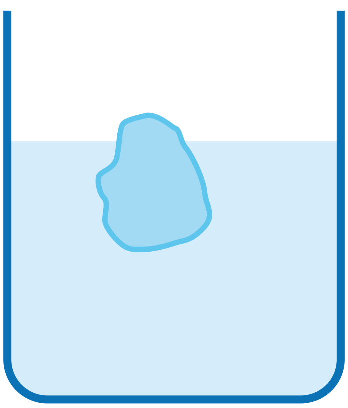
Jak se změní hladina kapaliny?

Karel Rauner[1], *Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni,*

Otázkou v nadpisu článku často končí zajímavé příklady na aplikaci Archimédova zákona. Tento příspěvek si klade za cíl sestavení souboru takových příkladů. Každý z nich je nejprve kvalitativně řešen fyzikálním odhadem, výsledek je pak ověřen a kvantifikován matematickým odvozením.

V příkladech bylo užito následujícího jednotného označení:
V_0 – objem kapaliny na počátku děje,
V – objem pod hladinou na počátku děje,
V' – objem pod hladinou na konci děje,
V_P – objem ponořené části plovoucího předmětu na počátku děje,
V_L – původní objem ledu,
V_V – objem vody, vzniklé roztáním ledu,
ρ – hustota.
Význam používaných indexů: *Pb* – olovo, *k* – korek, *pat* – tuhý parafin, *pak* – kapalný parafin, *ko* – kov, *ka* – kámen, *V* – voda, *L* – led, *D* – destilát, *vz* – vzduch, *s* – stlačený vzduch.

Při řešení předpokládáme konstantní hustotu vody, $\rho_L < \rho_D < \rho_V$ (první nerovnost platí jen pro nepříliš koncentrované destiláty) a $\rho_{pak} < \rho_{pat} < \rho_V$. Dále předpokládáme, že se během děje nemění rozměry nádoby, že kapalina v průběhu děje z nádoby nevytéká a že objem směsi destilátu a vody je roven součtu původních objemů destilátu a vody před smícháním. Konečně se předpokládá, že destilátu je řádově větší množství než ledu, takže hustota destilátu se po roztavení ledu nezmění. Zadání příkladu je heslovité, je popsán pouze původní stav soustavy a její stav na konci děje.



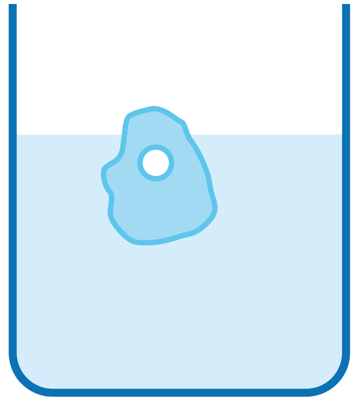
Obr. 1

1. Počáteční stav: Na vodě plave kus ledu (obr. 1).
Konečný stav: Led zcela roztaje.
Odhad: Lze si představit, že led je uzavřen nehmotnou, nekonečně tenkou membránou. Roztaje-li led v této myšlené „nádobce“, bude objem vody vzniklé z ledu přesně roven objemu ponořené části ledu , protože tíha ledu se podle Archimédova zákona rovná tíze vody, která by vyplnila ponořený objem . Hladina se tedy **nezmění**.
Důkaz: Na počátku platí $V = V_0 + V_P$. Podle Archimédova zákona $\rho_V \cdot V_P = \rho_L \cdot V_L$. Na konci děje $\rho_L \cdot V_L = \rho_V \cdot V_V$. $V' = V_0 + V_V = V_0 + V_P = V$, hladina se **nezmění**.

2. Počáteční stav: Na destilátu plave kus ledu (situace jako na obr. 1).
Konečný stav: Led zcela roztaje.
Odhad: Led je v destilátu ponořen více než ve vodě. Při představě ledu uzavřeného v pevné nehmotné membráně s nulovým objemem je zřejmé, že voda vzniklá táním ledu nevyplní zcela ponořený objem ledu, hladina **klesne**.
Důkaz: $V = V_0 + V_P$, $\rho_D \cdot V_p = \rho_L \cdot V_L$, na konci děje $\rho_L \cdot V_L = \rho_V \cdot V_V$. Z toho $V_V = \dfrac{\rho_D}{\rho_V} \cdot V_P$, proto $V' = V_0 + \dfrac{\rho_D}{\rho_V} \cdot V_P$.
$V' - V = \dfrac{\rho_D - \rho_V}{\rho_V} \cdot V_P$. Protože $\rho_V > \rho_D$, hladina **klesne**.

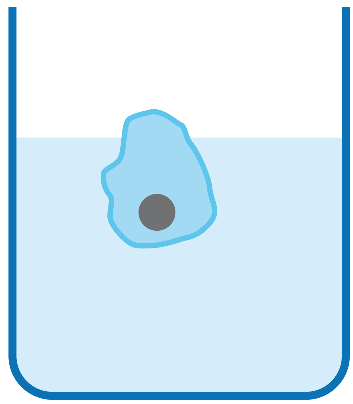
[1] rauner@kmt.zcu.cz

3. Počáteční stav: Na vodě plave kus ledu, v němž je uzavřena bublina vzduchu. Tlak v bublině je roven tlaku atmosférickému (obr. 2).
Konečný stav: Led zcela roztaje, vzduch unikne.
Odhad: Je zřejmé, že výsledek děje nezávisí na poloze bubliny v ledu. Je proto možné si představit, že bublina je zcela na okraji neponořené části ledu. V objemu a tíze ledu ji tedy není vůbec nutné uvažovat. Případ je totožný se situací 1 a hladina se tedy **nezmění**.
Důkaz: Matematicky shodný s případem 1, protože tíha vzduchu v bublině je kompenzována vztlakovou silou okolního vzduchu.


Obr. 2

4. Počáteční stav: Na destilátu plave kus ledu s uzavřenou bublinou vzduchu. Tlak vzduchuje roven tlaku atmosférickému (situace jako na obr. 2).
Konečný stav: Led zcela roztaje, vzduch unikne.
Odhad: Bublinu je možné si opět představit na okraji neponořené části ledu, další úvahy by byly stejné, jako v 2. případě, hladina proto klesne.
Důkaz: Matematicky shodný s 2. příkladem.

5. Počáteční stav: Na vodě plave kus ledu, ve kterém je zamrzlá olověná kulička (obr. 3).
Konečný stav: Led zcela roztaje, kulička klesne ke dnu.
Odhad: Bez vlivu na správnost výsledku si lze představit kuličku z materiálu, který by měl obrovskou hustotu a téměř nulový objem. Led je s takovou kuličkou ponořen podstatně více než led čistý. Pod hladinou si můžeme představit i kuličku. Po roztavení ledu nevyplní led ponořený objem zcela, ale jen zčásti, hladina proto **klesne**.
Důkaz: $V = V_0 + V_P$, na počátku $\rho_V \cdot V_P = \rho_L \cdot V_L + \rho_{Pb} \cdot V_{Pb}$. Na konci děje $V' = V_0 + V_V + V_{Pb}$. Protože $\rho_L \cdot V_L = \rho_V \cdot V_V \Rightarrow V = V_0 + \frac{\rho_L}{\rho_V} \cdot V_L + \frac{\rho_{Pb}}{\rho_V} \cdot V_{Pb}$, $V' - V = \frac{\rho_V - \rho_{Pb}}{\rho_V} \cdot V_{Pb} < 0$, hladina tedy **klesne**.

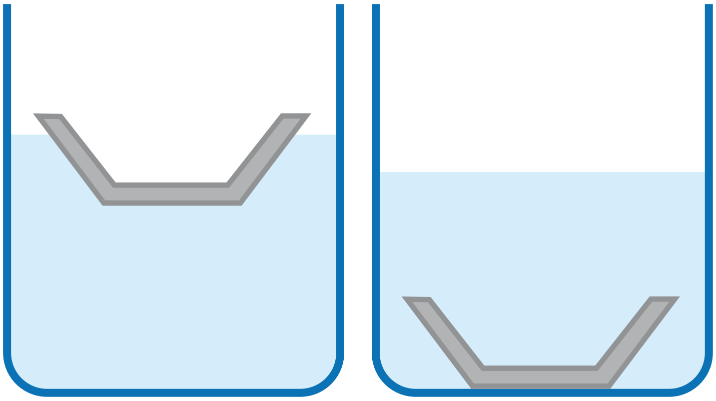

Obr. 3

6. Počáteční stav: Na vodě plave kus ledu se zamrzlým kusem korku.
Konečný stav: Led zcela roztaje, korek plave na vodě.
Odhad: Korek je možné si představit na neponořeném okraji ledu. Pak je zřejmé, že led se ponoří více, než kdyby neobsahoval korek, o takový objem, který vyplněn vodou by měl stejnou hmotnost jako korek. Uzavřeme-li led opět pomyslnou membránou, nevyplní voda objem celé ponořené části, ale bude chybět takové množství vody, jejíž hmotnost je rovna hmotnosti korku. Tento objem však bude na konci děje zcela vyplněn ponořenou částí korku, hladina se tedy **nezmění**.
Důkaz: $V = V_0 + V_P$, na počátku $\rho_V \cdot V_P = \rho_L \cdot V_L + \rho_k \cdot V_k$, $V = V_0 + \frac{\rho_L}{\rho_V} \cdot V_L + \frac{\rho_k}{\rho_V} \cdot V_k$, na konci $V' = V_0 + V_V + V_{kp}$, kde V_{kp} je ponořený objem korku. Protože $\rho_L \cdot V_L = \rho_V \cdot V_V$ a $\rho_V \cdot V_{kp} = \rho_k \cdot V_k$, $V' = V_0 + V_V + \frac{\rho_k}{\rho_V} \cdot V_k$. Platí $V' - V = 0$.

7. Počáteční stav: Na vodě plave led s bublinou stlačeného vzduchu.
Konečný stav: Led zcela roztaje, vzduch unikne.
Odhad: Led je ponořen více než v příkladě 3., hladina proto **klesne**.

Důkaz: $V = V_0 + V_P$, na počátku $(\rho_V - \rho_{vz}) \cdot V_P = (\rho_L - \rho_{vz}) \cdot V_L + (\rho_s - \rho_{vz}) \cdot V_s$, což je Archimédův zákon, ve kterém jsou všechny tíhy zmenšeny o vztlakovou sílu vzduchu s atmosférickým tlakem (po vydělení tíhovým zrychlením). $V = V_0 + \frac{\rho_L - \rho_{vz}}{\rho_V - \rho_{vz}} \cdot V_L + \frac{\rho_s - \rho_{vz}}{\rho_V - \rho_{vz}} \cdot V_s$, na konci $(\rho_L - \rho_{vz}) \cdot V_L = (\rho_V - \rho_{vz}) \cdot V_V$. $V' = V_0 + V_V = V_0 + \frac{\rho_L - \rho_{vz}}{\rho_V - \rho_{vz}} \cdot V_L$, $V' - V = \frac{\rho_{vz} - \rho_s}{\rho_V - \rho_{vz}} \cdot V_s < 0$, protože $\rho_{vz} < \rho_s$ a $\rho_V > \rho_{vz}$. Hladina **klesne**.

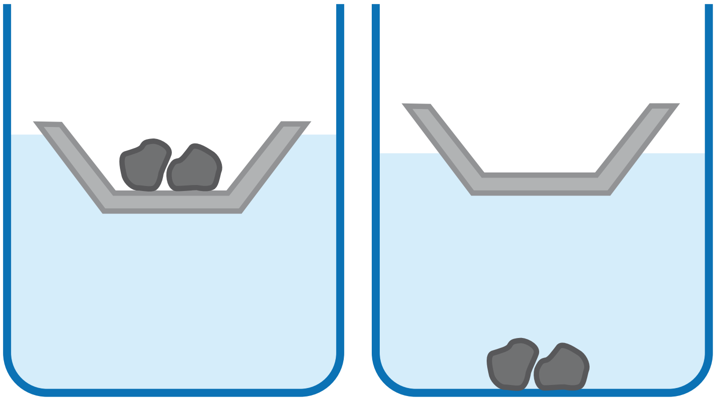
8. Počáteční stav: Na vodě plave kus parafinu.
Konečný stav: Voda se zahřeje, parafin se roztaví.
Odhad: Předpokládejme, že nejprve roztaje ponořená část parafínu. Kapalný parafín má menší hustotu než tuhý, proto se jeho objem zvětší, hladina stoupne. Roztaví-li se pak i parafín nad hladinou, hladina ještě více **stoupne**.
Důkaz: $V = V_0 + V_P$, $\rho_{pat} \cdot V_{pat} = \rho_V \cdot V_P$, $V = V_0 + \frac{\rho_{pat}}{\rho_V} \cdot V_{pat}$, $V' = V_0 + V_{pak}$, $\rho_{pat} \cdot V_{pat} = \rho_{pak} \cdot V_{pak}$, $V' = V_0 + \frac{\rho_{pat}}{\rho_{pak}} \cdot V_{pat}$, $V' - V = \left(\frac{\rho_{pat}}{\rho_{pak}} - \frac{\rho_{pak}}{\rho_V} \right) \cdot V_{pat} > 0$, protože první zlomek v závorce je větší než 1, druhý menší než 1. Hladina proto **stoupne**.



Obr. 4

9. Počáteční stav: Na vodě plave kovová loďka (obr. 4).
Konečný stav: Loďka je zcela potopena ve vodě.
Odhad: Na výsledek bude mít rozhodující vliv to, že hustota kovu ρ_{ko} je větší než hustota vody. Předpokládejme, že kov má nekonečně velkou hustotu a nulový objem. Potopení lodi žádný objem nepřidá, naopak voda zalije i vnitřní prostor loďky, hladina **klesne**.

Důkaz: $V = V_0 + V_P$, $\rho_{ko} \cdot V_{ko} = \rho_V \cdot V_P$, $V = V_0 + \frac{\rho_{ko}}{\rho_V} \cdot V_{ko}$. $V' = V_0 + V_{ko}$, $V' - V = \frac{\rho_V - \rho_{ko}}{\rho_V} \cdot V_{ko} < 0$, hladina **klesne**.



Obr. 5

10. Počáteční stav: V lodi, plovoucí na vodě, je náklad kamene (obr. 5).
Konečný stav: Kámen je naházen do vody, loď dále plave.
Odhad: Můžeme si, stejně jako v př. 9., představit kámen s nekonečně velkou hustotou a nulovým objemem. Vyhozený kámen tedy výšku hladiny nezmění, loď se však po jeho vhození do vody částečně vynoří, zmenší se objem ponořené části, hladina **klesne**.

Důkaz: Označíme hmotnost lodi M a ponořený objem lodi na konci děje V'_P. Pak na počátku $V = V_0 + V_P$, $M + \rho_{ka} \cdot V_{ka} = \rho_V \cdot V_P$, $V = V_0 + \frac{\rho_{ka}}{\rho_V} \cdot V_{ka} + \frac{M}{\rho_V}$, na konci $V' = V_0 + V_{ka} + V'_P$, $M = \rho_V \cdot V'_P$. $V' = V_0 + V_{ka} + \frac{M}{\rho_V}$. $V' - V = \frac{\rho_V - \rho_{ka}}{\rho_V} \cdot V_{ka} < 0$. Hladina **klesne**.

11. Počáteční stav: Na vodě plave parafínová loďka, ve které je naložena olověná kulička.
Konečný stav: Voda se zahřeje, parafín roztaje a kulička klesne na dno.
Odhad: Protože roztavený parafin (ať ve tvaru loďky nebo kostky) vede k zvýšení hladiny a potopení olověné kuličky k jejímu snížení, nelze odhadem jednoznačně rozhodnout. Bude-li olova málo (při limitní představě nekonečně málo), hladina zcela jistě stoupne. Bude-li nezanedbatelný objem olova naložen v parafinové loďce s nekonečně tenkými stěnami, hladina klesne.
Důkaz: $V = V_0 + V_P$, $\rho_V \cdot V_P = \rho_{pat} \cdot V_{pat} + \rho_{Pb} \cdot V_{Pb}$, $V = V_0 + \frac{\rho_{pat}}{\rho_V} \cdot V_{pat} + \frac{\rho_{Pb}}{\rho_V} \cdot V_{Pb}$, $V' = V_0 + V_{pak} + V_{Pb}$, $\rho_{pat} \cdot V_{pat} = \rho_{pak} \cdot V_{pak}$, $V' = V_0 + \frac{\rho_{pat}}{\rho_{pak}} \cdot V_{pat} + V_{Pb}$, $V' - V = \left(\frac{1}{\rho_{pak}} - \frac{1}{\rho_V} \right) \cdot \rho_{pat} \cdot V_{pat} + \frac{\rho_V - \rho_{Pb}}{\rho_V} \cdot V_{Pb}$.
O výsledku rozhodují konkrétně zadané hodnoty. Hladina může jak klesnout (je-li V_{pat} velmi malé – loďka má tenké stěny), tak stoupnout (je-li např. V_{Pb} velmi malé), nemusí se ani změnit (jsou-li konkrétní hodnoty takové, že první, kladný sčítanec v posledním vztahu, je roven absolutní hodnotě druhého, záporného sčítance).

12. Na závěr ještě jeden příklad na procvičení: Na destilátu plave loďka z parafinu, která má naložen led se zamrzlým korkem a olovo s bublinou stlačeného vzduchu. Jak se změní výška hladiny alkoholu v krvi, jestliže z destilátu šmejd vyhodíme a destilát vypijeme?

Poznámka redakce: Správnost svého odhadu si můžete ověřit také pokusem (obr. 6). Je ale potřeba použít úzkou nádobu (nejlépe odměrný válec) a větší množství ledu, aby případná změna hladiny byla patrná.

Obr. 6 – změny výšky hladiny pro různé varianty zadání; fotografie znázorňuje konečný stav po úplném roztátí ledu, gumičkou je vždy označena původní výška hladiny; zleva led s korkem, led s napínáčky (obdoba olověné kuličky), samotný led a led s bublinou vzduchu; klesne pouze hladina vody v nádobě ledu s kovem

Článek vyšel v časopisu Školská fyzika, ročník VI/2000, mimořádné číslo, str. 5–10. Předkládaný text je zkrácenou verzí původního článku (uvedeno je zde pouze 12 úloh z původních 21). Fotografie, jejíž autorkou je Markéta Vojtajová, byla doplněna redakcí.