



Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta Aplikovaných věd

Katedra mechaniky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Alternativní přístup k posouzení stability
a existence periodického řešení
parametrických kmitavých systémů**

Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto diplomovou práci. Prohlašuji, že jsem ji vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne

.....

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat mému vedoucímu diplomové práce Prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi za jeho cenné rady, konzultace a hlavně za trpělivost, díky kterým tato práce vznikla. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině za dlouhodobou podporu nejen při studiu, ale v celém životě.

Abstrakt

Tato práce se zabývá alternativním přístupem k posouzení stability a existenci řešení parametrických kmitajících systémů s jedním i více stupni volnosti. Pro případ systému s jedním stupněm volnosti uvažujeme kmitající systém s periodicky proměnnou hmotností, tlumením, tuhostí a budící silou. Nicméně hlavním cílem práce je aplikace zmíněného alternativního postupu na model rotoru s rotačně nesymetrickým průřezem. Matematický model rotoru sestavíme pomocí energetického přístupu při využití Lagrangeových rovnic a metody konečných prvků (MKP). Zmíněné konečné prvky budeme uvažovat jako 1D elementy reprezentující osu rotace rotoru. Tento matematický model rotoru s nesymetrickým průřezem je popsán časově periodicky proměnnými maticemi, které rozvineme do Fourierových řad. Hlavní myšlenkou alternativního přístupu je převod diferenciální rovnice, tj. matematického modelu rotoru, na integro- diferenciální rovnici s degenerovaným jádrem pomocí tzv. periodické Greenovy funkce (PGF), kterou definujeme jako výchozí bod pro hledání periodického řešení zmíněného matematického modelu. PGF lze chápat jako odezvu systému na buzení ve tvaru Diracova hřebene. Existenci analytického periodického řešení lze ověřit pomocí Rungeovy- Kuttovy metody. Jestliže existuje řešení, tak se výsledky analytického řešení shodují s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody. Dalším úkolem této práce je posuzování stability rotorového systému, které je založeno na určení znaménka reálné hodnoty determinantu systémové matice. Tento nový postup řešení je ověřen pomocí metody využívající Floquetovou teorii.

Klíčová slova: kmitání, rotorové systémy, MKP, matematický model, integro-diferenciální rovnice, periodické řešení, stabilita, Floquetova teorie

Abstract

This thesis deals with the alternative approach to stability assessment and the existence of periodic solution of one-degree-of-freedom or multiple-degrees-of-freedom parametric vibrating systems. In the case of one-degree-of-freedom system we consider vibrating system with periodically variable mass, damping, stiffness and exciting force. However, the main goal of this thesis is application of the mentioned alternative approach to model of rotor system with rotationally non-symmetrical cross-section. The energetic approach is used to obtain mathematical model of rotor system by using Lagrange equations and finite element method (FEM). The rotor is modelled as 1D continuum using 1D elements, which are representing the axis of rotation of the rotor. The mathematical model of rotor system with non-symmetrical cross-section is described by periodically variable matrices, which are decomposed into the Fourier series. The main idea of the alternative approach is transformation of differential equation, ie. mathematical model of rotor system, into integro-differential equation with degenerated kernel by using periodical Green's function (PGF), which is a response of the system to excitation in the form of the Dirac chain. The PGF is used as a starting point of searching the periodical solution of the mentioned mathematical model. The existence of the analytical periodical solution can be verified by using the Runge-Kutta method. If the solution exists, the results of this solution correspond with the steady state obtained by the Runge-Kutta method. Another goal of this study is the stability assessment of the rotor system, which is based on identification of the sign of the real value of the determinant of the system matrix. This new procedure of solution is validated by method using Floquet theory.

Keywords: vibration, rotor systems, FEM, mathematical model, integro-differential equation, periodic solution, stability, Floquet theory

Obsah

Úvod	7	
1	Systém s 1 stupněm volnosti s periodicky proměnnou hmotností, tlumením, tuhostí a budící silou	8
1.1	Analytické periodické řešení systému	8
1.2	Numerické řešení odezvy systému	18
1.3	Nová metoda posouzení stability systému a určení hranic stability	20
1.4	Floquetova teorie [2]	26
1.5	Aplikace teorie na testovacím příkladě	30
2	Rotor s rotačně nesymetrickým průřezem	36
2.1	Modelování rotoru jako 1D kontinuum	36
2.1.1	Diskretizace rotorových systémů	36
2.1.2	Aproximační funkce	37
2.1.3	Odvození matic rotorového prvku a sestavení pohybové rovnice rotorového prvku	42
2.1.4	Model rotoru s rotačně nesymetrickým průřezem	52
2.2	Analytické periodické řešení systému	54
2.3	Numerické řešení odezvy systému	70
2.4	Nová metoda posouzení stability systému a určení hranic stability	71
2.5	Aplikace teorie na testovacím příkladě	76
Závěr	83	
Použitá literatura	85	

Úvod

Předkládaná diplomová práce navazuje na zkoumanou problematiku předchozí bakalářské práce autora [2], která se zabývala řešením ustáleného stavu a posuzováním stability parametrického systému s 1 stupněm volnosti s periodicky proměnnou tuhostí a budící silou.

V první části této práce rozšíříme zkoumaný parametrický systém s 1 stupněm volnosti s periodicky proměnnou tuhostí a budící silou o periodicky proměnnou hmotnost a tlumení. Pro takto rozšířený parametrický systém nejdříve popíšeme metodu pro získání analytického periodického řešení. Tato úloha vede na řešení integro- diferenciální rovnice s degenerovaným jádrem, které je založeno na tzv. periodické Greenově funkci. Existence analytického řešení bude ověřena pomocí Rungeovy- Kuttovy metody, kdy při existenci řešení by mělo dojít ke shodě výsledků analytického periodického řešení s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody. Dále bude prezentována nová metoda pro posouzení stability systému a určení hranic stability. Se zmíněným posuzováním stability úzce souvisí již zmíněná existence či neexistence analytického periodického řešení systému, jak bude ukázáno na testovacím příkladě na systému s 1 stupněm volnosti. Stanovení hranic stability bude ověřeno metodou využívající Floquetovu teorii.

Ve druhé části práce přeneseme problematiku ze systémů s jedním stupněm volnosti na systémy s více stupni volnosti, konkrétně se zaměříme na modelování rotoru s rotačně nesymetrickým průřezem pomocí metody konečných prvků. Zmíněné rotory jsou využívány například v dvoupólových generátorech nebo u rotorů helikoptér v leteckém průmyslu. Po určení aproximačních funkcí rotorového prvku stanovíme kinetickou a potenciální energii elementu, a poté aplikací Lagrangeových rovnic a metody konečných prvků získáme matematický model rotoru. Tento matematický model rotoru s rotačně nesymetrickým průřezem je popsán časově periodicky proměnnými maticemi, které je nutné rozvinout do Fourierových řad, jelikož hledání analytického periodického řešení a nová metoda posuzování stability systému vychází z vyjádření periodicky proměnných matic ve formě Fourierovy řady. Tzv. periodickou Greenovu funkci definujeme jako výchozí bod pro hledání periodického řešení zmíněného matematického modelu. Tato funkce umožňuje převést diferenciální rovnici na integro- diferenciální rovnici s degenerovaným jádrem.

Hlavním cílem předkládané práce je určení a ověření existence analytického periodického řešení a posouzení stability parametrického rotorového systému s rotačně nesymetrickým průřezem. Tento alternativní přístup je ověřen na testovacím příkladě, kde stanovení hranic stability systému je porovnáno s metodou založenou na Floquetově teorii a existence analytického řešení je ověřena pomocí Rungeovy- Kuttovy metody.

Numerické výpočty jsou provedeny v interaktivním prostředí MATLAB.

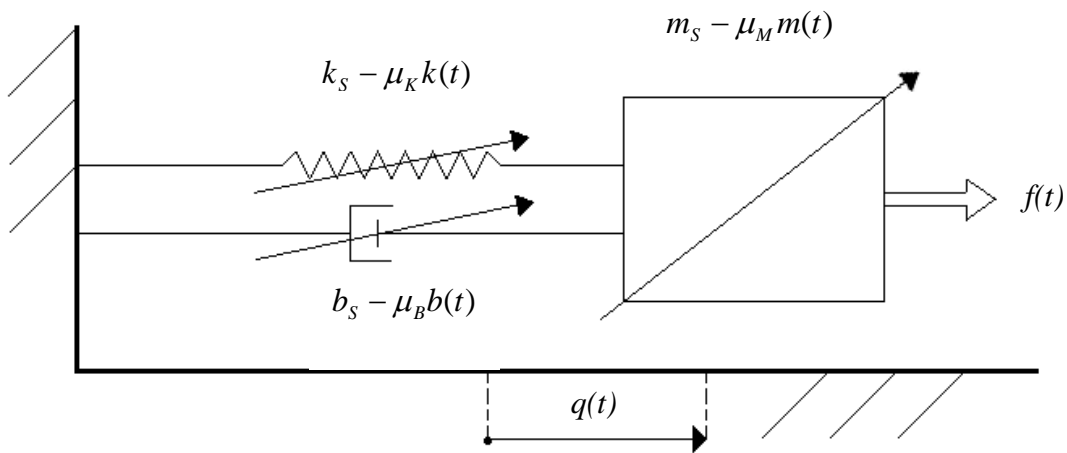
1 Systém s 1 stupněm volnosti s periodicky proměnnou hmotností, tlumením, tuhostí a budící silou

1.1 Analytické periodické řešení systému

Předpokládejme, že chování parametrického systému je popsáno pohybovou rovnicí [1]

$$[m_s - \mu_M m(t)]\ddot{q}(t) + [b_s - \mu_B b(t)]\dot{q}(t) + [k_s - \mu_K k(t)]q(t) = f(t), \quad (1.1.1)$$

kde m_s vyjadřuje stacionární hmotnost, b_s je stacionární tlumení a k_s značí stacionární tuhost. Časové proměnné $\mu_M m(t)$, $\mu_B b(t)$ a $\mu_K k(t)$ odpovídají parametrickému buzení. μ_M, μ_B, μ_K jsou míry modulace hmotnosti, tlumení a tuhosti, vyjadřující intenzitu parametrického buzení, $q(t)$ je zobecněné posunutí a $f(t)$ značí zobecněné buzení.



Obr. 1.1 – Parametrický systém s 1 stupněm volnosti

Díky T -periodicitě časově proměnných funkcí $m(t)$, $b(t)$, $k(t)$ a $f(t)$ můžeme předpokládat i periodicitu odezvy systému $q(t)$ s periodou T . Všechny tyto funkce musí splňovat podmínky periodicity a lze je zapsat ve formě Fourierovy řady

$$m(t) = m(t+T) = \sum_{j=-N}^N m_j e_j(t) = \mathbf{m}^T \mathbf{e}(t), \quad (1.1.2)$$

$$b(t) = b(t+T) = \sum_{j=-N}^N b_j e_j(t) = \mathbf{b}^T \mathbf{e}(t), \quad (1.1.3)$$

$$k(t) = k(t+T) = \sum_{j=-N}^N k_j e_j(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{e}(t), \quad (1.1.4)$$

$$f(t) = f(t+T) = \sum_{j=-N}^N f_j e_j(t) = \mathbf{f}^T \mathbf{e}(t), \quad (1.1.5)$$

$$q(t) = q(t+T), \quad (1.1.6)$$

kde vektor $\mathbf{e}(t)$ je tvořen těmito prvky

$$\mathbf{e}(t) = [e_{-N}(t) \quad \dots \quad e_{-1}(t) \quad 1 \quad e_1(t) \quad \dots \quad e_N(t)]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1} \quad (1.1.7)$$

a s ohledem na zavedený zkrácený zápis

$$e_j(t) = e^{ij\omega t}, \quad (1.1.8)$$

dále definujeme i jako imaginární jednotku, j značí index členu řady, N odpovídá celkovému počtu členů řady a ω vyjadřuje základní úhlovou frekvenci, pro kterou platí vztah

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.1.9)$$

Ve vztazích (1.1.2) – (1.1.5) jsme zavedli vektory s Fourierovými koeficienty

$$\mathbf{m} = [m_{-N} \quad \dots \quad m_0 \quad \dots \quad m_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}, \quad (1.1.10)$$

$$\mathbf{b} = [b_{-N} \quad \dots \quad b_0 \quad \dots \quad b_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}, \quad (1.1.11)$$

$$\mathbf{k} = [k_{-N} \quad \dots \quad k_0 \quad \dots \quad k_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}, \quad (1.1.12)$$

$$\mathbf{f} = [f_{-N} \quad \dots \quad f_0 \quad \dots \quad f_N]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}. \quad (1.1.13)$$

Pro další postup je nutné předpokládat existenci T -periodického řešení, tj. neznámé výchylky $q(t)$ jsou řešením výše zmíněné pohybové rovnice (1.1.1) a po převedení časově proměnných členů na pravou stranu rovnice získáme

$$m_S \ddot{q}(t) + b_S \dot{q}(t) + k_S q(t) = f(t) + \mu_M m(t) \ddot{q}(t) + \mu_B b(t) \dot{q}(t) + \mu_K k(t) q(t). \quad (1.1.14)$$

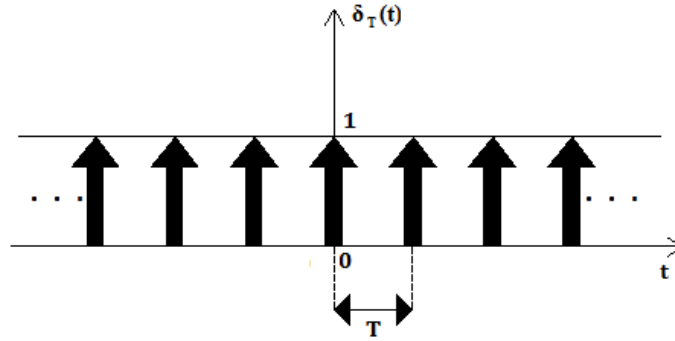
Protože chceme určit periodické řešení, tj. ustálenou odezvu systému, hledáme partikulární řešení rovnice (1.1.1) a neuvažujeme tedy homogenní část řešení, přesněji přechodovou fázi kmitů.

Obdobně, jako byla použita periodická Greenova funkce $H(t)$ (dále PGF, viz níže) v [4], tak ji také definujeme jako výchozí bod pro hledání periodického řešení zmíněné pohybové rovnice. PGF lze chápat jako odezvu stacionární části rovnice (1.1.14) na Diracův hřeben jednotkových impulsů opakujících se s periodou T , která odpovídá nejnižší periodě parametrů systému a buzení. Diracův hřeben je vykreslen na obr. 1.2 a lze jej vyjádřit pomocí Fourierovy řady

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N e^{ij\omega t} = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N [\cos(j\omega t) + i \sin(j\omega t)], \quad (1.1.15)$$

a jelikož Diracův hřeben je sudá funkce dle [3], tj. sinové členy jsou nulové, poté s ohledem na (1.1.8) lze psát

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N \cos(j\omega t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N e_j(t). \quad (1.1.16)$$



Obr. 1.2 – Diracův hřeben jednotkových impulsů opakujících se s periodou T [2]

Tato periodická odezva odpovídá partikulárnímu řešení stacionární části rovnice (1.1.14)

$$m_S \ddot{H}(t) + b_S \dot{H}(t) + k_S H(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N e_j(t). \quad (1.1.17)$$

Vzhledem k tomu, že systém je lineární, tak lze využít principu superpozice a PGF lze vyjádřit následovně

$$H(t) = \sum_{j=-N}^N H_j(t), \quad (1.1.18)$$

kde H_j je odezva v ustáleném stavu odpovídající j -té harmonické, a proto lze řešení rozdělit na řešení systému nezávislých rovnic

$$m_S \ddot{H}_j(t) + b_S \dot{H}_j(t) + k_S H_j(t) = \delta_T(t) = \frac{1}{T} e_j(t). \quad (1.1.19)$$

Partikulární řešení odpovídající j -té harmonické odhadneme ve tvaru

$$H_j(t) = \hat{H}_j e_j(t) = \hat{H}_j e^{ij\omega t}, \quad (1.1.20)$$

kde \hat{H}_j je amplituda, a derivace (1.1.20) jsou

$$\dot{H}_j(t) = ij\omega \hat{H}_j e^{ij\omega t}, \quad (1.1.21)$$

$$\ddot{H}_j(t) = -j^2 \omega^2 \hat{H}_j e^{ij\omega t}. \quad (1.1.22)$$

Po dosazení odhadu partikulárního řešení a jeho derivací (1.1.20) – (1.1.22) získáme komplexní amplitudu odezvy na j -tou harmonickou složku buzení ve tvaru

$$H_j(t) = \frac{1}{T} L_j e_j(t), \quad (1.1.23)$$

kde L_j označuje dynamickou poddajnost odpovídající j -té harmonické

$$L_j = \left(-j^2 \omega^2 m_s + ij \omega b_s + k_s \right)^{-1}. \quad (1.1.24)$$

PGF je poté dána jako suma

$$H(t) = \sum_{j=-N}^N H_j(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N L_j e_j(t). \quad (1.1.25)$$

Celkovou odezvu systému (1.1.14) na vnější parametrické buzení lze vyjádřit ve formě konvolučního integrálu

$$\begin{aligned} q(t) = & \int_0^T H(t-s) f(s) ds + \mu_M \int_0^T H(t-s) m(s) \ddot{q}(s) ds + \\ & + \mu_B \int_0^T H(t-s) b(s) \dot{q}(s) ds + \mu_K \int_0^T H(t-s) k(s) q(s) ds, \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

kde PGF v čase $(t-s)$ má tvar

$$H(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N L_j e_j(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N L_j e_j(t) e_j(-s) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N L_j e_j(t) e_{-j}(s). \quad (1.1.27)$$

Nyní s ohledem na Fourierovy řady (1.1.10) – (1.1.13) a na (1.1.27) můžeme zapsat celkovou odezvu systému (1.1.26) následovně

$$\begin{aligned} q(t) = & \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N L_j e_j(t) e_{-j}(s) \sum_{k=-N}^N f_k e_k(s) ds + \frac{\mu_M}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N L_j e_j(t) e_{-j}(s) \sum_{k=-N}^N m_k e_k(s) \ddot{q}(s) ds + \\ & + \frac{\mu_B}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N L_j e_j(t) e_{-j}(s) \sum_{k=-N}^N b_k e_k(s) \dot{q}(s) ds + \frac{\mu_K}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N L_j e_j(t) e_{-j}(s) \sum_{k=-N}^N k_k e_k(s) q(s) ds. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Při použití vztahu

$$e_k(s) e_{-j}(s) = e_{k-j}(s), \quad (1.1.29)$$

lze rovnici (1.1.28) přepsat

$$\begin{aligned}
 q(t) = & \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N L_j f_k e_j(t) \int_0^T e_{k-j}(s) ds + \frac{\mu_M}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N L_j m_k e_j(t) e_{k-j}(s) \ddot{q}(s) ds + \\
 & + \frac{\mu_B}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N L_j b_k e_j(t) e_{k-j}(s) \dot{q}(s) ds + \frac{\mu_K}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N L_j k_k e_j(t) e_{k-j}(s) q(s) ds.
 \end{aligned} \tag{1.1.30}$$

Tento vztah reprezentuje integro-diferenciální rovnici s degenerovaným jádrem pro funkci $q(t)$. Zavedeme-li matice $\mathbf{A}_{j,k}^M, \mathbf{A}_{j,k}^B, \mathbf{A}_{j,k}^K \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}$

$$\mathbf{A}_{j,k}^M = \begin{cases} L_j m_{k+j} & \text{pro } k+j \in \langle -N, -N+1, \dots, N \rangle, \\ 0 & \text{pro } k+j \notin \langle -N, -N+1, \dots, N \rangle, \end{cases} \tag{1.1.31}$$

$$\mathbf{A}_{j,k}^B = \begin{cases} L_j b_{k+j} & \text{pro } k+j \in \langle -N, -N+1, \dots, N \rangle, \\ 0 & \text{pro } k+j \notin \langle -N, -N+1, \dots, N \rangle, \end{cases} \tag{1.1.32}$$

$$\mathbf{A}_{j,k}^K = \begin{cases} L_j k_{k+j} & \text{pro } k+j \in \langle -N, -N+1, \dots, N \rangle, \\ 0 & \text{pro } k+j \notin \langle -N, -N+1, \dots, N \rangle \end{cases} \tag{1.1.33}$$

a respektujeme-li podmínku ortogonality funkcí sinus a cosinus v prvním integrálu vztahu (1.1.30)

$$\int_0^T e_{k-j}(s) ds = \int_0^T e^{ik\omega s} e^{-ij\omega s} ds = T \delta_{kj} = \begin{cases} T & \text{pro } k = j, \\ 0 & \text{pro } k \neq j, \end{cases} \tag{1.1.34}$$

můžeme celkovou odezvu systému (1.1.30) vyjádřit takto

$$\begin{aligned}
 q(t) = & \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{f} + \frac{\mu_M}{T} \mathbf{e}^T(t) \int_0^T \mathbf{A}^M \mathbf{e}(s) \ddot{q}(s) ds + \frac{\mu_B}{T} \mathbf{e}^T(t) \int_0^T \mathbf{A}^B \mathbf{e}(s) \dot{q}(s) ds + \\
 & + \frac{\mu_K}{T} \mathbf{e}^T(t) \int_0^T \mathbf{A}^K \mathbf{e}(s) q(s) ds,
 \end{aligned} \tag{1.1.35}$$

kde \mathbf{L} je komplexní diagonální matice

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{-N} & & & & & & & \\ & L_{-N+1} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & L_0 & & & & \\ & & & & L_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & L_{N-1} & \\ & & & & & & & L_N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}. \tag{1.1.36}$$

Poté zavedeme substituce

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}^K \mathbf{e}(s) q(s) ds, \quad (1.1.37)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}^B \mathbf{e}(s) \dot{q}(s) ds, \quad (1.1.38)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}^M \mathbf{e}(s) \ddot{q}(s) ds. \quad (1.1.39)$$

S ohledem k zmíněným substitucím, které dosadíme do (1.1.35), získáme

$$q(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{f} + \mu_M \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\gamma} + \mu_B \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\beta} + \mu_K \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\alpha}, \quad (1.1.40)$$

kde $\mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{f}$ reprezentuje periodickou odezvu stacionární části na vnější buzení z rovnice (1.1.14) a ostatní členy vztahu (1.1.40) vyjadřují periodickou odezvu stacionární části na parametrické buzení z rovnice (1.1.14).

Pro další postup bude nutné provést první a druhou derivaci vztahu (1.1.40), ale nejdříve je potřeba uvést časové derivace $\mathbf{e}(t)$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = i\omega \mathbf{N} \mathbf{e}(t), \quad (1.1.41)$$

$$\ddot{\mathbf{e}}(t) = -\omega^2 \mathbf{N}^2 \mathbf{e}(t), \quad (1.1.42)$$

kde \mathbf{N} je diagonální matice

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -N & & & & \\ & -N+1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N+1 & \\ & & & & N \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2N+1, 2N+1} \quad (1.1.43)$$

a platí

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \mathbf{N}. \quad (1.1.44)$$

Nyní můžeme vyjádřit hledanou první a druhou derivaci vztahu (1.1.40) následovně

$$\dot{q}(t) = i\omega [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{N} \mathbf{L} \mathbf{f} + \mu_M \mathbf{e}^T(t) \mathbf{N} \boldsymbol{\gamma} + \mu_B \mathbf{e}^T(t) \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} + \mu_K \mathbf{e}^T(t) \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha}], \quad (1.1.45)$$

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{N}^2 \mathbf{L} \mathbf{f} + \mu_M \mathbf{e}^T(t) \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\gamma} + \mu_B \mathbf{e}^T(t) \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\beta} + \mu_K \mathbf{e}^T(t) \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\alpha}]. \quad (1.1.46)$$

Rovnici (1.1.40) vynásobíme zleva $\frac{1}{T}\mathbf{A}^K\mathbf{e}(t)$, integrujeme na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a v souladu s (1.1.37) získáme vztah

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} \mathbf{L} \mathbf{f} + \mu_M \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} \boldsymbol{\gamma} + \mu_B \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} \boldsymbol{\beta} + \mu_K \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (1.1.47)$$

při platnosti

$$\int_0^T \mathbf{e}(t) \mathbf{e}^T(t) dt = T \hat{\mathbf{I}}, \quad (1.1.48)$$

kde $\hat{\mathbf{I}}$ je jednotková diagonální matice s jednotkami na vedlejší diagonále

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+1, 2N+1}. \quad (1.1.49)$$

Analogicky vynásobíme rovnici (1.1.45) zleva $\frac{1}{T}\mathbf{A}^B\mathbf{e}(t)$, integrujeme na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a v souladu s (1.1.38) a (1.1.48) získáme vztah

$$\boldsymbol{\beta} = i\omega \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \mathbf{L} \mathbf{f} + i\mu_M \omega \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \boldsymbol{\gamma} + i\mu_B \omega \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} + i\mu_K \omega \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.1.50)$$

Nakonec vynásobíme rovnici (1.1.46) zleva $\frac{1}{T}\mathbf{A}^M\mathbf{e}(t)$, integrujeme na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a v souladu s (1.1.39) a (1.1.48) získáme vztah

$$\boldsymbol{\gamma} = -\omega^2 \mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \mathbf{L} \mathbf{f} - \mu_M \omega^2 \mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\gamma} - \mu_B \omega^2 \mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\beta} - \mu_K \omega^2 \mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.1.51)$$

Maticové součiny $\mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}}$, $\mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}}$ a $\mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}}$ lze lépe vyjádřit s ohledem na (1.1.31) – (1.1.33) jako součiny

$$\mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{L} \mathbf{H}_M, \quad (1.1.52)$$

$$\mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{L} \mathbf{H}_B, \quad (1.1.53)$$

$$\mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{L} \mathbf{H}_K, \quad (1.1.54)$$

kde pásové matice \mathbf{H}_i jsou Hermitovské [5]

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & x_{-2} & \cdots & x_{-N} & & & \\ x_1 & x_0 & x_{-1} & x_{-2} & & \ddots & & \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_{-1} & \ddots & & & x_{-N} \\ \vdots & x_2 & x_1 & x_0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ x_N & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & x_{-2} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & x_{-1} \\ & & & & x_N & \cdots & x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2N+1, 2N+1}, i \in \{M, B, K\} \quad (1.1.55)$$

a

$$x_j = \begin{cases} m_j & \text{jestliže } i = M, \\ b_j & \text{jestliže } i = B, \\ k_j & \text{jestliže } i = K, \end{cases} \quad \text{pro } j = \langle -N, -N+1, \dots, N \rangle. \quad (1.1.56)$$

Jelikož pro členy Hermitovských matic \mathbf{H}_i platí $x_{-j} = \bar{x}_j$ pro $j \neq 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}$, můžeme psát

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^H = \overline{\mathbf{H}_i}^T, \quad (1.1.57)$$

kde pruh nad písmenem označuje komplexně sdruženou hodnotu. Při respektování (1.1.52) – (1.1.54) lze přepsat rovnice (1.1.47), (1.1.50) a (1.1.51) do kompaktní maticové formy

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} c_\alpha \mathbf{LH}_K & c_\beta \mathbf{LH}_K & c_\gamma \mathbf{LH}_K \\ i\omega c_\alpha \mathbf{LH}_B \mathbf{N} & i\omega c_\beta \mathbf{LH}_B \mathbf{N} & i\omega c_\gamma \mathbf{LH}_B \mathbf{N} \\ -\omega^2 c_\alpha \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 & -\omega^2 c_\beta \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 & -\omega^2 c_\gamma \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{LH}_K \mathbf{Lf} \\ i\omega \mathbf{LH}_B \mathbf{NLf} \\ -\omega^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 \mathbf{Lf} \end{bmatrix}, \quad (1.1.58)$$

kde parametr μ vybíráme z množiny $\mu \in \{\mu_K, \mu_B, \mu_M\}$ a odpovídající koeficienty $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma \in \mathbb{R}$ poté nabudou hodnot

$$c_\alpha = \left\{ 1, \frac{\mu_K}{\mu_B}, \frac{\mu_K}{\mu_M} \right\}, \quad c_\beta = \left\{ \frac{\mu_B}{\mu_K}, 1, \frac{\mu_B}{\mu_M} \right\}, \quad c_\gamma = \left\{ \frac{\mu_M}{\mu_K}, \frac{\mu_M}{\mu_B}, 1 \right\}. \quad (1.1.59)$$

Rovnici (1.1.58) můžeme zkráceně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{q} = \mu \mathbf{Aq} + \mathbf{b}, \quad (1.1.60)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_\alpha \mathbf{LH}_K & c_\beta \mathbf{LH}_K & c_\gamma \mathbf{LH}_K \\ i\omega c_\alpha \mathbf{LH}_B \mathbf{N} & i\omega c_\beta \mathbf{LH}_B \mathbf{N} & i\omega c_\gamma \mathbf{LH}_B \mathbf{N} \\ -\omega^2 c_\alpha \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 & -\omega^2 c_\beta \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 & -\omega^2 c_\gamma \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3(2N+1), 3(2N+1)}, \quad (1.1.61)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{LH}_K \mathbf{Lf} \\ i\omega \mathbf{LH}_B \mathbf{NLf} \\ -\omega^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 \mathbf{Lf} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3(2N+1), 1} \quad (1.1.62)$$

a

$$\mathbf{q} = [\boldsymbol{\alpha} \quad \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\gamma}]^T \in \mathbb{C}^{3(2N+1), 1}. \quad (1.1.63)$$

Z (1.1.61) je zřejmé, že druhý a třetí blokový sloupec jsou lineárně závislé na prvním blokovém sloupci a z toho plyne skutečnost, že hodnost matice $h(\mathbf{A}) = 2N + 1$.

Úpravou vztahu (1.1.60) získáme

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}, \quad (1.1.64)$$

kde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3(2N+1), 3(2N+1)}$ je jednotková diagonální matice. S ohledem na (1.1.59) můžeme řešení (1.1.40) přepsat do tvaru

$$q(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Lf} + \mu \left[c_\alpha \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\alpha} + c_\beta \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\beta} + c_\gamma \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\gamma} \right]. \quad (1.1.65)$$

Při zavedení matice $\mathbf{E}(t) \in \mathbb{C}^{1, 3(2N+1)}$

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} c_\alpha \mathbf{e}^T(t) & c_\beta \mathbf{e}^T(t) & c_\gamma \mathbf{e}^T(t) \end{bmatrix}, \quad (1.1.66)$$

můžeme zapsat řešení následovně

$$q(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Lf} + \mu \mathbf{E}(t) \mathbf{q}. \quad (1.1.67)$$

Nakonec dosazením vztahu (1.1.64) do (1.1.67) získáme celkové řešení pohybové rovnice (1.1.1) ve tvaru

$$q(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Lf} + \mu \mathbf{E}(t) (\mathbf{I} - \mu \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (1.1.68)$$

Přesnost tohoto analytického periodického řešení závisí na zvoleném počtu uvažovaných členů Fourierovy řady periodických funkcí, tzn. čím větší N , tím přesnější řešení dostaneme. Nutné dodat, že se zvyšujícím se N dochází ke zvýšení časové náročnosti numerického výpočtu.

Jak je patrné z rovnice (1.1.68), pro systémovou matici $\mathbf{I} - \mu\mathbf{A}$ mohou nastat dva případy. Pokud je systémová matice regulární, tak její determinant nabývá nenulových hodnot [5], systémová matice je invertovatelná, a díky tomu má rovnice (1.1.68) řešení, jestliže toto řešení existuje. Naopak, když je systémová matice singulární, tak její determinant je nulový [5] a míra modulace μ nabývá kritické hodnoty, která vymezuje hranici mezi oblastí stability a nestability. V tomto případě je některé z vlastních čísel matice \mathbf{A} rovno $\frac{1}{\mu}$, tj.

$$\mu \in \lambda\{\mathbf{A}\}. \quad (1.1.69)$$

Těmto případům se budeme více věnovat v kapitole 1.3, kde je detailně prozkoumána stabilita systému a posouzení hranic mezi oblastmi stability a nestability.

1.2 Numerické řešení odezvy systému

V minulé kapitole jsme se věnovali určení analytického periodického řešení pohybové rovnice (1.1.1). Nyní se zaměříme na získání numerického řešení zmíněné pohybové rovnice pomocí Rungeovy- Kuttovy metody, které slouží k ověření existence analytického řešení. Jestliže existuje analytické periodické řešení, tak výsledky tohoto řešení se shodují s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody.

Při odvození numerického řešení odezvy systému vyjdeme z pohybové rovnice (1.1.1) s nulovými počátečními podmínkami ($q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$)

$$[m_S - \mu_M m(t)]\ddot{q}(t) + [b_S - \mu_B b(t)]\dot{q}(t) + [k_S - \mu_K k(t)]q(t) = f(t),$$

kteřou upravíme do tvaru

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{[m_S - \mu_M m(t)]} \{f(t) - [b_S - \mu_B b(t)]\dot{q}(t) - [k_S - \mu_K k(t)]q(t)\}. \quad (1.2.1)$$

Při respektování (1.1.59) lze přepsat vztah (1.2.1) do tvaru

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{[m_S - \mu_C \gamma m(t)]} \{f(t) - [b_S - \mu_C \beta b(t)]\dot{q}(t) - [k_S - \mu_C \alpha k(t)]q(t)\}. \quad (1.2.2)$$

Po zavedení substituce

$$x_1(t) = \dot{q}(t), \quad (1.2.3)$$

$$x_2(t) = q(t), \quad (1.2.4)$$

můžeme psát

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{[m_S - \mu_C \gamma m(t)]} \{f(t) - [b_S - \mu_C \beta b(t)]x_1(t) - [k_S - \mu_C \alpha k(t)]x_2(t)\}, \quad (1.2.5)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t). \quad (1.2.6)$$

Rovnice (1.2.5) a (1.2.6) lze vyjádřit v maticové formě

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_S + \mu_C \beta b(t)}{m_S - \mu_C \gamma m(t)} & \frac{-k_S + \mu_C \alpha k(t)}{m_S - \mu_C \gamma m(t)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{f(t)}{m_S - \mu_C \gamma m(t)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.2.7)$$

a poté můžeme tento maticový zápis zkráceně formulovat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_R(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_R(t), \quad (1.2.8)$$

kde

$$\mathbf{A}_R(t) = \begin{bmatrix} \frac{-b_s + \mu c_\beta b(t)}{m_s - \mu c_\gamma m(t)} & \frac{-k_s + \mu c_\alpha k(t)}{m_s - \mu c_\gamma m(t)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}, \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{b}_R(t) = \begin{bmatrix} \frac{f(t)}{m_s - \mu c_\gamma m(t)} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1} \quad (1.2.10)$$

a

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}. \quad (1.2.11)$$

Tímto jsme získali výchozí vztah Rungeovy- Kuttovy metody pro numerické řešení odezvy systému (1.1.1). Více o této metodě a jejím algoritmu lze najít v [6]. V našem případě vystačíme při numerickém řešení odezvy s vestavěným modulem *ode23* pro řešení Rungeovy- Kuttovy metody v prostředí MATLAB [7], jak bude ukázáno na vybraných příkladech v kapitole 1.6.

$$\boldsymbol{\beta}^*(t) = \begin{bmatrix} \beta_{-N}(t) & \beta_{-N+\frac{1}{2}}(t) & \beta_{-N+1}(t) & \dots & \beta_N(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{4N+1,1} \quad (1.3.7)$$

a

$$\boldsymbol{\gamma}^*(t) = \begin{bmatrix} \gamma_{-N}(t) & \gamma_{-N+\frac{1}{2}}(t) & \gamma_{-N+1}(t) & \dots & \gamma_N(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{4N+1,1}. \quad (1.3.8)$$

Pro prvky vektoru \mathbf{v} (1.3.4) platí zápis (1.1.8) s původní frekvencí ω . Mezi původními a novými veličinami platí tyto vztahy

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{J}^T \mathbf{e}^*(t), \quad (1.3.9)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}^T \mathbf{f}^*, \quad (1.3.10)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{J}, \quad (1.3.11)$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{J}^T \mathbf{H}_i^* \mathbf{J} \quad (1.3.12)$$

a

$$\mathbf{L} \mathbf{H}_i \mathbf{L} = \mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}_i^* \mathbf{L}^* \mathbf{J}. \quad (1.3.13)$$

Matice \mathbf{J} je definována

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_5, \dots, \mathbf{i}_{2N+1}] \in \mathbb{R}^{4N+1, 2N+1}, \quad (1.3.14)$$

ve které každý vektor \mathbf{i}_k odpovídá k -tému sloupci jednotkové diagonální matice $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4N+1, 4N+1}$.

$$\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^* \mathbf{H}_K^* \mathbf{L}^* \mathbf{f}^* \\ i\omega \mathbf{L}^* \mathbf{H}_B^* \mathbf{N}^* \mathbf{L}^* \mathbf{f}^* \\ -\omega^2 \mathbf{L}^* \mathbf{H}_M^* \mathbf{N}^{*2} \mathbf{L}^* \mathbf{f}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3(4N+1),1}, \quad (1.3.19)$$

$$\mathbf{q}^* = [\boldsymbol{\alpha}^* \quad \boldsymbol{\beta}^* \quad \boldsymbol{\gamma}^*]^T \in \mathbb{C}^{3(4N+1),1}, \quad (1.3.20)$$

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} -N & & & & \\ & -N + \frac{1}{2} & & & \\ & & -N + 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N+1,4N+1} \quad (1.3.21)$$

a $\mathbf{I}^* \in \mathbb{R}^{3(4N+1),3(4N+1)}$ je jednotková diagonální matice. Celkové $2T$ -periodické řešení pohybové rovnice (1.1.1) má analogický tvar k (1.1.68), tedy

$$q^*(t) = \mathbf{e}^{*T}(t) \mathbf{L}^* \mathbf{f}^* + \mu \mathbf{E}^*(t) (\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{b}^*, \quad (1.3.22)$$

kde

$$\mathbf{E}^*(t) = [c_\alpha \mathbf{e}^{*T}(t) \quad c_\beta \mathbf{e}^{*T}(t) \quad c_\gamma \mathbf{e}^{*T}(t)] \in \mathbb{C}^{1,3(4N+1)}. \quad (1.3.23)$$

Jak již bylo dokázáno v [1] a [2] pro soustavu s 1 stupeň volnosti s periodickým tlumením a buzením, tak i pro soustavu se všemi periodickými parametry platí, že T -periodické řešení je identické s $2T$ -periodickým řešením $q(t) \equiv q^*(t)$, tedy

$$\mathbf{e}^T(t) \mathbf{L} \mathbf{f} + \mu \mathbf{E}(t) (\mathbf{I} - \mu \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \equiv \mathbf{e}^{*T}(t) \mathbf{L}^* \mathbf{f}^* + \mu \mathbf{E}^*(t) (\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{b}^*. \quad (1.3.24)$$

Dále bylo v [1] a [2] prokázáno, že vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou podmnožinou množiny vlastních čísel matice \mathbf{A}^*

$$\lambda\{\mathbf{A}\} \subset \lambda\{\mathbf{A}^*\}, \quad (1.3.25)$$

a to má za následek, že oblasti stability nejsou totožné.

Ze vztahu (1.3.25) vychází závěr, že pro posouzení oblastí a hranic stability použijeme obecnější případ pro $2T$ -periodické řešení (1.3.22), tedy

$$q^*(t) = \mathbf{e}^{*T}(t) \mathbf{L}^* \mathbf{f}^* + \mu \mathbf{E}^*(t) (\mathbf{I}^* - \mu \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{b}^*.$$

Pro zjednodušení a zrychlení výpočtu zavedeme, stejně jako v [1], redukovanou matici \mathbf{A}_{red}

k matici \mathbf{A}^* , kterou definujeme

$$\mathbf{A}_{red} = c_\alpha \mathbf{L}^* \mathbf{H}_K^* + i\omega c_\beta \mathbf{L}^* \mathbf{H}_B^* \mathbf{N}^* - \omega^2 c_\gamma \mathbf{L}^* \mathbf{H}_M^* \mathbf{N}^{*2} \in \mathbb{C}^{4N+1, 4N+1}. \quad (1.3.26)$$

Matrice \mathbf{A}_{red} má identickou množinu nenulových vlastních čísel s maticí \mathbf{A}^* a vlastní čísla matice \mathbf{A}_{red} jsou reálná nebo tvoří komplexně sdružené páry, což bylo dokázáno v [1]. Proto lze tvrdit, že determinant matice \mathbf{A}_{red} je reálný. Reálná vlastní čísla odpovídají změně znaménka determinantu a vymezují hranici stability, viz níže.

Ze zavedení matice \mathbf{A}_{red} plyne, že pro posouzení oblastí a hranic stability použijeme matici \mathbf{A}_{red} místo \mathbf{A}^* , tedy systémová matice s ohledem na (1.3.22) má tvar

$$\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red} \in \mathbb{C}^{4N+1, 4N+1}. \quad (1.3.27)$$

V prvním případě, kdy systémová matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ je singulární [5], tj. není invertovatelná, vymezuje nulový determinant této matice hranici stabilních a nestabilních oblastí, tedy

$$\det(\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}) = 0. \quad (1.3.28)$$

Po úpravě

$$\det\left(\mathbf{A}_{red}(\omega) - \frac{1}{\mu} \mathbf{I}_{red}\right) = 0 \quad (1.3.29)$$

je původní matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ singulární právě tehdy, když $\frac{1}{\mu}$ je rovno některému z reálných vlastních čísel matice \mathbf{A}_{red} . To znamená, že parametr μ určuje zmíněnou hranici stability a celková stabilita systému je závislá na frekvenci ω , jelikož prvky matice \mathbf{A}_{red} jsou funkcemi frekvence ω v souladu s (1.3.26). Z toho plyne, že s měněním se ω , se bude měnit i odpovídající hodnota vlastního čísla $\frac{1}{\mu}$. A tedy parametry dané ω a vypočtené μ určují kritické hodnoty, které vymezují hranici mezi stabilní a nestabilní oblastí systému.

Ve druhém případě, kdy je systémová matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ regulární, tj. je invertovatelná a její determinant je nenulový, rozhoduje o stabilitě systému znaménko determinantu systémové matice. Z numerického experimentu bylo vypořazováno následující; jestliže je znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ kladné, systém je stabilní a existuje periodické řešení. V opačném případě, pro záporné znaménko determinantu, je systém nestabilní a neexistuje periodické řešení. Výsledek nové metody posuzování stability systému

a určování hranic stability lze shrnout tímto zápisem

$$\det(\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}(\omega)) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{system je stabilní a periodické řešení existuje,} \\ = 0 \Rightarrow \text{hranice stabilní a nestabilní oblasti,} \\ < 0 \Rightarrow \text{system je nestabilní a periodické řešení neexistuje.} \end{cases} \quad (1.3.30)$$

Důkazy pro vztahy (1.3.24) a (1.3.25) jsou detailně zkoumány v [1].

1.4 Floquetova teorie [2]

Pro ověření správnosti nové metody posuzování stability systému a určování hranic stability je využita metoda využívající Floquetovu teorii, která vychází z pohybové rovnice parametrického systému (1.1.1)

$$[m_s - \mu_M m(t)]\ddot{q}(t) + [b_s - \mu_B b(t)]\dot{q}(t) + [k_s - \mu_K k(t)]q(t) = f(t),$$

ale pro aplikaci Floquetovy teorie je dle [1] a [2] vhodnější zavést obecný matematický model s časově proměnnými maticemi, který lze použít pro libovolný počet stupňů volnosti n . Tedy obecný matematický model vyjádříme

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1.4.1)$$

kde $\mathbf{M}(t)$ označuje časově proměnnou matici hmotnosti s periodou T , $\mathbf{B}(t)$ je časově proměnná periodická matice tlumení, $\mathbf{K}(t)$ vyjadřuje časově proměnnou periodickou matici tuhosti a $\mathbf{q}(t)$ je hledaný vektor zobecněných souřadnic. Na pravé straně vystupuje časově proměnný periodický vektor zobecněných budících sil $\mathbf{f}(t)$. U takového systému se projevují tzv. parametrické rezonance. Naladění parametrů soustavy, při nichž nastávají parametrické rezonance, mohou zapříčinit nestabilitu systému. Určování těchto pásem nestability bude provedeno pomocí již zmíněné Floquetovy teorie.

K pohybové rovnici přidáme identitu

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (1.4.2)$$

a obě rovnice přepíšeme do kompaktního maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{K}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.4.3)$$

což lze dále vyjádřit následovně

$$\mathbf{N}_F(t)\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{P}_F(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_F(t), \quad (1.4.4)$$

kde

$$\mathbf{N}_F(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_F(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_F(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.4.5)$$

a

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}. \quad (1.4.6)$$

Pokud je matice $\mathbf{N}_F(t)$ regulární, tj. lze ji invertovat, vynásobíme rovnici (1.4.4) zleva $\mathbf{N}_F^{-1}(t)$

$$\mathbf{N}_F^{-1}(t)\mathbf{N}_F(t)\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{N}_F^{-1}(t)\mathbf{P}_F(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{N}_F^{-1}(t)\mathbf{F}_F(t) \quad (1.4.7)$$

a zavedeme

$$\mathbf{A}_F(t) = \mathbf{N}_F^{-1}(t)\mathbf{P}_F(t), \quad \mathbf{b}_F(t) = \mathbf{N}_F^{-1}(t)\mathbf{F}_F(t). \quad (1.4.8)$$

Po úpravě a dosazení (1.4.8) do vztahu (1.4.7) obdržíme

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}_F(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}_F(t). \quad (1.4.9)$$

Dle Floquetovy teorie řešení homogenní části rovnice (1.4.9) rozhoduje o stabilitě, tedy

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}_F(t)\mathbf{u}(t). \quad (1.4.10)$$

Předpokládejme, že

$$\mathbf{U}(t) = [\mathbf{u}_1(t) \quad \mathbf{u}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t)] \quad (1.4.11)$$

je fundamentální matice řešení, jejíž sloupce $\mathbf{u}_i(t)$ jsou nezávislá řešení (což je možné předpokládat u lineárních systémů), která splňuje soustavu diferenciálních rovnic (1.4.10)

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}_F(t)\mathbf{U}(t), \quad (1.4.12)$$

poté

$$\dot{\mathbf{U}}(t+T) = \mathbf{A}_F(t+T)\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{A}_F(t)\mathbf{U}(t+T), \quad (1.4.13)$$

a $\mathbf{U}(t+T)$ je také fundamentální maticí ve tvaru

$$\mathbf{U}(t+T) = [\mathbf{u}_1(t+T) \quad \mathbf{u}_2(t+T) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t+T)]. \quad (1.4.14)$$

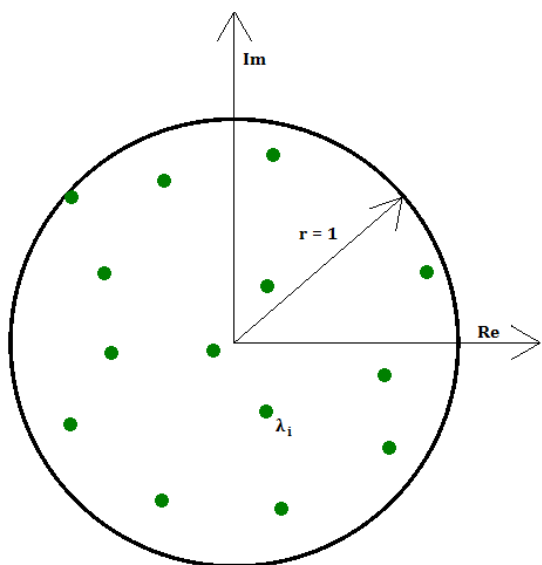
Předpokládejme, že každý vektor $\mathbf{u}_i(t+T)$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1(t) \quad \mathbf{u}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t)$. Předchozí vztah je pak možné zapsat jako

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t)\mathbf{Z}_F, \quad (1.4.15)$$

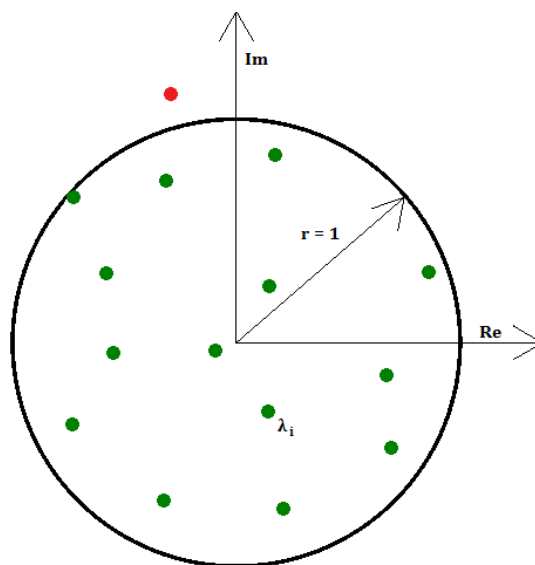
kde matice \mathbf{Z}_F je konstantní matice koeficientů lineární kombinace. Zvolíme-li fundamentální maticí $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice, znamená to, že matice $\mathbf{U}(t)$ je v $t=0$ charakterizována nezávislými počátečními podmínkami. Pak můžeme (1.4.15) v $t=0$ psát ve tvaru

$$\mathbf{U}(T) = \mathbf{U}(0)\mathbf{Z}_F = \mathbf{Z}_F, \quad (1.4.16)$$

a tedy fundamentální matice v čase $t = 0$ je rovna matici \mathbf{Z}_F , kterou označujeme jako matici monodromie. Vlastní čísla této matice rozhodují o stabilitě daného systému. Jestliže všechna vlastní čísla leží v jednotkové kružnici (včetně hranice), pak se jedná o stabilní systém, viz obr. 1.3. Pokud však alespoň jedno z vlastních čísel leží mimo tuto hranici, pak je systém nestabilní, viz obr. 1.4.



Obr. 1.3 – Stabilní systém [2]



Obr. 1.4 – Nestabilní systém [2]

Postup řešení stability systémů popsaných diferenciálními rovnicemi s periodickými koeficienty podle (1.4.14) můžeme shrnout do jednotlivých kroků:

- 1) Zjištění matice monodromie $\mathbf{U}(T) = \mathbf{Z}_F$ numerickou integrací při zadané počáteční podmínce $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ můžeme pro jednoduchost zapsat postupně pro jednotlivé sloupce matice $\mathbf{U}(t)$ následovně

$$\dot{\mathbf{u}}_1(t) = \mathbf{A}_F(t)\mathbf{u}_1(t), \quad \mathbf{u}_1(0) = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,1} \Rightarrow \mathbf{u}_1(T) \quad (1.4.17)$$

až do $2n$

$$\dot{\mathbf{u}}_{2n}(t) = \mathbf{A}_F(t)\mathbf{u}_{2n}(t), \quad \mathbf{u}_{2n}(0) = \mathbf{e}_{2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,1} \Rightarrow \mathbf{u}_{2n}(T). \quad (1.4.18)$$

Po sestavení těchto sloupců do matice získáme matici monodromie $\mathbf{U}(T) = \mathbf{Z}_F$.

- 2) Určení vlastních čísel matice monodromie \mathbf{Z}_F z problému vlastních hodnot

$$(\mathbf{Z}_F - \lambda\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (1.4.19)$$

- 3) Analýza stability systému z absolutních hodnot vlastních čísel λ_i matice monodromie \mathbf{Z}_F , přičemž platí následující relace

$$\forall |\lambda_i| \leq 1 \Rightarrow \text{stabilita}, \quad (1.4.20)$$

$$\exists |\lambda_i| > 1 \Rightarrow \text{nestabilita}. \quad (1.4.21)$$

Důkaz Floquetovy teorie byl detailně rozebrán v [2].

1.5 Aplikace teorie na testovacím příkladě

V této kapitole se budeme věnovat aplikaci odvozené teorie a postupů z předchozích kapitol na jednoduchém systému s 1 stupněm volnosti, který je znázorněn na obr. 1.1. Pro numerické experimenty byl využit výpočtový systém MATLAB.

Nechť je dáno

<i>Označení</i>	<i>Veličina</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Jednotky</i>
N	počet členů řady	200	–
N_{Stab}	počet členů řady pro posouzení stability	25	–
m_s	stacionární hmotnost	1	<i>kg</i>
k_s	stacionární tuhost	10 000	<i>N/m</i>
f_s	stacionární síla	10 000	<i>N</i>
t_{max}	konečný čas	100 <i>T</i>	<i>s</i>
D	poměrný útlum	0,01	–
		0	

Tab. 1.1 – Dané parametry systému

Pomocí daných parametrů systému z tab. 1.1 můžeme dopočítat další potřebné veličiny ze vztahů

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}, \quad (1.5.1)$$

$$b_s = 2Dm_s\Omega, \quad (1.5.2)$$

viz tab. 1.2.

<i>Označení</i>	<i>Veličina</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Jednotky</i>
Ω	vlastní frekvence	100	<i>rad/s</i>
b_s	stacionární tlumení pro $D = 0,01$	2	<i>Ns/m</i>
	stacionární tlumení pro $D = 0$	0	

Tab. 1.2 – Vypočtené parametry systému

Numerický experiment se provádí na systému s časově proměnou hmotností, tlumením,

tuhostí a buzením, jejichž charakteristiky jsou vykresleny na obr. 1.5 a popsány Fourierovými řadami

$$m(t) = m_S \cos(\omega t) = m_{-1} e^{-i\omega t} + m_1 e^{i\omega t}, \quad m_{-1} = m_1 = \frac{m_S}{2}, \quad (1.5.3)$$

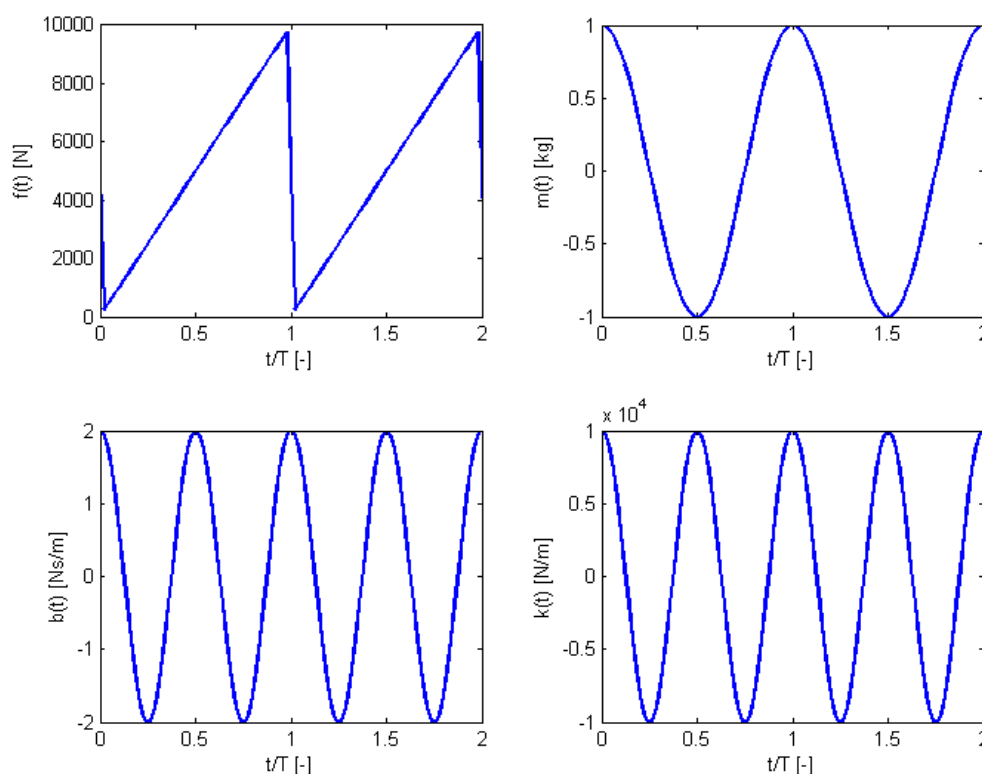
pro nenulové stacionární tlumení b_S

$$b(t) = b_S \cos(2\omega t) = b_{-2} e^{-i\omega t} + b_2 e^{i\omega t}, \quad b_{-2} = b_2 = \frac{b_S}{2}, \quad (1.5.4)$$

$$k(t) = k_S \cos(2\omega t) = k_{-2} e^{-i\omega t} + k_2 e^{i\omega t}, \quad k_{-2} = k_2 = \frac{k_S}{2} \quad (1.5.5)$$

a

$$f(t) = f(t+T) = f_S \frac{t}{T} = \frac{f_S}{2} + \frac{f_S}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{i}{n\pi} e^{in\omega t}, \quad t \in \langle 0, T \rangle. \quad (1.5.6)$$



Obr. 1.5 – Časově proměnné periodické funkce buzení, hmotnosti, tlumení a tuhosti

Určení pásem nestability systému je provedeno pomocí metody využívající Floquetovu teorii. Z kapitoly 1.4 vyplývá, že o stabilitě systému rozhoduje řešení homogenní rovnice (1.4.10). Zmíněná metoda je využita pro ověření správnosti nové metody posuzování stability systému a určování hranic stability. Nová metoda vychází ze vztahu (1.3.30) a je založena na určení znaménka determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$, je-li systémová matice regulární

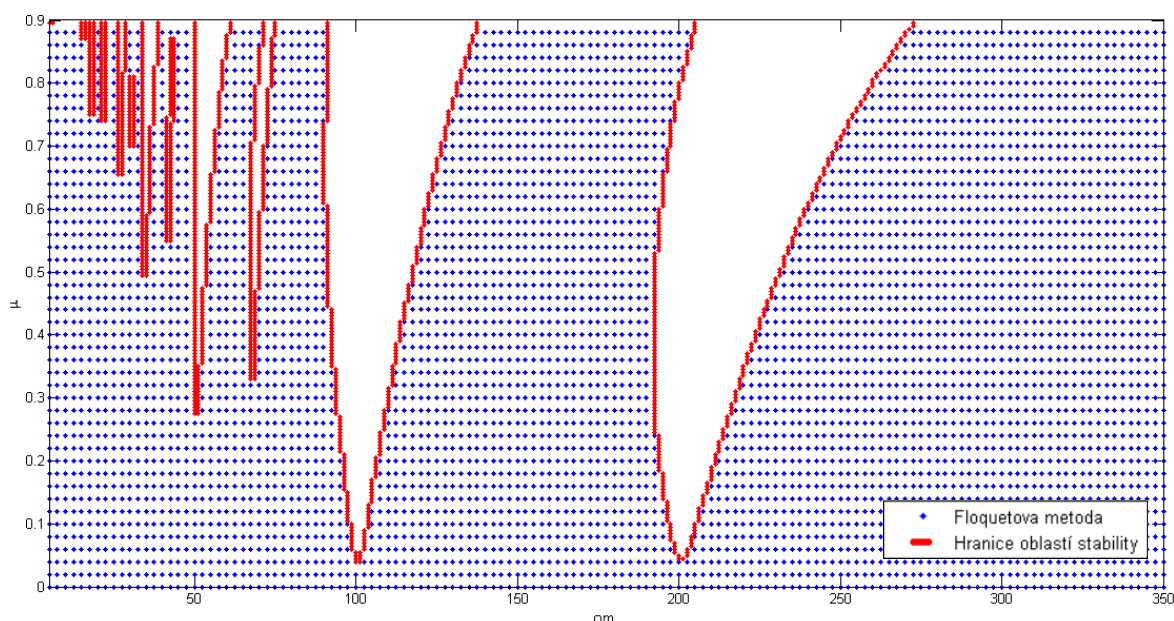
a invertovatelná. V opačném případě, kdy je systémová matice singularní, nulový determinant systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ vymezuje hranici mezi stabilní a nestabilní oblastí.

V případě singularity systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ je $\frac{1}{\mu}$ rovno některému z reálných vlastních čísel matice \mathbf{A}_{red} . Z čehož vyplývá, že parametr μ určuje zmíněnou hranici stability a celková stabilita systému je závislá na frekvenci ω , jelikož prvky matice \mathbf{A}_{red} jsou funkcemi frekvence ω . Z tohoto důvodu je vyšetřování stability systému prováděno na širokém pásmu parametrů $\omega = \langle 5; 350 \rangle$ s krokem $1,25 [rad/s]$ a $\mu = \langle 0; 0,9 \rangle$ s krokem $0,005 [-]$ v případě nové metody a pro metodu využívající Floquetovu teorii bylo voleno $\omega = \langle 5; 350 \rangle$ s krokem $2,5 [rad/s]$ a $\mu = \langle 0; 0,9 \rangle$ s krokem $0,02 [-]$. Volba kroku parametrů je přizpůsobena čitelnému vykreslování výsledků.

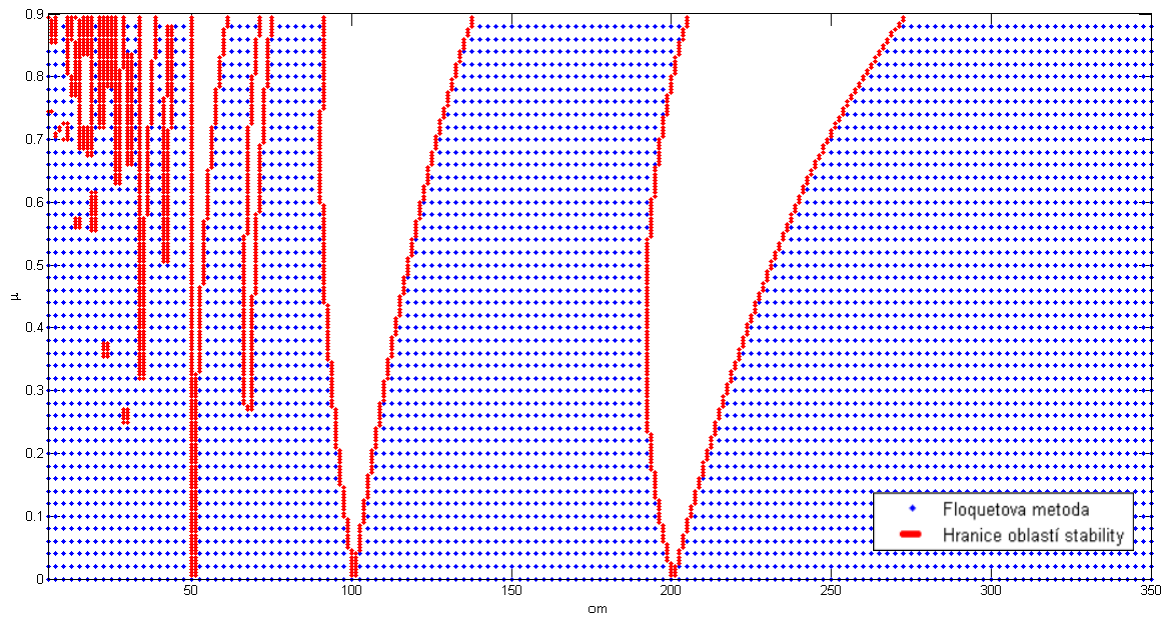
Po definování pásem parametrů je nutné určit množinu koeficientů $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$. Pro testovací případ bylo zvoleno

$$c_\alpha = c_\beta = 1,1; \quad c_\gamma = 1. \quad (1.5.7)$$

Výsledky posouzení stability novou metodou ověřenou Floquetovou metodou jsou ukázány na obr. 1.6 a 1.7 pro poměrný útlum $D=0$ a $D=0,01$. Pro případ s poměrným útlumem $D=0,01$ je redukovaná matice \mathbf{A}_{red} definována vztahem (1.3.26) ve tvaru $\mathbf{A}_{red} = c_\alpha \mathbf{L}^* \mathbf{H}_K^* + i\omega c_\beta \mathbf{L}^* \mathbf{H}_B^* \mathbf{N}^* - \omega^2 c_\gamma \mathbf{L}^* \mathbf{H}_M^* \mathbf{N}^*$ a pro poměrný útlum $D=0$ nabývá matice \mathbf{A}_{red} tvaru $\mathbf{A}_{red} = c_\alpha \mathbf{L}^* \mathbf{H}_K^* - \omega^2 c_\gamma \mathbf{L}^* \mathbf{H}_M^* \mathbf{N}^*$. V obou případech jsou dle legendy u obrázků modře označeny body vyšetřované Floquetovou metodou a červeně jsou označeny body vymezující hranice mezi stabilní a nestabilní oblastí, které byly získány pomocí prezentované nové metody určení hranic.



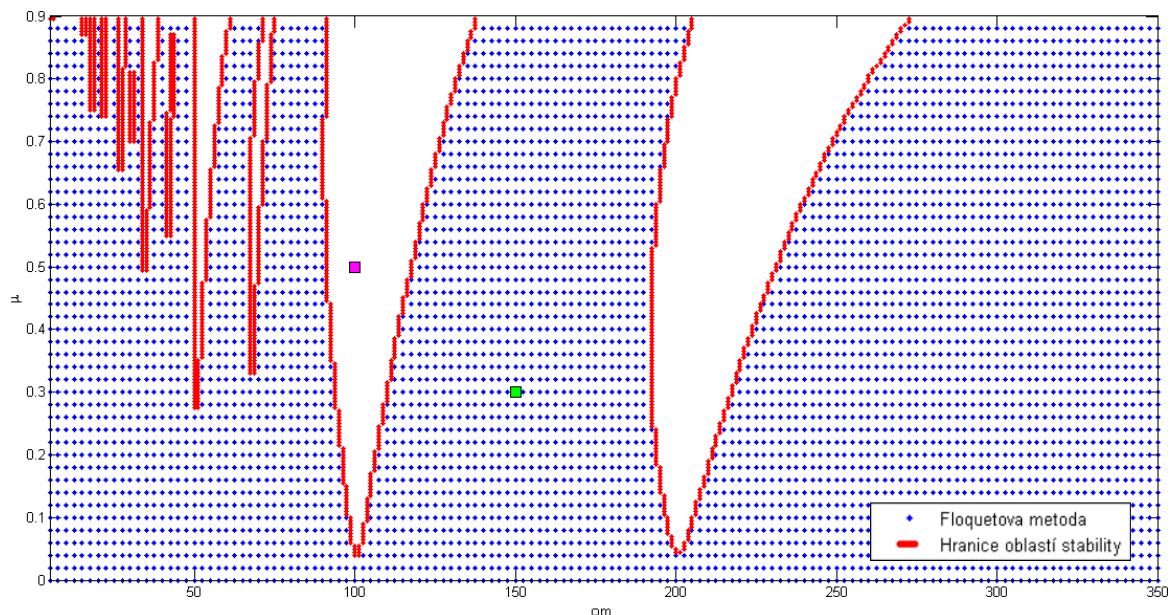
Obr. 1.6 – Pásma nestability pro poměrný útlum $D = 0,01$



Obr. 1.7 – Pásma nestability pro poměrný útlum $D = 0$

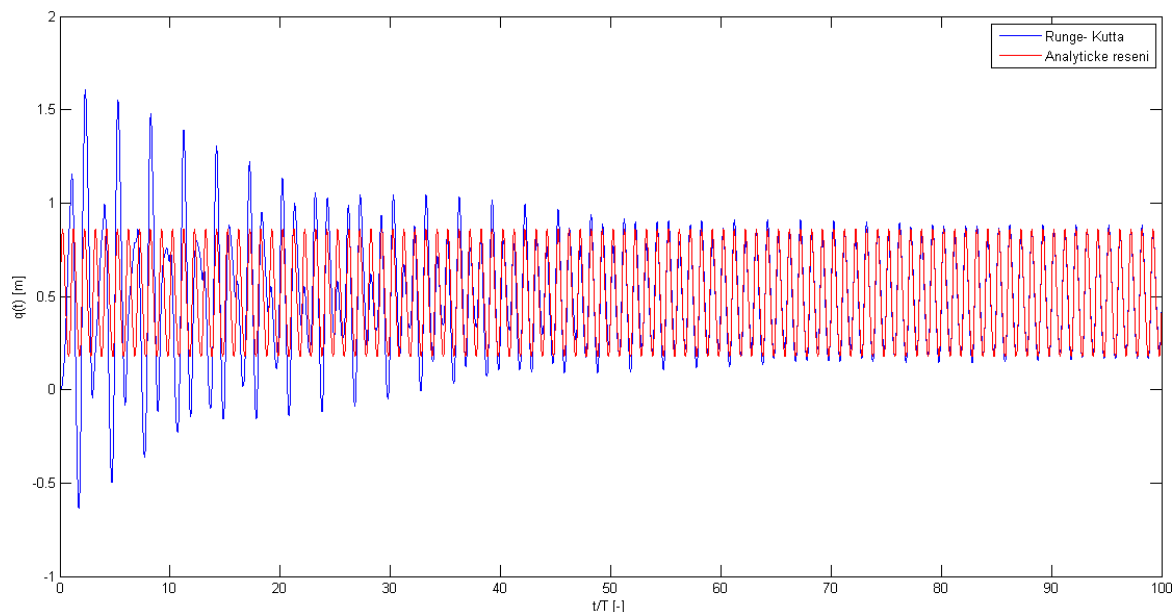
Jak je patrné z obr. 1.6 a 1.7, pro případ s poměrným útlumem $D = 0$, tj. pro netlumený systém, dochází ke zvětšení pásem nestability.

Nyní se zaměříme na systém s poměrným útlumem $D = 0,01$, na kterém budeme demonstrovat existenci periodického řešení daného parametrického systému. Dále budeme zkoumat znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$. Byly vybrány dva libovolné body, jeden ze stabilní oblasti (zelený) a druhý z nestabilní (růžový), viz obr. 1.8.



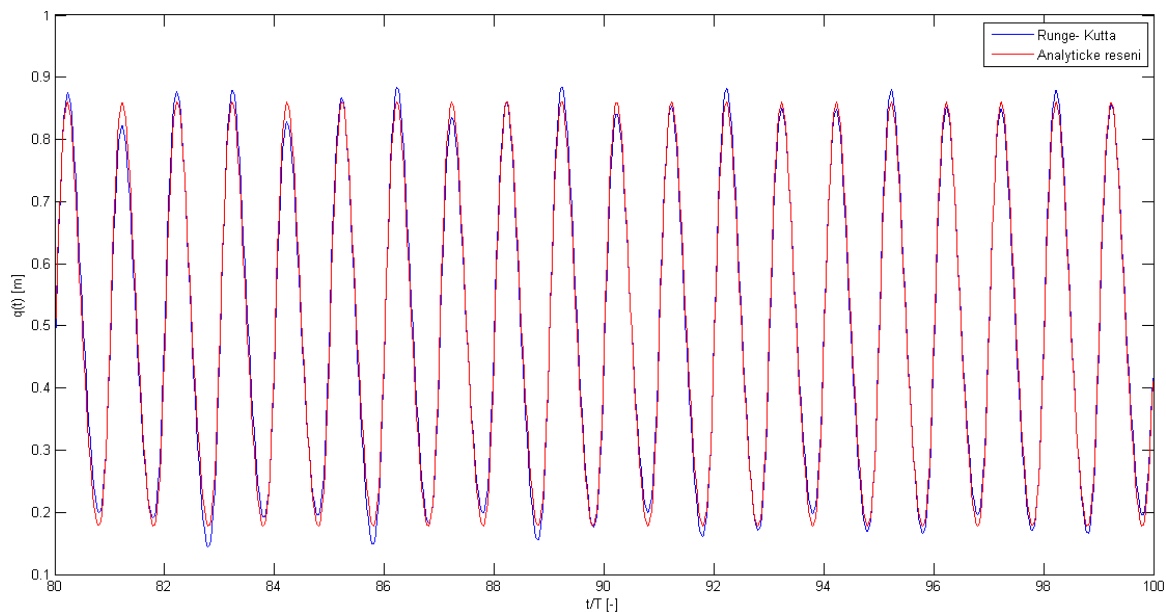
Obr. 1.8 – Vybrané body pro systém s poměrným útlumem $D = 0,01$

Pro zvolený bod ($\omega = 150; \mu = 0,3$) ležící ve stabilní oblasti (zelený) analytické periodické řešení existuje a je vykresleno na obr. 1.9.



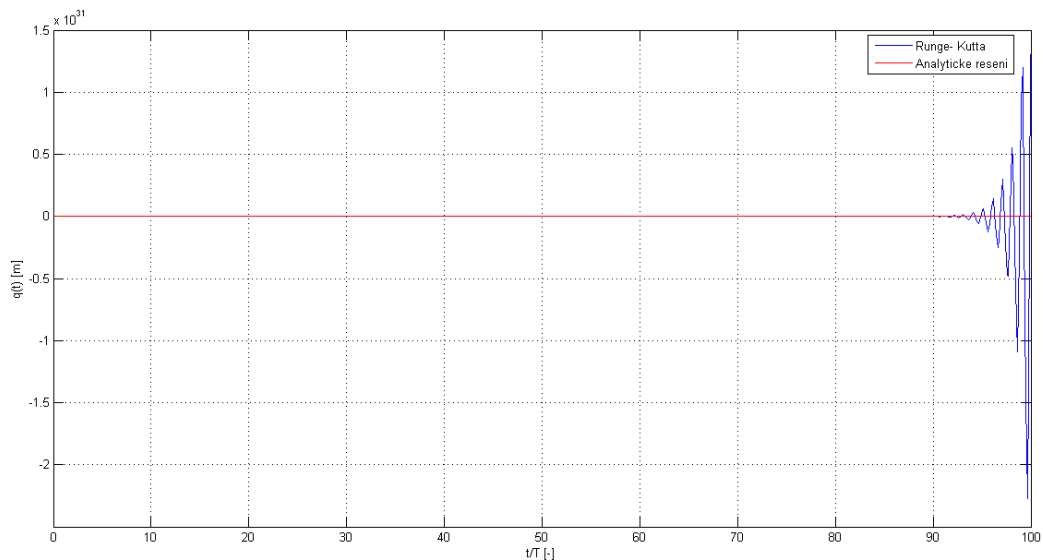
Obr. 1.9 – Celkové řešení odezvy pro stabilní systém pro poměrný útlum $D = 0,01$

Jak je zřejmé z obr. 1.9, vliv nulových počátečních podmínek při Rungeově- Kuttově metodě je omezen jen na homogenní část celkového řešení, a díky tlumení ($D = 0,01$) tento vliv po krátkém časovém úseku vymizí. Z průběhu lze vypočítat postupné přibližování analytického periodického řešení k ustálenému stavu získaného pomocí Rungeovy- Kuttovy metody. Na obr. 1.10 je zobrazen detail celkového řešení odezvy pro stabilní systém mezi 80. a 100. periodou.



Obr. 1.10 – Detail celkového řešení odezvy pro stabilní systém pro poměrný útlum $D = 0,01$

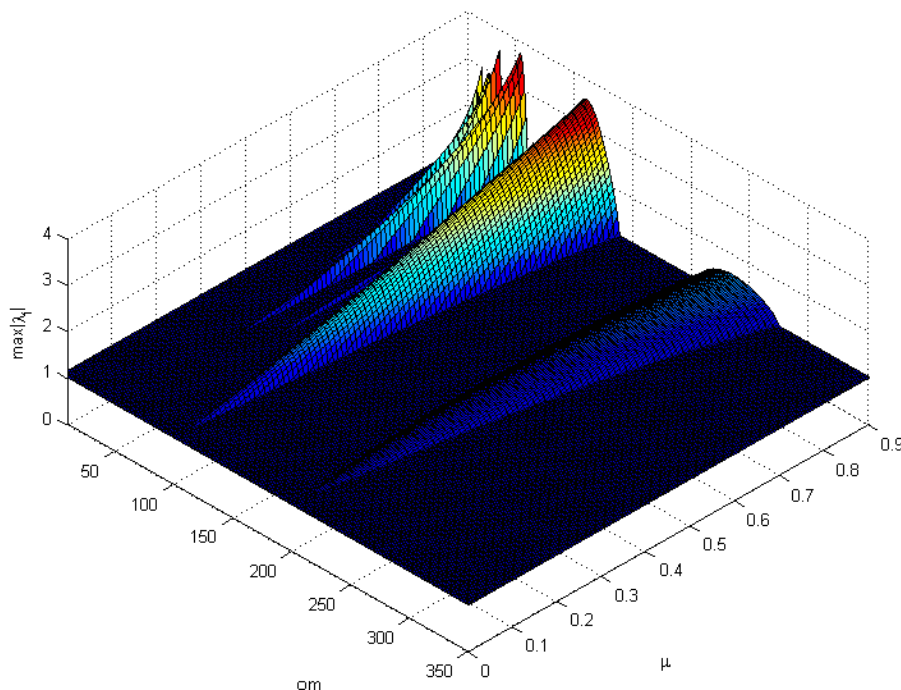
Pro zvolený bod ($\omega = 100; \mu = 0,5$) ležící v nestabilní oblasti (růžový) analytické periodické řešení neexistuje, viz obr. 1.11.



Obr. 1.11 – Celkové řešení odezvy pro nestabilní systém pro poměrný útlum $D = 0,01$

Z výsledků numerického experimentu plyne, jestliže existuje analytické periodické řešení, tak výsledky tohoto řešení se shodují s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody, naopak pro nestabilní systém analytické periodické řešení neexistuje. Analýzou znaménka determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ byl potvrzen závěr ze vztahu (1.3.30), tj. pro nestabilní systém je determinant záporný a pro stabilní systém nabývá determinant kladných hodnot.

Z prostorového vykreslení oblastí nestability (obr. 1.12) získaných pomocí Floquetovy metody je patrné, že oblasti nestability se rozšiřují se zvyšujícím se parametrem μ . Dále při zvyšování úhlové frekvence ω dochází ke snížení míry nestability, která je zde reprezentována maximální absolutní hodnotou vlastních čísel matice monodromie \mathbf{Z}_F , tedy $\max|\lambda_l|$.



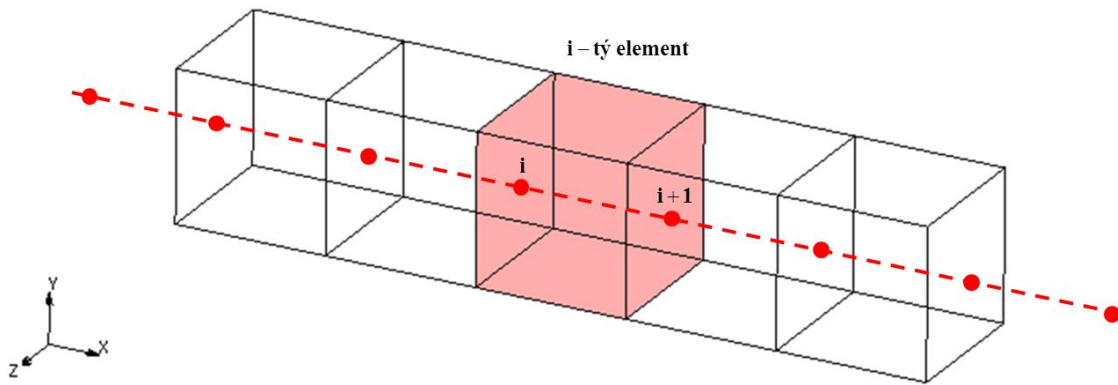
Obr. 1.12 – Prostorové vykreslení oblastí nestability získaných pomocí Floquetovy metody

2 Rotor s rotačně nesymetrickým průřezem

2.1 Modelování rotoru jako 1D kontinuum

2.1.1 Diskretizace rotorových systémů

V této části práce se zaměříme na rotor s rotačně nesymetrickým průřezem, který budeme modelovat pomocí metody konečných prvků (dále MKP), jejímž východiskem je rozdělení spojitého kontinua na konečný počet prvků. Zmíněné konečné prvky budou uvažovány jako části rotoru délky l_e reprezentovány osou rotace rotoru – tedy 1D elementy, jak je patrné z obr. 2.1. Každý element je charakterizován dvěma krajními uzly, ve kterých zjišťujeme neznámé veličiny posuvů a natočení. Pro popis průběhu veličin mezi krajními uzly jsou využity aproximační funkce, jejichž volba je popsána v další podkapitole.

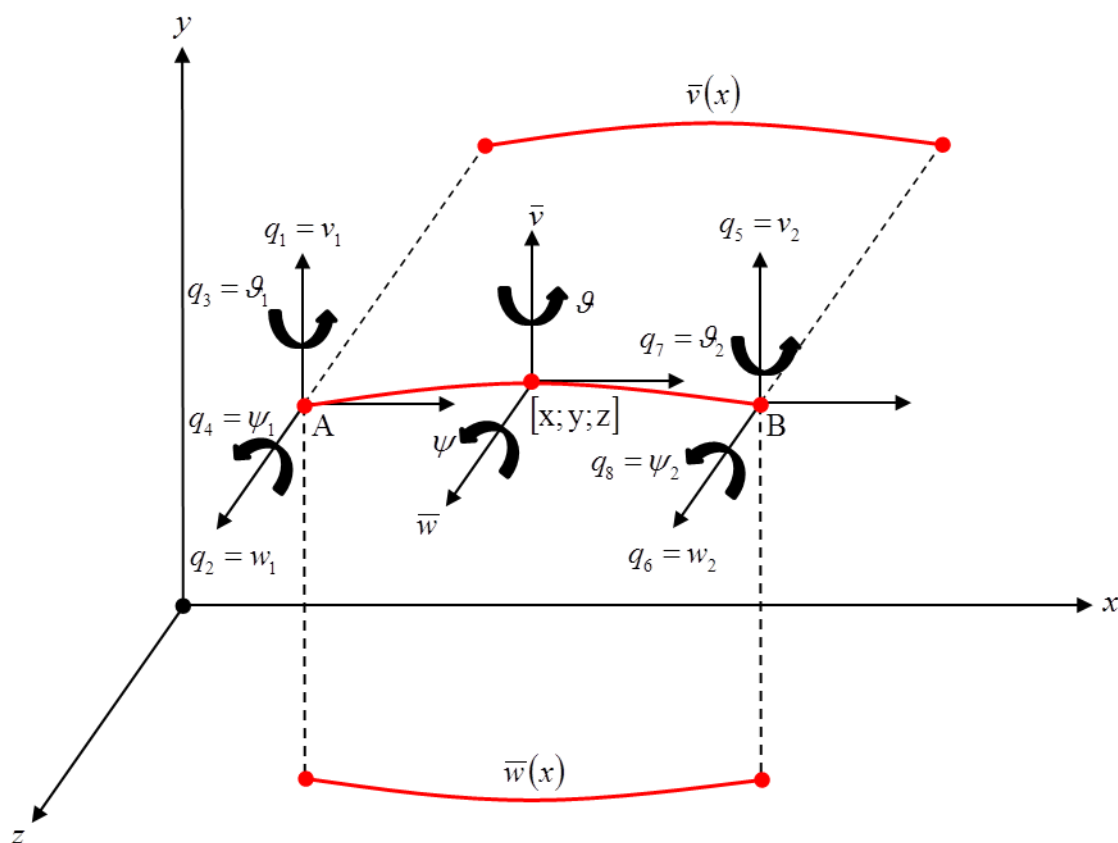


Obr. 2.1 – Diskretizace rotorových systémů

2.1.2 Aproximační funkce

MKP je založena na totožnosti váhové funkce s bázovými funkcemi, jejichž lineární kombinace aproximuje řešení dané rovnice. Výhodou použití MKP je, že bázové funkce mají v uzlech funkční hodnoty rovny 0 nebo 1 a konečné prvky se navzájem nepřekrývají.

Průhybová čára i – tého rotorového elementu je znázorněna na obr. 2.2 v lokálním souřadnicovém systému x, y, z . Rotorový prvek uvažujeme homogenní a prizmatický se dvěma krajními uzly po čtyřech stupních volnosti, tj. zobecněný posuv v ve směru osy y , zobecněný posuv w ve směru osy z a k nim příslušející dvě natočení ϑ, ψ kolem zmíněných os. Z toho vyplývá, že budeme respektovat pouze průhyby v rovině xy a xz , tedy zanedbáme tah neboli posuv u ve směru osy x a krut neboli natočení φ kolem osy x . Se zanedbáním veličin u, φ souvisí nerespektování vlivu deplanace průřezu při deformaci rotoru. Jak bylo ukázáno v [10], vliv deplanace průřezu se projevuje pouze při torzních tvarech kmitání a získané velikosti vlastních frekvencí při respektování zmíněného vlivu se zanedbatelně liší od vlastních frekvencí bez respektování vlivu deplanace.



Obr. 2.2 – Průhybová čára i – tého rotorového elementu

Průhyb v rovině xy můžeme aproximovat kubickým polynomem

$$\bar{v}(x, t) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2 + c_3(t)x^3, \quad (2.1.1)$$

který lze vyjádřit i maticově

$$\bar{v}(x,t) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c}_1(t), \quad (2.1.2)$$

kde pruhem značíme posunutí bodů ležících na střednici, matice $\mathbf{\Phi}(x)$ je maticí bázových funkcí a $\mathbf{c}_1(t)$ je vektor časových funkcí obsahující neznámé koeficienty $c_0(t), c_1(t), c_2(t), c_3(t)$.

Za předpokladu malých výchylek můžeme natočení kolem osy z vyjádřit jako derivaci průhybu $\bar{v}(x,t)$ (2.1.1) dle proměnné x

$$\psi(x,t) = \frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial x} = c_1(t) + 2c_2(t)x + 3c_3(t)x^2 \quad (2.1.3)$$

a analogicky k (2.1.2) lze vztah (2.1.3) zapsat maticově

$$\psi(x,t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{c}_1(t), \quad (2.1.4)$$

kde $\mathbf{\Phi}'(x)$ je matice derivací bázových funkcí. Do vztahu (2.1.1) a (2.1.3) dosadíme okrajové podmínky a získáme

$$v_1(t) = \bar{v}(0,t) = c_0(t), \quad (2.1.5)$$

$$\psi_1(t) = \psi(0,t) = c_1(t), \quad (2.1.6)$$

$$v_2(t) = \bar{v}(l_e,t) = c_0(t) + c_1(t)l_e + c_2(t)l_e^2 + c_3(t)l_e^3, \quad (2.1.7)$$

$$\psi_2(t) = \psi(l_e,t) = c_1(t) + 2c_2(t)l_e + 3c_3(t)l_e^2. \quad (2.1.8)$$

Přepíšeme-li rovnice (2.1.5) – (2.1.8) maticově, dostaneme

$$\tilde{\mathbf{q}}_1(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \psi_1(t) \\ v_2(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}(0,t) \\ \psi(0,t) \\ \bar{v}(l_e,t) \\ \psi(l_e,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_e & l_e^2 & l_e^3 \\ 0 & 1 & 2l_e & 3l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1\mathbf{c}_1(t), \quad (2.1.9)$$

poté vektor časových funkcí $\mathbf{c}_1(t)$ lze vyjádřit pomocí vektoru zobecněných souřadnic $\tilde{\mathbf{q}}_1(t)$, který má přímý fyzikální význam posuvů krajních bodů, tedy

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t), \quad (2.1.10)$$

kde

$$\mathbf{S}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l_e^2} & -\frac{2}{l_e} & \frac{3}{l_e^2} & -\frac{1}{l_e} \\ \frac{2}{l_e^3} & \frac{1}{l_e^2} & -\frac{2}{l_e^3} & \frac{1}{l_e^2} \end{bmatrix}. \quad (2.1.11)$$

Nakonec dosazením (2.1.10) do (2.1.2) získáme závislost průhybu v rovině xy v obecném místě x na zobecněných posunutí krajních bodů

$$\bar{v}(x, t) = \mathbf{\Phi}(x) \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) \quad (2.1.12)$$

a obdobně dosadíme (2.1.10) do (2.1.4) a dostaneme závislost natočení kolem osy z v obecném místě x na zobecněných posunutí krajních bodů

$$\psi(x, t) = \mathbf{\Phi}'(x) \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t). \quad (2.1.13)$$

Průhyb v rovině xz aproximujeme analogicky jako v (2.1.1) kubickým polynomem

$$\bar{w}(x, t) = c_4(t) + c_5(t)x + c_6(t)x^2 + c_7(t)x^3, \quad (2.1.14)$$

který lze vyjádřit maticově

$$\bar{w}(x, t) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4(t) \\ c_5(t) \\ c_6(t) \\ c_7(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(x) \mathbf{c}_2(t). \quad (2.1.15)$$

Za předpokladu malých výchylek můžeme natočení kolem osy y vyjádřit jako záporně vzatou derivaci průhybu $\bar{w}(x, t)$ (2.1.14) dle proměnné x

$$\vartheta(x, t) = -\frac{\partial \bar{w}(x, t)}{\partial x} = -c_5(t) - 2c_6(t)x - 3c_7(t)x^2 \quad (2.1.16)$$

a analogicky k (2.1.15) lze vztah (2.1.16) zapsat maticově

$$\mathcal{G}(x,t) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4(t) \\ c_5(t) \\ c_6(t) \\ c_7(t) \end{bmatrix} = -\mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{c}_2(t). \quad (2.1.17)$$

Do vztahu (2.1.14) a (2.1.16) dosadíme okrajové podmínky a získáme

$$w_1(t) = \bar{w}(0,t) = c_4(t), \quad (2.1.18)$$

$$\mathcal{G}_1(t) = \mathcal{G}(0,t) = -c_5(t), \quad (2.1.19)$$

$$w_2(t) = \bar{w}(l_e,t) = c_4(t) + c_5(t)l_e + c_6(t)l_e^2 + c_7(t)l_e^3, \quad (2.1.20)$$

$$\mathcal{G}_2(t) = \mathcal{G}(l_e,t) = -c_5(t) - 2c_6(t)l_e - 3c_7(t)l_e^2. \quad (2.1.21)$$

Přepíšeme-li rovnice (2.1.18) – (2.1.21) maticově, dostaneme

$$\tilde{\mathbf{q}}_2(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \mathcal{G}_1(t) \\ w_2(t) \\ \mathcal{G}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}(0,t) \\ \mathcal{G}(0,t) \\ \bar{w}(l_e,t) \\ \mathcal{G}(l_e,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l_e & l_e^2 & l_e^3 \\ 0 & -1 & -2l_e & -3l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4(t) \\ c_5(t) \\ c_6(t) \\ c_7(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2\mathbf{c}_2(t), \quad (2.1.22)$$

poté vektor časových funkcí $\mathbf{c}_2(t)$ lze vyjádřit pomocí vektoru zobecněných souřadnic $\tilde{\mathbf{q}}_2(t)$, který má přímý fyzikální význam posuvů krajních bodů, tedy

$$\mathbf{c}_2(t) = \mathbf{S}_2^{-1}\tilde{\mathbf{q}}_2(t) = \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P}_s\tilde{\mathbf{q}}_2(t), \quad (2.1.23)$$

kde

$$\mathbf{S}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l_e^2} & \frac{2}{l_e} & \frac{3}{l_e^2} & \frac{1}{l_e} \\ \frac{2}{l_e^3} & -\frac{1}{l_e^2} & -\frac{2}{l_e^3} & -\frac{1}{l_e^2} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P}_s \quad (2.1.24)$$

a

$$\mathbf{P}_S = \mathbf{P}_S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.1.25)$$

Nakonec dosazením (2.1.23) do (2.1.15) získáme závislost průhybu v rovině xz v obecném místě x na zobecněných posunutí krajních bodů

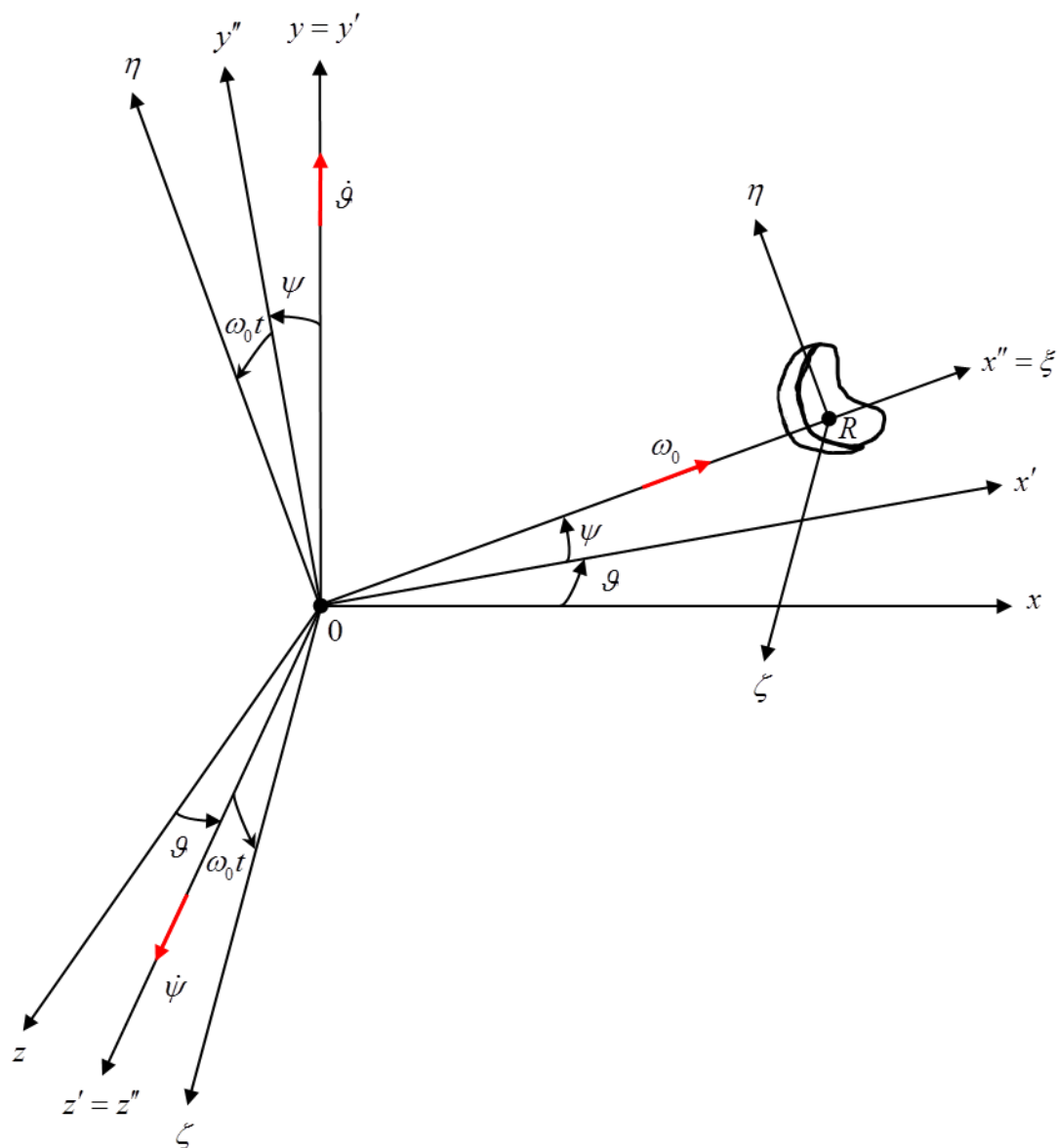
$$\bar{w}(x,t) = \mathbf{\Phi}(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_S \tilde{\mathbf{q}}_2(t) \quad (2.1.26)$$

a obdobně dosadíme (2.1.23) do (2.1.17) a dostaneme závislost natočení kolem osy y v obecném místě x na zobecněných posunutí krajních bodů

$$\vartheta(x,t) = -\mathbf{\Phi}'(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_S \tilde{\mathbf{q}}_2(t). \quad (2.1.27)$$

2.1.3 Odvození matic rotorového prvku a sestavení pohybové rovnice rotorového prvku

Pohybovou rovnicí rotoru lze získat pomocí Lagrangeových rovnic, a proto je nutné vyjádřit vztahy pro kinetickou a potenciální energii. Nejdříve se budeme věnovat kinetické energii, pro jejíž vyjádření si vytkneme element rotoru a zavedeme pomocné souřadnicové systémy x', y', z' , dále x'', y'', z'' a ξ, η, ζ , viz obr. 2.3.



Obr. 2.3 – Rotorový element a souřadnicové systémy

Pohyb elementu rozložíme dle základního rozkladu na unášivý pohyb posuvný referenčního bodu R a na sférický pohyb kolem referenčního bodu R . Nejprve se vytknutý element natočil okolo osy y o úhel precese g , poté okolo osy z' o úhel nutace ψ . Nakonec zavedeme rotaci konstantní úhlovou rychlostí ω_0 zmíněného elementu jako rotaci o úhel $\omega_0 t$ kolem osy rotace ξ .

Vektor rychlosti unášivého posuvného pohybu při zanedbání tahu má tvar

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{w}} \end{bmatrix} \quad (2.1.28)$$

a vektor výsledné úhlové rychlosti sférického pohybu při zanedbání krutu a deplanace má tvar

$$\boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\mathcal{G}} \sin(\psi) \\ \dot{\psi} \sin(\omega_0 t) + \dot{\mathcal{G}} \cos(\psi) \cos(\omega_0 t) \\ \dot{\psi} \cos(\omega_0 t) - \dot{\mathcal{G}} \cos(\psi) \sin(\omega_0 t) \end{bmatrix}, \quad (2.1.29)$$

kteřý lze přepsat při respektování malých výchylek a natočení ($\sin(\psi) = \psi$, $\cos(\psi) = 1$)

$$\boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\mathcal{G}}\psi \\ \dot{\psi} \sin(\omega_0 t) + \dot{\mathcal{G}} \cos(\omega_0 t) \\ \dot{\psi} \cos(\omega_0 t) - \dot{\mathcal{G}} \sin(\omega_0 t) \end{bmatrix}. \quad (2.1.30)$$

Celkovou kinetickou energii infinitezimálního elementu lze zapsat jako součet kinetické energie od unášivého posuvného pohybu a druhotného sférického pohybu. Po integraci přes objem konečného prvku dostaneme vztah pro celkovou kinetickou energii elementu ve tvaru

$$E_k^{(e)} = E_{kT}^{(e)} + E_{kS}^{(e)}. \quad (2.1.31)$$

Kinetickou energii elementu $E_{kT}^{(e)}$ od unášivého posuvného pohybu vyjádříme následovně

$$E_{kT}^{(e)} = \frac{1}{2} \rho A_e \int_0^{l_e} \mathbf{v}^T \mathbf{v} dx = \frac{1}{2} \rho A_e \int_0^{l_e} (\dot{\bar{v}}^2 + \dot{\bar{w}}^2) dx, \quad (2.1.32)$$

kde ρ je hustota, A_e představuje obsah průřezu elementu, $\dot{\bar{v}}, \dot{\bar{w}}$ jsou rychlosti bodů ležících na neutrální ose ($y=0, z=0$). Dosadíme-li do (2.1.32) časové derivace vztahů (2.1.12) a (2.1.26) z předchozí podkapitoly, můžeme přepsat kinetickou energii elementu od unášivého posuvného pohybu v maticové formě

$$E_{kT}^{(e)} = \frac{1}{2} \rho A_e \int_0^{l_e} \left[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Phi}^T(x) \boldsymbol{\Phi}(x) \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1(t) + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2^T(t) \mathbf{P}_S \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Phi}^T(x) \boldsymbol{\Phi}(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_S \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2(t) \right] dx. \quad (2.1.33)$$

Dále zavedeme indexové matice dle vztahu

$$\mathbf{I}_{ij}^{kl} = \int_0^{l_e} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^k \end{bmatrix}^T \frac{\partial^j}{\partial x^j} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^l \end{bmatrix} dx,$$

$$\mathbf{I}_{00}^{33} = \int_0^{l_e} \mathbf{\Phi}^T(x) \mathbf{\Phi}(x) dx, \quad \mathbf{I}_{11}^{33} = \int_0^{l_e} \mathbf{\Phi}'^T(x) \mathbf{\Phi}'(x) dx, \quad \mathbf{I}_{22}^{33} = \int_0^{l_e} \mathbf{\Phi}''^T(x) \mathbf{\Phi}''(x) dx. \quad (2.1.34)$$

Po integraci rovnice (2.1.33) s ohledem na (2.1.34) získáme

$$E_{kT}^{(e)} = \frac{1}{2} \left[\rho A_e \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1(t) + \rho A_e \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2^T(t) \mathbf{P}_S \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_S \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2(t) \right]. \quad (2.1.35)$$

Vztah (2.1.35) pro kinetickou energii elementu unášivého posuvného pohybu lze poté přepsat do tvaru

$$E_{kT}^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)T} \tilde{\mathbf{M}}_N^{(e)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)}, \quad (2.1.36)$$

kde $\tilde{\mathbf{M}}_N^{(e)}$ představuje matici hmotnosti elementu nepodléhající transformaci

$$\tilde{\mathbf{M}}_N^{(e)} = \begin{bmatrix} \rho A_e \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho A_e \mathbf{P}_S \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_S \end{bmatrix} \quad (2.1.37)$$

a $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)}$ je vektor zobecněných rychlostí

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1(t) & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2(t) \end{bmatrix}^T. \quad (2.1.38)$$

Kinetickou energii elementu od sférického pohybu lze vyjádřit ve tvaru

$$E_{kS}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta}^T d\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} dx, \quad (2.1.39)$$

kde $d\mathbf{I}$ je matice setrvačnosti infinitezimálního elementu a respektujeme-li skutečnost, že ξ je hlavní osou setrvačnosti, nabývá matice tvaru

$$d\mathbf{I} = \rho \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_\eta & D_{\eta\zeta} \\ 0 & -D_{\eta\zeta} & I_\zeta \end{bmatrix} dx. \quad (2.1.40)$$

Plošné kvadratické momenty setrvačnosti I_η a I_ζ jsou definovány dle obr. 2.4

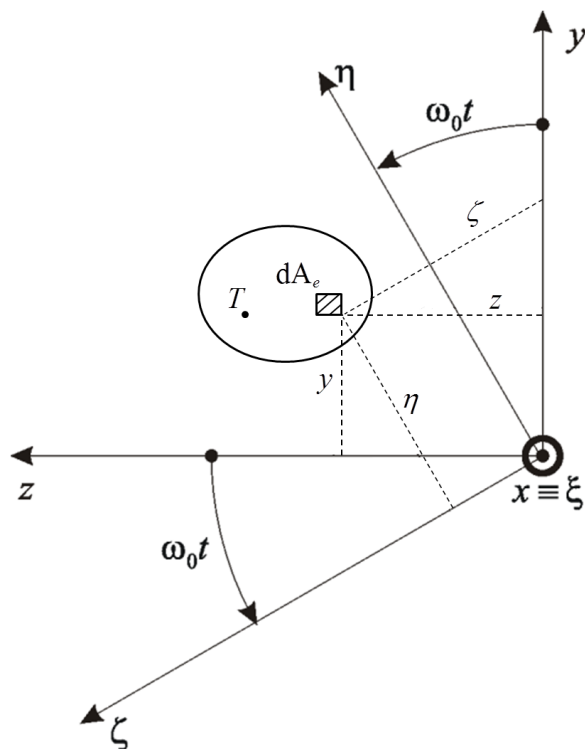
$$I_\eta = \int_{A_e} \zeta^2 dA_e, \quad I_\zeta = \int_{A_e} \eta^2 dA_e. \quad (2.1.41)$$

Polární moment setrvačnosti I_p lze určit ze vztahu

$$I_p = I_\eta + I_\zeta = \int_{A_e} (\zeta^2 + \eta^2) dA_e \quad (2.1.42)$$

a plošný deviační moment setrvačnosti $D_{\eta\zeta}$ je definován

$$D_{\eta\zeta} = \int_{A_e} \eta\zeta dA_e. \quad (2.1.43)$$



Obr. 2.4 – Průřez A_e v souřadnicovém systému ξ, η, ζ pevně spojeném s elementem

Po roznásobení ve vztahu (2.1.39) a zanedbání členů vyššího řádu získáme

$$\begin{aligned} E_{kS}^{(e)} = \frac{1}{2} \rho \int_0^{l_e} & \left[2I_p \omega_0 \psi \dot{\vartheta} + \cos^2(\omega_0 t) I_\eta \dot{\vartheta}^2 - 2 \cos^2(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} \dot{\psi} \dot{\vartheta} + \sin^2(\omega_0 t) I_\zeta \dot{\vartheta}^2 + \right. \\ & + 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) I_\eta \dot{\psi} \dot{\vartheta} - 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} \dot{\psi}^2 + 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} \dot{\vartheta}^2 + \\ & \left. + \sin^2(\omega_0 t) I_\eta \dot{\psi}^2 + 2 \sin^2(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} \dot{\psi} \dot{\vartheta} - 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) I_\zeta \dot{\psi} \dot{\vartheta} + \cos^2(\omega_0 t) I_\zeta \dot{\psi}^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (2.1.44)$$

Kinetickou energii elementu sférického pohybu zapíšeme

$$E_{kS}^{(e)} = E_{kS1}^{(e)} + E_{kS2}^{(e)}, \quad (2.1.45)$$

kde první člen vztahu (2.1.45) obsahuje člen vyjadřující gyroskopické účinky a s ohledem

na (2.1.13), časovou derivaci vztahu (2.1.27) a (2.1.34) lze psát

$$E_{ks1}^{(e)} = \frac{1}{2} \rho \int_0^{l_e} 2I_p \omega_0 \psi \dot{\vartheta} dx = -\omega_0 \rho I_p \tilde{\mathbf{q}}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2(t), \quad (2.1.46)$$

což lze vyjádřit maticově

$$E_{ks1}^{(e)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(e)T} \omega_0 \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)}, \quad (2.1.47)$$

kde

$$\omega_0 \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T} = \omega_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\rho I_p \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.1.48)$$

a $\tilde{\mathbf{q}}^{(e)}$ je vektor zobecněných výchylek

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = [\tilde{\mathbf{q}}_1(t) \quad \tilde{\mathbf{q}}_2(t)]^T. \quad (2.1.49)$$

Druhý člen vztahu (2.1.45) obsahuje zbývající nestacionární členy s goniometrickými funkcemi z (2.1.44)

$$\begin{aligned} E_{ks2}^{(e)} = \frac{1}{2} \rho \int_0^{l_e} & \left[\cos^2(\omega_0 t) I_\eta \dot{\vartheta}^2 - 2 \cos^2(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} \psi \dot{\vartheta} + \sin^2(\omega_0 t) I_\zeta \dot{\vartheta}^2 + \sin^2(\omega_0 t) I_\eta \dot{\psi}^2 + \right. \\ & + 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) I_\eta \psi \dot{\vartheta} - 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} \dot{\psi}^2 + 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} \dot{\vartheta}^2 + \\ & \left. + 2 \sin^2(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} \psi \dot{\vartheta} - 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) I_\zeta \psi \dot{\vartheta} + \cos^2(\omega_0 t) I_\zeta \dot{\psi}^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.1.50)$$

a po dosazení (2.1.13), (2.1.27), jejich časových derivací a (2.1.34) lze psát

$$\begin{aligned} E_{ks2}^{(e)} = \frac{1}{2} \rho \{ & [\cos^2(\omega_0 t) I_\zeta - 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} + \sin^2(\omega_0 t) I_\eta] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1(t) + \\ & + [2 \cos^2(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} + 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) I_\zeta - 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) I_\eta \\ & - 2 \sin^2(\omega_0 t) D_{\eta\zeta}] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2^T(t) \mathbf{P}_s \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2(t) + \\ & + [\cos^2(\omega_0 t) I_\eta + 2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) D_{\eta\zeta} + \sin^2(\omega_0 t) I_\zeta] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2^T(t) \mathbf{P}_s \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2(t) \}. \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

Vztah (2.1.51) lze formulovat maticově

$$E_{ks2}^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)T} \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)}, \quad (2.1.52)$$

kde $\tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)}$ představuje matici hmotnosti elementu podléhající transformaci

$$\tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} \rho I_\zeta \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \rho D_{\eta\zeta} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_S \\ \rho D_{\eta\zeta} \mathbf{P}_S \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \rho I_\eta \mathbf{P}_S \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_S \end{bmatrix} \quad (2.1.53)$$

a $\tilde{\mathbf{T}}(t)$ je transformační matice

$$\tilde{\mathbf{T}}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) \mathbf{I} & \sin(\omega_0 t) \mathbf{P}_S \\ -\sin(\omega_0 t) \mathbf{P}_S & \cos(\omega_0 t) \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.1.54)$$

Pro aplikaci Lagrangeových rovnic II. druhu je nutné vyjádřit derivaci transformační matice $\tilde{\mathbf{T}}(t)$

$$\dot{\tilde{\mathbf{T}}}(t) = \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{T}}(t), \quad (2.1.55)$$

kde jsme zavedli matici úhlové rychlosti rotace $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \omega_0 \mathbf{P}_S \\ -\omega_0 \mathbf{P}_S & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.1.56)$$

Celková kinetická energie rotorového elementu je dána součtem členů (2.1.36), (2.1.47) a (2.1.52)

$$E_k^{(e)} = E_{kT}^{(e)} + E_{ks1}^{(e)} + E_{ks2}^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)T} [\tilde{\mathbf{M}}_N^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t)] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)} + \tilde{\mathbf{q}}^{(e)T} \omega_0 \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(e)}. \quad (2.1.57)$$

Nyní se zaměříme na vyjádření potenciální energie. Dle obr. 2.2 lze posunutí obecného bodu o souřadnicích $[x; y; z]$ zapsat ve tvaru

$$u(x, t) = -y\psi(x, t) + z\mathcal{G}(x, t). \quad (2.1.58)$$

Prvky tenzoru deformace při prostorové napjatosti jsou v kartézských souřadnicích x, y, z dány kinematickými vztahy a s ohledem na (2.1.58) lze psát

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial \psi}{\partial x} + z \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = -y\psi' + z\mathcal{G}', \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.1.59)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) = \psi(x, t) - \psi(x, t) = 0, \quad (2.1.60)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \mathcal{G}(x, t) + \frac{\partial \bar{w}(x, t)}{\partial x} = \mathcal{G}(x, t) - \mathcal{G}(x, t) = 0, \quad (2.1.61)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (2.1.62)$$

Vztah mezi prvky tenzoru deformace a napětí vyjadřuje rozšířený Hookeův zákon v kartézském souřadnicovém systému ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.1.63)$$

kde ν značí Poissonovo číslo a E představuje modul pružnosti v tahu. Modul pružnosti ve smyku je definován $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Z (2.1.59) – (2.1.62) plyne, že napjatost v rotorovém prvku je vyjádřena pouze jednou nenulovou složkou napětí σ_x , ostatní složky jsou nulové a vektor napjatosti $\boldsymbol{\sigma}$ má tedy tvar

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.1.64)$$

a vektor deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$ má dle (2.1.59) – (2.1.62) tvar

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (2.1.65)$$

Dosadíme-li do Hookeova zákona (2.1.63) vztahy (2.1.64) – (2.1.65), získáme konstitutivní vztah mezi napětím a deformací

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.66)$$

nebo lépe zapsáno

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (2.1.67)$$

Odečtením 2. a 3. rovnice (2.1.67) získáme rovnost mezi poměrnými deformacemi v rovině yz

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \quad (2.1.68)$$

a zpětným dosazením do 2. rovnice získáme vztah mezi poměrnými deformacemi ve směru osy x a ostatními osami

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x. \quad (2.1.69)$$

Nakonec s ohledem na (2.1.69) vyplývá z 1. rovnice (2.1.67) následující

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \quad (2.1.70)$$

Potenciální energii deformace prvku můžeme vyjádřit ve tvaru

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (2.1.71)$$

V souladu s (2.1.64), (2.1.65) a (2.1.70) lze přepsat (2.1.71) následovně

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} E \int_V \varepsilon_x^2 dV \quad (2.1.72)$$

a dosadíme-li (2.1.59) s ohledem na (2.1.13) a (2.1.27), dostaneme

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} E \int_V \left[-y \tilde{\mathbf{q}}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Phi}^{nT}(x) - z \tilde{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{P}_s \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Phi}^{nT}(x) \right] \left[-y \boldsymbol{\Phi}^n(x) \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) - z \boldsymbol{\Phi}^n(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \tilde{\mathbf{q}}_2(t) \right] dV. \quad (2.1.73)$$

Po úpravě můžeme psát

$$\begin{aligned} E_p^{(e)} = \frac{1}{2} E \int_0^{l_e} \iint_{A_e} & \left[y^2 \tilde{\mathbf{q}}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Phi}^{nT}(x) \boldsymbol{\Phi}^n(x) \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) + 2yz \tilde{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{P}_s \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Phi}^{nT}(x) \boldsymbol{\Phi}^n(x) \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) \right. \\ & \left. + z^2 \tilde{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{P}_s \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Phi}^{nT}(x) \boldsymbol{\Phi}^n(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \tilde{\mathbf{q}}_2(t) \right] dA_e dx. \end{aligned} \quad (2.1.74)$$

Z obr. 2.4 lze snadno odvodit transformační vztahy mezi souřadnicovými systémy x, y, z

a ξ, η, ζ

$$y = \eta \cos(\omega_0 t) - \zeta \sin(\omega_0 t), \quad z = \eta \sin(\omega_0 t) + \zeta \cos(\omega_0 t). \quad (2.1.75)$$

Po dosazení (2.1.75) do (2.1.74) lze psát

$$\begin{aligned} E_p^{(e)} = & \frac{1}{2} E \int_0^{l_e} \iint_{A_e} \{ [\eta^2 \cos^2(\omega_0 t) - 2\eta\zeta \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) + \zeta^2 \sin^2(\omega_0 t)] \tilde{\mathbf{q}}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{\Phi}^{nT}(x) \mathbf{\Phi}^n(x) \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) + \\ & + 2[\eta^2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \eta\zeta \sin^2(\omega_0 t) + \eta\zeta \cos^2(\omega_0 t) - \\ & - \zeta^2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)] \tilde{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{P}_s \mathbf{\Phi}^{nT}(x) \mathbf{\Phi}^n(x) \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) + [\eta^2 \sin^2(\omega_0 t) + 2\eta\zeta \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) + \\ & + \zeta^2 \cos^2(\omega_0 t)] \tilde{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{P}_s \mathbf{\Phi}^{nT}(x) \mathbf{\Phi}^n(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \tilde{\mathbf{q}}_2(t) \} dA_e dx. \end{aligned} \quad (2.1.76)$$

Pro integraci přes plochu průřezu A_e využijeme vztahy (2.1.41), (2.1.43) a s ohledem na (2.1.34) můžeme vyjádřit potenciální energii deformace prvku

$$\begin{aligned} E_p^{(e)} = & \frac{1}{2} E \{ [I_\zeta \cos^2(\omega_0 t) - 2D_{\eta\zeta} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) + I_\eta \sin^2(\omega_0 t)] \tilde{\mathbf{q}}_1^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) + \\ & + 2[I_\zeta \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - D_{\eta\zeta} \sin^2(\omega_0 t) + D_{\eta\zeta} \cos^2(\omega_0 t) - \\ & - I_\eta \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)] \tilde{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{P}_s \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) + [I_\zeta \sin^2(\omega_0 t) + 2D_{\eta\zeta} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) + \\ & + I_\eta \cos^2(\omega_0 t)] \tilde{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{P}_s \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \tilde{\mathbf{q}}_2(t) \}. \end{aligned} \quad (2.1.77)$$

Vztah (2.1.77) lze formulovat maticově

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^{(e)T} \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \tilde{\mathbf{q}}^{(e)}, \quad (2.1.78)$$

kde $\tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)}$ představuje matici hmotnosti elementu podléhající transformaci

$$\tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} EI_\zeta \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & ED_{\eta\zeta} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \\ ED_{\eta\zeta} \mathbf{P}_s \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & EI_\eta \mathbf{P}_s \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \end{bmatrix}. \quad (2.1.79)$$

Pohybové rovnice rotorového prvku vyjádříme pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu, které mají tvar bez tlumení a vnějšího buzení následující

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_i^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_i^{(e)}} = \mathbf{0} \quad \text{pro } i = 1, 2, \quad (2.1.80)$$

kde $\tilde{\mathbf{q}}_i$ představuje vektor zobecněných souřadnic. Aplikací Lagrangeových rovnic II. druhu na celkovou kinetickou (2.1.57) a potenciální (2.1.78) energii rotorového elementu získáme

pohybovou rovnicí rotorového prvku s ohledem na (2.1.55) ve tvaru

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{M}}_N^{(e)} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}^T(t) [\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} + \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}] \tilde{\mathbf{T}}(t) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \\ & + \omega_0 \left[\tilde{\mathbf{C}}^{(e)} - \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T} \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.1.81)$$

kde matice $\omega_0 \left[\tilde{\mathbf{C}}^{(e)} - \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T} \right]$ odpovídá antisymetrické matici gyroskopických účinků elementu $\omega_0 \tilde{\mathbf{G}}^{(e)}$

$$\omega_0 \tilde{\mathbf{G}}^{(e)} = \omega_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \rho I_p \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}_s \\ -\rho I_p \mathbf{P}_s \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.1.82)$$

a matice $\tilde{\mathbf{T}}^T(t) [\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} + \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}] \tilde{\mathbf{T}}(t)$ odpovídá symetrické matici Coriolisových účinků elementu $\tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{B}}_C^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t)$

$$\tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{B}}_C^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) = \tilde{\mathbf{T}}^T(t) [\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} + \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}] \tilde{\mathbf{T}}(t). \quad (2.1.83)$$

Dále budeme-li uvažovat slabě (proporcionálně) tlumenou soustavu, kde matice tlumení elementu $\tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{B}}_{prop}^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t)$ podléhající transformaci je dána lineární kombinací matic hmotnosti a tuhosti, tedy

$$\tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{B}}_{prop}^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) = \alpha \left[\tilde{\mathbf{M}}_N^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \right] + \beta \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t). \quad (2.1.84)$$

Při volbě koeficientů $\alpha = 0$, $\beta = 10^{-4}$, bude mít matice tlumení elementu tvar

$$\tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{B}}_{prop}^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) = \beta \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t). \quad (2.1.85)$$

V souladu s (2.1.82), (2.1.83) a (2.1.85) můžeme zapsat finální podobu pohybové rovnice rotorového prvku ve tvaru

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{\mathbf{M}}_N^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \right] \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \left[\omega_0 \tilde{\mathbf{G}}^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{B}}_{prop}^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{B}}_C^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \\ & + \left[\tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \right] \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.1.86)$$

2.1.4 Model rotoru s rotačně nesymetrickým průřezem

Jak je uvedeno v podkapitole 2.1.1, rotor s rotačně nesymetrickým průřezem je rozdělen na n konečný počet prvků, z nichž každý je popsán pohybovou rovnicí rotorového elementu (2.1.86). Prvky matic obsažených ve zmíněné pohybové rovnici jsou řazeny dle vektoru zobecněných výchylek $\tilde{\mathbf{q}}^{(e)}(t)$ (viz (2.1.49))

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{q}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}(0,t) \\ \psi(0,t) \\ \bar{v}(l_e,t) \\ \psi(l_e,t) \\ \bar{w}(0,t) \\ \mathcal{G}(0,t) \\ \bar{w}(l_e,t) \\ \mathcal{G}(l_e,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \psi_1(t) \\ v_2(t) \\ \psi_2(t) \\ w_1(t) \\ \mathcal{G}_1(t) \\ w_2(t) \\ \mathcal{G}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.1.87)$$

Pořadí souřadnic ve vektoru (2.1.87) je nepraktické, protože parametry krajních bodů jsou promíchány. Abychom od sebe oddělili parametry obou krajních bodů, zavedeme transformační vztah využívající permutační matici \mathbf{J}_q

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(e)}(t) = \mathbf{J}_q \mathbf{q}^{(e)}(t), \quad (2.1.88)$$

po rozepsání

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ \psi_1(t) \\ v_2(t) \\ \psi_2(t) \\ w_1(t) \\ \mathcal{G}_1(t) \\ w_2(t) \\ \mathcal{G}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ w_1(t) \\ \mathcal{G}_1(t) \\ \psi_1(t) \\ v_2(t) \\ w_2(t) \\ \mathcal{G}_2(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.1.89)$$

Pro matice rotorového prvku, které nepodléhají transformaci a odpovídají řazení daným vztahem (2.1.88), platí

$$\mathbf{X}^{(e)} = \mathbf{J}_q^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{J}_q. \quad (2.1.90)$$

Pro matice rotorového prvku, které podléhají transformaci a odpovídají řazení daným vztahem (2.1.88), platí

$$\mathbf{X}^{(e)}(t) = \mathbf{J}_q^T \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \mathbf{J}_q = \mathbf{T}^T(t) \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{T}(t), \quad (2.1.91)$$

kde

$$\mathbf{T}(t) = \tilde{\mathbf{T}}(t) \mathbf{J}_q =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \end{bmatrix}. \quad (2.1.92)$$

Po transformaci dle (2.1.90) a (2.1.91) můžeme přepsat pohybovou rovnici rotorového prvku do tvaru

$$[\mathbf{M}_N^{(e)} + \mathbf{M}_1^{(e)}(t)] \ddot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) + [\omega_0 \mathbf{G}^{(e)} + \mathbf{B}_{prop}^{(e)}(t) + \mathbf{B}_C^{(e)}(t)] \dot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) + \mathbf{K}_1^{(e)}(t) \mathbf{q}^{(e)}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.1.93)$$

Při sestavování globálních matic soustavy \mathbf{X} postupně přičteme ve smyslu MKP příspěvky od jednotlivých matic $\mathbf{X}^{(e)}$ dle následujícího schématu

$$\mathbf{X}^{(e)} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{X}^{(1)}} & & & & \\ & \boxed{\mathbf{X}^{(2)}} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \boxed{\mathbf{X}^{(n)}} & \\ & & & & \end{bmatrix}. \quad (2.1.94)$$

Matematický model rotorové soustavy má po sestavení globálních matic soustavy tento tvar

$$[\mathbf{M}_N + \mathbf{M}_1(t)] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}_{prop}(t) + \mathbf{B}_C(t)] \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_1(t) \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.1.95)$$

2.2 Analytické periodické řešení systému

V kapitole 1.1 jsme se zabývali hledáním analytického řešení parametrického systému s 1 stupněm volnosti. V předchozí kapitole 2.1 jsme rozdělili rotor s rotačně nesymetrickým průřezem na konečný počet prvků pomocí MKP a každému rotorovému elementu jsme přiřadili 8 stupňů volnosti ve dvou krajních uzlech elementu. Nakonec jsme získali matematický model rotorové soustavy (2.1.95) v maticovém tvaru

$$[\mathbf{M}_N + \mathbf{M}_1(t)]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}_{prop}(t) + \mathbf{B}_c(t)]\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_1(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}.$$

Proto je nezbytné rozšířit a zobecnit hledání analytického řešení parametrického systému pro n stupňů volnosti.

Nejdříve přepíšeme zmíněný matematický model parametrické soustavy do tvaru

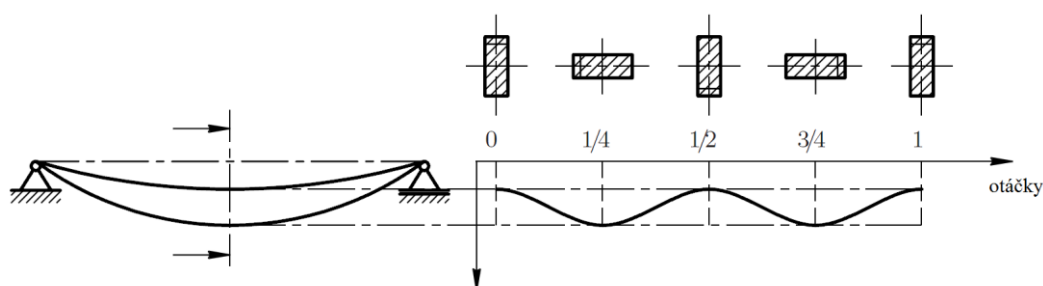
$$[\mathbf{M}_N + \mathbf{M}(t)]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}(t)]\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.2.1)$$

kde jsme zavedli periodicky proměnné matice

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_1(t), \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_{prop}(t) + \mathbf{B}_c(t), \quad \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_1(t), \quad (2.2.2)$$

dále periodicky proměnný vektor zobecněného buzení $\mathbf{f}(t)$.

Periodicitu matic (2.2.2) lze snadno dokázat dle [10] na příkladu rotoru s rotačně nesymetrickým průřezem, který je symetrický jen podél dvou os, a proto průhyb rotoru je závislý na poloze průřezu, tzn. na úhlu otáčení ω_0 kolem osy rotace. Jak je zřejmé z obr. 2.5, při otočení o úhel 2π se průřez dostane dvakrát do stejné polohy, z čehož plyne zmíněná periodicitu matic soustavy.



Obr. 2.5 – Model rotoru s rotačně nesymetrickým průřezem [10]

Díky T -periodicitě časově proměnných matic $\mathbf{M}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{K}(t)$ a vektoru $\mathbf{f}(t)$ můžeme předpokládat i periodicitu odezvy systému $\mathbf{q}(t)$ s periodou T . Všechny zmíněné matice a vektory musí splňovat podmínky periodicity a lze je zapsat ve formě Fourierovy řady

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(t+T) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{M}_j e_j(t) = \mathbf{M}_0 + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{M}_j e_j(t), \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t+T) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{B}_j e_j(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{B}_j e_j(t), \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(t+T) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{K}_j e_j(t) = \mathbf{K}_0 + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{K}_j e_j(t), \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t+T) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{f}_j e_j(t), \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t+T), \quad (2.2.7)$$

kde vektor $\mathbf{e}(t)$ je dle (1.1.7) tvořen těmito prvky

$$\mathbf{e}(t) = [e_{-N}(t) \quad \dots \quad e_{-1}(t) \quad 1 \quad e_1(t) \quad \dots \quad e_N(t)]^T \in \mathbb{C}^{2N+1,1}$$

a v souladu s (1.1.8) lze zkráceně psát

$$e_j(t) = e^{ij\omega_0 t}.$$

Pro základní úhlovou frekvenci platí vztah

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.2.8)$$

Ve vztazích (2.2.3) – (2.2.6) jsme zavedli vektor s Fourierovými koeficienty \mathbf{f}_j a matice s Fourierovými koeficienty $\mathbf{M}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{K}_j$. Struktura těchto koeficientových matic se nejlépe odvodí na prvkové úrovni, tj. před sestavením globálních matic modelu dle struktury (2.1.94). Tedy pro matice rotorového prvku podléhající transformaci platí dle (2.1.91)

$$\mathbf{X}^{(e)}(t) = \mathbf{J}_q^T \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \mathbf{J}_q = \mathbf{T}^T(t) \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{T}(t),$$

kde matice $\mathbf{T}(t)$ je tvořena periodicky proměnnými funkcemi $\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)$, viz (2.1.92). Rovnice (2.1.91) lze přepsat do formy

$$\mathbf{X}^{(e)}(t) = \mathbf{T}^T(t) \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{T}(t) = (\mathbf{C} + \mathbf{S})^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} (\mathbf{C} + \mathbf{S}) = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{C} + \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{S}, \quad (2.2.9)$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) \\ 0 & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

a

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\omega_0 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\omega_0 t) & 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\omega_0 t) \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

Jednotlivé členy rovnice (2.2.9) lze rozepsat jako součin permutačních matic s původní maticí $\tilde{\mathbf{X}}^{(e)}$. První člen $\mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{C}$ tedy vyjádříme následovně

$$\mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{C} = \cos^2(\omega_0 t) \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & x_{14} \\ 0 & x_{55} & x_{56} & 0 & 0 & x_{57} & x_{58} & 0 \\ 0 & x_{65} & x_{66} & 0 & 0 & x_{67} & x_{68} & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & x_{24} \\ x_{31} & 0 & 0 & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & x_{34} \\ 0 & x_{75} & x_{76} & 0 & 0 & x_{77} & x_{78} & 0 \\ 0 & x_{85} & x_{86} & 0 & 0 & x_{87} & x_{88} & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 & x_{44} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2(\omega_0 t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \quad (2.2.12) \\
&= \cos^2(\omega_0 t) \mathbf{J}_C^I \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{J}_C^H = \cos^2(\omega_0 t) \tilde{\mathbf{X}}_C.
\end{aligned}$$

Obdobně rozepíšeme člen $\mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{S} = \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \begin{bmatrix} 0 & x_{11} & -x_{12} & 0 & 0 & x_{13} & -x_{14} & 0 \\ -x_{55} & 0 & 0 & x_{56} & -x_{57} & 0 & 0 & x_{58} \\ -x_{65} & 0 & 0 & x_{66} & -x_{67} & 0 & 0 & x_{68} \\ 0 & x_{21} & -x_{22} & 0 & 0 & x_{23} & -x_{24} & 0 \\ 0 & x_{31} & -x_{32} & 0 & 0 & x_{33} & -x_{34} & 0 \\ -x_{75} & 0 & 0 & x_{76} & -x_{77} & 0 & 0 & x_{78} \\ -x_{85} & 0 & 0 & x_{86} & -x_{87} & 0 & 0 & x_{88} \\ 0 & x_{41} & -x_{42} & 0 & 0 & x_{43} & -x_{44} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \mathbf{J}_C^I \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{J}_{CS}^I = \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \tilde{\mathbf{X}}_{CS}. \quad (2.2.13)
\end{aligned}$$

Dále vyjádříme člen $\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{C}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{C} &= \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \begin{bmatrix} 0 & -x_{55} & -x_{56} & 0 & 0 & -x_{57} & -x_{58} & 0 \\ x_{11} & 0 & 0 & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & x_{14} \\ -x_{21} & 0 & 0 & -x_{22} & -x_{23} & 0 & 0 & -x_{24} \\ 0 & x_{65} & x_{66} & 0 & 0 & x_{67} & x_{68} & 0 \\ 0 & -x_{75} & -x_{76} & 0 & 0 & -x_{77} & -x_{78} & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & x_{34} \\ -x_{41} & 0 & 0 & -x_{42} & -x_{43} & 0 & 0 & -x_{44} \\ 0 & x_{85} & x_{86} & 0 & 0 & x_{87} & x_{88} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \mathbf{J}_S^I \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{J}_{CS}^H = \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \tilde{\mathbf{X}}_{CS}^T.
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Nakonec upravíme člen $\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{S}$

$$\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{S} = \sin^2(\omega_0 t) \begin{bmatrix} x_{55} & 0 & 0 & -x_{56} & x_{57} & 0 & 0 & -x_{58} \\ 0 & x_{11} & -x_{12} & 0 & 0 & x_{13} & -x_{14} & 0 \\ 0 & -x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & -x_{23} & x_{24} & 0 \\ -x_{65} & 0 & 0 & x_{66} & -x_{67} & 0 & 0 & x_{68} \\ x_{75} & 0 & 0 & -x_{76} & x_{77} & 0 & 0 & -x_{78} \\ 0 & x_{31} & -x_{32} & 0 & 0 & x_{33} & -x_{34} & 0 \\ 0 & -x_{41} & x_{42} & 0 & 0 & -x_{43} & x_{44} & 0 \\ -x_{85} & 0 & 0 & x_{86} & -x_{87} & 0 & 0 & x_{88} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2(\omega_0 t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \\
&= \sin^2(\omega_0 t) \mathbf{J}_S^I \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{J}_S^H = \sin^2(\omega_0 t) \tilde{\mathbf{X}}_S.
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Dosadíme-li (2.2.12) – (2.2.15) do vztahu (2.2.9), lze psát

$$\mathbf{X}^{(e)}(t) = \cos^2(\omega_0 t) \tilde{\mathbf{X}}_C + \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) (\tilde{\mathbf{X}}_{CS} + \tilde{\mathbf{X}}_{CS}^T) + \sin^2(\omega_0 t) \tilde{\mathbf{X}}_S, \tag{2.2.16}$$

z čehož vyplývá, že prvky matic rotorového elementu jsou násobeny pouze periodickými funkcemi $\cos^2(\omega_0 t)$, $\sin^2(\omega_0 t)$ a $\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)$. Zmíněné periodické funkce rozvineme ve Fourierovy řady dle vztahů, viz [3],

$$f(t) = \sum_{j=-N}^N c_j e^{ij\omega_0 t}, \quad c_j = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ij\omega_0 t} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(t) e^{-ij\omega_0 t} dt. \tag{2.2.17}$$

Pro funkci $\cos^2(\omega_0 t)$ získáme

$$c_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos^2(\omega_0 t) e^0 dt = \frac{1}{2}, \tag{2.2.18}$$

$$c_2 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos^2(\omega_0 t) e^{-2i\omega_0 t} dt = \frac{1}{4}, \tag{2.2.19}$$

$$c_{-2} = c_2 = \frac{1}{4}, \tag{2.2.20}$$

a tedy dle (2.2.17) lze psát

$$\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (e^{-2i\omega_0 t} + e^{2i\omega_0 t}). \tag{2.2.21}$$

Dále pro funkci $\sin^2(\omega_0 t)$ obdržíme

$$c_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \sin^2(\omega_0 t) e^0 dt = \frac{1}{2}, \quad (2.2.22)$$

$$c_2 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \sin^2(\omega_0 t) e^{-2i\omega_0 t} dt = -\frac{1}{4}, \quad (2.2.23)$$

$$c_{-2} = c_2 = -\frac{1}{4}, \quad (2.2.24)$$

a tedy dle (2.2.17) lze psát

$$\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (e^{-2i\omega_0 t} + e^{2i\omega_0 t}). \quad (2.2.25)$$

Nakonec pro funkci $\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)$ dostaneme

$$c_2 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) e^{-2i\omega_0 t} dt = -\frac{i}{4}, \quad (2.2.26)$$

$$c_{-2} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) e^{2i\omega_0 t} dt = \frac{i}{4}, \quad (2.2.27)$$

a tedy dle (2.2.17) lze psát

$$\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) = \frac{i}{4} (e^{-2i\omega_0 t} - e^{2i\omega_0 t}). \quad (2.2.28)$$

Nyní za periodické funkce dosadíme do vztahu (2.2.16) Fourierovy řady (2.2.21), (2.2.25), (2.2.28) a získáme Fourierovu řadu matice rotorového prvku podléhající transformaci

$$\mathbf{X}^{(e)}(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} (e^{-2i\omega_0 t} + e^{2i\omega_0 t}) \right] \tilde{\mathbf{X}}_C + \frac{i}{4} (e^{-2i\omega_0 t} - e^{2i\omega_0 t}) (\tilde{\mathbf{X}}_{CS} + \tilde{\mathbf{X}}_{CS}^T) + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} (e^{-2i\omega_0 t} + e^{2i\omega_0 t}) \right] \tilde{\mathbf{X}}_S, \quad (2.2.29)$$

což lze vyjádřit jako

$$\mathbf{X}^{(e)}(t) = \tilde{\mathbf{X}}_0^{(e)} + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \tilde{\mathbf{X}}_j^{(e)} e_j(t), \quad (2.2.30)$$

kte stacionární koeficientová matice rotorového prvku má tvar

$$\tilde{\mathbf{X}}_0^{(e)} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{X}}_C + \tilde{\mathbf{X}}_S) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_C^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{J}_C + \mathbf{J}_S^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{J}_S) =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} + x_{55} & 0 & 0 & x_{12} - x_{56} & x_{13} + x_{57} & 0 & 0 & x_{14} - x_{58} \\ 0 & x_{55} + x_{11} & x_{56} - x_{12} & 0 & 0 & x_{57} + x_{13} & x_{58} - x_{14} & 0 \\ 0 & x_{65} - x_{21} & x_{66} + x_{22} & 0 & 0 & x_{67} - x_{23} & x_{68} + x_{24} & 0 \\ x_{21} - x_{65} & 0 & 0 & x_{22} + x_{66} & x_{23} - x_{67} & 0 & 0 & x_{24} + x_{68} \\ x_{31} + x_{75} & 0 & 0 & x_{32} - x_{76} & x_{33} + x_{77} & 0 & 0 & x_{34} - x_{78} \\ 0 & x_{75} + x_{31} & x_{76} - x_{32} & 0 & 0 & x_{77} + x_{33} & x_{78} - x_{34} & 0 \\ 0 & x_{85} - x_{41} & x_{86} + x_{42} & 0 & 0 & x_{87} - x_{43} & x_{88} + x_{44} & 0 \\ x_{41} - x_{85} & 0 & 0 & x_{42} + x_{86} & x_{43} - x_{87} & 0 & 0 & x_{44} + x_{88} \end{bmatrix} \quad (2.2.31)$$

a ostatní členy Fourierovy řady jsme označili

$$\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \tilde{\mathbf{X}}_j^{(e)} e_j(t) = \frac{1}{4} (e^{-2i\omega_0 t} + e^{2i\omega_0 t}) \tilde{\mathbf{X}}_C + \frac{i}{4} (e^{-2i\omega_0 t} - e^{2i\omega_0 t}) (\tilde{\mathbf{X}}_{CS} + \tilde{\mathbf{X}}_{CS}^T) - \frac{1}{4} (e^{-2i\omega_0 t} + e^{2i\omega_0 t}) \tilde{\mathbf{X}}_S. \quad (2.2.32)$$

Při sestavování globálních matic \mathbf{X} postupujeme analogicky jako v podkapitole 2.1.4 dle schématu (2.1.94)

$$\mathbf{X}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} & & & \\ & \mathbf{X}^{(2)} & & \\ & & \dots & \\ & & & \mathbf{X}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Poté s ohledem na (2.2.3) – (2.2.6) lze vyjádřit matematický model (2.2.1) následovně

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_N + \mathbf{M}_0 + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{M}_j e_j(t) \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \begin{bmatrix} \omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}_0 + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{B}_j e_j(t) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{K}_j e_j(t) \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{f}_j e_j(t), \quad (2.2.33)$$

a když zavedeme stacionární matice

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_N + \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{B}_S = \omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{K}_S = \mathbf{K}_0, \quad (2.2.34)$$

můžeme psát

$$\left[\mathbf{M}_S + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{M}_j e_j(t) \right] \ddot{\mathbf{q}}(t) + \left[\mathbf{B}_S + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{B}_j e_j(t) \right] \dot{\mathbf{q}}(t) + \left[\mathbf{K}_S + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{K}_j e_j(t) \right] \mathbf{q}(t) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{f}_j e_j(t). \quad (2.2.35)$$

Pro další postup je nutné předpokládat existenci T -periodického řešení, tj. neznámé výchylky $\mathbf{q}(t)$ jsou řešením výše zmíněné pohybové rovnice (2.2.1) a po převedení časově proměnných členů na pravou stranu rovnice získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}_S \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_S \mathbf{q}(t) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{f}_j e_j(t) - \left(\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{M}_j e_j(t) \right) \ddot{\mathbf{q}}(t) - \\ - \left(\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{B}_j e_j(t) \right) \dot{\mathbf{q}}(t) - \left(\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbf{K}_j e_j(t) \right) \mathbf{q}(t). \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Protože chceme určit periodické řešení, tj. ustálenou odezvu systému, hledáme partikulární řešení rovnice (2.2.1) a neuvažujeme tedy homogenní část řešení, přesněji přechodovou fázi kmitů.

Nyní využijeme PGF $\mathbf{H}(t)$, kterou definujeme jako výchozí bod pro hledání periodického řešení zmíněné pohybové rovnice. PGF lze chápat jako odezvu stacionární části rovnice (2.2.36) na buzení v k -tém místě ve tvaru Diracova hřebene jednotkových impulsů opakujících se s periodou T , která odpovídá nejnižší periodě parametrů systému a buzení, tedy

$$\mathbf{i}_k \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N e^{ij\omega_0 t} = \mathbf{i}_k \delta_T(t). \quad (2.2.37)$$

Diracův hřeben je vykreslen na obr. 1.2 a lze jej vyjádřit pomocí Fourierovy řady dle (1.1.15) a (1.1.16) takto

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N e^{ij\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N \cos(j\omega_0 t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N e_j(t).$$

Zmíněná odezva ve tvaru Diracova hřebene odpovídá partikulárnímu řešení stacionární části rovnice (2.2.36)

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{H}}^{(k)}(t) + \mathbf{B}_S \dot{\mathbf{H}}^{(k)}(t) + \mathbf{K}_S \mathbf{H}^{(k)}(t) = \mathbf{i}_k \delta_T(t). \quad (2.2.38)$$

Díky linearitě systému lze využít principu superpozice a PGF lze vyjádřit následovně

$$\mathbf{H}^{(k)}(t) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{H}_j^{(k)}(t), \quad (2.2.39)$$

kde $\mathbf{H}_j^{(k)}$ je odezva v ustáleném stavu odpovídající j -té harmonické v k -tém místě, a proto lze řešení rozdělit na řešení systému nezávislých rovnic

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{H}}_j^{(k)}(t) + \mathbf{B}_s \dot{\mathbf{H}}_j^{(k)}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{H}_j^{(k)}(t) = \frac{1}{T} \mathbf{i}_k e_j(t). \quad (2.2.40)$$

Partikulární řešení odpovídající j -té harmonické odhadneme ve tvaru

$$\mathbf{H}_j^{(k)}(t) = \hat{\mathbf{H}}_j^{(k)} e_j(t) = \hat{\mathbf{H}}_j^{(k)} e^{ij\omega_0 t}, \quad (2.2.41)$$

kde $\hat{\mathbf{H}}_j^{(k)}$ je amplituda a derivace (2.2.41) jsou

$$\dot{\mathbf{H}}_j^{(k)}(t) = ij\omega_0 \hat{\mathbf{H}}_j^{(k)} e^{ij\omega_0 t}, \quad \ddot{\mathbf{H}}_j^{(k)}(t) = -j^2 \omega_0^2 \hat{\mathbf{H}}_j^{(k)} e^{ij\omega_0 t}. \quad (2.2.42)$$

Po dosazení odhadu partikulárního řešení (2.2.41) a jeho derivací (2.2.42) získáme komplexní amplitudu odezvy na j -tou harmonickou složku buzení v k -tém místě ve tvaru

$$\mathbf{H}_j^{(k)}(t) = \frac{1}{T} \mathbf{L}_j \mathbf{i}_k e_j(t), \quad (2.2.43)$$

kde \mathbf{L}_j označuje matici dynamické poddajnosti odpovídající j -té harmonické

$$\mathbf{L}_j = \left(-j^2 \omega_0^2 \mathbf{M}_s + ij\omega_0 \mathbf{B}_s + \mathbf{K}_s \right)^{-1} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (2.2.44)$$

Celková PGF je poté dána jako suma

$$\mathbf{H}_T(t) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{H}_j^{(k)}(t) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j e_j(t). \quad (2.2.45)$$

Celkovou odezvu systému (2.2.36) na vnější parametrické buzení lze vyjádřit ve formě konvolučního integrálu

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) = & \int_0^T \mathbf{H}_T(t-s) \mathbf{f}(s) ds - \int_0^T \mathbf{H}_T(t-s) \mathbf{M}(s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds - \\ & - \int_0^T \mathbf{H}_T(t-s) \mathbf{B}(s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds - \int_0^T \mathbf{H}_T(t-s) \mathbf{K}(s) \mathbf{q}(s) ds, \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

kde PGF v čase $(t-s)$ má tvar

$$\mathbf{H}_T(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j e_j(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j e_j(t) e_{-j}(s). \quad (2.2.47)$$

Dosadíme-li do rovnice (2.2.46) Fourierovy řady (2.2.3) – (2.2.6) s ohledem na (2.2.47), získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) = & \frac{1}{T} \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \mathbf{L}_j \mathbf{f}_k e_j(t) \int_0^T e_{k-j}(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \mathbf{L}_j \mathbf{M}_k e_j(t) e_{k-j}(s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \mathbf{L}_j \mathbf{B}_k e_j(t) e_{k-j}(s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=-N}^N \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \mathbf{L}_j \mathbf{K}_k e_j(t) e_{k-j}(s) \mathbf{q}(s) ds, \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

kde vektor \mathbf{f}_k s Fourierovými koeficienty je dán

$$\mathbf{f}_k = [f_k^{(1)} \quad f_k^{(2)} \quad \dots \quad f_k^{(n)}]^T \in \mathbb{C}^{n,1}. \quad (2.2.49)$$

Vztah (2.2.48) představuje integro- diferenciální rovnici s degenerovaným jádrem pro funkci $\mathbf{q}(t)$. Zavedeme-li matice $\mathbf{A}_{j,k}^M, \mathbf{A}_{j,k}^B, \mathbf{A}_{j,k}^K \in \mathbb{C}^{n(2N+1), n(2N+1)}$

$$\mathbf{A}_{j,k}^M = \begin{cases} \mathbf{L}_j \mathbf{M}_{k+j} & \text{pro } k+j \in \langle -N, \dots, -1, 1, \dots, N \rangle, \\ \mathbf{0} & \text{pro } k+j \notin \langle -N, \dots, -1, 1, \dots, N \rangle, \end{cases} \quad (2.2.50)$$

$$\mathbf{A}_{j,k}^B = \begin{cases} \mathbf{L}_j \mathbf{B}_{k+j} & \text{pro } k+j \in \langle -N, \dots, -1, 1, \dots, N \rangle, \\ \mathbf{0} & \text{pro } k+j \notin \langle -N, \dots, -1, 1, \dots, N \rangle, \end{cases} \quad (2.2.51)$$

$$\mathbf{A}_{j,k}^K = \begin{cases} \mathbf{L}_j \mathbf{K}_{k+j} & \text{pro } k+j \in \langle -N, \dots, -1, 1, \dots, N \rangle, \\ \mathbf{0} & \text{pro } k+j \notin \langle -N, \dots, -1, 1, \dots, N \rangle, \end{cases} \quad (2.2.52)$$

definujeme-li matici $\mathbf{E}(t) \in \mathbb{C}^{n, n(2N+1)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) = & [e_{-N}(t)\mathbf{I} \quad e_{-N+1}(t)\mathbf{I} \quad \dots \quad e_N(t)\mathbf{I}] = \\ = & \begin{bmatrix} e_{-N} & & & e_{-N+1} & & \dots & e_N \\ & e_{-N} & & & e_{-N+1} & & \dots & e_N \\ & & \ddots & & & \ddots & & \dots \\ & & & e_{-N} & & e_{-N+1} & & \dots \\ & & & & & & \dots & e_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

a respektujeme-li podmínku ortogonality (1.1.34) funkcí sinus a cosinus v prvním integrálu

vztahu (2.2.48)

$$\int_0^T e_{k-j}(s) ds = \int_0^T e^{ik\omega s} e^{-ij\omega s} ds = T\delta_{kj} = \begin{cases} T & \text{pro } k = j, \\ 0 & \text{pro } k \neq j, \end{cases}$$

můžeme celkovou odezvu systému (2.2.48) zapsat takto

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) = & \sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j e_j(t) - \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(t) \mathbf{A}^M \mathbf{E}^T(s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(t) \mathbf{A}^B \mathbf{E}^T(s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(t) \mathbf{A}^K \mathbf{E}^T(s) \mathbf{q}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

Poté zavedeme substituce

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}^K \mathbf{E}^T(s) \mathbf{q}(s) ds, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}^B \mathbf{E}^T(s) \dot{\mathbf{q}}(s) ds, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}^M \mathbf{E}^T(s) \ddot{\mathbf{q}}(s) ds, \quad (2.2.55)$$

kteřé dosadíme do (2.2.54) a získáme

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j e_j(t) - \mathbf{E}(t) \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{E}(t) \boldsymbol{\beta} - \mathbf{E}(t) \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.2.56)$$

kde $\sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j e_j(t)$ reprezentuje periodickou odezvu stacionární části na vnější buzení z rovnice (2.2.35) a ostatní členy vztahu (2.2.56) vyjadřují periodickou odezvu stacionární části na parametrické buzení z rovnice (2.2.35).

Pro další postup bude nutné provést první a druhou derivaci vztahu (2.2.56), ale nejdříve je potřeba uvést časové derivace $\mathbf{E}(t)$

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = i\omega_0 \mathbf{N} \mathbf{E}(t), \quad \ddot{\mathbf{E}}(t) = -\omega_0^2 \mathbf{N}^2 \mathbf{E}(t), \quad (2.2.57)$$

kde \mathbf{N} je diagonální matice dle (1.1.43)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -N\mathbf{I} & & & & \\ & (-N+1)\mathbf{I} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (N+1)\mathbf{I} & \\ & & & & N\mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{n(2N+1), n(2N+1)} \quad (2.2.58)$$

a dle (1.1.44) platí

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \mathbf{N}.$$

Nyní můžeme vyjádřit hledanou první a druhou derivaci vztahu (2.2.56) následovně

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = i\omega_0 \left[\sum_{j=-N}^N j \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j e_j(t) - \mathbf{E}(t) \mathbf{N} \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{E}(t) \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{E}(t) \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha} \right], \quad (2.2.59)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\omega_0^2 \left[\sum_{j=-N}^N j^2 \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j e_j(t) - \mathbf{E}(t) \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{E}(t) \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\beta} - \mathbf{E}(t) \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\alpha} \right]. \quad (2.2.60)$$

Rovnici (2.2.56) vynásobíme zleva $\frac{1}{T} \mathbf{A}^K \mathbf{E}^T(t)$, integrujeme na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a v souladu s (2.2.55) získáme vztah

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} \mathbf{L} \hat{\mathbf{f}} - \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.2.61)$$

při platnosti

$$\int_0^T \mathbf{E}^T(t) \mathbf{E}(t) dt = T \hat{\mathbf{I}}, \quad (2.2.62)$$

$$\sum_{j=-N}^N \int_0^T \mathbf{E}^T(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j = T \hat{\mathbf{I}} \mathbf{L} \hat{\mathbf{f}}, \quad (2.2.63)$$

$$\sum_{j=-N}^N j \int_0^T \mathbf{E}^T(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j = T \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \mathbf{L} \hat{\mathbf{f}}, \quad (2.2.64)$$

$$\sum_{k=-N}^N j^2 \int_0^T \mathbf{E}^T(t) e_j(t) dt \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j = T \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \mathbf{L} \hat{\mathbf{f}}, \quad (2.2.65)$$

kde $\hat{\mathbf{I}}$ je jednotková diagonální matice s jednotkovými maticemi $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^{n,n}$ na vedlejší diagonále

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} & & & \mathbf{I} \\ & & & \\ & & \cdot & \\ & & & \\ \mathbf{1} & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(2N+1), n(2N+1)}, \quad (2.2.66)$$

\mathbf{L} je komplexní diagonální matice

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{-N} & & & & & & \\ & \mathbf{L}_{-N+1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{L}_0 & & & \\ & & & & \mathbf{L}_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbf{L}_{N-1} \\ & & & & & & & \mathbf{L}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n(2N+1),n(2N+1)} \quad (2.2.67)$$

a

$$\hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{f}_{-N} \quad \mathbf{f}_{-N+1} \quad \cdots \quad \mathbf{f}_N]^T \in \mathbb{C}^{n(2N+1),1}. \quad (2.2.68)$$

Analogicky vynásobíme rovnici (2.2.59) zleva $\frac{1}{T} \mathbf{A}^B \mathbf{e}(t)$, integrujeme na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a v souladu s (2.2.55) a (2.2.62) – (2.2.65) získáme vztah

$$\boldsymbol{\beta} = i\omega_0 \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \mathbf{L} \hat{\mathbf{f}} - i\omega_0 \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \boldsymbol{\gamma} - i\omega_0 \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} - i\omega_0 \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha}. \quad (2.2.69)$$

Nakonec vynásobíme rovnici (2.2.60) zleva $\frac{1}{T} \mathbf{A}^M \mathbf{e}(t)$, integrujeme na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a v souladu s (2.2.55) a (2.2.62) – (2.2.65) získáme vztah

$$\boldsymbol{\gamma} = -\omega_0^2 \mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \mathbf{L} \hat{\mathbf{f}} + \omega_0^2 \mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\gamma} + \omega_0^2 \mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\beta} + \omega_0^2 \mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} \mathbf{N}^2 \boldsymbol{\alpha}. \quad (2.2.70)$$

Maticové součiny $\mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}}, \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}}$ a $\mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}}$ lze lépe vyjádřit s ohledem na (2.2.50) – (2.2.52) jako součiny

$$\mathbf{A}^M \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{L} \mathbf{H}_M, \quad \mathbf{A}^B \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{L} \mathbf{H}_B, \quad \mathbf{A}^K \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{L} \mathbf{H}_K, \quad (2.2.71)$$

kde pásové matice \mathbf{H}_i jsou Hermitovské [5]

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{X}_{-1} & \mathbf{X}_{-2} & \cdots & \mathbf{X}_{-N} & & \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{X}_{-1} & \mathbf{X}_{-2} & & \ddots & \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{X}_{-1} & \ddots & & \mathbf{X}_{-N} \\ \vdots & \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_N & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{X}_{-2} \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{X}_{-1} \\ & & & \mathbf{X}_N & \cdots & \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n(2N+1),n(2N+1)}, \quad i \in \{M, B, K\} \quad (2.2.72)$$

a

$$\mathbf{X}_j = \begin{cases} \mathbf{M}_j & \text{jestliže } i = M, \\ \mathbf{B}_j & \text{jestliže } i = B, \\ \mathbf{K}_j & \text{jestliže } i = K, \end{cases} \quad \text{pro } j = \langle -N, \dots, -1, 1, \dots, N \rangle. \quad (2.2.73)$$

Jelikož pro členy Hermitovských matic \mathbf{H}_i platí $\mathbf{X}_{-j} = \mathbf{X}_j^H$ pro $j \neq 0$, můžeme psát

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^H = \overline{\mathbf{H}_i}^T, \quad (2.2.74)$$

kde pruh nad písmenem označuje komplexně sdruženou hodnotu. Diagonály matic \mathbf{H}_i jsou nulové, jelikož jsme matice \mathbf{X}_j s koeficienty odpovídající $j = 0$ vyjmuli z Fourierovy řady, viz vztah (2.2.30). Zmíněné stacionární matice \mathbf{X}_0 jsou využity pro stanovení matice dynamické poddajnosti \mathbf{L}_j , jak lze snadno nahlédnout v (2.2.34) a (2.2.44).

Při respektování (2.2.71) lze přepsat rovnice (2.2.61), (2.2.69) a (2.2.70) do kompaktní maticové formy

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{LH}_K & -\mathbf{LH}_K & -\mathbf{LH}_K \\ -i\omega_0 \mathbf{LH}_B \mathbf{N} & -i\omega_0 \mathbf{LH}_B \mathbf{N} & -i\omega_0 \mathbf{LH}_B \mathbf{N} \\ \omega_0^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 & \omega_0^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 & \omega_0^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{LH}_K \mathbf{L}\hat{\mathbf{f}} \\ i\omega_0 \mathbf{LH}_B \mathbf{N}\hat{\mathbf{f}} \\ -\omega_0^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 \mathbf{L}\hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}. \quad (2.2.75)$$

Rovnici (2.2.75) můžeme zkráceně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{b}, \quad (2.2.76)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{LH}_K & -\mathbf{LH}_K & -\mathbf{LH}_K \\ -i\omega_0 \mathbf{LH}_B \mathbf{N} & -i\omega_0 \mathbf{LH}_B \mathbf{N} & -i\omega_0 \mathbf{LH}_B \mathbf{N} \\ \omega_0^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 & \omega_0^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 & \omega_0^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3n(2N+1), 3n(2N+1)}, \quad (2.2.77)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{LH}_K \mathbf{L}\hat{\mathbf{f}} \\ i\omega_0 \mathbf{LH}_B \mathbf{N}\hat{\mathbf{f}} \\ -\omega_0^2 \mathbf{LH}_M \mathbf{N}^2 \mathbf{L}\hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3n(2N+1), 1} \quad (2.2.78)$$

a

$$\mathbf{q} = [\boldsymbol{\alpha} \quad \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\gamma}]^T \in \mathbb{C}^{3n(2N+1), 1}. \quad (2.2.79)$$

Úpravou vztahu (2.2.76) získáme

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.2.80)$$

kde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3n(2N+1), 3n(2N+1)}$ je jednotková diagonální matice. Při zavedení matice

$$\mathbf{E}_q(t) = [\mathbf{E}(t) \quad \mathbf{E}(t) \quad \mathbf{E}(t)] \in \mathbb{C}^{n, 3n(2N+1)}, \quad (2.2.81)$$

můžeme přepsat řešení (2.2.56) do tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j e_j(t) - \mathbf{E}_q(t) \mathbf{q}. \quad (2.2.82)$$

Nakonec dosazením vztahu (2.2.80) do (2.2.82) získáme celkové řešení $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{C}^{n,1}$ pohybové rovnice (2.2.1) ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j e_j(t) - \mathbf{E}_q(t) (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.2.83)$$

Jak je patrné z rovnice (2.2.83), pro systémovou matici $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ mohou nastat dva případy. Pokud je systémová matice regulární, tak její determinant nabývá nenulových hodnot [5], systémová matice je invertovatelná, a díky tomu má rovnice (2.2.83) řešení, jestliže toto řešení existuje. Naopak, když je systémová matice singulární, tak její nulový determinant [5] vymezuje hranici stabilních a nestabilních oblastí.

Těmto případům se budeme více věnovat v kapitole 2.4, kde je detailně prozkoumána stabilita systému a posouzení hranic mezi oblastí stability a nestability.

2.3 Numerické řešení odezvy systému

V této kapitole se zaměříme na získání numerického řešení pohybové rovnice (2.2.1) pomocí Rungeovy- Kuttovy metody, které slouží k ověření existence analytického periodického řešení. Postup bude identický jako v kapitole 1.2 s tím rozdílem, že problematiku rozšíříme a zobecníme pro n stupňů volnosti. Jak již bylo napsáno, jestliže existuje analytické periodické řešení, tak výsledky tohoto řešení se shodují s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody.

Při odvození numerického řešení odezvy systému vyjdeme z pohybové rovnice (2.2.1) s nulovými počátečními podmínkami

$$[\mathbf{M}_N + \mathbf{M}(t)]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}(t)]\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(0) \\ \dot{\mathbf{q}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,1}. \quad (2.3.1)$$

Nejdříve pro jednoduchost zápisu označíme matice

$$\mathbf{M}_{RK}(t) = \mathbf{M}_N + \mathbf{M}(t), \quad \mathbf{B}_{RK}(t) = \omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}(t), \quad (2.3.2)$$

poté můžeme rovnici (2.3.1) upravit do tvaru

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}_{RK}^{-1}(t)[\mathbf{f}(t) - \mathbf{B}_{RK}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t)]. \quad (2.3.3)$$

Po zavedení substituce

$$\mathbf{x}_1(t) = \dot{\mathbf{q}}(t), \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{q}(t) \quad (2.3.4)$$

lze psát v maticové formě

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{RK}^{-1}(t)[\mathbf{f}(t) - \mathbf{B}_{RK}(t)\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{x}_2(t)] \\ \mathbf{x}_1(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Poté můžeme tento maticový zápis zkráceně formulovat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_R(\mathbf{x}(t), t), \quad (2.3.6)$$

kde

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{x}(t), t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{RK}^{-1}(t)[\mathbf{f}(t) - \mathbf{B}_{RK}(t)\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{x}_2(t)] \\ \mathbf{x}_1(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n,1}, \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n,1}. \quad (2.3.8)$$

2.4 Nová metoda posouzení stability systému a určení hranic stability

V kapitole 2.2 jsme odvodili analytické periodické řešení pohybové rovnice (2.2.1) za předpokladu existence T -periodického řešení, ale již jsme se dále nezabývali stabilitou tohoto řešení, která je rozhodující pro existenci periodického řešení.

U zmíněného systému popsaného pohybovou rovnicí (2.2.1) se projevují tzv. parametrické rezonance. Naladění parametrů soustavy, při nichž nastávají parametrické rezonance, mohou zapříčinit nestabilitu systému. Určování těchto pásem nestability bude provedeno pomocí nové metody, viz dále.

Pro posuzování stability je nezbytné vzít v úvahu $2T$ -periodické řešení s poloviční frekvencí

$\tilde{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{2}$, které lze vyjádřit analogicky k rovnici (2.2.56) pomocí původní frekvence ω_0

$$\mathbf{q}^*(t) = \sum_{j^*=-N}^N \mathbf{L}_j^* \mathbf{f}_j^* e_j^*(t) - \mathbf{E}^*(t) \boldsymbol{\gamma}^* - \mathbf{E}^*(t) \boldsymbol{\beta}^* - \mathbf{E}^*(t) \boldsymbol{\alpha}^*, \quad (2.4.1)$$

kde

$$\mathbf{E}^*(t) = \begin{bmatrix} e_{-N}(t) \mathbf{I} & e_{-N+\frac{1}{2}}(t) \mathbf{I} & e_{-N+1}(t) \mathbf{I} & \cdots & e_N(t) \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n(4N+1)}, \quad (2.4.2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^*(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{-N} & \boldsymbol{\alpha}_{-N+\frac{1}{2}} & \boldsymbol{\alpha}_{-N+1} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{N-1} & \boldsymbol{\alpha}_{N-\frac{1}{2}} & \boldsymbol{\alpha}_N \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{n(4N+1),1}, \quad (2.4.3)$$

$$\boldsymbol{\beta}^*(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{-N} & \boldsymbol{\beta}_{-N+\frac{1}{2}} & \boldsymbol{\beta}_{-N+1} & \cdots & \boldsymbol{\beta}_{N-1} & \boldsymbol{\beta}_{N-\frac{1}{2}} & \boldsymbol{\beta}_N \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{n(4N+1),1}, \quad (2.4.4)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^*(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{-N} & \boldsymbol{\gamma}_{-N+\frac{1}{2}} & \boldsymbol{\gamma}_{-N+1} & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_{N-1} & \boldsymbol{\gamma}_{N-\frac{1}{2}} & \boldsymbol{\gamma}_N \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{n(4N+1),1}, \quad (2.4.5)$$

$$\mathbf{f}_j^* = \begin{bmatrix} f_{j^*}^{(1)} & f_{j^*}^{(2)} & \cdots & f_{j^*}^{(n-1)} & f_{j^*}^{(n)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{n,1}, \quad (2.4.6)$$

$$\mathbf{L}_j = \left(-j^2 \tilde{\omega}_0^2 \mathbf{M}_s + ij \tilde{\omega}_0 \mathbf{B}_s + \mathbf{K}_s \right)^{-1} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (2.4.7)$$

$$e_j^*(t) = e^{ij^* \omega_0 t} \quad (2.4.8)$$

a index řady j^* je dán $j^* = \left\langle -N, -N + \frac{1}{2}, -N + 1, \dots, N \right\rangle$.

Pro prvky vektoru \mathbf{v} (2.4.2) platí zápis (1.1.8) s původní frekvencí ω_0 . Mezi původními a novými veličinami platí tyto vztahy (1.3.11) – (1.3.13)

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{J}, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{J}^T \mathbf{H}_i^* \mathbf{J}, \quad \mathbf{L} \mathbf{H}_i \mathbf{L} = \mathbf{J}^T \mathbf{L}^* \mathbf{H}_i^* \mathbf{L}^* \mathbf{J}$$

a

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^*(t) \mathbf{J}, \tag{2.4.9}$$

kde

$$\mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{-N} & & & & & \\ & \mathbf{L}_{-N+\frac{1}{2}} & & & & \\ & & \mathbf{L}_{-N+1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{L}_0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \mathbf{L}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n(4N+1), n(4N+1)}. \tag{2.4.10}$$

Matice \mathbf{J} je definována analogicky k (1.3.14)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(4N+1), n(2N+1)}. \tag{2.4.11}$$

$$\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^* \mathbf{H}_K^* \mathbf{L}^* \hat{\mathbf{f}}^* \\ i\omega \mathbf{L}^* \mathbf{H}_B^* \mathbf{N}^* \mathbf{L}^* \hat{\mathbf{f}}^* \\ -\omega^2 \mathbf{L}^* \mathbf{H}_M^* \mathbf{N}^{*2} \mathbf{L}^* \hat{\mathbf{f}}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3n(4N+1),1}, \quad (2.4.16)$$

$$\mathbf{q}^* = [\boldsymbol{\alpha}^* \quad \boldsymbol{\beta}^* \quad \boldsymbol{\gamma}^*]^T \in \mathbb{C}^{3n(4N+1),1}, \quad (2.4.17)$$

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} -N\mathbf{I} & & & & & \\ & \left(-N + \frac{1}{2}\right)\mathbf{I} & & & & \\ & & (-N+1)\mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & N\mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(4N+1),n(4N+1)}, \quad (2.4.18)$$

$$\hat{\mathbf{f}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{-N}^* & \mathbf{0} & \mathbf{f}_{-N+1}^* & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{f}_N^* \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{n(4N+1),1}, \quad (2.4.19)$$

a $\mathbf{I}^* \in \mathbb{R}^{3n(4N+1),3n(4N+1)}$ je jednotková diagonální matice. Celkové $2T$ -periodické řešení pohybové rovnice (2.2.1) má analogický tvar k (2.2.83), tedy

$$\mathbf{q}^*(t) = \sum_{j^*=-N}^N \mathbf{L}_j^* \mathbf{f}_j^* e_j^*(t) - \mathbf{E}_q^*(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{b}^*, \quad (2.4.20)$$

kde

$$\mathbf{E}_q^*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(t)^* & \mathbf{E}(t)^* & \mathbf{E}(t)^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,3n(4N+1)}. \quad (2.4.21)$$

Jak již bylo dokázáno v [1] a [2] pro 1 stupeň volnosti, tak i pro n stupňů volnosti obdobně platí, že T -periodické řešení je identické s $2T$ -periodickým řešením $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q}^*(t)$, tedy

$$\sum_{j=-N}^N \mathbf{L}_j \mathbf{f}_j e_j(t) - \mathbf{E}_q(t) (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \equiv \sum_{j^*=-N}^N \mathbf{L}_j^* \mathbf{f}_j^* e_j^*(t) - \mathbf{E}_q^*(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.4.22)$$

Dále bylo v [1] a [2] prokázáno, že vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou podmnožinou množiny vlastních čísel matice \mathbf{A}^*

$$\lambda\{\mathbf{A}\} \subset \lambda\{\mathbf{A}^*\}, \quad (2.4.23)$$

a to má za následek, že oblasti stability nejsou totožné.

Ze vztahu (2.4.23) vychází závěr, že pro posouzení oblastí a hranic stability použijeme obecnější případ pro $2T$ -periodické řešení (2.4.20), tedy

$$\mathbf{q}^*(t) = \sum_{j^*=-N}^N \mathbf{L}_j^* \mathbf{f}_j^* e_j^*(t) - \mathbf{E}_q^*(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{b}^*.$$

Pro zjednodušení a zrychlení výpočtu zavedeme, stejně jako v [1], redukovanou matici \mathbf{A}_{red} k matici \mathbf{A}^* , kterou definujeme

$$\mathbf{A}_{red} = \omega^2 \mathbf{L}^* \mathbf{H}_M^* \mathbf{N}^{*2} - i\omega \mathbf{L}^* \mathbf{H}_B^* \mathbf{N}^* - \mathbf{L}^* \mathbf{H}_K^* \in \mathbb{C}^{n(4N+1), n(4N+1)}. \quad (2.4.24)$$

Matrice \mathbf{A}_{red} má identickou množinu nenulových vlastních čísel s maticí \mathbf{A}^* a vlastní čísla matice \mathbf{A}_{red} jsou reálná nebo tvoří komplexně sdružené páry, což bylo dokázáno v [1]. Proto lze tvrdit, že determinant matice \mathbf{A}_{red} je reálný. Reálná vlastní čísla odpovídají změně znaménka determinantu a vymezují hranici stability, viz níže.

Ze zavedení matice \mathbf{A}_{red} plyne, že pro posouzení oblastí a hranic stability použijeme matici \mathbf{A}_{red} místo \mathbf{A}^* , tedy systémová matice s ohledem na (2.4.20) má tvar

$$\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red} \in \mathbb{C}^{n(4N+1), n(4N+1)}. \quad (2.4.25)$$

V prvním případě, kdy systémová matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$ je singulární [5], tj. není invertovatelná, vymezuje nulový determinant této matice hranici stabilních a nestabilních oblastí, tedy

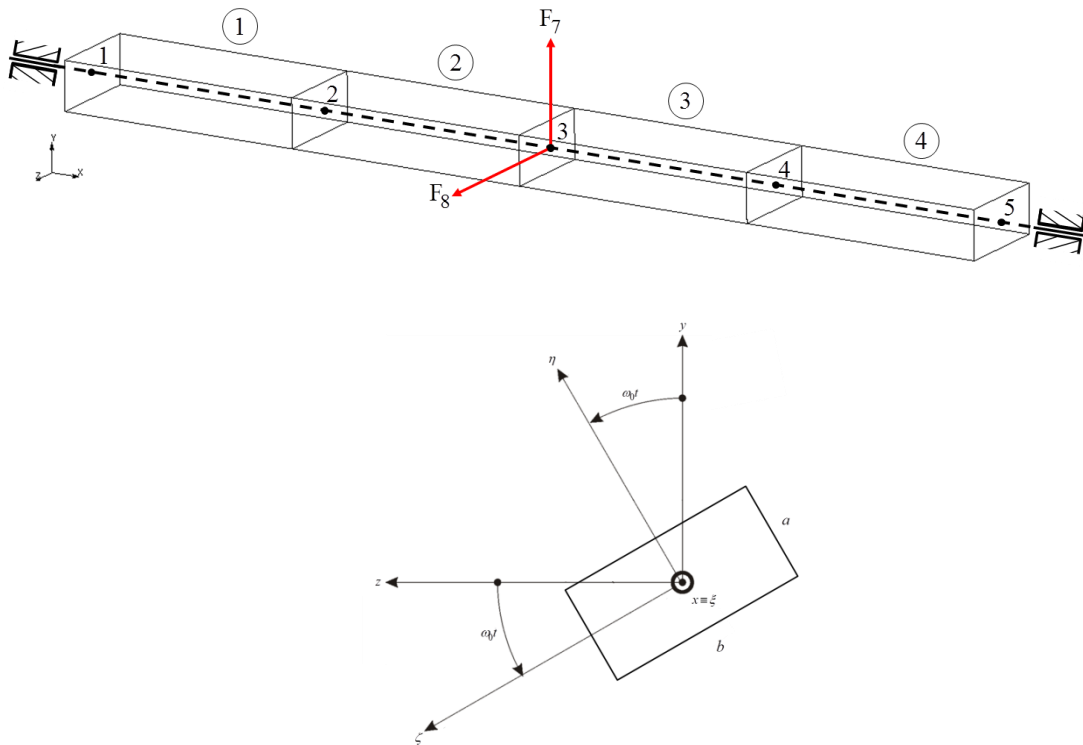
$$\det(\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}(\omega_0)) = 0. \quad (2.4.26)$$

Ve druhém případě, kdy je systémová matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$ regulární, tj. je invertovatelná a její determinant je nenulový, rozhoduje o stabilitě systému znaménko determinantu systémové matice. Z numerického experimentu bylo vypořazováno následující; jestliže je znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$ kladné, systém je stabilní a existuje periodické řešení. V opačném případě, pro záporné znaménko determinantu, je systém nestabilní a neexistuje periodické řešení. Výsledek nové metody posuzování stability systému a určování hranic stability lze shrnout tímto zápisem

$$\det(\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}(\omega_0)) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{systém je stabilní a periodické řešení existuje,} \\ = 0 \Rightarrow \text{hranice stabilní a nestabilní oblasti,} \\ < 0 \Rightarrow \text{systém je nestabilní a periodické řešení neexistuje.} \end{cases} \quad (2.4.27)$$

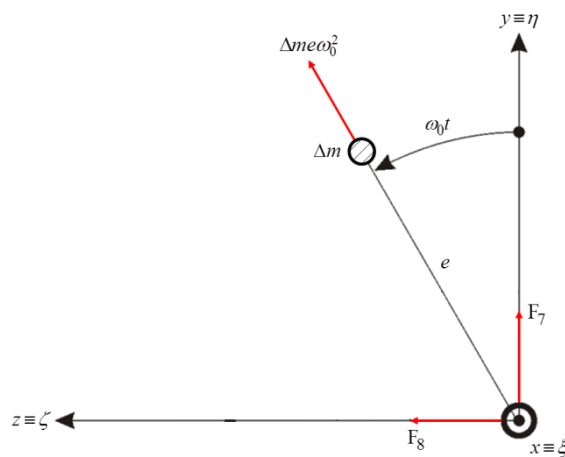
2.5 Aplikace teorie na testovacím příkladě

Pro ověření odvozené teorie a postupů z předešlých kapitol byl jako testovací příklad zvolen rotor s obdélníkovým průřezem o celkové délce 4 m , který jsme rozdělili na 4 konečné prvky o délce elementu $l_e = 1\text{ m}$, jak je patrné z obr. 2.6.



Obr. 2.6 – Rotor s obdélníkovým průřezem

V místě 3. uzlu je excentricky umístěn nevývažek rotující konstantní úhlovou rychlostí ω_0 , viz obr. 2.7. Díky rotaci působí na rotor odstředivá síla od nevývažku $\Delta m e \omega_0^2$, kterou rozložíme pomocí směrových úhlů do složek ve směru souřadnicových os pevně spojených s elementem η, ζ , tedy $F_7(t) = \Delta m e \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$ a $F_8(t) = \Delta m e \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$.



Obr. 2.7 – Excentricky umístěný nevývažek v základní poloze ($\sum x, y, z \equiv \sum \xi, \eta, \zeta$)

Z obr. 2.6 a 2.8 je očividné, že vektor vnějšího buzení nabývá tvaru

$$\mathbf{f}(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F_7(t) \ F_8(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (2.5.1)$$

Rotor je oboustranně uložen pomocí radiálních ložisek, které přenáší pouze natočení a při nerespektování posuvu u ve směru osy x a natočení φ kolem osy x je zřejmé, že zvolený rotor má 16 stupňů volnosti. Pro sestavení matematického modelu rotoru (2.1.95) pomocí MKP byl využit výpočtový modul vytvořený autorem, pracující v prostředí MATLAB stejně tak, jako ostatní moduly použité v navazujících numerických experimentech.

Daný rotor uvažujeme homogenní, prizmatický a jeho mechanické, resp. geometrické vlastnosti jsou popsány v tab. 2.1.

Označení	Veličina	Hodnota	Jednotky
l_e	délka elementu	1	m
ρ	hustota	7870	kg/m^3
E	Youngův modul pružnosti v tahu	$2,1 \times 10^{11}$	N/m^2
β	koeficient matice proporcionálního tlumení	1×10^{-3}	–
Δm	hmotnost nevyvážku	0,585	kg
e	excentricita nevyvážku	0,0003	m
a_s	délka strany elementu pro čtvercový průřez	0,025	m
t_{\max}	konečný čas	$2000T$	s
N	počet členů Fourierovy řady	2	–

Tab. 2.1 – Mechanické a geometrické vlastnosti rotoru

Jelikož hledání analytického periodického řešení a nová metoda posouzení stability systému vychází z vyjádření periodicky proměnných matic $\mathbf{M}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{K}(t)$ (2.2.2) ve formě Fourierovy řady, které byly popsány v kapitole 2.2, je nezbytné obdobně vyjádřit vektor vnějšího buzení $\mathbf{f}(t)$ daný zápisem (2.5.1), jehož nenulové složky obsahují periodické funkce $\cos(\omega_0 t)$ a $\sin(\omega_0 t)$. Zmíněné periodické funkce rozvineme ve Fourierovy řady dle (2.2.17) a pro funkci $\cos(\omega_0 t)$ získáme

$$c_1 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{1}{2}, \quad c_{-1} = c_1 = \frac{1}{2} \quad (2.5.2)$$

a lze psát

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}). \quad (2.5.3)$$

Pro funkci $\sin(\omega_0 t)$ získáme

$$c_1 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega_0 t} dt = -\frac{i}{2}, \quad c_{-1} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \sin(\omega_0 t) e^{i\omega_0 t} dt = \frac{i}{2} \quad (2.5.4)$$

a lze psát

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{i}{2} (e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}). \quad (2.5.5)$$

Nenulové složky vektoru vnějšího buzení $\mathbf{f}(t)$ (2.5.1) poté vyjádříme následovně

$$F_7(t) = \Delta m e \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \Delta m e \omega_0^2 (e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}), \quad (2.5.6)$$

$$F_8(t) = \Delta m e \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = \frac{i}{2} \Delta m e \omega_0^2 (e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}). \quad (2.5.7)$$

Určení pásem nestability systému je provedeno pomocí metody využívající Floquetovu teorii. Z kapitoly 1.4 vyplývá, že o stabilitě systému rozhoduje řešení homogenní rovnice (1.4.10). Zmíněná metoda je využita pro ověření správnosti nové metody posuzování stability systému a určování hranic stability. Nová metoda vychází ze vztahu (2.4.27) a je založena na určení znaménka determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$, v případě je-li systémová matice regulární a invertovatelná. Naopak je-li systémová matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$ singulární, její nulový determinant vymezuje hranici mezi stabilní a nestabilní oblastí.

Celková stabilita systému je závislá na frekvenci ω_0 , jelikož prvky matice \mathbf{A}_{red} jsou funkcemi frekvence ω_0 . Dále zavedeme parametr κ , který je definovaný jako poměr mezi kvadratickými plošnými momenty průřezu

$$\kappa = \frac{I_\eta}{I_\zeta}. \quad (2.5.8)$$

Tento parametr byl zaveden z důvodu, abychom prozkoumali více stavů nesymetrie průřezu, lépe řečeno budeme posuzovat stabilitu rotoru pro proměnnou plochu průřezu, jak bude patrné z následujícího.

Nejdříve je nutné zavést konstantní střední plošný kvadratický moment setrvačnosti I_S , který definujeme jako součet plošných kvadratických momentů setrvačnosti pro čtvercový průřez $I_{\eta S}, I_{\zeta S}$ o straně a_S

$$I_S = \frac{I_{\eta S} + I_{\zeta S}}{2} = \frac{\frac{1}{12} a_S^4 + \frac{1}{12} a_S^4}{2} = \frac{1}{12} a_S^4. \quad (2.5.9)$$

Dále dle obr. 2.6 lze určit pro obecný obdélníkový průřez stranu $b(\kappa)$ ze vztahu

$$\kappa = \frac{I_\eta}{I_\zeta} = \frac{\frac{1}{12}ab^3}{\frac{1}{12}a^3b} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow b(\kappa) = \sqrt{\kappa a^2}. \quad (2.5.10)$$

Vztah (2.5.9) pro střední plošný kvadratický moment setrvačnosti lze zapsat i pro obecný obdélníkový průřez a s ohledem na (2.5.10) obdržíme

$$I_s = \frac{I_\eta + I_\zeta}{2} = \frac{\frac{1}{12}ab^3 + \frac{1}{12}a^3b}{2} = \frac{a^4}{12}\sqrt{\kappa}. \quad (2.5.11)$$

Uvažujeme-li $a > 0, \kappa > 0$, získáme ze vztahu (2.5.11) vztah pro $a(\kappa)$

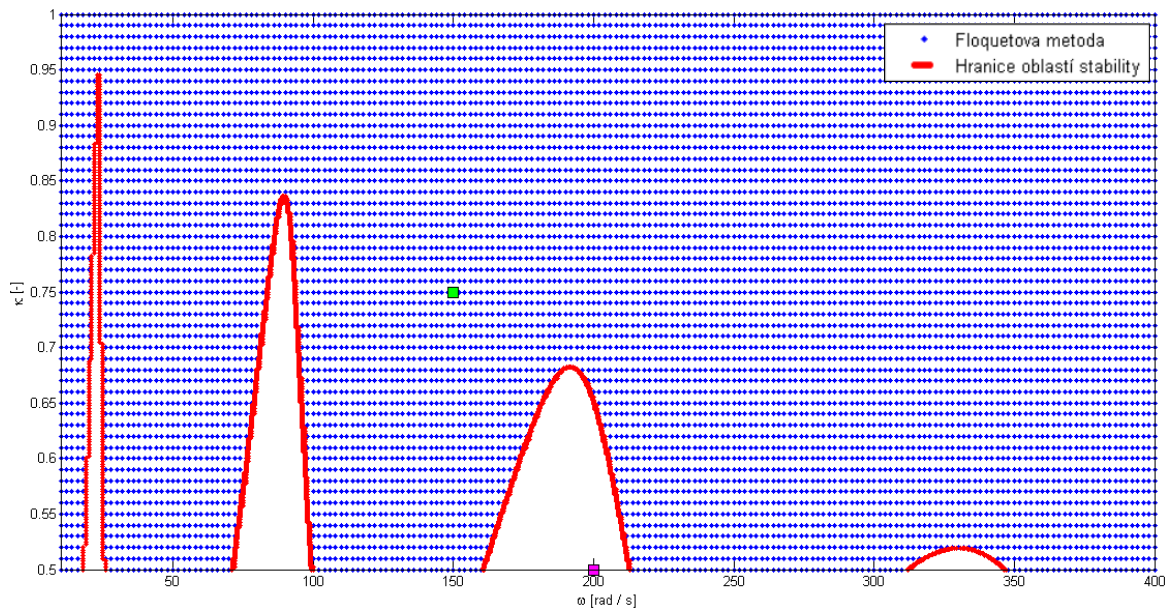
$$a(\kappa) = \left(12I_s\sqrt{\kappa}\right)^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.5.12)$$

Ze vztahů (2.5.10) a (2.5.12) je zřejmé, že strany průřezu rotoru jsou funkcí κ . Z této skutečnosti plyne, že se změnou parametru κ se bude měnit i velikost plochy průřezu rotoru, která je dána vztahem

$$A(\kappa) = a(\kappa)b(\kappa). \quad (2.5.13)$$

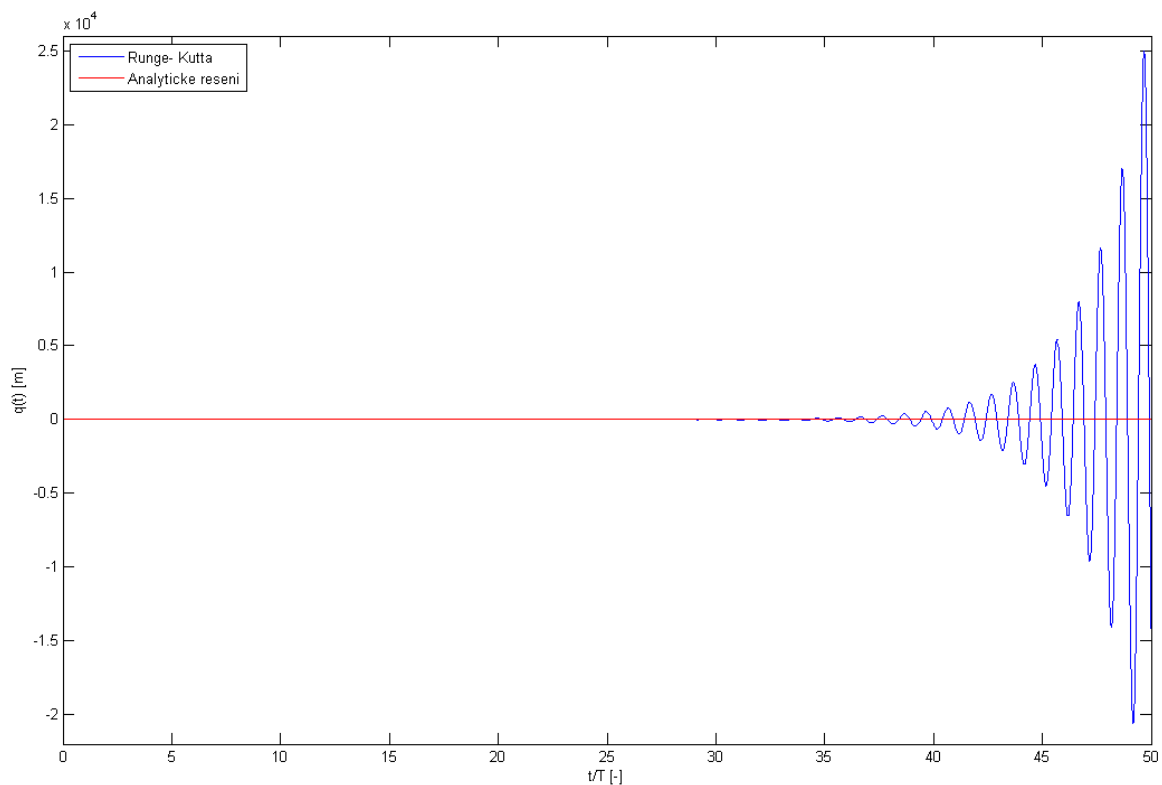
Vyšetřování stability rotoru je provedeno na širokém pásmu parametrů $\omega_0 = \langle 10; 400 \rangle$ s krokem $1 [rad/s]$ a $\kappa = \langle 0,5; 1 \rangle$ s krokem $0,0025 [-]$ v případě nové metody a pro metodu využívající Floquetovu teorii bylo voleno $\omega_0 = \langle 10; 400 \rangle$ s krokem $2 [rad/s]$ a $\kappa = \langle 0,5; 1 \rangle$ s krokem $0,01 [-]$. Volba kroku parametrů je přizpůsobena čitelnému vykreslování výsledků. Ze zvolených intervalů a vztahů (2.5.10) a (2.5.12) vyplývá, že stabilita rotoru je vyšetřována pro strany průřezu z intervalů $a = \langle 0,025; 0,0273 \rangle$ a $b = \langle 0,0193; 0,025 \rangle$ v $[m]$.

Výsledky posouzení stability novou metodou ověřenou Floquetovou metodou jsou ukázány na obr. 2.8, kde jsou dle legendy u obrázků modře označeny body vyšetřované Floquetovou metodou a červeně jsou označené body vymezující hranice mezi stabilní a nestabilní oblastí, které byly získány pomocí prezentované nové metody určení hranic.



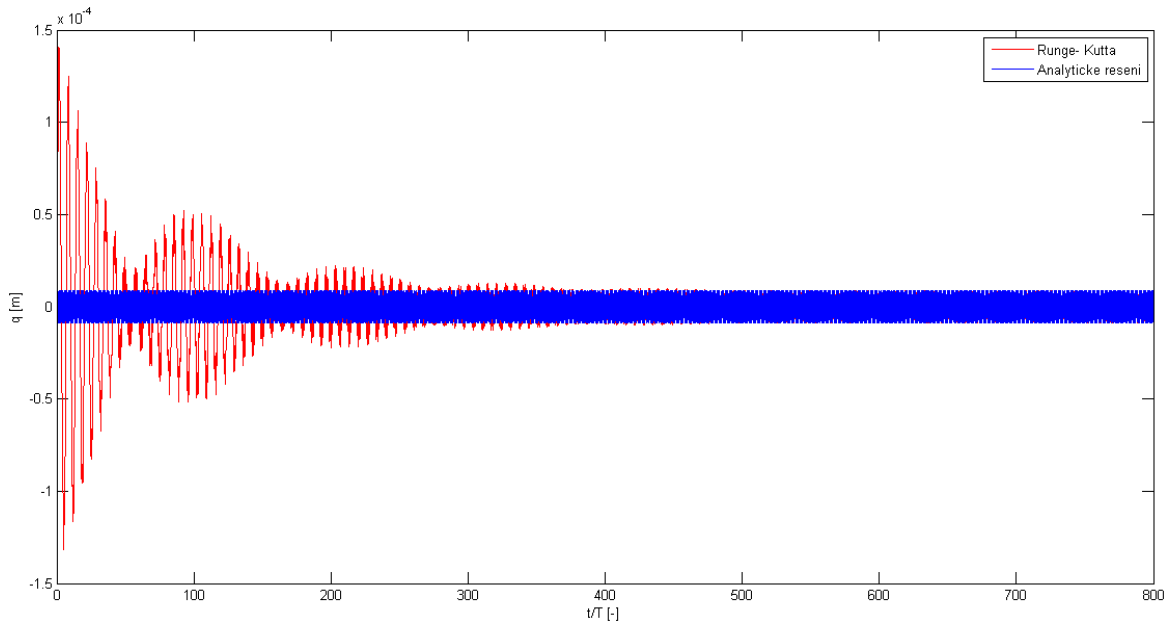
Obr. 2.8 – Pásma nestability

Dále jsme z daného pásma parametrů vybrali dva libovolné body, jeden ze stabilní oblasti (zelený) a druhý z nestabilní oblasti (růžový), jak je znázorněno na obr. 2.8. V těchto bodech budeme demonstrovat existenci periodického řešení dané rotorové soustavy a vyšetřovat znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$. Pro zvolený bod ležící v nestabilní oblasti (růžový) pro souřadnici $q_8(t)$ analytické periodické řešení neexistuje, viz obr. 2.9.



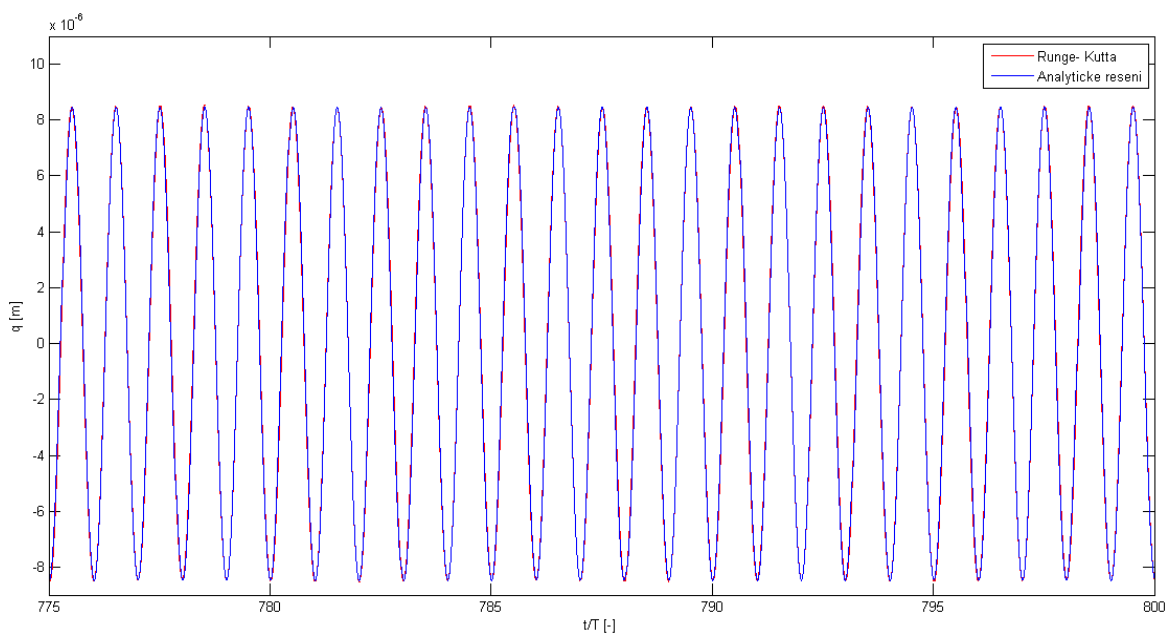
Obr. 2.9 – Celkové řešení odezvy souřadnice $q_8(t)$ pro nestabilní systém ($\omega_0 = 200$; $\kappa = 0,5$)

Pro zvolený bod ležící ve stabilní oblasti (zelený) pro souřadnici $q_8(t)$ analytické periodické řešení existuje a je vykresleno na obr. 2.10.



Obr. 2.10 – Celkové řešení odezvy souřadnice $q_8(t)$ pro stabilní systém ($\omega_0 = 150$; $\kappa = 0,75$)

Jak je zřejmé z obr. 2.10, díky proporcionálnímu tlumení vliv nulových počátečních podmínek na homogenní část celkového řešení při Rungeově- Kuttově metodě vymizí po 700. periodě, resp. po 29,3 s. Z průběhu lze vypočítat postupné přibližování analytického periodického řešení k ustálenému stavu získaného pomocí Rungeovy- Kuttovy metody. Na obr. 2.11 je zobrazen detail celkového řešení odezvy pro stabilní systém mezi 775. a 800. periodou.

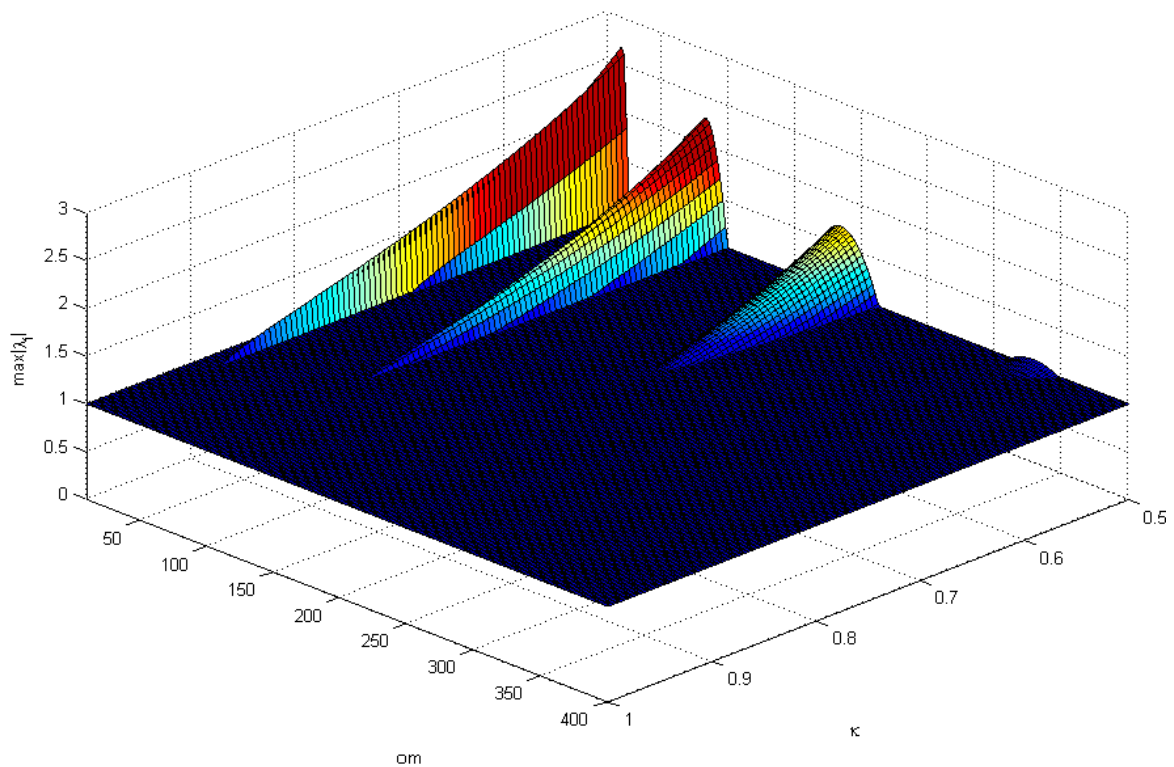


Obr. 2.11 – Detail celkového řešení odezvy souřadnice $q_8(t)$ pro stabilní systém

Z výsledků numerického experimentu plyne, jestliže existuje analytické periodické řešení, tak výsledky tohoto řešení se shodují s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody, naopak pro nestabilní systém analytické periodické řešení neexistuje.

Analýzou znaménka determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$ byl potvrzen závěr ze vztahu (2.4.27), tj. pro nestabilní systém je determinant záporný a pro stabilní systém nabývá determinant kladných hodnot.

Z prostorového vykreslení oblastí nestabilit (obr. 2.12) získaných pomocí metody založené na Floquetově teorii je patrné, že oblasti nestability se rozšiřují se zmenšujícím se parametrem κ nebo-li pásma nestability se rozšiřují se zmenšujícím se poměrem stran obdélníkového průřezu. Dále při zvyšování úhlové frekvence ω_0 dochází ke snížení míry nestability, která je zde reprezentována maximální absolutní hodnotou vlastních čísel matice monodromie \mathbf{Z}_F , tedy $\max|\lambda_l|$.



Obr. 2.12 – Prostorové vykreslení oblastí nestabilit získaných pomocí Floquetovy metody

Závěr

Hlavním cílem předkládané práce bylo určení a ověření existence analytického periodického řešení a posouzení stability parametrických kmitavých systémů.

V první části této práce byl odvozen postup pro alternativní přístup k posouzení stability a existence analytického periodického řešení kmitajícího systému s jedním stupněm volnosti s periodicky proměnnou hmotností, tlumením, tuhostí a budící silou. Tento přístup byl aplikován na testovacím příkladě, ve kterém byla nejdříve porovnána nová metoda stanovení hranic stability a posouzení stability systému s metodou využívající Floquetovu teorii. Dále byly vybrány dva libovolné body, jeden ze stabilní oblasti a druhý z nestabilní oblasti. V těchto bodech jsme demonstrovali (ne)existenci analytického periodického řešení systému a vyšetřili jsme znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$. Z výsledků numerického experimentu plyne; jestliže existuje analytické periodické řešení, tak výsledky tohoto řešení se shodují s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody, naopak pro nestabilní systém analytické periodické řešení neexistuje. Dále bylo dokázáno, že znaménko reálné hodnoty determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ rozhoduje o existenci periodického řešení, a tím i o stabilitě systému. Z numerického experimentu bylo vyzorováno následující; jestliže je znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mu \mathbf{A}_{red}$ kladné, systém je stabilní a existuje periodické řešení. V opačném případě, pro záporné znaménko determinantu, je systém nestabilní a periodické řešení neexistuje. Nulový determinant této matice vymezuje hranici mezi stabilními a nestabilními oblastmi.

Ve druhé části předkládané práce byl nejdříve stanoven matematický model rotoru s nesymetrickým průřezem (2.1.95), který je popsán časově periodicky proměnnými maticemi. Zmíněné matice byly rozvinuty do Fourierových řad a po úpravách jsme získali obecný analytický předpis pro stacionární koeficientovou matici rotorového prvku (2.2.31). Dále byl odvozen postup pro posouzení stability a existence analytického periodického řešení obecného rotorového systému s více stupni volnosti. Tento postup byl testován na příkladě rotoru s obdélníkovým průřezem o 4 konečných prvcích, který byl uložen pomocí radiálních ložisek. Hranice, resp. pásma nestability byly vykresleny pro zvolené konstrukční a provozní parametry. Nová metoda byla ověřena pomocí metody založené na Floquetově teorii, podle které o stabilitě systému rozhoduje modul maximálního vlastního čísla matice monodromie \mathbf{Z}_F , viz kapitola 1.4. Z porovnání zmíněných metod plyne, že nová metoda je při vykreslení hranic stability výrazně méně časově náročná než Floquetova metoda, ale složitější pro algoritmické zpracování.

Dále byly vybrány dva libovolné body, jeden ze stabilní oblasti a druhý z nestabilní oblasti. V těchto bodech jsme jako v první části demonstrovali (ne)existenci analytického periodického řešení systému a vyšetřili jsme znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$. Z výsledků numerického experimentu systému s více stupni volnosti plyne stejný závěr jako pro systém s 1 stupněm volnosti. Tedy existuje-li analytické periodické řešení, tak výsledky tohoto řešení se shodují s ustáleným stavem získaným pomocí Rungeovy- Kuttovy metody, naopak pro nestabilní systém analytické periodické řešení neexistuje. Dále bylo vyzorováno následující; jestliže je znaménko determinantu systémové matice $\mathbf{I}_{red} - \mathbf{A}_{red}$ kladné, systém je stabilní a existuje periodické řešení. V opačném případě, pro záporné znaménko determinantu, je systém nestabilní a periodické řešení neexistuje. Nulový determinant této matice vymezuje hranici mezi stabilními a nestabilními oblastmi.

Velkou výhodou nové metodiky je možnost zavedení redukované matice \mathbf{A}_{red} (2.4.24) místo rozšířené matice \mathbf{A}^* , což velmi výrazně přispělo ke zrychlení výpočtu. Časová náročnost výpočtu se po zavedení redukované matice \mathbf{A}_{red} snížila o 50%.

Největším přínosem této práce je možnost velice rychlého posouzení stability, resp. existence periodického řešení parametrického kmitavého systému pro konkrétní parametry na základě znalosti znaménka reálné hodnoty determinantu systémové matice, čímž je splněn hlavní cíl diplomové práce.

Použitá literatura

- [1] DUPAL, J. – ZAJÍČEK, M.: Existence of solution, stability and periodic response of the vibrating systems with time varying parameters. Mathematics and Computers in Simulation 2016 (In press).
- [2] DRÁŽDIL, K.: Řešení ustáleného stavu a posuzování stability parametrických systémů s 1 stupněm volnosti, Plzeň, 2014, bakalářská práce.
- [3] BALDA, M.: Úvod do statické mechaniky. Plzeň, ZČU v Plzni 2011.
- [4] BABITSKY, V. I. – KRUPENIN, V. L.: Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin, Springer 2001.
- [5] REKTORYS, K.: Přehled užití matematiky. Praha, SNTL 1963.
- [6] DUPAL, J.: Výpočtové metody mechaniky. Plzeň, ZČU v Plzni 2004.
- [7] HANSELMAN, D. C. – LITTLEFIELD, B.: Mastering MATLAB 7. Upper Saddle River, Pearson/Prentice Hall 2005.
- [8] FIEDLER, M.: Speciální matice a jejich použití v numerické matematice. Praha, SNTL 1981.
- [9] HOLENDA, J.: O maticích. Plzeň, Vydavatelský servis 2007.
- [10] DUPAL, J. – VLAS, R.: Dynamika rotorových soustav. Učební text vzniklý v rámci projektu SPAV č. CZ.1.07/2.3.00/09.0050, Plzeň 2012.