Výuka astronomie v matematice, respektive matematiky v astronomii

Vladimír Štefl[1], Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity Brno

Astronomie je v celém světě součástí všeobecného vzdělání moderního člověka. Proto je nepochopitelné, že v naší republice byla vyřazena ze vzdělávacích plánů na základních školách a zejména na gymnáziích. Jednou z možností jejího zasazení do výuky je využití vzájemného vztahu matematiky a astronomie, s možností uplatnění astronomické tématiky v matematické výuce, jak je na vybraných ukázkách v příspěvku demonstrováno.

Vztah matematiky a astronomie má v historii civilizací na Zemi velmi dlouhé trvání. Astronomie vznikla před zhruba šesti tisíci léty z potřeb určování času a orientace polohy na Zemi. Vycházela hlavně z geometrie, hvězdná obloha sloužila jako nejstarší praktická učebnice sférické astronomie. Za pomoci trigonometrických úvah dokázali starověcí astronomové určovat ze změn polohy a délky stínu gnómonu časový interval − rok. Obdobně důvtipnou aplikací geometrických pouček vypracovali metody určování vzdáleností nejbližších kosmických těles, např. Měsíce.

První revoluce v astronomii u středomořské civilizace proběhla především zásluhou matematických znalostí, vedla k vytvoření sférické astronomie, astrometrie, různých kalendářů a geocentrické teorie.

V novověku matematické zpracování pozorovaných poloh planet umožnilo formulovat kinematické zákonitosti jejich pohybu. Aplikace gravitačního zákona objeveného v 17. století vedla ke studiu dynamiky pohybů planet a vzniku nebeské mechaniky, která se stala jedním z nejdůležitějších stimulů rozvoje diferenciálních rovnic v 18. a 19. století. Podstatným bylo právě používání matematiky, vývoj astronomie vycházel z jejího úspěšného rozvoje, což vedlo k druhé revoluci.

Astronomie může abstraktněji zaměřený předmět matematiku ve výuce změnit na více atraktivní a motivační. S nadsázkou lze konstatovat, že astronomie spojuje matematiku s reálným světem. Pro žáky je určitě mnohem zajímavější hledání vzdálenosti sondy STEREO B od Měsíce ze snímku jeho přechodu přes sluneční disk než pouhý numerický výpočet.

Výzkumné astronomické metody se vedle fyziky opírají o matematiku obsaženou ve formě rovnic, vzorců, tabulek, grafů. Astronomická věda plně využívá celý matematický aparát, počínaje elementy trigonometrie především sférické, přes aritmetiku, algebru, analytickou geometrii až po diferenciální a integrální počet, jak je na zvolených ukázkách zachyceno v [1]. Ve výuce na gymnáziu zpravidla nepoužíváme vyšší matematiku, k zabezpečení nezkresleného výkladu postačuje její středoškolská úroveň. Důležitá je co nejjednodušší prezentace problematiky, například prostřednictvím úloh s astronomickým obsahem ve výuce matematiky.

V souladu s utvářením a rozvíjením klíčových kompetencí, respektive očekávaných výstupů v matematice v RVPG [2] lze astronomické náměty využít v těchto vybraných tématech:

- zlomky, přibližné výpočty
- rozměrová analýza
- geometrie, měření úhlů
- logaritmus.

1. Zlomky, přibližné výpočty

K procvičování řetězových zlomků poskytuje možnost vyjádření délky tropického roku 365,242 2 dne v různých kalendářích. Žáci se seznámí se způsoby tvorby kalendářů a zároveň procvičí propočty zlomků.

1 stefl@physics.muni.cz

Kalendář: Podle soudobých údajů činí délka roku $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{5}{8}}}}}}$ středních dní.

Rozdílné přesnosti přiblížení obdržíme při postupném vyjadřování jednotlivých zlomků.
První přiblížení: 365 dnů − délka roku podle egyptského kalendáře.

Druhé přiblížení: $365+\frac{1}{4}$ dne − délka roku podle juliánského kalendáře.

Třetí přiblížení: $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}=365\frac{7}{29}$ dne přibližně odpovídá gregoriánskému kalendáři.

Čtvrté přiblížení: $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}}=365\frac{8}{33}$ dne délka roku v kalendáři navrhovaném Omarem Chajánem (1048–1131). V každé periodě za 33 roků tohoto kalendáře bylo 8 roků přestupných. Chyba o jeden den nastane přibližně za 4 437 roků. Pro srovnání v nyní existujícím gregoriánském kalendáři o délce $365\frac{97}{400}$ dnů se chyba o jeden den nashromáždí za 3 321 roků.

Páté přiblížení $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}=365\frac{31}{128}$ je délka roku v kalendáři německého astronoma Johanna Heinricha Mädlera (1794–1874). V periodě 128 roků je 31 přestupných let. Chyba o jeden den vznikne za přibližně 88 496 let. Svůj kalendář Mädler navrhl roku 1864, realizace se však neuskutečnila.

Procvičování zlomků umožňují výpočty v následujících úlohách, námětově využívající materiály NASA.

1. Poloměr Saturnu je 10krát větší než Venuše, jejíž poloměr je 4krát menší než Neptunu. Kolikrát má Saturn poloměr větší než Neptun?
Řešení: Poloměr Saturnu je 5/2krát větší než Neptunu.

2. Střední vzdálenost Země od Slunce činí 2/3 vzdálenosti Marsu od Slunce. V jaké střední vzdálenosti od Slunce obíhá Neptun, jestliže obíhá 30krát dále než Země? Střední vzdálenost Marsu od Slunce činí 1,5 AU.
Řešení: Střední vzdálenost Neptuna od Slunce je 30 AU.

3. Hmotnost planetky Pallas je přibližně milionkrát větší než hmotnost Halleyovy komety. Jupiter má hmotnost zhruba deset milionkrát větší než planetka Pallas. Stanovte poměr hmotností Jupitera a Halleyovy komety.
Řešení: Hledaný poměr činí 10^{13}. Právě to je důvodem, proč Jupiter výrazně ovlivňuje pohyb komet.

4. Poloměr měsíce Titanu je zhruba 1/20 poloměru Saturnu, poloměr měsíce Rhea je 1/80 poloměru Saturnu. Jaký je poměr poloměrů Titanu a Rhei?
Řešení: Poměr poloměrů měsíců Titanu a Rhei je 4 : 1.

2. Rozměrová analýza

Použití metody rozměrové analýzy podporuje rozvoj fyzikálního myšlení žáků při rozvahách o tvaru hledané závislosti, vytváření představ o fyzikální podstatě jevů na kosmických tělesech a procvičování nepopulárních matematických úprav řešením soustav rovnic.

V gymnaziální fyzikální výuce bývá uváděn vztah pro dobu kmitu kyvadla, v astrofyzice pro periodu pulsací hvězd. Fyzikální podstata kmitání kyvadla či pulsace hvězd stejná, mechanické pohyby v gravitačním poli, nevelké odchylky od rovnovážného stavu, u pulsujících hvězd od rovnice hydrostatické rovnováhy [3].

Analogicky jako u kyvadla předpokládáme malé amplitudy lineárních pulsací hvězd, příkladně δ Cephei – obr. 1, amplituda kmitů zpravidla nepřesahuje asi 10 % poloměru. Pulsace − periodické smršťování a rozšiřování poloměru hvězd, pro zjednodušení s radiálně sféricko-symetrickým průběhem.

Základním parametrem pulsujících hvězd je perioda pulsací T. Na čem závisí?

Obr. 1 – hvězda δ Cephei

Z astronomického hlediska bude závislá na přitažlivosti charakterizované gravitační konstantou G, dále lze předpokládat závislost na parametrech, respektive charakteristikách hvězd, hustotě ρ (při vyloučení hmotnosti M dosazením $\rho = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$ a poloměru R. Při hledání závislosti periody pulsace vyjdeme z předpokladu, že $T \sim G, \rho, R$. Platí $T \sim G^x \cdot \rho^y \cdot R^z$, rozměr jednotlivých parametrů je $[T] = \mathrm{s}$, $[G] = \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, $[\rho] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$, $[R] = \mathrm{m}$. Porovnáním rozměrů levé a pravé části vztahu obdržíme $\mathrm{s} = \mathrm{m}^{3x} \cdot \mathrm{kg}^{-x} \cdot \mathrm{s}^{-2x} \cdot \mathrm{kg}^{y} \cdot \mathrm{m}^{-3y} \cdot \mathrm{m}^{z}$. K platnosti rozměrové rovnice musí být splněny algebraické rovnice

s: $1 = -2x$

m: $0 = 3x - 3y + z$

kg: $0 = -x + y$.

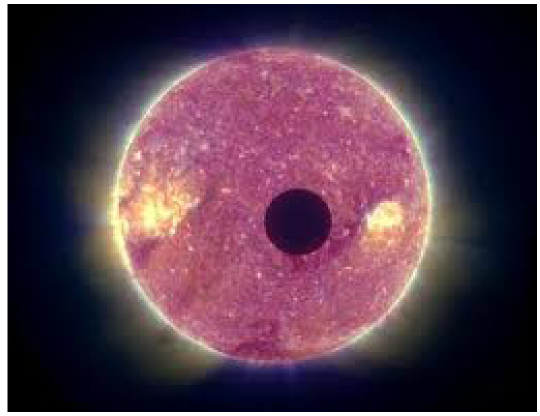
Jejich řešením dostaneme $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$, $z = 0$. Po úpravě a dosazení získáme závislost pro periodu pulsací hvězd $T \sim (G\rho)^{-\frac{1}{2}}$. Perioda závisí na hustotě hvězdy, jak v původním teoretickém historickém odvození dokázal Eddington na základě složitých termodynamických úvah v [4]. Čím je větší hustota hvězdy, tím je kratší perioda pulsací, což potvrzují astronomická pozorování, miridy s nízkou hustotou se vyznačují periodami pulsací stovky dnů, zatímco naopak periody u bílých trpaslíků o vysoké hustotě jsou minuty.

Poznámka: Uvedený vztah $T \sim (G\rho)^{-\frac{1}{2}}$ je charakteristický pro každý astronomický objekt, udává časovou škálu procesů spojených s expanzí, kolapsem, pulsací v situacích, kdy je dominující gravitační síla. V závislosti na hustotě je časová škála milisekundy, hodiny, roky, až miliony roků.

3. Geometrie, měření úhlů

Na snímku – obr. 2 ze sondy STEREO B z 25. února 2007 z 13.50 hod. – pozorujeme přechod Měsíce přes sluneční disk. Předpokládáme znalost průměru Měsíce 3 476 km. Stanovte vzdálenost sondy od Měsíce v okamžiku získání snímku. Nezbytné další údaje nalezněte v hvězdářské ročence. Úloha námětově vychází z [5], je částečně upravena.

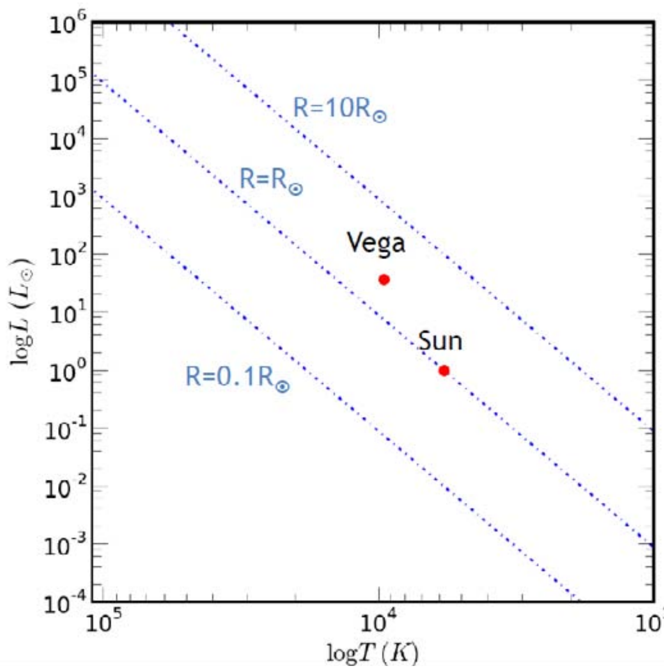
Řešení: V ročence nalezneme údaje o Slunci k 25. únoru 2007: vzdálenost Slunce–Země 148 mil. km, úhlový průměr Slunce 0,539°. Postupně stanovíme měřítko snímku → úhlovou velikost Měsíce → poměr úhlových velikostí Slunce a Měsíce → vzdálenost sonda STEREO B–Měsíc 1,6 mil. km.



Obr. 2 – přechod Měsíce přes sluneční disk

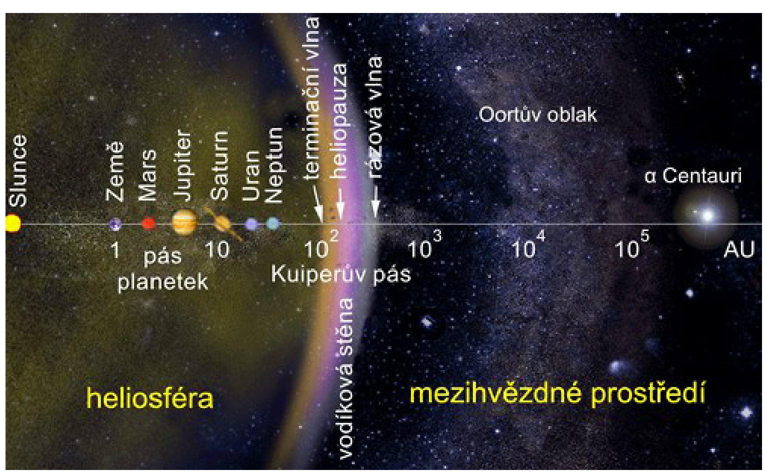
4. Logaritmus

Jedním z klíčových pojmů středoškolské astronomické výuky je H-R diagram, zachycující souvislosti vybraných charakteristik hvězd, nejčastěji v didakticky nejvhodnější interpretaci závislosti zářivého výkonu a efektivní povrchové teploty v logaritmických stupnicích. Jejich prostřednictvím jsou žáci seznamováni s možnými rozsahy efektivních povrchových teplot a poloměrů hvězd. Osvojení velkých rozsahů teplot minimálně 10^2 a poloměrů 10^4 v kombinaci s matematickým vyjádřením Stefanova–Boltzmannova zákona umožňuje následné pochopení značného intervalu možných zářivých výkonů hvězd až 10^{10} (vyjádřených v jednotkách zářivého výkonu Slunce). Z posledně uvedené věty je zřejmá nezbytnost používání logaritmických stupnic, viz obr. 3.



Obr. 3 – H-R diagram

U žáků existují velmi zkreslené představy o relativních velikostech kosmických těles a prostorových vzdálenostech mezi nimi. Proto k nejobtížnějším vzdělávacím cílům astronomické výuky patří jejich správná tvorba. Vzhledem k značnému rozsahu měřítek je nezbytné nahradit lineární stupnice logaritmickými, hojně využívanými ve srovnávací metodě. Různá modelová, obrazová a číselná srovnání ulehčují žákům osvojení rozsahu velikostí a hmotností planet, hvězd. Tradiční je srovnání poloměru a hmotnosti Země s ostatními planetami, obdobně Slunce s různými typy hvězd. Pro pochopení prostorových měřítek ve vesmíru jsou vhodná srovnání vzdáleností kosmických těles, na-



Obr. 4 – prostorová měřítka ve vesmíru příklad Země–planety, Slunce–nejbližší hvězdy, viz obr. 4. Největší význam má porovnávání charakteristik odlišných typů kosmických těles, planet, hvězd, galaxií. Některé možnosti nejjednodušších srovnání byly ukázány výše v části využití zlomků, přibližné výpočty. Další ukázky číselných modelů, při jejichž tvorbě mohou žáci využít matematické propočty, jsou uvedeny např. v [6].

V rámci RVP na základních školách má astronomická výuka prostor, na gymnáziích je na co navazovat. Pokračující vzdělávací reformy bez patřičných analýz nezlepšily postavení astronomie na tomto typu středních škol. Do standardní fyzikální výuky v RVPG nebyla zařazena, restrikce počtu vyučovacích hodin fyziky to neumožnila. Více je v RVPG zastoupena matematika. Proto je jednou z možností zlepšení stavu astronomické výuky využití vztahu astronomie a matematiky.

Vhodné zařazení astronomických námětů do výkladových textů matematických učebnic a sbírek úloh může přispět ke zvýšení zájmů žáků o studium méně oblíbené matematiky. Vztah obou předmětů založených na přesnosti a logičnosti je výhodný pro rozvoj znalostí, umožňuje zefektivnit jejich výuku, jak je rozebíráno například v [7].

Žáci trvale projevují zájem o astronomickou problematiku, setkávají se s ní v denním tisku, v časopisech, na internetu, v televizi či rozhlase. Cítí vnitřní potřebu si nové informace o astronomických jevech ověřit, utřídit a o nich diskutovat. K jejich objasnění mohou vhodně posloužit i jednoduché astronomické úlohy zpestřující výuku matematiky. Při jejich řešení může učitel případně provádět korekci nesprávných informací, podloženou právě matematickými výpočty. Zde bude mít důležitou roli učitel matematiky, jeho vědomosti a znalosti z astronomie. Je proto potřebná jeho příprava na vysoké škole, například v podobě výběrových předmětů.

Výuka astronomie by měla zůstat v obsahu výuky na středních školách v 21. století zachována. Jedna z možností její realizace byla nastíněna v příspěvku.

Literatura

[1] HAHN, Alexander J. *Basic calculus: from Archimedes to Newton to its role in science*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1998.

[2] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. Praha: VÚP, 2007. [cit. 13. 6. 2013]. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf.

[3] ŠTEFL, Vladimír, 2010: Rozměrová analýza v astrofyzikální výuce na středních školách. *MFI*. **19** (6), 348–355.

[4] EDDINGTON, Arthur Stanley, 1918: On the pulsations of a gaseous star and the problem of the Cepheid variables. *Mon. Not. Astron. Soc*. **79**, 2–22.

[5] *A Lunar Transit of the Sun from Space*. [cit. 13. 6. 2013]. Dostupné z: http://spacemath.gsfc.nasa.gov/weekly/3Page33.pdf.

[6] ŠTEFL, Vladimír a KRTIČKA, Jiří. *Didaktika astrofyziky*. Brno: PřF MU, 2003.

[7] HANISKO, Peter: Matematický aparát vo vyučovaní astronómie a astrofyziky na gymnáziach. In: Fyzikáne vzdelávanie v systéme reformovaného školstva. Nitra: JSMF, 122–128. ISBN 978-80-558-0232-9.

Zdroje obrázků

Obr. 1 δ Cephei – Eddie Guscott www.sunflowerscosmoc.org/astronomy/astronomy_main/great_discoveries_2.html
Obr. 2 http://spacemath.gsfc.nasa.gov/weekly/3Page33.pdf
Obr. 3 http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/physics/current/teach1112/module_home/px144/slides11/lecture11.pdf
Obr. 4 www.aldebaran.cz