FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2015

Použití nespojité Galerkinovy metody pro řešení úloh mechaniky tekutin

Aleš Pecka[1]

1 Úvod

Nejrozšířenější numerickou metodou ve výpočtové mechanice tekutin je metoda konečných objemů, popsaná v práci Ferziger a Peric (2001). Tato metoda vychází z diskretizace integrálních tvarů rovnic vyjadřující zákony zachování. Díky tomu je metoda konzervativní a robustní, navíc je snadno aplikovatelná na nestrukturované sítě. V základní podobě je metoda konečných objemů prvního řádu přesnosti v prostoru, přičemž s formálním rozšířením na druhý řád se setkáváme poměrně často. Její významnou nevýhodou je však komplikovaná implementace vyšších řádů přesnosti.

Díky tomu se začínají využívat moderní numerické metody vyššího řádu přesnosti, jejichž hlavním zástupcem je nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků, viz Cockburn a Shu (1989) a Feistauer at al. (2003). Jedná se o zobecněním metody konečných objemů, která využívá rozvoje řešení jako lineární kombinace zvolených bázových funkcí, podobně jako tomu je u klasické Galerkinovy metody konečných prvků, s tim rozdílem, že na hranici element připouštíme nespojitosti v řešení. Hlavní nevýhodou nespojité Galerkinovy metody je její vysoká výpočetní náročnost.

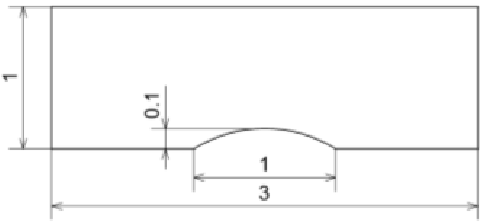
Řád přesnosti nespojité Galerkinovy metody závisí na počtu stupňů polynomů zvolených bázových funkcí. Při použití některého z explicitních schémat pro diskretizaci času, například Rungeovy-Kuttovy metody, viz Cockburn a Shu (2001), je velikost časového kroku omezena CFL podmínkou, která je nutnou podmínkou konvergence metody. Tato podmínka se zpřísňuje při použití polynomů vyšších řádů. Tomuto nepříjemnému omezení se lze vyhnout využitím některé implicitní metody pro disktretizaci času, viz Feistauer et al. (2010). Implicitní metody jsou obzvláště výhodné u úloh hledání ustáleného řešení, jelikož nám zde nezáleží na časovém průběhu řešení, který může být volbou velkého časového kroku zkreslený.

V předložené práci je demonstrováno využití nespojité Galerkinovy metody, za použití implicitní Eulerovy metody, k modelování proudění stlačitelných, nevazkých a tepelně nevodivých tekutin ve dvou dimenzích. Matematickým modelem pro tekutinu s těmito vlastnostmi je soustava Eulerových rovnic, viz Vimmr (2002), což je systém nelineárních parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.

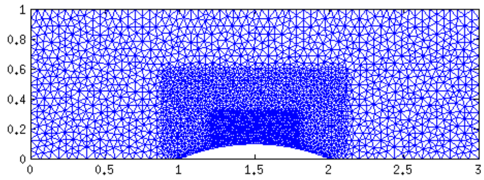
2 Numerické výsledky

Pro otestování řešiče využívající nespojité Galerkinovy metody byla použita úloha s názvem GAMM kanál. Tato úloha se často využívá k ověření správného fungování řešičů pro modelování proudění stlačitelných tekutin, jelikož výsledky této úlohy byli naměřeny experimentálně. Jde o úlohu definovanou na obdélníkové oblasti s vyříznutou částí kruhu, tak jak je vidět na obrázku 1. Na levém okraji obdélníku je jako okrajová podmínka nastaven subsonický vstup o stagnačním tlaku $p = 1$, stagnační hustotě $\rho = 1$ a úhlu náběhu proudu $\alpha = 0$. Na

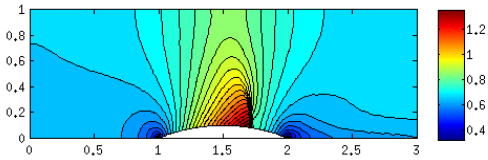
[1] student navazujícího (bakalářského, doktorského) studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: prvni@students.zcu.cz



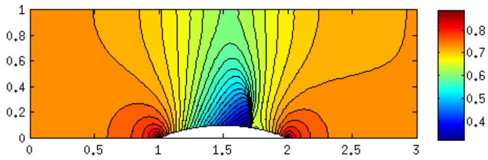
Obrázek 1: Geometrie



Obrázek 2: Výpočetní síť



Obrázek 3: Izočáry Machova čísla



Obrázek 4: Izočáry tlaku

pravém okraji je subsonický výstup o statickém tlaku $p = 0.737$. Zbytek okraje, čili horní a dolní část obdélníku i s vyříznutým kruhem, je nepropustná stěna.

V této práci je úloha řešena nespojitou Galerkinovou metodou 2. řádu, čili za použití bázových funkcí až prvního stupně, s časovou diskretizací pomocí implicitní Eulerovy metody. Na obrázku 3 jsou zobrazeny izočáry machova čísla a na obrázku 4 izočáry tlaku. Problematickou oblastí v této úloze je rázová vlna, která se vytváří nad obloukem. Vzniká zde velká nespojitost způsobující oscilace v případě metod vyšších řádů. V blízkosti rázové vlny je tedy nutné použití tlumení, které snížením řádu přesnosti zamezuje nežádoucím oscilacím.

3 Závěr

Pomocí nespojité Galerkinovy metody můžeme dosáhnout libovolného řádu přesnosti v prostoru. Za použití tlumení v problémových oblastech jako jsou rázové vlny nám nespojitá Galerkinova metoda poskytuje vhodný nástroj na řešení úloh proudění tekutin. Vysokou výpočetní náročnost metody lze obzvláště u úloh hledání ustáleného řešení kompenzovat volením velkého časového kroku za použití některé z implicitních metod.

Literatura

Cockburn B., Shu C.W., 1989: TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: General framework. Mathematics of Computation, 52, 411–435.

Cockburn B., Shu C.W., 2001: Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convectiondominated problems. Journal of Scientific Computing, 16, 173–261.

Feistauer M., Felcman J., Straškraba I., 2003: Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow. Oxford University Press.

Feistauer M., Kučera V., Prokopová J., 2010: Discontinuous Galerkin solution of compressible flow in time-dependent domains. Math. Comput. Simulat., 80(8), 1612–1623.

Ferziger J., Peric M., 2001: Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin.

Vimmr J., 2002: Matematické modelování proudění stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice. Disertační práce, Západočeské univerzita v Plzni.