



Fakulta aplikovaných věd  
Katedra mechaniky

Diplomová práce

Parametricky tvořený model standardizovaných  
testů kohezivních spojů

Vypracoval: Bc. Petr Hanzlík  
Vedoucí práce: Ing. Tomáš Kroupa, Ph.D.

Plzeň, 2016

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně s použitím pramenů a zdrojů uvedených na konci diplomové práce.

V Plzni dne: .....

Podpis: .....

# Poděkování

Děkuji vedoucímu práce Ing. Tomáši Kroupovi, Ph.D. za odborné vedení práce a členům Oddělení Pružnosti a Pevnosti Katedry mechaniky za připomínky a rady při prezentaci dílčích výsledků práce.

Rovněž děkuji rodině za materiální a psychickou podporu, která mi umožnila studium na Fakultě aplikovaných věd.

## Abstrakt

Tato práce je zaměřena na analýzu porušení kohezivního rozhraní pomocí konečno-prvkového softwaru Abaqus 6.14. V rámci této práce byl vytvořen automatizovaný nástroj k identifikaci materiálových parametrů kohezivního rozhraní. Pomocí tohoto nástroje byly identifikovány materiálové parametry lepidel Hunstman Araldite 2021 a Gurit Spabond 345 a mezivrstvy laminátu. Materiálové parametry definující porušení byly nalezeny využitím standardizovaných testů DCB (double cantilever beam), ENF (end notched flexure) a MMF (mixed mode flexure) uhlíkových jednosměrových kompozitních nosníků. Analýza porušení je založena na určení materiálového parametru  $G^c$  (kritické rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil). Parametr  $G^c$  je z experimentálních dat určen pomocí analytických vztahů pro test DCB, ENF a MMF. Konečno-prvkové modely jsou složeny ze dvou distinktivních částí označených jako spojované členy a kohezivní rozhraní. Spojované členy jsou definovány lineárně elastickým ortotropním materiálovým modelem. Kohezivní rozhraní je tvořeno kohezivním kontaktem, který je v každém svém uzlu určen bilineárními vztahy mezi napětím a posuvem (*traction-separation law*), *quadratic stress* kritériem určujícím iniciaci poškození a pevnostním kritériem *power law*, které určuje porušení rozhraní. Materiálový parametr  $G^c$  je v numerické analýze identifikován pomocí dílčích materiálových parametrů rozhraní: tuhosti  $k$ , posuvu iniciujícího poškození  $\delta^0$  a posuvu určujícího porušení  $\delta^c$ .

**klíčová slova:** porušení rozhraní, Abaqus 6.14, Hunstman Araldite 2021, Gurit Spabond 345, mezivrstva laminátu, DCB, ENF, MMF, jednosměrový uhlíkový kompozitní nosník, kritická rychlost uvolňování deformační energie vnitřních sil  $G^c$ , metoda konečných prvků, traction separation law, quadratic stress kritérium, power law kritérium, laminát, lineární elastický ortotropní materiálový model.

## Abstract

This master's thesis deals with finite element analysis (FEA) of a cohesive interface failure. Analysis is carried out by a FE software Abaqus 6.14. Automated tool for identification of material parameters was created within realization of this work. Material parameters for two adhesives, Hunsman Araldite 2021 and Gurit Spabond 345 and an epoxy inner layer of a laminated composite were identified with this tool. Failure defining material parameters were determined by following standardized tests of unidirectional carbon fiber-reinforced epoxy beams: DCB (double cantilever beam), ENF (end notched flexure) and MMF (mixed mode flexure). Failure analysis is based on identification of a critical value of a strain energy release rate (SERR)  $G^c$ . Critical value of the SERR extracted from experimental data is determined via analytical equations for DCB, ENF and MMF tests. Finite element model consists of two distinct parts marked as follows: joined components, cohesive interface. Joined components are defined by elastic orthotropic material model. Cohesive interface is created by a cohesive contact. Cohesive contact is defined by a bilinear traction-separation law, a quadratic stress criterion and a power law criterion applied in each node of a contact pair. Critical value of SERR obtained from FEA is determined through secondary material parameters of cohesive interface: stiffness  $k$ , displacement  $\delta^0$  (damage initiation) and displacement  $\delta^c$  (failure determination).

**key words:** interface failure, Abaqus 6.14, Hunsman Araldite 2021, Gurit Spabond 345, epoxy inner layer of laminated composite, DCB, ENF, MMF, unidirectional carbon fiber-reinforced epoxy beam, critical value of strain energy release rate  $G^c$ , finite element method, traction separation law, quadratic stress criterion, power law criterion, laminated composite, linear elastic orthotropic material model

# Obsah

<b>1</b>	<b>Motivace</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rozhraní</b>	<b>2</b>
2.1	Definice rozhraní . . . . .	2
2.2	Určení parametru rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil $G$ . . . . .	3
2.3	Šíření trhliny . . . . .	4
2.3.1	Dvourozměrná pevnostní kritéria . . . . .	4
2.3.2	Třírozměrná pevnostní kritéria . . . . .	5
2.4	Závěr . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Modely rozhraní</b>	<b>7</b>
3.1	Virtual crack closure technique (VCCT) . . . . .	7
3.2	Cohesive zone model (CZM) . . . . .	8
3.3	Extended finite element method (XFEM) . . . . .	10
3.4	Winkler-Pasternakův pružinový model rozhraní . . . . .	11
3.5	Závěr . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Druhy testů</b>	<b>12</b>
4.1	Mód I . . . . .	12
4.1.1	DCB - double cantilever beam . . . . .	12
4.2	Mód II . . . . .	15
4.2.1	ENF - end notched flexure . . . . .	15
4.2.2	ELS - end loaded split . . . . .	19
4.2.3	FENF - four point end notched flexure . . . . .	19
4.2.4	ONF - over notched flexure . . . . .	20
4.3	Kombinovaný I/II mód . . . . .	21
4.3.1	MMF - mixed mode flexure . . . . .	21
4.3.2	MMB - mixed mode bending . . . . .	22
4.3.3	SCB - single cantilever beam . . . . .	22
4.3.4	ADCB - asymmetrically loaded double cantilever beam . . . . .	23
4.3.5	SLB - single leg bending . . . . .	24
4.3.6	CLS - cracked lap shear . . . . .	24
4.3.7	DENF - double end notched flexure . . . . .	25
4.4	Závěr . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Materiálové modely</b>	<b>26</b>
5.1	Materiálový model spojovaných členů . . . . .	27
5.1.1	Anizotropní materiál . . . . .	27

5.1.2	Ortotropní materiál . . . . .	28
5.1.3	Příčně izotropní materiál . . . . .	29
5.1.4	Matice mimoosové tuhosti $\mathbf{Q}$ . . . . .	29
5.1.5	Základní rovnice laminátové desky: určení matic $\mathbf{A}$ , $\mathbf{B}$ , $\mathbf{D}$ . . . . .	31
5.1.6	Odvození efektivních konstant pružnosti $E_x$ , $E_y$ a $G_{xy}$ . . . . .	36
5.2	Materiálový model kohezivního rozhraní . . . . .	39
5.3	Rozdíl mezi směry I, II, III a směry $nn$ , $ss$ , $tt$ . . . . .	40
5.4	Volba kontaktního páru . . . . .	41
5.5	Závěr . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Testovací úloha a vliv jednotlivých parametrů</b>	<b>43</b>
6.1	Popis elementárního modelu testovací úlohy . . . . .	43
6.2	Vliv parametrů na testovací úloze mezi směry $nn$ a $ss$ . . . . .	44
6.2.1	Interpretace grafu . . . . .	44
6.2.2	Vliv jednotlivých parametrů na testovací úlohu . . . . .	45
6.3	Závěr . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Provedené experimenty a analýza modelu</b>	<b>49</b>
7.1	Experimenty . . . . .	49
7.2	Softwarový nástroj . . . . .	49
7.3	Analyzované modely . . . . .	50
7.4	Závěr . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Vliv parametrů a identifikace mat. parametrů</b>	<b>53</b>
8.1	Vliv materiálových parametrů . . . . .	54
8.1.1	Vliv parametrů $k_{nn}$ a $k_{ss}$ . . . . .	54
8.1.2	Vliv parametrů $\delta_{nn}^0$ a $\delta_{ss}^0$ . . . . .	56
8.1.3	Vliv parametrů $\delta_{nn}^{cp}$ a $\delta_{ss}^{cp}$ . . . . .	58
8.1.4	Vliv typu prvku . . . . .	60
8.1.5	Vliv parametru $\alpha$ . . . . .	61
8.1.6	Vliv velikosti prvku . . . . .	62
8.2	Identifikace parametrů tří typů rozhraní . . . . .	63
8.2.1	Rozhraní z lepidla Hunstman Araldite 2021 nebo Gurit Spabond 345 . . . . .	64
8.2.2	Rozhraní vrstev v laminátu . . . . .	69
8.3	Závěr . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>72</b>
	<b>Literatura</b>	<b>73</b>

### Seznam nejčastěji použitého značení:

Symbol	Jednotka	Název
$O(1, 2, 3)$		Kartézský souřadnicový systém materiálových os 1, 2, 3
$O(x, y, z)$		Kartézský souřadnicový systém os $x, y, z$
$O(nn, ss, tt)$		Kartézský souřadnicový systém os $nn, ss, tt$
$a$	[m]	Počáteční délka trhliny; délka trhliny
$\mathbf{A}$	[Nm <sup>-1</sup> ]	Matice tahové tuhosti
$A_{ij}$	[Nm <sup>-1</sup> ]	Prvek matice tahové tuhosti
$b$	[m]	Šířka standardizovaného vzorku
$\mathbf{B}$	[N]	Matice vazebné tuhosti
$B_{ij}$	[N]	Prvek matice vazebné tuhosti
$\mathbf{C}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Matice materiálových konstant
$C_{ij}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Prvek matice materiálových konstant
$C$	[N <sup>-1</sup> m <sup>2</sup> ]	Poddajnost standardizovaného vzorku
$\mathbf{D}$	[Nm]	Matice ohybové tuhosti
$D_{ij}$	[Nm]	Prvek matice ohybové tuhosti
$E$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Modul pružnosti v tahu izotropního tělesa
$E_i$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Modul pružnosti v tahu ve směru osy $i, i = 1, 2, 3$
$E_x$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Efektivní modul pružnosti v tahu ve směru osy $x$
$E_y$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Efektivní modul pružnosti v tahu ve směru osy $y$
$f$	[-]	Koeficient tření
$F$	[N]	Vnější zatížení
$G$	[Jm <sup>-2</sup> ]	Rychlost uvolňování deformační energie vnitřních sil
$G_i, i = \text{I, II, III}$	[Jm <sup>-2</sup> ]	Aktuální hodnota rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil pro mód zatížení I, II nebo III
$G_{\text{I/II}}$	[Jm <sup>-2</sup> ]	Aktuální hodnota rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil pro kombinaci zatížení módy I a II
$G^c$	[Jm <sup>-2</sup> ]	Kritická rychlost uvolňování deformační energie vnitřních sil
$G_i^c, i = \text{I, II, III}$	[Jm <sup>-2</sup> ]	Kritická rychlost uvolňování deformační energie vnitřních sil pro mód zatížení I, II nebo III
$G_{\text{I/II}}^c$	[Jm <sup>-2</sup> ]	Kritická rychlost uvolňování deformační energie vnitřních sil pro kombinaci zatížení módy I a II
$G_{ij}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Modul pružnosti ve smyku v rovině $\hat{i}\hat{j}, ij = 12, 23, 13$
$G_{xz}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Efektivní modul pružnosti ve smyku v rovině $\hat{x}\hat{z}$
$G_{xy}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Efektivní modul pružnosti ve smyku v rovině $\hat{x}\hat{y}$
$G_{yz}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Efektivní modul pružnosti ve smyku v rovině $\hat{y}\hat{z}$
$h$	[m]	Tloušťka standardizovaného vzorku; tloušťka vrstvy laminátové desky
$J_y$	[m <sup>4</sup> ]	Kvadratický moment setrvačnosti průřezu k ose $y$



Symbol	Jednotka	Název
$\mathbf{k}$	$[\text{m}^{-1}]$	Vektor křivosti střední vrstvy laminátu
$\mathbf{K}$	$[\text{Nm}^{-3}]$	Matice tuhosti kohezivního rozhraní
$l, L$	$[\text{m}]$	Délka standardizovaného vzorku; rozteč podpěr standardizovaného vzorku
$\mathbf{M}$	$[\text{N}]$	Matice momentů vztažených na jednotku délky
$\mathbf{N}$	$[\text{Nm}^{-1}]$	Matice výslednic sil na jednotku délky
$\mathbf{Q}$	$[\text{Nm}^{-2}]$	Matice mimoosové tuhosti
$Q_{ij}$	$[\text{Nm}^{-2}]$	Prvek matice mimoosové tuhosti
$\mathbf{S}$	$[\text{N}^{-1}\text{m}^2]$	Matice poddajnosti
$\pi$	$[\text{J}]$	Potenciální energie deformace vnitřních sil
$t_{mat}$	$[\text{m}]$	Tloušťka jednosměrového kompozitního nosníku (exp. vzorek)
$t_{glue}$	$[\text{m}]$	Tloušťka lepidla (rozhraní) mezi kompozitními nosníky
$\mathbf{t}$	$[\text{Nm}^{-2}]$	Vektor trakčních napětí
$t_{ii}$	$[\text{Nm}^{-2}]$	Aktuální hodnota trakčního napětí ve směru osy $ii$ , $ii = nn, ss, tt$
$t_{ii}^0$	$[\text{Nm}^{-2}]$	Hodnota trakčního napětí ve směru osy $ii$ iniciující poškození ve směru téže osy, $ii = nn, ss, tt$
$\mathbf{T}_\varepsilon$	$[-]$	Matice transformace deformace
$\mathbf{T}_\sigma$	$[-]$	Matice transformace napětí
$u, v, w$	$[\text{m}]$	Posuv ve směru osy $x, y, z$
$u^0, v^0, w^0$	$[\text{m}]$	Posuv bodu na střední ploše laminátové desky ve směru osy $x, y, z$
$W_f$	$[\text{J}]$	Práce třecích sil
$\alpha, \beta, \gamma$	$[-]$	Materiálové parametry kohezivního rozhraní
$\delta$	$[\text{m}]$	Charakteristický posuv v místě zatížení
$\boldsymbol{\delta}$	$[\text{m}]$	Vektor separací
$\delta_{ii}$	$[\text{m}]$	Separace ve směru osy $ii$ , $ii = nn, ss, tt$
$\delta_{ii}^0$	$[\text{m}]$	Posuv ve směru osy $ii$ iniciující poškození ve směru téže osy, $ii = nn, ss, tt$
$\delta_{ii}^c$	$[\text{m}]$	Posuv ve směru osy $ii$ určující velikost posuvu, při kterém dojde porušení ve směru téže osy, $ii = nn, ss, tt$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$[-]$	Tenzor deformace zapsaný ve formě vektoru
$\boldsymbol{\varepsilon}^0$	$[-]$	Tenzor deformace střední plochy laminátové desky zapsaný ve formě vektoru
$\varepsilon_x$	$[-]$	Poměrná deformace ve směru osy $x$
$\varepsilon_y$	$[-]$	Poměrná deformace ve směru osy $y$
$\varepsilon_{xy}$	$[-]$	Zkos v rovině $\widehat{xy}$
$\nu_{ij}$	$[-]$	Poissonovo číslo v rovině $\widehat{ij}$

Symbol	Jednotka	Název
$\eta$	[-]	Materiálový parametr kohezivního rozhraní
$\boldsymbol{\sigma}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Tenzor napjatosti zapsaný ve formě vektoru
$\sigma_x$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Normálové napětí ve směru osy $x$
$\sigma_y$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Normálové napětí ve směru osy $y$
$\sigma_{xy}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	Smykové napětí v rovině $\widehat{xy}$
$\Phi$	[°]	Úhel určující směr posuvu v testovací úloze
$\varphi$	[°]	Úhel o který je natočen souřadnicový systém $\mathbf{O}(x, y, z)$ od $\mathbf{O}(1, 2, 3)$ kolem osy 3; úhel určující orientaci laminy v laminátové desce
$\psi_x, \psi_y$	[°]	Sklon střední roviny laminátové desky

# 1 Motivace

Cílem práce bylo vytvořit spolehlivý automatizovaný nástroj k identifikaci materiálových parametrů kohezivních rozhraní, například lepených spojů a rozhraní vrstev kompozitů. Nástroj by měl být schopen automaticky vytvořit ve vybraném konečno-prvkovém systému standardizované testy DCB, MMF a ENF na základě geometrie zadané do protokolu z měření, porovnat data s provedenými experimenty, vyhodnotit požadované materiálové parametry a vykreslit příslušné reprezentativní grafy s výsledky. Nástroj by měl být dále snadno modifikovatelný a rozšířitelný. Motivací k této práci bylo vyhodnotit možnosti komerčního konečno-prvkového softwaru Abaqus 6.14 pro řešení problematiky porušení rozhraní materiálů, zejména poté sestavení modelu rozhraní s využitím kohezivních kontaktů. Metoda konečných prvků byla vybrána z důvodu implementovatelnosti nástroje do větších konstrukčních celků.

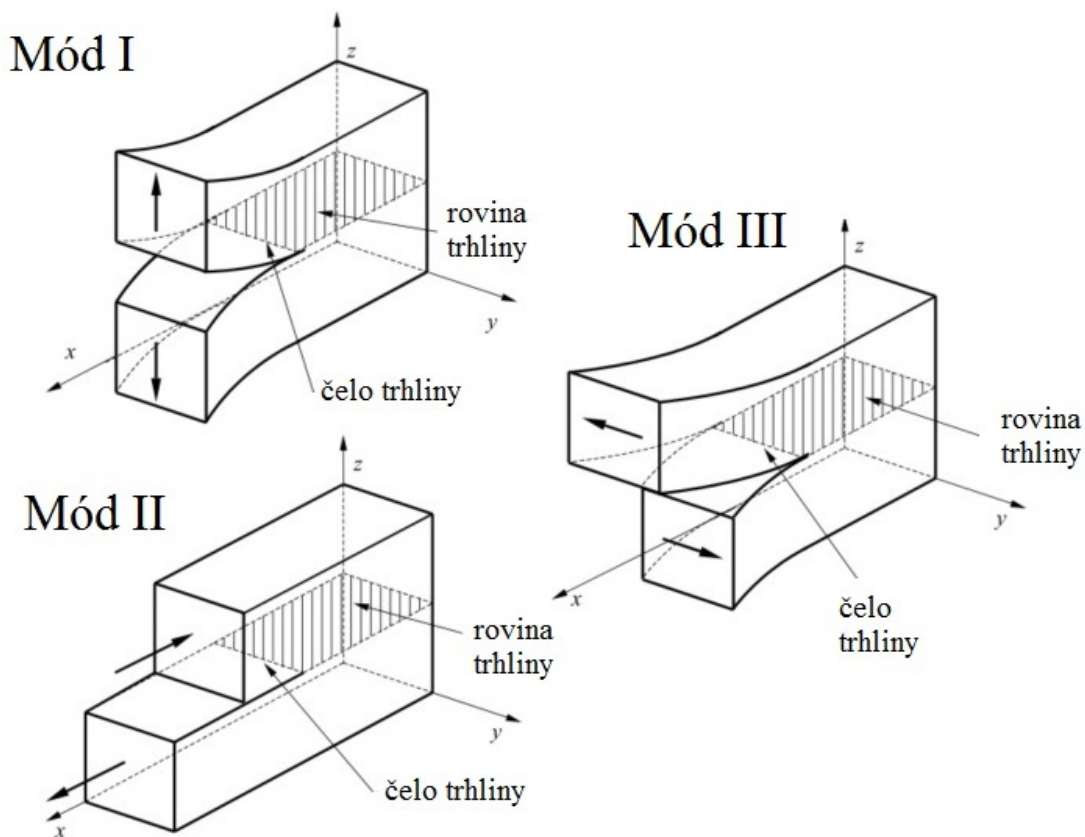
## 2 Rozhraní

V této kapitole bude nejprve definováno rozhraní a rozdělení jeho namáhání pomocí módů, poté bude ve zkratce definován parametr rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil  $G$  a popsáno šíření trhliny v tomto rozhraní. Na konci kapitoly jsou uvedena dvourozměrná a třírozměrná pevnostní kritéria, která určují kritickou hodnotu parametru  $G$ , kdy dojde k růstu trhliny. Spojíme-li dva poddajné materiály s vysokou tuhostí (výrobky) jiným materiálem, vznikne mezi těmito materiály rozhraní. Toto rozhraní může určovat pevnost výsledného systému materiálů. Příkladem takového rozhraní může být matrice kompozitního materiálu spojující jednotlivé vrstvy s výztuží, nebo lepidlo mezi dvěma výrobky. V předkládané práci je předpokládáno, že je rozhraní tvořeno z izotropním materiálem.

### 2.1 Definice rozhraní

Tato práce je zaměřena na popis šíření trhliny v rozhraní. Obecné porušení kohezivního rozhraní je způsobeno normálovým nebo smykovým napětím působícím v tomto rozhraní, nebo jejich kombinací. Takové porušení představuje šíření trhliny mezi dvěma vrstvami materiálu s vysokou tuhostí. Jedná se tedy o úlohu lomové mechaniky, kdy dojde k plnému porušení rozhraní. Pro jednotlivá interaktivní kritéria rozhodující o šíření trhliny se z tohoto důvodu používají parametry lomové mechaniky, např součinitel intenzity napětí  $K$ , rychlost uvolňování energie deformace vnitřních sil  $G$  a podobně. Šíření trhliny v kohezivním rozhraní bylo v této práci analyzováno pomocí standardizovaných testů (viz kapitola 4) vzorků jednosměrového kompozitu. U kompozitního vzorku se takové porušení označuje jako delaminace, která nastává mezi dvěma sousedními vrstvami výztuže kompozitního materiálu [10].

U úlohy lomové mechaniky existují tři základní módy namáhání (viz obrázek 2.1). Módem I se označuje situace, kdy je zatížení kolmé na rovinu, ve které se trhlina šíří (dále rozhraní), i na čelo trhliny. Pro mód namáhání II je zatížení rovnoběžné s rozhraním a kolmé na čelo trhliny. Situace, kdy je zatížení rovnoběžné s rozhraním i čelem trhliny, je označována jako mód III. Obecné namáhání vzorku lze poté popsat kombinací těchto módů.



Obrázek 2.1: Základní módy namáhání rozhraní [16]

## 2.2 Určení parametru rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil $G$

V následujících podkapitolách je uvedena teorie, která byla použita k analýze nosníků vyskytujících se ve standardizovaných testech. Parametr  $G$  byl v předkládané práci zvolen jako základní parametr sloužící k popisu šíření trhliny, neboť je používán v řadě prací zabývajících se touto problematikou. Parametr  $G$  lze obecně určit pomocí přírůstku potenciální energie deformace vnitřních sil  $d\pi$

$$G = -\frac{1}{b} \frac{d\pi}{da}, \quad (2.1)$$

kde  $b$  je šířka tenkostěnného vzorku standardizovaného testu a  $a$  je délka jeho trhliny. Délku trhliny ve většině případů měříme od podpory ve směru ke středu

vzorku (více informací lze nalézt v kapitole 4). Pro problematiku nosníků lze rovnici (2.1) transformovat zavedením poddajnosti  $C$  do tvaru [6]

$$G = \frac{F^2}{2b} \frac{dC}{da}, \quad (2.2)$$

kde poddajnost nosníku  $C$  je definována pomocí charakteristického posuvu  $\delta$  v místě kde působí zatížení  $F$

$$C = \frac{\delta}{F}. \quad (2.3)$$

## 2.3 Šíření trhliny

Jak již bylo popsáno v kapitole 2.1, jedním z parametrů, který vypovídá o šíření trhliny, je rychlost uvolňování deformační energie  $G$ . Pro posouzení růstu trhliny použijme Griffithovo kritérium, které lze shrnout do následujících čtyř bodů [11]:

1. Trhlina roste je-li  $G \geq G^c$ , kde  $G^c$  je kritická hodnota parametru  $G$ .
2. V daném časovém okamžiku v místě růstu trhliny zůstávají napětí neměnná.
3. Kritická hodnota rychlosti uvolňování energie deformace  $G^c$  je konstantní.
4. Trhlina roste ve směru největší rychlosti uvolňování deformační energie  $G$ .

### 2.3.1 Dvourozměrná pevnostní kritéria

Porušení rozhraní v konečno-prvkových analýzách je vhodné posuzovat pomocí pevnostních kritérií. Jako první vznikla dvourozměrná kritéria zahrnují pouze vliv módu zatížení I a II. Prvotní pevnostní kritéria byla vytvořena tak, že kritická hodnota  $G^c$  je rozdělena do složek dle jednotlivých módů zatížení (např.  $G_I^c$ ,  $G_{II}^c$ ). Byla tedy sestavena kritéria zohledňující čistě pevnosti pro jednotlivé módy. Příkladem takového kritéria je mocninné kritérium *power law*, publikované v roce 1984, jehož matematický zápis má tvar

$$\left(\frac{G_I}{G_I^c}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{II}^c}\right)^\beta = 1, \quad (2.4)$$

kde  $G_i$  je rychlost uvolňování deformační energie pro jednotlivé módy,  $G_i^c$  její kritická hodnota pro dané módy,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou materiálové parametry identifikovatelné z experimentů. K porušení dojde, je-li výraz na levé straně roven jedné, to znamená, že hodnoty  $G_I$  a  $G_{II}$  nemusí dosáhnout svých kritických hranic, aby byla splněna podmínka pro šíření trhliny [14]. Dalším později definovaným a velmi rozšířeným

kritériem zejména pro kompozity s reaktoplastickou maticí je experimentálně sestavené kritérium *Benzeggagh-Kenane* [4]

$$\frac{G_I + G_{II}}{G_I^c + (G_{II}^c - G_I^c) \left( \frac{G_{II}}{G_I + G_{II}} \right)^\eta} = 1, \quad (2.5)$$

kde  $\eta$  je materiálový parametr rozhraní. Dvourozměrných kritérií byla za dobu výzkumu porušení rozhraní formulována celá řada a některé z nich lze nalézt v tabulce 2.1. V tabulce se vyskytují moduly i pružnosti v tahu ve směru materiálových os 1 a 2 souřadnicového systému  $\mathbf{O}(1, 2, 3)$   $E_1$  a  $E_2$  a materiálové parametry  $G_I^c, G_{II}^c, G^c, \chi, \varrho, \tau, \eta$ , které lze určit z experimentů [14].

Název kritéria	Matematická formulace
i-tý kritický mód	$\frac{G_i}{G_i^c} = 1$ kde $i = I, II$
Kombinovaný kritický mód	$\frac{G_I + G_{II}}{G^c} = 1$
Polynomiální	$\frac{G_I + G_{II}}{G_I^c + \varrho \left( \frac{G_{II}}{G_I} \right) + \tau \left( \frac{G_{II}}{G_I} \right)^2} = 1$
$K_i$ kritické	$\frac{G_I + G_{II}}{G_{II}^c - (G_{II}^c - G_I^c) \sqrt{\frac{G_I}{G_I^c}}} = 1$
Hackle	$\frac{G_I + G_{II}}{(G_I^c - \chi) + \chi \sqrt{1 + \frac{G_{II}}{G_I} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}} = 1$
Hackle - exponenciální	$\frac{G_I + G_{II}}{(G_I^c - G_{II}^c) + e^{\gamma(1-N)}} = 1$ kde $N = \sqrt{1 + \frac{G_{II}}{G_I} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}$
K - exponenciální	$\frac{G_I + G_{II}}{G_I^c + (G_{II}^c - G_I^c) + e^{\left( \eta \sqrt{\left( \frac{G_{II}}{G_I} \right)^{-1}} \right)}} = 1$
<b>Kritický posuv</b>	
Mód I:	$\frac{3G_{II}}{G_{II}^c \sqrt{\frac{E_1}{E_2} \left( \frac{G_I^c}{G_I} - \frac{G_I}{G_I^c} \right)}} = 1$
Mód II:	$\frac{\frac{1}{3}G_I}{G_I^c \sqrt{\frac{E_2}{E_1} \left( \left( \frac{G_{II}^c}{G_I^c} \right)^2 \left( \frac{G_I^c}{G_{II}^c} \right) - \frac{G_{II}}{G_I^c} \right)}} = 1$

Tabulka 2.1: Dvourozměrná pevnostní kritéria [14]

### 2.3.2 Třírozměrná pevnostní kritéria

Tato kritéria zahrnují i vliv módu zatížení III na pevnost trhliny. Prvotním způsobem, jak přistupovat k problematice spojené s tímto módem, bylo modifikovat již existující kritéria. Například *power law* kritérium lze upravit do tvaru

$$\left( \frac{G_I}{G_I^c} \right)^\alpha + \left( \frac{G_{II} + G_{III}}{G_{II}^c} \right)^\beta = 1. \quad (2.6)$$

Později bylo ukázáno, že takto modifikovaná dvourozměrná kritéria nejsou dostatečná. Došlo tedy k rozšíření dvourozměrného *power law* kritéria do čistě třetího rozměru [14]

$$\left(\frac{G_I}{G_I^c}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{II}^c}\right)^\beta + \left(\frac{G_{III}}{G_{III}^c}\right)^\gamma = 1. \quad (2.7)$$

Takto definovaným kritériem lze popsat široké spektrum odezev, neboť obsahuje šest klíčových materiálových parametrů  $G_I^c, \alpha, \beta, \gamma$ . Vzhledem k použitelnosti a přesnosti *B-K kritéria* pro dvourozměrnou problematiku bylo provedeno jeho rozšíření i do rozměru třetího. Kritérium pak přejde do tvaru [14]

$$\frac{G_T}{G_I^c + (G_{II}^c - G_I^c) \left(\frac{G_{II}}{G_T}\right)^\eta + (G_{III}^c - G_I^c) \left(\frac{G_{III}}{G_T}\right)^\xi} = 1, \quad (2.8)$$

kde  $G_T = G_I + G_{II} + G_{III}$ . Práce [14] vychází z předpokladu, že lze sestavit dvourozměrné kritérium mezi módem I a III analogicky s rovnicí (2.5), neboť oba módy II a III reprezentují smykové namáhání rozhraní. Dostáváme tedy dvourozměrné kritérium ve tvaru [14]

$$\frac{G_I + G_{III}}{G_I^c + (G_{III}^c - G_I^c) \left(\frac{G_{III}}{G_I + G_{III}}\right)^\eta} = 1. \quad (2.9)$$

K popisu šíření trhliny v obecně namáhaném rozhraní je nutno sestavit kritérium zohledňující všechny tři módy zatížení. Lze říci, že neexistují spolehlivé standardizované testy popisující kombinované namáhání rozhraní módy II a III (smyk a stříh), kterými bychom dokázali určit podíl těchto módů na šíření porušení pro obecné zatížení a tím jednoznačně svázat rovnice (2.5) a (2.9). Z tohoto důvodu byl zaveden předpoklad, že prostá lineární kombinace rovnic (2.5) a (2.9) poskytne smysluplný popis šíření porušení pro obecné třírozměrné kombinované zatížení [14]. Po úpravě lze dostat třírozměrné *B-K kritérium* ve tvaru

$$\frac{G_T}{G_I^c + \left((G_{II}^c - G_I^c) \frac{G_{II}}{G_T} + (G_{III}^c - G_I^c) \frac{G_{III}}{G_T}\right) \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_T}\right)^\eta} = 1. \quad (2.10)$$

kde  $G_T = G_I + G_{II} + G_{III}$ .

## 2.4 Závěr

V této kapitole bylo definováno rozhraní a základní tři módy jeho namáhání: mód I, II a III. Dále bylo popsáno určení parametru rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil  $G$  z přírůstkem potenciální energie  $\pi$  a poddajnosti  $C$ . Následně byly ve zkratce popsány podmínky pro šíření trhliny. Nakonec byly definovány dvourozměrná a třírozměrná pevnostní kritéria. V další kapitole budou ve zkratce popsány způsoby modelování rozhraní.



## 3 Modely rozhraní

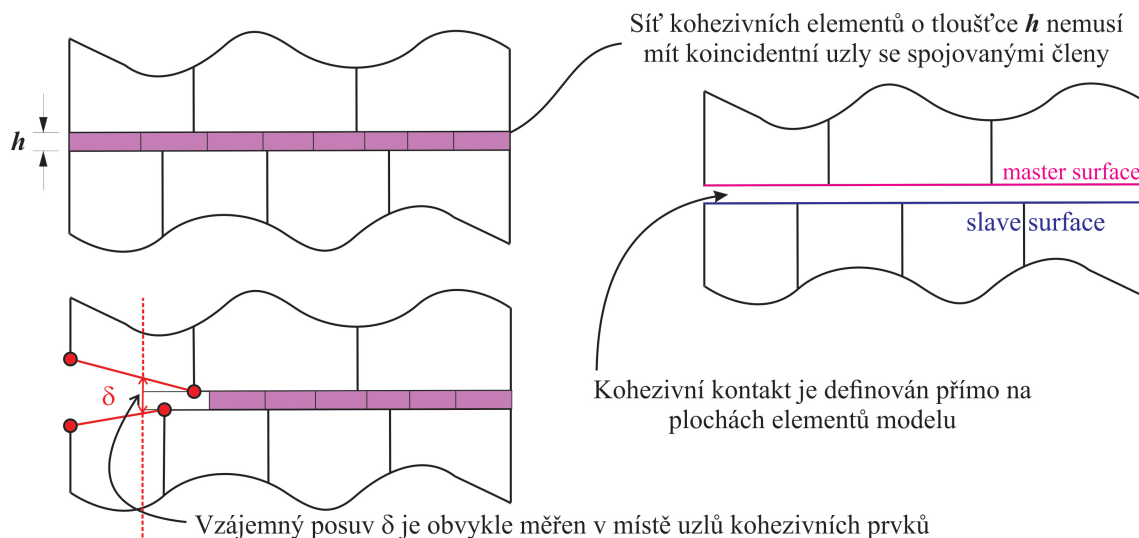
V této kapitole jsou zevrubně popsány některé metod modelování rozhraní. Často implementovanými metodami do komerčních softwarů bývá metoda VCCT a CZM, popřípadě jejich deriváty, jako například discrete cohesive zone model a continuous cohesive zone model [2][12][21]. Porušení kohezivního rozhraní lze rovněž modelovat pomocí pružinek, v následujícím textu je uvedený Winkler-Pasternakův model [16], nebo využitím rozšířené metody konečných prvků XFEM [25].

### 3.1 Virtual crack closure technique (VCCT)

Metody VCCT a CZM jsou si podobné. Metoda VCCT využívá principů lineární elastické lomové mechaniky. Tuto metodu lze užít pouze za předpokladu, že v modelu je již zavedena trhlina a i při kombinovaném namáhání existuje pouze jedno čelo trhliny. Touto metodou nelze popsat vznik náhodné trhliny, ale pouze šíření již jedné existující. Popis šíření více trhlín současně rovněž není možný. Parametrem popisujícím šíření trhliny je rychlost uvolňování deformační energie vnitřních sil  $G$ . Jako pevnostní kritérium v metodě VCCT pro obecně třírozměrné úlohy je v konečno-prvkovém softwaru Abaqus 6.14 implementována rovnice (2.10) [14].

Na rozdíl od metody CZM uvedené v kapitole 3.2, nedochází k ovlivnění tuhosti prvku rozhraní do jeho porušení (není iniciováno poškození). Výhodou této metody je, že není nutno přesně určit rozložení napětí v okolí čela trhliny. Máme-li trhlínu namáhanou kombinací módu I a II, lze jejich poměr určit tak, že symetrická část tenzoru napjatosti je spojena s módem namáhání I a anti-symetrická část s módem II. Obecnou nevýhodou této metody je nutnost existence velmi husté výpočetní sítě a s tím spojené hardwarové náročnosti problému [12].

## 3.2 Cohesive zone model (CZM)



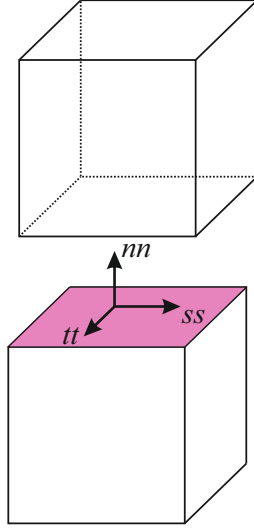
Obrázek 3.1: Kohezivní prvky a kontakt

Tato metoda využívá kohezivního materiálového modelu (realizace může být implementována pomocí kohezivního kontaktu nebo prvku; schématicky ukázaný rozdíl mezi kohezivním kontaktem a prvkem lze nalézt na obrázku 3.1). Konstitutivní vztahy mezi napětím a posuvem jsou označovány jako *traction-separation law*. Na rozdíl od metody VCCT má CZM model konečnou tuhost a dochází zde k iniciaci poškození kohezivního rozhraní po dosažení maximálního trakčního napětí  $t^0$  (*resisting traction*). Po dosažení tohoto napětí ztrácí spoj svoji tuhost  $k$  i přesto, že jsou uvažovány jen elastické deformace [21]. Vzájemné posuvy ve všech 3 základních směrech mezi koincidentními uzly (případně plochami, nebo kombinacemi plocha - uzel) jsou označovány jako separace  $\delta$  (*separation*). Dosáhne-li separace kritické hodnoty, dochází k porušení spoje a uzly jsou rozpojeny. Konstitutivní vztahy mohou mít libovolný průběh závislosti  $t - \delta$ . Nejpoužívanější jsou bilineární a exponenciální závislosti. *Traction-separation law* lze pro obecný třírozměrný problém zapsat jako [1]

$$\mathbf{t} = \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}, \quad (3.1)$$

kde  $\mathbf{t}$  je vektor trakčních napětí,  $\mathbf{K}$  je matice tuhosti kohezivního rozhraní a  $\boldsymbol{\delta}$  je vektor separací. V kartézském systému os  $\mathbf{O}(nn, ss, tt)$  platí [1]

$$\begin{bmatrix} t_{nn} \\ t_{ss} \\ t_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & k_{ns} & k_{nt} \\ k_{ns} & k_{ss} & k_{st} \\ k_{nt} & k_{st} & k_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{ss} \\ \delta_{tt} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$



Obrázek 3.2: Souřadnicový systém os  $\mathbf{O}(ss, nn, tt)$

kde  $t_{nn}$  [Pa] je trakční napětí působící ve směru  $nn$ ,  $k_{nn}$  [Pa/m] je tuhost spoje ve směru  $nn$ ,  $\delta_{nn}$  [m] je separace (relativní posuv uzlů/ploch/kombinace plochy-uzlu) ve směru  $nn$  a stejným způsobem pro další směry. Plocha pod křivkou *traction-separation* je rovna kritické hodnotě parametru  $G^c$ . V předkládané práci bylo použito *traction-separation law* ve tvaru

$$\begin{bmatrix} t_{nn} \\ t_{ss} \\ t_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & k_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & k_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{ss} \\ \delta_{tt} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

kvůli snížení počtu identifikovaných parametrů z 9 na 3 a zároveň se jedná o běžnější popis problému. Detailní popis použitého materiálového modelu kohezivního rozhraní lze nalézt v kapitole 5.2. Pro použití metod CZM a VCCT je nutné předem znát prostor, ve kterém se bude trhлина šířit (v případě CZM je tento prostor vymezen kohezivními prvky popřípadě kontaktem) [21][22][25].

### Volba velikosti hrany prvku konečno-prvkové sítě

Zásadním parametrem ovlivňujícím přesnost a stabilitu výpočtu je volba velikosti prvků výpočetní sítě. Ta je dána délkou kohezivní zóny  $l_{cz}^{ii}$ , kde index  $ii$  označuje normálový směr  $nn$  nebo smykový směr  $ss$ . Definicí tohoto parametru je několik, například autor [2] uvádí vztah pro délku kohezivní zóny ležící v rozhraní pro

standardizovaný test ortotropního kompozitního nosníku DCB (normálový směr  $nn$  je přiřazen módu I) ve tvaru

$$l_{cz}^{ss} = \left( E_2 \frac{G_1^c}{t_{nn}^2} \right)^{\frac{1}{4}} h^{\frac{3}{4}}, \quad (3.4)$$

kde  $E_2$  je Youngův modul pružnosti v tahu ve směru kolmém na vlákna,  $t_{nn}$  je maximální trakční napětí ve směru osy  $nn$  a  $h$  je šířka nosníku. Autor [2] doporučuje, aby délka hrany prvku sítě byla minimálně třikrát menší než délka kohezivní zóny.

### 3.3 Extended finite element method (XFEM)

Zkratkou XFEM označujeme rozšířenou metodu konečných prvků (FEM). Je-li model tvořený z více submodelů síťován klasickou metodou konečných prvků, je nutné, aby každému modelu připadala vlastní síť. Tyto sítě se navíc musí stýkat na (nebo poblíž) geometrických hranic submodelů a na této hranici musí mít společné uzly, kterými spojíme jednotlivé sítě, a hrany prvků se nesmí překrývat.

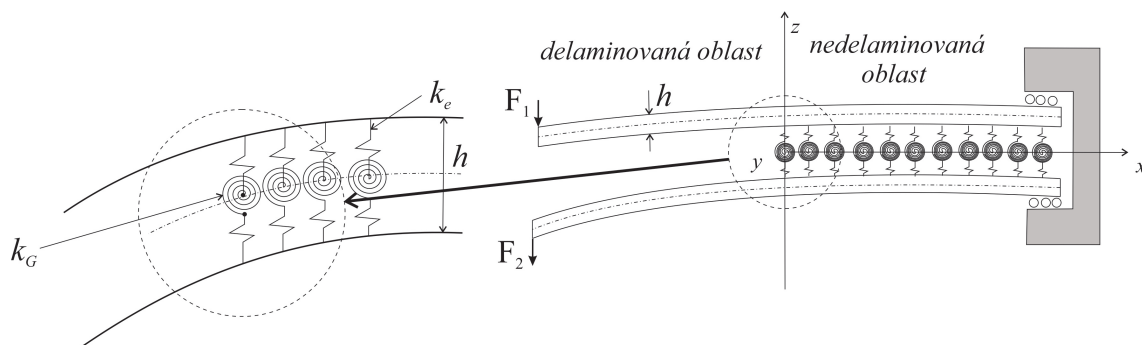
V každém uzlu prvku je určena primární proměnná (například v úloze statiky a dynamiky je touto proměnou posuv) a v integračních bodech, nacházejících se uvnitř prvku je určena sekundární proměnná (například v úloze statiky a dynamiky je sekundární proměnou napětí). Hodnoty sekundární proměnné jsou interpolovány z integračních bodů na uzly a průměrovány s okolními hodnotami sekundárních proměnných v uzlech (metodika interpolace a průměrování je závislá na výrobci softwaru). Tyto proměnné, definované v každém uzlu sítě, tvoří pole posuvů a napětí.

Stýkají-li se dva submodely, kde na každém z nich je definován jiný materiálový model (vznikne skoková změna materiálových parametrů), tak je na jejich společné hranici vytvořena nespojitost v poli napětí a posuvů [22]. Rovněž s FEM nelze modelovat zcela obecné šíření trhliny prostorem, neboť se trhlina může šířit pouze mezi hranami prvků a tím do jisté míry určíme směr jejího šíření [25].

Z důvodu těchto nedostatků FEM, byla v roce 1999 (Belytschko a Black) navržena rozšířená metoda konečných prvků XFEM, pro kterou nemusí být elementy vázány na geometrické a materiálové rozhraní. Kombinací XFEM a CZM dostaneme obecný nástroj pro šíření trhliny v prostoru. Bohužel tato metoda zatím nebyla předmětem výzkumu mnoha prací, neboť CZM a VCCT jsou stále dominantní techniky pro modelování šíření trhlin.

Základní rozdíl mezi FEM a XFEM spočívá v definici posuvů. Metoda XFEM zahrnuje nespojitosti v poli posuvů pomocí implementace skokové a vyhlazovací funkce do funkce aproximující posuvy v uzlech [25].

### 3.4 Winkler-Pasternakův pružinový model rozhraní



Obrázek 3.3: Winkler-Pasternakův pružinový model rozhraní

V tomto modelu je kohezivní rozhraní modelováno pomocí dvou parametrů tuhosti: Winklerovo parametrem  $k_e$  a Pasternakovo parametrem  $k_G$ . Konce nosníků jsou obecně zatíženy různými silami  $F_1$  a  $F_2$ . Jeden nosník je připojen ke druhému pomocí dvojice lineárních pružin o délce  $h/2$  s tuhostí  $k_e$  a jedné torzní pružiny s tuhostí  $k_G$ . K určení parametru  $G^c$  je nejprve nutno vypočítat potenciální energii systému  $\Pi$ . Ta je dána součtem potenciální energie torzních pružin  $\pi_G$ , potenciální energie elastických pružin  $\pi_e$ , potenciální energie od vlastní deformace nosníku  $\pi_d$  a potenciální energie vnějších sil  $\Pi_E$  [16]

$$\Pi = \pi_G + \pi_e + \pi_d + \Pi_E. \quad (3.5)$$

Následně je určen parametr tuhosti  $k_e$  pomocí poměrné elastické deformace systému ve směru osy  $z$  a Hookova zákona. Parametr tuhosti  $k_G$  je určen z principu minima potenciální energie systému. Následně jsou určeny posuvy libovolné části nosníku, určen parametr rozevření  $\delta$  a zavedena poddajnost nosníku  $C$ . Dosazením poddajnosti  $C$  do rovnice (2.2) je určen parametr  $G^c$  [16].

### 3.5 Závěr

V této kapitole byli ve zkratce popsány metody modelování porušení rozhraní. Byla zde uvedena metoda VCCT využívající klasickou laminátovou teorii a metoda CZM, která je použita v předkládané práci. Následně byla velmi zevrubně popsána metoda využívající rozšířenou metodu konečných prvků XFEM a nakonec byl popsán Winkler-Pasternakův pružinový model. V následující kapitole jsou popsány druhy standardizovaných testů pro mód zatížení I a II, které jsou nutné k určení materiálových parametrů  $G_{I}^c$  a  $G_{II}^c$ . Mód zatížení III se tato práce nevěnuje.

## 4 Druhy testů

K určení materiálových parametrů rozhraní, například parametru kritické rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil  $G^c$ , je třeba použít některé z následujících standardizovaných testů: DCB (double cantilever beam), ENF (end notched flexure), ELS (end loaded split), FENF (four point end notched flexure), ONF (over notched flexure), MMF (mixed mode flexure), MMB (mixed mode bending), SCB (single cantilever beam), ADCB (asymmetrically loaded DCB), SLB (single leg bending), CLS (cracked lap shear), DENF (double end notched flexure) a další. Tyto testy jsou rozděleny do skupin dle módů zatížení a s tím spojených parametrů, které je možné pomocí nich určit.

K určení materiálových parametrů kohezivního rozhraní spojených s módem zatížení I lze použít test DCB (double cantilever beam). Pro mód II existuje celá řada testů. Zde se zejména zaměříme na test ENF (end notched flexure). Určení parametrů spojených s módem III je obecně problematické. Tyto parametry lze, při dodržení určité geometrie testu, určit například pomocí testu ECT (edge crack torsion). Detailní popis tohoto testu a jeho problematiky lze nalézt v [13].

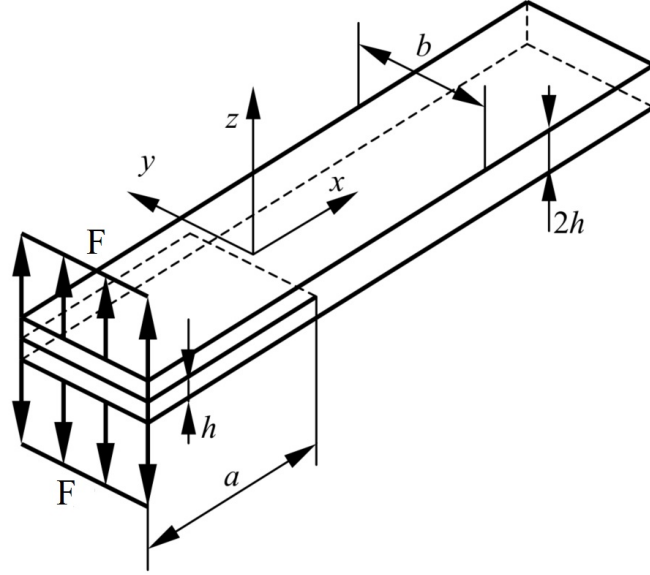
Rovněž existují kombinované testy pro mód I/II. Standardizované testy jsou konstruovány tak, aby se trhlinka šířila v symetrickém prostředí, kde rozhraní je rovinou symetrie (rozložení napjatostí je v okolí čela trhliny na obou nosnících stejné [21]). V předkládané práci jsou uvedeny testy pro mód namáhání I a II a jejich kombinaci. V rámci této práce byly provedeny a analyzovány testy DCB, ENF a kombinovaný test MMF.

### 4.1 Mód I

#### 4.1.1 DCB - double cantilever beam

K měření materiálových vlastností pro mód I lze použít test DCB [16], jehož schéma je uvedeno na obrázku 4.1. Rozhraní je uvažováno rovnoběžně s rovinou  $\widehat{xy}$ , uprostřed tloušťky vzorku po celé jeho střední ploše. Vzorek je při tomto testu zatížen v normálovém směru na konci nosníku, kde již existuje trhlinka. Silová odezva na zatížení v okolí čela trhliny ovlivňuje pouze parametry spojené s módem I a nedochází k smykovému namáhání rozhraní v tomto okolí. Jedná se o test v němž vzorek o délce  $l$ , šířce  $b$ , tloušťce  $2h$  a s počáteční trhlinou o délce  $a$  je volně uložen. Vzorek je zatížen proti sobě působícími osovým zatížením  $F$ . Zatížení působí kolmo na rozhraní i čelo trhliny.

U části nosníku s již zavedenou trhlinou (interval  $x \in \langle 0, a \rangle$ ) lze každou polovinu vzorku vnímat jako vetknutý nosník, který je na volném konci ( $x = 0$ ) zatížený silou  $F$  [10]. K určení parametru rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil  $G$  ze vztahu (2.1) je nutno vypočítat přírůstek potenciální energie deformace



Obrázek 4.1: Test DCB [16]

vnitřních sil  $d\pi$ . Pro konstantní parametry  $E_x$  a  $J_y$  lze psát

$$d\pi = \frac{1}{2} \frac{1}{E_x J_y} M_o^2(x) dx, \quad J_y = \frac{1}{12} b h^3, \quad (4.1)$$

kde  $E_x$  je efektivní modul pružnosti ve směru  $x$ ,  $J_y$  je kvadratický moment setrvačnosti průřezu k ose  $y$  a  $M_o$  označuje ohybový moment. Alternativním přístupem je stanovení  $G_1^c$  pomocí poddajnosti  $C$  dle Timošenkovy teorie nosníků. Rozevření  $\delta$  [m] v místě zatížení pro obecně ortotropní materiál dostáváme ve tvaru

$$\delta = \frac{2}{3} \frac{F a^3}{E_x J_y} + \frac{1}{4} \frac{F h^2 a}{G_{xz} J_y}. \quad (4.2)$$

Dosazením do (2.3) dostáváme

$$C = \frac{2}{3} \frac{a^3}{E_x J_y} + \frac{1}{4} \frac{h^2 a}{G_{xz} J_y}, \quad (4.3)$$

kde první člen zahrnuje vliv normálových sil a druhý vliv sil smykových [5].  $G_{xz}$  je modul pružnosti ve smyku. Vztah pro kritickou hodnotu parametru  $G_1^c$  získáme dosazením do (2.2)

$$G_1^c = \frac{12 F^2 a^2}{E_x b^2 h^3} \left( 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \frac{1}{G_{xz}} \right). \quad (4.4)$$

Zanedbáme-li v (4.4) druhý člen dostáváme kritickou rychlost uvolňování deformační energie z pohledu Euler-Bernoulliho teorie nosníků ve tvaru

$$G_1^c = \frac{F^2 a^2}{b E_x J_y} = \frac{12 F^2 a^2}{b^2 h^3 E_x}. \quad (4.5)$$

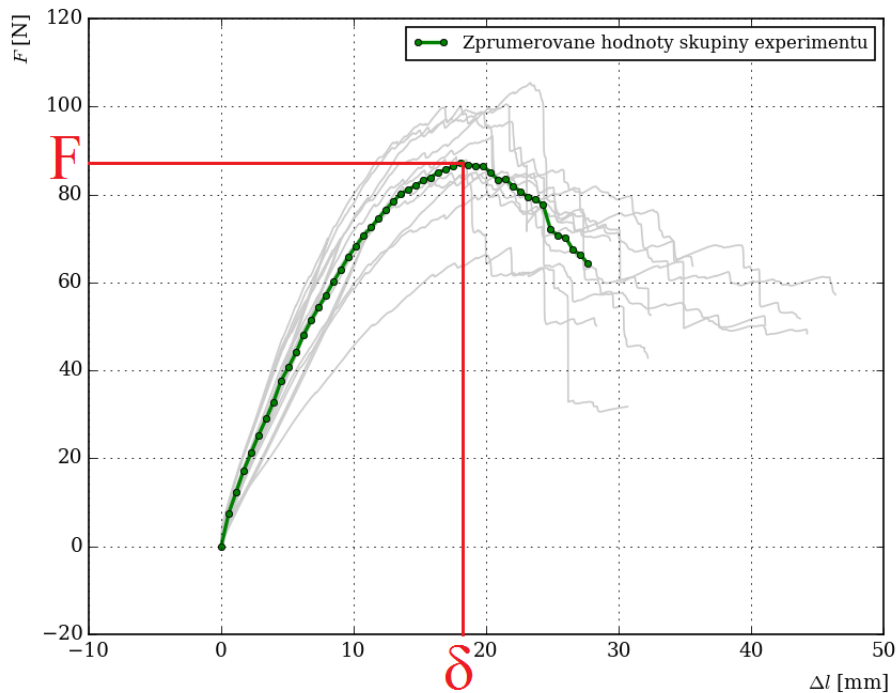
Je účelné vyjádřit vztah (4.5) pomocí parametru rozevření trhliny  $\delta$ , který je roven dvojnásobku průhybu konzolového vetknutého nosníku délky  $a$  s plochou průřezu  $b \times \frac{h}{2}$  zatíženého silou  $F$ . Dostáváme tedy

$$G_1^c = \frac{3 F \delta}{2 b a}. \quad (4.6)$$

Pro odvození vztahu (4.6) byl uvažován vetknutý nosník v místě  $x = a$ . Tento model však neodpovídá realitě, neboť v místě vetknutí vznikají malá natočení, protože čelo trhliny se nachází kousek za vetknutím. Z toho důvodu je provedena korekce parametrem  $|\Delta|$  dle normy ASTM [24], kterým předpokládáme, že délka trhliny je o  $|\Delta|$  větší a má tedy rozměr  $a + |\Delta|$ . Rovnice (4.6) přejde do tvaru

$$G_1^c = \frac{3 F \delta}{2 b (a + |\Delta|)}. \quad (4.7)$$

Kritické zatížení  $F$  a rozevření  $\delta$  určíme z experimentálního záznamu standardizovaného testu DCB dle obrázku 4.2 (červeně zvýrazněné hodnoty).



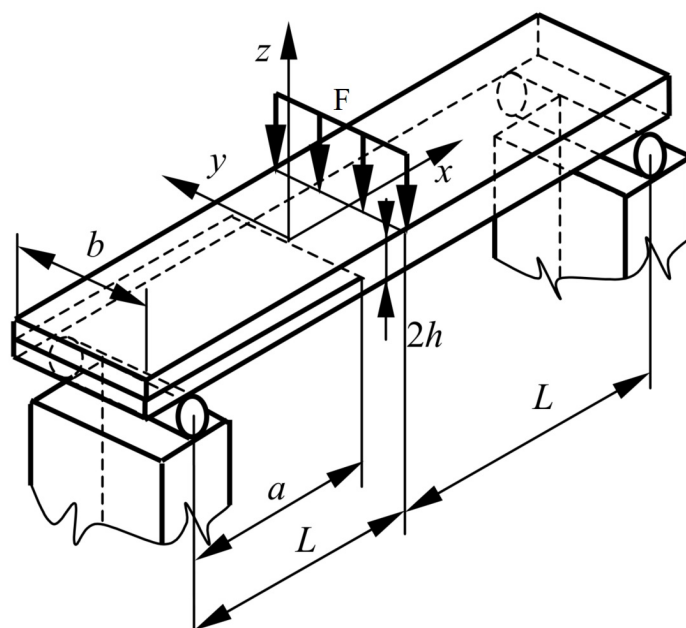
Obrázek 4.2: Experimentální data testu DCB



## 4.2 Mód II

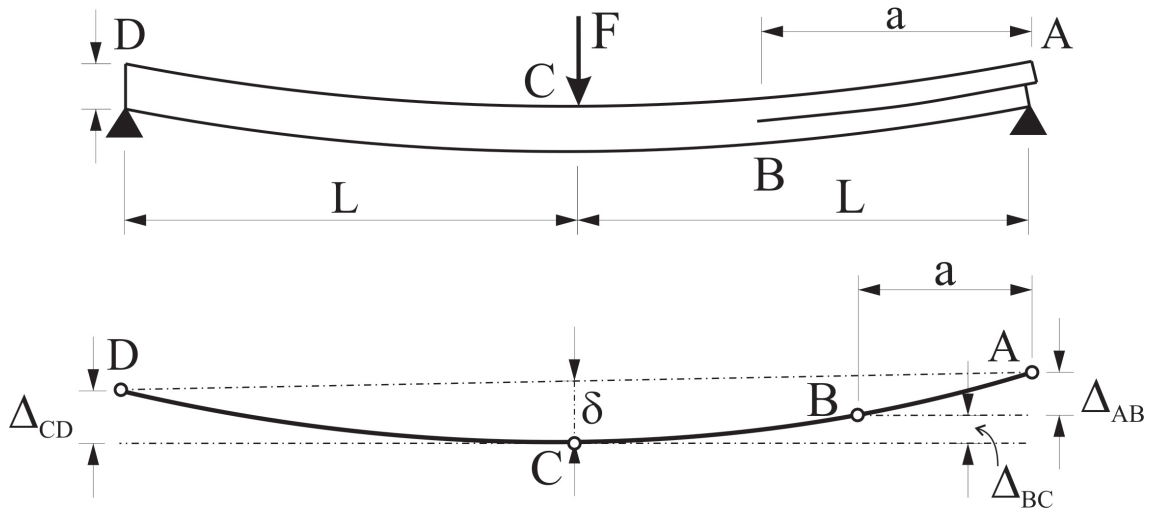
Ke zjištění materiálových parametrů spojených s módem namáhání II existuje řada testů. Zde jsou vybrány pouze čtyři: ENF (end notched flexure), ELS (end loaded split), FENF (four point ENF), ONF (over notched flexure). Test ENF, který je v této práci implementován do MKP softwaru, je zde popsán podrobně. Zbylé testy jsou zmíněny ve zkratce.

### 4.2.1 ENF - end notched flexure



Obrázek 4.3: Test ENF [16]

Nejprve je zde uveden test ENF jehož schéma lze nalézt na obrázku 4.3. Vzorek o šířce  $b$  a tloušťce  $2h$  je umístěn na dvou válcových podporách s roztečí  $2L$  a zatížen uprostřed osovým zatížením  $F$  ve směru osy  $z$ . Počáteční délka trhliny  $a$  musí být výrazně menší než polovina vzdálenosti mezi podporami  $L$ . Výhodou tohoto testu je jednoduchá realizace (zatížení a uchycení vzorku) a jednoduché analytické řešení. Problematický poté bývá nestabilní růst trhliny, vliv podélného tření mezi delaminovanými vrstvami a posuv vzorku ve směru osy  $x$  během testu [16]. Rozhraní je uvažováno rovnoběžně s rovinou  $\widehat{xy}$  symetricky ke tloušťce vzorku po celé jeho střední ploše.



Obrázek 4.4: Schéma zavedení posuvů pro test ENF [7]

Odvození vztahu pro parametr rychlosti uvolňování deformační energie  $G$  je pro tento vzorek založeno na změně poddajnosti s růstem trhliny [7]. S ohledem na obrázek 4.4 zavedeme posuv  $\delta$  v místě zatížení  $C$  jako aritmetický průměr posuvů určených vzhledem ke koncům nosníků označenými body A a D

$$\delta = \frac{\Delta_{AB} + \Delta_{BC} + \Delta_{CD}}{2}, \quad (4.8)$$

kde úseky BC a CD jsou modelovány jako konzolové nosíky s efektivním modulem pružnosti ve směru osy  $x$   $E_x$  a efektivním smykovým modulem pružnosti  $G_{xz}$ . Členy  $\Delta_{BC}$  a  $\Delta_{CD}$  lze určit z Timošenkovy teorie ohybu nosníku jako [7]

$$\Delta_{CD} = \frac{FL^3}{4E_xbh^3} + 0.3 \left[ \frac{FL}{G_{xz}bh} \right], \quad (4.9)$$

$$\Delta_{BC} = \frac{F(2L^3 + 3aL^2 + a^3)}{8E_xbh^3} + 0.3 \left[ \frac{F(L-a)}{G_{xz}bh} \right]. \quad (4.10)$$

Kvůli ohybu, smykovým deformacím a natočení průřezu v místě B, je složka posuvu mezi body A a B  $\Delta_{AB}$  tvořena dvěma částmi. První část posuvu  $\Delta_{AB,1}$  je dána ohybem a smykovými deformacemi nosníků. Druhá část posuvu  $\Delta_{AB,2}$  je určena natočením průřezu v místě B. Tu lze přibližně určit jako natočení průřezu vynásobené délkou nosníku. Dostáváme [7]

$$\Delta_{AB,1} = \frac{F}{E_xbh^3} \left[ a^3 + \frac{3}{8}ah^2 \frac{E_x}{G_{xz}} \right], \quad (4.11)$$

$$\Delta_{AB,2} \cong \frac{3F}{8E_xbh^3} \left[ aL^2 - a^3 + ah^2 \frac{E_x}{G_{xz}} \right], \quad (4.12)$$

$$\Delta_{AB} = \Delta_{AB,1} + \Delta_{AB,2}. \quad (4.13)$$

Dosadíme-li výrazy (4.9) až (4.13) do (4.8), lze psát vztah zahrnující vliv smykových napětí pro poddajnost nosníku  $C$

$$C = \frac{\delta}{F} = \frac{2L^3 + 3a^3}{8E_x b h^3} \left[ 1 + \frac{2(1.2L + 0.9a)h^2 E_x}{(2L^3 + 3a^3) G_{xz}} \right] \quad (4.14)$$

Využitím vztahu (2.2) dostáváme kritickou hodnotu parametru rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil pro mód II  $G_{II}^c$  dle Timošenkovy teorie nosníků ve tvaru

$$G_{II}^c = \frac{9a^2 F^2}{16E_x b^2 h^3} \left[ 1 + 0.2 \left( \frac{E_x}{G_{xz}} \right) \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \quad (4.15)$$

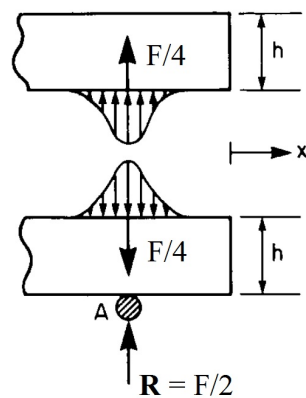
Zanedbáme-li vliv druhého členu, dostáváme výraz pro  $G_{II}^c$  dle Eulerovo-Bernoulliho teorie pro ohyb nosníků [16]

$$G_{II}^c = \frac{9F^2 a^2}{16b^2 h^3 E_x} = \frac{9F a^2 \delta}{2b(3a^3 + 2L^3)}, \quad (4.16)$$

kde

$$\delta = \frac{F(3a^3 + 2L^3)}{8E_x b h^3}. \quad (4.17)$$

### Vliv tření na určení materiálových vlastností



Obrázek 4.5: Schéma rozložení normálových sil v bodě A [7]

Problematickým aspektem toho testu může být vliv podélného tření mezi vrstvami s porušeným rozhraním na absorpci energie. Zatížení v bodě A se přenáší z dolního nosníku na horní skrze tření. Růst trhliny způsobuje pohyb horní části po dolní a toto tření působící proti pohybu způsobuje disipaci energie.

Studie autorů [7] ukázala, že kontaktní plocha je symetricky rozložena kolem bodu A a je její podélný rozměr je menší než  $4h$ , kde  $h$  je tloušťka nosníku.

Dále bylo zjištěno, že každá část přenáší normálové zatížení o velikosti  $\frac{F}{4}$ , jak je zobrazeno na obrázku 4.5. Pro práci třecích sil lze psát

$$W_f = \int_{-2h}^{2h} fN(x)\Delta u(x)dx \quad N(x) = \frac{F}{4}\delta(x) \quad (4.18)$$

kde  $f$  je koeficient tření,  $N(x)$  rozložení normálové síly a  $\Delta u(x)$  je relativní posuv vrstev vůči sobě. Rozložení normálové síly po délce kontaktní plochy lze aproximovat Dirackovo funkcí  $\delta(x)$  [7]. Náhradou  $N(x)$  v (4.18) dostaneme omezení pro práci třecích sil ve tvaru

$$W_f \leq f\frac{F}{4}\Delta u(0), \quad (4.19)$$

kde relativní posuv  $\Delta u(0)$  nad středem podpory v místě A lze dle Timošenkovy teorie určit jako [7]

$$\Delta u(0) = 2 | u(0) | = \frac{3F}{2E_xbh^2} \left[ a^2 + \frac{h^2}{12} \left( \frac{E_x}{G_{xz}} \right) \right]. \quad (4.20)$$

Dosazením 4.20 do 4.19 dostáváme

$$W_f \leq \frac{3F^2f}{8E_xbh^2} \left[ a^2 + \frac{h^2}{12} \left( \frac{E_x}{G_{xz}} \right) \right]. \quad (4.21)$$

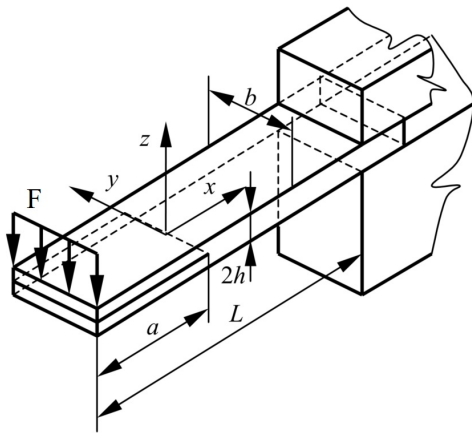
Je-li část energie předané vzorku zatížením spotřebována třením již porušených vrstev, lze předpokládat, že hodnota parametru  $G_{II}^{cf}$ , která odpovídá kritické hodnotě parametru  $G$  s uvažováním tření vrstev mezi sebou, je oproti původnímu parametru  $G_{II}^c$  menší právě o ekvivalent této spotřebované energie. Za předpokladu, že poddajnost  $C$  není ovlivněna třením, lze s přihlédnutím ke Griffithovo kritériu a (2.1) psát podmínku pro šíření trhliny ve tvaru [7]

$$G_{II}^{cf} < G_{II}^c - \frac{1}{b} \frac{\partial W_f}{\partial a}. \quad (4.22)$$

Po dosazení (4.16) a (4.21) do (4.22) dostáváme

$$G_{II}^{cf} < \frac{9a^2F^2}{16E_xb^2h^3} \left[ 1 + 0.2 \left( \frac{E_x}{G_{xz}} \right) \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] - \frac{3F^2fa}{4E_xb^2h^2}. \quad (4.23)$$

### 4.2.2 ELS - end loaded split

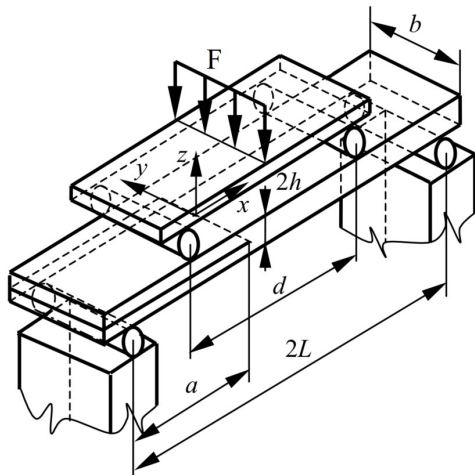


$$\begin{aligned}
 C &= \frac{3a^3 + L^3}{2bh^3 E_x} \\
 G_{II}^c &= \frac{9F^2 a^2}{4b^2 h^3 E_x} \\
 G_{II}^c &= \frac{9F a^2 \delta}{2b(3a^3 + L^3)}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Obrázek 4.6: Test ELS [16]

Vzorek s počáteční délkou trhliny  $a$ , šířce vzorku  $b$ , délce  $L$  a tloušťce  $2h$  je vetknut. Na konci je osově zatížen ve směru osy  $z$ . Výhodou tohoto testu je jednoduchá geometrie vzorku, stabilní šíření trhliny. Problematická může být realizace vetknutí a velké deformace v ohybu, ke kterým během testu dochází. Vztahy pro poddajnost  $C$  a rychlost uvolňování energie  $G$  pro mód II určené dle Euler-Bernoulliho teorie [16] lze nalézt v (4.24).

### 4.2.3 FENF - four point end notched flexure

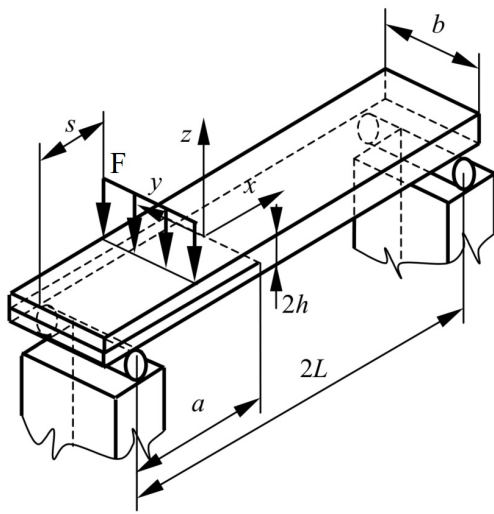


$$\begin{aligned}
 C &= \frac{(9a + 6d - 6L) \left(L - \frac{d}{2}\right)^2}{8bh^3 E_x} \\
 G_{II}^c &= \frac{9 \left(L - \frac{d}{2}\right)^2 F^2}{16b^2 h^3 E_x} \\
 G_{II}^c &= \frac{9F \delta}{2b(9a + 6d - 6L)}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Obrázek 4.7: Test FENF [16]

Vzorek je umístěn na válcových podporách s roztečí  $2L$ . Vzorek má počáteční délku trhliny  $a$ , šířku  $b$  a tloušťku  $2h$ . Na vzorku jsou symetricky k jeho středu umístěny tuhé válcové podpory s roztečí  $d$ , na nichž leží dostatečně tuhá tenkostěnná deska. Osově zatížení ve směru osy  $z$  je soustředěno do středu této desky. Rovina, ve které působí zatížení, zároveň prochází středem vzorku. Zatížení musí být aplikováno za trhlinou o počáteční velikosti  $a$  vzhledem k kladnému směru osy  $x$ . Realizace uchycení v tomto testu může být problematická a během testu může dojít k pohybu vzorku ve směru osy  $x$  [16]. Parametry  $C$  a  $G_{II}^c$  určené dle Euler-Bernoulliho teorie lze nalézt v (4.25).

#### 4.2.4 ONF - over notched flexure



Test ONF je geometricky totožný s testem ENF. Rozdílné je pouze místo kde je aplikováno zatížení, neboť je před koncem trhliny, ve vzdálenosti  $s$  od podpory. Takovéto řešení zatížení odstraňuje problém s nestabilitou během šíření trhliny [16]. Parametry  $C$  a  $G_{II}^c$  určené dle Euler-Bernoulliho teorie lze nalézt v (4.26).

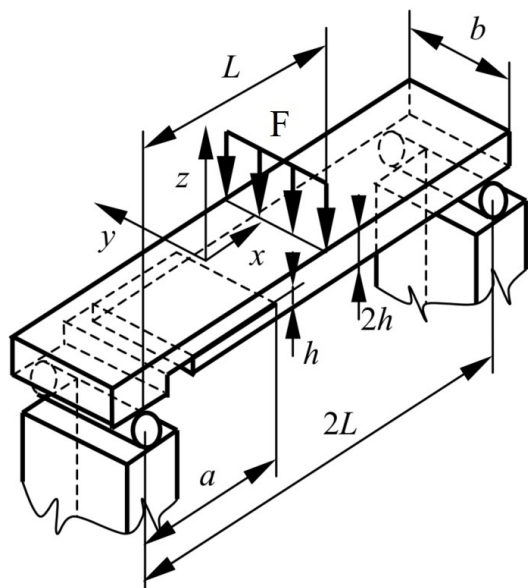
Obrázek 4.8: Test ONF [16]

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{s^2 c^3}{8bh^3 L^2 E_x} \left[ 1 + 4\frac{a}{c} + 8\frac{aL}{c^2} + 16\frac{aL^2}{c^3} + 8\frac{Ls(s-4L)}{c^3} \right] \\
 G_{II}^c &= \frac{9(Fsc)^2}{16b^2 h^3 L^2 E_x} \\
 G_{II}^c &= \frac{9F\delta}{2b(2L-a)} \frac{1}{\left[ 1 + 4\frac{a}{c} + 8\frac{aL}{c^2} + 16\frac{aL^2}{c^3} + 8\frac{Ls(s-4L)}{c^3} \right]}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

### 4.3 Kombinovaný I/II mód

Kombinovanými testy lze obecně určit materiálový parametr  $G_{I/II}^c$  pro kombinované namáhání vzorku módem zatížení I a II. Specifickým testem je test MMB, kterým lze určit parametry  $G_I^c$  a  $G_{II}^c$  zvlášť a najednou. V předkládané práci byl do konečno-prvkového softwaru implementován test MMF.

#### 4.3.1 MMF - mixed mode flexure



$$C = \frac{448a^3 + 121L^3}{64bh^3E_x}, \quad (4.27)$$

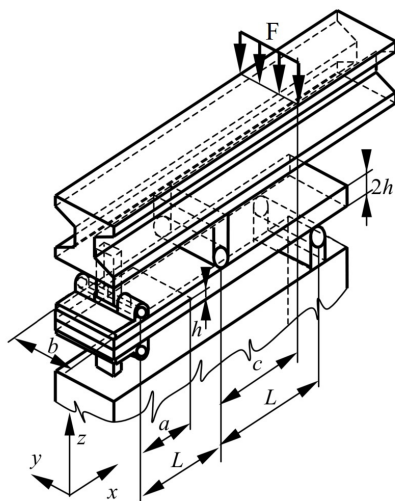
$$G_{I/II}^c = \frac{21(Fa)^2}{16b^2h^3E_x}. \quad (4.28)$$

$$G_{I/II}^c = \frac{672a^2F\delta}{b(121L^3 + 448a^3)}. \quad (4.29)$$

Obrázek 4.9: Test MMF [16]

Vzorek o tloušťce  $2h$ , šířce  $b$  s trhlinou o počáteční délce  $a$  je umístěn na dvou podporách s roztečí  $2L$  vodorovně s rovinou  $\widehat{xy}$ . Zatížení  $F$  (proti směru osy  $z$ ) je aplikováno ve vzdálenosti  $L$  od obou podpor. Rozhraní je uvažováno rovnoběžně s rovinou  $\widehat{xy}$  symetricky uprostřed tloušťky vzorku. Výhodou tohoto testu je jeho jednoduchá realizace a relativně jednoduché analytické řešení. Problémem je skutečnost, že poměr módů  $G_{I/II}^c$  se mění s délkou trhliny  $a$ , tzn. jednoznačně definovat poměr módů I a II je nemožné [16].

### 4.3.2 MMB - mixed mode bending



$$C = \left(\frac{3c - L}{4L}\right)^2 \frac{8a^3}{bh^3 E_x} + \left(1 + \frac{c}{L}\right)^2 \frac{3a^3 + 2L^3}{8bh^3 E_x}$$

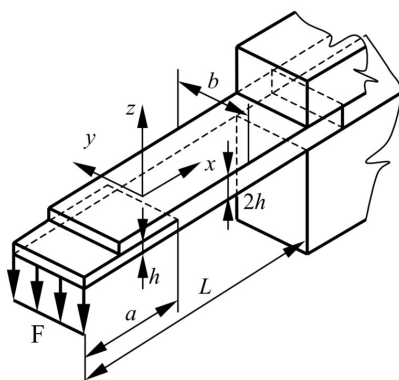
$$G_{\text{I}}^c = \frac{3F^2 a^2 (3c - L)^2}{4b^2 h^3 L^2 E_x} \quad (4.30)$$

$$G_{\text{II}}^c = \frac{9F^2 a^2 (3c + L)^2}{16b^2 h^3 L^2 E_x}$$

Obrázek 4.10: Test MMB [16]

Na vzorku o tloušťce  $2h$ , délce  $2L$ , šířce  $b$ , s trhlinou o počáteční délce  $a$  jsou na místě trhliny nalepeny dva panty. Jeden pant je pevně spojen s rámem a druhý se silnostěnným nosníkem. Druhý konec vzorku je položen na válcové podpoře. Na nosník je aplikováno osové zatížení ve vzdálenosti  $c$  od středu vzorku směrem od pantu proti směru osy  $z$ . Nosník zatěžuje vzorek na ohyb pomocí výčnělku umístěného ve vzdálenosti  $L$  od podpory a pantu. Počáteční délka trhliny  $a$  je menší než rozměr  $L$ . Výhodou tohoto testu je možnost rozdělení parametru  $G$  zvláště pro mód I a II. Problematické poté bývá správné nalepení pantů a uchycení vzorku. Tento test je doporučeno používat pouze pro jednosměrové kompozity [16].

### 4.3.3 SCB - single cantilever beam



$$C = \frac{7a^3 + L^3}{2bh^3 E_x}$$

$$G_{\text{I/II}}^c = \frac{21(Fa)^2}{4b^2 h^3 E_x} \quad (4.31)$$

$$G_{\text{I/II}}^c = \frac{21a^2 F \delta}{2b(L^3 + 7a^3)}$$

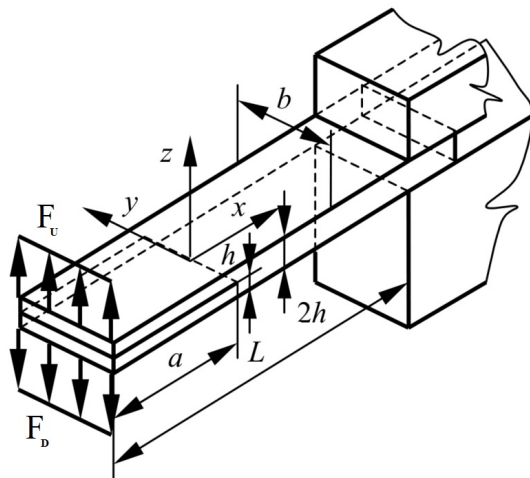
Obrázek 4.11: Test SCB [16]



Asymetrický vzorek o délce  $L$  a tloušťce  $2h$  a šířce  $b$  je na konci vetknut. Zatížení je aplikováno na spodní části delaminovaného konce proti směru osy  $z$ . Nevýhodou tohoto testu jsou velké deformace během ohybu vzorku a proměnlivý vliv jednotlivých módů během růstu trhliny na odezvu materiálu. Parametry  $C$  a  $G_{I/II}^c$  určené dle Euler-Bernoulliho teorie lze nalézt v (4.31).

Další testy jsou si problematikou velmi podobné. Proto jsou zde uvedeny jen jejich schémata a příslušné parametry určené dle Euler-Bernoulliho teorie bez dalšího popisu.

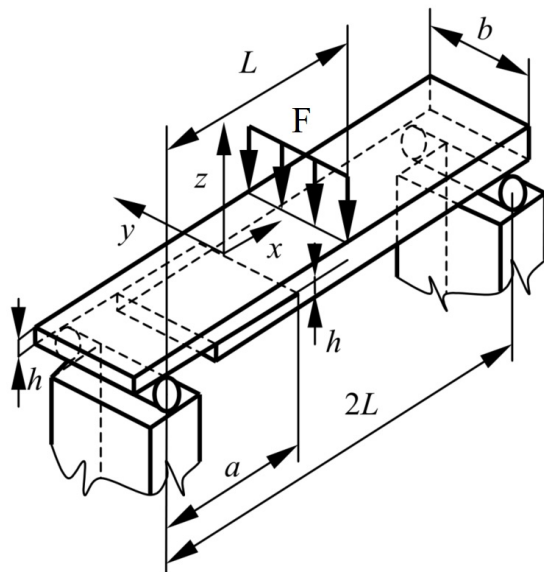
#### 4.3.4 ADCB - asymmetrically loaded double cantilever beam



$$\begin{aligned}
 & \mathbf{F}_U \neq \mathbf{F}_D \\
 & C_1 = \frac{7a^3 + L^3}{2bh^3 E_x} + \frac{(L^3 - a^3) F_D}{2bh^3 E_x F_U} \\
 & C_2 = \frac{7a^3 + L^3}{2bh^3 E_x} + \frac{(L^3 - a^3) F_U}{2bh^3 E_x F_D} \quad (4.32) \\
 & G_{I/II}^c = \frac{6a^2}{b^2 h^3 E_x} \left[ F_U^2 + F_D^2 - \frac{(F_U + F_D)^2}{8} \right]
 \end{aligned}$$

Obrázek 4.12: Test ADCB [16]

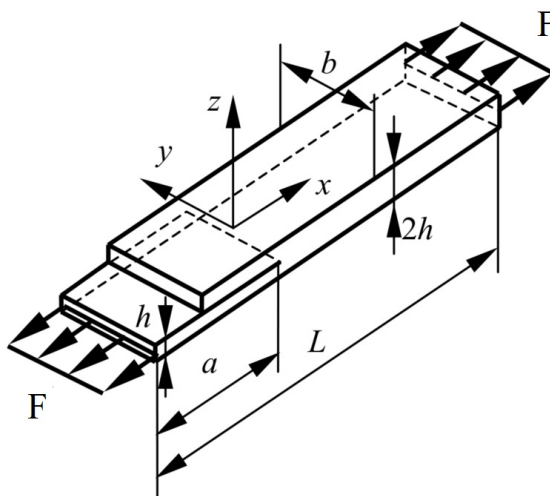
### 4.3.5 SLB - single leg bending



Obrázek 4.13: Test SLB [16]

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{7a^3 + 2L^3}{8bh^3E_x} \\
 G_{I/II}^c &= \frac{21(Fa)^2}{16b^2h^3E_x} \\
 G_{I/II}^c &= \frac{21a^2F\delta}{2b(2L^3 + 7a^3)}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

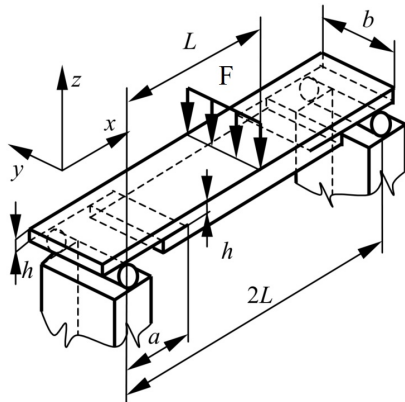
### 4.3.6 CLS - cracked lap shear



Obrázek 4.14: Test CLS [16]

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{a + L}{2bhE_x} \\
 G_{I/II}^c &= \frac{F^2}{4b^2hE_x} \\
 G_{I/II}^c &= \frac{F\delta}{2b(L + a)}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

### 4.3.7 DENF - double end notched flexure



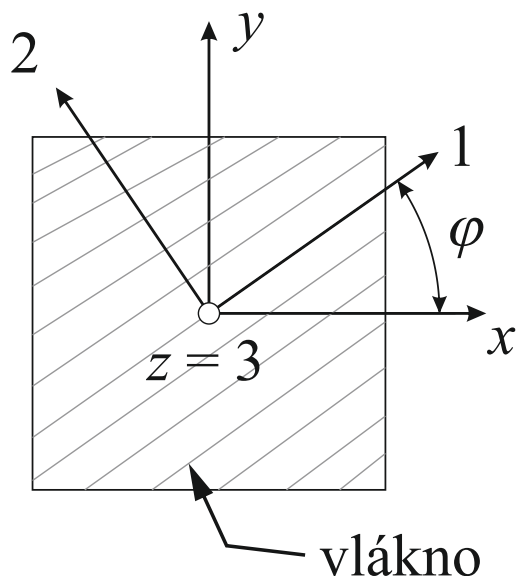
$$\begin{aligned}
 C &= \frac{7a^3 + L^3}{4bh^3E_x} \\
 G_{I/II}^c &= \frac{21F^2a^2}{8b^2h^3E_x} \quad (4.35) \\
 G_{I/II}^c &= \frac{a^2F\delta}{2b(L^3 + 7a^3)}
 \end{aligned}$$

Obrázek 4.15: Test DENF [16]

## 4.4 Závěr

V této kapitole byly popsány standardizované testy pro mód zatížení I, II a kombinovaný mód I/II. Dále se již budeme zabývat pouze testy DCB, ENF a MMF, neboť právě pro tyto testy byly realizovány experimenty a sestaveny ekvivalentní konečno-prvkové modely, které byly implementovány do vytvořeného nástroje.

## 5 Materiálové modely



Obrázek 5.1: Vztah mezi souřadnicovými systémy os  $O(x, y, z)$  a  $O(1, 2, 3)$  [10]

K ucelenému pohledu na problematiku porušení kohezivního rozhraní zbývá definovat materiálové modely potřebné k tvorbě konečno-prvkových modelů. Obecný konečno-prvkový model standardizovaného testu se skládá ze dvou charakteristických oblastí. Označme je jako *spojované členy* a *kohezivní rozhraní*. Spojovanými členy rozumějme nosníky, které mohou vykazovat i anizotropní vlastnosti. V předkládané práci se jedná výhradně o jednosměrové uhlíkové kompozity. Pod kohezivním rozhraním si lze představit rozhraní mezi spojovanými členy (lepidlo, mezivrstvu v laminátu atd.), zde definované pomocí kohezivního kontaktu. V této kapitole jsou nejprve ukázány materiálové modely spojovaných členů v závislosti na míře anizotropie. Dále jsou určeny matice mimoosové tuhosti  $\mathbf{Q}$ , matice tahové tuhosti  $\mathbf{A}$ , matice vazební tuhosti  $\mathbf{B}$  a matice ohybové tuhosti  $\mathbf{D}$  a efektivní konstanty pružnosti  $E_x$ ,  $E_y$  a  $G_{xy}$  stanovené obecně i pro vrstvené materiály. Poté je definován materiálový model kohezivního rozhraní, který byl použit v práci. Na konci kapitoly je nastíněna problematika přiřazení módů I, II a III ke globálnímu kartézskému souřadnicovému systému  $O(nn, ss, tt)$  a volba kontaktního páru k definování kohezivního kontaktu v konečno-prvkovém modelu.

## 5.1 Materiálový model spojovaných členů

V rámci této práce byly spojované členy uvažovány jako lineární elastický materiál, pro který je konstitutivní vztah mezi napětím a deformací v souřadnicovém systému materiálových os  $\mathbf{O}(1, 2, 3)$  dán zobecněným Hookovým zákonem ve tvaru [10]

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}$  je tenzor napětí zapsaný ve formě vektoru,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je tenzor deformací zapsaný ve formě vektoru,  $\mathbf{C}$  je matice materiálových konstant,  $\sigma_i$  jsou normálové a smykové napětí a  $\varepsilon_i$  je poměrná deformace, popřípadě zkos. Rovnici (5.1) lze přepsat do inverzního tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}, \quad \text{kde } \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}. \quad (5.2)$$

V následující podkapitole budou ukázány základní materiálové modely v závislosti na míře anizotropie.

### 5.1.1 Anizotropní materiál

Anizotropní materiál je definován 21 nezávislými prvky  $C_{ij}$  matice materiálových konstant  $\mathbf{C}$ . U tohoto materiálu nelze najít rovinu symetrie elastických vlastností (platí obecná anizotropie [10]). Matice  $\mathbf{C}$  má tvar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

V praxi lze nalézt materiály, jejichž elastické vlastnosti jsou v některých směrech stejné. Vhodnou volbou souřadnicového systému lze zjednodušit matici materiálových konstant  $\mathbf{C}$ . Existuje-li tedy v každém bodu anizotropního materiálu symetrie elastických vlastností vzhledem k nějaké rovině (např rovina  $\widehat{12}$  souřadnicového systému  $\mathbf{O}(1, 2, 3)$ , směr hlavní anizotropie je ve směru osy 3), lze matici  $\mathbf{C}$  zjed-

nodužit do tvaru

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Ortotropní materiál

Ortotropní materiál je definován třemi navzájem ortogonálními rovinami symetrie elastických vlastností. Každým bodem ortotropního materiálu procházejí tři vzájemně kolmé hlavní směry anizotropie. Matice materiálových konstant  $\mathbf{C}$  je určena devíti nezávislými prvky a má tvar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Použitím konstant pružnosti lze Hookův zákon (5.1) pro ortotropní materiál zapsat následovně

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{32}\nu_{21})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & \frac{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{32}\nu_{21})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & \frac{E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\det(\boldsymbol{\nu})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

kde  $E_i$  jsou moduly pružnosti v tahu v hlavních směrech anizotropie,  $G_{ij}$  moduly pružnosti ve smyku a  $\nu_{ij}$  Poissonova čísla [10]. Matice  $\boldsymbol{\nu}$  má tvar

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{12} & -\nu_{13} \\ -\nu_{21} & 1 & -\nu_{23} \\ -\nu_{31} & -\nu_{32} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

### 5.1.3 Příčně izotropní materiál

Jedná se o materiál, kde jedna rovina symetrie elastických vlastností je zároveň rovinou izotropie. V rovině izotropie jsou elastické vlastnosti ve všech směrech stejné. Matice materiálových konstant  $\mathbf{C}$  má obdobný tvar jako pro materiál ortotropní. V případě, že hlavní směr izotropie je určen osou 1 souřadnicového systému  $\mathcal{O}(1, 2, 3)$ , mají konstanty pružnosti význam [10]:

$E_1$	modul pružnosti v tahu ve směru vláken
$E_2 = E_3$	moduly pružnosti v rovině izotropie ve směru kolmém na vlákna
$G_{12} = G_{13}$	moduly pružnosti ve smyku v rovinách kolmých na rovinu izotropie
$G_{23} = G_{32}$	moduly pružnosti ve smyku v rovině izotropie
$\nu_{12} = \nu_{13}$	Poissonova čísla označující poměr zkrácení v rovině izotropie ku prodloužení v hlavním směru anizotropie
$\nu_{23} = \nu_{32}$	Poissonova čísla v rovině izotropie

Pro modul pružnosti ve smyku v rovině izotropie platí

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}. \quad (5.8)$$

Matici materiálových konstant  $\mathbf{C}$  lze tedy zjednodušit do tvaru, kde vystupuje pouze pět nezávislých prvků  $C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}$  a  $C_{66}$  [10]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

### 5.1.4 Matice mimoosové tuhosti $\mathbf{Q}$

Je-li souřadnicový systém  $\mathcal{O}(x, y, z)$  natočen od souřadnicového systému materiálových os  $\mathcal{O}(1, 2, 3)$  o úhel  $\varphi$  kolem osy 3, je konstitutivní vztah v souřadnicovém systému  $\mathcal{O}(x, y, z)$  dán jako

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}', \quad (5.10)$$

kde  $\mathbf{Q}$  je matice mimoosové tuhosti,  $\boldsymbol{\sigma}'$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  jsou tenzory napětí a deformace zapsané ve formě vektoru v systému os  $\mathcal{O}(x, y, z)$ . Matici  $\mathbf{Q}$  získáme pomocí transformačních matic dle

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_\varepsilon, \quad (5.11)$$

kde  $\mathbf{T}_\sigma^{-1}$  je inverzní maticí k matici transformace napětí  $\mathbf{T}_\sigma$  a  $\mathbf{T}_\varepsilon$  je matice transformace deformace [10]

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

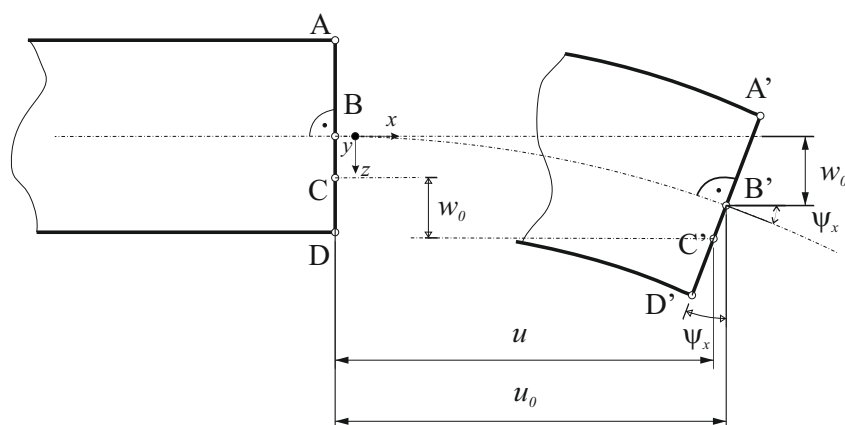
$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) & 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}.$$



### 5.1.5 Základní rovnice laminátové desky: určení matic A, B, D

Zkoumané kompozitní vzorky standardizovaných testů lze uvažovat jako tenkou kompozitní desku, u které jsou uvažovány následující předpoklady [10]:

- každá lamina je uvažována ortotropní a kvazihomogenní
- tloušťka laminy je ve srovnání s šířkou a délkou velmi malá  $\rightarrow$  uvažujeme rovinný stav napjatosti
- spoj mezi laminami je nekonečně tenký
- posuv bodů je ve všech směrech malý
- přetvoření v normálovém směru  $\varepsilon_z$  zanedbáme
- uvažujeme platnost Hookova zákona
- uvažujeme Kirchhoffova - Loveovu desku (průřez desky zůstává kolmý na střední rovinu)



Obrázek 5.2: Definice konstant pro laminátovou desku

Na obrázku 5.2 je zobrazen nezdeformovaný a zdeformovaný stav tenké kompozitní desky, zobrazený v rovině  $\widehat{xz}$ . Bod  $B$  vykoná vlivem deformace posuvy  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  ve směru osy  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Pro posuv bodu  $C$  platí

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z\psi_x = u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v &= v_0 - z\psi_y = v_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w &= w_0 \quad (\text{zanedbáme deformace po tloušťce}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Derivací posuvů (5.13) získáme poměrné deformace  $\varepsilon_x$  ve směru osy  $x$ ,  $\varepsilon_y$  ve směru osy  $y$  a zkos  $\varepsilon_{xy}$  v rovině  $\widehat{xy}$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.14)$$

Rovnice (5.14) lze přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\mathbf{k}, \quad (5.15)$$

kde  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  je vektor deformace střední plochy a  $\mathbf{k}$  je vektor křivosti tenké desky.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Vektor napětí v libovolné  $i$ -té vrstvě desky lze vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{Q}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (5.17)$$

kde  $\mathbf{Q}_i$  je matice mimoosové tuhosti pro  $i$ -tou vrstvu. Pro rovinný stav napjatosti lze vztah (5.17) napsat po složkách ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix}_i + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}_i. \quad (5.18)$$

Při odvozování závislosti mezi zatížením laminátu a jeho deformací je vhodné pracovat s ekvivalentním systémem sil a momentů [10]. Pro výslednice sil a momentů působících na příčný průřez  $i$ -té vrstvy o tloušťce  $h_i - h_{i-1}$  (obrázek 5.3) platí

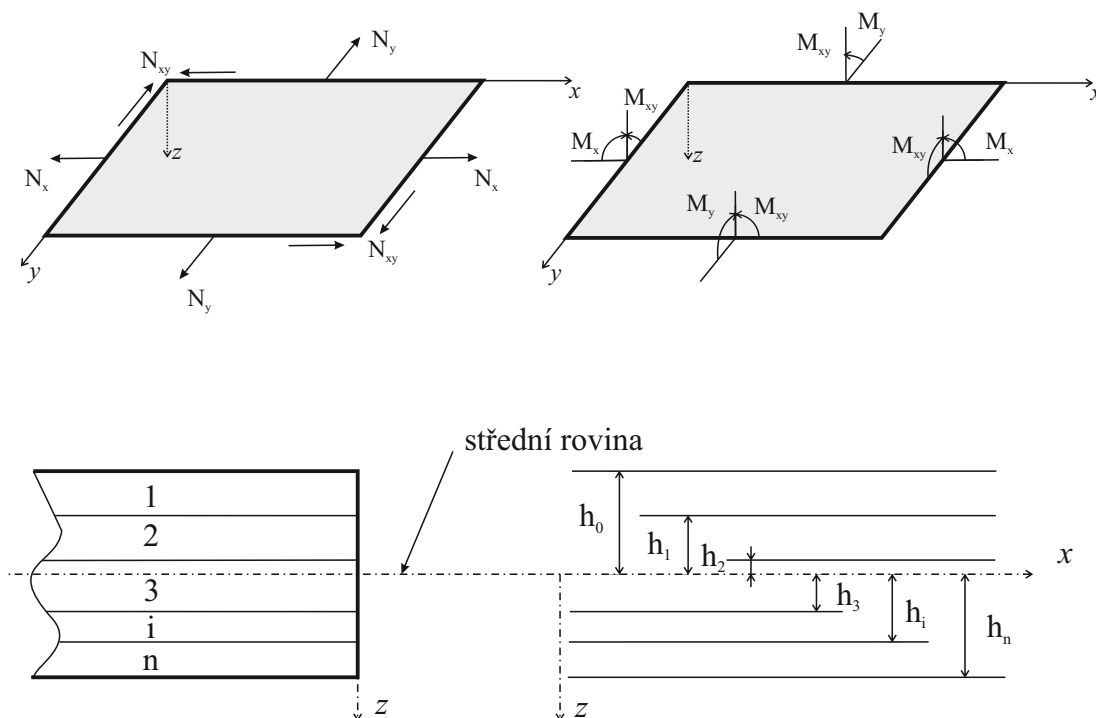
$$N_x = \int_{h_i}^{h_{i-1}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{h_i}^{h_{i-1}} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{h_i}^{h_{i-1}} \sigma_{xy} dz, \quad (5.19)$$

$$M_x = \int_{h_i}^{h_{i-1}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{h_i}^{h_{i-1}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{h_i}^{h_{i-1}} \sigma_{xy} z dz. \quad (5.20)$$

Ze vztahů (5.19) a (5.20) vyplývá, že výslednice sil  $N_x$ ,  $N_y$  a  $N_{xy}$  mají rozměr  $[\text{Nm}^{-1}]$  a výslednice momentů  $M_x$ ,  $M_y$  a  $M_{xy}$  mají rozměr  $[\text{N}]$ . Výslednice jsou tedy vztaženy na jednotku délky. Napětí po tloušťce laminátu se mění nespojitě. Z tohoto důvodu je nutno pro výsledné síly a momenty působící v průřezu laminátu psát

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz, \quad (5.21)$$

kde  $n$  je počet vrstev laminátu [10].



Obrázek 5.3: Zatížení elementu desky

K sestavení konstitutivního vztahu pro laminát skládající se z  $n$  vrstev dosadíme do rovnice (5.21) vztahy (5.16) a (5.18). Dostáváme

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}_i z \right\} dz, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix}_i z + \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}_i z^2 \right\} dz.$$

Matice mimoosové tuhosti  $\mathbf{Q}_i$  je pro každou vrstvu  $i$  konstantní. Roznásobením integrálů s prvky matice  $\mathbf{Q}_i$  a úpravou dostáváme

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

kde

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \sum_{i=1}^n [Q_{kl}]_i (h_i - h_{i-1}), \\ B_{kl} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [Q_{kl}]_i (h_i^2 - h_{i-1}^2), \\ D_{kl} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [Q_{kl}]_i (h_i^3 - h_{i-1}^3), \quad \text{kde } k, l = 1, 2, 6. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Rovnici (5.23) lze zapsat v maticovém do tvaru

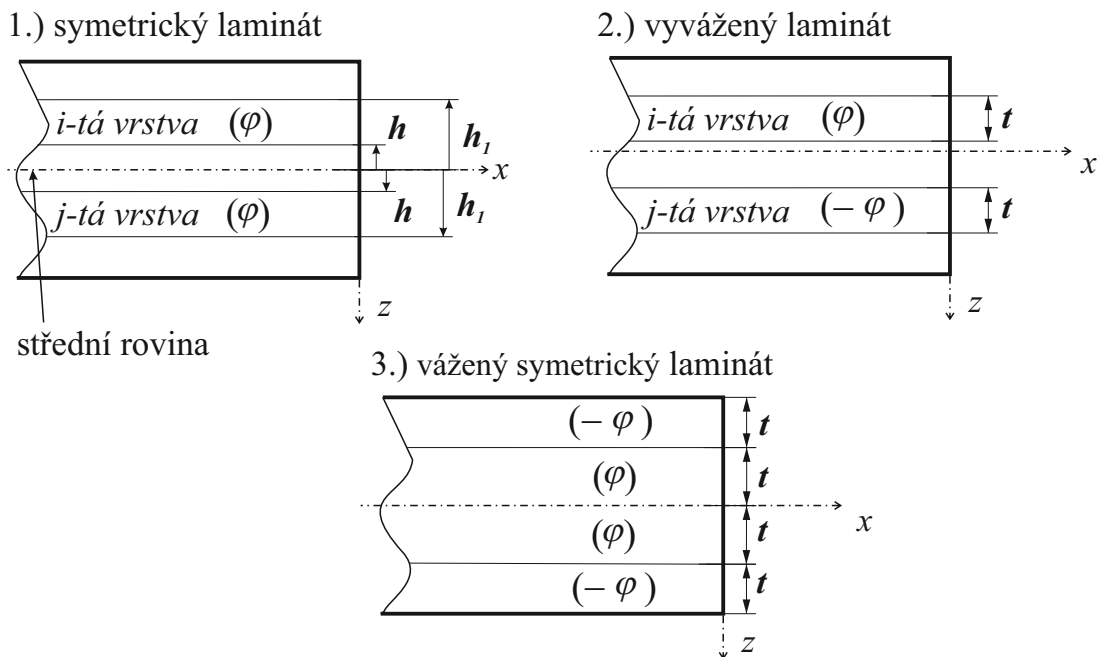
$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice tahové tuhosti,  $\mathbf{B}$  je matice vazební tuhosti a  $\mathbf{D}$  je matice ohybové tuhosti. Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{D}$  mají všechny prvky nenulové, tzn. existuje vazba mezi normálovými silami  $N_x, N_y$  a smykovou deformací střední plochy  $\gamma_{xy}^0$ . Také existuje vazba mezi momenty  $M_x, M_y$  a zkroucením  $k_{xy}$  [10].

Výhodou laminátů je skutečnost, že lze jejich mechanické vlastnosti modifikovat skládáním jejich vrstev (lamin). Vhodnou skladbou lamin lze například odstranit vazbu mezi tahem a ohybem a tahem a krutem, tzn. že matice vazbové tuhosti  $\mathbf{B}$  je rovna nule. Toho docílíme tím, že každému příspěvku od laminy nad střední vrstvou, odpovídá příspěvek od laminy stejných vlastností a ve stejné vzdálenosti pod střední rovinou. Takový laminát označujeme jako *symetrický*.

Chceme-li odstranit vazbu mezi normálovými silami  $N_x, N_y$  a smykovou deformací  $\gamma_{xy}^0$ , je nutno vynulovat prvky  $A_{16}, A_{26}, A_{61}$  a  $A_{62}$ . Toho lze dosáhnout tak, že každé  $k$ -té vrstvě orientované pod úhlem  $\varphi$ , odpovídá  $m$ -tá vrstva stejné tloušťky s opačnou orientací  $-\varphi$ . Jejich vzájemná poloha není podstatná. Takové lamináty označujeme jako *vyvážené* lamináty. Vlastnosti lze obecně kombinovat a vytvořit například vyvážený symetrický laminát (viz obrázek 5.4) [10].

Vztahy uvedené v této podkapitole dále využijeme k určení efektivních modulů pružnosti v tahu a smyku  $E_x, E_y$  a  $G_{xy}$ , které lze využít při stanovení kritických hodnot parametru  $G^c$  v kapitole 4.



Obrázek 5.4: Skladba laminátů charakterizovaná úhly  $\varphi$

### 5.1.6 Odvození efektivních konstant pružnosti $E_x$ , $E_y$ a $G_{xy}$

Pro odvození efektivních konstant pružnosti vyjdeme z klasické laminátové teorie, která byla uvedena v předešlé podkapitole. Tzn. platí vztahy (5.23) a (5.24). Efektivní moduly pružnosti, určující tuhosti vzorku ve směru daných os, vyjádříme v kartézském souřadnicovém systému os  $\mathbf{O}(x, y, z)$ . Pro případ standardizovaných testů (viz kapitola 4) platí, že osa  $x$  je orientována v podélném směru vzorku, osa  $y$  ve směru jeho šířky a osa  $z$  jeho tloušťky. Z důvodu jednoduchosti provedeme odvození pro *symetrický* laminát s  $n$  vrstvami, jehož konstitutivní vztah je dán ve tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Levá strana rovnice je dána rovnicí (5.21) [10].

#### $E_x$ - efektivní modul pružnosti v tahu ve směru osy $x$

Chceme-li určit efektivní modul pružnosti v tahu ve směru osy  $x$   $E_x$ , uvažujeme v matematickém modelu (5.26) pouze normálové zatížení ve směru osy  $x$  výslednicí sil  $N_x$ . Rovnice přejde do tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Vztah (5.27) lze přepsat na soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\varepsilon_{xy}^0, \\ 0 &= A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + A_{26}\varepsilon_{xy}^0, \\ 0 &= A_{16}\varepsilon_x^0 + A_{26}\varepsilon_y^0 + A_{66}\varepsilon_{xy}^0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Přetvoření laminátové desky je dáno tenzorem deformace ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\mathbf{k}. \quad (5.29)$$

Z (5.27) plyne, že křivosti laminátové desky zatížené výslednicí sil  $N_x$  jsou nulové. Pro tenzor deformace ve vektorovém tvaru  $\boldsymbol{\varepsilon}$  platí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Z Hookova zákona plyne (uvažujeme lineární elastické těleso)

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x^0. \quad (5.31)$$

Dosadíme-li z (5.21) za  $\sigma_x$  a upravíme, dostáváme rovnici pro efektivní modul pružnosti  $E_x$  ve tvaru

$$E_x = \frac{N_x}{\sum_{i=1}^n (h_i - h_{i-1}) \varepsilon_x^0}, \quad (5.32)$$

kde  $h_i - h_{i-1}$  je tloušťka  $i$ -té vrstvy symetrické laminátové desky. Vyřešením soustavy algebraických rovnic (5.28) získáme

$$\frac{N_x}{\varepsilon_x^0} = \frac{A_{11}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 - A_{66}A_{12}^2}{A_{66}A_{22} - A_{26}^2}. \quad (5.33)$$

Po dosazení dostáváme rovnici pro výpočet efektivního modulu pružnosti v tahu  $E_x$  pro symetrickou laminátovou desku ve tvaru

$$E_x = \frac{N_x}{\sum_{i=1}^n (h_i - h_{i-1}) \varepsilon_x^0} = \frac{A_{11}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 - A_{66}A_{12}^2}{\sum_{i=1}^n (h_i - h_{i-1}) (A_{66}A_{22} - A_{26}^2)}, \quad (5.34)$$

kde  $A_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2, 6$ , jsou prvky matice tahové tuhosti  $\mathbf{A}$ , pro které platí

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^n [Q_{kl}]_i (h_i - h_{i-1}). \quad (5.35)$$

### $E_y$ - efektivní modul pružnosti v tahu ve směru osy $y$

Efektivní modul pružnosti v tahu ve směru osy  $y$   $E_y$  lze určit zcela analogicky s předchozím případem. Uvažujeme symetrickou tenkostěnnou laminátovou desku zatíženou pouze výslednicí sil  $N_y$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

Přepíšeme-li vztah (5.36) do soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\varepsilon_{xy}^0, \\ N_y &= A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + A_{26}\varepsilon_{xy}^0, \\ 0 &= A_{16}\varepsilon_x^0 + A_{26}\varepsilon_y^0 + A_{66}\varepsilon_{xy}^0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

a využijeme-li Hookova zákona, tak po úpravě dostáváme vztah pro výpočet efektivního modulu pružnosti v tahu ve směru osy  $y$  pro symetrickou tenkostěnnou laminátovou desku ve tvaru

$$E_y = \frac{N_y}{\sum_{i=1}^n (h_i - h_{i-1})\varepsilon_y^0} = \frac{A_{11}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 - A_{66}A_{12}^2}{\sum_{i=1}^n (h_i - h_{i-1})(A_{11}A_{66} - A_{16}^2)}. \quad (5.38)$$

### $G_{xy}$ - efektivní modul pružnosti ve smyku v rovině $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}$

Efektivní modul pružnosti ve smyku  $G_{xy}$  odvodíme také zcela analogicky s předchozími případy. Uvažujeme pouze výslednici sil  $N_{xy}$ . Dostáváme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\varepsilon_{xy}^0 \\ 0 &= A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + A_{26}\varepsilon_{xy}^0 \\ N_{xy} &= A_{16}\varepsilon_x^0 + A_{26}\varepsilon_y^0 + A_{66}\varepsilon_{xy}^0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Z Hookova zákona pro lineární elastické těleso plyne

$$\sigma_{xy} = G_{xy}\varepsilon_{xy}^0. \quad (5.40)$$

Po úpravě a dosazení dostáváme rovnici pro výpočet efektivního modulu  $G_{xy}$  pro symetrickou tenkostěnnou laminátovou desku ve tvaru

$$G_{xy} = \frac{N_{xy}}{\sum_{i=1}^n (h_i - h_{i-1})\varepsilon_{xy}^0} = \frac{A_{11}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 - A_{66}A_{12}^2}{\sum_{i=1}^n (h_i - h_{i-1})(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}. \quad (5.41)$$

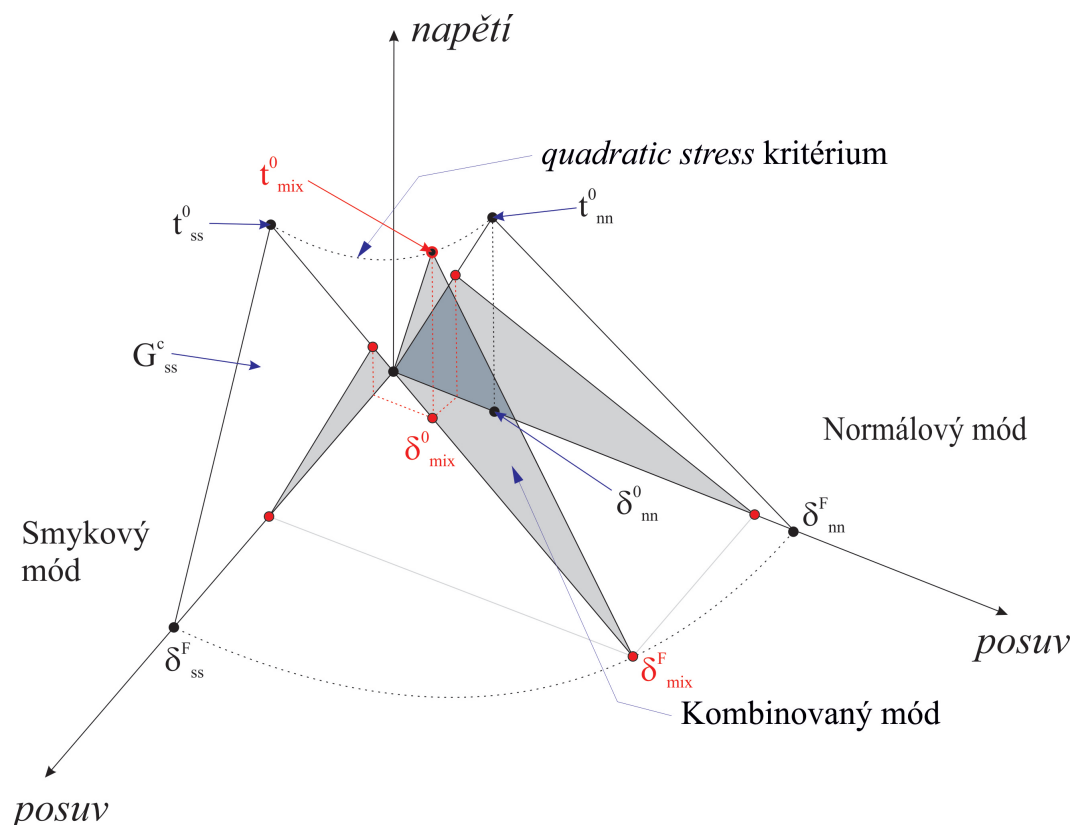
### Závěr

Z rovnice (5.34) vyplývá, že efektivní modul pružnosti v tahu  $E_x$  je závislý na všech prvcích matice tahové tuhosti  $\mathbf{A}$ , případně matice materiálových konstant  $\mathbf{C}$  (viz rovnice (5.24) a (5.11)). Obdobná skutečnost platí i pro parametry  $E_y$  a  $G_{xy}$ . Chceme-li například ovlivnit parametr  $E_x$  změnou skladby laminátu, dojde k současnému ovlivnění parametrů  $E_y$  a  $G_{xy}$ .



## 5.2 Materiálový model kohezivního rozhraní

Model kohezivního rozhraní (spoje) je v předkládané práci tvořen kohezivním kontaktem. Ten je v každém uzlu rozhraní určen bilineárními vztahy mezi napětím a posuvem (*traction-seperation*) zobrazeným na obrázku 5.5.

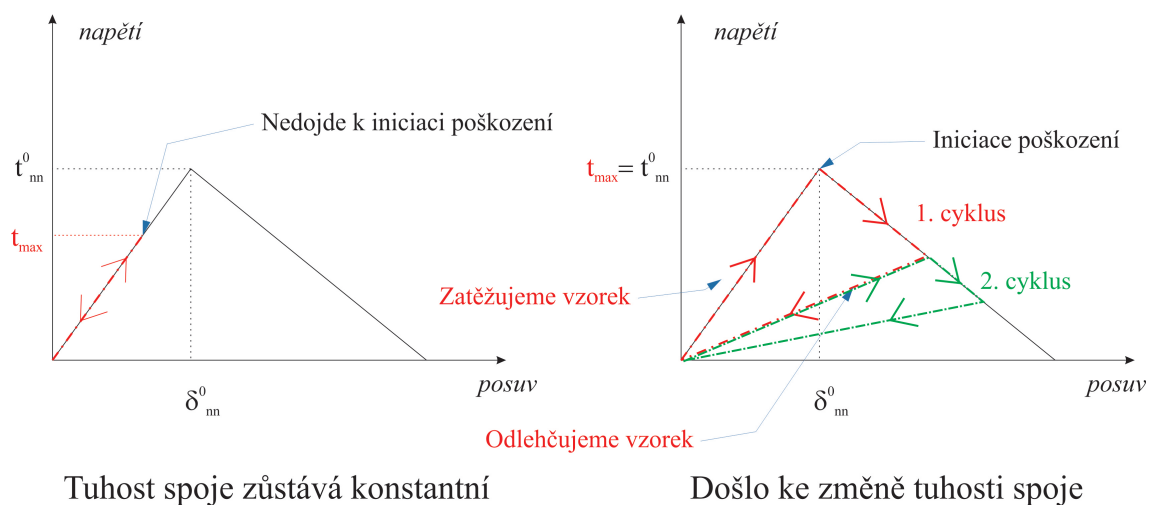


Obrázek 5.5: Definice obecného namáhání módem I a II dle bilineárních vztahů

Napětí, kdy dojde k iniciaci poškození rozhraní (na obrázku 5.5 hodnoty  $t_{nn}^0$ ,  $t_{ss}^0$ ,  $t_{mix}^0$ ), je dáno *quadratic stress* kritériem [1]

$$\left(\frac{t_{nn}}{t_{nn}^0}\right)^2 + \left(\frac{t_{ss}}{t_{ss}^0}\right)^2 + \left(\frac{t_{tt}}{t_{tt}^0}\right)^2 = 1, \quad (5.42)$$

kde  $t_{nn}$ ,  $t_{ss}$ ,  $t_{tt}$  jsou hodnoty aktuálního napětí ve vzorku pro normálový ( $nn$ ) a smykové směry ( $ss$ ,  $tt$ ). Po splnění toho kritéria se změní tuhost spoje, ale plastické deformace jsou stále nulové, neboť je tento model pouze elastickým materiálovým modelem s poškozením. Schématické znázornění toho jevu je pro snadnější nahlédnutí uvedeno na obrázku 5.6.



Obrázek 5.6: Schématické znázornění změny tuhosti spoje pro I. mód namáhání

Kritická hodnota posuvu  $\delta^c$ , při které dojde k porušení spoje, je dána rozšířeným pevnostním kritériem *power law* (2.8) ve tvaru

$$\left(\frac{G_{nn}}{G_{nn}^c}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{ss}}{G_{ss}^c}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{tt}}{G_{tt}^c}\right)^\alpha = 1. \quad (5.43)$$

Plocha pod křivkami na obrázku 5.5 pro normálový, smykový a kombinovaný mód namáhání vyjadřuje parametr  $G^c$ . Platí-li rovnost (5.43), dojde k porušení spoje v daném uzlu [1].

### 5.3 Rozdíl mezi směry I, II, III a směry $nn$ , $ss$ , $tt$

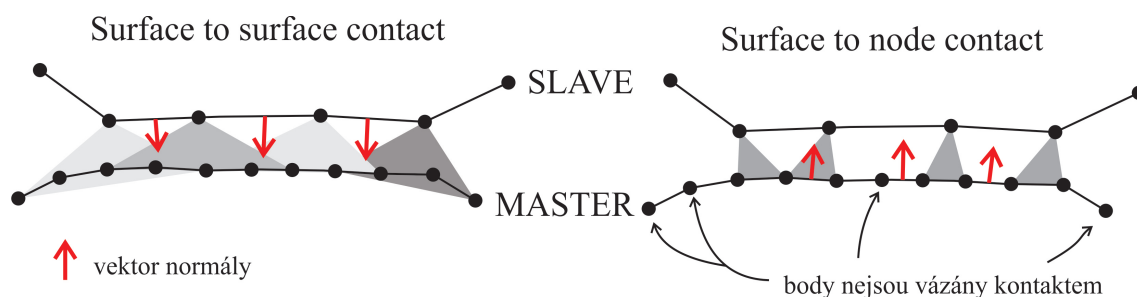
Standardizované testy jsou definovány pro módy zatížení I, II a III, popřípadě kombinované módy zatížení I/II (viz kapitola 4). Stejným systémem jsou také definována i pevnostní kritéria pro parametry  $G_I$ ,  $G_{II}$  a  $G_{III}$  (viz kapitola 2.3.1 a 2.3.2). Model kohezivního rozhraní je implementován do výpočtového softwaru Abaqus 6.14 v kartézském systému os  $\mathbf{O}(nn, ss, tt)$ , kde osa  $nn$  označuje normálový směr rozhraní. Osy  $ss$  i  $tt$  leží v rovině rozhraní. Osa  $ss$  je kolmá na  $nn$  i  $tt$ . Systém parametrů s označením I, II, III obecně nemusí být totožně orientovaný se systémem  $\mathbf{O}(nn, ss, tt)$  [1].

Uvedme příklad: Mód I je definován pro zatížení působící kolmo na rovinu trhliny (rozhraní) i čelo trhliny. Mód II označuje situaci, ke je zatížení rovnoběžné s rovinou trhliny, které je zároveň kolmé na čelo trhliny (viz kapitola 2.1). To znamená, že pro přiřazení správné kombinace módů k obecnému namáhání rozhraní je nutno znát rovinu i čelo trhliny.

Tato skutečnost není problematická u standardizovaných testů, neboť například pro test DCB nebo ENF lze rovinu i čelo trhliny jednoznačně určit, protože s touto myšlenkou byly testy navrženy. To znamená, že můžeme přiřadit parametry následovně:  $G_I^{\text{DCB}} = G_{nn}$ ,  $G_{II}^{\text{ENF}} = G_{ss}$ .

Máme-li však obecnou úlohu s obecným zatížením, je určení čela trhliny problematické a již nelze tímto způsobem jednoduše přiřadit jednotlivé módy I, II a III, popřípadě jejich kombinaci k jednotlivým směrům systému os  $O(nn, ss, tt)$ . Z toho důvodu jsou často parametry pro mód II a III sloučeny do jediného, označeného například jako  $G_{SH}$ . Mód I je většinou určen geometrií spoje jednoznačně (například ve směru tečném k tloušťce spoje).

## 5.4 Volba kontaktního páru



Obrázek 5.7: Implementace kohezivního kontaktu

Kohezivní kontakt lze v softwaru Abaqus 6.14 nastavit dvojím způsobem jako *surface-to-surface* kontakt, nebo *surface-to-node* kontakt (viz obrázek 5.7).

U *surface-to-node* kontaktu jsou ke každému uzlu povrchové výpočetní sítě na ploše s označením *slave* přiřazeny maximálně dva uzly povrchové sítě ležící na ploše s označením *master*. Je-li velký nepoměr mezi počtem uzlů na jednotlivých plochách, nemusí být všechny uzly *master* plochy zahrnuty do kontaktu. Tyto uzly mohou volně pronikat do druhé plochy. Z tohoto důvodu je doporučeno volit plochu s hustější sítí jako *slave*. U toho způsobu implementace jsou veškeré charakteristické rozměry kontaktu vztaženy k *master* ploše. To znamená, že například tloušťka, nebo rozevření kontaktu je měřeno ve směru normál povrchu *master*.

U *surface-to-surface* kontaktu jsou k uzlům na ploše s označením *slave* přiřazeny oblasti vlivu na plochu *master* tak, že se navzájem překrývají. Tím je zajištěno zahrnutí celé plochy *master* do oblasti kontaktu. Rozevření i tloušťka kontaktu je měřena ve směru normál plochy s označením *slave*. Obecně platí, že vyhodnocení kontaktu *surface-to-node* je rychlejší. Tento kontakt je doporučen použít pouze tehdy, jsou-li předem jednoznačně známy kontaktní plochy a tyto plochy se během

výpočtu nezmění. Kontakt *surface-to-surface* se naopak doporučuje použít, nejsme-li schopni s jistotou určit, kde se budou plochy dotýkat a jak se budou vyvíjet během výpočtu [1].

## 5.5 Závěr

V této kapitole byly popsány materiálové modely potřebné k tvorbě konečno-prvkových modelů standardizovaných testů. Byl zde popsán materiálový model anizotropního, ortotropního a příčně izotropního materiálu. Dále byly odvozeny matice **Q**, **A**, **B** a **D**. Pro úplnost byly určeny efektivní moduly pružnosti  $E_x$ ,  $E_y$  a  $G_{xy}$  pro symetrickou tenkostěnnou laminátovou desku. Rovněž byla nastíněna problematika s přiřazováním materiálových parametrů mezi systémem módů I, II, III a systémem os  $nn$ ,  $ss$ ,  $tt$ . Nakonec byla ve zkratce zmíněna problematika implementace kontaktu do softwaru Abaqus 6.14. V další části práce je rozebrán vliv parametrů na testovacím modelu a na modelech standardizovaných testů, vytvořených v konečno-prvkovém softwaru Abaqus 6.14.

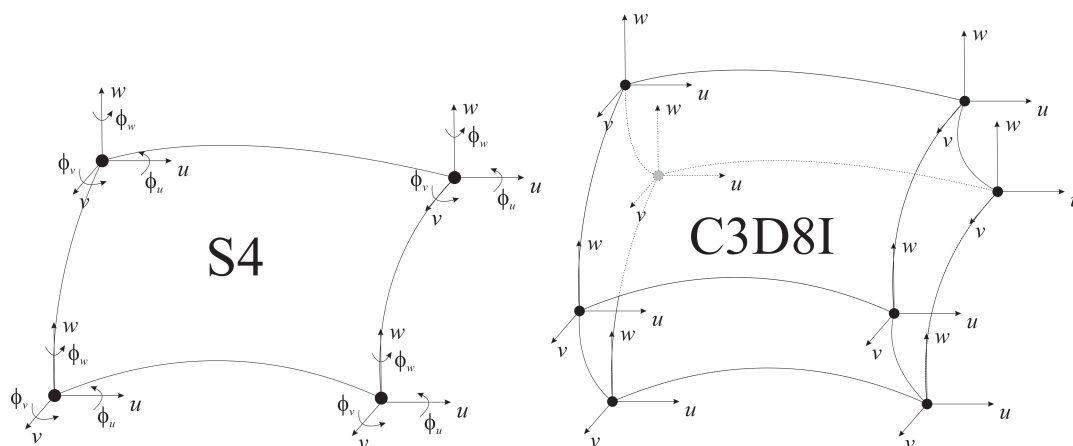
## 6 Testovací úloha a vliv jednotlivých parametrů

V rámci této diplomové práce byl použit komerční výpočtový software Abaqus 6.14 využívající metodu konečných prvků. Před řešením vlastní úlohy porušení rozhraní standardizovaných testů byly vyzkoušeny možnosti jeho použití pro tuto problematiku. To bylo provedeno pomocí elementárního modelu, na kterém byl otestován vliv vybraných materiálových parametrů kohezivního spoje. Elementární model byl vytvořen ze dvou prvků o rozměru  $1 \times 1 \times 1$  [m], jenž byly spojeny kohezivním kontaktem.

### 6.1 Popis elementárního modelu testovací úlohy

#### Model spojovaných členů

Pro modely spojovaných členů byly použity dva typy prvků: čtyřuzlový skořepinový prvek s označením  $S4$  a osmiuzlový brickový prvek označený jako  $C3D8I$ . Jedním z rozdílů mezi těmito prvky je počet stupňů volnosti pro uzlové body (viz obrázek 6.1). Každý uzel prvku  $S4$  má 6 stupňů volnosti: 3 posuvy ve směru tří os a 3 rotace kolem těchto os. Uzel prvku  $C3D8I$  má definované pouze posuvy ve směru tří os.  $I$  odkazuje na typ prvku označený jako *incompatible*. Tento typ prvku je doporučen pro úlohy, kde dochází k výraznému ohybu vzorku [1].



Obrázek 6.1: Definice skořepinových (*shell S4*) a brickových (*solid C3D8I*) prvků

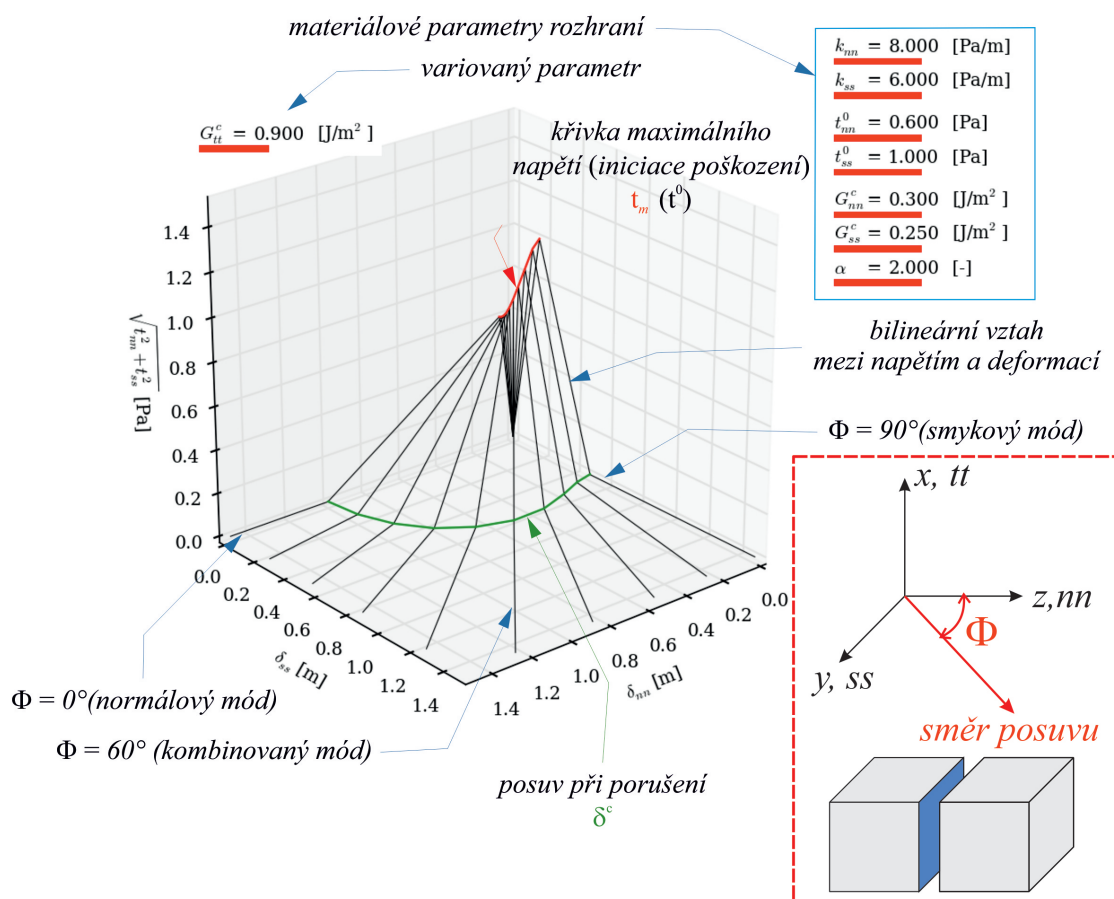
Pro model byl dále použit lineární izotropní elastický materiálový model definovaný dvěma materiálovými parametry:  $E$  a  $\nu$ . V elastickém materiálovém modelu nedochází k disipaci energie vlivem plastických deformací, tzn. veškeré deformace jsou vratné. Vztah mezi napětím a deformací je dán Hookovo zákonem.

#### Model kohezivního rozhraní

Pro kohezivní rozhraní byl použit materiálový model uvedený v kapitole 5.2.

## 6.2 Vliv parametrů na testovací úloze mezi směry $nn$ a $ss$

### 6.2.1 Interpretace grafu



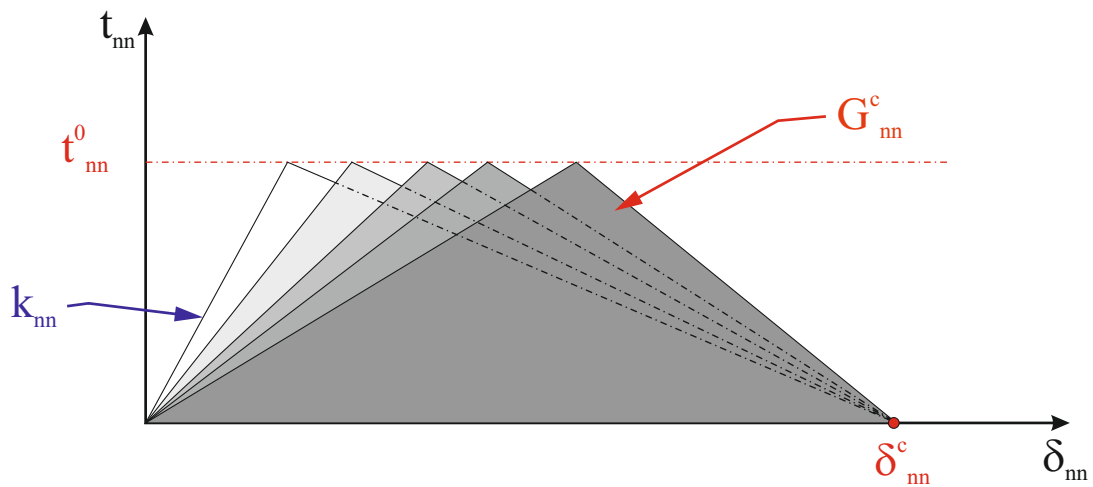
Obrázek 6.2: Vysvětlení grafu pro elementární model

Vliv vybraného parametru je zobrazen ve třírozměrném grafu, kde na horizontálních osách je vyneseno posuv  $\delta_{nn}$  ve směru osy  $nn$  a posuv  $\delta_{ss}$  ve směru osy  $ss$ . Na vertikální ose je vynesena euklidovská norma napětí v uzlu rozhraní  $t = \sqrt{t_{nn}^2 + t_{ss}^2}$ . Bilineární křivky (vztah mezi napětím a posuvy) reprezentují reakci modelu na zatížení posuvem pod rozdílnými úhly. Křivka na pravé straně s označením  $0^\circ$  (normálový mód) odkazuje na zatížení posuvem pouze ve směru osy  $nn$ . Velikost posuvu v libovolném směru, který je dán úhlem  $\Phi = 0^\circ - 90^\circ$ , je stejná. Vzorek byl zatěžován pro každou variaci parametru desetkrát (při každé iteraci byl natočen o dalších  $10^\circ$ ). Červeně zvýrazněné hodnoty odpovídají napětí, které iniciuje

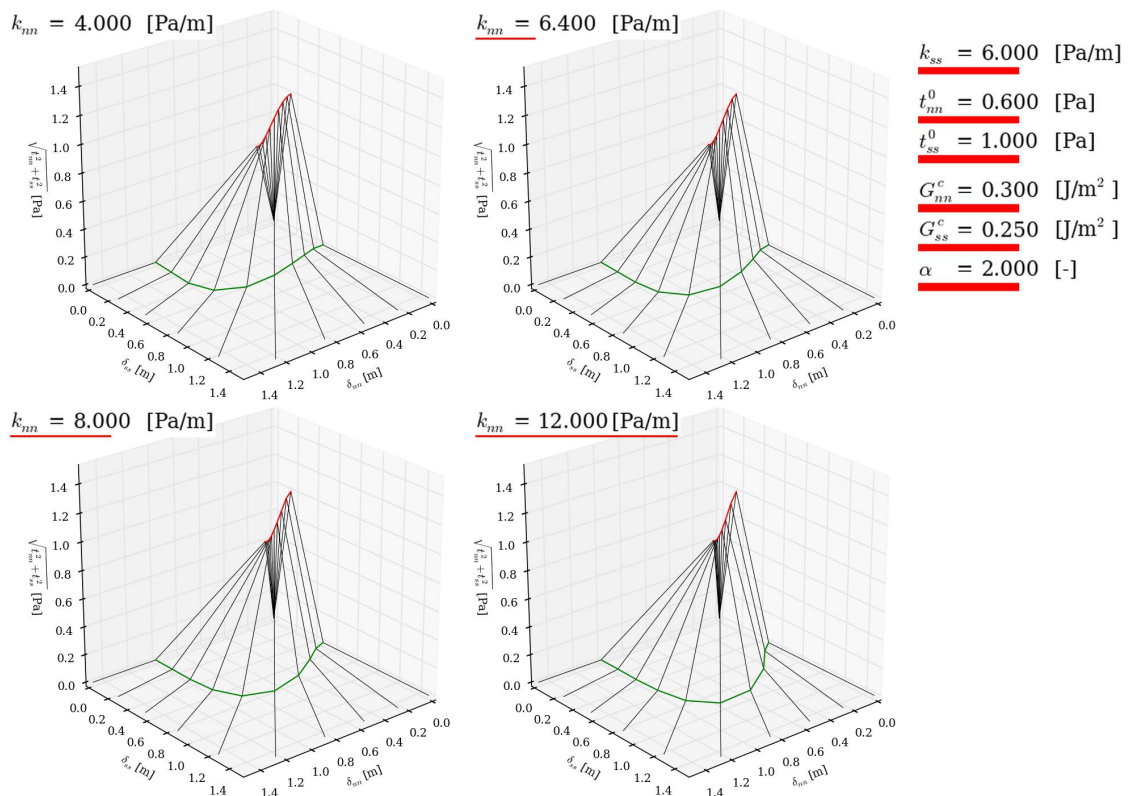
poškození spoje. Zeleně vyznačené hodnoty odpovídají maximálnímu posuvu při porušení. Rozhraní je definováno sedmi distinktivními materiálovými parametry:  $\alpha$ ,  $t_{ii}^0$ ,  $k_{ii}$  a  $G_{ii}^c$ , kde  $ii = nn, ss$ . V každé úloze je variován pouze jeden parametr (modře zvýrazněné v příloženém schématu) a zbylé zůstávají konstantní.

### 6.2.2 Vliv jednotlivých parametrů na testovací úlohu

Variace parametru  $k_{nn}$  výrazně ovlivňuje hodnoty kritického posuvu  $\delta^c$  a to zejména pro zatížení v rozmezí úhlu  $\Phi = 40 - 80^\circ$  (viz obrázek 6.3). Na obrázku 6.4 je znázorněn vliv iniciačního napětí pro poškození kohezivního kontaktu v normálovém směru  $t_{nn}^0$ . Je zřejmé, že vliv tohoto parametru pochopitelně převládá pro zatížení modelu v normálovém směru  $nn$  (křivka pro  $0^\circ$ ). S rostoucím úhlem od osy  $nn$  vliv parametru klesá a ve smykovém směru  $ss$  je jeho vliv ve všech případech nulový. Podobný jev lze pozorovat i pro další materiálové parametry, které jsou spojené pouze s jedním ze směrů  $nn$  nebo  $ss$ . Tento jev si lze ověřit na obrázku 6.5, kde je zobrazena změna odezvy modelu na variaci kritické hodnoty energie v normálovém směru  $G_{nn}^c$  (zbylé materiálové parametry jsou konstantní). Parametry  $t_{nn}^0$  i  $G_{nn}^c$  výrazně ovlivňují maximální hodnotu posuvu  $\delta^c$ , kdy dojde k porušení spoje (zeleně zvýrazněné body). Vliv na tento parametr opět klesá s rostoucím úhlem od normálové osy  $nn$ .

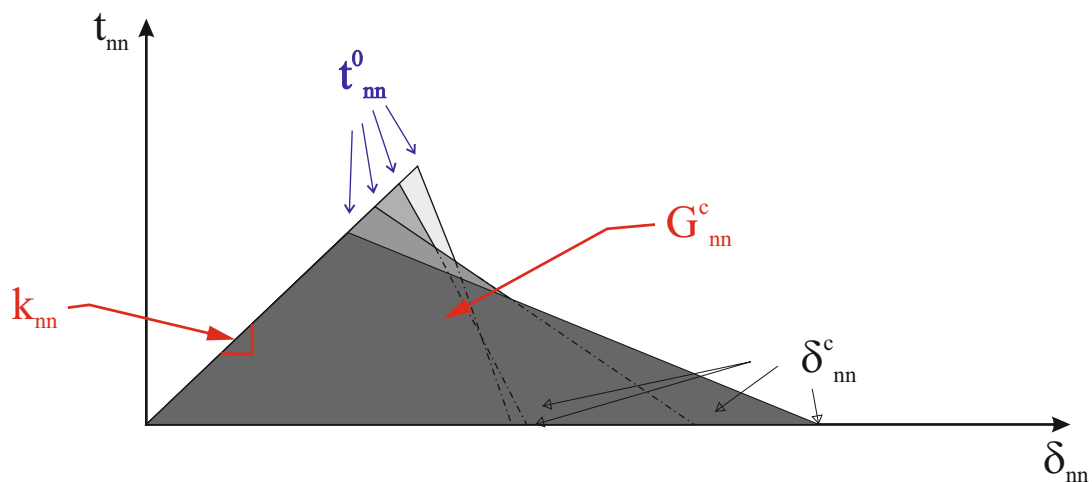


Konstantní parametry:  $t_{ss}^0$ ,  $t_{nn}^0$ ,  $G_{ss}^c$ ,  $G_{nn}^c$ ,  $\delta_{ss}^c$ ,  $\delta_{nn}^c$ ,  $\alpha$ ,  $k_{ss}$



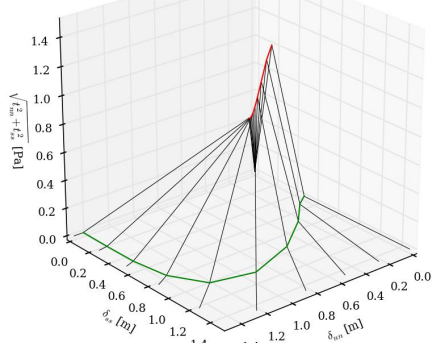
Obrázek 6.3: Variace parametru  $k_{nn}$



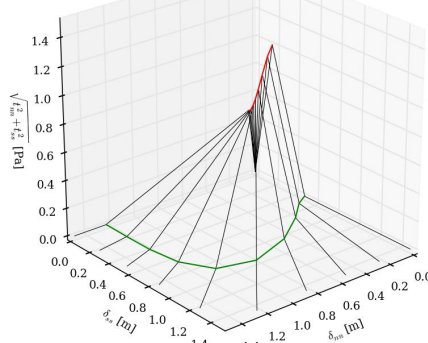


Konstantní parametry:  $t_{ss}^0$ ,  $G_{ss}^c$ ,  $G_{nn}^c$ ,  $\delta_{ss}^c$ ,  $\alpha$ ,  $k_{ss}$ ,  $k_{nn}$

$t_{nn}^0 = 0.420$  [Pa]



$t_{nn}^0 = 0.480$  [Pa]



$k_{nn} = 8.000$  [Pa/m]

$k_{ss} = 6.000$  [Pa/m]

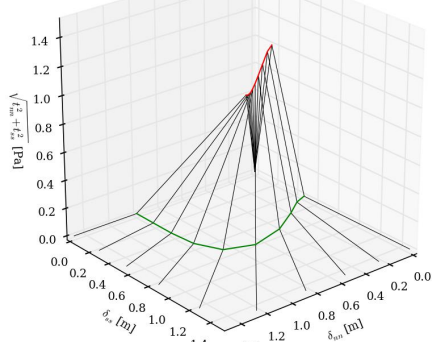
$t_{ss}^0 = 1.000$  [Pa]

$G_{nn}^c = 0.300$  [J/m<sup>2</sup>]

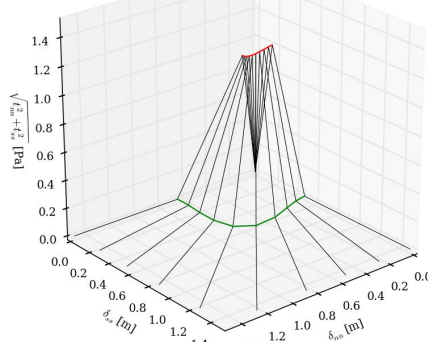
$G_{ss}^c = 0.250$  [J/m<sup>2</sup>]

$\alpha = 2.000$  [-]

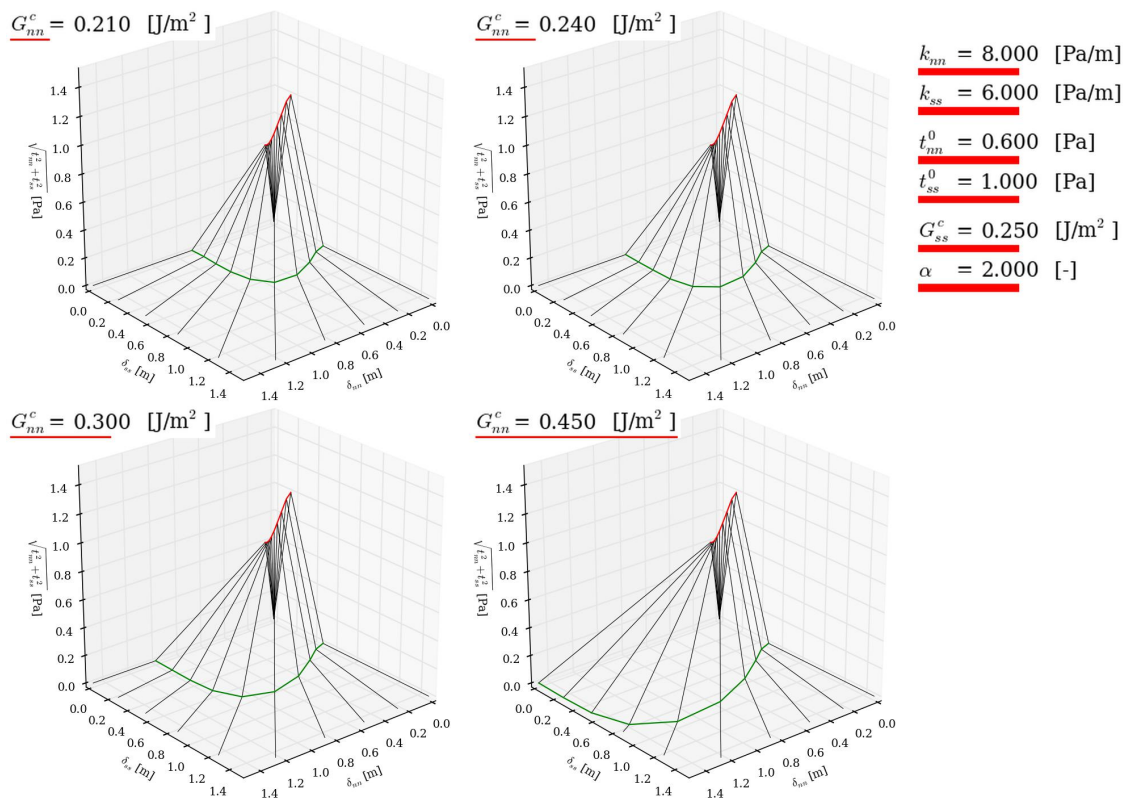
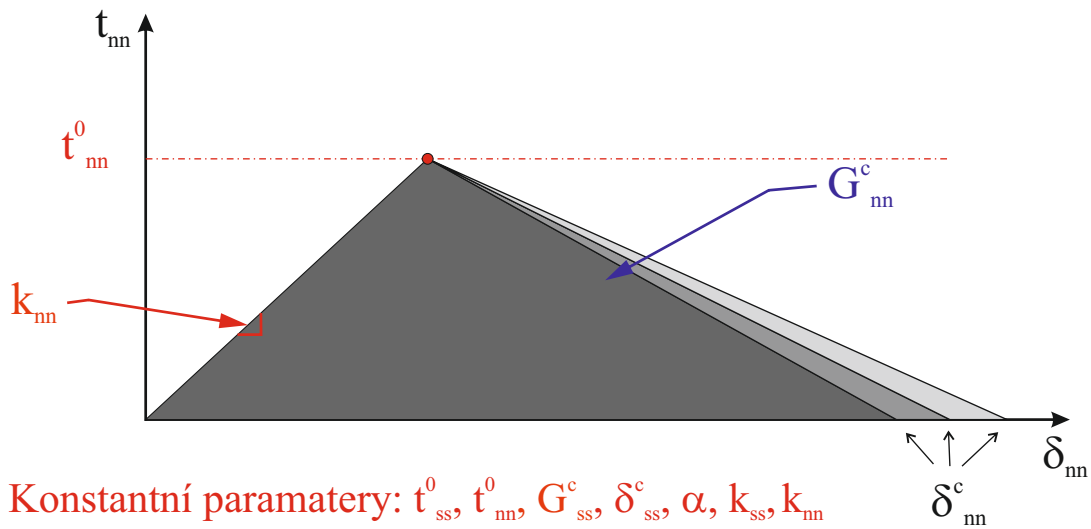
$t_{nn}^0 = 0.600$  [Pa]



$t_{nn}^0 = 0.900$  [Pa]



Obrázek 6.4: Variace parametru  $t_{nn}^0$



Obrázek 6.5: Variace parametru  $G_{nn}^c$

### 6.3 Závěr

V této kapitole byl ukázán vliv parametrů na elementární úloze. Ze získaných výsledků bylo usouzeno, že vybraný model je použitelný k analýze.

## 7 Provedené experimenty a analýza modelu

Cílem práce bylo vytvořit softwarový nástroj k určení materiálových parametrů kohezivního rozhraní pomocí standardizovaných testů. Identifikace parametrů probíhá na základě porovnání numerických a experimentálních výsledků ekvivalentních nosníků. Této práci předcházely experimenty, jenž byly provedeny v období mezi roky 2006 - 2012 na Katedře mechaniky Západočeské univerzity v Plzni. V následující kapitole budou představeny provedené experimenty.

### 7.1 Experimenty

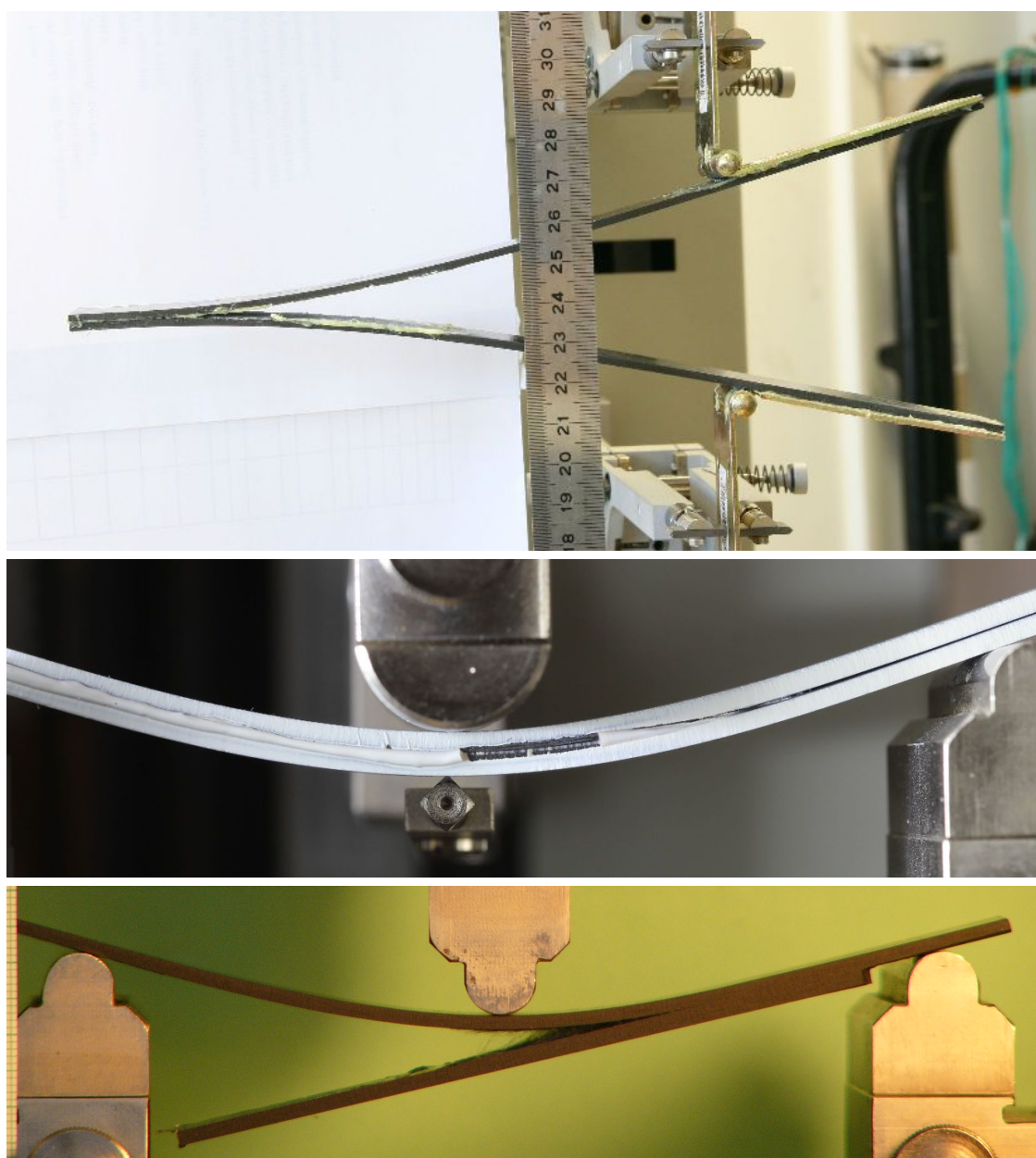
Byly provedeny tři typy standardizovaných testů dle norem uvedených v závorkách: DCB (ASTM D5528), ENF (ASTM D7905) a MMF (ASTM D6671), jejichž popis lze nalézt v kapitole 4. Cílem těchto testů bylo určení materiálových parametrů tří rozhraní: mezivrstvy v jednosměrovém uhlíkovém kompozitu a lepidel Gurit Spabond 345 a Hunstman Araldite 2021, kterými byly spojeny jednosměrové uhlíkové kompozitové nosníky.

### 7.2 Softwarový nástroj

Softwarový nástroj je naprogramován v jazyce Python. K vytvoření nástroje bylo nejprve nutno vytvořit databázi obsahující materiálová data vzorků a jejich rozměry. Záznam z trhacího stroje (závislost reakční síly v silové buňce na posuvu extenzometru) pro každý experiment se automaticky přidá do databáze a přiřadí k materiálovým datům. Data jsou následně zprůměrována do jednoho záznamu pro každý typ rozhraní.

Ke stavbě modelu je nadále nutno zadat základní materiálové parametry rozhraní, které budou později optimalizovány, a zvolit typ a velikost prvku, ze kterých bude sestaven model. Preprocessing (stavba modelu, definice úlohy...) i processing (numerické řešení úlohy) jsou realizovány v softwaru Abaqus 6.14. Tento software byl vybrán kvůli své rozšířenosti a široké použitelnosti. Postprocessing (sestrojení grafů a vyhodnocení křivek) je prováděn samotným softwarovým nástrojem. Stavba modelu, numerické řešení a vyhodnocení dat je automatické. Variaci materiálových parametrů je rovněž možné provést automaticky. Grafické výstupy jsou generovány souborem skriptů PloTRA, které jsou součástí nástroje. Schématické znázornění nástroje lze nalézt na obrázku 7.3.

Nespornou výhodou nástroje je časová úspora během identifikace materiálových parametrů rozhraní. Vytvořený nástroj po zadání geometrických a materiálových parametrů sestaví model a v řádu vteřin automaticky nastaví kohezivní kontakt. Provedení výpočtu a analýza výsledků nástrojem je hotova v řádu minut. Ve srovnání s automatickou analýzou je manuální identifikace materiálových parametrů časově náročná a může trvat několik dní.

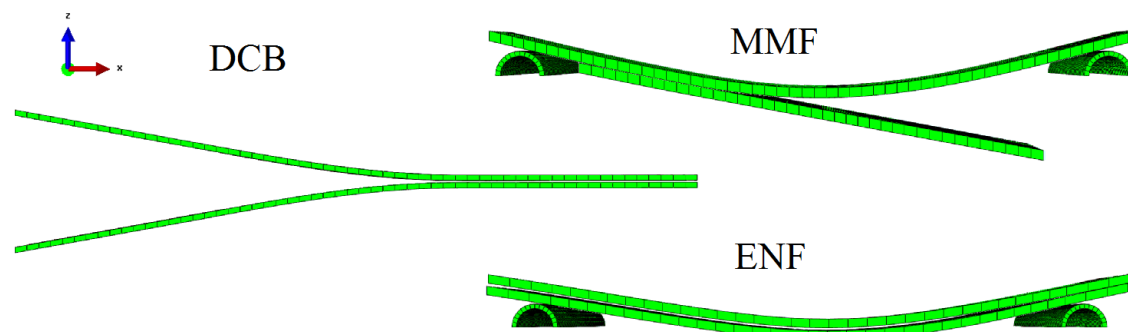


Obrázek 7.1: Realizace experimentů: DCB (nahore), ENF (uprostřed), MMF (dole)

### 7.3 Analyzované modely

Spojované členy jsou tvořeny lineárním elastickým ortotropním materiálovým modelem, jehož konstitutivní vztah je dán *zobecněným Hookovo zákonem* (5.6) a (5.7). Model kohezivního rozhraní je určen, jak bylo nadefinováno v kapitole 5.2, *bi-lineárními vztahy* mezi napětím a posuvem (obrázek 5.5), iniciačním *quadratic*

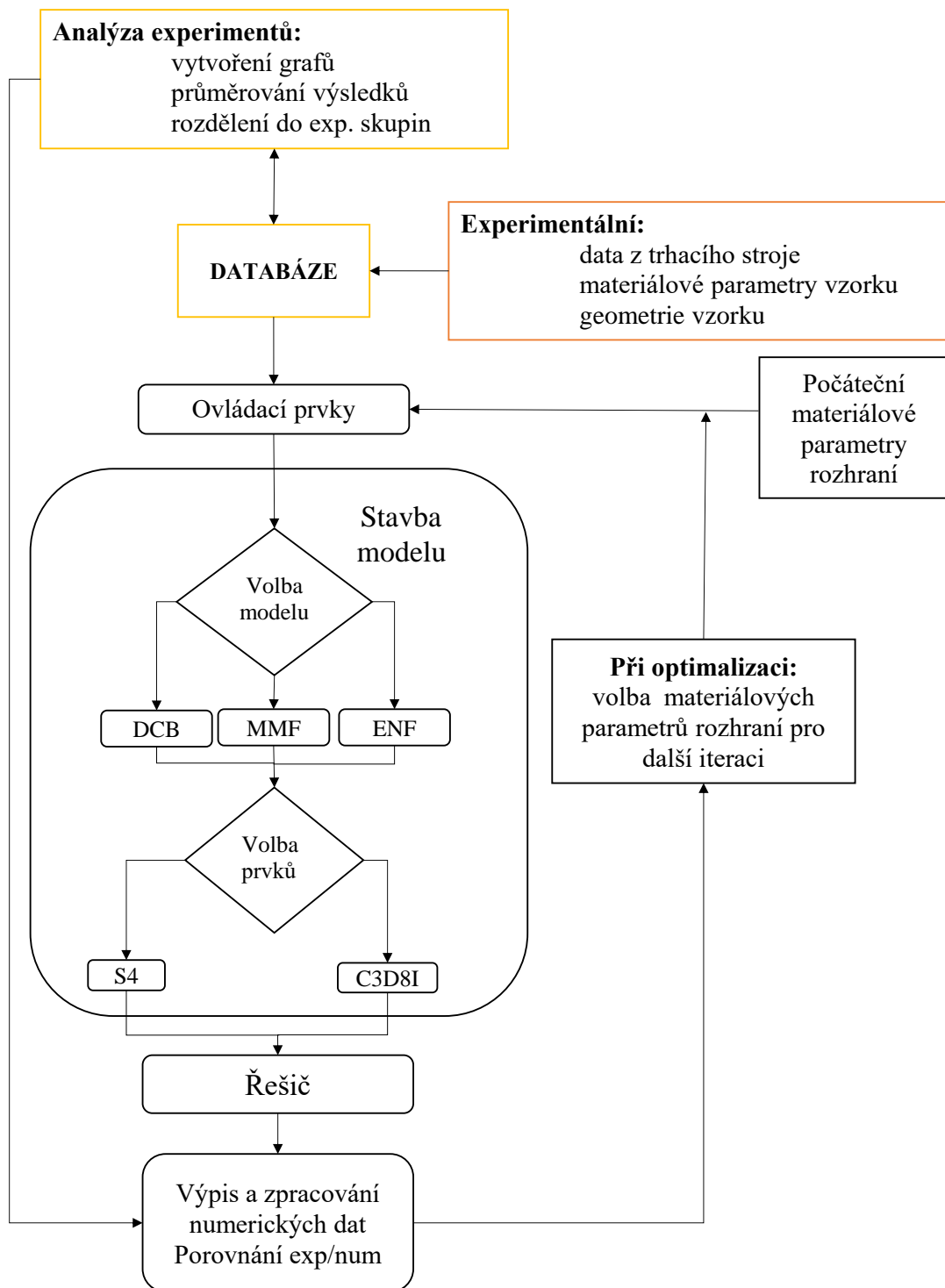
*stress* kritériem (5.42) a rozšířeným pevnostním kritériem *power law* (5.43). Náhled na analyzované konečno-prvkové modely lze nalézt na obrázku 7.2.



Obrázek 7.2: Typy konečno-prvkových modelů v perspektivním zobrazení s velikostí hrany prvku  $a_{\text{MKP}} \doteq 4$  [mm]

## 7.4 Závěr

V této kapitole je ve zkratce popsán vytvořený softwarový nástroj. Rovněž jsou zde zmíněny typy provedených experimentů, ke kterým byly vytvořeny ekvivalentní konečno-prvkové modely.



Obrázek 7.3: Schéma nástroje

## 8 Vliv parametrů a identifikace mat. parametrů

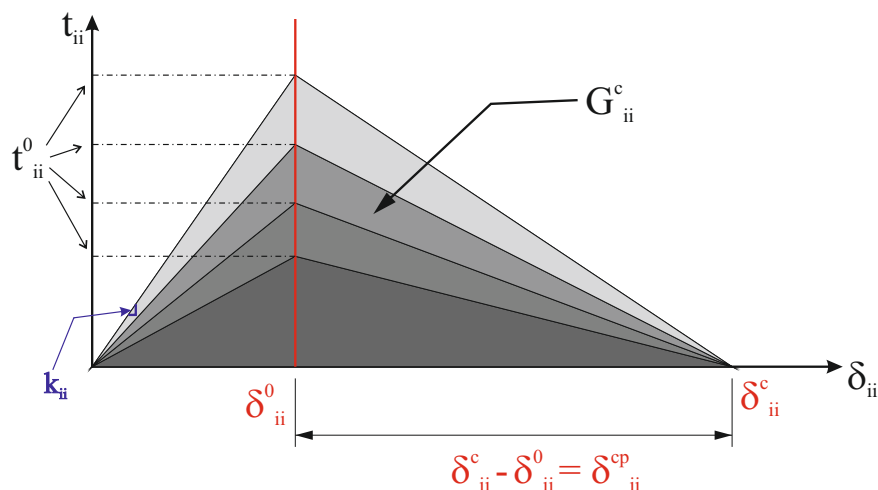
V této kapitole bude zhodnocen vliv materiálových parametrů rozhraní na výsledky konečno-prvkové analýzy testů DCB, ENF a MMF.

Model je sestaven tak, že identifikace materiálového parametru rozhraní  $G^c$ , je provedena pomocí identifikace dílčích materiálových parametrů:  $k_{ii}$  - tuhost rozhraní,  $\delta_{ii}^0$  - posuv iniciující poškození,  $\delta_{ii}^{cp}$  - posuv určující velikost posuvu, při kterém dojde k porušení rozhraní (rozpojení spoje). Je tedy vhodné posoudit vliv těchto parametrů před samotou identifikací materiálových parametrů rozhraní.

Nejprve je zhodnocen vliv variace parametrů tuhostí spoje  $k_{ii}$ . Následně je zhodnocen vliv parametrů  $\delta_{ii}^0$ , které určují posuv, při kterém dojde k iniciaci poškození rozhraní. Dále je zde analyzován vliv parametrů  $\delta_{ii}^{cp} = \delta_{ii}^c - \delta_{ii}^0$ , kde  $\delta_{ii}^c$  určuje hodnotu posuvu, při které dojde k porušení rozhraní a vliv parametru  $\alpha$  vystupujícího v pevnostním kritériu *power-law* (5.43). Nakonec je analyzován vliv velikosti a typu prvku modelu. Vybrané parametry jsou variovány v okolí experimentálních výsledků.

## 8.1 Vliv materiálových parametrů

### 8.1.1 Vliv parametrů $k_{nn}$ a $k_{ss}$

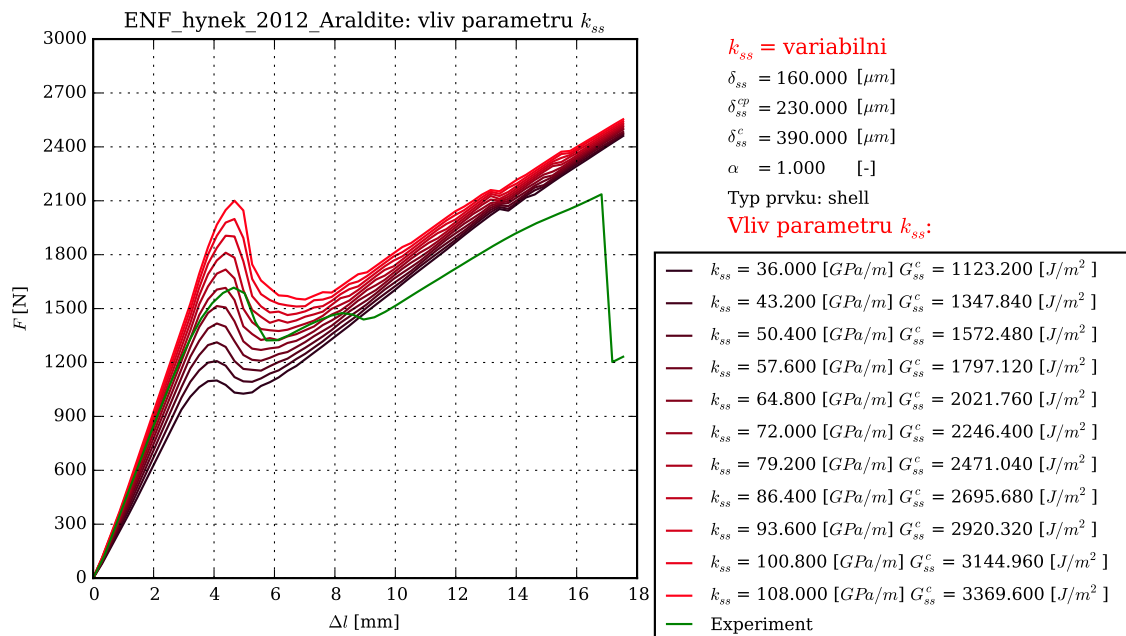
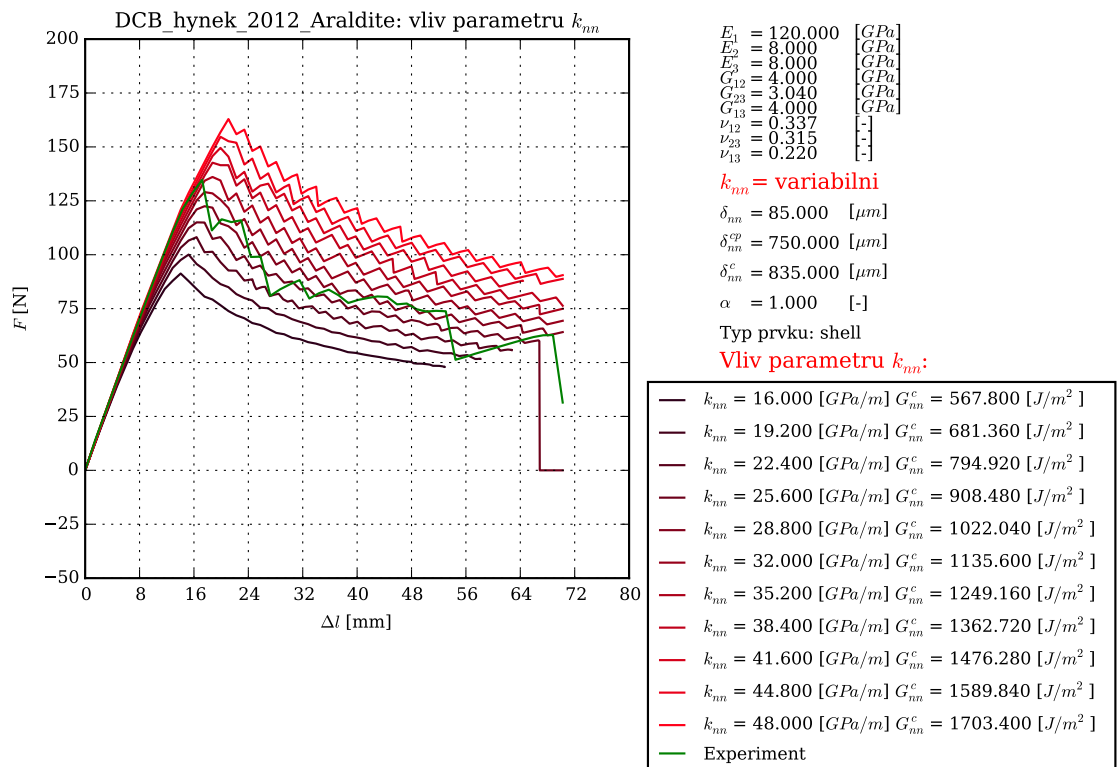


Obrázek 8.1: Vliv parametru  $k_{ii}$

Materiálový parametr  $k_{ii}$  určuje tuhost rozhraní před iniciací poškození v daném směru, to znamená, že ovlivňuje směrnici křivek  $t_{ii} - \delta_{ii}$  před dosažením iniciačního napětí  $t_{ii}^0$ . Parametry  $\delta_{ii}^0$  a  $\delta_{ii}^c$  zůstávají během variace parametru  $k_{ii}$  konstantní (viz obrázek 8.1). Během analýzy dochází k lineární změně iniciačního napětí  $t_{ii}^0$  a parametru  $G_{ii}^c$ , který určuje množství energie potřebné k vytvoření nové trhliny o ploše 1 m<sup>2</sup>. Se zvětšením tuhosti spoje  $k_{ii}$  rostou i výše uvedené parametry.

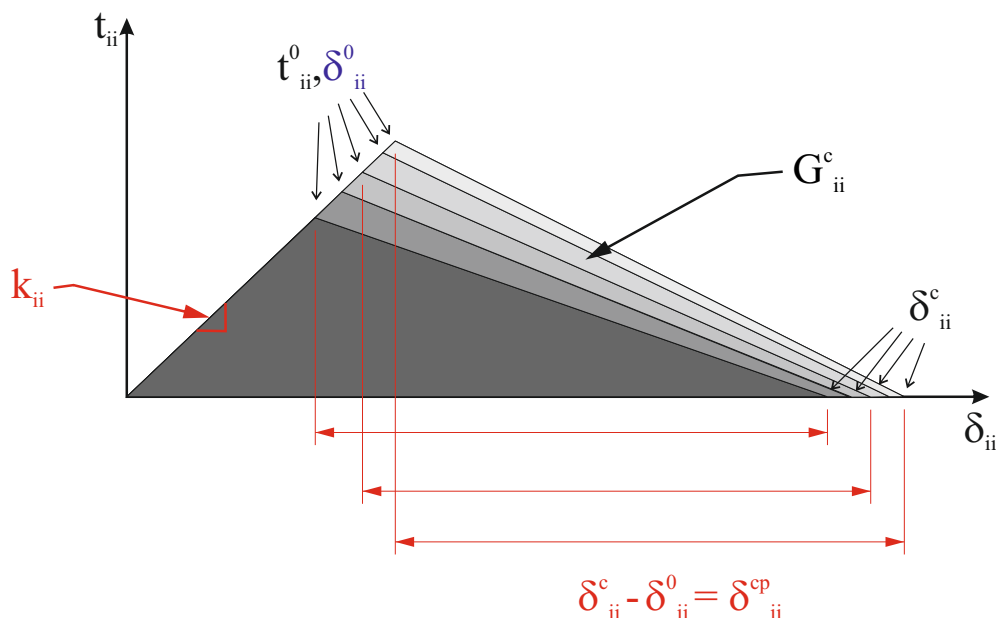
Variaci parametrů  $k_{ii}$  pro test DCB a ENF s rozhraním lepidla Hunstman Araldite 2021 lze nalézt v grafech na obrázku 8.2. Z grafů je patrné, že s rostoucím parametrem  $k_{ii}$ , roste i maximální zatížení, které je spoj schopen přenést. Lze rovněž konstatovat, že se s variací parametru  $k_{ii}$  velmi výrazně mění parametr  $G_{ii}^c$ . V grafech je také vidět změna tuhosti spoje (tento efekt je více znatelnější v testu ENF). Během změny parametru  $k_{ii}$  nedocházelo k problémům se stabilitou výpočtu (konvergenčí).





Obrázek 8.2: Vliv parametru  $k_{nn}$  a  $k_{ss}$  na rozhraní lepidla Hunstman Araldite 2021

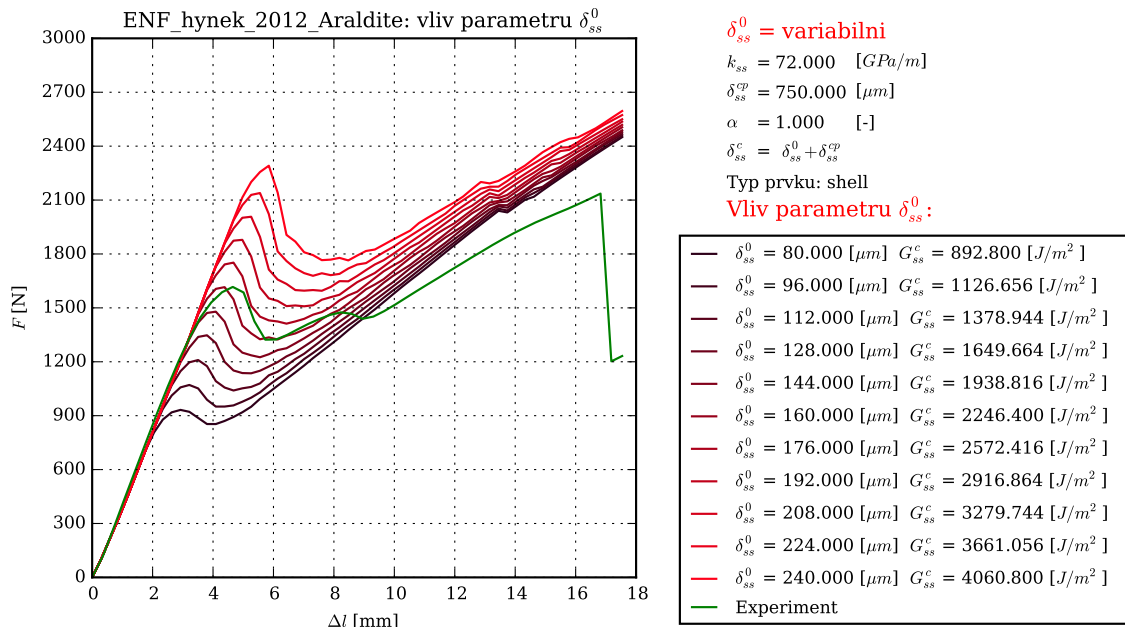
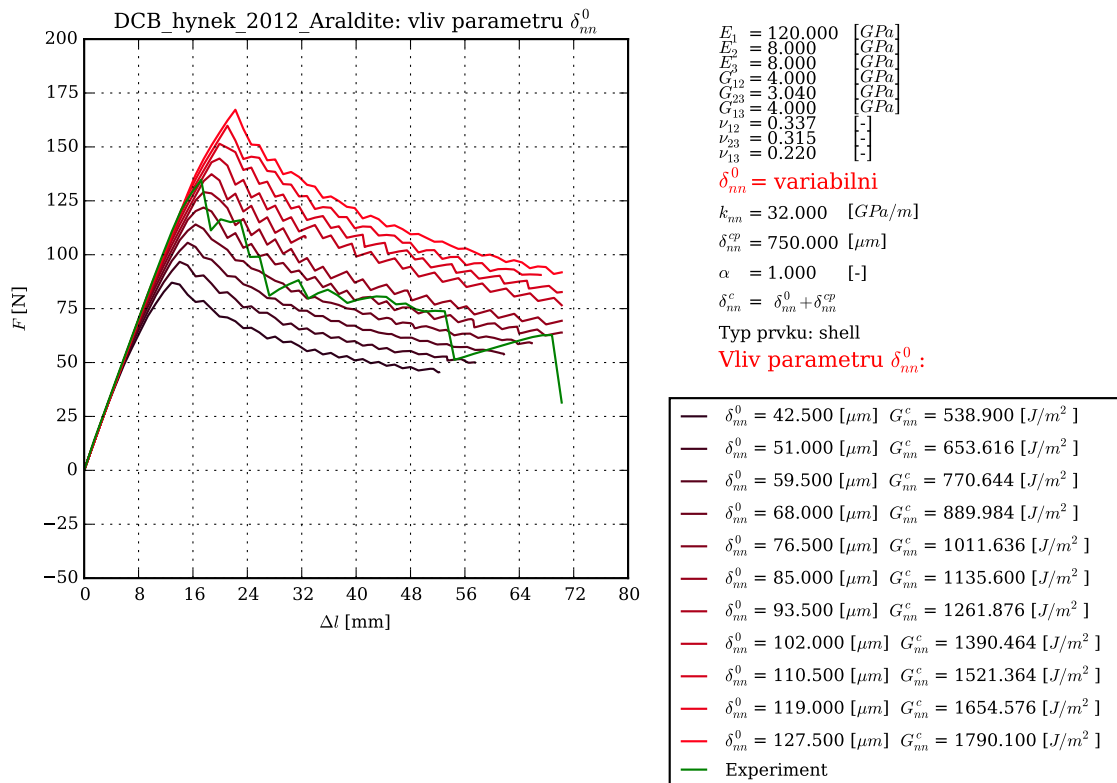
### 8.1.2 Vliv parametrů $\delta_{nn}^0$ a $\delta_{ss}^0$



Obrázek 8.3: Vliv parametru  $\delta_{ii}^0$

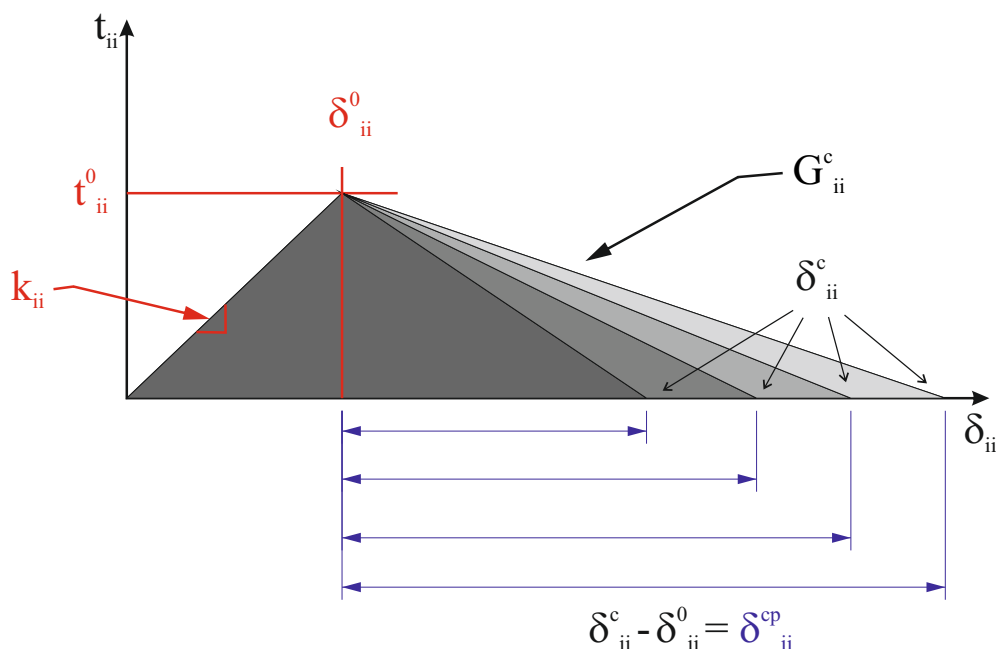
V této analýze byl variován parametr  $\delta_{ii}^0$  určující hodnotu posuvu, která iniciuje poškození (tzn. rozhraní začne ztrácet svoji tuhost). Parametry  $k_{ii}$  a  $\delta_{ii}^{cp}$  jsou během výpočtu konstantní. Během variace dochází ke změně iniciačního napětí  $t_{ii}^0$  a parametru  $G_{ii}^c$ . se zvětšením parametru  $\delta_{ii}^0$  dochází k růstu i výše uvedených parametrů.

Nahlédneme-li do grafů na obrázku 8.4 je zřejmé, že tuhost spoje zůstává během variace parametru konstantní až do blízkého okolí hodnoty posuvu, kde dojde k iniciaci poškození. Tento efekt je dobře rozpoznatelný u testu ENF. S rostoucím parametrem  $\delta_{ii}^0$  lze pochopitelně vypočítat nárůst maximálního zatížení, které je rozhraní schopno přenést. S variací parametru  $\delta_{ii}^0$  se velmi výrazně mění parametr  $G_{ii}^c$ . Během variace tohoto parametru došlo k problémům s konvergencí (pátá křivka ze shora v grafu pro test DCB na obrázku 8.4).



Obrázek 8.4: Vliv parametru  $\delta_{nn}^0$  a  $\delta_{ss}^0$  na rozhraní lepidla Hunstman Araldite 2021

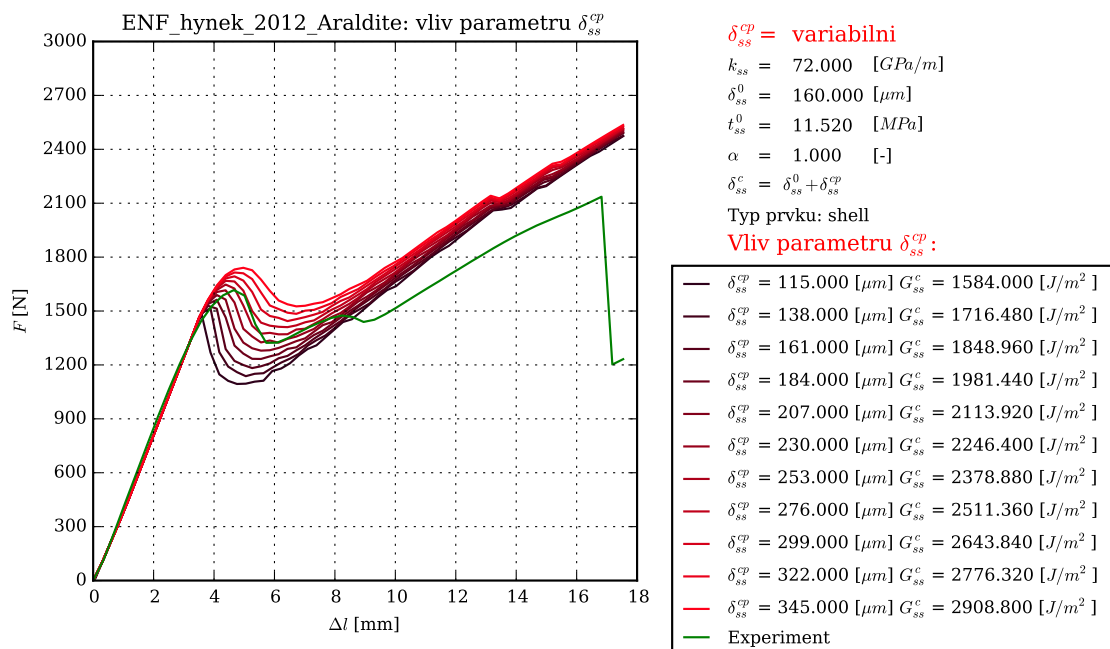
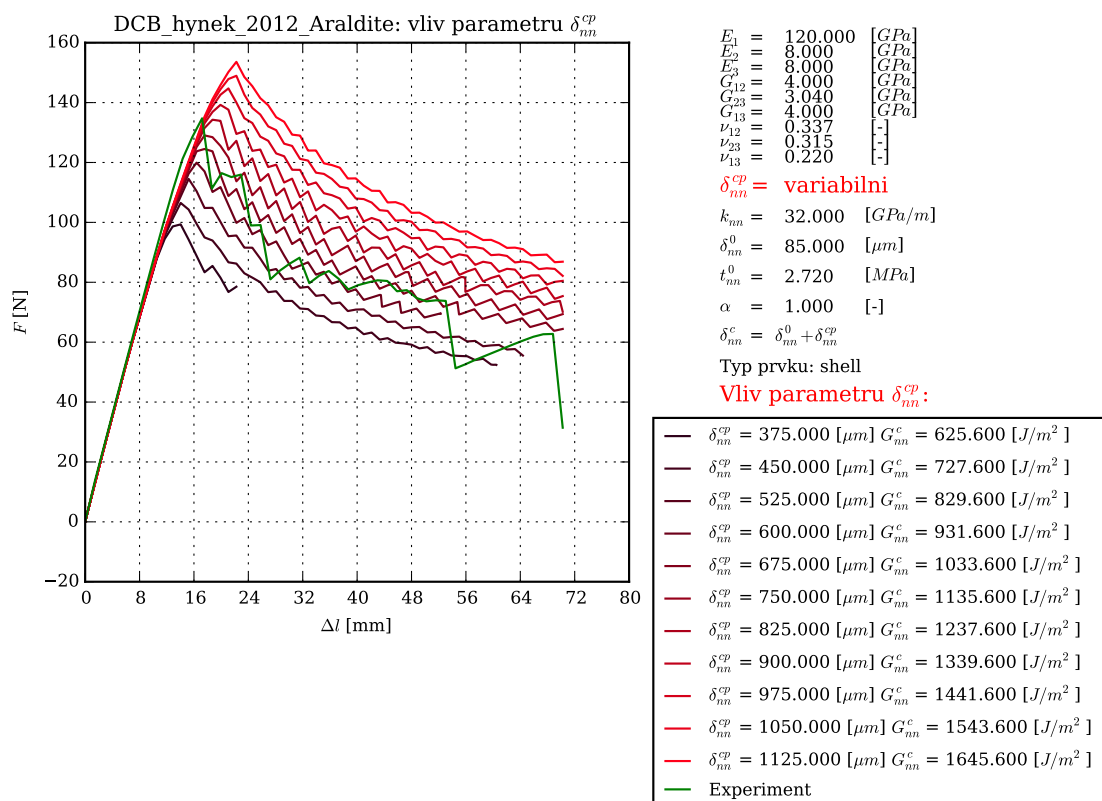
### 8.1.3 Vliv parametrů $\delta_{nn}^{cp}$ a $\delta_{ss}^{cp}$



Obrázek 8.5: Vliv parametru  $\delta_{ii}^{cp}$

Během této analýzy byl měněn parametr  $\delta_{ii}^{cp}$  určující velikost posuvů, při kterých dochází k porušení rozhraní. Parametry  $k_{ii}$ ,  $t_{ii}^0$  a  $\delta_{ii}^0$  byly během analýzy konstantní. Dochází tedy ke změně hodnoty kritického posuvu  $\delta_{ii}^c$  a parametru  $G_{ii}^c$  (viz obrázek 8.5).

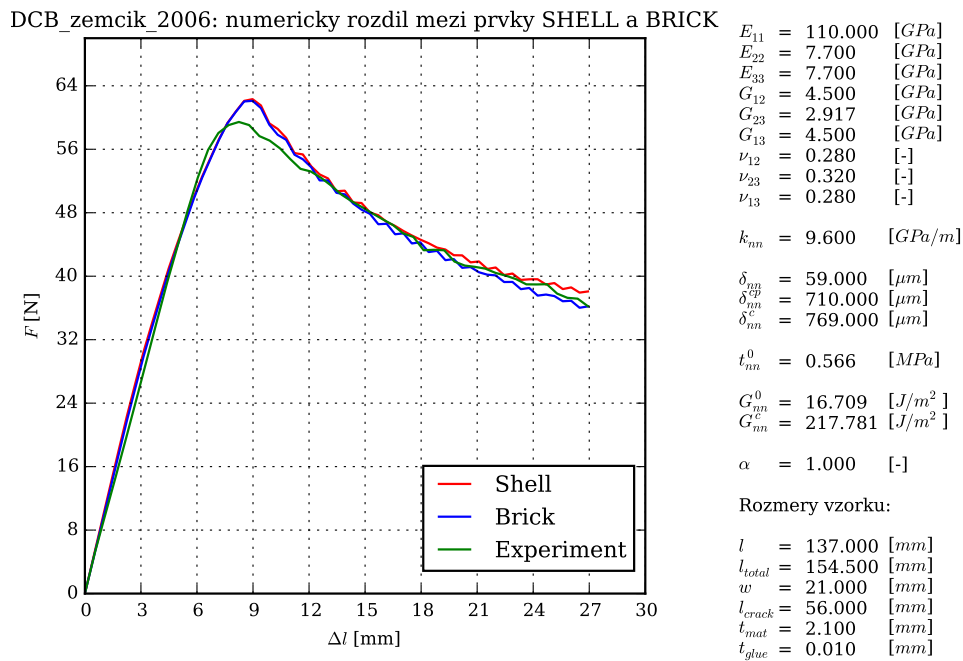
Z grafů na obrázku 8.6 vyplývá, že s rostoucí hodnotou parametru  $\delta_{ii}^{cp}$  roste maximální zatížení, které rozhraní přenesou. Vliv toho parametru na standardizovaných testech se zdá být ve výsledku podobný vlivu parametru  $\delta_{ii}^0$ . I variace tohoto parametru způsobila problémy s konvergencí (první a čtvrtá křivka ze zdola v grafu pro test DCB na obrázku 8.4). Z grafů na obrázcích 8.6 a 8.4 vyplývá, že test DCB je náchylnější na stabilitu během variace parametrů.



Obrázek 8.6: Vliv parametru  $\delta_{nn}^{cp}$  a  $\delta_{ss}^{cp}$  na rozhraní lepidla Hunstman Araldite 2021

### 8.1.4 Vliv typu prvku

Jak již bylo uvedeno, modely jsou tvořeny ze dvou typů prvků:  $S4$  (*shell*),  $C3D8I$  (*brick*). Je tedy vhodné posoudit vliv volby typu prvků na numerické výsledky. Graf na obrázku 8.7 ukazuje pro daný model, že rozdíl mezi výsledky získanými z modelu tvořeného prvky *shell*, nebo *brick* je malý. Stejně malý vliv byl pozorován pro všechny modely uvedené v práci.



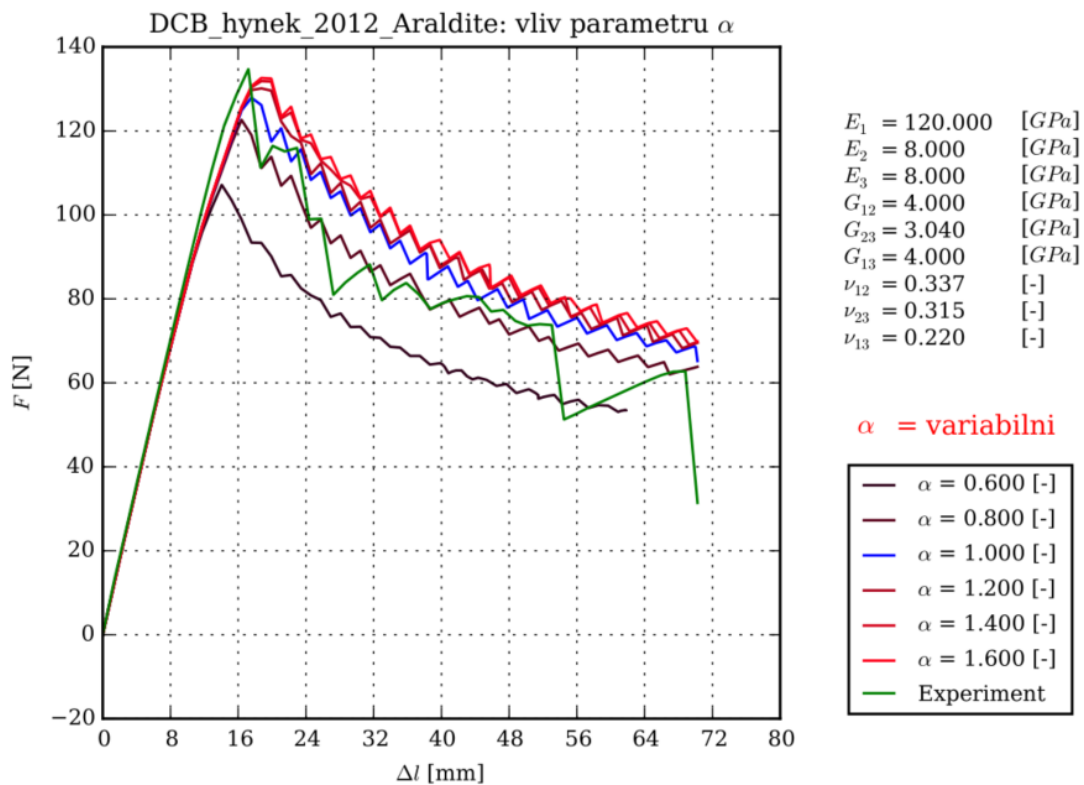
Obrázek 8.7: Rozdíl ve výsledcích pro prvky shell a brick

### 8.1.5 Vliv parametru $\alpha$

Vliv materiálového parametru  $\alpha$ , který vystupuje v pevnostním kritériu *power law* (5.43), byl analyzován na testu pro mód zatížení I (DCB). To znamená, že pevnostní kritérium (5.43) je v analýze užito ve tvaru

$$\left(\frac{G_I}{G_I^c}\right)^\alpha = 1 \rightarrow \frac{G_I}{G_I^c} = \sqrt[\alpha]{1} = 1, \quad (8.1)$$

neboť hodnota parametru  $G_{II}$  by měla být pro tento test rovna 0 a parametr  $\alpha$  by neměl mít vliv na výsledky. Z grafu na obrázku 8.8 však plyne, že tomu tak není. Tato skutečnost může být způsobena například tím, že v konečno-prvkové analýze se parametr  $G_{II}$  v DCB testu nule pouze blíží. Z grafu rovněž vyplývá, že se zvyšujícím se  $\alpha$  se výsledky blíží stejnému průběhu.

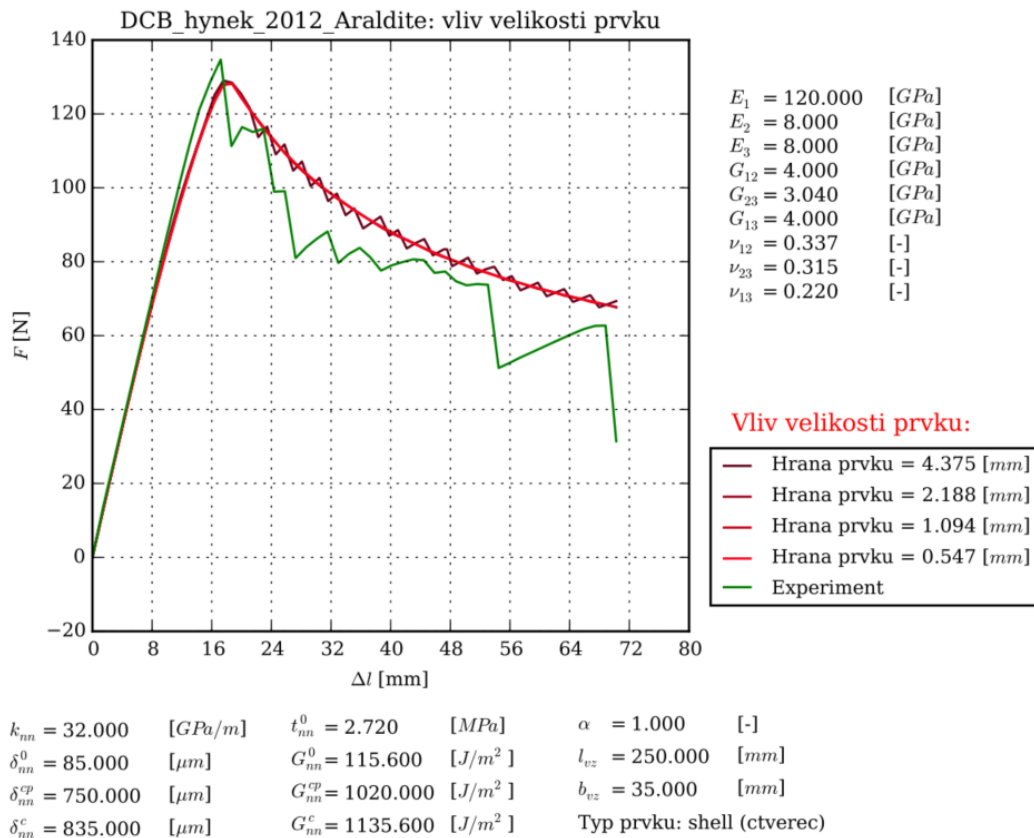


$k_{nn} = 32.000$	[GPa/m]	$t_{nn}^0 = 2.720$	[MPa]	$\alpha = 1.000$	[-]
$\delta_{nn}^0 = 85.000$	[ $\mu m$ ]	$G_{nn}^0 = 115.600$	[J/m <sup>2</sup> ]	$l_{vz} = 250.000$	[mm]
$\delta_{nn}^{cp} = 750.000$	[ $\mu m$ ]	$G_{nn}^{cp} = 1020.000$	[J/m <sup>2</sup> ]	$b_{vz} = 35.000$	[mm]
$\delta_{nn}^c = 835.000$	[ $\mu m$ ]	$G_{nn}^c = 1135.600$	[J/m <sup>2</sup> ]	Typ prvku: shell (ctverec)	

Obrázek 8.8: Vliv parametru  $\alpha$  na rozhraní lepidla Hunstman Araldite 2021

### 8.1.6 Vliv velikosti prvku

Vliv hustoty výpočetní sítě na výsledky je zobrazen v grafu na obrázku 8.9. Křivky pro menší prvky jsou hladší. Prvky o velikosti hrany 2.1 [mm] jsou dostatečné. Další zahuštění sítě již neovlivňuje výsledky a zároveň znatelně prodlužuje dobu výpočtu.



Obrázek 8.9: Vliv velikosti prvku na rozhraní lepidla Hunstman Araldite 2021



## 8.2 Identifikace parametrů tří typů rozhraní

V rámci této práce byli identifikovány materiálové parametry tří typů kohezivních rozhraní na kompozitních pásících s využitím standardizovaných testů. Byli identifikovány parametry mezivrstvy v laminátu a rozhraní tvořeného z lepidla Gurit Spabond 345 a Hunstman Araldite 2021 spojujícího jednosměrové uhlíkové kompozitní nosníky. Nespornou výhodou tohoto přístupu byla skutečnost, že níže určené parametry lze nalézt postupným identifikováním dílčích materiálových parametrů (např. kombinací parametrů  $k_{ii}, \delta_{ii}^0, \delta_{ii}^{cp}$ ) s dostatečnou přesností i bez použití optimalizačních metod. Materiálové parametry mohou být identifikovány pro vybraný typ a velikost prvků a řešič. To znamená, že následná implementace materiálových dat do větších konstrukčních celků, které jsou sestaveny z těchto prvků a řešeny vybraným řešičem, je možná bez přepočtu.

Materiálové a geometrické parametry testů pro 3 druhy rozhraní lze nalézt v tabulce 8.1 a 8.2. Identifikované dílčí materiálové parametry kohezivního rozhraní jsou uvedeny v tabulce 8.3. Pro test DCB lze parametry určené ve směru  $nn$  ztotožnit s parametry spojenými s módem zatížení I. U testu ENF lze provést ztotožnění parametrů ve směru  $ss$  s módem zatížení II. Pro test MMF nelze jednoznačně přiřadit parametry spojené se směry  $nn$  nebo  $ss$  k módům zatížení I nebo II a tím určit jejich poměr na zátěžném stavu rozhraní. Identifikované hodnoty kritické rychlosti uvolňování deformační energie vnitřních sil  $G^c$  jsou uvedeny v podkapitole 8.3 v tabulce 8.4.

Mat. param. vzorku s rozhraním:	Araldite a Spabond	Mezivrstva
$E_1$ [GPa]	120.000	110.000
$E_2$ [GPa]	8.000	7.700
$E_3$ [GPa]	8.000	7.700
$\nu_{12}$ [-]	0.337	0.280
$\nu_{23}$ [-]	0.315	0.320
$\nu_{13}$ [-]	0.220	0.280
$G_{12}$ [GPa]	4.000	4.500
$G_{23}$ [GPa]	3.040	2.917
$G_{13}$ [GPa]	4.000	4.500

Tabulka 8.1: Materiálové parametry vzorků

Geom. param. vzorku s rozhraním:	Araldite		Spabond		Laminát	
Typ testu	DCB	ENF	DCB	ENF	DCB	MMF
$l$ [mm]	180.0	120.0	95.0	120.0	137.0	120.0
$l_{total}$ [mm]	250.0	150.0	150.0	150.0	154.5	140.0
$b$ [mm]	35.0	35.0	35.0	35.0	21.0	21.0
$a$ [mm]	70.0	35.0	20.0	35.0	56.0	50.0
$t_{mat}$ [mm]	2.0	2.0	2.0	2.0	2.1	2.1
$t_{glue}$ [mm]	0.7	0.7	0.7	0.7	0.0	0.0

Tabulka 8.2: Geometrické parametry vzorků

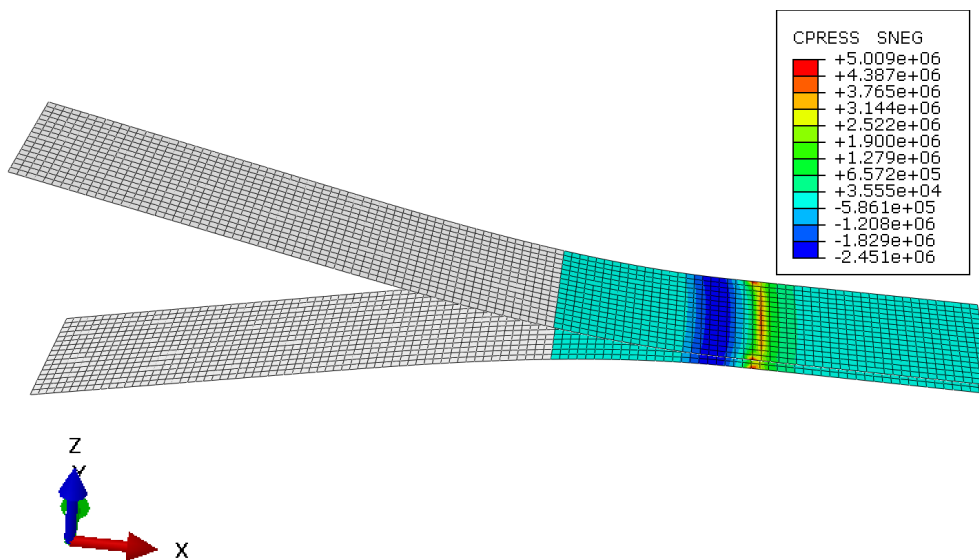
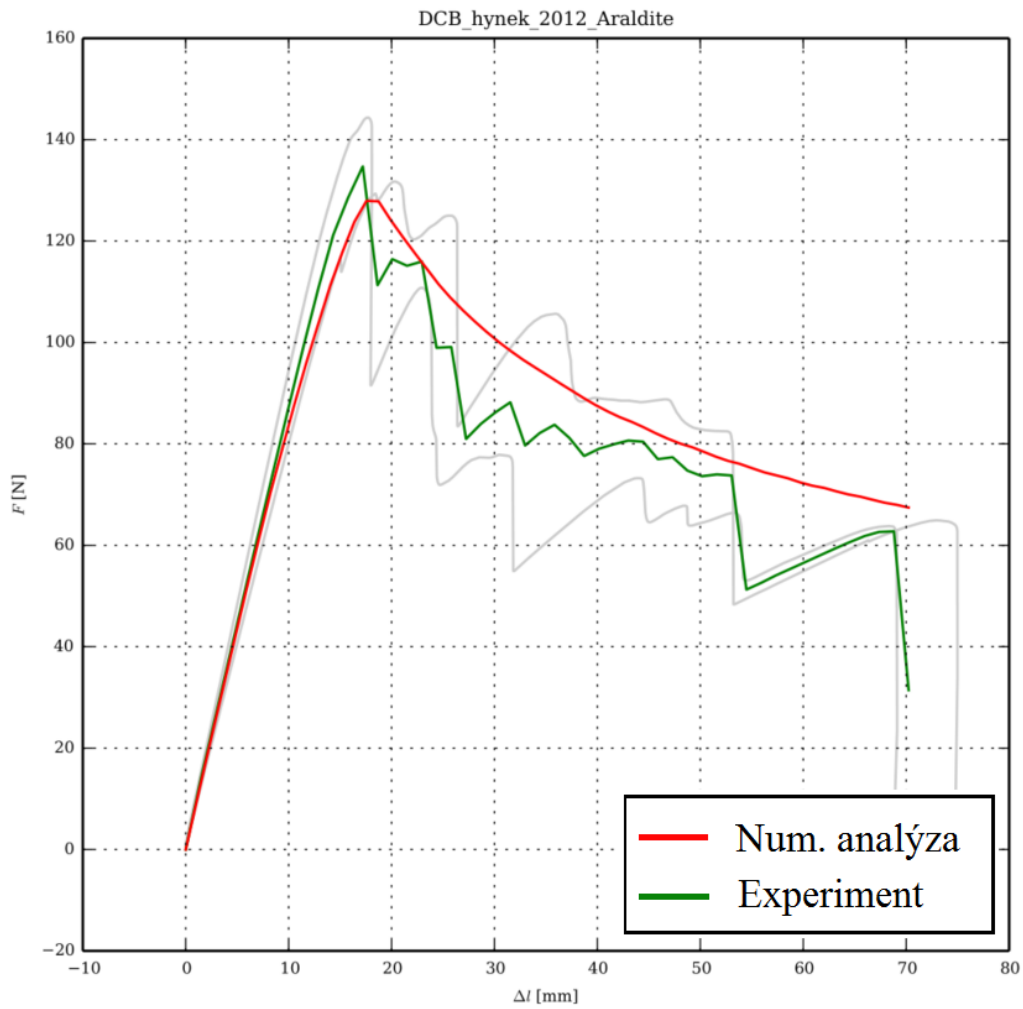
Identifikované dílčí parametry rozhraní:	Araldite	Spabond	Laminát
$k_{nn}$ [GPa/m]	32.0	42.0	24.0
$k_{ss}$ [GPa/m]	72.0	100.0	100.0
$\delta_{nn}^0$ [ $\mu\text{m}$ ]	85.0	48.0	59.0
$\delta_{ss}^0$ [ $\mu\text{m}$ ]	155.0	220.0	30.0
$\delta_{nn}^c$ [ $\mu\text{m}$ ]	835.0	295.0	769.0
$\delta_{ss}^c$ [ $\mu\text{m}$ ]	395.0	350.0	480.0
$\alpha$ [-]	1.0	1.0	1.0

Tabulka 8.3: Identifikované dílčí materiálové parametry rozhraní

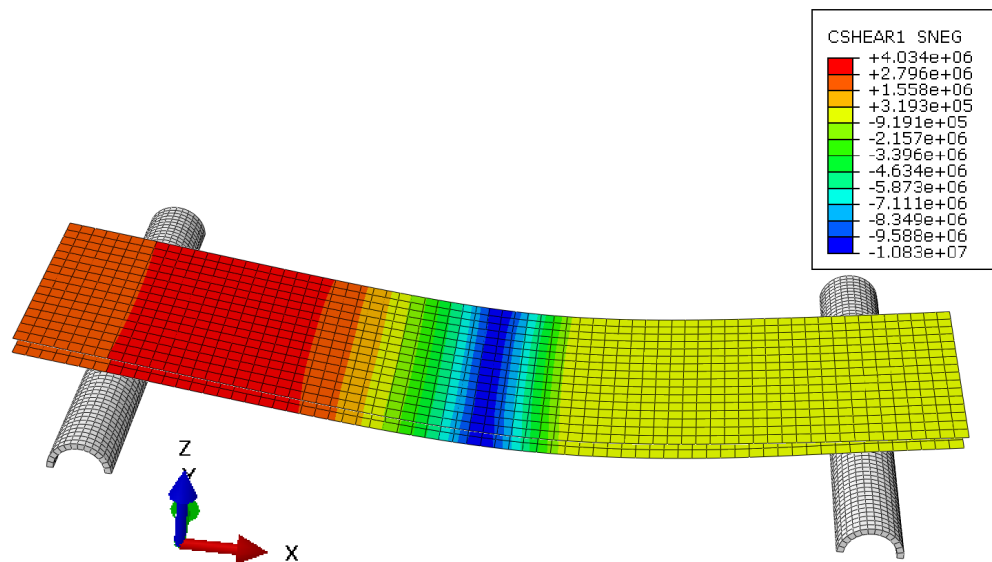
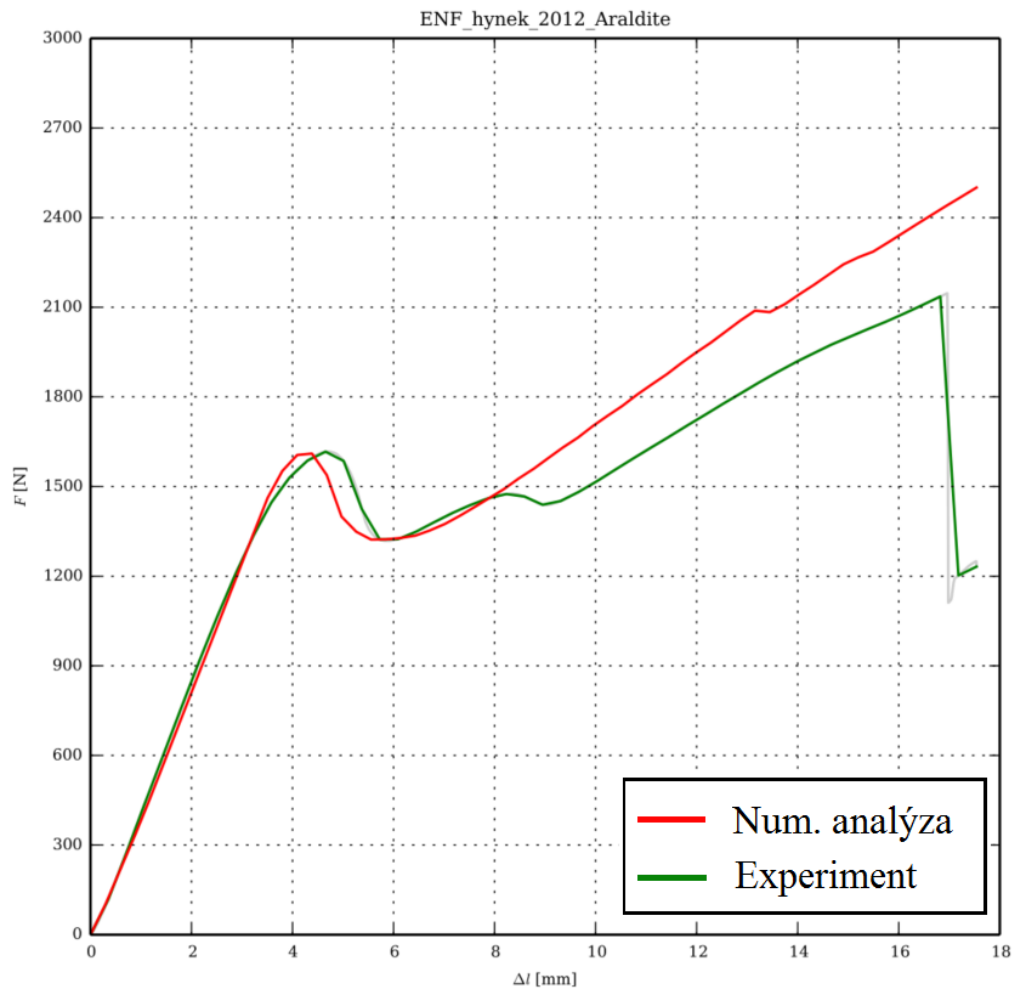
### 8.2.1 Rozhraní z lepidla Hunstman Araldite 2021 nebo Gurit Spabond 345

Pro rozhraní vytvořené z lepidla Hunstman Araldite 2021 nebo Gurit Spabond 345 byly provedeny testy DCB a ENF, pomocí kterých byly identifikovány kritické parametry  $G_I^c$  (v testu ztotožněn s rychlostí uvolňování deformační energie v normálovém směru  $nn$ ) a  $G_{II}^c$  (v testu ztotožněn se směrem  $ss$  kolmém na čelo trhliny). Výsledky testů lze nalézt na obrázku 8.10, 8.11, 8.12 a 8.13.

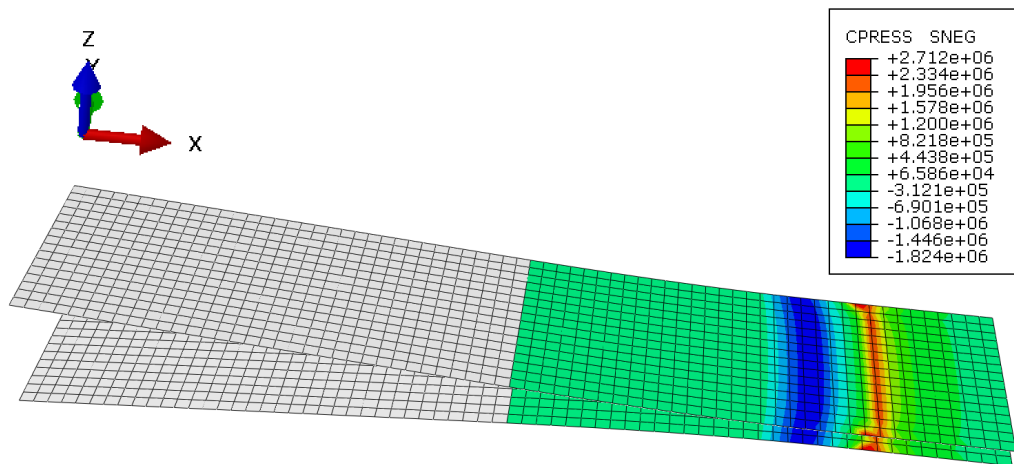
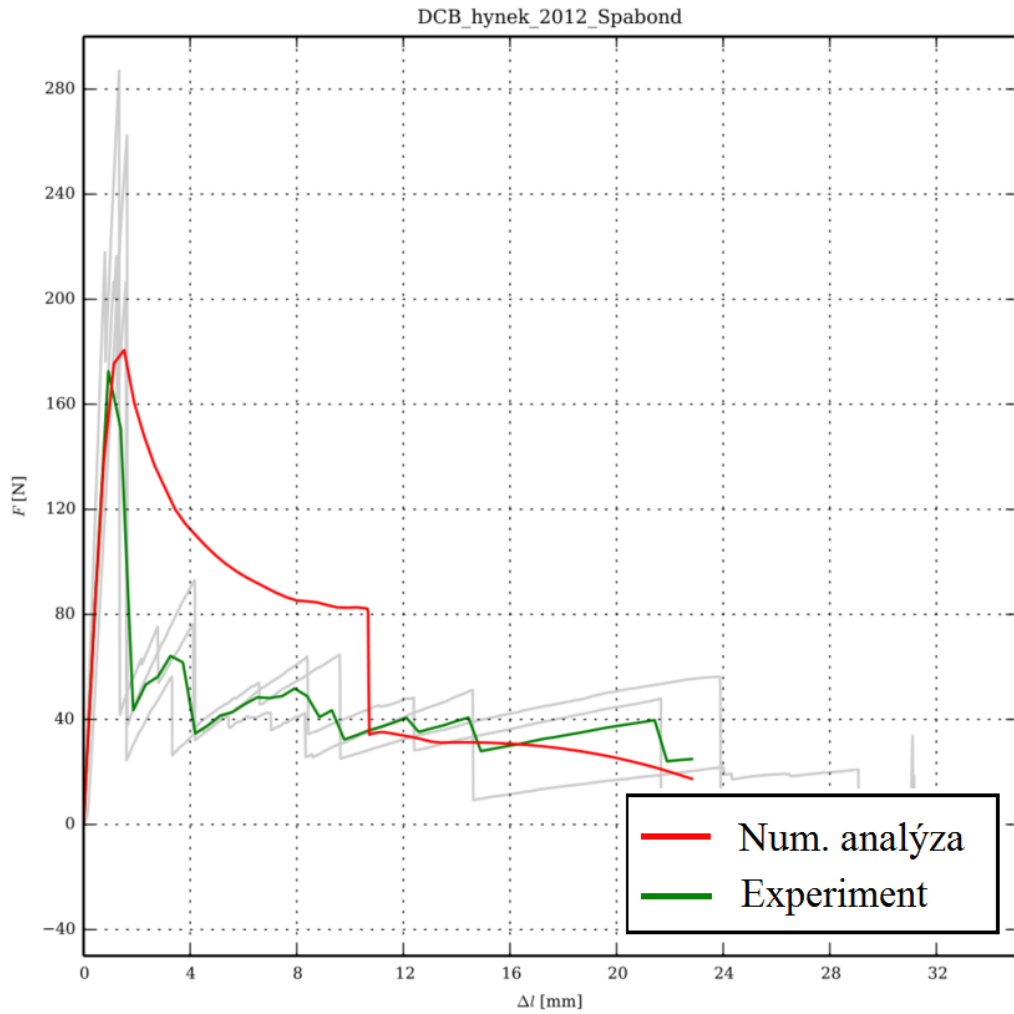
V grafech pro rozhraní z lepidla Spabond na obrázcích 8.12 a 8.13 lze pozorovat velký rozptyl mezi neprůměrovanými experimentálními daty (šedé křivky). V těchto případech docházelo ke křehkým lomům. Modely rozhraní v tomto případě nedokážou kopírovat takto rychlou ztrátu tuhosti rozhraní.



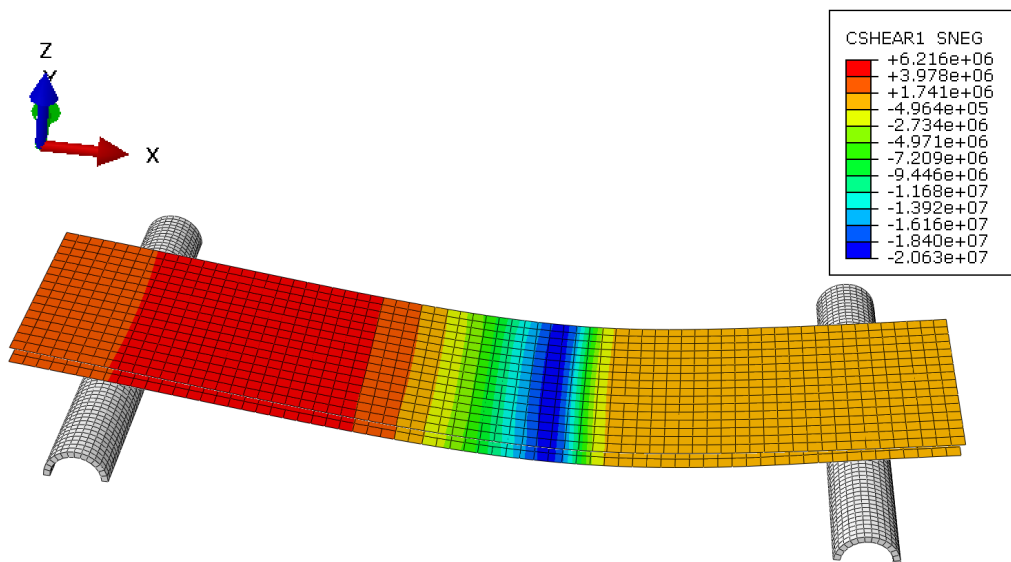
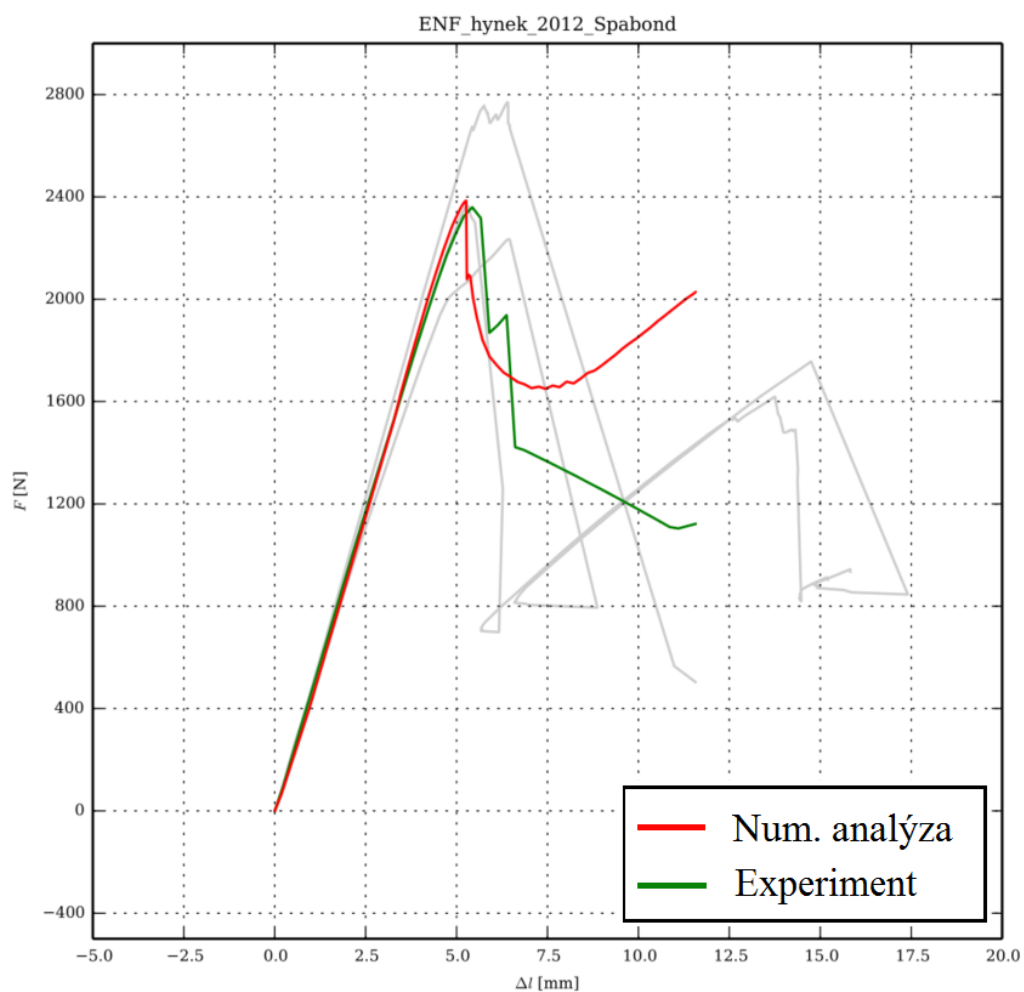
Obrázek 8.10: Porovnání křivek a vizualizace konečno-prvkového modelu testu DCB pro lepidlo Hunstman Araldite 2021



Obrázek 8.11: Porovnání křivek a vizualizace konečno-prvkového modelu testu ENF pro lepidlo Hunstman Araldite 2021



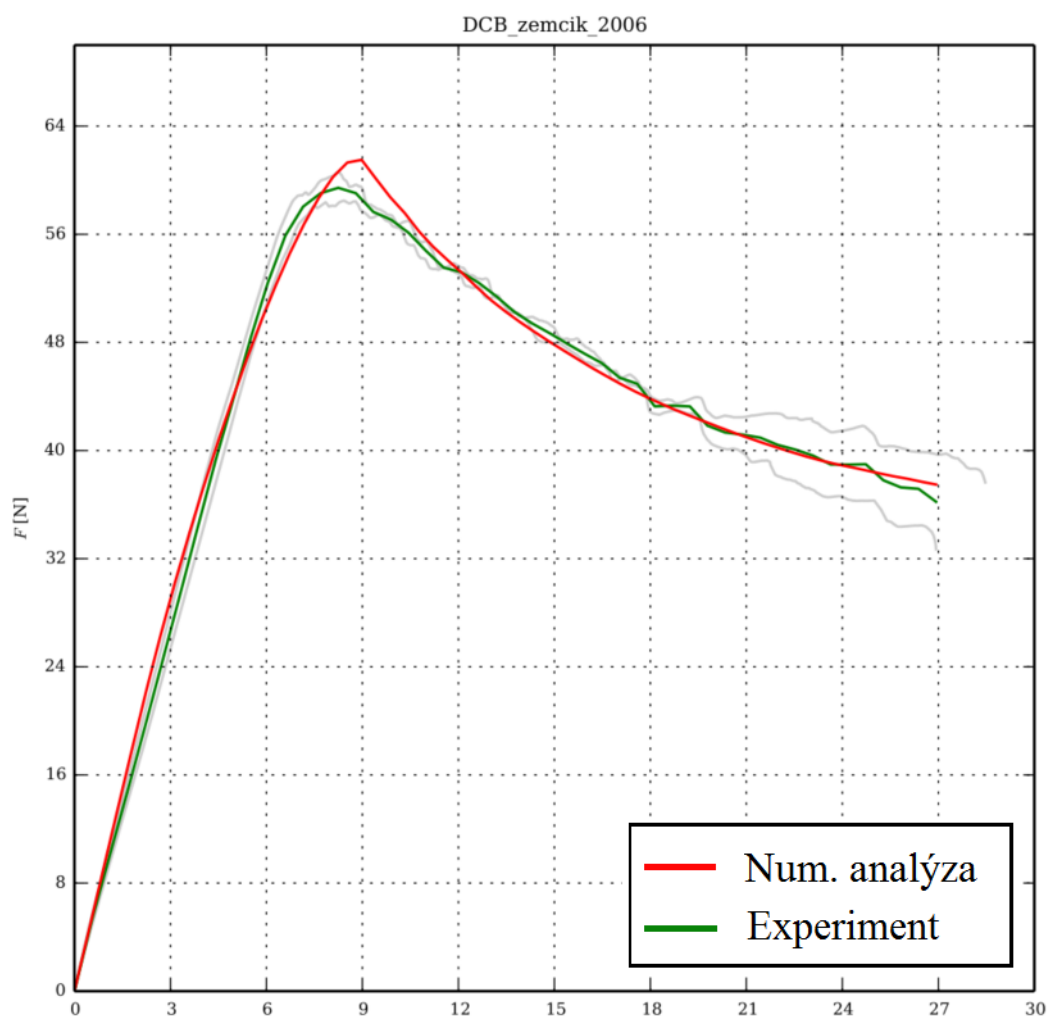
Obrázek 8.12: Porovnání křivek a vizualizace konečno-prvkového modelu testu DCB pro lepidlo Gurit Spabond 345



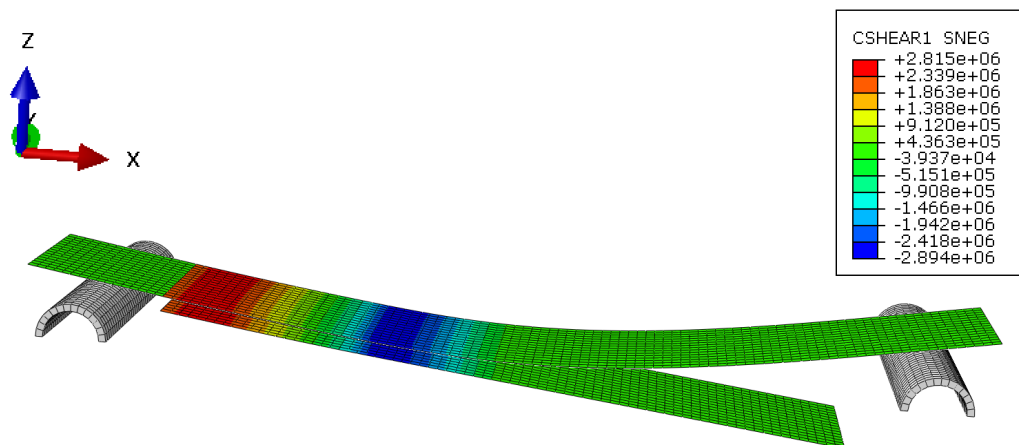
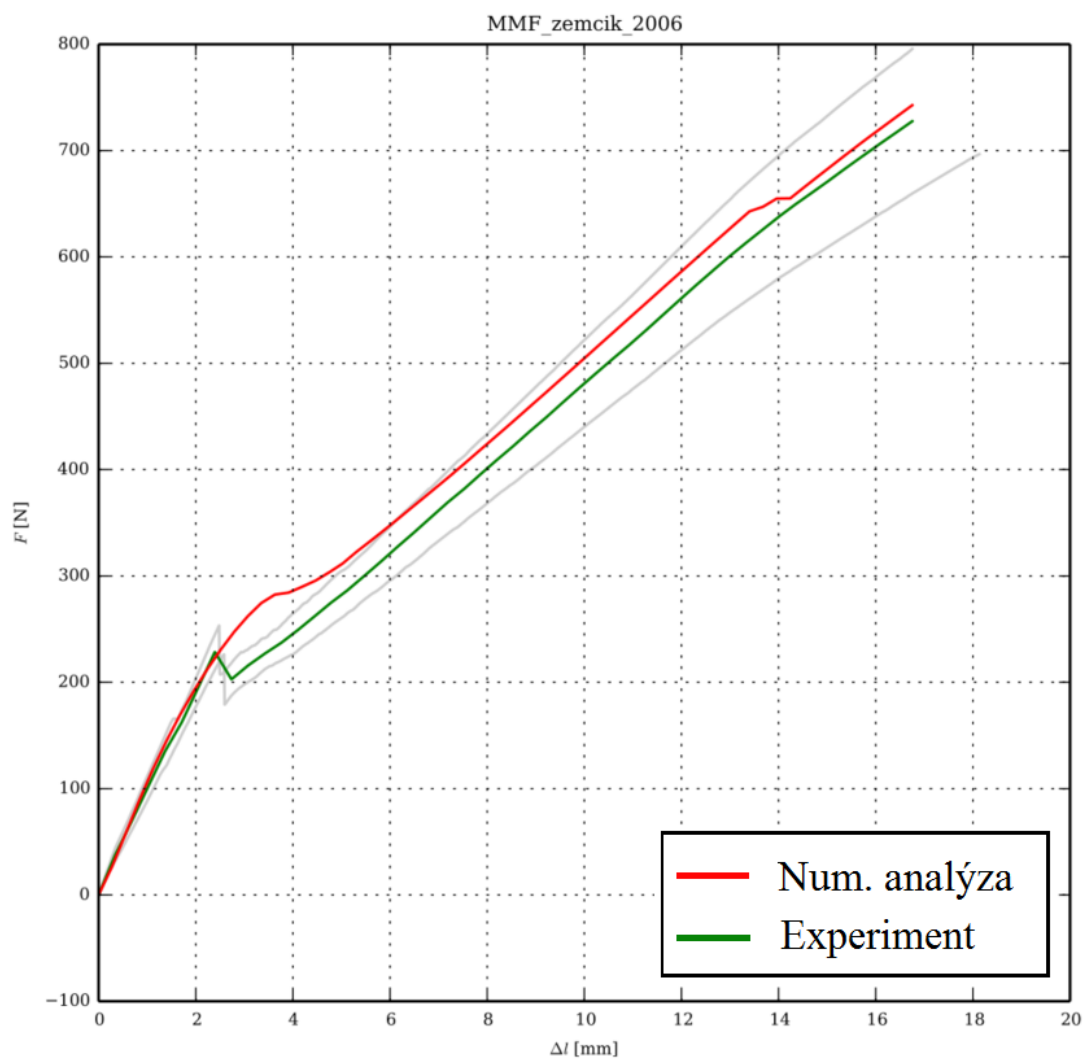
Obrázek 8.13: Porovnání křivek a vizualizace konečno-prvkového modelu testu ENF pro lepidlo Gurit Spabond 345

## 8.2.2 Rozhraní vrstev v laminátu

Pro rozhraní mezivrstvy v laminátu byly provedeny testy DCB a MMF. Pomocí testu DCB byly identifikovány materiálové parametry kohezivního rozhraní v normálovém směru. Testem MMF nelze určit materiálové parametry pro čistý mód zatížení II, neboť u tohoto testu nelze provést ztotožnění směrů  $nn$  a  $ss$  s módy zatížení I a II, jako tomu je u testů DCB a ENF. Výsledky testů lze nalézt na obrázku 8.14 a 8.15. V tabulce níže jsou porovnány hodnoty parametru  $G^c$  získané z teoretických vztahů (4.6), (4.16) a (4.29) a hodnoty tohoto parametru určené numericky pomocí konečno-prvkových modelů v softwaru Abaqus 6.14.



Obrázek 8.14: Porovnání křivek testu DCB pro mezivrstvu v laminátu



Obrázek 8.15: Porovnání křivek a vizualizace konečno-prvkového modelu testu MMF pro mezivrstvu v laminátu



### 8.3 Závěr

Exp./Num. výsledky [ $\text{J}/\text{m}^2$ ]	DCB ( $G_I^c$ )	ENF ( $G_{II}^c$ )	MMF $G_{I/II}^c$
Lepidlo Gurit Spabond 345	385/301	3750/3850	—
Lepidlo Hunstman Araldite 2021	1353/1135	2045/2204	—
Laminát	535/544	—	730/—

Tabulka 8.4: Porovnání výsledků pro zkoumané druhy rozhraní

V této kapitole byl prozkoumán vliv materiálových parametrů na jednotlivých konečno-prvkových modelech standardizovaných testů. Analyzováním jejich vlivu bylo následně možné určit materiálové parametry rozhraní. Variace parametrů rovněž poskytuje informace o funkčnosti modelů (např. neočekávaný vliv parametru  $\alpha$  na výsledek analýzy DCB testu) a o jeho nastavení (např. informace o velikosti hrany prvku). V druhé části této kapitoly byly určeny materiálové parametry tří typů rozhraní: mezivrstvy v laminátu a dvou lepidel Hunstman Araldite 2021 a Gurit Spabond 345. Vzhledem k tomu, jak se  $G_i^c$  mění během variace parametrů (viz grafy na obrázcích 8.2, 8.4, 8.6) je shoda numerických výsledků s experimentálními dobrá.

Z tohoto důvodu lze parametr  $G_i^c$  určený z experimentu zavést jako konstantu do konečno-prvkového modelu a použít jej k zjednodušení identifikace dílčích parametrů rozhraní (jeden dílčí parametr bude eliminován z identifikačního procesu).

## 9 Závěr

V rámci této práce byl vytvořen automatizovaný nástroj pro určení materiálových parametrů kohezivního rozhraní pomocí standardizovaných testů dle norm ASTM. Nástroj využívá komerčního konečno-prvkového softwaru Abaqus a je napsán v jazyku Python. Rovněž byla sestavena databáze provedených experimentů. Automatizace nástroje spočívá ve skutečnosti, že uživatel pouze zadá geometrické a materiálové parametry vzorků z experimentu. Sestavení modelu, jeho výpočet, vyhodnocení a porovnání dat je již automatické. Nástroj je snadno modifikovatelný a uživatel má možnost vybrané parametry upravovat manuálně, zkoumat jejich vliv na výpočet a přidávat další dosud nepoužité testy. Konečno-prvkový software Abaqus se projevil jako spolehlivý nástroj k identifikaci materiálových parametrů kohezivního rozhraní.

Během realizace práce se ukázalo, že testy DCB a ENF jsou vhodné pro identifikaci materiálových parametrů kohezivního rozhraní. Test MMF není pro identifikaci těchto parametrů zcela vyhovující, neboť poměr módů zatížení se během růstu trhliny mění. Tento test by autor práce doporučil nahradit testem MMB (viz kap. 4), kde poměr mezi módy I a II je po celou dobu konstantní a materiálové parametry lze jednoznačně určit.

Dále se ukázalo, že se jedná o nosné téma výzkumu a byly stanoveny následující cíle pro výzkum v blízké budoucnosti:

- Experimentální provedení testu MMB
- Implementování testu MMB do nástroje
- Prozkoumání problematiky III. módu namáhání
- Vytvoření standardizovaného testu pro mód III.
- Prozkoumání problematiky namáhání kombinovaným II/III. módem
- Vytvoření standardizovaného testu pro kombinaci módů II/III.
- Vytvoření vlastního materiálového modelu a jeho implementace do softwaru Abaqus
- Použití vybraného modelu rozhraní pro predikci delaminace vrstev kompozitu v komponentě větší struktury

## Literatura

- [1] *Abaqus 6.14 Analysis User's Manual*, Dassault Systemes.
- [2] Ankersen J., Davies G. A. O, 2008. *Interface elements - advantages and limitations in CFRP delamination modeling*. Imperial College of Science Technology and Medicine, University of London, England
- [3] Bathe, K. J., 2007. *Finite element procedures*. Prentice hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA
- [4] Benzeggagh M. L., Kenane M., 1996. *Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus*. Université de Technologie de Compiègne, Compiègne Cedex, France.
- [5] Biel A., Stigh U., 2007 *An analysis of the evaluation of the fracture energy using the DCB-Specimen*, University of Skövde, Sweden
- [6] Broek D., 1992. *Elementary engineering fracture mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers. The Hague.
- [7] Carlson L.A., Gillespie J. W., Pipes R. B., 1985. *On the Analysis and Design of the End Notched Flexure (ENF) Specimen for Mode II Testing*, University of Delaware
- [8] Fischer-Cripps, Anthony C., 2000. *Introduction to Contact Mechanics*. Springer, New York, USA.
- [9] Hanson, J. H.; Bittencourt, T. N.; Ingraffea, A. R., 2004. *Three-dimensional influence coefficient method for cohesive crack simulations*, Engineering Fracture Mechanics 71, pp. 2109-2124.
- [10] Laš, V., 2008. *Mechanika kompozitních materiálů*. Fakulta aplikovaných věd, Plzeň.
- [11] Li C.F., Hu N., Yin Y.J., Sekine H., Fukunaga H., 2002. *Low-velocity impact-induced damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. Part 1. An FEM numerical model.*, Composites Part A str. 1055 - 1062
- [12] Matthews F.L., Davies G. A. O, Hitchings D., Soutis C, 2000. *Finite element modeling of composite materials and structures*. ISBN 1-85573-422-2, Imperial College of Science Technology and Medicine, University of London, England

- [13] Radcliffe, J.G., 2004. *Characterization of the Edge Crack Torsion (ECT) Test for Mode III Fracture Toughness Measurement of Laminated Composites*. NASA Langley Research Center, Hampton.
- [14] Reeder, J.R., 2006. *3D Mixed-Mode Delamination Fracture Criteria – An Experimentalist’s Perspective*. NASA Langley Research Center, Hampton.
- [15] Rosenberg, J.; Křen, J., 1998. *Mechanika kontinua.* , Západočeská Univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň.
- [16] Szekrényes A., 2005. *Delamination of composite specimens*, Ph. D. dissertation, Budapest University of Technology and Economics, Budapest, Hungary.
- [17] Szekrényes A., 2007. *Delamination fracture analysis in the  $G_{II} - G_{III}$  plane using pre-stressed transparent composite beams*. International Journal of Solids and Structures 44 pp. 3359–3378.
- [18] Turon, A.; Dávila, C.G.; Camanho, P.P.; Costa, J., 2007. *An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models*. Engineering Fracture Mechanics 74, pp. 1665-1682.
- [19] Waseem M. H. S., Kumar K. N., 2014. *Finite Element Modeling for Delamination Analysis of Double Cantilever Beam Specimen* Dayananda Sagar College of Engineering, Bangalore, India
- [20] Whitcomb J. D., 1984. *Analysis of instability-related growth of a through-width delamination*. NASA Technical Memorandum 86301, Hampton, Virginia, USA.
- [21] Xie D., Garg M., Huang D., Abdi F., 2008. *Cohesive Zone Model for Surface Cracks using FEA*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Alpha STAR Corporation, Long Beach, USA
- [22] Zangmeister T., Andrä H., Müller R., 2012. *Comparison of XFEM and Voxel-based FEM for Approximation of Discontinuous Stress and Strain at Material Interfaces.*, Technische Mechanik, Kaiserslautern, Germany
- [23] Zeman V., Laš V., 2010. *Technická mechanika*, Západočeská Univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň.
- [24] Zemčík R., Laš V., 2008. *Numerical and experimental analyses of the delamination of cross-ply laminates*. ISSN 1580-2949.

- [25] Zhao L., Zhi J., Zhang J., Zhanli L., Hu N., 2015. *XFEM simulation of delamination in composite laminates*. Beihang University, Beijing, Chongqing University, Chongqing, Tsinghua University, Beijing, China
- [26] Zheng D., 2007. *Low velocity impact analysis of composite laminated plates*. University of Akron, Akron, USA