

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

KATEDRA ELEKTROENERGETIKY A EKOLOGIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Návrh studeného kelímku pro tavení oxidů kovů

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta elektrotechnická
Akademický rok: 2015/2016

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Miroslav URBAN**
Osobní číslo: **E14N0074P**
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Elektroenergetika**
Název tématu: **Návrh studeného kelímku pro tavení oxidů kovů**
Zadávací katedra: **Katedra elektroenergetiky a ekologie**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Uvedte potřebnou teorii pro řešení elektromagnetického pole a pro sdílení tepla.
2. Zpracujte problematiku studených kelímků s důrazem na jejich použití při tavení oxidů kovů.
3. Navrhněte provedení segmentového studeného kelímku.
4. Připravte matematický model navrženého studeného kelímku.
5. Uvedte závěry pro praxi.

Rozsah grafických prací: podle doporučení vedoucího
Rozsah kvalifikační práce: 40 - 60 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická
Seznam odborné literatury:


1. Langer, E.: Teorie indukčního a dielektrického tepla, Praha, Academia, 1979
2. Kudryash, M.: Experimental investigation of induction melting in cold crucible
3. Pfeiffer, H.: Handbuch Industrielle Wärmetechnik, Grundlagen - Berechnungen, Verfahren
4. Nacke, B., Baake, E. : Induktives Erwärmen
5. Internet

Vedoucí diplomové práce: Ing. David Rot, Ph.D.
Katedra elektroenergetiky a ekologie

Datum zadání diplomové práce: 15. října 2015
Termín odevzdání diplomové práce: 16. května 2016


Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.
děkan




Doc. Ing. Karel Noháč, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 15. října 2015

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá návrhem indukčního studeného kelímku pro tavení oxidů kovů. V první části práce je rozebrána teorie způsobů přestupu tepla všemi třemi způsoby, tedy vedením, prouděním a sáláním. Další část práce je zaměřena na teorii elektromagnetického pole, kde jsou odvozeny vlnové rovnice a rovnice pro magnetický vektorový potenciál. Dále následuje část s teoretickým rozбором segmentových studených kelímků. Následující části práce se pak již přímo zabývají návrhem a následným modelem studeného kelímku pro tavení oxidu hlinitého, na závěr jsou pak předloženy a zhodnoceny výsledky z těchto numerických modelů.

Klíčová slova

Studený kelímek, Jouleovy ztráty, chladicí segment, tavící frekvence, elektromagnetické pole, tepelné pole

Abstract

Diploma thesis deals with design of induction cold crucible for melting metal oxides. First part is focused on the theory of all options of the heat transfer, namely conduction, convection and radiation. Next part deals with theory of electromagnetic field, where the equation for magnetic vector potential and wave equations are derived. Next part describes theory of segmental cold crucibles. The next followed parts are then directly focused on the design and modelling of cold crucible for melting aluminium oxide. In the conclusion there is an evaluation of the results of the numerical models.

Key words

Cold crucible, Joule losses, cooling segment, melting frequency, electromagnetic field, thermal field

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

.....

podpis

V Plzni, dne 9.5.2016

Miroslav Urban

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce Ing. Davidu Rotovi Ph.D. za cenné teoretické i praktické připomínky a rady při tvorbě této diplomové práce.

Obsah

SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK	9
ÚVOD.....	10
1 ZPŮSOBY SDÍLENÍ TEPLA	11
1.1 SDÍLENÍ TEPLA VEDENÍM	11
1.1.1 <i>Fourier-Kirchhoffova rovnice</i>	14
1.2 SDÍLENÍ TEPLA PROUDĚNÍM	16
1.3 SDÍLENÍ TEPLA ZÁŘENÍM	17
1.3.1 <i>Snellův zákon</i>	18
1.3.2 <i>Stefan-Boltzmannův zákon</i>	19
1.3.3 <i>Planckův zákon</i>	19
1.3.4 <i>Wienův zákon</i>	20
1.3.5 <i>Kirchhoffův zákon</i>	21
1.4 OKRAJOVÉ PODMÍNKY A PODMÍNKY NA ROZHRANÍ PRO TEPLOTNÍ POLE	21
2 TEORIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE PŘI INDUKČNÍM OHŘEVU	23
2.1 MAXWELLOVY ROVNICE A ODVOZENÍ VLNOVÝCH ROVNIC ELEKTROMAGNETICKÉHO VLNĚNÍ	23
2.2 VEKTOROVÝ POTENCIÁL	25
2.3 OKRAJOVÉ PODMÍNKY A PODMÍNKY NA ROZHRANÍ PRO VEKTOROVÝ POTENCIÁL.....	27
2.4 POYNTINGŮV VEKTOR	28
2.5 HLOUBKA PRONIKÁNÍ ELEKTROMAGNETICKÉHO VLNĚNÍ	30
3 STUDENÝ KELÍMEK PRO TAVENÍ OXIDŮ KOVŮ	31
3.1 SEGMENTOVÝ STUDENÝ KELÍMEK	31
3.2 TAVENÍ OXIDŮ KOVŮ VE STUDENÉM KELÍMKU – STARTOVACÍ FÁZE	32
4 NÁVRH STUDENÉHO KELÍMKU	35
4.1 KELÍMEK PRO TAVENÍ Al_2O_3	35
5 SIMULAČNÍ PROGRAM ANSYS MAXWELL.....	44
5.1 METODA KONEČNÝCH PRVKŮ.....	44
5.2 TVORBA MESHE V PROGRAMU ANSYS MAXWELL	45
6 MODELOVÁNÍ STUDENÉHO KELÍMKU PRO TAVENÍ Al_2O_3.....	47
6.1 MATEMATICKÝ MODEL STUDENÉHO KELÍMKU Al_2O_3	47
6.2 MODEL V SIMULAČNÍM PROGRAMU ANSYS MAXWELL	49
6.3 VÝSLEDKY SIMULACE	51
6.3.1 <i>Porovnání různých frekvencí napájecího proudu</i>	51
6.3.2 <i>Grafické výstupy modelu při rezonanční frekvenci napájecího proudu</i>	53
7 ZÁVĚR:	58
POUŽITÁ LITERATURA.....	60

Seznam symbolů a zkratek

ϑ ...	termodynamická teplota	[K]
t ...	čas	[s]
Q ...	tepelný tok	[W]
λ ...	měrná tepelná vodivost	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]
F ...	elementární plocha izotermické plochy	[m ²]
s ...	měrná hmotnost materiálu	[kg·m ⁻³]
c ...	měrné teplo materiálu	[J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹]
a ...	součinitel teplotní vodivosti	[m ² ·s ⁻¹]
α ...	součinitel přestupu tepla	[W·m ⁻² ·K ⁻¹]
v ...	rychlost šíření elektromagnetického vlnění v prostředí	[m·s ⁻¹]
n ...	index lomu na rozhraní dvou prostředí	[-]
σ_{e} ...	Stefan-Boltzmannova konstanta	[W·m ⁻⁴ ·K ⁻⁴]
θ ...	Termodynamická teplota	[K]
ω ...	úhlová frekvence záření	[rad·s ⁻¹]
I ...	intenzita záření	[W·m ⁻²]
T ...	teplota absolutně černého tělesa	[K]
\hbar ...	redukováná Planckova konstanta	[J·s]
c ...	rychlost světla ve vakuu	[m·s ⁻¹]
k ...	Boltzmannova konstanta	[J·K ⁻¹]
λ ...	Vlnová délka	[m]
ε ...	Poměrná zářivost	[-]
a ...	Poměrná pohltivost	[-]
ε ...	Absolutní permitivita	[F·m ⁻¹]
μ ...	Absolutní permeabilita	[H·m ⁻¹]
γ ...	Elektrická vodivost	[S]
H ...	Intenzita magnetického pole	[A·m ⁻¹]
E ...	Intenzita elektrického pole	[V·m ⁻¹]
D ...	Elektrická indukce	[C·m ⁻²]
B ...	Magnetická indukce	[T]
ρ ...	Objemová hustota náboje	[C·m ⁻³]
J ...	Proudová hustota	[A·m ⁻¹]
A ...	Magnetický vektorový potenciál	[Wb·m ⁻¹]
φ ...	Skalární elektrický potenciál	[V]
a ...	Hloubka pronikání elektromagnetického vlnění	[m]
P ...	Činný výkon	[W]
z ...	Zatížení zdroje	[-]
x ...	Parametr určující poměr poloměru k hloubce vniku	[-]
d ...	Poloměr	[m]
l ...	Výška	[m]
η ...	Účinnost studeného kelímku	[%]
C ...	Kapacita	[F]
L ...	Indukčnost	[H]

Úvod

V druhé polovině 18. století, kdy byly vynalezeny galvanické články, jakožto první zdroje, které byly schopny po určitou dobu dodávat elektrický proud, byly zároveň objeveny i tepelné účinky tohoto elektrického proudu. Bylo zjištěno, že ve vodiči, kterým prochází elektrický proud, vznikají Jouleovy ztráty, které způsobí ohřívání tohoto vodiče.

Další zásadní krok, který umožnil vznik indukčních elektrotepelných zařízení, učinil Michael Faraday, který svými pokusy roku 1831 dokázal, že pomocí změny magnetického pole se indukuje pole elektrické. Právě na tomto principu fungují indukční elektrotepelná zařízení, kde se pomocí střídavého proudu procházejícího cívkou vytváří v okolí této cívky proměnné magnetické pole, které se utlumuje uvnitř vodivé vsázky (ohřívaného objektu). Tím se naindukuje pole elektrické, což způsobí vznik vířivých proudů v této vsázce. Tyto vířivé proudy následně zapříčiní zmiňované Jouleovy ztráty a v důsledku těchto ztrát se vodivá vsázka ohřívá. Indukční ohřev je dnes, díky svým výhodám oproti jiným typům ohřevu, hojně využíván v průmyslových odvětvích, ať se jedná o ohřev či tavení.

Studený kelímek jako takový je pak speciální případ využití indukčního ohřevu, zejména pro tavení při vysokých teplotách. V této konfiguraci není vsázka umístěna v keramické nádobě, jako tomu je u klasických indukčních kelímkových pecí, ale tato vsázka se taví „sama v sobě“. Toho je docíleno chlazením vnějšího povrchu vsázky pomocí chladících dutých segmentů, nebo dutého induktoru, kterými protéká chladicí voda. K výhodám klasického indukčního ohřevu se zde přidávají ještě výhody další, jako například možnost výroby velmi čistých tavenin, či tavení nevodivých materiálů.

1 Způsoby sdílení tepla

V elektrických zařízeních, například v transformátorech a elektrických motorech je přeměna elektrické energie na energii tepelnou považována za nežádoucí. V tomto případě se jedná o ztráty, které snižují výslednou účinnost těchto zařízení. V elektrotepelných zařízeních oproti tomu je přeměna elektrické energie na tepelnou žádoucí a o účinnosti rozhoduje právě fakt, jaké množství dodané elektrické energie je dané elektrotepelné zařízení schopné přeměnit na užitečnou energii tepelnou. [1], [4]

Teplo se šíří vždy směrem z teplejšího prostředí, do prostředí chladnějšího. Toto šíření probíhá třemi způsoby:

- a) **Vedením** (kondukcí)
- b) **Prouděním** (konvekcí)
- c) **Zářením** (radiací, sáláním)

1.1 Sdílení tepla vedením

Tento typ přenosu tepla probíhá převážně v tuhých látkách, kde je to zároveň jediný způsob, jak se může teplo šířit. Šíření tepla je v tomto případě uskutečněno předáváním pohybové energie atomů a molekul, které do sebe naráží. Rychlost šíření tepla vedením je dáno fyzikálními vlastnostmi látky, ve které toto šíření probíhá. Každé těleso se snaží dostat do stavu termodynamické rovnováhy, kdy by teplota jeho stěny nebyla závislá na čase. [1], [3], [4]

Trojrozměrné teplotní pole se může popsat vztahem:

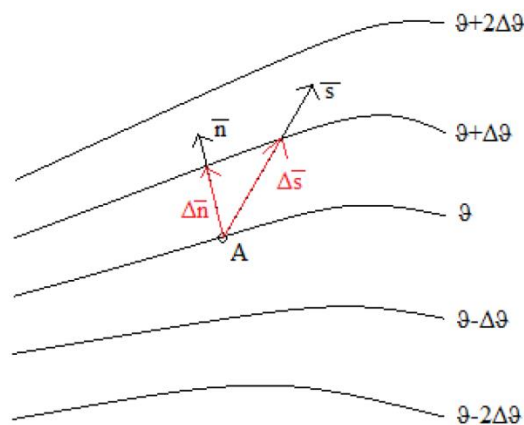
$$\vartheta = f(x, y, z, t) \quad (1.1.1)$$

Při takovémto popisu tepelného pole je tedy teplota závislá na souřadnicích měřeného bodu a je proměnná v čase.

Pro výpočty sdílení tepla vedením se uvažují jistá zjednodušení. Mezi ně patří předpoklad, že tepelný stav prostředí je určen skalárním teplotním polem, materiál je brán jako izotropní prostředí a teplotní pole je stacionární. Z předpokladu stacionárního pole pak dostaneme výraz, kde je teplota závislá pouze na souřadnicích bodu, ve kterém teplotu sledujeme: [3], [4]

$$\vartheta = f(x, y, z), \frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad (1.1.2)$$

Dále budeme předpokládat, že přestup tepla mezi dvěma prostředími o teplotách ϑ_1 a ϑ_2 , bude probíhat pouze v jednom směru souřadného systému a to kolmo od rozhraní s těmito teplotami. Rovnoběžné plochy s plochou rozhraní mají pak stejnou teplotu a tyto plochy jsou nazývány izotermické plochy. Provedením řezu těmito plochami dostaneme izotermy, což jsou křivky, které spojují body se stejnou teplotou (Obr. 1.1.1).



Obr. 1.1.1: Izotermy [4]

Rozdíl mezi teplotami sousedních izoterem označíme $\Delta\vartheta$. Při pohybu z bodu A ve směru vektoru s se mění teplota v poměru $\frac{\Delta\vartheta}{\Delta s}$. Největší teplotní změna nastává při pohybu ve směru normály \mathbf{n} . Limitní hodnotou poměru $\frac{\Delta\vartheta}{\Delta n}$ je teplotní spád (gradient) ve směru jednotkového vektoru. [3], [4]

$$\text{grad } \vartheta = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta n} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta n} \cdot \mathbf{n}_0 \quad (1.1.3)$$

kde: \mathbf{n}_0 je jednotkový vektor ve směru normály

Po rozložení vektoru \mathbf{n} na složky ve směru x, y, z a použití jednotkových vektorů $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, dostaneme vztah:

$$\text{grad } \vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \cdot \mathbf{k} = \nabla\vartheta \quad (1.1.4)$$

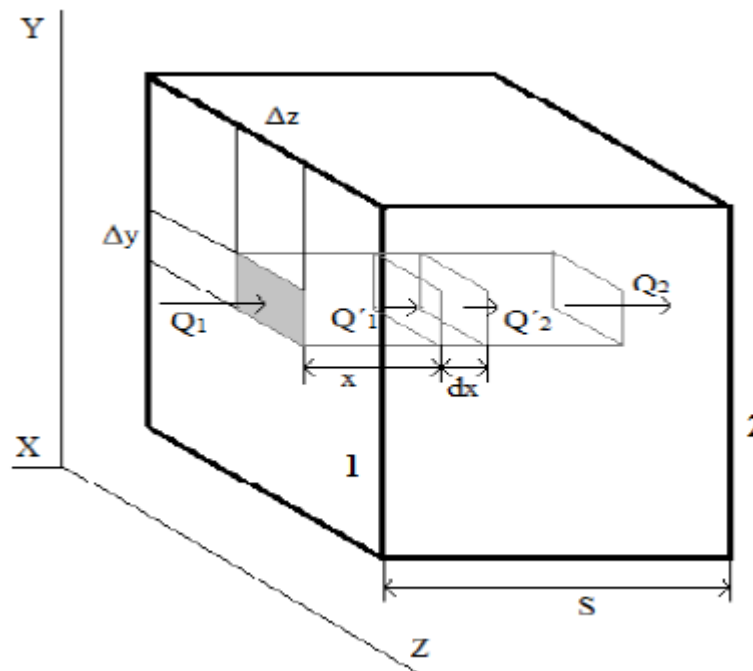
Je-li gradient kladný, značí tento fakt růst teploty od nižší k vyšší. Množina teplotních gradientů pak tvoří vektorové pole, což je důkazem šíření tepla v objemu daného tělesa. Závislost mezi tepelným tokem Q a teplotním spádem udává Fourierův zákon: [3], [4]

$$dQ = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial n} \cdot dF \cdot dt \quad (1.1.5)$$

kde dQ představuje množství tepla, které za čas dt projde kolmo elementární plochou dF , λ je měrná tepelná vodivost, což je specifická vlastnost daného materiálu a vyjadřuje množství tepla, které projde za 1 [s] plochou o velikosti 1 [m²] při teplotním spádu 1 [°C/m]. Znaménko mínus ve vztahu respektuje fakt, že teplotní spád ($\text{grad } \vartheta$) má opačný směr, než tepelný tok. Tepelný tok Q má tedy směr od místa s vyšší teplotou k místu s nižší teplotou. [3], [4]

1.1.1 Fourier-Kirchhoffova rovnice

Na obrázku 1.1.1.1 je zobrazen hranol, do jehož stěny (rozhraní 1) vstupuje tepelný tok Q_1 a ve vzdálenosti S vystupuje na rozhraní 2 tepelný tok Q_2 . Ve vzdálenosti x od rozhraní 1 je umístěn element, jehož rozměry jsou $\Delta z \cdot \Delta y \cdot dx$. Do tohoto elementu vstupuje tepelný tok Q'_1 a vystupuje z něj tepelný tok Q'_2 . Rozdíl těchto toků změní teplotu elementu o $d\vartheta$. [3], [4]



Obr. 1.1.1.1: Model pro odvození Fourier-Kirchhoffovy rovnice [4]

Pro gradient a tepelný tok platí v místě x tyto rovnice:

$$\text{grad } \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (1.1.1.1)$$

$$Q'_1 = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \Delta z \cdot \Delta y \cdot dt \quad (1.1.1.2)$$

A pro gradient a tepelný tok v místě $(x+dx)$:

$$\text{grad} \left(\vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot dx \right) = \text{grad} \vartheta - \text{grad} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot dx \quad (1.1.1.3)$$

$$Q'_2 = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot dx \right) \cdot \Delta z \cdot \Delta y \cdot dt \quad (1.1.1.4)$$

Rozdíl toků Q'_1 a Q'_2 způsobí ohřátí elementu o $d\vartheta$. Tento rozdíl spočítáme:

$$Q'_1 - Q'_2 = \lambda \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot dx \cdot \Delta z \cdot \Delta y \cdot dt = (\Delta z \cdot \Delta y \cdot dx) \cdot s \cdot c \cdot d\vartheta \quad (1.1.1.5)$$

kde s [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] je měrná hmotnost materiálu a c [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] je měrné teplo materiálu.

Po úpravě získáme diferenciální rovnici pro vedení tepla v 1D v ose x :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{s \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (1.1.1.6)$$

Pro obecný případ ve 3D se tato rovnice změní na tvar:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{s \cdot c} \cdot \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right] = a \cdot \nabla^2 \cdot \vartheta \quad (1.1.1.7)$$

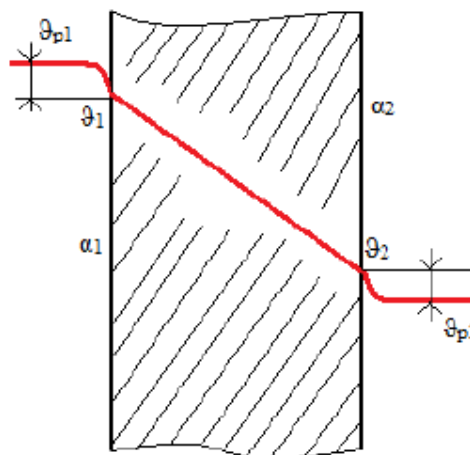
kde $a = \frac{\lambda}{s \cdot c}$ je součinitel teplotní vodivosti materiálu, který popisuje chování tohoto daného materiálu z hlediska tepelného ohřevu. Čím vyšší je tento součinitel, tím rychleji mění dané těleso svou teplotu. [1], [3], [4]

1.2 Sdílení tepla prouděním

Ke sdílení tepla prouděním dochází v kapalných a plynných látkách, kde jsou částice velmi pohyblivé. U kapalin a plynů platí fakt, že jejich hustota s rostoucí teplotou klesá. Vlivem rozdílných teplot částic, uvnitř kapalin či plynů, dochází k jejich přemísťování tím způsobem, že teplejší částice, které mají menší hustotu, jsou vytlačovány studenějšími částicemi s větší hustotou směrem vzhůru. Při stoupání s sebou tyto teplejší částice přenášejí i svou tepelnou energii. [1], [4], [5]

Proudění může být dvojího druhu, a to buď přirozené, nebo nucené. Pokud k proudění dochází pouze vlivem rozdílných teplot částic, jak je popsáno výše, jedná se o proudění přirozené. Proudění ale může být vyvoláno i například pomocí ventilátoru či čerpadel, a pak se již jedná o proudění nucené. [1], [4]

Podobným způsobem, jako u radiátorů, dochází k proudění vzduchu v okolí vnějšího povrchu elektrické odporové pece (Obr. 1.2.1). Na vnitřním povrchu stěny je teplota ϑ_1 vyšší, než je teplota na vnějším povrchu ϑ_2 . Stěnou pece tedy prochází směrem od vyšší teploty k nižší tepelný tok, teploty znázorněné v obrázku jsou vůči sobě v situaci $\vartheta_{p1} > \vartheta_1 > \vartheta_2 > \vartheta_{p2}$, kde ϑ_{p1} a ϑ_{p2} jsou teploty vnitřního prostoru pece a okolí. Vnější stěna bude tedy zahřívat okolní vzduch, čímž bude docházet k přirozenému proudění. Pokud bychom chtěli chladit vnější povrch s větší účinností, lze použít umělou cirkulaci vzduchu, čímž se zvýší součinitel prostupu tepla α . Tento součinitel je závislý na vícero parametrech, jako jsou tvar, poloha, tepelná vodivost, drsnost povrchu, rychlost proudění a další.



Obr. 1.2.1: Stěna odporové pece [3]

Pro výpočty sdílení tepla prouděním se využívá Newtonův výraz pro tepelný tok ve tvaru:

$$Q = \alpha_1 \cdot (\vartheta_{p1} - \vartheta_1) \cdot S \quad (1.2.1)$$

$$Q = \alpha_2 \cdot (\vartheta_{p2} - \vartheta_2) \cdot S$$

kde S je teplosměnná plocha a α je již zmíněný součinitel přestupu tepla.

1.3 Sdílení tepla zářením

V tomto případě dochází ke sdílení tepla pomocí elektromagnetického záření a tento způsob sdílení tepla může být realizován pouze v průzračném prostředí. Každé těleso, jehož teplota je vyšší, než nula Kelvinů (-273,15 °C), tedy absolutní nula, vyzařuje tepelnou energii. Toto těleso zároveň i přijímá energii vyzařovanou z těles jiných. Při dopadu záření na neprůzračný povrch se část energie odrazí, další část projde skrz a zbytek energie se pohltí a přemění na teplo.

Tato skutečnost může být vyjádřena vztahem: [2], [3]

$$A + B + C = 1 \quad (1.3.1)$$

kde

$$A = \text{poměrná pohltivost} = \frac{\text{energie pohlcená}}{\text{energie celková}}$$

$$B = \text{poměrná odrazivost} = \frac{\text{energie odražená}}{\text{energie celková}}$$

$$C = \text{poměrná propustnost} = \frac{\text{energie prošlá}}{\text{energie celková}}$$

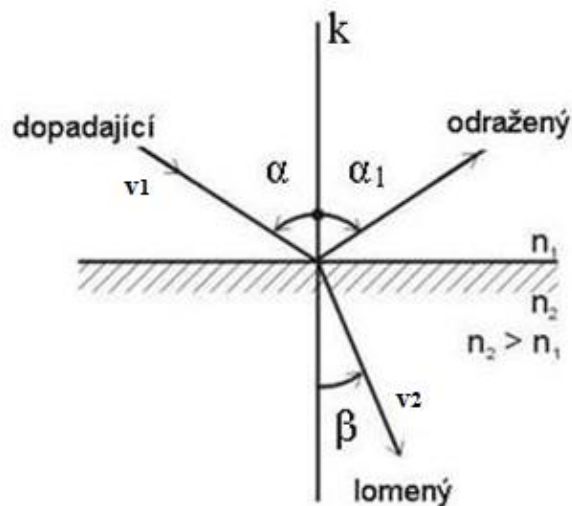
Pro idealizovaný případ by bylo možné uvažovat extrémní velikosti těchto parametrů, například pro absolutně černé těleso by platilo: $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$. V reálném případě však žádný z parametrů není nulový, ani roven jedné a tělesa jsou poté nazývána „šedá tělesa“. Tyto parametry, poměrná pohltivost, odrazivost a propustnost, jsou navíc ještě veličinami

spektrálními. To vyjadřuje fakt, že jsou závislé na vlnové délce, což znamená, že stejné těleso pro různou vlnovou délku dopadajícího záření může mít jiné parametry A , B a C . [3]

Sdílení tepla zářením je popsáno více zákony, které uvažují absolutně černá tělesa, která mají dokonalou schopnost pohlcovat a vyzařovat energii.

1.3.1 Snellův zákon

Elektromagnetické záření se při průchodu z jednoho průzařného prostředí do druhého šíří dle zákonů optiky. To lze tedy popsat Snellovým zákonem, který je zobrazen na obr. 1.3.1.1. a popsán rovnicí 1.3.1.1 [2], [3]



Obr. 1.3.1.1: Snellův zákon [6]

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad (1.3.1.1)$$

kde n značí index lomu a v_1 a v_2 značí rychlost šíření světla v prvním a druhém prostředí.

1.3.2 Stefan-Boltzmannův zákon

Tento zákon udává, jaké množství energie by vyzářilo absolutně černé těleso o ploše 1 m^2 za jednotku času. Z tohoto zákona je dále vidět fakt, že tepelné ztráty zářením jsou úměrné čtvrté mocnině termodynamické teploty tohoto tělesa. Platí vztah: [3], [4]

$$P_{\xi} = \sigma_{\xi} \cdot \theta^4 \quad (1.3.2.1)$$

kde σ_{ξ} je Stefan-Boltzmannova konstanta, $\sigma_{\xi} = 5,6697 \cdot 10^{-7} [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}]$

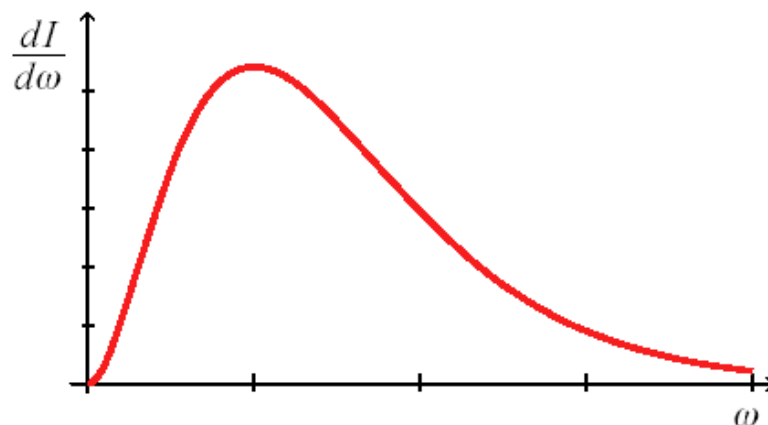
θ je termodynamická teplota [K]

1.3.3 Planckův zákon

Tento zákon dále určuje, že intenzita záření absolutně černého tělesa je závislá také na frekvenci záření (tedy na jeho vlnové délce). Planckův zákon má tvar: [7]

$$dI = \frac{\hbar}{4 \cdot \pi^2 \cdot c^2} \cdot \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar \cdot \omega}{k \cdot T}} - 1} d\omega \quad (1.3.3.1)$$

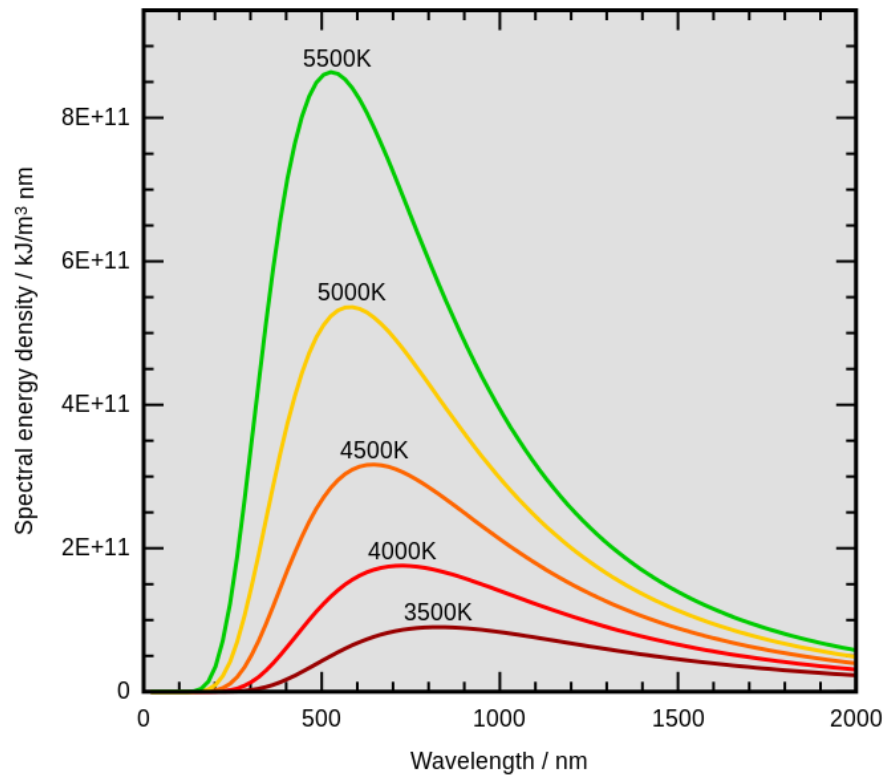
kde ω je úhlová frekvence záření
 I je intenzita záření
 T je teplota absolutně černého tělesa
 \hbar je redukovaná Planckova konstanta
 c je rychlost světla ve vakuu
 k je Boltzmannova konstanta



Obr. 1.3.3.1: Závislost intenzity záření absolutně černého tělesa na frekvenci [7]

1.3.4 Wienův zákon

Tento zákon vyjadřuje fakt, že čím teplejší je absolutně černé těleso, tím kratší je pak vlnová délka, na které toto těleso vyzařuje maximální energii (obr. 1.3.4.1). [8]



Obr. 1.3.4.1: Wienův posunovací zákon [8]

Vlnová délka, na které bude těleso vyzařovat svoji energii, se dá určit ze vztahu (Wienova zákona):

$$\lambda_m = \frac{2892}{\theta} \quad (1.3.4.1)$$

Pokud bychom chtěli například vypočítat teplotu záření o vlnové délce $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, na které je lidské oko nejcitlivější, pak bychom dostali teplotu:

$$\theta = \frac{2892}{\lambda} = \frac{2892}{0,5} = 5784 \text{ K} \quad (1.3.4.2)$$

1.3.5 Kirchhoffův zákon

Tento zákon vyjadřuje skutečnost, že je-li těleso v tepelné rovnováze, dokáže záření vyzařovat stejně tak, jako ho dokáže pohlcovat. Emisivita (poměrná zářivost) povrchu ε je tedy rovna jeho poměrné pohltivosti a . Poté lze tedy napsat pro vyzářený / pohlcený výkon šedého tělesa: [3], [9]

$$P_{\xi} = a_{\xi}\sigma_{\xi}\theta^4 = \varepsilon_{\xi}\sigma_{\xi}\theta^4 \quad (1.3.5.1)$$

kde a_{ξ} je poměrná pohltivost šedého tělesa a ε_{ξ} je poměrná zářivost šedého tělesa.

1.4 Okrajové podmínky a podmínky na rozhraní pro teplotní pole

Podmínky na rozhraní

Podmínky na rozhraní dvou materiálů s různými materiálovými parametry vyjadřují, že teploty na obou stranách rozhraní jsou stejné a že rozdíl toků energie k rozhraní a od rozhraní je roven plošné hustotě energie vznikající na rozhraní za jednotku času.

$$T_1 = T_2 \quad (1.4.1)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = q \quad (1.4.2)$$

kde \mathbf{n} představuje normálový vektor se směrem do druhého prostředí a q představuje plošnou hustotu energie, která vznikne na rozhraní za jednotku času.

V případě, že na rozhraní nevzniká žádná tepelná energie ($q = 0$), pak platí pro rozhraní rovnice

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \quad (1.4.3)$$

Okrajové podmínky pro teplotní pole

- a) Dirichletova – používá se v případě, že známe teplotu na hranici Γ_Ω

$$T(\Gamma_\Omega, t) = T_{\Gamma_\Omega}(\Gamma_\Omega, t) \quad (1.4.4)$$

- b) Neumannova – používá se v případě, že známe velikost toku tepelné energie přes hranici Γ . Využívá se především na osách symetrie, kde je nulový tok tepelné energie přes hranici.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\Gamma_\Omega, t) = f_{02}(\Gamma_\Omega, t) \quad (1.4.5)$$

kde f_{02} je požadovaná hodnota tepelného toku

- c) Newtonova – používá se především při uvažování konvekce mezi pevnou látkou a kapalinou nebo plynem. Jedním z nejdůležitějších parametrů je součinitel přestupu tepla prouděním α . Jeho správné určení je velice problematické a určuje se na základě tzv. kritérií podobnosti. Je ovlivňován celou řadou parametrů, např. teplotou, tlakem, viskozitou, atd.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T_{gass} - T) \quad (1.4.6)$$

- d) okrajová podmínka IV. Druhu – respektuje přestup tepla sáláním, které je popsáno Stefan – Bolzmanovým zákonem.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varepsilon c(T_{ext}^4 - T^4) \quad (1.4.7)$$

U indukčních ohřevů dochází zpravidla k ohřevu z nízké teploty na velmi vysokou. Z tohoto důvodu je zapotřebí uvažovat přestup tepla konvekcí a radiací, který je řešen smíšenou okrajovou podmínkou

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T_{gass} - T) + \varepsilon c(T_{ext}^4 - T^4) \quad (1.4.8)$$

2 Teorie elektromagnetického pole při indukčním ohřevu

Indukční ohřev má oproti jiným typům ohřevu jisté výhody, mezi které patří například rychlost, efektivnost a bezpečnost ohřevu. Indukční ohřev může být aplikován pouze pro ohřev elektricky vodivých materiálů. Je-li pak tento vodivý materiál vložen do proměnného elektromagnetického pole, naindukují se v něm vířivé proudy, které zapříčiní Jouleovy ztráty, tedy ohřev tohoto materiálu.

2.1 Maxwellovy rovnice a odvození vlnových rovnic elektromagnetického vlnění

Pro popis šíření elektromagnetického pole se vychází z Maxwellových rovnic, které určují vlnový charakter elektromagnetického pole. Pro řešení vlnových jevů elektromagnetického pole je nutné předpokládat fakt, že rychlost jejich šíření je konečná. Kdyby tato rychlost byla nekonečná, daný elektromagnetický jev by zaplnil celý prostor, jeho šíření by pak nebylo postupné a vlnění by neexistovalo. Prostředí, kde se elektromagnetické pole šíří, si pro zjednodušení představujeme jako prostředí homogenní a izotropní. Toto prostředí pak popisují konstanty ϵ , μ , γ . [4], [10]

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru vypadají následovně:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \gamma \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\epsilon_0\epsilon_r \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (2.1.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}\mu_0\mu_r \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.1.4)$$

Provedeme rotaci 1. Maxwellovy rovnice

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{H}) = \text{rot}(\gamma \cdot \mathbf{E}) + \text{rot}\left(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \gamma \cdot \text{rot}\mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial(\text{rot}\mathbf{E})}{\partial t} \quad (2.1.5)$$

Za výraz $\text{rot}\mathbf{E}$ dosadíme z 2. Maxwellovy rovnice

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{H}) = -\gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (2.1.6)$$

Aplikováním zákona pro $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{H}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$ dostaneme

$$\text{grad}(\text{div}\mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (2.1.7)$$

Dosadíme ze 4. Maxwellovy rovnice $\text{div}\mathbf{H} = 0$ a dostaneme rovnici pro magnetickou složku elektromagnetického vlnění

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (2.1.8)$$

Obdobným postupem odvodíme rovnici pro elektrickou složku elektromagnetického vlnění.

Provedeme rotaci 2. Maxwellovy rovnice

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial(\text{rot}\mathbf{H})}{\partial t} \quad (2.1.9)$$

Dále dosadíme za $\text{rot}\mathbf{H}$ z 1. Maxwellovy rovnice, aplikujeme stejný zákon pro rotaci rotace, jako v předchozím případě a dostaneme

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = -\gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.1.10)$$

$$\text{grad}(\text{div}\mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.1.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.1.12)$$

Tvar rovnic lze dále formulovat pro dva případy, a to pro případy elektricky vodivého a nevodivého prostředí. Pro první případ elektricky vodivého prostředí ($\gamma \neq 0$, $\varepsilon_r = 0$) dostaneme rovnice elektromagnetického vlnění ve tvaru [3], [4], [10]

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.1.13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.1.14)$$

A pro případ elektricky nevodivého prostředí ($\gamma = 0$, $\varepsilon_r \neq 0$)

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (2.1.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.1.16)$$

2.2 Vektorový potenciál

Pro numerické výpočty je zapotřebí uvést popis elektromagnetického pole pomocí potenciálových veličin. Magnetický vektorový potenciál je zaveden tak, aby byla splněna 4. Maxwellova rovnice (2.1.4). Využijeme rovnice pro vektorový potenciál \mathbf{A} definovaný vztahem

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (2.2.1)$$

Rovnici dosadíme do 2. Maxwellovy rovnice a upravíme

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.2.2)$$

Vztah (2.2.2) lze v důsledku nulové rotace vyjádřit jako gradient skalárního potenciálu φ

$$-\text{grad } \varphi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.2.3)$$

Výraz (2.2.3) upravíme a získáme vztah pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_i \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_v - \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_i \quad (2.2.5)$$

$\mathbf{J}_v = \gamma \cdot \mathbf{E}_v$ představuje proudovou hustotu tzv. vnučeného proudu, odpovídající proudové hustotě proudu protékajícího induktorem. \mathbf{J}_i představuje proudovou hustotu vířivých proudů. Při uvažování kvazistacionárního pole lze v 1. Maxwellově rovnici zanedbat Maxwellův posuvný proud. Po zanedbání tohoto proudu a využití rovnic (2.1.1) a (2.2.1) dostaneme

$$\text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} = \gamma \mathbf{E}_v - \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.2.6)$$

Při předpokladu lineárního prostředí, tedy $\mu = \text{konst.}$ má pak parciální diferenciální rovnice tvar

$$\Delta \mathbf{A} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu \mathbf{J}_v \quad (2.2.7)$$

K získání řešení rovnice (2.2.7) je nutné pro oblast, kde vyšetřujeme rozložení elektromagnetického pole, formulovat okrajové podmínky, počáteční podmínky a podmínky na rozhraní. Programy, které využívají metodu konečných prvků, podmínky na rozhraní nevyžadují, protože při použití této metody jsou tyto podmínky splněny automaticky.

2.3 Okrajové podmínky a podmínky na rozhraní pro vektorový potenciál

Podmínky pro vektorový potenciál na rozhraní Γ_R lze obecně definovat:

- a) Spojitost vektorové potenciálu

$$\mathbf{A}_1(\Gamma_R) = \mathbf{A}_2(\Gamma_R) \quad (2.2.1.1)$$

- b) rovnice pro normálové derivace

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{K}_n \quad (2.2.1.2)$$

\mathbf{K}_n představuje lineární hustotu proudu

Okrajové podmínky pro vektorový potenciál na okraji vyšetřované oblasti Γ_Ω jsou

- a) Dirichletovy – je dáno rozložení vektorového potenciálu

$$\mathbf{A}(\Gamma_\Omega, t) = \mathbf{A}_\Gamma(\Gamma_\Omega, t) \quad (2.2.1.3)$$

kde \mathbf{A} představuje hledanou hodnotu vektorového potenciálu

a $\mathbf{A}_{\Gamma_\Omega}$ je požadovaná hodnota vektorového potenciálu pro body na hranici Γ_Ω

- b) Neumannovy – je známa derivace vektorového potenciálu podle normály

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}(\Gamma_\Omega, t) = f_{01}(\Gamma_\Omega, t) \quad (2.2.1.4)$$

f_{01} představuje požadovanou hodnotu derivace \mathbf{A} dle vnější normály.

Z vlastností vektorového potenciálu \mathbf{A} a vektoru \mathbf{B} plyne, že magnetické indukční čáry jsou totožné s ekvipotenciálami vektoru \mathbf{A} . Je-li tedy hranice totožná se siločarou, bude pro vektorový potenciál platit Dirichletova podmínka. Je-li hranice rovinou symetrie nebo povrchem dokonale permeabilního materiálu, kde je nulová tečná složka \mathbf{B} , pak tato situace odpovídá nulové Neumannově podmínce.

Při modelování pouze symetrických částí modelu je nutné rozlišovat podmínky pro symetrii a antisymetrii. Symetrická okrajová podmínka značí, že magnetický tok bude mít k tomuto rozhraní normálový směr (tedy již zmíněná nulová Neumannova podmínka), antisymetrická podmínka pak značí, že magnetický tok bude k tomuto rozhraní mít směr tangenciální. Antisymetrická okrajová podmínka se používá například při modelování pouze části vodiče k nasimulování jevu, že proud tímto vodičem na okraji nezaniká, ale pokračuje dále, jako by vodič také pokračoval dále.

2.4 Poyntingův vektor

Poyntingův zářivý vektor udává hustotu plošného toku výkonu elektromagnetického vlnění v prostoru [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$]. Díky Poyntingovu vektoru lze například dokázat, že v elektrickém vedení se energie nešíří přímo vodiči, ale prostorem kolem nich. To je zapříčiněno tím, že uvnitř vodiče je nulová intenzita elektrického pole a tím pádem je nulový i Poyntingův vektor. Často se používá při výpočtu indukčního ohřevu. [3], [4]

Při odvození Poyntingova vektoru vyjdeme z rovnice udávající energii elektromagnetického pole v objemu.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dV \quad (2.3.1)$$

Provedeme derivaci rovnice (2.3.1) podle času, čímž zohledníme změny množství energie v daném objemu v čase. Znaménko minus znamená, že do objemu není dodávána žádná energie z okolí, a tudíž se množství energie v tomto objemu může pouze snižovat.

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} = -\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV - \mu_0 \mu_r \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dV \quad (2.3.2)$$

Dosadíme z 1. a 2. Maxwellovy rovnice za parciální derivace podle času a dostaneme

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} - \text{rot}\mathbf{H})dV + \int_V \mathbf{H} \cdot \text{rot}\mathbf{E}dV \quad (2.3.3)$$

Dalšími úpravami dojdeme k výrazu

$$P = \int_V \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}^2 dV + \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})dV \quad (2.3.4)$$

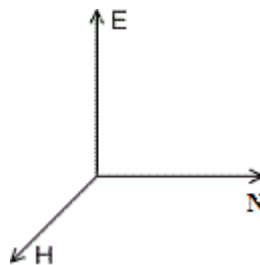
Člen v rovnici $\int_V \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}^2 dV$ určuje teplo, které se vyvine v objemu za jednotku času. Druhý člen v rovnici vytvoří po převedení na plošný integrál pomocí Gaussovy věty základ pro určení Poyntingova vektoru.

$$\int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})dV = \int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H})dA = \int_A \mathbf{N} \cdot dA \quad (2.3.5)$$

Poyntingův vektor lze tudíž vyjádřit jakožto vektorový součin intenzity elektrického a magnetického pole.

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.3.6)$$

Graficky je pak Poyntingův vektor znázorněn na obrázku 2.3.1.



Obr. 2.3.1: Poyntingův vektor

2.5 Hloubka pronikání elektromagnetického vlnění

Nazývána také zkráceně jako „hloubka vniku“, značení a [m]. Při indukčním ohřevu či tavení je hloubka vniku velmi důležitá hodnota, protože pokud bude ohříván materiál (vsázka) tzv. magneticky pružný, bude jeho ohřev velmi neefektivní, nebo k požadovanému ohřevu nedojde vůbec. Magneticky pružným materiálem se označuje materiál, jehož tloušťka je mnohem menší, než hloubka vniku v daném materiálu. V takovém materiálu se magnetické vlnění nestihne utlumit, nevzniká dostatečná proudová hustota naindukovaných vířivých proudů uvnitř materiálu a nedochází k jeho požadovanému ohřevu.

Hloubka vniku je definována jakožto vzdálenost, na které se utlumí intenzita magnetického pole na hodnotu $e^{-1} \cdot H$, tedy přibližně na 36,79 % počáteční hodnoty na povrchu vsázky. Na stejnou hodnotu se za tuto hloubku vniku utlumí i proudová hustota naindukovaných vířivých proudů. Průběh, podle kterého klesá intenzita magnetického pole ve vodivé vsázce je: $H \sim e^{-\frac{x}{a}}$. Za vzdálenost $2 \cdot \pi \cdot a$ se utlumí téměř 100 % magnetické intenzity uvnitř vsázky. Je-li tedy tloušťka vsázky vyšší, než $2 \cdot \pi \cdot a$, lze hovořit o tzv. stěně velké tloušťky.

Pro určení, zda je stěna velké tloušťky se také používá parametr x , který spočítáme:

$$x = \sqrt{2} \cdot \frac{r}{a} \quad (2.4.1)$$

Je-li tento parametr vyšší než 3, je stěna považována za stěnu velké tloušťky.

Tepelné ztráty jsou úměrné druhé mocnině intenzity magnetického pole a jejich průběh ve vodivé vsázce je tedy $H \sim e^{-\frac{2x}{a}}$. Tepelné ztráty (ohřev) tedy vznikají pouze do hloubky $\pi \cdot a$.

Hloubka vniku závisí na materiálových vlastnostech daného materiálu a na frekvenci procházejícího proudu induktorem. Spočítáme jí jako

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \gamma}} \quad (2.4.2)$$

Naopak v induktoru požadujeme na rozdíl od vsázky tepelné ztráty co nejmenší. Vlivem skinefektu je v induktoru proud vytlačován k povrchu vodiče, což způsobuje velké zahřívání vodičů induktoru. Tento jev je tedy zapotřebí vzít v úvahu při návrhu vodičů induktoru, proto se například používají měděné induktry s velkou vodivostí.

3 Studený kelímek pro tavení oxidů kovů

Princip indukčního tavení ve studeném kelímku je založen na průchodu střídavého proudu o frekvenci desítek kHz až jednotek MHz induktorem. Tento proud způsobí v okolí induktoru vznik střídavého elektromagnetického pole, které indukuje ve vsázce či startovacím materiálu vířivé proudy, které se uvnitř tohoto materiálu uzavírají a vlivem Jouleových ztrát jej ohřívají. Teplo tedy vzniká přímo uvnitř ohřívaného materiálu. [11]

Studený kelímek je speciální případ kelímkové indukční pece pro indukční tavení. Tato pec nemá žádnou keramickou vyzdívku pro ukládání vsázky, jako je tomu u klasických indukčních pecí. Vsázka je na svém povrchu intenzivně chlazena, tím pádem slabá vrstva na povrchu vsázky zůstává v pevném skupenství (nazývána „skull“). Tato vrstva pak tvoří pomyslnou nádobu, ve které se vsázka roztaví. Lze tedy říci, že se vsázka taví „sama v sobě“. Tato skutečnost s sebou přináší velké výhody, jako je velká čistota taveniny či dosahování velmi vysokých teplot taveniny. Čistota je důsledek faktu, že nedochází k natavování a vymílání keramické vyzdívky, jejíž částičky pak čistotu taveniny zhoršují. Velkých teplot lze dosáhnout taktéž díky absenci keramické vyzdívky, a to z důvodu, že by tato vyzdívka nevydržela vysoké teploty, při kterých se taví ve studeném kelímku, došlo by k jejímu protavení a k následnému zničení celého zařízení. [11]

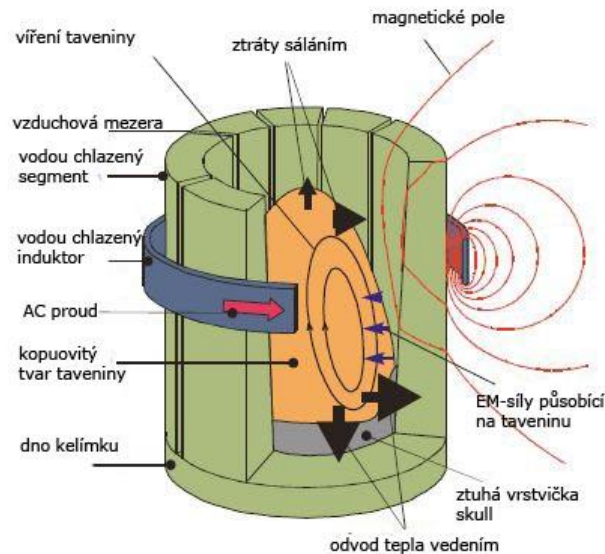
Studený kelímek může být dvojího druhu, a to buď segmentový, nebo s integrovaným induktorem. V této práci bude pro účely tavení oxidů kovů podrobněji popsán pouze segmentový studený kelímek. [3], [4], [11]

3.1 Segmentový studený kelímek

Tento typ kelímku je vhodný pro tavení elektricky vodivých materiálů a oxidů. Jeho konstrukční části jsou induktor, soustava chladících segmentů a dno. [11]

Segmenty bývají vyrobeny z mědi a mohou být buď kruhového, nebo obdélníkového tvaru. Pod úrovní dna bývají tyto segmenty napojeny na přírodní chladící potrubí, které přivádí a odvádí chladící vodu. Dno kelímku je také zhotoveno z mědi a je chlazené vodou. Induktor je dutý, opět chlazený vodou a vyroben z mědi. Mezera mezi chladícími segmenty by měla být co nejmenší, aby nedocházelo k odtoku taveniny směrem k induktoru. Reálně bývá přibližně 0,5 mm, menší mezeru by bylo složité řešit konstrukčně.

Tvar chladících segmentů nemá na funkčnost kelímku žádný větší vliv, může mít ale vliv na účinnost ohřevu. Zpravidla mívají kelímky se segmenty kruhového průřezu lepší účinnost, jelikož v segmentech tohoto průřezu dochází k menším ztrátám. Obdélníkový tvar segmentů má oproti tomu lepší využití prostoru pro chlazení. Segmenty by pak měly mít dostatečnou tloušťku stěny, a to z důvodu, že chladicí voda jimi proudí pod velkým tlakem. Tato tloušťka by měla být alespoň 1,5 mm. [11], [12]

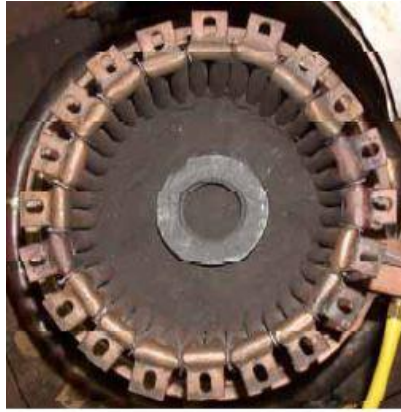


Obr. 3.1.1: Segmentový studený kelímek [11]

3.2 Tavení oxidů kovů ve studeném kelímku – startovací fáze

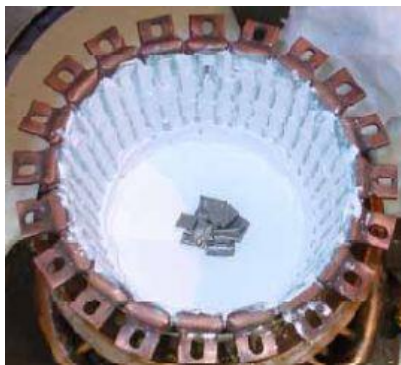
Oxidy kovů patří mezi materiály, které mají za běžné teploty velice malou vodivost, a jejich indukční tavení není možné bez tzv. startovací fáze. Během této startovací fáze se musí vsázka ohřát na takovou dostatečnou teplotu, aby její elektrická vodivost vzrostla na hodnotu dostatečnou pro zahájení jejího indukčního ohřevu. Startovací fáze se může provést více způsoby. [11]

Nejrozšířenější způsob startovací fáze je vložení elektricky vodivého kruhu buď na povrch vsázky, nebo přímo dovnitř vsázky. Tento vodivý kruh je nejčastěji vyroben z grafitu, iridia, nebo karbidu křemíku. Po zvýšení teploty vsázky na požadovanou hodnotu, kdy už se bude vsázka schopná tavit sama, se vodivý kruh vyjme a tavba probíhá bez další pomoci. [11]



Obr. 3.2.1: Startovací fáze za pomoci grafitového kruhu [11]

Při tavení oxidů kovů je nejvýhodnější použít variantu, kdy se do vsázky přidá malé množství kovu ve formě prášku nebo malých kousků. Vhodné je překrýt startovací materiál vlastním oxidem, a to z důvodu zlepšení přenosu tepla do vsázky a snížení tepelných ztrát. Velikost částí startovacího materiálu je nutné volit tak, aby nebyly magneticky průzařné. Poté se budou vířivé proudy uzavírat startovacím materiálem, ten zoxiduje za přítomnosti kyslíku a smísí se se vsázkou. Znečištění taveného materiálu by nastalo pouze v případě nedostatku kyslíku, což by způsobilo, že by oxidace nebyla dokonalá. Bod tavení startovacího materiálu nesmí být vyšší, než bod tavení vsázky. [11]



Obr. 3.2.2: Kousky kovu jakožto startovací materiál [11]

Další možností je přímý ohřev povrchu vsázky. Pro tento účel je možné použít například plynový hořák. Tohoto způsobu startovací fáze se využívá jen pro kelímek s integrovaným induktorem, tedy bez chladících segmentů. Ve chvíli, kdy je dosaženo takové

teploty, že může docházet k indukovaní vířivých proudů do vsázky, je ohřev pomocí hořáku zastaven. Tento způsob se využívá při tavbě skla a jeho nevýhodou je reálná možnost znečištění vsázky plynovým hořákem. [11]



Zkrystalizované sklo po použití plynového hořáku [11]

4 Návrh studeného kelímku

Při návrhu jednotlivých rozměrů kelímku budeme vycházet z potřebného tepelného toku, který je zapotřebí k roztavení daného oxidu kovu a z parametrů napájecího zdroje, který bude zařízení napájet. Chladicí segmenty budou válcového tvaru o průměru 1 cm a jejich délka bude taková, aby bylo ve spodní části kelímku (pod dnem) možné bez problémů napojit hadičky pro chladicí vodu, skrze které bude voda tlakována do chladících segmentů. Segmenty musí také mít přesah i v horní části kelímku (nad vsázkou), aby bylo chlazení bezproblémové a nedocházelo k překročení požadované teploty na povrchu vsázky (cca 70°C). Nad i pod kelímkem bude přesah pro tuto konfiguraci stanoven na 10 cm.

4.1 Kelímek pro tavení Al_2O_3

Potřebné parametry pro výpočet rozměrů, tedy průměru a výšky vsázky a tavících parametrů, což jsou frekvence tavení a hloubka vniku jsou následující: [13], [14]

Příkon zdroje:	$P = 160 \text{ kW}$
Výstupní napětí:	$U = 500 - 10000 \text{ V}$
Tepelný tok potřebný pro roztavení Al_2O_3 :	$Q = 500\,000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
Rezistivita roztaveného materiálu Al_2O_3 :	$\rho = 0,015 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$
Z rezistivity vypočítaná vodivost ($\frac{1}{\rho}$):	$\gamma = 66,6667 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Zatížení zdroje:	$z = 0,4$
Poměr „průměr / výška“ vsázky:	$d / l = 1$

Indexy „2“ značí, že se jedná o vsázkou. Parametry pro induktor pak mají index „1“ a parametry chladících segmentů mají index „3“.

Maximální ohřívání povrch vnějšího pláště vsázky vypočteme z výkonu zdroje a potřebného tepelného toku

$$S_{P2} = \frac{P \cdot z}{Q} = \frac{160\,000 \cdot 0,4}{500\,000} = \mathbf{0,128 \text{ m}^2} \quad (4.1.1)$$

Vydeme z rovnic pro povrch vnějšího pláště vsázky a poměru poloměru k výšce vsázky

$$S_{P2} = 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot l_2, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{d_2}{l_2} = \frac{2 \cdot r_2}{l_2} = 1 \quad (4.1.3)$$

Dosazením za l_2 do rovnice 4.1.2 dostaneme

$$S_{P2} = 4 \cdot \pi \cdot r_2^2 \quad (4.1.4)$$

Z rovnice 4.1.4 pak vyjádříme poloměr a z poloměru výšku vsázky

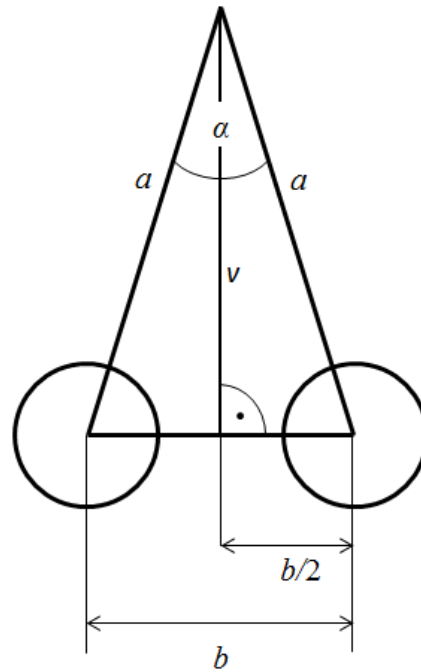
$$r_2 = \sqrt{\frac{S_{P2}}{4 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{0,128}{4 \cdot \pi}} = 0,101 \text{ m} = 10,1 \text{ cm} \quad (4.1.5)$$

$$l_2 = 2 \cdot r_2 = 2 \cdot 0,101 = 0,202 \text{ m} = 20,2 \text{ cm} \quad (4.1.6)$$

Vypočítaný poloměr a tedy i výšku vsázky bude nutné ještě v dalších krocích upravit, aby bylo možné zachovat mezeru mezi chladicími segmenty a zároveň byl počet segmentů celé, sudé číslo (viz. dále).

Dále je nutné určit počet trubek chladících segmentů, které budou umístěné po obvodu vsázky. Mezi vsázkou a segmenty bude pro účely modelování mezera o velikosti 0,1 cm. Mezi segmenty bude počítáno s mezerou o velikosti taktéž 0,1 cm (v reálných zařízeních bývá 0,05 cm). Počet trubek chladících segmentů musí být zaokrouhlen na celé sudé číslo. Sudý počet trubek musí být z toho důvodu, že jeden segment tvoří dvě trubky (jednou trubkou teče voda vzhůru, druhou trubkou se voda vrací zpět).

Celou situaci vypočítáme pomocí rovnoramenného trojúhelníka o stranách a , b , který vidíme na obrázku 4.1.1. Po sestrojení výšky v vzniknou dva pravoúhlé trojúhelníky o stranách a , $\frac{b}{2}$ a v .



Obr.: 4.1.1: Pomocný trojúhelník pro výpočet počtu segmentů

Délku přepony a vypočítáme z poloměru vsázky, mezery mezi trubicí segmentu a vsázkou, která je rovna 0,1 cm a z poloměru trubice, což odpovídá vzdálenosti 0,5 cm.

$$a = r_2 + 0,1 + 0,5 = 10,1 + 0,1 + 0,5 = 10,7 \text{ cm}$$

(4.1.7)

Strana b představuje vzdálenost mezi středy trubic. Ta je rovna dvojnásobku poloměru trubic ($r_3 = 0,5$ cm), plus 0,1 cm, což je mezera mezi trubicemi. Zároveň pro náš výpočet budeme potřebovat jen poloviční délku strany b , jak je zřejmé z obrázku 4.1.1

$$\frac{b}{2} = \frac{2 \cdot r_3 + 0,1}{2} = \frac{2 \cdot 0,5 + 0,1}{2} = 0,55 \text{ cm}$$

(4.1.8)

Nyní již zbývá pomocí goniometrické funkce sinus dopočítat úhel α . Ten je roven dvojnásobku úhlu, který vyjde v pravoúhlém trojúhelníku $a, \frac{b}{2}, v$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{b/2}{a} = \frac{0,55}{10,7} = 0,0514$$

(4.1.9)

$$\alpha = 2 \cdot (\sin^{-1} 0,0514) = 5,9^\circ$$

(4.1.10)

Tento úhel je tedy úhel mezi rameny pomocného trojúhelníka, který má vrchol ve středu vsázky a zbylé dva vrcholy má ve středech trubic segmentu – označme ho tedy úhlem mezi trubkami segmentu. Chceme-li nyní zjistit počet trubek segmentů, musíme plný úhel, tedy 360° , vydělit úhlem α .

$$\text{Počet trubek} = \frac{360}{\alpha} = \frac{360}{5,9} = 61,09 \quad (4.1.11)$$

Jak již ale bylo zmíněno, počet trubek musí být celé, sudé číslo. Zvolíme tedy **62** trubek. Zpětným přepočtem přes nový úhel α pro 62 trubek je pak nutné zpětně přepočítat poloměr a výšku vsázky, aby bylo možné zachovat mezeru mezi segmenty. Nový úhel α získáme podělením plného úhlu 360° zaokrouhleným počtem trubek

$$\alpha = \frac{360}{\text{počet trubek}} = \frac{360}{62} = \mathbf{5,806^\circ} \quad (4.1.12)$$

A z nového úhlu dopočítáme upravenou délku strany a

$$a = \frac{b/2}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{0,55}{0,051} = \mathbf{10,86 \text{ cm}} \quad (4.1.13)$$

Od strany a odečteme poloměr chladicí trubice a mezeru mezi vsázkou a chladicími segmenty a získáme upravený poloměr vsázky r_2 . Z tohoto poloměru pak dopočteme upravenou výšku vsázky l_2 .

$$r_2 = a - 0,1 - 0,5 = 10,86 - 0,6 = \mathbf{10,26 \text{ cm}} \quad (4.1.14)$$

$$l_2 = 2 \cdot r_2 = 2 \cdot 10,26 = \mathbf{20,52 \text{ cm}} \quad (4.1.15)$$

Dále určíme výšku induktoru, která bude o 10 % větší, než je výška vsázky [13].

$$l_1 = 1,1 \cdot l_2 = 1,1 \cdot 20,52 = \mathbf{22,57 \text{ cm}}$$

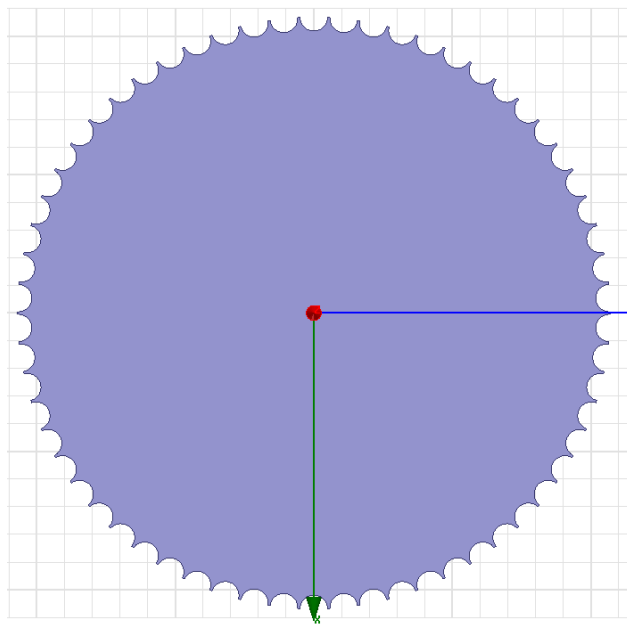
(4.1.16)

Mezera mezi induktorem a vsázkou bude 3 cm, jeho tloušťka pro účely modelu bude pouze šestinásobek hloubky vniku v mědi pro daný kmitočet.

Poslední část, jejíž rozměry je nutné určit je dno kelímku. Zde se inspirujeme obvyklým provedením. Výška dna je tedy stanovena na 10 cm a poloměr bude určen tak, aby chladicí segmenty mohly být zasazeny po obvodu dna, jak je vidět na obrázku 4.1.2. Poloměr tedy bude poloměr vsázky + mezera mezi vsázkou a segmenty (0,1 cm) + poloměr trubky chladicího segmentu (0,5 cm). Trubice segmentů budou tedy z poloviny zapařeny do dna.

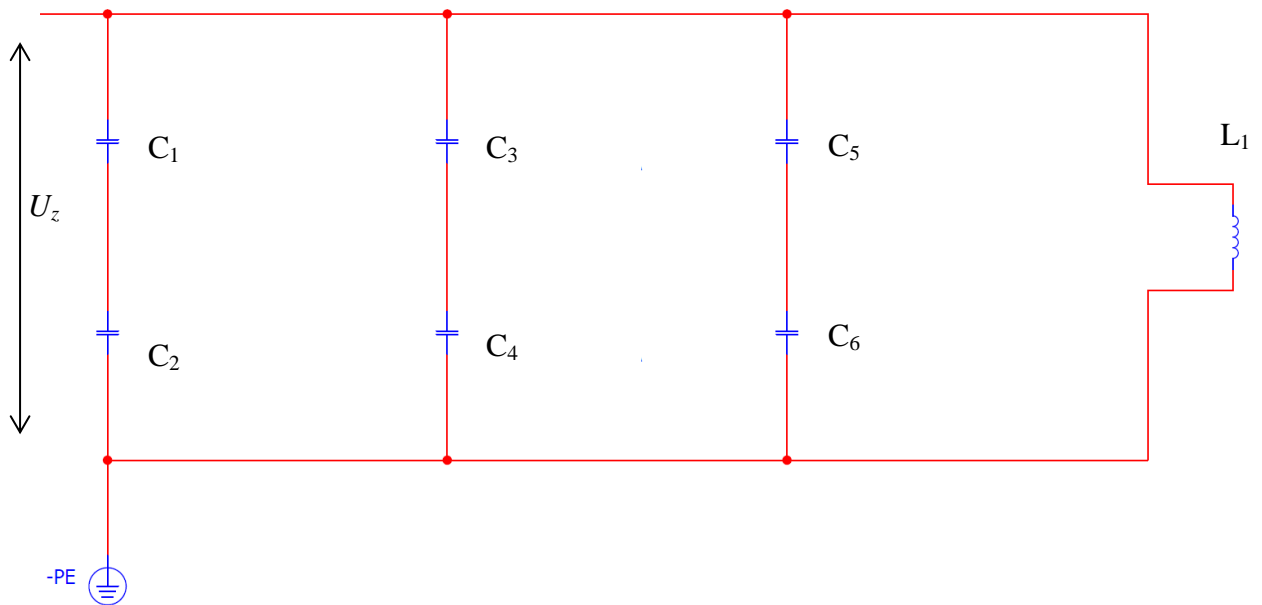
$$r_{dno} = r_2 + 0,1 + r_3 = 10,26 + 0,1 + 0,5 = \mathbf{10,86 \text{ cm}}$$

(4.1.17)



Obr. 4.1.2: Dno kelímku

Nakonec je nutné stanovit napájecí proud a jeho frekvenci. Tyto parametry určíme z oscilačního obvodu, přes který je cívka připojena ke zdroji (obr. 4.1.3). [14]



Obr. 4.1.3: Oscilační obvod s napájecí cívkou [14]

Jak je vidět z obrázku, obvod se skládá z šesti kondenzátorů a indukčnosti, která odpovídá indukčnosti použitého induktoru. Napětí U_z představuje napětí zdroje. Abychom docílili co nejmenšího proudu na výstupu zdroje (nebudou zbytečně přetěžovány polovodičové součástky, které zdroj obsahuje), a zároveň optimálního proudu napájecí cívkou, musí být kondenzátory oscilačního obvodu v rezonanci s napájecí cívkou. Poté bude prakticky docházet k výměně energie mezi kondenzátory a napájecí cívkou a ze zdroje by teoreticky netekl žádný proud. Tohoto stavu v reálném případě není možno docílit, protože činný ohmický odpor obvodu nebude v reálu nulový.

Parametry oscilačního obvodu jsou následující:

$$C_1 = C_2 = 4000 \text{ pF} = 4 \text{ nF}$$

$$C_3 = C_4 = 2500 \text{ pF} = 2,5 \text{ nF}$$

$$C_5 = C_6 = 1500 \text{ pF} = 1,5 \text{ nF}$$

$$L_1 = 1,8 \text{ } \mu\text{H}$$

Sérioparalelní kombinací kapacit vypočítáme výslednou kapacitu obvodu. Pro první větve, skládající se z kapacit C_1 a C_2 spočítáme celkovou kapacitu větve C_{11} :

$$C_{11} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 2 \text{ nF} \quad (4.1.16)$$

Obdobně pak pro druhou a třetí větve:

$$C_{22} = \frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4} = \frac{2,5 \cdot 2,5}{2,5 + 2,5} = 1,25 \text{ nF} \quad (4.1.17)$$

$$C_{33} = \frac{C_5 \cdot C_6}{C_5 + C_6} = \frac{1,5 \cdot 1,5}{1,5 + 1,5} = 0,75 \text{ nF} \quad (4.1.18)$$

Výslednou kapacitu C pak získáme součtem kapacit jednotlivých větví:

$$C = C_{11} + C_{22} + C_{33} = 2 + 1,25 + 0,75 = 4 \text{ nF} \quad (4.1.19)$$

Rezonanční frekvenci obvodu spočítáme pak z Thompsonova vztahu:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1,8 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-9}}} = 1,876 \text{ MHz} \quad (4.1.20)$$

Z frekvence spočítáme, jaká bude hloubka vniku a jaký bude parametr x_2 pro námi tavený materiál a zkontrolujeme, zda není vsázka magneticky pružná:

$$a_2 = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \gamma \cdot \mu_0}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot 1,876 \cdot 10^6 \cdot 66,6667 \cdot \mu_0}} = 0,045 \text{ m} \quad (4.1.21)$$

$$x_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{r_2}{a_2} = \sqrt{2} \cdot \frac{0,1026}{0,045} = 3,22 \quad (4.1.22)$$

Námi tavený materiál při spočítané frekvenci tedy není magneticky pružný.

Proud, který bude protékat cívkou, pak spočítáme z napětí zdroje a z indukční reaktance cívky. Napětí uvažujeme 2800 V. Původní maximální možné napětí zdroje bylo 7000 V – dle nové dokumentace je 10 000 V. Zvolených 2800 V odpovídá 40 % původní hodnoty 7000 V.

$$I_2 = \frac{U_Z}{X_L} = \frac{2800}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} = \frac{2800}{2 \cdot \pi \cdot 1,876 \cdot 1,8} = \mathbf{132\ A} \quad (4.1.23)$$

Do programu ANSYS Maxwell se zadává maximální hodnota proudu v ampéřzávitech. Jelikož v modelu bude třízávitová cívka nahrazena jedním závitem, je nutné proud vynásobit třemi. Maximální hodnotu respektujeme násobením odmocninou ze dvou.

$$I_{2max} = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot I_2 = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 132 = \mathbf{560\ A} \quad (4.1.24)$$

Proudy, které při daném napětí tečou přes kondenzátory, spočítáme opět z napětí zdroje a z kapacitní reaktance kondenzátorů. Součet kapacitních proudů všech tří větví by se měl při rezonanci rovnat indukčnímu proudu cívkou.

$$I_{C11} = U_Z \cdot X_{C11} = U_Z \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_{11}$$

$$I_{C11} = 2800 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1,876 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-9} = \mathbf{66\ A} \quad (4.1.25)$$

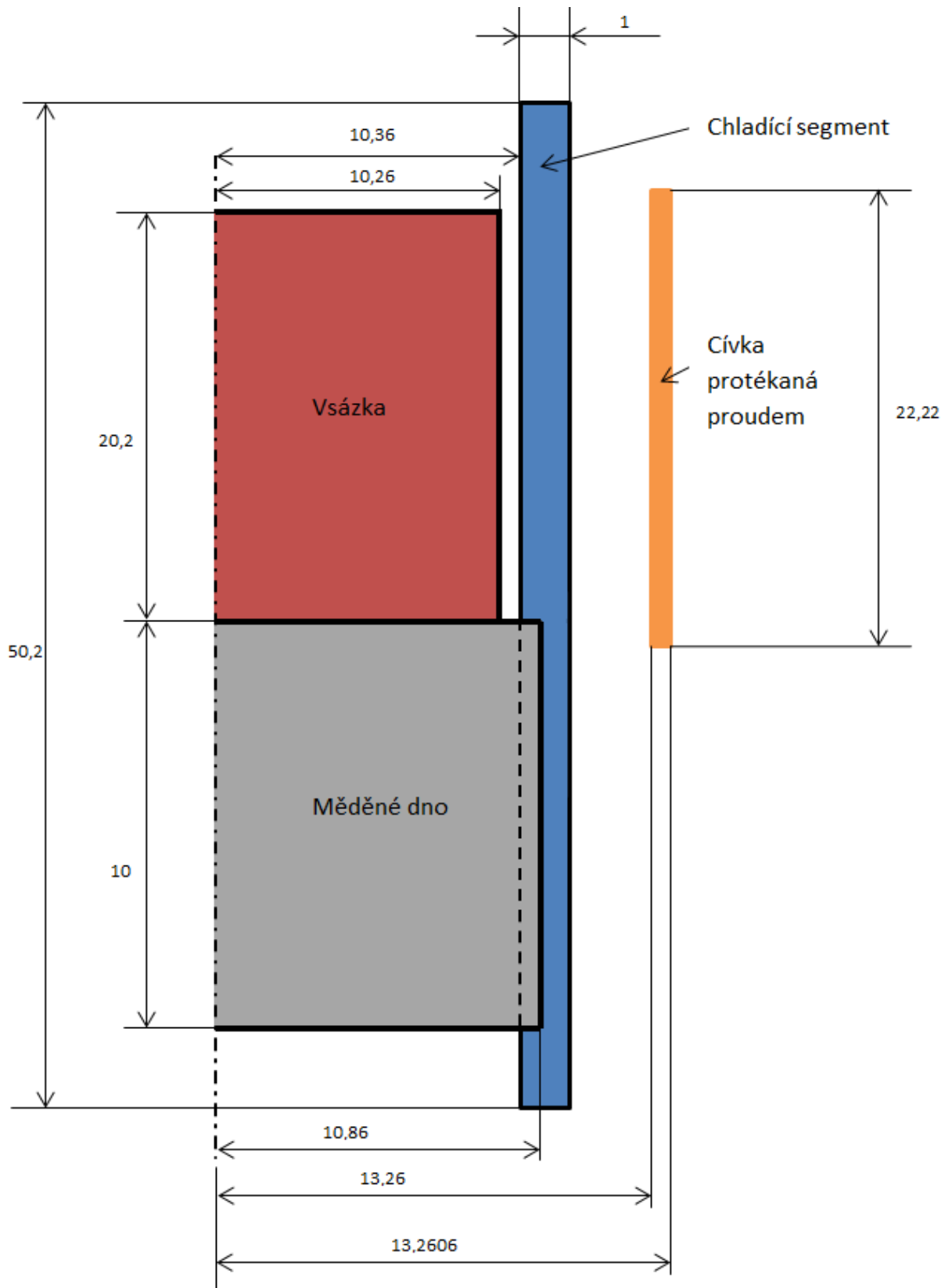
Stejným vzorcem pak dopočítáme kapacitní proudy $I_{C22} = \mathbf{41,26\ A}$ a $I_{C33} = \mathbf{24,74\ A}$. Součet těchto kapacitních proudů je:

$$I_C = I_{C11} + I_{C22} + I_{C33} = 66 + 41,26 + 24,74 = \mathbf{132\ A} \quad (4.1.26)$$

Zdroj by tedy při rezonanci nedodával do ideálního obvodu (bez činného odporu) žádný proud. Při použití jiné frekvence na výstupu zdroje se pak kapacitní proud nerovná indukčnímu a rozdíl proudů musí dodat do obvodu zdroj. Tento proud zdroje je pak omezen jeho výkonem.

Obdobně je pak možné tyto vypočítané parametry přepočítat na jiná nastavení napájecího zdroje.

Finální podoba řezu kelímkem a jeho rozměry v cm je vidět na obrázku 4.1.4



Obr.: 4.1.4: Řez kelímkem a jeho rozměry

5 Simulační program ANSYS Maxwell

Model bude tvořen v simulačním programu ANSYS Maxwell, který pro výpočet používá numerickou metodu konečných prvků. Konkrétně bude použit řešič (solver) s názvem „Eddy Current“, který je určen pro výpočty sinusově proměnných magnetických polí. Tento solver může být použit pouze pro lineární materiály. Bere v úvahu Maxwellovy posuvné proudy, indukovaná pole a povrchový jev. [15]

5.1 Metoda konečných prvků

Účelem této metody je rozdělit určitý objekt (2D nebo 3D) na konečný počet menších kusů, takzvaných elementů. Tyto elementy jsou navzájem pospojovány a tvoří síť, nebo-li mesh. Ve 2D geometrii má element trojúhelníkový tvar, ve 3D geometrii je pak tento element ve tvaru čtyřstěnu. V určitých bodech těchto elementů jsou pak řešeny požadované diferenciální rovnice. [15]

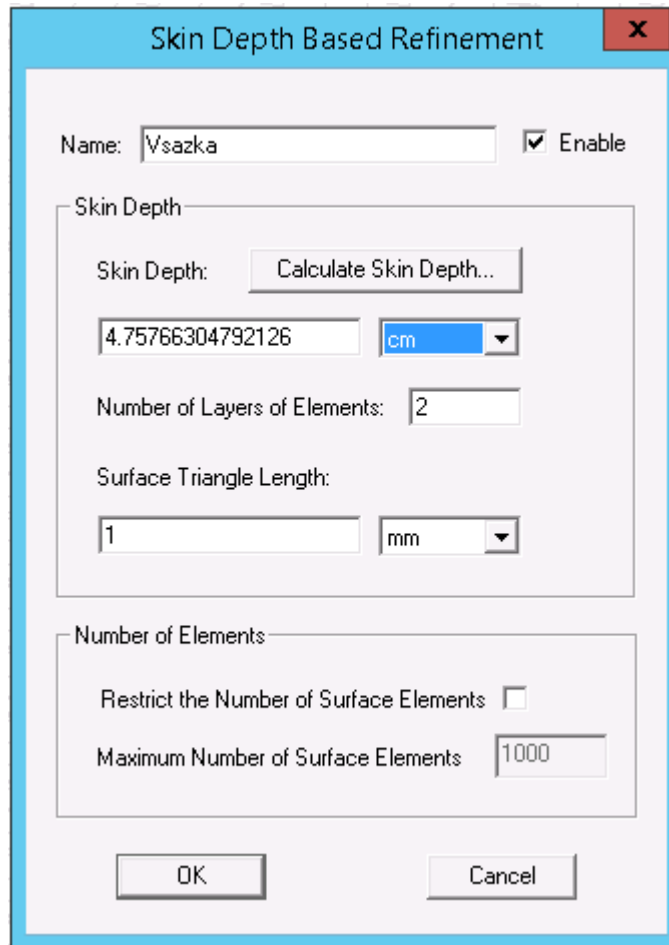
Počet těchto elementů má tedy velký vliv na správnost výpočtu. Rozdělení objektu na malý počet větších elementů sice vede k rychlejšímu řešení, ale toto řešení nemusí ani zdaleka odpovídat realitě. Pokud objekt rozdělíme na velký počet malých elementů, bude výpočet přesnější (také není pravidlem – v krajním případě může velmi vysoký počet elementů vést naopak k vyšší numerické chybě), nicméně takový výpočet bude velmi náročný na operační paměť a výpočet může být velmi dlouhý, v krajních případech ani neproběhne. Je tedy zapotřebí určit takové optimální množství elementů, aby byla chyba výpočtu malá, ale aby elementů nebylo více, než je nezbytně třeba.

5.2 Tvorba meshe v programu ANSYS Maxwell

Pro výpočty indukčních ohřevů je při nastavování meshe nutné hledět na hloubku vniku v materiálech, kde je mesh tvořena. Tam, kde se uvnitř materiálu utlumí největší část magnetického pole, tedy v hloubce vniku, musí být dostatečný počet elementů, aby zde byl výpočet co nejpřesnější. Naopak v hloubce vyšší, než je hloubka $2 \cdot \pi \cdot a$, již není zapotřebí nijak zvlášť husté meshe, jelikož zde již nedochází k útlumu magnetického pole, ani k Jouleovým tepelným ztrátám, a proto zde můžeme ušetřit jisté množství elementů a zkrátit výpočet.

ANSYS Maxwell nám tuto práci značně zjednodušuje. Již v nastavování meshe v preprocessingu nám umožňuje na základě řešené frekvence v daných materiálech spočítat hloubku vniku a tím mesh přizpůsobit. Aby ale byla správnost výpočtu ještě více zajištěna, ANSYS Maxwell navíc pak přímo při výpočtu zjišťuje tzv. „Energy error“. Dokud hodnota energy error neklesne pod požadovanou procentuální hodnotu, kterou nastavíme před výpočtem, zhustí ANSYS po každém výpočtu matice – v ANSYSu nazývané „Pass“ – mesh. Vznikne tedy více elementů, chyba bude v dalším výpočtu (pass) menší a takto postupně program dokonverguje k přesnému řešení. [15]

Díky této schopnosti programu bylo i v průběhu modelování ověřeno, že při nastavování hustší meshe uživatelem nevede k nijak zvlášť přesnějším výsledkům simulace (rozdíly byly v řádu desetin procent), nastavení lepší meshe přirozeně vedlo k pouze nepřiměřeně velkému množství elementů. Z tohoto poznatku tedy vyplývá, že je při nastavování meshe lepší nastavit pouze hloubku vniku v daném materiálu a v této hloubce vniku stačí požadovat 2 vrstvy, kde se budou elementy napojovat (2 vrstvy nastavuje program defaultně). Program si pak mesh při její tvorbě dostatečně zhustí a výsledek je přesný. Okno s nastavením meshe pro vsázku vidíme na obrázku 5.2.1.



Obr. 5.2.1: Nastavování meshe na základě hloubky vniku

V určitých bodech elementů meshe pak ANSYS řeší v případě solveru „Eddy current“ rovnici pro magnetický vektorový potenciál odvozenou v kapitole 2.2. Výpočet uvažujeme při konstantní permeabilitě materiálu, můžeme tedy psát tvar:

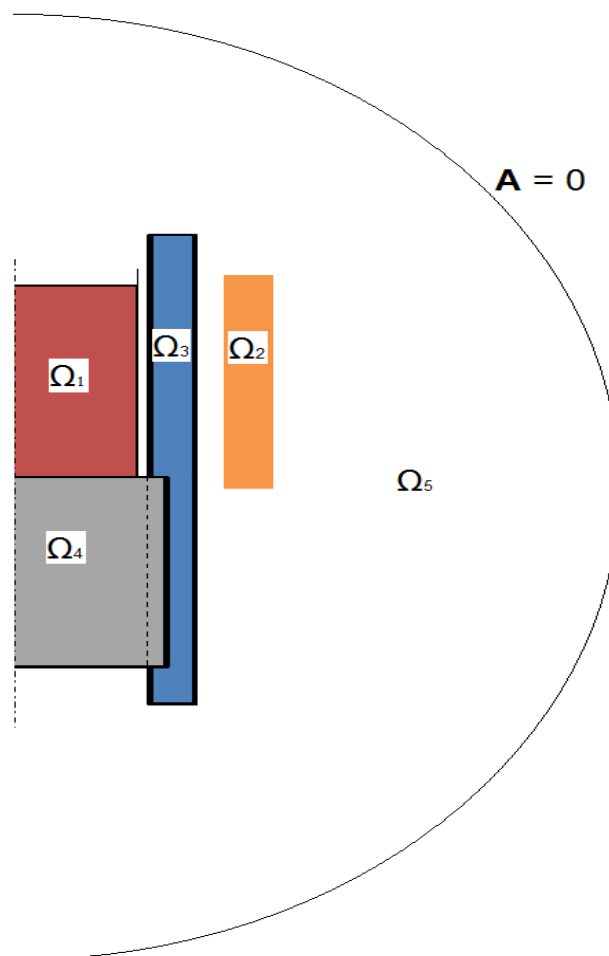
$$\Delta \mathbf{A} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu \mathbf{J}_V \quad (5.2.3)$$

6 Modelování studeného kelímku pro tavení Al_2O_3

Úkolem vytvořeného modelu je vypočítat ztráty vířivými proudy v jednotlivých konstrukčních částech zařízení, tedy ztráty, které se snažíme minimalizovat a ztráty ve vsázce, tedy ztráty, které způsobí její ohřev, tím pádem jsou žádoucí. Z těchto hodnot je následně možné spočítat účinnost celé konfigurace pro různé parametry x_2 , rozdílné počty chladících segmentů a podobně.

6.1 Matematický model studeného kelímku Al_2O_3

Na obrázku 6.1.1 vidíme rozdělení modelu na jednotlivé oblasti Ω_1 až Ω_5 . Pro tyto oblasti je nutné definovat počáteční a okrajové podmínky. Obrázek je kvůli lepší přehlednosti nakreslen jako 2D symetrický, konečný model bude ale řešen ve 3D.



Obr. 6.1.1: Matematický model studeného kelímku

Ve všech částech modelu uvažujeme konstantní permeabilitu.

Pro oblasti vsázky, chladících segmentů a vodivého dna, tedy oblasti Ω_1 , Ω_3 a Ω_4 , lze rovnici pro vektorový potenciál (2.2.7) zjednodušit na tvar

$$\Delta \mathbf{A} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6.1.1)$$

a to z důvodu, že do těchto oblastí není vkládán žádný proud, tudíž proudová hustota vnuceného proudu \mathbf{J}_v je v těchto oblastech nulová.

Do oblasti induktoru, tedy do oblasti Ω_2 , je vkládán proud. Zde tedy platí rovnice pro vektorový potenciál odvozená v kapitole 2.2, tedy ve tvaru

$$\Delta \mathbf{A} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu \mathbf{J}_v \quad (6.1.2)$$

Pro oblast okolí, tedy oblast Ω_5 , kde je elektrická vodivost nulová, lze rovnici pro vektorový potenciál napsat v ještě více zjednodušeném tvaru

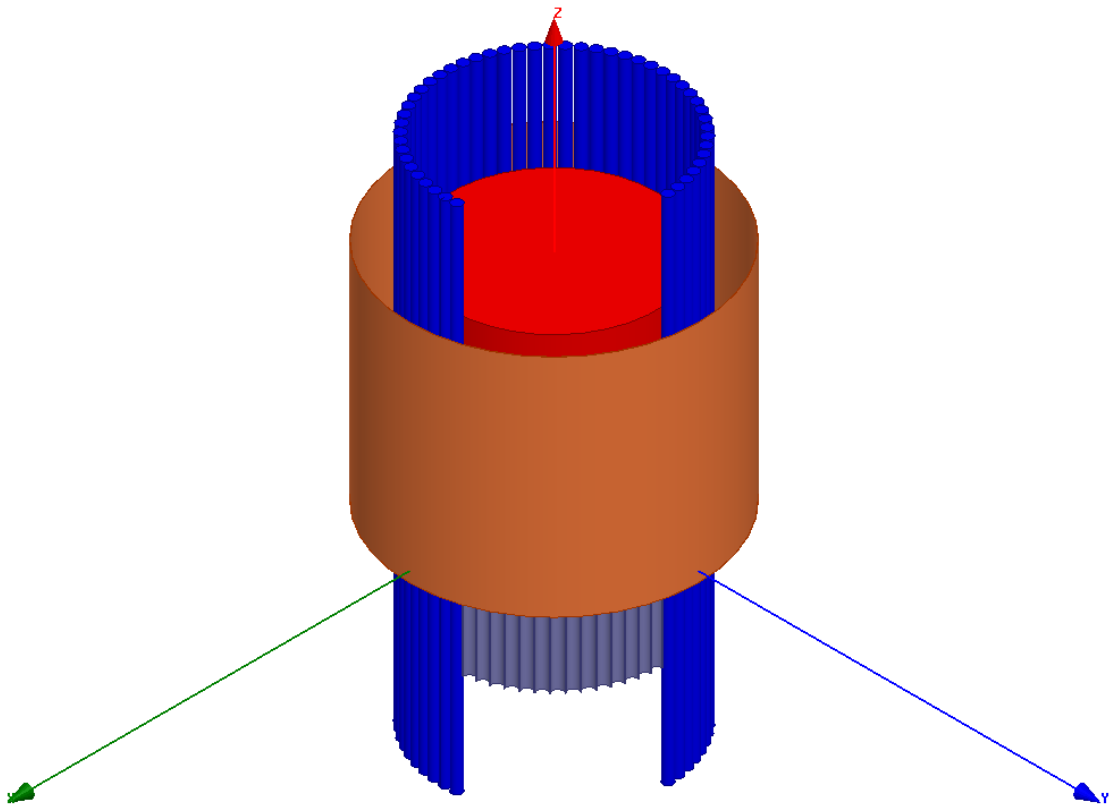
$$\Delta \mathbf{A} = 0 \quad (6.1.3)$$

Na rozhraní mezi jednotlivými oblastmi modelu $\Omega_1 - \Omega_5$ je uvažována okrajová podmínka spojitosti potenciálů popsaná v kapitole 2.3 (v ANSYSu popisovaná jakožto „Natural“). Intenzita magnetického pole je na těchto rozhraních spojitá.

Dále je na hranici okolí uvažována Dirichletova okrajová podmínka, vektorový potenciál je na této hranici již nulový. Siločáry magnetického pole mají tedy tangenciální směr k této hranici a mimo tuto oblast je již intenzita magnetického pole nulová.

6.2 Model v simulačním programu ANSYS Maxwell

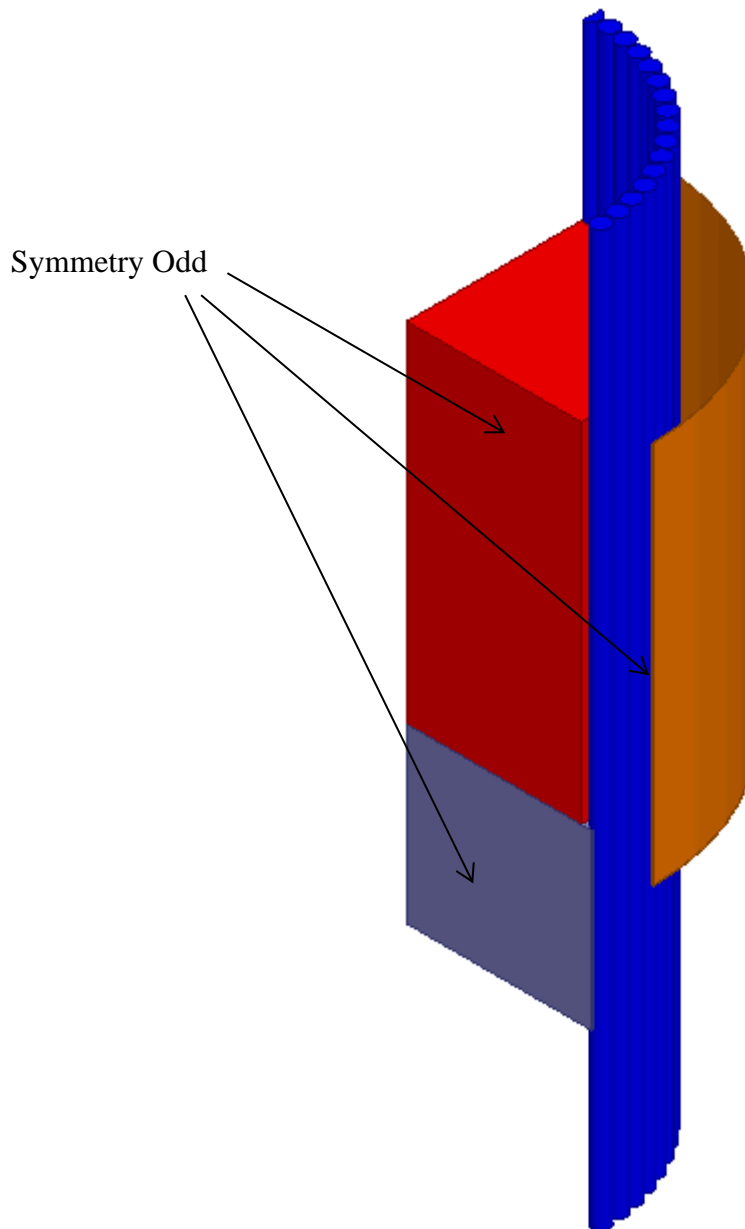
Rozměry, tavicí frekvence, proud v cívce a počet segmentů jsou v modelu použity takové, které byly vypočteny v kapitole 4.1. Obrázek modelu vytvořeného v prostředí ANSYS Maxwell je vidět na obrázku 6.2.1.



Obr. 6.2.1: Studený kelímek v prostředí ANSYS Maxwell

Cívka má na obrázku oranžovou barvu, modré jsou chladicí segmenty, červenou barvou je zobrazena vsázka a dno je šedé. Několik chladících segmentů bylo v popředí zneviditelněno kvůli lepšímu zobrazení ostatních částí modelu, ve skutečnosti jsou segmenty samozřejmě po celém obvodu vsázky.

Po provedení několika variant výpočtů pro celý 3D model jsem došel k závěru, že „dokonalé“ vymeshování vede k vysokému počtu elementů, někdy i v řádu desítek miliónů. Rozhodl jsem se proto namodelovat pouze část modelu, která je symetrická kolem osy z. Konkrétně pro náš model bude tato symetrická pouze čtvrtina modelu. Výřez z prostředí ANSYS Maxwell vidíme na obrázku 6.2.2



Obr. 6.2.2: Výřez studeného kelímku

Pokud tedy budeme například chtít spočítat Jouleovy ztráty v celém modelu, je zapotřebí čtyřikrát vynásobit ztráty, které spočítá ANSYS Maxwell.

Zároveň bylo nutné aplikovat na okraje výřezu modelu okrajovou podmínku „Symmetry Odd“, jak je vidět na obrázku 6.2.2. Takto program značí podmínku antisymetrie. Díky této podmínce ANSYS Maxwell ví, že ve skutečnosti materiál tímto rozhraním nekončí a proudová hustota bude z těchto rozhraní vystupovat (a z druhé strany do nich vstupovat), jako by dále pokračoval vodivý materiál.

6.3 Výsledky simulace

6.3.1 Porovnání různých frekvencí napájecího proudu

Model byl vypočítán nejdříve pro tavicí frekvenci rovnající se rezonanční frekvenci spočítané v kapitole 4.1. Následně byl model přepočítán pro maximální a minimální frekvenci frekvenčního rozsahu zdroje, tedy 1,5 MHz a 2 MHz. Při této maximální a minimální frekvenci, kdy oscilační obvod nebude v rezonanci, je ale nutné brát v úvahu, že zdroj bude muset dodávat do obvodu mnohem větší proud a bude docházet k většímu zatěžování polovodičových součástek, nebo zdroj vůbec nebude schopen takový proud do obvodu při daném napětí dodat. Pro tyto frekvence by tedy bylo vhodné změnit konfiguraci oscilačního obvodu, například výměnou kondenzátorů za kondenzátory s jinými hodnotami kapacit. Proud dodaný zdrojem při použití jiných frekvencí, než rezonančních, byl spočítán způsobem, jaký byl naznačen v kapitole 4.1.

Účinnost zařízení chápeme jako podíl Jouleových ztrát ve vsázce, ku Jouleovým ztrátám ve všech konstrukčních částech modelu. Index „1“ značí induktor, „2“ značí vsázku, „3“ značí chladicí segmenty a „4“ značí dno. Jedná se tedy o konstrukční účinnost. Pro vyjádření účinnosti v procentech celý výraz vynásobíme stem:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4} \cdot 100 \quad (6.3.1.1)$$

Porovnání výsledků při různých tavicích frekvencích, velikost naindukovaných proudů ve vsázce a ztráty ve watttech jsou vidět v tabulce 6.3.1.1.

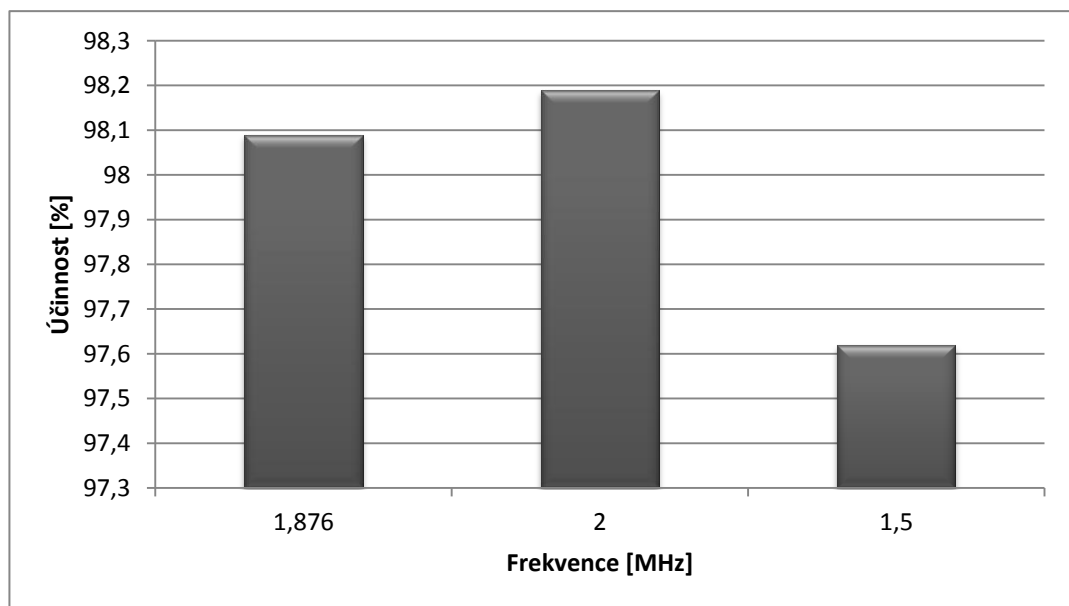
Tabulka 6.3.1.1: Výsledky numerického modelu

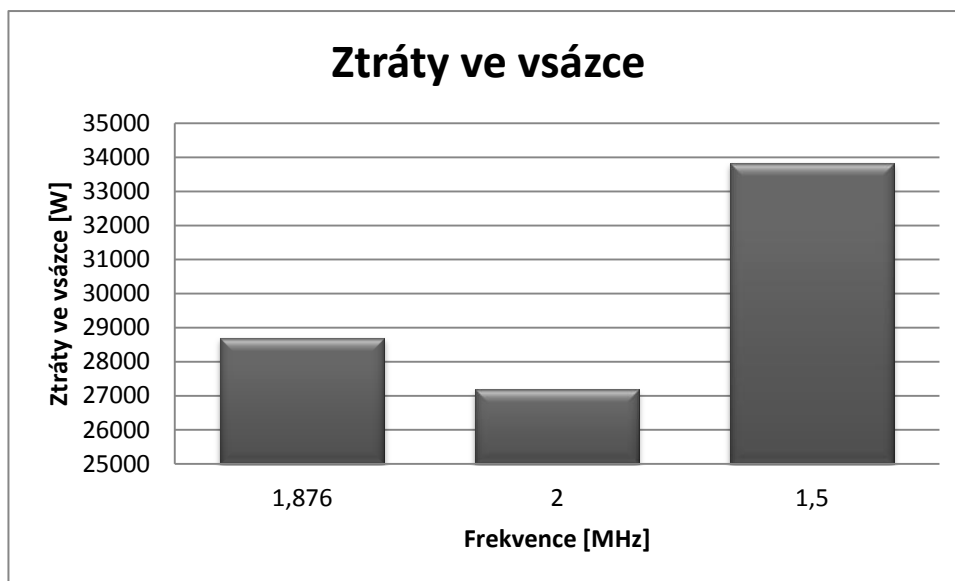
Tavicí frekvence [MHz]	1,88	2,00	1,50
Napětí zdroje [V]	2800,00	2800,00	2800,00
Parametr x_2 [-]	3,22	3,33	2,88
Proud dodaný zdrojem [A]	0,00	16,96	59,49
Proud cívkou I_1 [A]	645,00	525,00	700,00
Indukovaný proud ve vsázce I_2 [A]	244,71	245,90	246,04
Ztráty ve vsázce [W]	28705,08	27193,88	33839,36
Celkové ztráty [W]	29263,80	27694,28	34664,92
Účinnost [%]	98,09	98,19	97,62

Tavení probíhá při výstupním napětí zdroje 2800 V. Z tabulky je vidět, že pro tavicí frekvenci 1,5 MHz by musel zdroj do obvodu dodávat 59,49 A, a to neuvažujeme činné odpory obvodu, tudíž by tento proud reálně byl ještě vyšší. Při tomto proudu by již zdroj kvůli výkonovému omezení 160 kW nedokázal udržet požadované napětí obvodu a vypočítaný proud napájecí cívkou by 700 A jistě nedosáhl, této konfigurace tedy v reálu jistě nebude možné dosáhnout. Konfigurace, kdy by byla frekvence napájecího proudu 2 MHz, by nejspíš dosáhnout možné bylo, nicméně proud napájecí cívkou je nižší, než při rezonanční frekvenci, což má za následek i menší ztráty ve vsázce a tavení bude pomalejší. Nejlepší konfigurace se tedy dosáhne použitím frekvence napájecího proudu rovnající se rezonanční frekvenci.

Grafické porovnání účinností a ztrát ve vsázce pro jednotlivé tavicí frekvence je pak vidět v grafech 6.3.1.1. a 6.3.1.2.

Graf 6.3.1.1: Konstrukční účinnost indukčního ohřevu



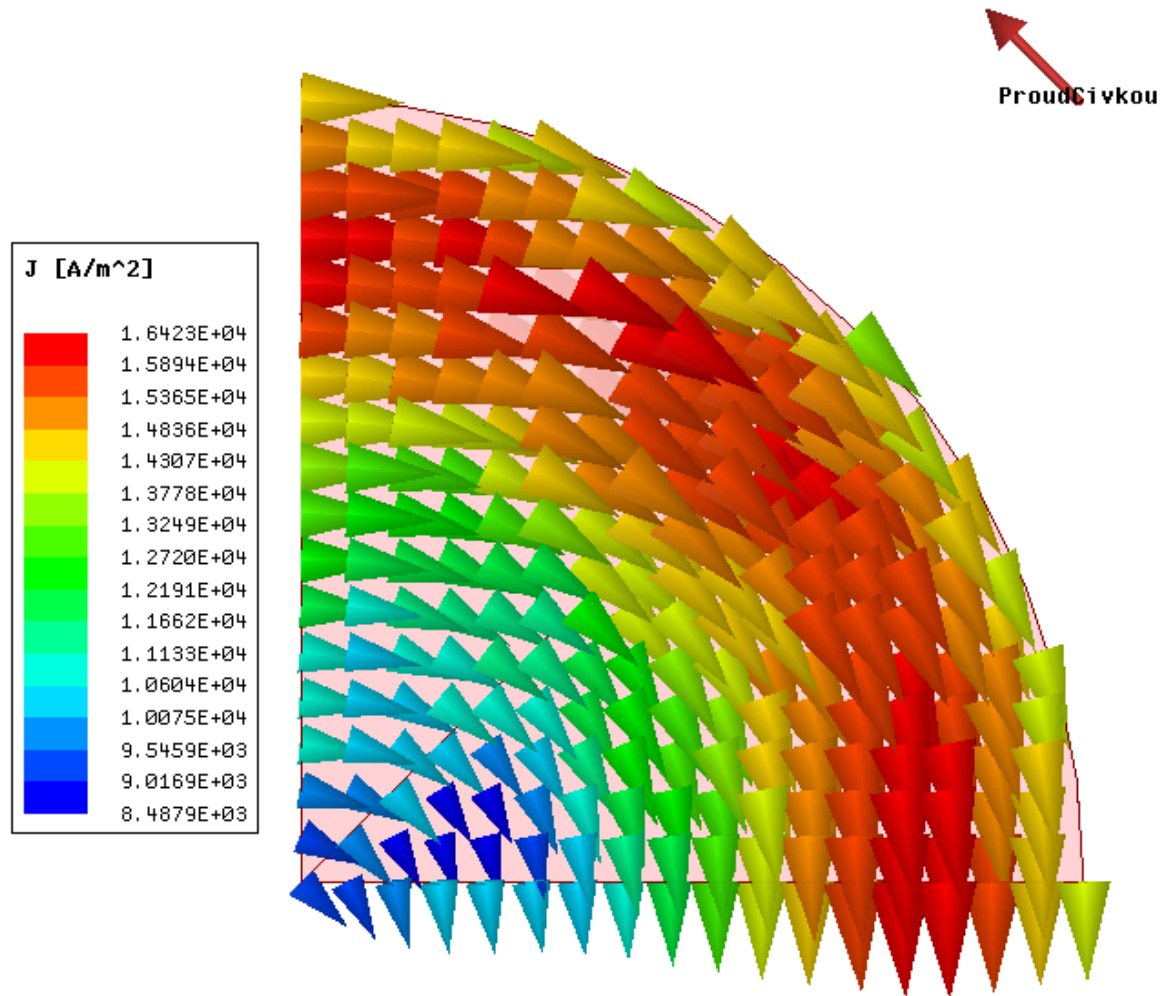
Graf 6.3.1.2: Ztráty ve vsázce

Z grafů 6.3.1.1 a 6.3.1.2 je patrný vliv tavicí frekvence na účinnost ohřevu i celkové ztráty vířivými proudy ve vsázce. Vyšší frekvence, tedy zároveň vyšší parametr x_2 má za následek lepší účinnost ohřevu, jelikož se ve vsázce více tlumí intenzita magnetického pole.

Z hlediska množství ztrát ve vsázce se nejlépe jeví případ, kdy byla frekvence napájecího proudu 1,5 MHz, jelikož tento proud by byl co do velikosti z porovnávaných situací nejvyšší, nicméně jak již bylo zmíněno, tohoto proudu bychom nedosáhli, tudíž tento případ nelze objektivně s ostatními případy porovnávat.

6.3.2 Grafické výstupy modelu při rezonanční frekvenci napájecího proudu

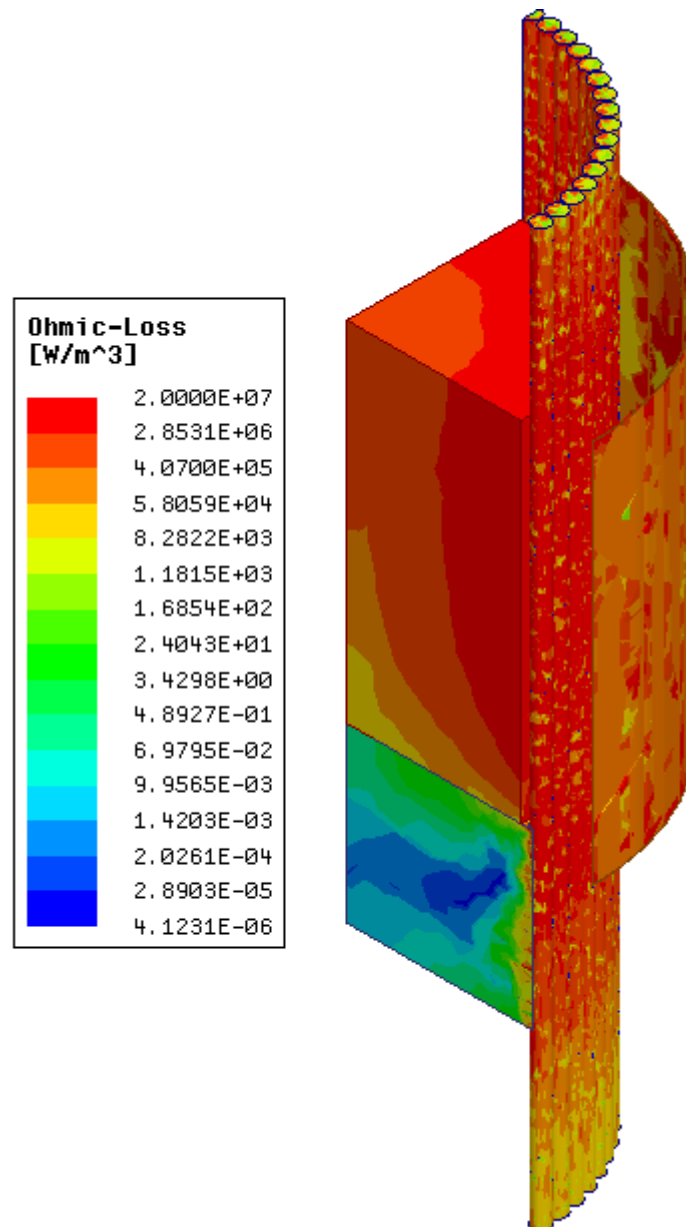
Na následujících obrázcích jsou znázorněna rozložení proudových hustot, Jouleových ztrát a intenzity elektromagnetického pole ve studeném kelímku napájeném proudem o amplitudě 215 A, při respektování, že cívka reálně má tři závity, je pak tato amplituda 645 Ampérvávitů. Frekvence napájecího proudu je rovna rezonanční frekvenci oscilačního obvodu, tedy 1,876 MHz.



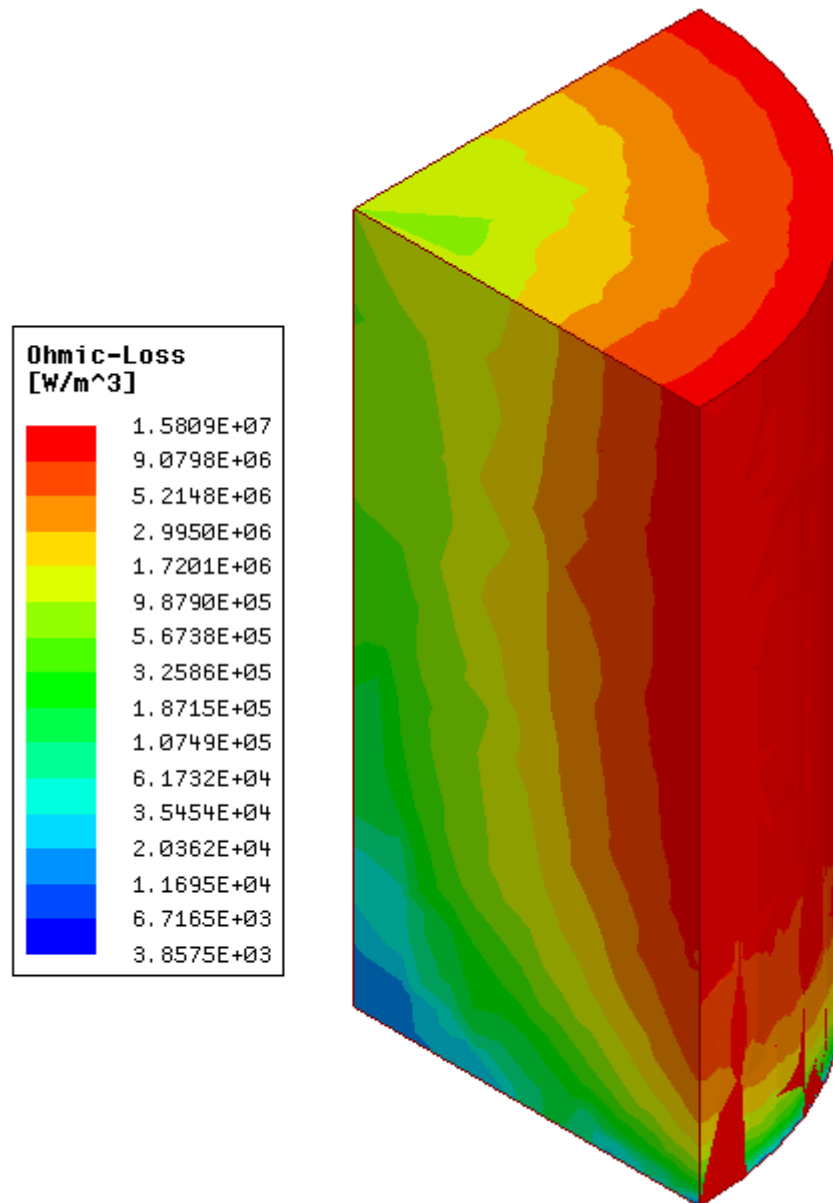
Obr. 6.3.2.1: Rozložení naindukované proudové hustoty ve vsázce

Na obrázku 6.3.2.1 vidíme rozložení proudové hustoty ve vsázce. Z obrázku je vidět, že proudová hustota na povrchu je nižší, směrem ke středu stoupá a poté opět klesá, svého minima dosahuje ve středu vsázky. V běžné indukční kelímkové peci by měla být proudová hustota nejvyšší na povrchu vsázky, zde ovšem tuto proudovou hustotu na povrchu snižuje proud indukovaný do chladících segmentů, který teče opačným směrem. Vektor „ProudCivkou“ na obrázku neznačí velikost proudu cívkou, ale pouze jeho směr. Tímto způsobem je v programu ANSYS Maxwell zobrazena počáteční podmínka proudu cívkou a na tomto obrázku je tento směr uveden pouze jako demonstrace faktu, že naindukovaná proudová hustota ve vsázce má opačný směr, než má proud vložený do cívky.

Na obrázku 6.3.2.2 je vidět rozložení Jouleových ztrát v celém modelu, na obrázku 6.3.2.3 pak vidíme detail rozložení ztrát ve vsázce. Z obrázků je patrný vliv vodivého dna na celkové rozložení Jouleových ztrát ve vsázce, které jsou kvůli tomuto dnu nerovnoměrně rozloženy v celém objemu vsázky.



Obr. 6.3.2.2: Jouleovy ztráty v celém modelu

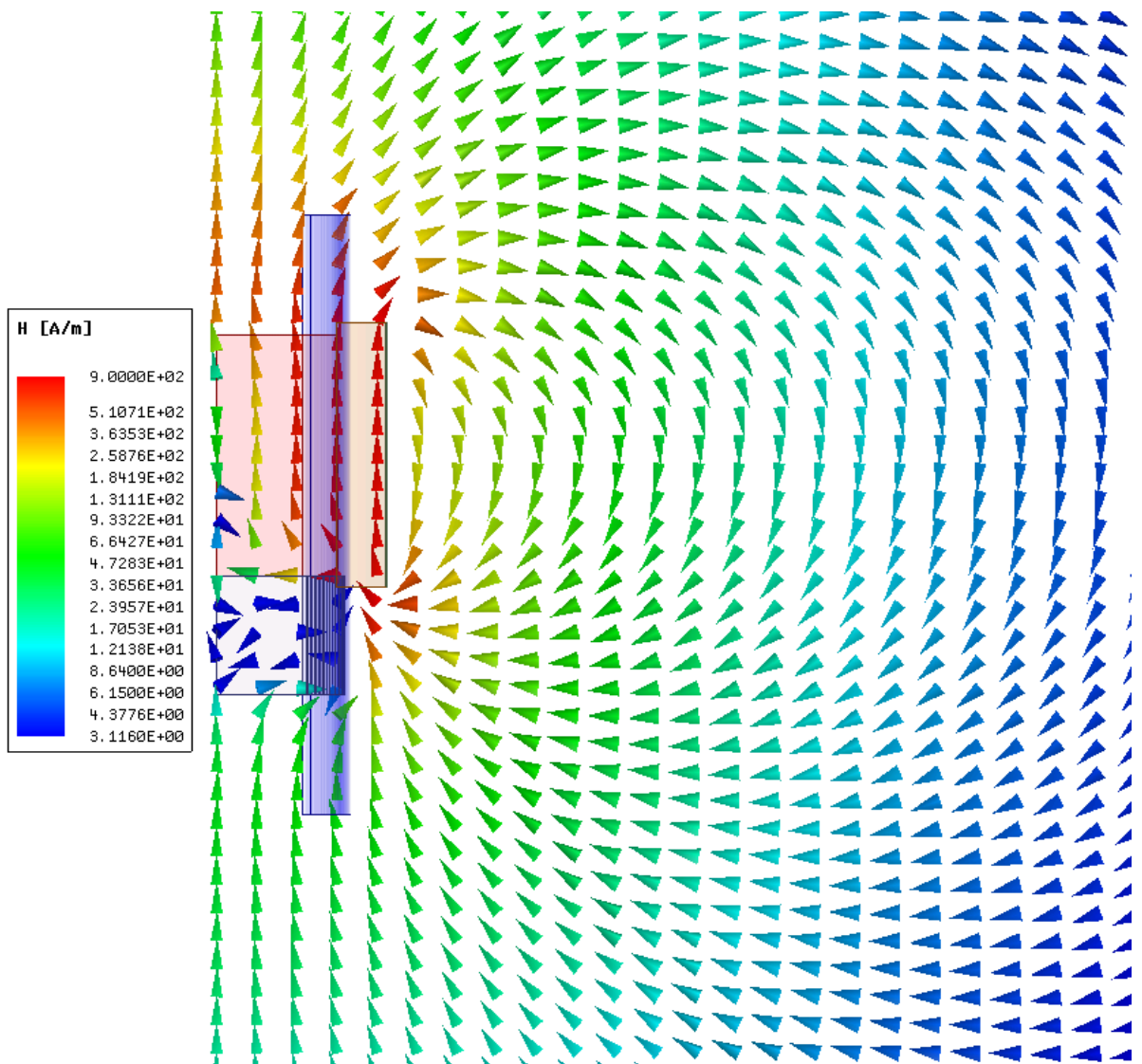


Obr. 6.3.2.3: Jouleovy ztráty ve vsázce

Z obrázku 6.3.2.3 je vidět, že největší Jouleovy ztráty vznikají blíže povrchu vsázky. Čím více se vzdalujeme směrem od povrchu ke středu vsázky, tím jsou tyto ztráty nižší. Dále je patrný vliv vodivého dna. Ve spodní části vsázky vznikají mnohem nižší Jouleovy ztráty, než v její horní části.

Na obrázku 6.3.2.4 jsou znázorněny vektory intenzity elektromagnetického pole v rovině protínající model v jeho polovině. Kvůli nepoměru velikosti okolí, které má velikost 2 metry do všech směrů, je na obrázku pouze část modelu, která detailněji zachycuje studený kelímek.

Z obrázku je patrné, jak se intenzita magnetického pole ve vsázce postupně tlumí. Na jejím povrchu je vstupující intenzita největší, směrem ke středu tato intenzita klesá. Uprostřed vsázky dokonce dochází k otočení jejího směru, což může být způsobeno intenzitou H_2 , která je zpětně vyvolána vířivými proudy ve vsázce. Ve spodní části vsázky je ještě jednou vidět vliv dna na celé rozložení intenzity magnetického pole.



Obr. 6.3.2.4: Vektory intenzity magnetického pole

7 Závěr:

Cílem první, teoretičtější, části práce bylo popsat problematiku šíření tepla, rozvést potřebnou teorii pro řešení elektromagnetického pole a objasnit problematiku týkající se segmentových studených kelímků. Tuto problematiku, kde byly vysvětleny jednotlivé způsoby sdílení tepla, okrajové podmínky a podmínky na rozhraní pro tepelné i magnetické pole, nebo kde byly odvozeny vlnové rovnice a rovnice pro magnetický vektorový potenciál, řeší kapitoly č. 1 a 2 obsažené v této práci, problematika segmentových studených kelímků je pak řešena v kapitole č. 3.

Následující kapitoly č. 4, 5 a 6 se pak zabývají praktickou částí této práce, a sice návrhem a následným numerickým modelem studeného kelímku.

V práci byl navržen studený kelímek pro tavení oxidu hlinitého Al_2O_3 . Výchozími parametry k určení rozměrů byl potřebný tepelný tok k roztavení tohoto oxidu a výkon zdroje, který celé zařízení napájí. K určení amplitudy a frekvence proudu, který bude protékat cívkou, která studený kelímek napájí, byly výchozími parametry velikost kapacit oscilačního obvodu, přes který je cívka studeného kelímku připojena ke zdroji a indukčnost samotné cívky při tavení vsázky z materiálu Al_2O_3 . Tyto parametry byly získány z technické dokumentace studeného kelímku, který se v současnosti uvádí do provozu ve vědeckotechnickém parku v Plzni.

Navržený studený kelímek byl namodelován pro celkem tři konfigurace napájení, kdy se lišila jak napájecí frekvence proudů, tak velikosti těchto napájecích proudů. Při numerických výpočtech jednotlivých konfigurací byl zjištěn fakt, že z důvodu ať již realizovatelnosti, nebo účinnosti indukčního ohřevu je nejlepší napájecí frekvence rovnající se rezonanční frekvenci oscilačního obvodu. Pokud by bylo možné měnit velikosti kapacit kondenzátorů v oscilačním obvodu a měnit tak jeho rezonanční frekvenci, bylo by možné docílit vyššího proudu cívkou při horní hranici frekvence zdroje, tedy při 2 MHz. Vyšší frekvence by znamenala vyšší parametr x_2 , tím pádem by se jistě docílilo vyšších Jouleových ztrát ve vsázce a tavení by bylo rychlejší.

Z důvodu, že nejlepších parametrů se dosáhlo při frekvenci rovnající se rezonanční frekvenci oscilačního obvodu, odpovídají pak i grafické výstupy modelu, kde tavení probíhalo právě při této rezonanční frekvenci o velikosti 1,876 MHz. Grafické výstupy jsou konkrétně rozložení proudové hustoty naindukované do vsázky, rozložení Jouleových ztrát v modelu a rozložení intenzity magnetického pole.

Vysoká účinnost ohřevu, která je brána jakožto podíl ztrát ve vsázce ku celkovým ztrátám je jednak zapříčiněna faktem, že vsázka má o několik řádů nižší vodivost, tudíž ztráty v ní jsou majoritní a jednak faktem, že navržený studený kelímek má ideální rozměry, kterých v reálných podmínkách s největší pravděpodobností nebude možné dosáhnout. Jedná se hlavně o velikost induktoru, který je v reálu dutý vodič protékaný vodou se třemi závity. V modelu byl induktor nahrazen jedním prstencem, který byl o 10 % vyšší, než byla výška vsázky. Velikost induktoru a její vliv na účinnost zařízení by mohla být v budoucnu zkoumána blíže. Stejně tak poměr průměru ku výšce vsázky by mohl mít na funkci a účinnost zařízení velký vliv.

Použitá literatura

- [1] Langer, E.: Elektrotepelná technika, část I+II; VŠSE, vydání II., Plzeň, Listopad 1974.
- [2] RADA, Josef. Elektrotepelná technika. 1. vyd. Praha: SNTL, 1985. 344 s.
- [3] MATOUŠEK, Martin. Možnosti uplatnění studeného kelímku při ohřevu kovů. Plzeň: Západočeská Univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická, 2015. Vedoucí diplomové práce Ing. David Rot, Ph.D.
- [4] DOLEJŠ, Roman. Možnosti spouštění procesu tavby ve studeném kelímku. Plzeň: Západočeská Univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická, 2011. Vedoucí diplomové práce Ing. David Rot, Ph.D.
- [5] Šíření tepla prouděním. WIKIPEDIA. [online]. [cit. 2. 11. 2015]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%A0%C3%AD%C5%99en%C3%AD_teplo_proud%C4%9Bn%C3%ADm
- [6] Polarizace světla. [online]. [cit. 15. 11. 2015]. Dostupné z: <http://polar-peza.euweb.cz/svetlo.html#odraz>
- [7] Planckův vyzařovací zákon. WIKIPEDIA. [online]. [cit. 15. 11. 2015]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Planck%C5%AFv_vyza%C5%99ovac%C3%AD_z%C3%A1kon
- [8] Wienův posunovací zákon. WIKIPEDIA. [online]. [cit. 16. 11. 2015]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Wien%C5%AFv_posunovac%C3%AD_z%C3%A1kon
- [9] Termomechanika. [online]. [cit. 16. 11. 2015]. Dostupné z: http://otpp.fme.vutbr.cz/~pavelek/termo/19_Zareni.pdf
- [10] KUNC, Marek. Průmyslové využití ohřevů elektromagnetickou indukcí. Plzeň: Západočeská Univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická, 2014. Vedoucí diplomové práce Prof. Ing. Jiří Kožený, CSc.
- [11] JIŘINEC, S.: Přenos elektrické energie do vsázky při tavení ve studeném kelímku
- [12] Kožený, J., Poznyak, I., Rot D., Jirinec, S., Kresina, M.: Influence of the segments shape to cold crucible power losses
- [13] POZNYAK, I. *Induction melting in cold crucible*. (přednáška). Plzeň: ZČU Plzeň
- [14] INDUKTIO: Induction system with the cold crucible for melting metal oxides. Ljubljana, 2015
- [15] Školení ANSYS Maxwell: Přednášky. Na Pankráci 26, Praha 4, 2015.
- [16] Rot, D.: Efektivní řešení sdružených problémů v elektrotepelné technice. Plzeň: Západočeská Univerzita Plzeň, 2005.