
- [9] Chung, Y.C., Wen, B.J., Lin, Y. C.: *Optimal fuzzy sliding-mode control for bio-microfluidic manipulation*. In Control Engineering practice, 2007, vol. 15, pp. 1093-1105
- [10] Edwards, C., Spurgeon, S. K.: *Sliding Mode Control, Theory and Applications*, In Systems and Control Book Series, Taylor & Francis Ltd., 1998, vol. 7.
- [11] Dušek, F., Honc, D.: *Návrh a simulace řízení nesymetrického systému*, Automatizace, 2007, vol. 50, no. 10, pp. 636-642.
- [12] Emelyanov, S. V.: *On peculiarities of variable structure control systems with discontinuous switching functions* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1963, vol. 153, pp. 776-778

- [13] Fallaha, C., J, Saad, M., Kanaan, H. Y., Al-Haddad, K.: *Sliding-Mode Robot Control With Exponential Reaching Law*, IEEE Transactions on industrial electronics, 2001, vol. 58, no. 2, pp. 600-610
- [14] Filippov, A. F.: *Differential Equations with Discontinuous RightHand Side* Kluwer, Dordrecht, 1988
- [15] Fridman, L., Levant A.: *Higher order sliding modes*. In W. Perruquetti, J.P. Barbot, eds. Sliding Mode Control in Engineering, Marcel Dekker, Inc., 2002, pp.53-101
- [16] Floquet, T., Fossard, A. J.: *Introduction: An Overview of Classical Sliding Mode Control* In W. Perruquetti, J.P.Barbot, eds. Sliding Mode Control in Engineering, Marcel Dekker, Inc., 2002, pp. 1-27
- [17] Furuta, K.: *Sliding mode control of discrete system* In Syst. and Contr. Lett., 1990, vol. 14, pp. 145-152
- [18] Garcia-Gabin, W., Zambrano, D., Camacho, E. F.: *Sliding mode predictive control of a solar air conditioning plant*. Control engineering Practice, 2009, vol. 17, pp. 652-663.
- [19] Grosidier, P., Froisy, B., HAMmann, M.: *The IDCOM-M controller* Proceedings of the 1988 IFAC workshop on model based process control, Pergamon, Oxford, 1988, pp. 31-36
- [20] Itkis, Y. U.: *Control Systems of Variable Structure* Wiley, New York, 1976
- [21] Jian-Xin Xu, Hideki Hashimoto: *VSS Theory-based Parameter Identification Scheme for MIMO Systems*. In Automatica, 1996, vol. 32, pp. 279-284
- [22] Johansson, K. J., Rantzer, A., Åström, K. J.: *Fast switches in relay feedback systems*. In Automatica, 1999, vol. 35, pp. 539-552
- [23] Khan, M. K., Spurgeon, S. K.: *Robust MIMO water level control in interconnected twin-tanks using second order sliding mode control*. In Control engineering practice, 2006, vol. 14, pp. 375-386
- [24] Koshkouei, A.J., Burnham, K.J., Zinober, A.S.I.: *Dynamic sliding mode control design*. In IEEE Proc.-Control Theory Application, 2005, vol. 152, no. 4, pp. 392-396
- [25] Koshkouei, A.J., Zinober, A.S.I.: *Sliding Lattice Design for Discrete-Time Linear Multivariable Systems*. In Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, 1996, pp. 1497-1502
- [26] Levant, A.: *Homogeneity approach to high-order sliding mode design*. In Automatica, 2005, vol. 41, pp. 823-830
- [27] Levant, A.: *Homogeneous Quasi-Continuous Sliding Mode Control*. In Advances in Variable Structure and Sliding mode control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Berlin / Heidelberg, 2006, vol. 334, pp. 143-168

- [28] Levant, A.: *Principles of 2-sliding mode design* In Automatica, 2007, vol. 43, pp. 576-586
- [29] Levant, A.: *Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence* In IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, vol. 46, no. 9, pp. 1447-1451
- [30] Levant, A.: *Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control* In International Journal of Control, 1993, vol. 58, no. 6, pp. 1247-1263
- [31] Lin, W.-S., Chen, C.-S.: *Robust adaptive sliding mode control using fuzzy modelling for a class of uncertain MIMO nonlinear systems*. IEE Proc.- Control Theory Appl., 2002, vol. 149, no. 3, pp. 193-201
- [32] Man Zhihong, xing Huo Yu: *Terminal Sliding Mode Control of MIMO Linear Systems*. Proceedings of the 35 Conference on decision and Control Kobe, Japan, 1996, pp. 4619-4624
- [33] Marquis, P., Broustail, J.P.: *SMOC, a bridge between state space and model predictive controllers: Application to the automation of a hydrotreating unit*. Proceedings of the 1988 IFAC workshop on model based process control, Pergamon, Oxford, 1988, pp. 37-43
- [34] Mija, S.J., Thomas, S.: *Reaching Law Based Sliding Mode Control for Discrete MIMO Systems*. Proceedings of the 11th Int. Conf. Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, 2010, pp. 1291-1296
- [35] Monsees, G.: *Discrete-time sliding mode control*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, 2002, pp. 11-34
- [36] Nguyen, Duy-Ky: *Sliding-Mode Control: Advanced Design Techniques*, 1998
- [37] Park, Jae-Sam: *Adaptive Approaches on the Sliding Mode Control of Robot Manipulators* Transactions on Control, Automation and Systems Engineering, 2001, vol. 3, no. 1, pp. 15-20
- [38] Perruquetti, W., Richard, J. P., Borne, P.: *A Generalized Regular Form for Multivariable Sliding Mode Control* In Mathematical Problems in Engineering, 2001, vol. 7, pp. 15-27
- [39] Purwar, S.: *Higher Order Sliding Mode Controller for Robotic Manipulator* 22nd IEEE International Symposium on Intelligent Control, Singapore, 2007
- [40] Richalet, J., Rault, A., Testud, J.L., Papon, J. *Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes*. Automatica, 1978, pp. 413-428.
- [41] Roopaei, M., Balas, V.E.: *Adaptive Gain Sliding Mode Control in Uncertain MIMO systems* Proceedings of the 3rd International workshop on Soft Computing Applications, Szeged - Arad, 2009, pp. 77-82
- [42] Schlegel, M.: *Reléová zpětná vazba* Doplňující text k předmětu PS, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2005

- [43] Shahraz, A., Bozorgmehry Boozarjomehry, R. *A fuzzy sliding mode control approach for nonlinear chemical processes*. Control engineering Practice, 2009, pp. 541-550.
- [44] Shtessel, Y., Zinober, A.S.I., Shkolnikov, I.: *Sliding mode control of boost and buck-boost power converters using the dynamic sliding manifold* International Journal Robust Nonlinear Control, 2003, vol. 13, pp. 1285-1298
- [45] Sobota, J.: *Universal predictive controller for process control*. PhD thesis, University of West Bohemia, Plzeň, 2009
- [46] Tzypkin, Y. Z.: *Theory of control relay systems* Moscow: Gostekhizdat, 1955 (rusky)
- [47] Utkin, V. I.: *Variable structure systems with sliding modes: a survey* In IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 212-222
- [48] Utkin, V. I.: *Sliding modes in control and optimization* Springer-Verlag, 1992
- [49] Utkin, V. I., Chen, D., Zarei, S., Miller, J.: *Nonlinear Estimator Design of Automotive Alternator Utilizing Battery Current and Speed Measurements* European Journal of Control, 2000, vol. 6, issue 2, pp. 135-149
- [50] Václavík, J.: *Řízení s klouzavým režimem* Bakalářská práce, Plzeň, 2010
- [51] Vermillion, Ch., sun, J., Butts, K.: *Modeling, Control Design, and Experimental Validation of an Overactuated Thermal Management System for Engine Dynamometer Applications* In IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, vol. 17, no. 3, pp. 540-551
- [52] Ware, W. E.: *Control of Plastic Extruders with Multiple Temperature Zones Using a Microprocessor Based Programmable Controller System* In IEEE Transactions on Industry Applications, 1984, vol. IA-20, no. 4, pp. 912-917
- [53] Xu, J., Zuo, G., Chen, J., Wan, M.: *Continuous Sliding Mode Control Design for a Class of MIMO Nonlinear Uncertain Systems: Theory and Experiment* Proceedings of the International Conference on Electronics, Communications and Control, 2011, pp. 2471 - 2474
- [54] Yuhai Wang, Peixin Cheng, Zhifeng Xia: *A rapid control prototyping system design for temperature control of plastic extruder based on labview*. Proceedings of the 18th IEEE International Conference on Control Applications, 2009, pp. 1134-1139
- [55] Zeinali, M., Notash, L.: *Continuous Sliding Mode Control Design for a Class of MIMO Nonlinear Uncertain Systems: Theory and Experiment* Proceedings of the 18th IEEE International Conference on Control Applications, 2009, pp. 1134-1139
- [56] <http://www.davis-standard.com/extrusion-us/products/pipe-profile-tubing/plastic-extruders/>

Seznam obrázků

1.1	Grafická reprezentace vektoru vstupu pro systém se dvěma vstupy	3
1.2	Grafická reprezentace vektoru vstupu pro systém se dvěma vstupy	4
2.1	Vektorové pole systému (2.2)	7
2.2	Regulační smyčka	8
2.3	Odezva systému (červeně), řízení (modře)	9
2.4	Výstup řízeného systému (2.10) (červeně), řízení (modře) pro periodu vzorkování $T_s = 0.01s$	10
2.5	Trajektorie řízeného systému (2.12)	11
2.6	Regulační smyčka s PD článkem ve zpětné vazbě	11
2.7	Trajektorie řízeného systému 2.8 s PD článkem ve zpětné vazbě	12
2.8	Trajektorie řízeného systému 2.8 s PD článkem ve zpětné vazbě	12
2.9	Trajektorie řízeného systému (2.22), (2.23)	13
2.10	Příklad 2.10 - průběh složek vektoru stavu	32
2.11	Funkce příslušnosti pro σ a $\dot{\sigma}$	35
2.12	Funkce příslušnosti pro Δu	35
2.13	Příklad 2.11 - průběh složek vektoru stavu	47
2.14	Příklad 2.11 - průběh složek vektoru přepínací proměnné σ	48
2.15	Příklad 2.11 - průběh složek vektoru vstupu	48
2.16	Příklad 2.11 - průběh složek odchylkového vektoru stavu v rekonstruktoru	49
4.1	Grafické znázornění podmínky (4.67)	62
4.2	Příklad 4.2 - průběh složek vektoru stavu	68
4.3	Příklad 4.2 - průběh přepínací proměnné	69
4.4	Příklad 4.2 - srovnání obou algoritmů řízení s klouzavým režimem: zá- kladní algoritmus zeleně, modifikovaný algoritmus modře.	69
4.5	Příklad 4.2 - průběh složek vektoru vstupu	70
4.6	Příklad 4.3 - průběh složek vektoru stavu	72
4.7	Příklad 4.3 - průběh složek vektoru vstupu	72
4.8	Příklad 4.3 - průběh přepínací proměnné	73
4.9	Příklad 4.3 - srovnání výstupu řízeného systému se současným ustalová- ním rekonstruktoru (modře) a s již ustáleným rekonstruktorem (černě) .	73

4.10	Příklad 4.3 - průběh přepínací proměnné se současným ustalováním rekonstruktoru (modře) a s již ustáleným rekonstruktorem (červeně)	73
5.1	Průběh sledování referenční trajektorie - referenční trajektorie w modře, teplota na výstupu systému y červeně	78
5.2	Průběh ostatních složek stavu - x_2 modře, x_3 červeně, x_4 zeleně, x_5 černě	79
5.3	Průběh přepínání obou složek vektoru vstupu červeně	79
5.4	Průběh přepínání strategie řízení	80
5.5	Průběh sledování referenční trajektorie - požadovaná trajektorie w modře, teplota na výstupu systému y červeně	83
5.6	Průběh ostatních složek stavu - x_2 modře, x_3 červeně, x_4 zeleně, x_5 černě	84
5.7	Průběh přepínání obou složek vektoru vstupu červeně	84
5.8	Průběh přepínání strategie řízení	85
6.1	Průběh sledování referenční trajektorie řízení bojleru - referenční trajektorie w modře, teplota na výstupu systému y červeně	93
6.2	Průběh přepínání všech složek vektoru vstupu	94
6.3	Velikost přepínací proměnné - detail	94
6.4	Průběh přepínání strategie řízení	95
6.5	Velikost přepínací proměnné	95
6.6	Průběh sledování rampové funkce - rampová funkce w modře, teplota na výstupu systému y červeně	96
6.7	Průběh sledování referenční trajektorie - referenční trajektorie w modře, teplota na výstupu systému y červeně	97
6.8	Srovnání výstupu pro různé rekonstruktory - původní rekonstruktor červeně, pomalejší rekonstruktor zeleně	99
6.9	Srovnání výstupu pro různé rekonstruktory - původní rekonstruktor červeně, rychlejší rekonstruktor zeleně	99
6.10	Přepínací nadplocha - řízení s rekonstruktorem (6.22)	100

Seznam tabulek

2.1	Fuzzy pravidla	34
5.1	Cena jednotlivých vstupů systému (5.2)	78
5.2	Cena jednotlivých dvoustavových regulátorů	79
6.1	Cena jednotlivých vstupů systému (6.1)	88
6.2	Velikost součinu SBu pro všechny kombinace vstupů	88
6.3	Vybrané dvoustavové regulátory pro systém (6.1)	89

Seznam publikací

1. J. Hrdlička and J. Huspeka, *Využití počítače pro polarografická měření*. In Sborník prací společné vědecko-výzkumné činnosti studentů a učitelů katedry chemie, Plzeň, 2005, pp. 51-60, ISBN: 80-7020-153-3
2. J. Huspeka , *Helicopter model control*. In MATEO - The European Network of Mechatronics Centres and Industrial Controllers 2006, Plzeň, 2006, pp. 97-105, ISBN: 80-7043-508-9
3. J. Hrdlička and J. Huspeka, *Jednoduchý polarograf s počítačovým řízením*. In Chemické listy, 2006, vol. 100, no. 8, pp. 688, ISSN: 0009-2770
4. J. Huspeka , *Comparison of tuning rules of the sliding mode-temperature controller*. In The 1st Young Researchers Conference on Applied Sciences, Plzeň, 2007, pp. 192-200, ISBN: 978-80-7043-574-8
5. M. Schlegel and J. Huspeka, *Automatic tuning of sliding mode-temperature controller*, In Process Control '07, Bratislava, 2007, pp. 1-6, ISBN: 978-80-227-2677-1
6. J. Huspeka and M. Méner, *Higher-order sliding mode control of temperature processes*, In Process Control 2008, Pardubice, 2008, pp. 1-9, ISBN: 978-80-7395-077-4
7. J. Huspeka and M. Schlegel, *Sliding mode control of the cart with inverted pendulum*, In The 2nd Young Researchers Conference on Applied Sciences, Plzeň, 2008, pp. 13-18, ISBN: 978-80-7043-698-1
8. J. Huspeka, *Second order sliding mode of the DC motor*, In 17th International Conference on Process Control 2009, Štrbské Pleso, 2009, pp. 134-139, ISBN: 978-80-227-3081-5
9. J. Huspeka, *Sliding mode control with constrained manifold*, In Proceedings of 9th International Conference Process Control 2010, Kouty nad Desnou, 2010, pp. 1-10, ISBN: 978-80-7399-951-3