FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2016

Oceňování opcí inverzní Fourierovou transformací

Jiří Panoš, MSc[1]

1 Úvod

Před více než čtyřmi dekádami, v roce 1973, Fischer Black a Myron Scholes představili přelomový matematický model finančního trhu vhodného k oceňování finančních derivátů (opce, forwardy, swapy etc.), který je dnes celosvětově znám jako Black-Scholesův model. Tento model je založen na Brownově pohybu a později, v roce 1997, za něj Myron Scholes obdržel Nobelovu cenu za ekonomii. Fischer Black, jež zemřel v roce 1995, se již bohužel tohoto ocenění nedožil.

Velice obecný princip oceňování, jež je aplikovatelný v rámci Black-Scholesova modelu, je takzvané rizikově neutrální oceňování. Spotová cena (tedy cena v čase $t = 0$) finančního derivátu s *realizační cenou* K, *dobou do splatnosti* T a stochastickou *výplatní funkcí* $h(S_T, K)$, kde S_T je náhodná veličina popisující cenu *podkladového aktiva* v čase T, je dána výrazem

$$\begin{aligned} PV_0(T,K) &= \mathrm{E}^Q[h(S_T,K)] \\ &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,K)\, g_{S_T}^Q(x)\,dx, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde $\mathrm{E}^Q[*]$ je lineární operátor střední hodnota pod *rizikově neutrální pravděpodobnostní mírou* označenou Q, $g_{S_T}^Q$ značí *rizikově neutrální hustotu pravděpodobnosti* náhodné veličiny S_T a r je spojitá *bezriziková úroková míra* převládající na finančním trhu.

2 Cena evropské call opce

Evropská call opce je finanční isntrument, jež dává držiteli právo (nikoli však povinnost) v čase T zakoupit jednu jednotku podkladového aktiva za cenu K od upisovatele opce. Výplatní funkce h tohoto typu finančního derivátu je tedy dána výrazem $\max(S_T - K, 0)$.

V Black-Scholesově modelu je náhodný proces popisující cenu aktiva $\{S_t : t \geq 0\}$ v rizikově neutrálním prostředí modelován jako

$$S_t = S_0 e^{\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t}, \tag{2.1}$$

kde $\{W_t : t \geq 0\}$ je standardní Wienerův proces (Brownův pohyb), parametr σ řídí volatilitu procesu, r je spojitá bezriziková úroková míra převládající na finančním trhu a q je spojitá *dividendová míra* asociovaná s podkladovým aktivem. Označme $\mu^Q \coloneqq \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ a poté z (2.1) plyne, že náhodná veličina S_T se řídí log-normálním rozdělení se střední hodnotou $\mathrm{E}[S_T] = S_0 e^{\mu^Q T}$ a rozptylem $\mathrm{Var}[X] = S_0^2 e^{2\mu^Q T}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)$. Tedy hustota $g_{S_T}^Q$ je známá v uzavřené podobě a problém (2.1) spočívá v jednoduché integraci výrazu (1.1) s dosazením příslušných funkcí. Označme Φ distribuční funkci standardního normálního rozdělení. V Black-Scholesově modelu lze poté odvodit uzavřené analytické řešení pro cenu evropské call opce, jež je dáno výrazy

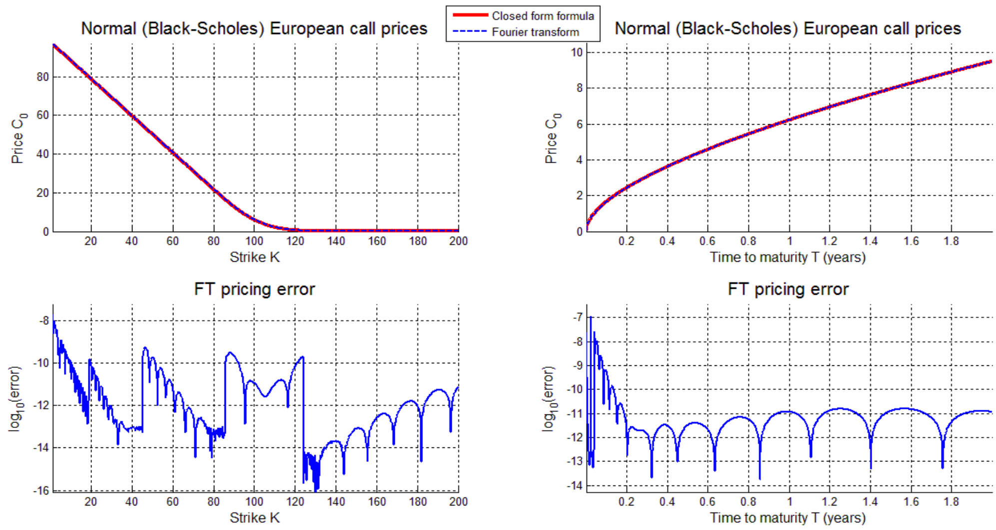
[1] student doktorského studijního programu Matematika, obor Aplikovaná matematika, zaměření Modely stochastické dynamiky, e-mail: panos@kma.zcu.cz

$$
\begin{aligned}
C_0(T,K) &= S_0 e^{-qT} \Phi(d_1) - K e^{-rT}\, \Phi(d_2),\\
d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},\\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Drtivá empirická evidence ovšem ukazuje, že Wienerův proces sám o sobě není vhodným kandidátem pro modelování finančních aktiv, jelikož není schopný zachytit zápornou šikmost a těžké konce, jimiž se rozdělení finančních aktiv obvykle vyznačují, a ani další empiricky potvrzené jevy jako je shlukování volatility či pákový efekt. Proto je vhodné modelovat cenu aktiva jako exponenciální funkci komplexnějších procesů, případně i kombinace několika procesů, z nichž některé řídí dynamiku ceny a jiné dynamiku volatility aktiva. Ve velké většině těchto případů ovšem hustota $g_{S_T}^Q$ nelze vyjádřit analyticky pomocí známých matematických funkcí. Naopak téměř vždy je dostupné analytické vyjádření charakteristické funkce $\varphi_{\ln S_T}^Q$ přirozeného logaritmu náhodné veličiny S_T (například v Black-Scholesově modelu platí $\varphi_{\ln S_T}^Q(\theta) = e^{\left(i\theta(\ln S_0 + \mu^Q T) - \sigma^2\theta^2 T/2\right)}$). To si uvědomili matematici Peter Carr a Dilip Madan a ve svém slavném článku Carr a Madan (1999) odvodili pro cenu evropské call opce následující semi-analytický vzorec založený na inverzní Fourierově transformaci funkce $\varphi_{\ln S_T}^Q$:

$$
C_0(T,K) = \frac{e^{-\varrho \ln K}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta \ln K} \frac{e^{-rT} \varphi_{\ln S_T}^Q\big(\theta - i(1+\varrho)\big)}{\varrho^2 + \varrho - \theta^2 + i\theta(2\varrho + 1)} d\theta, \tag{2.3}
$$

kde $\varrho > 0$ je kladná konstanta. Formule (2.3) představuje velký skok v oceňování opcí, jelikož umožňuje relativně snadným způsobem nalézt cenu evropské call opce i ve velmi komplexních modelech, kdykoliv je dostupná příslušná charakteristická funkce. Výrazy (2.2) a (2.3) jsou tedy dvě totožné entity vyjádřené naprosto odlišným způsobem. O tom se můžeme přesvědčit na Obr. 1, kde v dolní části vidíme dekadický logaritmus chyby numerické aproximace výrazu (2.3) v závislosti na K a na T, která se v obou případech pohybuje řádově okolo 1×10^{-12}.



Obrázek 1: Numerická chyba oceňování inverzní Fourierovou transformací (Panoš 2014)

Literatura

Carr, P. a Madan, D., 1999. Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of computational finance*, Vol. 2(4). pp 61-73.

Panoš, J., 2014. *Lévy Processes with Applications in Finance*. Master's degree dissertation, Brunel University London.