

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Optimalizace akustického pole

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 9. června 2016

Bc. Zdeněk Novotný

Poděkování

Při této příležitosti bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce Prof. Dr. Ing. Eduardu Rohanovi, DrSc. za motivaci ke studiu, vedení práce a všem věnovaný čas.

Za velkou pomoc při implementaci musím také poděkovat Ing. Vladimíru Lukešovi, Ph.D. a Ing. Robertu Cimrmanovi, Ph.D.

V neposlední řadě je třeba vyjádřit vděčnost mé rodině, příbuzným a kamarádům, kteří mi svojí podporou pomáhali během celého studia.

Abstrakt

Hlavním cílem této práce je provedení tvarové optimalizace akustického pole popsaného omezenou 3D oblastí. Nejdříve se odvodí rovnice potřebné k modelování vibroakustiky. Rovnici pro akustickou tekutinu reprezentuje Helmholtzova rovnice a deska se modeluje dle Reissnerovy-Mindlinovy teorie. Z úvah o šíření akustických vln se odvodí okrajové podmínky na hranici akustické kavity a transmisní podmínky na rozhraní deska-kavita. Naformuluje se úloha tvarové optimalizace. Jako stavové rovnice se využije slabá formulace Helmholtzovy rovnice a Reissner-Mindlin desky. Provede se citlivostní analýza. Design oblasti se parametrizuje pomocí nástroje Spline-boxu. Optimalizační úloze se přiřadí Lagrangeova funkce, definuje se úloha sedlového bodu a posléze se přejde k úloze adjungované. Touto cestou se získá celková derivace neboli citlivost účelové funkce neprozvučnosti na změnu optimalizačních parametrů. Pomocí softwaru *SfePy* se provede několik optimalizačních výpočtů ve 3D pro rigidní a poddajnou hranici. Některé výsledky se ukáží a vyhodnotí.

Abstract

The main objective of this study is to implement shape optimization of an acoustic field described by 3D domain. The very first step is derivation of essential equations to model vibroacoustics problems. Equation representing acoustic cavity is Helmholtz equation and the plate is modeled according to the Reissner-Mindlin plate theory. From our knowledge about acoustic propagation both boundary conditions and the transmission conditions are derived. A problem of shape optimization is defined. As state equations a weak formulation of Helmholtz equation and of Reissner-Mindlin plate are applied. Then the sensitive analysis is performed. Design of domain is parameterized by Spline-box tool. Lagrange equation is assigned to the optimization problem. Problem of the saddle point is defined and consecutively, there is a proceeding to solve an adjugate problem. This way allows to obtain a total derivative of an objective function. We gain sensitivity of the objective function to the change of optimization parameters. Using software *SfePy* a few shape optimization calculations in 3D for both rigid and deformable boundaries are performed. At the end some results are displayed and reviewed.

Obsah

1	Úvod	1
2	Problém akustiky	4
2.1	Rovnice akustiky	4
2.1.1	Úvodem	4
2.1.2	Eulerova rovnice	5
2.1.3	Rovnice kontinuity	7
2.1.4	Stavová rovnice	8
2.1.5	Vlnová rovnice v kartézských souřadnicích	9
2.1.6	Helmholtzova rovnice	11
2.2	Okrajové podmínky	11
2.3	Slabé formulace rovnic akustiky	13
3	Problém modelování desek podle Reissnerovy-Mindlinovy teorie	14
3.1	Rovnice desek podle RM teorie	14
3.2	Timošenkův nosník ve 2D	16
3.2.1	MKP diskretizace Timošenkovy nosníku	16
3.2.2	Příklad řešení Timošenkovy nosníku pomocí MKP	18
4	Problém vibroakustiky	21
4.1	Transmisní podmínky na hranici styku poddajné desky s akustickou tekutinou	21
4.2	Rovnice interakce akustické tekutiny a RM desky	22
5	Formulace úloh optimalizace ve vibroakustice	24
5.1	Popis optimalizované oblasti	24
5.2	Účelové funkce	25
5.3	Optimalizační úloha pro rigidní hranici	27
5.3.1	Citlivostní analýza	27
5.4	Úloha s poddajným panelem na hranici	33
5.4.1	Optimalizační úloha	34
5.4.2	Citlivostní analýza	34
5.4.3	Nedesignovatelný panel na hranici	39
5.5	Implementace numerického řešení	40
5.5.1	Aproximace slabých řešení pomocí MKP a jejich maticový zápis	40

5.5.2	Spline-box	41
5.5.3	Implementace změny tvaru výpočtové oblasti pomocí Spline-boxu	42
5.5.4	Kontrola výsledků citlivostní analýzy pomocí konečných diferencí	46
6	Optimalizační výpočty	49
6.1	Zvolená MKP diskretizace	49
6.2	Vyhodnocení účelové funkce v neoptimalizované oblasti	50
6.3	Parametry úloh	51
6.4	Oblast s rigidní stěnou	52
6.5	Oblast s poddajnou stěnou	60
6.5.1	Analýza vlivu tloušťky desky na hodnotu neprozvučnosti	60
6.5.2	Analýza vlivu tloušťky desky na její vlastní frekvence	61
6.5.3	Příklad MKP řešení příkladu vibroakustiky	62
6.6	Oblast s nedesignovatelnou poddajnou stěnou	65
6.6.1	Analýza vlivu tloušťky desky na výsledný tvar	65
6.7	Oblast s designovatelnou poddajnou stěnou	71
6.8	Vyhodnocení numerických výsledků optimalizace	75
6.8.1	Oblast s rigidní stěnou	75
6.8.2	Oblast s nedesignovatelnou poddajnou stěnou	76
6.8.3	Oblast s designovatelnou poddajnou stěnou	76
7	Závěr	78

1 Úvod

Motivace

Řešení problémů vibroakustiky, například právě tvarovou optimalizací, má potencionální aplikace v mnoha oblastech mechaniky. Části strojů a mechanických zařízení mohou chodem ve svých provozních podmínkách emitovat nepřiměřené množství hluku. Můžeme si představit motor pracující v provozních otáčkách. Pak je nutné tyto hlukové emise pro příslušný pás provozních frekvencí snížit. Jednou z možností jak, je tvarová optimalizace skříně motoru. Nicméně v této práci se věnujeme speciálnímu případu vibroakustiky, kdy pracujeme se zvukovodem, kdy se snažíme optimalizací jeho tvaru utlumit akustický signál, který jím prochází. Tato situace tedy přibližně odpovídá modelování tlumiče výfuku.

Cíl práce

V této práci je třeba splnit pět cílů daných zadáním.

- Implementovat model interakce akustického pole s vibrující deskou
Při splnění této části definujeme rovnice pro akustickou tekutinu [Škvor, 2001], [E. Bängtsson, 2002] a desku podle Reissnerovy-Mindlinovy teorie [Rohan Eduard, 2015] s příslušnými okrajovými a transmisními podmínkami pro monochromatické řešení. Při řešení problému vibroakustiky přejdeme do komplexních proměnných. Model implementujeme v systému *SfePy* (Simple finite elements in Python) ovládaném skrze programovací jazyk *Python* [Robert, 2016].
- Vytvořit parametrický popis optimalizované oblasti, zejména pro polyhedrální oblasti s rovinnými stěnami
Oblast parametrizujeme Spline-boxem, implementovaným ve *SfePy*, tak aby model dodržoval hranici zvukovodu jako konečný počet rovinných stěn na hranicích, které definujeme jako desky podle Reissnerovy-Mindlinovy teorie. Pak pomocí Spline-boxu jsme schopni v oblasti definovat vektorové pole designových rychlostí.
- Vytvořit výpočetní model pro akustický kanál (zvukovod) tvořený soustavou vibrujících desek.
Stejně jako v prvním bodu definujeme problém vibroakustiky a aplikujeme jej na zvukovod tvořený z části rigidní stěnou a pěti poddajnými deskami. Na výstupu a vstupu definujeme okrajové podmínky. Na vstupu do zvukovodu aplikujeme okrajovou podmínku popisující incidenční zvukovou vlnu danou jednou frekvencí [E. Bängtsson,

2002]. Akustickou tekutinu uvažujeme vzduch a materiál desky ocel. Problém řešíme pomocí metody konečných prvků ve *SfePy*.

- Implementovat citlivostní analýzu pro případ použití metody adjungované proměnné. V optimalizaci definujeme minimalizační úlohu, kdy hledáme minimum účelové funkce. Definujeme stavovou úlohu jako vibroakustický problém interakce akustické tekutiny a poddajné desky. Pro efektivní nalezení gradientu účelové funkce vůči optimalizačním parametrům odvodíme citlivostní vztahy v nichž vystupují stavové a adjungované proměnné (oboje komplexní) viz [Eduard, 2012],[Rohan Eduard, 2011a] a [Rohan Eduard, 2011b]. Ve *SfePy* implementujeme řešení adjungované úlohy, kdy hledáme reálné a imaginární části adjungovaných proměnných. Pak již jednoduše získáváme gradient účelové funkce.
- Řešit modelové úlohy optimalizace akustického kanálu pro zvolené kritéria. Jako kritérium volíme maximalizaci útlumu signálu (neprozvučnosti) jdoucího skrze zvukovod [Ondřej, 2002]. Řešíme více příkladů pro různé volby poddajnosti stěn zvukovodu. Podle čehož vybíráme i z několika způsobů parametrizace oblasti.

Struktura práce

Tato práce se skládá z sedmi kapitol. Tento text je součástí právě první úvodní kapitoly.

V druhé kapitole vysvětlíme rovnice popisující šíření akustického tlaku prostředím - kontinuem akustické tekutiny. Při hledání monochromatické řešení odvodíme Helmholtzovu rovnici [Škvor, 2001] s vhodnými okrajovými podmínkami [E. Bängtsson, 2002].

V třetí kapitole představíme rovnice kontinua desky dle Reissnerovy-Mindlinovy teorie [Rohan Eduard, 2015] pro monochromatického zatížení.

Náplní čtvrté kapitoly je sjednocení kapitol druhé a třetí. Definujeme problém vibroakustiky, tedy interakci akustické tekutiny a poddajné vibrující desky. Zde aplikujeme dvě transmisní podmínky mezi tekutinou a deskou [Rohan Eduard, 2015].

Ve páté kapitole formulujeme úlohu tvarové optimalizace zvukovodu ve vibroakustice. Představíme modelovaný design oblasti. Představíme dva zástupce vhodných účelových funkcí, kdy se budeme soustředit na funkci neprozvučnosti. V rámci této kapitoly rozlišujeme tři podkapitoly. Nejprve celou hranici uvažujeme jen jako rigidní. V druhé podkapitole už pracujeme s designovatelnou deskou na hranici a konečně ve třetí provedeme zjednodušení, kdy máme na hranici jen nedesignovatelnou desku. Definujeme postupně optimalizační úlohu. Provedeme citlivostní analýzu, viz [Eduard, 2012],[Rohan Eduard, 2011a] a [Rohan Eduard, 2011b]. Zparametrizujeme design pomocí Spline-boxu, viz [Eduard, 2007]. Optimalizační úloze přiřadíme Lagrangeovu funkci a posléze přejdeme k řešení adjungované

úlohy. Následně představíme implementaci optimalizace v systému *SfePy* [Robert, 2016]. Další zdroje v této kapitole byly [B. Engquist, 1977],[D. Cioranescu, 2008],[Haslinger J., 1996],[Rohan Eduard, 2006].

V šesté kapitole provedeme řadu optimalizačních výpočtů pro 3D oblast zvukovodu. V předchozích kapitolách jsme odvodili a definovali nástroje potřebné pro úspěšné provedení optimalizačních úloh pro tři případy - případ s rigidní hranicí, případ s nedesignovatelnou deskou a designovatelnou deskou. Představíme několik řešení, která vizualizujeme v softwaru ParaView [Kitware, 2013]. Některé tyto výsledky ke konci kapitoly diskutujeme a vyhodnocujeme.

Na závěr uvedeme stručné shrnutí celé práce a jejích výsledků.

2 Problém akustiky

Zde se seznámíme s odvozením rovnic potřebných k získání rovnice popisující šíření akustického tlaku prostředím. Odvodíme si Eulerovu pohybovou rovnici, rovnici kontinuity a stavovou rovnici. Za dalších předpokladů z těchto rovnic určíme tvar vlnové rovnice v kartézských souřadnicích. Při hledání monochromatického řešení vlnové rovnice pro danou frekvenci odvodíme Helmholtzovu rovnici, která popisuje stojaté vlnění [Škvor, 2001]. Dále formulujeme slabou formulaci Helmholtzovy rovnice [Stanislav, 2007]. Z úvah o šíření akustických vln si odvodíme okrajové podmínky na hranic [E. Bängtsson, 2002].

2.1 Rovnice akustiky

2.1.1 Úvodem

V tekutém prostředí je zvuk vyvolán změnami, které v čase a prostoru způsobí změny tlaku, hustoty a kmitání jednotlivých částic prostředí s lokálními výchylkami $\mathbf{x} = x_i = (x_1, x_2, x_3)$ a rychlostmi $\mathbf{v} = v_i = (v_1, v_2, v_3)$. O prostředí předpokládáme, že je stlačitelné, spojitě, homogenní, izotropní a neviskózní. Výchylky částic podle našeho předpokladu jsou malé a všechny sledované jevy považujeme za lineární [Škvor, 2001],[Linhart, 2009].

V nepohybujícím se (proudícím) prostředí je akustické pole popsáno vektory akustických rychlostí jednotlivých částic. V prostředí s uvažováním pohybu částic je vyjádření složitější o složku proudění a pohyb popisujeme Lagrangeovými nebo Eulerovými proměnnými. V této práci nebudeme dále proudění částic uvažovat.

Akustické pole pokládáme na nevírové, a tak se musí platit

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

kde $\nabla = \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ značí vektor derivací podle jednotlivých složek. Výjimku tvoří případy velkých rychlostí u reálných plynů a kapalin, kdy se uplatňuje vliv viskozity. Vektorové pole lze rozdělit na dvě složky, na složku nevírovou \mathbf{v}^n a vírovou (rotační) \mathbf{v}^r .

$$v_i = v_i^n + v_i^r \quad (2.2)$$

Pro nevírovou složku tedy platí $\nabla \times \mathbf{v}^n = 0$, ale divergence je nenulová $\nabla \cdot \mathbf{v}^n \neq 0$. Na základě těchto předpokladů zavedeme skalární funkci ϕ [$m^2 s^{-1}$]. Nazveme ji *rychlostním potenciálem*, jehož gradient je roven rychlosti v_i^n [ms^{-1}]

$$\nabla \phi = v_i^n . \quad (2.3)$$

Podle předpokladu je pole rychlostí nevírové, a tedy platí

$$\begin{aligned} v_i &= v_i^n = \nabla \phi \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v}^n \neq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

S těmito výše definovanými předpoklady přejdeme k odvození vlnové rovnice, kdy vyjdeme z pohybové (Eulerovy) rovnice, rovnice kontinuity (spojitosti) a stavové rovnice.

2.1.2 Eulerova rovnice

Eulerova rovnice je pohybová rovnice pro proudění, která zanedbává tření a vazkost. Odvození provedeme pro elementární krychli o objemu $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Vyjdeme ze známého D'Alembertova principu, který říká, že v každém okamžiku je soustava vnitřních a vnějších sil v rovnováze

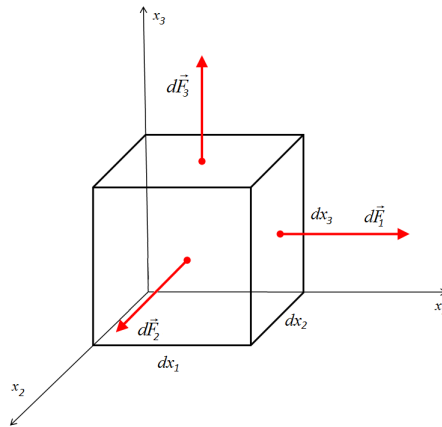
$$dm a_i = dF_i,$$

kde levá strana reprezentuje vnitřní (setrvačné) síly a pravá vnější síly působící na element. Pro zrychlení \mathbf{a} [ms^{-2}] platí

$$a_i = \frac{dv_i}{dt}. \quad (2.5)$$

Elementární krychle má hmotnost dm a tekutina v ní hustotu ρ [$kg m^{-3}$]

$$dm = \rho dV.$$

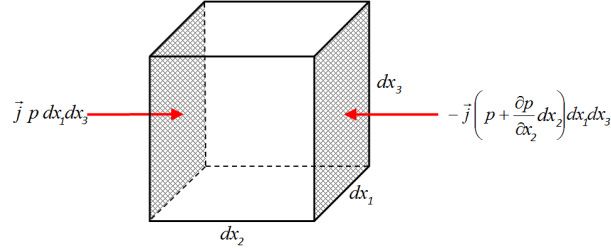


Obrázek 2.1: Síly působící na elementární krychli

Celková setrvačná síla $d\mathbf{F}^s$ působící na elementární krychli působí po složkách ve směrech souřadných os

$$dF_i^s = dm \frac{dv_i}{dt}, \quad (2.6)$$

V kartézských souřadnicích je akustický tlak p [Pa] funkcí času t a prostorových proměnných x_i . Takže $p = p(t, \mathbf{x})$. Předpokládejme podle obr.(2.2), že na protilehlých ploškách elementární krychle kolmých na osu y působí akustické tlaky p a proti $p + \frac{\partial p}{\partial y_2} dx_2$.



Obrázek 2.2: Tlak na elementární krychli

Tlakové síly působící na elementární plošku $dx_1 dx_3$ představují účinek okolní tekutiny nacházející se vně elementární krychle. Výsledná síla ve směru osy y je rovna výslednici povrchových sil působících na protilehlých stěnách

$$\begin{aligned} dF_2 &= \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x_2} dx_2 \right) \right] dx_1 dx_3 \\ dF_2 &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} dV . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Podobně se odvodí ostatní složky

$$dF_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} dV . \quad (2.8)$$

Výsledná vnější síla $d\mathbf{F}^v$ se tedy rovná

$$dF_i^v = -\frac{\partial p}{\partial x_i} dV . \quad (2.9)$$

Z D'Alembertova principu musí platit $dF_i^v = dF_i^s$. Dosadíme tedy z (2.9) a (2.6)

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} ,$$

$$\boxed{-\nabla p = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} . \quad (2.10)$$

Rovnice (2.10) je *Eulerova rovnice dynamiky ideální tekutiny* bez přihlížení k jejímu proudění a působení vnějších sil z jejího okolí.

2.1.3 Rovnice kontinuity

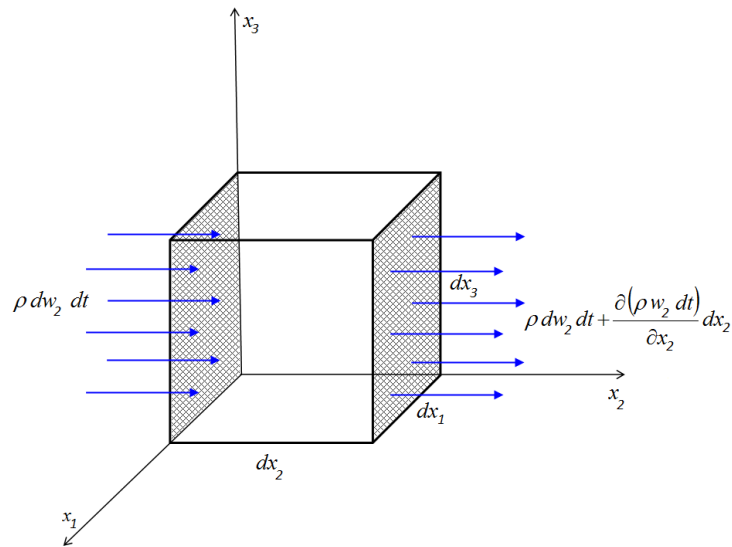
Další z rovnic je rovnice kontinuity vyjadřující zákon zachování hmoty. Budeme uvažovat podle obr.(2.3) elementární objem. Předpokládejme, že podél osy y v kladném smyslu vtéká a vytéká tekutina ploškami dx, dz . Hmotnost přitékající tekutiny za dt je

$$\rho v_y dx dz dt = \rho dw_y dt . \quad (2.11)$$

kde $w_y [m^3s^{-1}]$ je průtoková rychlost ve směru osy y . Hmotnost vytékající tekutiny za dt je

$$\rho dw_y dt + \frac{\partial(\rho dw_y dt)}{\partial y} dy = \rho dw_y dt + \frac{\partial(\rho v_y dt)}{\partial y} dV . \quad (2.12)$$

Jde říci, že vyteče z elementární krychle o diferenciální hmotnost více než vteklo. Obdobně



Obrázek 2.3: Průtok elementární krychlí

tento rozdíl určíme pro proudění podél zbylých os x a z . Ve směru každé osy x, y, z přibude tedy diferenciální hmotnost

$$\frac{\partial(\rho v_i dt)}{\partial x_i} dV \quad i = 1, 2, 3 . \quad (2.13)$$

Fakt, že víc hmotnosti odeče než vteče, se musí projevit poklesem hustoty v elementárním objemu. Čas dt a elementární objemy dV se zkrátí

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i dt)}{\partial x_i} dV &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

V lineární akustice uvažujeme v celém objemu tekutiny ve stejném čase hustotu ρ konstantní, kdy

$$\rho = \rho_0 + \rho' , \quad (2.15)$$

kde odchylky ρ' od střední hustoty ρ_0 jsou velmi malé. Proto můžeme celou rovnici vydělit ρ_0 a získám tím *rovnici kontinuity* ve zjednodušeném tvaru

$$\boxed{\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}} . \quad (2.16)$$

2.1.4 Stavová rovnice

Termodynamické chování plynu je popsáno vzájemnou souvislostí tlaku p [Pa], hustoty ρ [$kg\ m^{-3}$] a teploty T [K]. Stavová rovnice ideálního plynu má tvar

$$p = \rho r T , \quad (2.17)$$

kde r [$Jkg^{-1}K^{-1}$] je měrná plynová konstanta. Jevy probíhající v akustice jsou zpravidla tak rychlé, že nedochází ke sdílení tepla, neboli $dQ = 0$, a děje se stávají adiabatickými. Při nízkých kmitočtech jsou změny pomalé a termodynamické chování plynu se blíží izotermickému ději, tedy ději, který probíhá při $T = konst.$ V těchto případech je hustota plynu pouze funkcí tlaku $\rho = \rho(p)$ a hovoříme o barotropním ději.

Pro izotermickou stavovou změnu platí podle Boyleova-Mariottova zákona

$$\frac{p}{\rho} = konst . \quad (2.18)$$

Pro adiabatickou stavovou změnu platí Poissonova rovnice pro tlak a objem

$$p V^\kappa = konst . \quad (2.19)$$

Objem je tedy přibližně nepřímo úměrný hustotě $V \sim \rho^{-1}$. Pak můžeme zapsat

$$p \rho^{-\kappa} = konst , \quad (2.20)$$

kde konstanta κ je poměr měrné tepelné kapacity plynu při stálém tlaku c_p a stálém objemu c_v

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} . \quad (2.21)$$

Podle adiabatického děje popsaného v (2.20) jsou hustota ρ a tlak p v určitém místě závislé na čase, a tak lze stanovit závislost časové změny tlaku na změně hustoty

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} \rho^{-\kappa} - \kappa p \rho^{-\kappa-1} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\kappa p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pokud uvažujeme tlak p a hustotu ρ jako superpozici klidových hodnot p_0, ρ_0 a změn p', ρ'

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p'. \quad (2.23)$$

A předpokládáme $p' \ll p_0, \rho' \ll \rho_0$. Potom přepíšeme rovnici (2.22) a získáme *stavovou rovnici*

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}}. \quad (2.24)$$

2.1.5 Vlnová rovnice v kartézských souřadnicích

V předchozích odstavcích jsme odvodili tři rovnice, které využijeme ke stanovení vlnové rovnice. Jde o Eulerovo pohybovou rovnici (2.10), rovnici kontinuity (2.16) a stavovou rovnici (2.24)

$$-\nabla p = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Podle dřívějšího předpokladu je $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Místo rychlosti \mathbf{v} zavedeme rychlostní potenciál ϕ . Dosadíme do rovnice (2.10)

$$\nabla p = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) = -\rho_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (2.25)$$

a dále po úpravě

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + konst. \quad (2.26)$$

V rovnici (2.16) také přejdeme k rychlostnímu potenciálu a dostaneme

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Zavedeme Laplaceův operátor

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] \phi.$$

Pak rovnice dostane tvar

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Rovnici (2.26) zderivujeme podle času

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

a pak dáme v rovnost pravou stranu (2.29) s pravou stranou z (2.24)

$$\begin{aligned}\frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\rho_0}{\kappa p_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (2.30)$$

Do (2.30) dosadíme z (2.28) a konečně získáme *vlnovou rovnici pro rychlostní potenciál* ϕ

$$\Delta \phi = \frac{\rho_0}{\kappa p_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

Dále využijeme toho, že známe vzorec pro výpočet rychlosti zvuku c_0 prostředím

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}.$$

Rovnice (2.31) po dosazení za rychlost zvuku vypadá následovně

$$\boxed{\Delta \phi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}}. \quad (2.32)$$

Uvedeným způsobem můžeme ze tří základních rovnic stanovit též *vlnovou rovnici pro akustický tlak*. Aplikujeme na vztah (2.10) operátor divergence

$$-\nabla \cdot \nabla p = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

a dosadíme z (2.16)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla p &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \\ \Delta p &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Z rovnice (2.24) určíme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \frac{\rho_0}{\kappa p_0} &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení z předchozí rovnice dostaneme *vlnovou rovnici pro akustický tlak* p , kde opět dosadíme ze vztahu pro rychlost zvuku

$$\boxed{\Delta p = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}}. \quad (2.33)$$

2.1.6 Helmholtzova rovnice

Při odvození Helmholtzovy rovnice (HR) uvažujeme monochromatické časově harmonické řešení pro danou frekvenci ω . Celkové řešení vlnové rovnice 2.32 předpokládáme ve tvaru

$$\phi(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad (2.34)$$

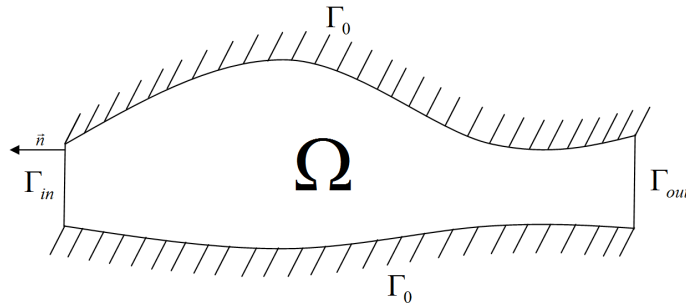
Dosadíme do (2.20). Po zkrácení $e^{i\omega t}$ dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned} \omega^2 p + c^2 \Delta p &= 0 \\ \Delta p + \kappa^2 p &= 0, \end{aligned}} \quad (2.35)$$

kde $\kappa = \omega/c$ [s/m] je vlnové číslo. Tím jsme získali *Helmholtzovu rovnici*, která popisuje šíření vlnění ve třech dimenzích.

2.2 Okrajové podmínky

K odvození okrajových podmínek využijeme oblast Ω viz obr.(2.4), kde vyšetřujeme akustický tlak p . Hranici označíme $\partial\Omega$. Platí $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0$, kde Γ_{in} je hranice vstupu incidenční vlny. Výstup z Ω představuje Γ_{out} . Zbývající hranici označíme Γ_0 . Půjde o pevnou, dokonale odrazivou překážku. \vec{n} je vnější jednotkový normálový vektor hranice $\partial\Omega$, [E. Bängtsson, 2002].



Obrázek 2.4: Obecná oblast Ω se vstupní hranicí Γ_{in} , výstupní Γ_{out} a dokonale odrazivou Γ_0

V praktických výpočtech je často dobré použít umělé okrajové podmínky, které omezí oblast výpočtu. Na Γ_{in} , kde vniká incidenční vlna do oblasti Ω , by měla být určena její amplituda, zatímco odchozí, odražená vlna, by měla zůstat nepoznamenána. Necht' \vec{x} popisuje

prostorové souřadnice. Předpokládáme, že monochromatické rovinné vlny, procházející Γ_{in} , můžeme zapsat ve tvaru

$$p(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} + B e^{i(-\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} \quad , \quad A, B \in \mathbb{C} \quad , \quad (2.36)$$

kde první člen odpovídá incidenční vlně a druhý vlně odražené. Skalární součin vektorů $\vec{x} \cdot \vec{n} = n$ je vlastně průmět \vec{x} do \vec{n} . Derivováním rovnice (2.36) dostaneme

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Ai\omega e^{i(\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} + Bi\omega e^{i(-\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} \quad , \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = Ai\kappa e^{i(\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} - Bi\kappa e^{i(-\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} \quad , \quad (2.38)$$

kde $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \nabla p$ popisuje derivaci ve směru vnější normály. Sečtením (2.37) a (2.38) vynásobenou c a využitím $\omega = \kappa c$ získáme okrajovou podmínku na Γ_{in}

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial n} = 2i\omega A e^{i(\kappa \vec{x} \cdot \vec{n} + \omega t)} \quad . \quad (2.39)$$

Podmínka (2.39) je splněna pro každou vlnu typu (2.36), a může tedy být použita k nastavení amplitudy A incidenční vlny bez vlivu na amplitudu B vlny odražené. Vhodnou absorpční okrajovou podmínku na Γ_{out} je radiační podmínka prvního stupně [B. Engquist, 1977]. Jinou možností je předpoklad, že na výstupu není žádná incidenční vlna, a tedy $A = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad . \quad (2.40)$$

Tato podmínka nezpůsobí odraz vln na hranici Γ_{out} jdoucích přímo přesně ve směru normály. Na zbylých hranicích Γ_0 předpokládáme akustický tuhý materiál, takže uvažujeme podmínku

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad . \quad (2.41)$$

Pokud chceme řešit úlohu pro danou frekvenci, uvažujeme řešení (2.34) jako v kapitole, kde jsme Helmholtzovu rovnici odvodili. Dosadíme do okrajových podmínek za p . Po zkrácení $e^{i\omega t}$ a za předpokladu, že na Γ_{in} je v $\vec{x} = 0$ získáme okrajové podmínky

$$\boxed{\begin{aligned} c \frac{\partial p}{\partial n} + i\omega p &= 0 \quad \forall p \in \Gamma_{out} \quad , \\ c \frac{\partial p}{\partial n} + i\omega p &= 2i\omega A \quad \forall p \in \Gamma_{in} \quad , \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \quad \forall p \in \Gamma_0 \quad . \end{aligned}} \quad (2.42)$$

2.3 Slabé formulace rovnic akustiky

Při odvození slabého řešení, viz [Stanislav, 2007], vyjdeme z HR (2.35) pro akustický tlak $p = p(x)$. Kde κ je vlnové číslo, ω je úhlová frekvence a c je rychlost šíření vlny prostředím (v tomto případě jde o rychlost ve vzduchu), pro které platí $\kappa = \omega/c$. HR celou vynásobíme testovacím tlakem q , kde $q \in \mathbb{Q}$, kde $\mathbb{Q} = H^1(\Omega)$ je množina všech přípustných tlaků, které vyhovují okrajovým podmínkám (2.42)

$$\nabla^2 p q + \kappa^2 p q = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}. \quad (2.43)$$

Celou rovnici integrujeme přes oblast Ω

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p q \, d\Omega + \int_{\Omega} \kappa^2 p q \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}. \quad (2.44)$$

Využijeme jedné z Greenových vět a získáme

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p q \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \nabla q \nabla p \, d\Omega. \quad (2.45)$$

Dosadíme (2.45) do (2.44) a dostaneme

$$\int_{\Omega} \kappa^2 p q \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} q \frac{\partial p}{\partial n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \nabla q \nabla p \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}. \quad (2.46)$$

Po dosazení okrajových podmínek (2.42) do (2.46) dostaneme tento tvar slabého řešení

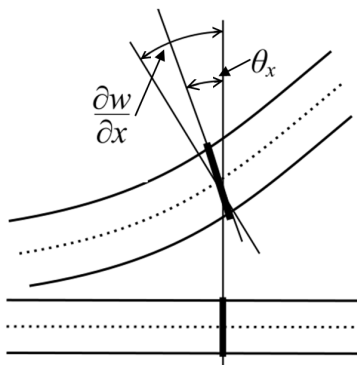
$$\boxed{\int_{\Omega} \nabla q \nabla p \, d\Omega - \kappa^2 \int_{\Omega} p q \, d\Omega - \int_{\Gamma_{in}} (2i\kappa A - i\kappa p) q \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{out}} i\kappa p q \, d\Gamma = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}}. \quad (2.47)$$

3 Problém modelování desek podle Reissnerovy-Mindlinovy teorie

V této kapitole si představíme slabou formulaci rovnice desky odvozenou dle Reissnerovy-Mindlinovy (RM) teorie [Rohan Eduard, 2015]. Uvažováním opět monochromatického buzení daného jednou frekvencí získáme slabou formulaci RM desky, která koreluje s rovnicí kavity z minulé kapitoly.

3.1 Rovnice desek podle RM teorie

Reissnerova-Mindlinova teorie desek je rozšíření Kirchhoffovo–Loveovo (KL) teorie, kdy RM desky se odlišují tím, že uvažují stříhové deformace napříč průřezem desky. RM teorie je určena pro tlusté desky, kde se uvažuje průřez vždy rovinný ale ne nutně kolmý k střední rovině. Připouští deformaci způsobenou pootočením průřezu vůči kolmici na střední rovinu viz obr. (3.1)



Obrázek 3.1: RM teorie desky; rotace průřezu vůči normále ke střední rovině

RM teorie se používá k vypočtení deformací a napětí v deskách, jejichž tloušťka je alespoň v poměru jedna desetina vůči ostatním dimenzím, zatímco KL teorie je dostačující pro desky tenčí než tento poměr.

Posuvy v rovině desky popíšeme vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Průhyb desky označíme w a pootočení desky vektorem $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$. Neznámé uvažujeme dohromady ve vektoru $\mathbf{x} := (\mathbf{u}(x, t), w(x, t), \boldsymbol{\theta}(x, t))$, $(x, t) \in \Gamma \times]0, T[$. Tečné síly v rovině desky jsou označeny vektorem $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$, síla působící kolmo na desku f a momenty $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$.

Parametry desky jsou hustota desky ρ , vzdálenost od střední roviny h (celková tloušťka desky je $2h$). Modul pružnosti v ohybu je G a $\gamma = 5/6G$ je ohybový korekční faktor. \mathcal{C}

je symetrický tenzor elasticity čtvrtého řádu a platí tedy $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ikjl}$. Desku uvažujeme jako izotropní materiál, který je charakterizován dvěma Laméovými koeficienty λ a μ takto

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) . \quad (3.1)$$

Dále zde využíváme Cauchyho deformačního tensoru

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

Uvažujeme vetknutí podél celé hranice desky

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad w = 0, \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Gamma. \quad (3.3)$$

V článku [Rohan Eduard, 2015] jsou odvozeny rovnice rovnováhy pro RM desku

$$\begin{aligned} h\rho\ddot{\mathbf{u}} - h(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) &= \mathbf{t} \\ h\rho\ddot{w} - h(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(w, \boldsymbol{\theta})) &= f \\ \frac{h^3}{3}\rho\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{h^3}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta})) - h(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(w, \boldsymbol{\theta})) &= \mathbf{m} , \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde časovou derivaci značíme tečkou $(\ddot{}) = \partial^2()/\partial t^2$, $\boldsymbol{\tau}(w, \boldsymbol{\theta})$ je napětí od rotace průřezu vůči kolmici na střední rovinu, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta})$ je normálové napětí od ohybu desky, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ je normálové napětí od zatížení v rovině desky.

Můžeme dosadit z konstitutivních vztahů pro napětí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(w, \boldsymbol{\theta}) &:= \gamma(\nabla w - \boldsymbol{\theta}), \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}) &:= \mathbf{C}\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}), \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &:= \mathbf{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pro množinu funkcí \mathbb{X} , do které \mathbf{x} náleží, platí $\mathbb{X} = H_0^1(\Gamma \times]0, T])^5$. K vektoru neznámých zavedeme vektor testovacích funkcí $\mathbf{y} =: (\mathbf{u}, z, \boldsymbol{\psi})$ z množiny funkcí $\mathbb{X}_0 \equiv \mathbb{X}$. Pak zapíšeme slabé řešení evolučního problému

$$\begin{aligned} h \int_{\Gamma} E \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + h\gamma \int_{\Gamma} (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) \cdot (\nabla z - \boldsymbol{\psi}) + \frac{h^3}{3} \int_{\Gamma} E \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}) : \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}) + \\ + \int_{\Gamma} \rho \left(h\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + h\ddot{w}z + \frac{h^3}{3}\ddot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) = \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + fz + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{X}_0 , \end{aligned} \quad (3.6)$$

kde integrál na pravé straně popisuje zatížení desky.

Nyní přejdeme k hledání monochromatického řešení RM desky. Uvažujeme harmonického buzení o konkrétní frekvenci ω

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(x, t) &= \mathbf{t}(x) \exp(i\omega t), \\ f(x, t) &= f(x) \exp(i\omega t), \\ \mathbf{m}(x, t) &= \mathbf{m}(x) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Řešení předpokládáme periodické se stejnou frekvencí

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{u}(x) \exp(i\omega t), \\ w(x, t) &= w(x) \exp(i\omega t), \\ \boldsymbol{\theta}(x, t) &= \boldsymbol{\theta}(x) \exp(i\omega t).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Ve výsledku získáme upravenou slabou formulaci úlohy pro monochromatické buzení frekvencí ω

$$\boxed{\begin{aligned}h \int_{\Gamma} E \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + h\gamma \int_{\Gamma} (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) \cdot (\nabla z - \boldsymbol{\psi}) + \frac{h^3}{3} \int_{\Gamma} E \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}) : \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}) + \\ -\rho\omega^2 \int_{\Gamma} \left(h\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + hwz + \frac{h^3}{3} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) = \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + fz + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Y},\end{aligned}}\tag{3.9}$$

kde \mathbf{x} náleží $\mathbb{X} = H_0^1(\Gamma)^5$ a $\mathbf{y} =: (\mathbf{u}, z, \boldsymbol{\psi})$ z množiny funkcí $\mathbb{X}_0 \equiv \mathbb{X}$, za předpokladu vetknutí desky podél celého jejího okraje.

3.2 Timošenkův nosník ve 2D

Timošenkův nosník lze považovat za speciální případ Reissner-Mindlin desky (3.6). Toto zjednodušení chápeme jako řez zalomenou deskou v rovině $\hat{x}\hat{y}$.

Výchozí slabou formulaci lze získat přímo z (3.6), kdy hledáme stacionární řešení, tedy bez působení setrvačných účinků, v oblasti Γ .

Nejdříve provedeme zjednodušení (3.6) na náš specifický 1D případ. Následně dosadíme z Hookeova zákona a získáme

$$h(\lambda + 2\mu) \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{\Gamma} = \langle t, v \rangle_{\Gamma} \quad \forall v \in \mathbb{V},\tag{3.10}$$

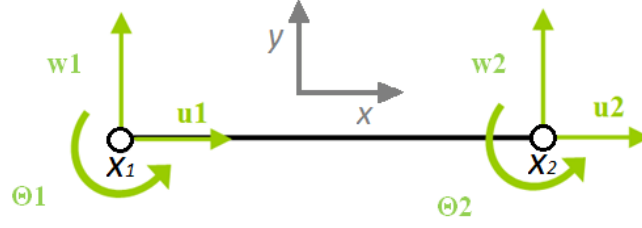
$$h\gamma \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right\rangle_{\Gamma} - h\gamma \left\langle \theta, \frac{\partial z}{\partial x} \right\rangle_{\Gamma} = \langle f, z \rangle_{\Gamma} \quad \forall z \in \mathbb{Z},\tag{3.11}$$

$$-h\gamma \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle_{\Gamma} + h\gamma \langle \theta, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma} + \frac{h^3}{3} (\lambda + 2\mu) \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x} \right\rangle_{\Gamma} = \langle m, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma} \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{P},\tag{3.12}$$

kde $\mathbb{V}, \mathbb{Z}, \mathbb{P} = H_0^1(\Gamma)$ jsou množiny funkcí respektujících okrajové podmínky.

3.2.1 MKP diskretizace Timošenkova nosníku

Soustavu slabých řešení (3.10), (3.11) a (3.12) diskretizujeme pomocí MKP na konečný počet nosníkových 1D prvků, viz obr. (3.2)



Obrázek 3.2: Použitý nosníkový element

Odvodíme matici tuhosti elementu předpokládanou ve tvaru

$$\mathbb{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

kde \mathbb{A}_e (6×6) je matice tuhosti elementu. Dále označíme $\mathbf{x} := [\theta_1, \theta_2, w_1, w_2, u_1, u_2]^T$ jako vektor neznámých a $\mathbf{b} := [m_1, m_2, f_1, f_2, t_1, t_2]^T$ jako vektor zatěžujících účinků v uzlech elementu nosníku.

Uvažujeme vektor tvarových funkcí

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Jeho parciální derivace podle x je

$$\mathbf{N}_x^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{x_2 - x_1}. \quad (3.15)$$

Pak pomocí \mathbf{N} a \mathbf{N}_x aproximujeme neznámé hodnoty řešení

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta} \\ u(x) &= \mathbf{N}^T \mathbf{u} \\ w(x) &= \mathbf{N}^T \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.16)$$

a obdobně pro testovací funkce.

Dosadíme do (3.10), (3.11) a (3.12) a integrujeme přes jeden element s hraničními uzly x_1 a x_2

$$h(\lambda + 2\mu) \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{v}^T \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \mathbf{u} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{v}^T \mathbf{N} \mathbf{t} \quad \forall v \in \mathbb{V}, \quad (3.17)$$

$$h\gamma \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{z}^T \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \mathbf{w} - h\gamma \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{z}^T \mathbf{N}_x \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{z}^T \mathbf{N} \mathbf{f} \quad \forall z \in \mathbb{Z}, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
 -h\gamma \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{N} \mathbf{N}_x^T \mathbf{w} + h\gamma \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{N} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta} + \frac{h^3}{3} (\lambda + 2\mu) \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \boldsymbol{\theta} = \\
 = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{N} \mathbf{m} \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{P}, \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

kde uvažujeme testovací funkce \mathbf{v} , \mathbf{z} , $\boldsymbol{\psi}$ nezávislé.

Klasicky integrujeme přes interval $[x_1, x_2]$ a pro síly $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ působící jen v uzlech elementu získáme

$$h(\lambda + 2\mu) \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \mathbf{u}(x_2 - x_1) = \mathbf{t} \quad , \quad (3.20)$$

$$h\gamma \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \mathbf{w}(x_2 - x_1) - h\gamma \mathbf{N}_x \bar{\mathbf{N}}^T \boldsymbol{\theta} = \mathbf{f} \quad , \quad (3.21)$$

$$-h\gamma \bar{\mathbf{N}} \mathbf{N}_x^T \mathbf{w} + h\gamma \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\theta} + \frac{h^3}{3} (\lambda + 2\mu) \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \boldsymbol{\theta}(x_2 - x_1) = \mathbf{m} \quad , \quad (3.22)$$

kde zintegrovaný součin dvou vektorů bázevých funkcí označíme

$$\tilde{\mathbf{N}} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T = \frac{1}{3(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (3.23)$$

a integrál jedné samotné bázevé funkce

$$\bar{\mathbf{N}} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N} = \frac{x_2 - x_1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.24)$$

Nyní můžeme určit jednotlivé submatice matice \mathbb{A}_e jako

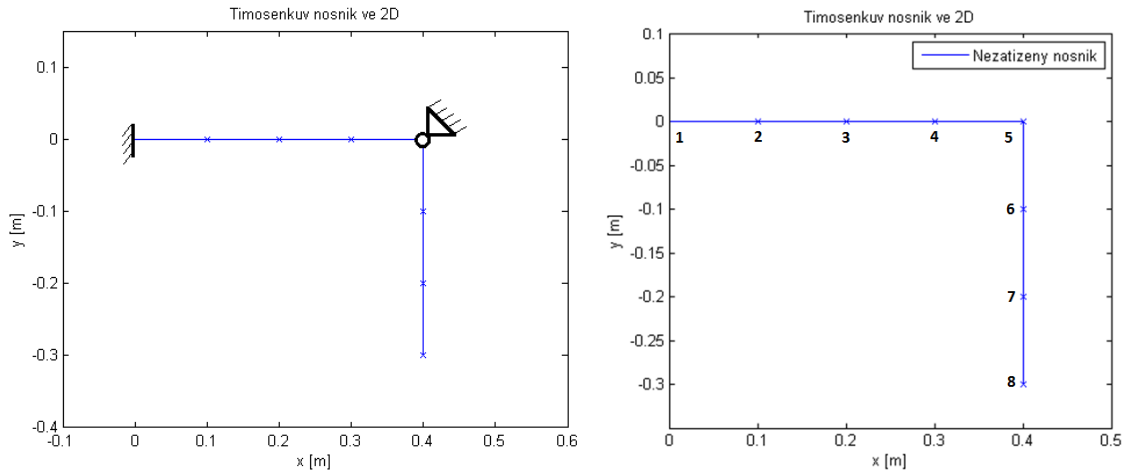
$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{11} &= h\gamma \tilde{\mathbf{N}} + \frac{h^3}{3} (\lambda + 2\mu) \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T (x_2 - x_1) \quad , \\
 \mathbb{A}_{21} &= -h\gamma \bar{\mathbf{N}} \mathbf{N}_x^T \quad , \\
 \mathbb{A}_{12} &= -h\gamma \bar{\mathbf{N}} \mathbf{N}_x^T \quad , \\
 \mathbb{A}_{22} &= h\gamma \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T (x_2 - x_1) \quad , \\
 \mathbb{A}_{33} &= h(\lambda + 2\mu) \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T (x_2 - x_1) \quad .
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Získáme tedy matice tuhosti \mathbb{A}_e jednotlivých elementů, jejichž prvky přičteme ve smyslu MKP do globální matice \mathbb{A} s využitím lokalizační tabulky, která obsahuje informaci o vztahu mezi lokálními a globálními stupněmi volnosti.

3.2.2 Příklad řešení Timošenkova nosníku pomocí MKP

Pomocí odvozených vztahů, viz předchozí kapitola (3.2.1), jsme provedli MKP numerický výpočet zatížení zahnutého Timošenkova nosníku ve 2D v Matlabu [MathWorks, 2013].

Geometrie a model nezatíženého nosníku vypadají následovně



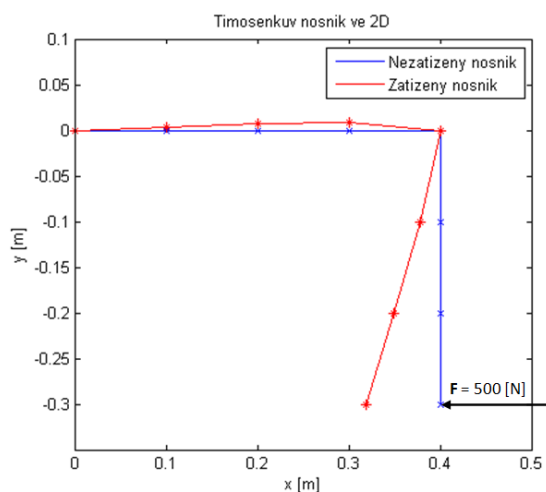
Obrázek 3.3: *Nalevo*: Znázorněné rozměry a okrajové podmínky; *Napravo*: Číslo uzlů MKP diskretizace

Dle obr.(3.3) uvažujeme lomený nosník sestávající z několika přímých úseků, kdy je vetknutý na jednom konci - uzel č. 1 a s kloubovým uložením v místě zlomu - uzel č. 5.

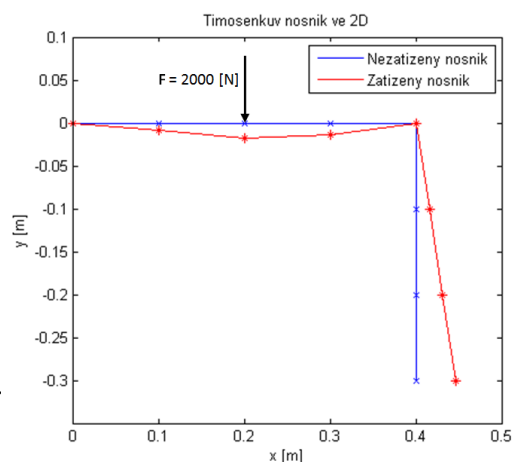
$$\begin{aligned}\rho &= 7850 \text{ [kg/m}^3\text{]} \\ E &= 2.1e11 \text{ [Pa]} \\ \nu &= 0.3 \text{ [-]} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ [Pa]} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ [Pa]} \\ h &= 0.01 \text{ [m]} \\ G &= \mu \text{ [Pa]} \\ \gamma &= \frac{5}{6}G \text{ [Pa]}\end{aligned}$$

Diskretizujeme nosník dle MKP na 7 elementů a 8 uzlů s celkem 24 stupni volnosti, kdy v každém uzlu vyčísľujeme tři neznámé: u - posuv ve x -ovém směru, w - posuv v y -ovém směru a θ - pootočení okolo osy z .

Zatěžovali jsme nosník osamělou silou F , viz obr. (3.4) a (3.5), a silovou dvojicí M v osmém a třetím uzlu, viz obr. (3.6) a (3.7). Je také třeba zdůraznit, že zobrazené deformace byly kvůli názornosti zvětšeny $1e4$ -krát.

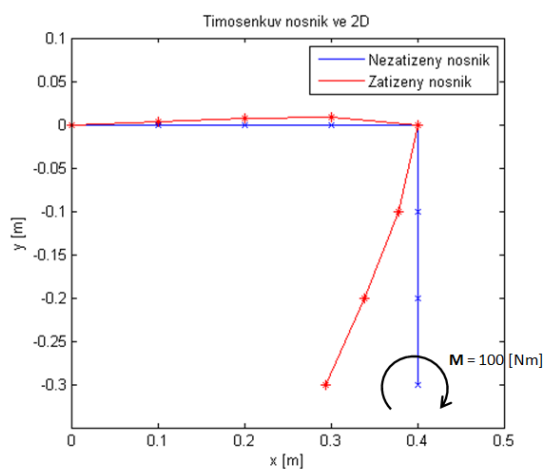


Obrázek 3.4: Zatížení osamělou silou na osmém uzlu v $-x$ -ovém směru

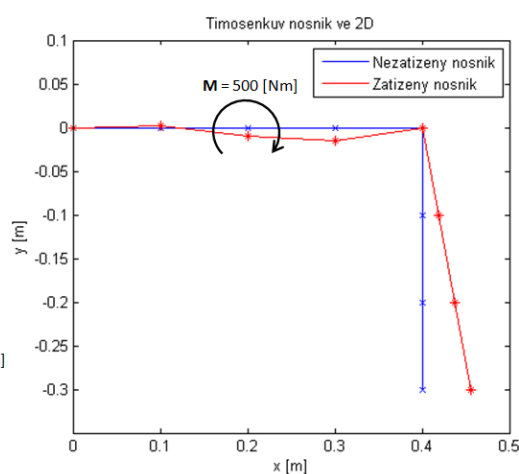


Obrázek 3.5: Zatížení osamělou silou na třetím uzlu v y -ovém směru

Jako další zatížení jsme zvolili dvojici sil M opět na osmém a třetím uzlu.



Obrázek 3.6: Zatížený nosník na osmém uzlu silovou dvojicí



Obrázek 3.7: Zatížený nosník na třetím uzlu silovou dvojicí

Ze znázorněných řešení na obr. (3.4), (3.5), (3.6) a (3.7) lze usoudit, že námi modelovaný Timošenkův nosník se chová logicky a respektuje námi definované okrajové podmínky.

4 Problém vibroakustiky

Náplní čtvrté kapitoly je sjednocení kapitoly druhé a třetí. Definujeme problém vibroakustiky, tedy interakce akustické tekutiny a poddajné desky. Zde aplikujeme dvě transmisní podmínky mezi tekutinou a deskou [Rohan Eduard, 2015]. První říká, že rychlost tekutiny ve směru normály desky musí být shodná s rychlostí desky také ve směru této normály. Obdobně druhá podmínka tvrdí, že musí platit shodnost normálové složky napětí v tekutině s napětím na povrchu desky. Z těchto transmisních podmínek odvodíme dva vztahy propojující rovnici kavity a rovnici desky.

4.1 Transmisní podmínky na hranici styku poddajné desky s akustickou tekutinou

Uvažujeme oblast Ω vyplněnou akustickou tekutinou. Nazveme ji akustickou kavitou. Část hranice $\partial\Omega$ definujeme jako poddajnou desku a označíme ji Γ_P . Uvažujeme buzení harmonické pro danou určitou frekvenci ω viz předchozí kapitoly.

Je třeba definovat veličiny, které ovlivňují interakci mezi deskou na Γ_P a akustickou kavitou Ω . Potřebujeme znát hodnotu skutečného tlaku p_s , který reálně zatěžuje poddajnou desku. Pro p_s platí vztah

$$p_s = i\omega\rho_0 p, \quad (4.1)$$

kde i je imaginární jednotka, ω je úhlová frekvence incidenční zvukové vlny v Ω , ρ_0 střední (průměrná) hustota akustické tekutiny a p je akustický tlak.

Definujeme obecnou výchylku desky $\mathbf{x}^p = \mathbf{x}^p(t) = x_k^p(t)$, kde $k = 1, 2, 3$ a exponent p značí, že jde o desku (plate). Uvažujeme-li harmonické buzení pro danou frekvenci, tak platí

$$\begin{aligned} x_k^p(t) &= e^{i\omega t} x_k^p \\ \dot{x}_k^p(t) &= i\omega e^{i\omega t} x_k^p \\ v_k^p(t) &= e^{i\omega t} v_k^p. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pokrácením exponenciály z předchozího výrazu získáme komplexní vektor amplitud rychlostí desky \mathbf{v}^p v reakci na zatížení s konkrétní frekvencí ω .

Při odvození okrajových podmínek na Γ_P vyjdeme ze splnění dvou transmisních podmínek.

- Rychlost desky \mathbf{v}^p ve směru jednotkového normálového vektoru \mathbf{n} k rovině desky musí být v každém bodě shodná s rychlostí akustické tekutiny \mathbf{v}^f zase ve směru normály

\mathbf{n} . Musí se tedy rovnat průměty těchto rychlostí do směru \mathbf{n}

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^p)^T \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{v}^f)^T \cdot \mathbf{n} \\ v_k^p n_k &= v_k^f n_k . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dosadíme z (4.2) za v_k^p a víme, že gradient akustického tlaku nám dává rychlost kapaliny v bodě

$$\omega x_k^p n_k = \frac{\partial p}{\partial x_k} n_k \quad (4.4)$$

$$\boxed{i\omega w = \frac{\partial p}{\partial n} \quad \forall x_k \in \Gamma_P} , \quad (4.5)$$

kde w je průhyb desky.

- V každém bodě platí shodnost normálové složky napětí σ_n celkového napětí $\boldsymbol{\sigma}$ v akustické kavitě v bezprostřední blízkosti desky a na povrchu desky

$$\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}^p))^T \cdot \mathbf{n} = p_s \mathbf{n} \quad (4.6)$$

$$\boxed{\sigma_n = i\omega \rho_0 p \quad \forall x_k \in \Gamma_P} . \quad (4.7)$$

Získáváme tedy předpis okrajových podmínek pro rovnici akustické tekutiny (4.5)₃ a pro rovnici desky (4.7)₂.

4.2 Rovnice interakce akustické tekutiny a RM desky

Uvažujeme akustickou tekutinu, která je ohraničena na části svého povrchu (na hranici Γ_P) poddajnou deskou, která je vetknutá podél celého svého okraje. Zavedeme vektor pro šest neznámých polí $\mathbf{x} := (p, \mathbf{u}, w, \boldsymbol{\theta})$ (dvě skalární a dvě vektorové) a množinu funkcí \mathbb{X} , do které tyto funkce náležejí $\mathbb{X} = H^1(\Omega) \times (H_0^1(\Gamma_P))^5$. K vektoru neznámých zavedeme vektor testovacích funkcí $\mathbf{y} := (q, \mathbf{u}, z, \boldsymbol{\psi})$ z množiny funkcí \mathbb{X}_0 . Aplikací okrajových podmínek (4.5) a (4.7) získáme ze slabého řešení Reisner-Mindlin modelu poddajné desky (3.9) tvar s novým zatěžujícím členem, ve kterém vystupuje hodnota akustického tlaku p_p zatěžujícího desku na Γ_P takového, že $p_p \in L^2(\Gamma_P)$.

$$\begin{aligned} h \int_{\Gamma_P} E \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + h \int_{\Gamma_P} \gamma(\nabla w - \boldsymbol{\theta}) \cdot (\nabla z - \boldsymbol{\psi}) + \frac{h^3}{3} \int_{\Gamma_P} E \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}) : \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}) + \\ - \rho \omega^2 \int_{\Gamma_P} \left(h \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + h w z + \frac{h^3}{3} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) = \int_{\Gamma_P} i\omega \rho_0 p_p z \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{X}_0 . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Přidáme slabé řešení Helmholtzovi rovnice (2.47) s členem propojujícím obě slabá řešení přes průhyb desky w

$$\int_{\Omega} \nabla q \nabla p - \kappa^2 \int_{\Omega} pq - \int_{\Gamma_{in}} (2i\kappa p_A - i\kappa p)q + i\kappa \int_{\Gamma_{out}} pq = i\omega \int_{\Gamma_P} wq \quad \forall q \in \mathbb{Q}_0 \quad . \quad (4.9)$$

Vzniklou soustavu slabých řešení (4.8) a (4.9) zapíšeme pomocí bilineárních forem pro Reissner-Mindlin desku na hranici Γ_P zvukovodu

$$\boxed{\begin{aligned} & h \langle E \mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma_P} + h\gamma \langle (\nabla w - \boldsymbol{\theta}), (\nabla z - \boldsymbol{\psi}) \rangle_{\Gamma_P} + \frac{h^3}{3} \langle E \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}) \rangle_{\Gamma_P} \\ & - h\rho\omega^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_P} - h\omega^2 \rho \langle w, z \rangle_{\Gamma_P} - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_P} - i\omega\rho_0 \langle p, z \rangle_{\Gamma_P} = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{X}_0 \end{aligned}} \quad (4.10)$$

a pro akustickou tekutinu v kavitě zvukovodu Ω

$$\boxed{(\nabla p, \nabla q)_{\Omega} - \kappa^2 (p, q)_{\Omega} + i\kappa \langle p, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} - 2i\kappa \langle p_A, q \rangle_{\Gamma_{in}} = i\omega \langle w, q \rangle_{\Gamma_P} \quad \forall q \in \mathbb{Q}_0} \quad . \quad (4.11)$$

Příklad řešení příkladu vibroakustiky s uvažováním více poddajných stěn lze zhlédnout na obr. (6.22),(6.23) a (6.24).

5 Formulace úloh optimalizace ve vibroakustice

V páté kapitole formulujeme úlohu optimálního tvaru zvukovodu pro tři různé případy hranice

- tuhá (rigidní) na celé $\partial\Omega$
- poddajná deska na Γ_P
 - optimalizovatelná $\partial\Omega \setminus \Gamma_P$ (design desky se nemění)
 - optimalizovatelná celá $\partial\Omega$

Představíme modelovanou oblast Ω a rozdělíme ji na dvě podoblasti. definujeme designovou hranici. Představíme dvě účelové funkce. Provedeme citlivostní analýzu, viz [Eduard, 2012],[Rohan Eduard, 2011a],[Rohan Eduard, 2011b]. Tím se rozumí výpočet citlivosti změny účelové funkce v závislosti na změně optimalizačních parametrů, když na nich závisí nepřímo prostřednictvím stavové proměnné. Zparametrizujeme design pomocí Spline-boxu, viz [Eduard, 2007]. Zavedeme pole designových rychlostí v objemu a na desce. Optimalizační úloze přiřadíme Lagrangeovu funkci a posléze přejdeme k řešení adjungované úlohy. Touto cestou, počítanou v systému *SfePy* [Robert, 2016], získáme celkovou citlivost účelové funkce na změnu optimalizačních parametrů.

5.1 Popis optimalizované oblasti

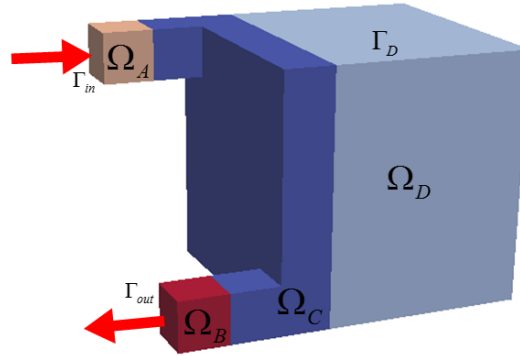
Zde rozčleníme námi optimalizovanou oblast (design) na podoblasti a vysvětlíme, proč volíme toto uspořádání.

Oblast Ω (obr.(5.1)) je rozdělena na dvě disjunktní podoblasti

$$\Omega = \Omega_D \cup \Omega_C \quad , \quad (5.1)$$

kde Ω_D představuje takzvanou designovou oblast, a pro Ω_C platí

$$\Omega_C = \Omega \setminus \overline{\Omega}_D \quad . \quad (5.2)$$

Obrázek 5.1: Definování optimalizované oblasti (zvukovodu) Ω

Hranice $\partial\Omega = \Gamma$ je rozdělena na dílčí hranice Γ_C a Γ_D , kde

$$\Gamma_C = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0, \quad (5.3)$$

kde hranicí Γ_{in} vstupuje zvuková vlna do zvukovodu a hranicí Γ_{out} vystupuje ven. Na povrchu Ω_D je designová hranice Γ_D . Naším záměrem je Γ_D měnit, což souvisí se změnou sítě při diskretizaci pomocí MKP. Oblast Ω_C ale předpokládáme tvarově konstantní. Zde výhodněji vyhodnotím účelové funkce. Proto v rámci Ω_C volíme dvě oblasti Ω_A a Ω_B . Definujeme akusticky poddajnou designovou hranici $\Gamma_P \subset \Gamma$. Tuto hranici můžeme volit jako $\Gamma_P \subset \Gamma_D$, pokud měníme její tvar. Pokud neměníme, platí $\Gamma_P \subset \Gamma_C$. Tato hranice je tvořena konečným počtem m vzájemně disjunktních desek

$$\Gamma_P = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_P^k. \quad (5.4)$$

Změnou tvaru hranice Γ_D , zprostředkovanou změnou hodnot n tvarových parametrů

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots, \alpha_n) \quad (5.5)$$

se mění akustický tlak v oblasti Ω nebo-li řešení stavové úlohy $p = p(\boldsymbol{\alpha})$. Změna se logicky projeví také na námi volené účelové funkci $\Phi = \Phi(p(\boldsymbol{\alpha}))$, kterou vyhodnocujeme v Ω_A a Ω_B .

5.2 Účelové funkce

V minimalizační úloze (5.13) vystupuje účelová funkce. Zde si představíme dva příklady aplikovatelné na náš zvukovod viz obr.(5.1).

Můžeme využít dvou přístupů vyhodnocování akustického tlaku

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_1(p) &= \int_{\Omega_B} |p|^2 = \|p\|_{\Omega_B}^2 [Pa^2], \\ \Phi_2(p) &= 10 \log_{10} \left(\frac{\|p\|_{\Omega_B}^2}{\|p\|_{\Omega_A}^2} \right) [dB],\end{aligned}} \quad (5.6)$$

kde předpokládáme platnost Euklidovské normy

$$|p| = \sqrt{\operatorname{Re}\{p\}^2 + \operatorname{Im}\{p\}^2} \quad (5.7)$$

Funkcionál Φ_1 vyjadřuje souhrnně absolutní hodnotu akustického tlaku v oblasti Ω_B . Tento funkcionál má vztah k veličině intenzita akustického pole I definované jako

$$I = \frac{|p|^2}{\rho_0 c} [W/m^2], \quad (5.8)$$

kde $\rho_0 [kg/m^3]$ je hustota akustické tekutiny a $c [m/s]$ je rychlost šíření zvukové vlny daným prostředím. Vztahy se liší jen o kladnou konstantu $\rho_0 c$. Vzhledem k faktu, že chceme funkcionál minimalizovat je pro naše účely použití Φ_1 ekvivalentní použití I .

Druhý funkcionál Φ_2 vychází z prakticky používané funkce transmisních ztrát T_{AB} (transmission loss, neprozvučnost, viz [Ondřej, 2002])

$$\begin{aligned}T_{AB}(p) &= 10 \log_{10} \left(\int_{\Omega_A} I \right) - 10 \log_{10} \left(\int_{\Omega_B} I \right) [dB] \\ &= 10 \log_{10} \left(\frac{\|p\|_{\Omega_A}^2}{\|p\|_{\Omega_B}^2} \right) [dB].\end{aligned} \quad (5.9)$$

T_{AB} udává o kolik decibelů $[dB]$ se utlumí ($T_{AB} > 0$) zvuková vlna jdoucí z Ω_A do Ω_B . Existuje více přístupů jak neprozvučnost vypočítat. Přístupy se volí dle konkrétní aplikace. Zde uvedený vzorec odpovídá situaci, kdy zvuková vlna vchází skrz Γ_{in} do Ω a vychází skrz Γ_{out} z Ω zvukovodem ve tvaru trubky. Námi modelovaná situace tomuto samozřejmě odpovídá.

V optimalizaci hledáme gradient účelové funkce vůči vektoru optimalizační parametrů α , kdy obecně zapsáno

$$\nabla_{\alpha} \Phi = \nabla_{\alpha} \Phi(\alpha, p(\alpha)). \quad (5.10)$$

V našem případě se jedná jen o závislost skrz stavovou proměnou p a tedy $\Phi = \Phi(p(\alpha))$. Dále mluvíme o Φ_1 a Φ_2 jako o účelových funkcích.

5.3 Optimalizační úloha pro rigidní hranici

V této kapitole definujeme optimalizační úlohu s uvažováním pouze rigidní hranice na Γ . Neuvažujeme jakoukoliv interakci akustické tekutiny s poddajnou stěnou. Nejedná se tedy v tomto případě o úlohu vibroakustiky. Definujeme stavovou rovnici společně s vhodnou účelovou funkcí a hledáme minimum účelové funkce vzhledem k optimalizačním parametřům.

Jako stavovou rovnici uvažujeme Helmholtzovu rovnici (2.47) pro akustický tlak p . Úlohu řešíme na Ω viz (5.1) a použijeme na její hranici Γ již odvozené okrajové podmínky (2.42). Dále zavedeme slabou formulaci problému viz (2.47).

Pomocí bilineární formy zapíšeme naši stavovou úlohu jako

$$\underbrace{(\nabla p, \nabla q)_\Omega - \kappa^2 (p, q)_\Omega + i\kappa \langle p, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}}}_{\Psi(p, q)} - \underbrace{2i\kappa \langle p_A, q \rangle_{\Gamma_{in}}}_{f(q)} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}, \quad (5.11)$$

kteřou můžeme zapsat v abstraktní formě

$$\Psi(p, q) = f(q) \quad \forall q \in \mathbb{Q}. \quad (5.12)$$

Uvažujeme následující optimalizační úlohu, kdy hledáme minimum účelové funkce Φ vzhledem k stavové proměnné p závislé na optimalizačních parametrech α

$$\boxed{\begin{array}{l} \min_{\alpha} \Phi(p(\alpha)) \quad \alpha \in \mathbb{U}_1 \\ p \in \mathbb{Q} : \Psi(p, q) = f(q) \quad \forall q \in \mathbb{Q}, \end{array}} \quad (5.13)$$

kde \mathbb{U}_1 je množina všech přípustných optimalizačních parametrů α , p splňuje stavovou úlohu (5.12) a existuje spojitě zobrazení

$$\mathcal{F} : \alpha \longrightarrow \Gamma_D, \quad (5.14)$$

neboli α mají vliv na tvar oblasti.

5.3.1 Citlivostní analýza

Provedením citlivostní analýzy rozumíme výpočet citlivosti změny účelové funkce Φ v závislosti na změně optimalizačních parametrů α , když na nich závisí účelová funkce nepřímo prostřednictvím stavové proměnné p . Potřebujeme tedy vypočítat gradient funkce $\Phi(\alpha, p(\alpha))$ podle jednotlivých optimalizačních parametrů α . Máme zde tedy implicitní funkci $p = p(\alpha)$.

Designové pole rychlostí

V oblasti Ω definujeme vektorové pole $\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ pomocí Spline-boxu [Eduard, 2007]. Zabývejme se nyní úlohou, kdy tvar oblasti závisí na parametru $\tau \in \mathbb{R}$ a designovém vektorovém poli $\vec{\mathcal{V}}(x)$. Parametr τ chápeme jako umělý čas. Bod kontinua v $\Omega(\tau)$ má pak obecně souřadnice $\mathbf{z}(\tau) = (z_1(\tau), z_2(\tau), z_3(\tau))$ definované jako

$$\Omega(\tau) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid z_i = x_i + \tau \vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \right\} , \quad (5.15)$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ jsou prostorové souřadnice neoptimalizované oblasti. Musí platit, že $\vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \Omega_C$ viz obr.(5.1).

Výpočet citlivosti pomocí materiálové derivace

V tomto odstavci vyjádříme členy v citlivostním vztahu (5.45), neboli derivace bilineárních forem, s využitím materiálové derivace známé z mechaniky kontinua a viz [Křen Jiří, 2006] [Eduard, 2012],[Rohan Eduard, 2012],[Rohan Eduard, 2010a],[Rohan Eduard, 2010b]. Zavedeme zobrazení \mathcal{F} parametrizované pomocí skalárního parametru τ

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau, \cdot) : \Omega &\mapsto \Omega(\tau) , \\ z_i(\tau) &= \mathcal{F}(\tau, x_i) . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Bod kontinua v $\Omega(\tau)$ má obecně souřadnice $\mathbf{z}(\tau) = (z_1(\tau), z_2(\tau), z_3(\tau))$ definované jako

$$\Omega(\tau) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid z_i = x_i + \tau \vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \right\} , \quad (5.17)$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ jsou souřadnice v Ω pro $\tau = 0$.

Zavedeme deformační gradient \mathbf{F} zobrazení \mathcal{F} a jeho jakobián \mathcal{J}

$$\mathcal{J} = \det \mathbf{F} = \det \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right) . \quad (5.18)$$

Rozepíšeme deformační gradient \mathbf{F} s dosazením z (5.17)

$$\mathbf{F} = F_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(x_i + \tau \mathcal{V}_i)}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \tau \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} . \quad (5.19)$$

Derivací deformačního gradientu \mathbf{F} podle τ získáme

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \mathbf{F} = \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} = \partial_j \mathcal{V}_i . \quad (5.20)$$

Vyjádříme si inverzi \mathbf{F}^{-1} dosazením z (5.17)

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial x_l}{\partial z_k} = \frac{\partial(z_l - \tau \mathcal{V}_l)}{\partial z_k} = \delta_{kl} - \tau \frac{\partial \mathcal{V}_l}{\partial z_k} . \quad (5.21)$$

Derivujeme \mathbf{F}^{-1} podle τ a získáme

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\frac{\partial \mathcal{V}_l}{\partial z_k} . \quad (5.22)$$

Následně vyjdeme z vlastnosti \mathbf{F} , kdy

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{I} & / \frac{d}{d\tau} \\ \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{F}}^{-1}) &= 0 \\ \dot{\mathbf{F}}^{-1} &= -\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Za \mathbf{F}^{-1} dosadíme z (5.21) a pro $\tau = 0$ platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}^{-1}\Big|_{\tau=0} &= -\mathbf{I}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{I}\Big|_{\tau=0} \\ \dot{\mathbf{F}}^{-1} &= -\dot{\mathbf{F}} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_l}{\partial z_k} &= \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Metoda adjungované proměnné

Hledat gradient účelové funkce lze pomocí konečných diferencí. Tento postup je však výpočtově náročný a je proto vhodný spíše pro úlohy s menším počtem parametrů. Za to řešení adjungované úlohy je efektivní řešení nalezení gradientu účelové funkce. Zde je výpočtová náročnost nezávislá na počtu optimalizačních proměnných a výhodná je i přesnost vypočteného gradientu více viz [Eduard, 2012].

K problému (5.13), v němž jsou $\boldsymbol{\alpha}$ ekvivalentní parametru τ , můžeme přiřadit Lagrangeovu funkci $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, p, \lambda)$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, p, \lambda) = \mathcal{L}(p(\boldsymbol{\alpha}), \lambda) = \Phi(p) + \Psi(p, \lambda) - f(\lambda) + \Psi^*(p^*, \lambda^*) - f^*(\lambda^*) , \quad (5.25)$$

kde λ je Lagrangeův multiplikátor vazby splnění stavové úlohy. Poznamenejme, že pokud platí optimalizační úloha (5.13) pro $\Psi(p, q) = f(q)$, tak i pro $\Psi^*(p^*, q^*) = f(q^*)$, kde $*$ značí komplexně sdruženou hodnotu.

Necht' $(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{p})$ je řešením (5.13). Předpokládáme, že okolí bodu $(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{p})$ splňuje podmínky, tak že můžeme formulovat úlohu (5.13) jako úlohu sedlového bodu

$$\max_{\lambda \in \mathbb{Q}} \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{U}, p \in \mathbb{Q}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, p, \lambda) . \quad (5.26)$$

Využijeme Gâteauxovy derivace viz. [Pavel, 1994]. Derivujeme (5.25) podle stavové proměnné p . Tuto derivaci označíme $\delta \dots \circ \delta p$ (derivace ve směru p)

$$\begin{aligned} \delta_p \mathcal{L}(p, \lambda) \circ \delta p &= \delta_p \Phi(p) \circ \delta p + \delta_p \Psi(p, \lambda) \circ \delta p + \delta_p \Psi^*(p^*, \lambda^*) \circ \delta p \\ &= \delta_p \Phi(p; \delta p) + \underbrace{\delta_p \Psi(\delta p, \lambda) + \delta_p \Psi^*(\delta p^*, \lambda^*)}_{2\text{Re}\{\delta_p \Psi(\delta p, \lambda)\}} . \end{aligned}$$

Pro splnění podmínky optimality vůči stavové proměnné p se musí (5.27) rovnat nule

$$\delta_p \mathcal{L}(p, \lambda) \circ \delta p = 0 . \quad (5.27)$$

Dostaneme se k řešení adjungované úlohy pro adjungovanou proměnnou $\lambda \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{2\operatorname{Re} \{ \delta_p \Psi(\delta p, \lambda) \} = -\delta_p \Phi(p; \delta p) \quad \forall \delta p \in \mathbb{Q}} . \quad (5.28)$$

Adjungovanou úlohu můžeme řešit za předpokladu, že $\Phi : H^1(\Omega; \mathbb{C}) \mapsto \mathbb{R}$ je reálný funkcionál komplexní funkce.

Musíme vyjádřit Gâteauxovu derivaci účelové funkce na Ω_C , tedy oblasti, která není ovlivněna změnou tvarových optimalizačních parametrů α . Účelové funkce Φ zderivujeme ve směru řešení p

$$\delta_p \Phi_1(p) \circ \delta p = \delta_p \Phi_1(p; \delta p) = \int_{\Omega_B} p \delta p , \quad (5.29)$$

$$\delta_p \Phi_2(p) \circ \delta p = \delta_p \Phi_2(p; \delta p) = \frac{10}{\ln 10} \left(\frac{\int_{\Omega_B} p \delta p}{\|p\|_{\Omega_B}^2} - \frac{\int_{\Omega_A} p \delta p}{\|p\|_{\Omega_A}^2} \right) , \quad (5.30)$$

Účelové funkce Φ a jejich derivace nabývají reálných hodnot, nicméně potřebujeme je zapsat v komplexním tvaru

$$\begin{aligned} \delta_p \Phi_1(p; \delta p) &= \int_{\Omega_B} (p(\delta p)^* + p^* \delta p) = 2\operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega_B} (p^* \delta p) \right\} , \\ \delta_p \Phi_2(p; \delta p) &= \frac{10}{\ln 10} \left(\frac{\int_{\Omega_B} (p(\delta p)^* + p^* \delta p)}{\|p\|_{\Omega_B}^2} - \frac{\int_{\Omega_A} (p(\delta p)^* + p^* \delta p)}{\|p\|_{\Omega_A}^2} \right) = \\ &= 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{10}{\ln 10} \left(\frac{\int_{\Omega_B} p^* \delta p}{\|p\|_{\Omega_B}^2} - \frac{\int_{\Omega_A} p^* \delta p}{\|p\|_{\Omega_A}^2} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Pro zjednodušení označíme derivace dle stavové proměnné jako $\delta_p \Phi = \Phi'$ a $\delta_p \Psi = \Psi'$. Pak můžeme (5.28) přepsat do tvaru

$$\operatorname{Re} \{ \Psi'(\delta p, \lambda) \} = -\operatorname{Re} \{ \Phi'(p; \delta p) \} \quad \forall \delta p \in \mathbb{Q} . \quad (5.32)$$

Pro zjednodušení přeznačíme adjungovanou proměnnou $\lambda \rightarrow \hat{p}$ a $\delta p \rightarrow q$. Potom přepíšeme (5.32)

$$2\operatorname{Re} \{ \Psi'(\hat{p}, q) \} = -2\operatorname{Re} \{ \Phi'(p, q) \} . \quad (5.33)$$

Zapišeme adjungovanou úlohu zvlášť pro účelovou funkci Φ_1 a Φ_2

$$2\operatorname{Re} \{ \Psi'(\hat{p}, q) \} = - \int_{\Omega_B} (pq^* + p^*q) = - \int_{\Omega_B} (p_r q_r + p_i q_i) \quad \forall q \in \mathbb{Q} , \quad (5.34)$$

$$2\operatorname{Re} \{ \Psi'(\hat{p}, q) \} = - \frac{10}{\ln 10} \left(\frac{\int_{\Omega_B} (pq^* + p^*q)}{\|p\|_{\Omega_B}^2} - \frac{\int_{\Omega_A} (pq^* + p^*q)}{\|p\|_{\Omega_A}^2} \right) \quad \forall q \in \mathbb{Q} . \quad (5.35)$$

kde

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \{ \Psi'(\hat{p}, q) \} &= (\nabla \hat{p}, \nabla q)_\Omega - \kappa^2(\hat{p}, q)_\Omega + i\kappa \langle \hat{p}, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} \\ &\quad + (\nabla \hat{p}^*, \nabla q^*)_\Omega - \kappa^2(\hat{p}^*, q^*)_\Omega - i\kappa \langle \hat{p}^*, q^* \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Definujeme úlohu hledání reálných \hat{p}_r a imaginárních složek \hat{p}_i hledané komplexní adjungované neznámé \hat{p} .

Řešení \hat{p} a Lagrangeův multiplikátor q jsou komplexní hodnoty. Hvězdička znamená komplexně sdruženou hodnotu

$$\begin{aligned} q &= q_r + i q_i, & q^* &= q_r - i q_i, \\ \hat{p} &= \hat{p}_r + i \hat{p}_i, & \hat{p}^* &= \hat{p}_r - i \hat{p}_i. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Později využijeme těchto rovností

$$\begin{aligned} \hat{p}^* q^* &= (\hat{p}q)^* = (\hat{p}_r q_r - q_i \hat{p}_i) - i(\hat{p}_r q_i + \hat{p}_i q_r), \\ (\nabla \hat{p}^*, \nabla q^*) &= (\nabla \hat{p}, \nabla q)^*. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Reálné části v adjungované úloze (5.34)-(5.35) je vhodné pro implementaci zapsat takto

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ (\nabla(\hat{p}_r + i \hat{p}_i), \nabla(q_r - i q_i))_\Omega \} &= (\nabla \hat{p}_r, \nabla q_r)_\Omega + (\nabla \hat{p}_i, \nabla q_i)_\Omega, \\ \operatorname{Re} \{ \kappa^2(\hat{p}, q)_\Omega \} &= \kappa^2 [(\hat{p}_r, q_r)_\Omega + (\hat{p}_i, q_i)_\Omega], \\ \operatorname{Re} \{ i \langle \kappa \hat{p}, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} \} &= -\kappa [\langle \hat{p}_r, -q_i \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} + \langle \hat{p}_i, q_r \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}}]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pravé strany adjungované úlohy jsou reálné viz (5.31). Rozepíšeme je do složek

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_B} (pq^* + p^*q) &= \int_{\Omega_B} (p_r q_r + p_i q_i), \\ \frac{10}{\ln 10} \left(\frac{\int_{\Omega_B} (pq^* + p^*q)}{\|p\|_{\Omega_B}^2} - \frac{\int_{\Omega_A} (pq^* + p^*q)}{\|p\|_{\Omega_A}^2} \right) &= \frac{10}{\ln 10} \left(\frac{\int_{\Omega_B} (p_r q_r + p_i q_i)}{\|p\|_{\Omega_B}^2} - \frac{\int_{\Omega_A} (p_r q_r + p_i q_i)}{\|p\|_{\Omega_A}^2} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Využijeme (5.39), (5.40) a adjungovanou úlohu řešíme pro neznámé p_r a p_i . Zapišeme tuto soustavu maticově.

Pro účelovou funkci Φ_1 řešíme soustavu

$$\begin{aligned} (q_r \quad q_i) \begin{pmatrix} (\nabla \cdot, \nabla \cdot)_\Omega - \kappa^2(\cdot, \cdot)_\Omega & -\kappa \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} \\ \kappa \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} & (\nabla \cdot, \nabla \cdot)_\Omega - \kappa^2(\cdot, \cdot)_\Omega \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \hat{p}_r \\ \hat{p}_i \end{pmatrix} &= \\ = - (q_r \quad q_i) \begin{pmatrix} (\cdot, p_r)_{\Omega_B} \\ (\cdot, p_i)_{\Omega_B} \end{pmatrix} &\quad \forall (q_i, q_r) \in \mathbb{Q}^2, \end{aligned} \quad (5.41)$$

Obdobně zapišeme pro Φ_2

$$\begin{aligned} (q_r \quad q_i) \begin{pmatrix} (\nabla \cdot, \nabla \cdot)_\Omega - \kappa^2(\cdot, \cdot)_\Omega & -\kappa \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} \\ \kappa \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} & (\nabla \cdot, \nabla \cdot)_\Omega - \kappa^2(\cdot, \cdot)_\Omega \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \hat{p}_r \\ \hat{p}_i \end{pmatrix} &= \\ = - \frac{10}{\ln 10} (q_r \quad q_i) \begin{pmatrix} (\cdot, p_r)_{\Omega_B} - \frac{(\cdot, p_r)_{\Omega_A}}{\|p\|_{\Omega_B}^2} \\ (\cdot, p_i)_{\Omega_B} - \frac{(\cdot, p_i)_{\Omega_A}}{\|p\|_{\Omega_B}^2} \end{pmatrix} &\quad \forall (q_i, q_r) \in \mathbb{Q}^2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Vypočteme-li adjungovanou neznámou \hat{p} , využijeme ji dále jako Lagrangeův multiplikátor a provedeme totální derivaci Lagrangeovy rovnice (5.25) podle optimalizačních parametrů α . Změna každého parametru α_ν vytvoří v Ω jeho vlastní designové pole rychlostí $\vec{\mathcal{V}}^\nu$. Vzhledem k parametrizaci Spline-boxem odpovídá α_ν času τ . Pak citlivost účelové funkce vůči změně parametru α_ν zapíšeme

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \mathcal{L}(p, \hat{p}) &= \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} [\Phi(p) + (\Psi(p, \hat{p}) - f(\hat{p})) + (\Psi(p^*, \hat{p}^*) - f(\hat{p}^*))] \\ &\quad + \underbrace{\delta_p \mathcal{L}(p, \hat{p}; \delta p)}_{=0} \circ \delta p \frac{dp}{d\tau} . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Je-li splněna adjungovaná rovnice (5.28), tak platí podmínka optimality Lagrangeovy funkce vůči stavové proměnné p a poslední člen v (5.43) musí být roven nule. Současně hledáme optimum Lagrangeovy funkce postupně vůči optimalizačním parametrům $\alpha_\nu \approx \tau$ a tedy musí platit

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \mathcal{L}(p, \hat{p}) = 0 . \quad (5.44)$$

Získáme vztah vyjadřující citlivost účelové funkce Φ na změnu optimalizačních parametrů α

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \Phi(p) = -\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} [(\Psi(p, \hat{p}) - f(\hat{p})) + (\Psi^*(p^*, \hat{p}^*) - f^*(\hat{p}^*))] . \quad (5.45)$$

S ohledem na (5.17) až (5.24) pro bilineární členy citlivostního vztahu (5.45) tedy platí (viz [Eduard, 2012])

$$\begin{aligned} (\nabla_z p, \nabla_z q)_{\Omega(\tau)} &= \int_{\Omega} \frac{\partial x_k}{\partial z_i} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial z_j} \frac{\partial q}{\partial x_l} \delta_{ij} \mathcal{J} , \\ (p, q)_{\Omega(\tau)} &= \int_{\Omega} pq \mathcal{J} . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nyní tyto bilineární formy můžeme derivovat

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} (\nabla_z p, \nabla_z q)_{\Omega(\tau)} &= \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}}) \delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \partial_e \mathcal{V}_i \delta_{ej} \right) \partial_j p \partial_i q^* , \\ \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} (p, q)_{\Omega(\tau)} &= \int_{\Omega} pq^* (\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}}) . \end{aligned} \quad (5.47)$$

Pro zjednodušení označíme

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\Omega}(p, q) &= \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}}) \delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \partial_e \mathcal{V}_i \delta_{ej} \right) \partial_j p \partial_i q^* , \\ \mathbf{m}_{\Omega}(p, q) &= \int_{\Omega} pq^* (\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}}) . \end{aligned} \quad (5.48)$$

S využitím vztahů (5.48) již můžeme dosadit do (5.45). Dostaneme citlivost nebo-li totální derivaci $\delta_\tau \Phi$ vyjadřující derivaci účelové funkce ve směru vektorového pole $\vec{\mathcal{V}}$

$$\delta_\tau \Phi = \mathbf{a}_\Omega(p^*, \hat{p}^*) - \kappa^2 \mathbf{m}_\Omega(p^*, \hat{p}^*) + \mathbf{a}_\Omega(p, \hat{p}) - \kappa^2 \mathbf{m}_\Omega(p, \hat{p}) , \quad (5.49)$$

kde jednotlivé členy citlivostního vztahu rozepsány vypadají následovně

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\Omega(p^*, \hat{p}^*) &= \int_\Omega ((\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}})\delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \delta_{ej} \partial_e \mathcal{V}_i) \partial_j p^* \partial_i \hat{p}^* , \\ \mathbf{m}_\Omega(p^*, \hat{p}^*) &= \int_\Omega p^* \hat{p}^* (\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}}) , \\ \mathbf{a}_\Omega(p, \hat{p}) &= \int_\Omega (\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}})\delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \delta_{ej} \partial_e \mathcal{V}_i) \partial_j p \partial_i \hat{p} , \\ \mathbf{m}_\Omega(p, \hat{p}) &= \int_\Omega p \hat{p} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}}) . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Touto cestou získáme úplnou derivaci účelové funkce Φ vůči α , tj. její citlivost. V (5.49) derivace $\delta_\tau \Phi$ ve skutečnosti znamená $\frac{d}{d\tau} \Phi|_{\tau=0}$, kde Φ je implicitní funkce hranice $\Gamma(\tau)$ parametrizované vztahem (5.15), a závisí tedy na vektorovém poli $\vec{\mathcal{V}}$.

Citlivost (5.49) vypočteme pro každý parametr α_ν a jeho designové pole $\vec{\mathcal{V}}^\nu$, kde $\nu = 1, 2, \dots, n$. Získáme tedy celkem n citlivostí.

5.4 Úloha s poddajným panelem na hranici

V této kapitole uvažujeme rovinný panel (desku) dle Reissnerovy-Mindlinovy teorie na hranici $\Gamma_P \subset \Gamma_D$. Nyní se jedná o problém vibroakustiky, kde existuje interakce mezi akustickou tekutinou v Ω a jednou nebo více poddajnými deskami na Γ_P popsanou v kapitole (4). Každou desku předpokládáme vetknutou podél všech jejích okrajů

$$w = 0 , \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Gamma_P . \quad (5.51)$$

Lze si tedy tuto modelovou situaci představit jako více desek upnutých svými okraji na pevný rigidní rám. Tento předpoklad implikuje neuvažování posuvů v rovině desky u_i , protože transmisní podmínky (4.5) a (4.7) jsou definovány skrze průhyb w a průmět tlaku p_s do normály k rovině desky a již z rovnic (4.10) je také vidět nezávislost posuvů v rovině u_i na ostatních proměnných.

Obdobně jako u rigidní hranice i zde definujeme optimalizační úlohu, adjungovanou úlohu a odvodíme citlivostní vztah. Tuto kapitola pojata stručněji a v mnohém odkazujeme do kapitoly s rigidní hranicí (5.32).

Parametry optimalizace mohou měnit tvar Γ_P tak, aby byl zachován rovinný charakter desek.

Parametrizací tedy umožníme jen změnu tvaru v rovině desek, které se mohou posouvat a natáčet.

5.4.1 Optimalizační úloha

Jako stavové rovnice uvažujeme vibroakustický problém (4.10)-(4.11) pro akustický tlak p , výchylku desky w a natočení desky $\boldsymbol{\theta}$. Pro jednoduchost definujeme všechny neznámé jedním vektorem $\mathbf{x} := (p, w, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{X}$ a množinu funkcí \mathbb{X} , do které tyto funkce náležejí $\mathbb{X} = H^1(\Omega) \times (H_0^1(\Gamma_P))^3$. Stavový problém můžeme zapsat v abstraktní formě

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{X}_0, \quad (5.52)$$

kde $\mathbf{y} := (q, z, \boldsymbol{\psi})$ je vektor testovacích funkcí z prostoru \mathbb{X}_0 a

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := & h \langle E \mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma_P} + h\gamma \langle (\nabla w - \boldsymbol{\theta}), (\nabla z - \boldsymbol{\psi}) \rangle_{\Gamma_P} + \frac{h^3}{3} \langle E \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}) \rangle_{\Gamma_P} \\ & - h\rho\omega^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_P} - h\omega^2\rho \langle w, z \rangle_{\Gamma_P} - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_P} - i\omega\rho_0 \langle p, z \rangle_{\Gamma_P} \\ & + (\nabla p, \nabla q)_\Omega - \kappa^2(p, q)_\Omega + i\kappa \langle p, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} - i\omega \langle w, q \rangle_{\Gamma_P} \\ f(\mathbf{y}) := & 2i\kappa \langle p_A, q \rangle_{\Gamma_{in}} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Pak uvažujeme následující optimalizační úlohu

$$\begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\alpha}} \Phi(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha})), \\ \mathbf{x} \in \mathbb{X} : \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{X}_0, \\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{U}_2, \\ \mathcal{F} : \boldsymbol{\alpha} \rightarrow \Gamma_D, \end{array} \quad (5.54)$$

kde \mathbf{x} splňuje stavovou úlohu (5.52), Φ je účelová funkce, \mathbb{U}_2 je množina přípustných parametrů $\boldsymbol{\alpha}$ a Γ_D je designová (tvarově optimalizovaná) část hranice Γ_D .

5.4.2 Citlivostní analýza

V této kapitole postupujeme podobně jako v kapitole pro rigidní hranici. Chceme vypočítat gradient funkce $\Phi(\boldsymbol{\alpha}, p(\boldsymbol{\alpha}))$ podle jednotlivých optimalizačních parametrů $\boldsymbol{\alpha}$.

Adjungovaná úloha

Budeme postupovat obdobně jako v kapitole pro rigidní hranici (5.3.1). Zdefinujeme Lagrangeovu funkci $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ takto

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \Phi(p) + \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) - f(\boldsymbol{\lambda}) + \Psi^*(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) - f^*(\boldsymbol{\lambda}^*), \quad (5.55)$$

$$= \Phi(p) + 2\text{Re} \{ \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) - f(\boldsymbol{\lambda}) \}, \quad (5.56)$$

kde $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ jsou Lagrangeovy multiplikátory vazby splnění stavové úlohy. Formulujeme úlohu sedlového bodu

$$\max_{\lambda \in \mathbb{Q}} \min_{\alpha \in \mathbb{U}, p \in \mathbb{Q}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, p, \lambda) . \quad (5.57)$$

Vzhledem k podmínkám optimality vůči stavovým proměnným musí platit

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \circ \delta \mathbf{x} &= 0 \\ &= \delta_{\mathbf{x}} \Phi(p) \circ \delta p + \delta_{\mathbf{x}} 2\text{Re} \{ \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \} \circ \delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$= \delta_{\mathbf{x}} \Phi(p; \delta p) + 2\text{Re} \{ \delta_{\mathbf{x}} \Psi(\delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \} \quad \forall \delta \mathbf{x} \in \mathbb{X}_0 , \quad (5.59)$$

kde $\delta \mathbf{x} := (\delta p, \delta w, \delta \boldsymbol{\theta})$.

Nyní pro názornost přeznačíme $\boldsymbol{\lambda} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$ a $\delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}$ a můžeme zapsat adjungovanou úlohu ve tvaru

$$\boxed{2\text{Re} \{ \delta_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{r}}) \} = -\delta_{\mathbf{x}} \Phi(p; \mathbf{s}) \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{X}_0} , \quad (5.60)$$

kde $\mathbf{s} := (q, z, \boldsymbol{\psi})$ je vektor testovacích funkcí, $\hat{\mathbf{r}} := (\hat{p}, \hat{w}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ je vektor adjungovaných neznámých a p je stavová proměnná. Připomeneme, že všechny tyto funkce jsou komplexní

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_r + i\mathbf{s}_i \quad (5.61)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_r + i\hat{\mathbf{r}}_i \quad (5.62)$$

Pro zjednodušení označíme derivace dle stavových proměnných jako $\delta_p \Phi = \Phi'$ a $\delta_p \Psi = \Psi'$. Nyní je třeba si určit reálné části $\Psi'(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{r}})$. Reálná část má tento tvar

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ \Psi'(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{r}}) \} &= (\nabla q_r, \nabla \hat{p}_r)_\Omega + (\nabla q_i, \nabla \hat{p}_i)_\Omega - \kappa^2 [(q_r, p_r)_\Omega + (q_i, p_i)_\Omega] \\ &- \omega \left[\langle z_r, \hat{p}_i \rangle_{\Gamma_P} - \langle z_i, \hat{p}_r \rangle_{\Gamma_P} \right] + \kappa \left[\langle q_r, \hat{p}_i \rangle_{\Gamma_{in-out}} - \langle q_i, \hat{p}_r \rangle_{\Gamma_{in-out}} \right] \\ &+ h \left[\left\langle \gamma(\nabla z_r - \boldsymbol{\psi}_r), (\nabla \hat{w}_r - \hat{\boldsymbol{\theta}}_r) \right\rangle_{\Gamma_P} + \left\langle \gamma(\nabla z_i - \boldsymbol{\psi}_i), (\nabla \hat{w}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \right\rangle_{\Gamma_P} \right] \\ &+ \frac{h^3}{3} \left[\left\langle E \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}_r), \mathbf{e}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_r) \right\rangle_{\Gamma_P} + \left\langle E \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}_i), \mathbf{e}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \right\rangle_{\Gamma_P} \right] \\ &- h\rho\omega^2 \left[\langle z_r, \hat{w}_r \rangle_{\Gamma_P} + \langle z_i, \hat{w}_i \rangle_{\Gamma_P} \right] - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} \left[\left\langle \boldsymbol{\psi}_r, \hat{\boldsymbol{\theta}}_r \right\rangle_{\Gamma_P} + \left\langle \boldsymbol{\psi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \right\rangle_{\Gamma_P} \right] \\ &- \omega\rho_0 \left[\langle q_r, \hat{w}_i \rangle_{\Gamma_P} - \langle q_i, \hat{w}_r \rangle_{\Gamma_P} \right] \quad \forall \mathbf{s}_r, \mathbf{s}_i \in \mathbb{X}_{Re} , \end{aligned} \quad (5.63)$$

kde $\mathbb{X}_{Re} = \text{Re} \{ \mathbb{X}_0 \}$. Rozložíme adjungovanou úlohu (5.60) tak, že heldáme reálnou $\hat{\mathbf{r}}_r$ a imaginární část $\hat{\mathbf{r}}_i$ adjungovaných neznámých $\hat{\mathbf{r}}$. Na pravé straně adjungované úlohy (5.60) vystupuje derivace objektivní funkce Φ_2 (5.31)₂ též rozložené na reálnou a imaginární část. Rozepíšeme úlohu hledání $\hat{\mathbf{r}}_r$ a $\hat{\mathbf{r}}_i$ podle členů obsahujících reálné části \mathbf{s}_r a imaginární části \mathbf{s}_i testovacích funkcí.

Členy obsahující testovací $\mathbf{s}_r = (q_r, z_r, \boldsymbol{\psi}_r)$ zapíšeme jako rovnice

$$\begin{aligned} (\nabla q_r, \nabla \hat{p}_r)_\Omega - \kappa^2 (q_r, p_r)_\Omega + \kappa \langle q_r, \hat{p}_i \rangle_{\Gamma_{in-out}} - \omega\rho_0 \langle q_r, \hat{w}_i \rangle_{\Gamma_P} &= \\ = \frac{10}{\ln(10)} \left[\frac{(p_r, q_r)_{\Omega_A}}{\|p\|_{\Omega_A}^2} - \frac{(p_r, q_r)_{\Omega_B}}{\|p\|_{\Omega_B}^2} \right] , \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned}
-\omega \langle z_r, \hat{p}_i \rangle_{\Gamma_P} + \frac{h^3}{3} \langle E \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}_r), \mathbf{e}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_r) \rangle_{\Gamma_P} + h \langle \gamma(\nabla z_r - \boldsymbol{\psi}_r), (\nabla \hat{w}_r - \hat{\boldsymbol{\theta}}_r) \rangle_{\Gamma_P} \\
-h\rho\omega^2 \langle z_r, \hat{w}_r \rangle_{\Gamma_P} - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} \langle \boldsymbol{\psi}_r, \hat{\boldsymbol{\theta}}_r \rangle_{\Gamma_P} = 0 \quad \forall \mathbf{s}_r \in \mathbb{X}_{Re} .
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Obdobně zapíšeme členy obsahující testovací $\mathbf{s}_i = (q_i, z_i, \boldsymbol{\psi}_i)$

$$\begin{aligned}
(\nabla q_i, \nabla \hat{p}_i)_\Omega - \kappa^2 (q_i, p_i)_\Omega - \kappa \langle q_i, \hat{p}_r \rangle_{\Gamma_{in-out}} + \omega \rho_0 \langle q_i, \hat{w}_r \rangle_{\Gamma_P} = \\
= \frac{10}{\ln(10)} \left[\frac{(p_i, q_i)_{\Omega_A}}{\|p\|_{\Omega_A}^2} - \frac{(p_i, q_i)_{\Omega_B}}{\|p\|_{\Omega_B}^2} \right] ,
\end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\begin{aligned}
\omega \langle z_i, \hat{p}_r \rangle_{\Gamma_P} + \frac{h^3}{3} \langle E \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}_i), \mathbf{e}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \rangle_{\Gamma_P} + h \langle \gamma(\nabla z_i - \boldsymbol{\psi}_i), (\nabla \hat{w}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \rangle_{\Gamma_P} \\
-h\rho\omega^2 \langle z_i, \hat{w}_i \rangle_{\Gamma_P} - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} \langle \boldsymbol{\psi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \rangle_{\Gamma_P} = 0 \quad \forall \mathbf{s}_i \in \mathbb{X}_{Re} .
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Výsledná citlivost

Po vyřešení adjungované úlohy lze již určit výslednou citlivost z totální derivaci Lagrangeovy funkce (5.55)

$$\delta_\tau \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{r}}) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} [\Phi(p) + \Psi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{r}}) - f(\hat{\mathbf{r}}) + \Psi^*(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{r}}^*) - f^*(\hat{\mathbf{r}}^*)] . \tag{5.68}$$

Vzhledem k podmínkám optimality k optimalizačním proměnným musí platit

$$\delta_\tau \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{r}}) = 0 . \tag{5.69}$$

Potom celková citlivost účelové funkce $\Phi(p)$ na změnu optimalizačních parametrů je

$$\boxed{\delta_\tau \Phi(p) = -\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} [\Psi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{r}}) - f(\hat{\mathbf{r}}) + \Psi^*(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{r}}^*) - f^*(\hat{\mathbf{r}}^*)]} , \tag{5.70}$$

kde \mathbf{x} je řešení stavové úlohy (4.10)-(4.11) a $\hat{\mathbf{r}}$ je řešení adjungované úlohy (5.60).

Derivujeme podle τ ve směru dvou designových polí $\vec{\mathcal{V}}(x)$, $\vec{\mathcal{W}}(x)$ v prostoru respektive v rovině desky. Bilineární formy vyhodnocované mimo designovou oblast Ω_D jsou po derivaci nulové, jelikož jen v Ω_D je designová rychlost nenulová.

Designová rychlost v rovině desky

Parametrizace oblasti $\Omega_D \subset \Omega$ pomocí Spline-boxu je podrobněji popsána v jiné kapitole (5.5.3). Zde se zaměříme pouze na definování dvou polí designových rychlostí. Jednoho v

objemu (3D) a druhého v rovině desky (2D). Podobně jako v kapitole (5.3.1) definujeme vektorové pole $\vec{\mathcal{V}}(x)$ jako parametrizaci oblasti Ω_D v 3D

$$\Omega(\tau) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid z_i = x_i + \tau \vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \right\} , \quad (5.71)$$

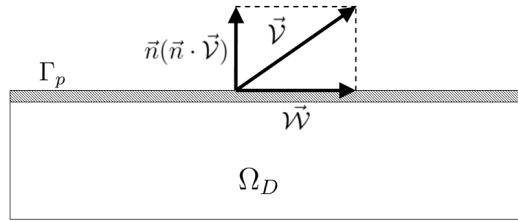
Designové pole $\vec{\mathcal{V}}(x)$ vzniká pohybem řídicích bodů Spline-boxu, jejichž souřadnice jsou úměrné optimalizačním parametrům α_i , které korespondují s "umělým časem" τ .

Nyní nás zajímá jaké designové pole vznikne v rovině desky, tedy v hraniční oblasti $\Gamma_P \subset \Gamma_D$.

Definujeme průmět $\vec{\mathcal{V}}(x)$ do roviny desky viz obr.(5.2)

$$\vec{\mathcal{W}} = \vec{\mathcal{V}} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{V}}) , \quad (5.72)$$

kde $\vec{\mathcal{W}}(x)$ je hledané designové pole rychlostí v rovině desky a \vec{n} je jednotkový normálový vektor k rovině desky Γ_P .



Obrázek 5.2: Řez kolmo na desku; Projekce designového pole $\vec{\mathcal{V}}(x)$ do roviny desky

Parametrizaci oblasti Γ_P pomocí parametru τ lze tedy zapsat takto

$$\Gamma_P(\tau) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid z_i = x_i + \tau \vec{\mathcal{W}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_P \right\} , \quad (5.73)$$

Výpočet citlivosti pomocí materiálové derivace

Při odvození následujících vztahů využijeme mnoho z kapitoly (5.3.1), kde jsme odvodili vztahy, které nám pomůžou odvodit derivace bilineárních forem v (5.70).

$$\begin{aligned}
\delta_\tau \Phi(p) = & \mathbf{a}_\Omega(p^*, \hat{p}^*) + \mathbf{a}_\Omega(p, \hat{p}) - \kappa^2 \mathbf{m}_\Omega(p^*, \hat{p}^*) - \kappa^2 \mathbf{m}_\Omega(p, \hat{p}) - i\omega \mathbf{m}_\Gamma(w, \hat{p}) + i\omega \mathbf{m}_\Gamma(w^*, \hat{p}^*) \\
& - h\gamma \mathbf{c}_\Gamma(w, \hat{\theta}) - h\gamma \mathbf{c}_\Gamma(w^*, \hat{\theta}^*) - h\gamma \mathbf{c}_\Gamma(\hat{w}, \theta) - h\gamma \mathbf{c}_\Gamma(\hat{w}^*, \theta^*) \\
& + h\gamma \mathbf{m}_\Gamma(\hat{\theta}, \theta) + h\gamma \mathbf{m}_\Gamma(\hat{\theta}^*, \theta^*) - h\gamma \mathbf{a}_\Gamma(w, \hat{w}) - h\gamma \mathbf{a}_\Gamma(w^*, \hat{w}^*) \\
& + h\gamma \mathbf{e}_\Gamma(\hat{w}, \theta) + h\gamma \mathbf{e}_\Gamma(\hat{w}^*, \theta^*) + h\gamma \mathbf{e}_\Gamma(w, \hat{\theta}) + h\gamma \mathbf{e}_\Gamma(w^*, \hat{\theta}^*) \\
& + \frac{h^3}{3} \mathbf{f}_\Gamma(\theta, \hat{\theta}) + \frac{h^3}{3} \mathbf{f}_\Gamma(\theta^*, \hat{\theta}^*) - h\omega^2 \rho \mathbf{m}_\Gamma(w, \hat{w}) - h\omega^2 \rho \mathbf{m}_\Gamma(w^*, \hat{w}^*) \\
& - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} \mathbf{m}_\Gamma(\theta, \hat{\theta}) - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} \mathbf{m}_\Gamma(\theta^*, \hat{\theta}^*) - i\omega\rho_0 \mathbf{m}_\Gamma(p_p, \hat{w}) + i\omega\rho_0 \mathbf{m}_\Gamma(p_p^*, \hat{w}^*) ,
\end{aligned} \tag{5.74}$$

kde bilineární formy citlivostního vztahu (5.74) rozepíšeme

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_\Omega(p, \hat{p}) &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} (\nabla_z p, \nabla_z \hat{p})_{\Omega(\tau)} = \int_{\Omega} \left((\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}}) \delta_{ij} - \partial_k \mathcal{V}_j \delta_{ki} - \partial_e \mathcal{V}_i \delta_{ej} \right) \partial_j p \partial_i \hat{p}^* , \\
\mathbf{m}_\Omega(p, \hat{p}) &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} (p, \hat{p})_{\Omega(\tau)} = \int_{\Omega} p \hat{p}^* (\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}}) , \\
\mathbf{f}_\Gamma(\theta, \hat{\theta}) &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \left\langle E \mathbf{e}(\theta), \mathbf{e}(\hat{\theta}) \right\rangle_{\Gamma_P(\tau)} \\
&= \int_{\Gamma_P} \left(E_{ijkl} (\bar{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{W}}) - E_{ijkq} \frac{\partial \mathcal{W}_l}{\partial x_q} - E_{iqkl} \frac{\partial \mathcal{W}_j}{\partial x_q} \right) e_{ij}(\theta) e_{kl}(\hat{\theta}^*) , \\
\mathbf{a}_\Gamma(w, \hat{w}) &= \int_{\Gamma_P} \bar{\nabla} \hat{w}^* \cdot \bar{\nabla} w (\bar{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{W}}) - \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x_i} , \\
\mathbf{c}_\Gamma(\theta, \hat{w}) &= \int_{\Gamma_P} \bar{\nabla} \hat{w}^* \cdot \theta (\bar{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{W}}) = \int_{\Gamma_P} \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x_i} \theta_i (\bar{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{W}}) , \\
\mathbf{e}_\Gamma(\theta, \hat{w}) &= \int_{\Gamma_P} \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x_k} \theta_i , \\
\mathbf{m}_\Gamma(\theta, \hat{\theta}) &= \int_{\Gamma_P} \theta \cdot \hat{\theta}^* (\bar{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{W}}) ,
\end{aligned} \tag{5.75}$$

kde

$$\begin{aligned}
& \mathbf{a}_\Gamma(w, \hat{w}) + \mathbf{c}_\Gamma(\theta, \hat{w}) + \mathbf{c}_\Gamma(w, \hat{\theta}) + \mathbf{e}_\Gamma(\theta, \hat{w}) + \mathbf{e}_\Gamma(w, \hat{\theta}) + \mathbf{m}_\Gamma(\theta, \hat{\theta}) = \\
& = \frac{d}{d\tau}|_{\tau=0} \left\langle (\bar{\nabla}w - \boldsymbol{\theta}), (\bar{\nabla}\hat{w} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\rangle_{\Gamma_P(\tau)} \\
& = \int_{\Gamma_P} (\bar{\nabla}\hat{w}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*) \cdot (\bar{\nabla}w - \boldsymbol{\theta})(\bar{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{W}}) + \int_{\Gamma_P} \left(-\frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} - \theta_i \right) + \\
& + \int_{\Gamma_P} \left(-\frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x_i} - \hat{\theta}_i^* \right) . \tag{5.76}
\end{aligned}$$

5.4.3 Nedesignovatelný panel na hranici

V této kapitole můžeme snadno vyjít z předchozí kapitoly, kde jsme uvažovali designovatelnou hranici oblasti $\Gamma_P \subset \Omega_D$. Díky tomuto předpokladu je zde jen stručně odvozen citlivostní vztah. Uvažujeme nedesignovatelnou desku na Γ_P . Což má ve výsledku za následek zjednodušení citlivostního vztahu na vztah jako v případě s rigidní hranicí na Γ_D , ale zároveň adjungovaná úloha je identická s adjungovanou úlohou, když uvažujeme designovatelný panel na Γ_P .

Výsledná citlivost

Po vyřešení adjungované úlohy (5.60) lze již určit výslednou citlivost účelové funkce $\Phi(p)$ z totální derivaci Lagrangeovy funkce (5.55)

$$\boxed{\delta_\tau \Phi(p) = -\frac{d}{d\tau}|_{\tau=0} [\Psi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{r}}) - f(\hat{\mathbf{r}}) + \Psi(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{r}}^*) - f(\hat{\mathbf{r}}^*)] ,} \tag{5.77}$$

kde \mathbf{x} je řešení stavové úlohy (4.10)-(4.11) a $\hat{\mathbf{r}}$ je řešení adjungované úlohy (??).

Derivujeme podle τ ve směru dvou designových polí $\vec{\mathcal{V}}(x)$ a $\vec{\mathcal{W}}(x)$ v prostoru respektive v rovině desky. Bilineární formy vyhodnocované mimo designovou oblast Ω_D jsou rovny nule, jelikož jen v Ω_D jsou obě designové rychlosti nenulové.

Výpočet citlivosti pomocí materiálové derivace

Při odvození následujících vztahů vyjdeme opět z kapitoly (5.4.2), kde jsme již odvodili citlivostní vztahy (5.74). Vzhledem k faktu, že obě designové rychlosti $\vec{\mathcal{V}}$ a $\vec{\mathcal{W}}$ jsou na Γ_P nulové, je derivace všech členů přes Γ_P rovna nule. Bilineární formy na Γ_P jsou vůči τ

konstantní a optimalizací se tato oblast nemění. Konečně výsledná citlivost je identická s citlivostí (5.49) z kapitoly pro rigidní hranici na celé Ω

$$\delta_\tau \Phi(p) = \mathbf{a}_\Omega(p^*, \hat{p}^*) + \mathbf{a}_\Omega(p, \hat{p}) - \kappa^2 \mathbf{m}_\Omega(p^*, \hat{p}^*) - \kappa^2 \mathbf{m}_\Omega(p, \hat{p}) . \quad (5.78)$$

5.5 Implementace numerického řešení

K implementaci byl využit systém *SfePy* (Simple finite elements in Python) [Robert, 2016], který je z velké části napsán v programovacím jazyce *Python*. Při práci s tímto softwarem musíme uvažovat jeho jisté specifické vlastnosti. To se projeví například při implementaci řešení adjungované úlohy, při řešení úloh s poddajnou stěnou na hranici nebo při využití Spline-boxu, který je již ve *SfePy* implementován.

5.5.1 Aproximace slabých řešení pomocí MKP a jejich maticový zápis

Zde si ve zkratce naznačíme diskretizaci používaných rovnic ve smyslu MKP.

Uvažujeme slabá řešení pro akustickou tekutinu a poddajnou desku (4.10) a (4.11) a roze-píšeme je podle testovacích funkcí \mathbf{v} , z , $\boldsymbol{\psi}$ a q na

$$h \langle E \mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma_P} - h\rho\omega^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_P} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \quad (5.79)$$

$$h\gamma \langle \nabla w, \nabla z \rangle_{\Gamma_P} - h\gamma \langle \boldsymbol{\theta}, \nabla z \rangle_{\Gamma_P} - h\omega^2 \rho \langle w, z \rangle_{\Gamma_P} - i\omega\rho_0 \langle p_p, z \rangle_{\Gamma_P} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{Z}, \quad (5.80)$$

$$-h\gamma \langle \nabla w, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_P} + h\gamma \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_P} + \frac{h^3}{3} \langle E \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}) \rangle_{\Gamma_P} - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_P} = 0 \quad (5.81)$$

$$\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{P},$$

kde $\mathbb{V}, \mathbb{Z}, \mathbb{P} = H_0^1(\Gamma)$ jsou množiny funkcí respektujících okrajové podmínky.

$$(\nabla p, \nabla q)_\Omega - \kappa^2 (p, q)_\Omega + i\kappa \langle p, q \rangle_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} - 2i\kappa \langle p_A, q \rangle_{\Gamma_{in}} - i\kappa^2 \omega \langle w, q \rangle_{\Gamma_P} = 0 \quad (5.82)$$

$$\forall q \in \mathbb{Q},$$

Jednotlivé členy rovnic aproximujeme pomocí MKP a zapíšeme maticově. Rovnici (5.79) přepíšeme na

$$hA_v \mathbf{u} - h\rho\omega^2 B_v \mathbf{u} = 0, \quad (5.83)$$

kde uvažujeme tyto aproximace

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T A_v \mathbf{u} &\stackrel{MKP}{\approx} \langle E \mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma_P} , \\ \mathbf{v}^T B_v \mathbf{u} &\stackrel{MKP}{\approx} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_P} . \end{aligned} \quad (5.84)$$

Obdobně postupně aproximujeme zbylé rovnice (5.80)→(5.85), (5.81)→(5.86), (5.82)→(5.87)

$$h\gamma A_z \mathbf{w} - hB_z \boldsymbol{\theta} - h\omega^2 \rho C_z \mathbf{w} - i\omega \rho_0 \mathbf{d}_z = 0 , \quad (5.85)$$

$$-h\gamma A_\psi \mathbf{w} + h\gamma B_\psi \boldsymbol{\theta} + \frac{h^3}{3} C_\psi \boldsymbol{\theta} - \rho\omega^2 \frac{h^3}{3} D_\psi \boldsymbol{\theta} = 0 , \quad (5.86)$$

$$A_q \mathbf{p} - \kappa^2 B_q \mathbf{p} + i\kappa C_q \mathbf{p} - 2i\kappa \mathbf{p}_A - i\kappa^2 \omega D_q \mathbf{w} = 0 , \quad (5.87)$$

$$A_{q_p} \mathbf{p}_p - B_{q_p} \mathbf{p} = 0 . \quad (5.88)$$

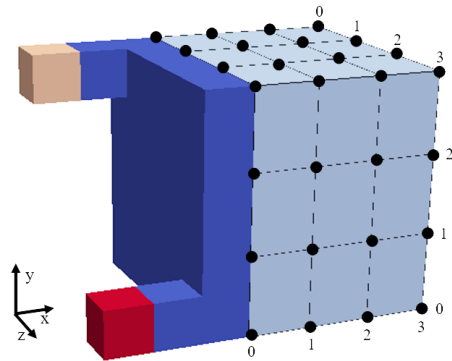
5.5.2 Spline-box

Spline-box pomáhá vytvářet geometrickou parametrizaci 2D i 3D oblastí. Použili jsme Spline-box implementovaný v systému *SfePy*. Využijeme ho k vytvoření parametrizace tvaru hranice Γ_D při hledání jejího optimálního designu. Platí $\Gamma_D \subset \Omega_D$, viz obr.(5.1), která je tvořena 3D MKP sítí, viz obr.(6.1). Zde si stručně vysvětlíme, jak Spline-box pracuje. Více lze nalézt v [Eduard, 2007].

Uvažujeme oblast Ω_D , viz obr.(5.1), a parametrizaci její hranice Γ_D , viz (5.15). Spline 3D reprezentaci pro nezměněnou Ω_D^0 zapíšeme

$$\mathbf{x}^0(x, y, z) = \sum_i^4 \sum_j^4 \sum_k^4 N_i(x) N_j(y) N_k(z) \mathbf{b}_{ijk}^0 , \quad (5.89)$$

kde $N(x)$ je B-spline báze splinů podél osy x , $N(y)$ podél y a $N(z)$ podél z . Počáteční polohu řídicích bodů určuje \mathbf{b}_{ijk}^0 . Polohu uzlů nezdeformované sítě popisuje $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$. Vytvořili jsem tedy nad Ω_D^0 3D Spline-box s 64 řídicími body, viz obr.(5.3)



Obrázek 5.3: Umístění řídicích bodů po vytvoření Spline-boxu nad Ω_D

Změnu polohy řídicích bodů popíšeme

$$\mathbf{b}_{ijk} = \mathbf{b}_{ijk}^0 + \mathbf{d}_{ijk}\alpha_{ijk} . \quad (5.90)$$

Směr této změny (pohybu) řídicích bodů určují jednotkové vektory \mathbf{d}_{ijk} a velikost této změny parametry α_{ijk} . Pro nenulové α_{ijk} platí

$$\mathbf{x}(x, y, z) = \sum_i^4 \sum_j^4 \sum_k^4 N_i(x)N_j(y)N_k(z)\mathbf{b}_{ijk} . \quad (5.91)$$

Když zderivujeme (5.91) podle α_{ijk} , dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_{ijk}} = N_i(x)N_j(y)N_k(z)\mathbf{d}_{ijk} . \quad (5.92)$$

Získáme tedy v Ω_D vektorové pole $\vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x})^{ijk}$ od parametru α_{ijk}

$$\vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x})^{ijk} = N_i(x)N_j(y)N_k(z)\mathbf{d}_{ijk} . \quad (5.93)$$

V našich úlohách optimalizace ztotožníme parametry α_i s τ . Dojdeme tedy k závěru, že úplná derivace účelové funkce Φ je vlastně derivací ve směru vektorového pole $\vec{\mathcal{V}}$

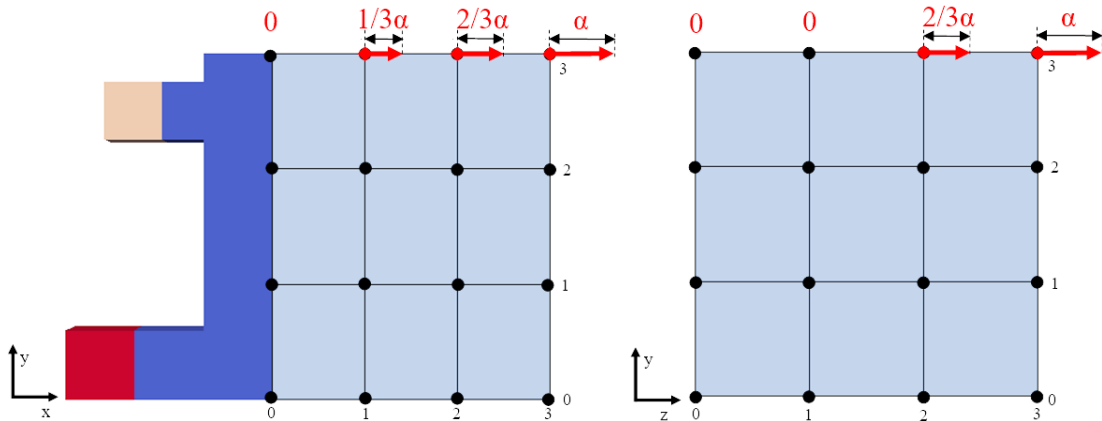
$$\boxed{\delta_{\alpha_i} \Phi = \delta_{\tau} \Phi = \delta \Phi \circ \vec{\mathcal{V}}} . \quad (5.94)$$

Tohoto faktu využíváme při odvození citlivostních vztahů (5.49) a (5.70).

5.5.3 Implementace změny tvaru výpočtové oblasti pomocí Spline-boxu

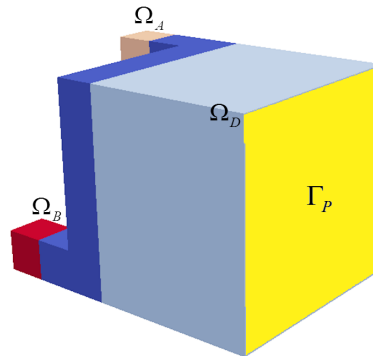
Použili jsme spline-box implementovaný v systému *SfePy*. Využili jsme ho k vytvoření parametrizace tvaru hranice Γ_D při hledání jejího optimálního designu.

Uvažujeme oblast Ω_D , viz obr.(5.1), a parametrizaci její hranice Γ_D . Vytvořili jsme nad Ω_D 3D Spline-box s 64 řídicími body, viz obr.(5.4)).



Obrázek 5.4: Spline-box - pohled z boku a ze zadní strany (Γ_P). Šipky znázorňují směr a velikost posuvu řídicích bodů Spline-boxu vzhledem k hodnotě jediného optimalizačního parametru α

Definujeme hranici s poddajnou deskou Γ_P , viz obr. (5.5)



Obrázek 5.5: Oblast s deskou Γ_P (žlutou barvou)

V rámci optimalizačních příkladů musíme respektovat rovinnost hranice Γ_P a také její designovatelnost nebo nedesignovatelnost. Vše vyplývá ze zadání příkladu. Potřebujeme tedy definovat několik různých parametrizací, neboli způsobů vhodného využití Spline-boxu. V kapitole *Optimalizační výpočty* (6) aplikujeme tyto čtyři případy označené číslováním 0, 1, 2, 3

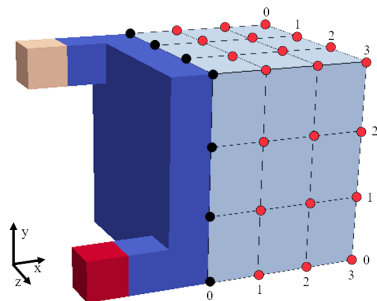
- parametrizace 0 - čistě rigidní hranici na celé $\partial\Omega$
 - řešené příklady v kapitole (6.4)

- parametrizace 1 - nedesignovatelný panel na Γ_P
 - deska se nehýbe ani nemění svůj tvar
 - řešené příklady v kapitole (6.6)
- parametrizace 2 - designovatelný panel na Γ_P (jen posun desky)
 - jen posun desky ve směru její normály, beze změny tvaru
 - řešené příklady v kapitole (6.7)
- parametrizace 3 - designovatelný panel na Γ_P (změna tvaru desky)
 - deska se nehýbe, jen změna tvaru desky
 - řešené příklady v kapitole (6.7)

Jak využíváme Spline-boxu pro jednotlivé případy rozebereme podrobněji v následujících kapitolách

Parametrizace 0

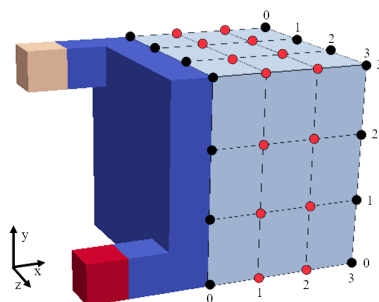
V případě pro rigidní hranici na celé Ω měníme tvar pěti stran. Uvažujeme 64 parametrů pro kontrolu polohy 48 řídicích bodů, viz obr. (5.6). S ohledem na obr.(5.4)₁ uvažujme posun řídicích bodů ve směru osy x . Parametr α_i , kde $i = 1, 2, \dots, 64$, proporcionálně řekne, o kolik se posune i -tá řada čtyř řídicích bodů. Řídicí body označím $B_{k,l,m}$, kde $k, l, m = 0, 1, 2, 3$. Když bod $B_{3,3,3}$ posuneme o nějakou příslušnou hodnotu tvarového parametru α_i ve směru $(1, 0, 0)$, tak $B_{2,3,3}$ se posune o $2/3\alpha$, $B_{1,3,3}$ o $1/3\alpha$ a $B_{0,3,3}$ o 0. Jako další parametry, viz obr.(5.4)₂, uvažujme posuny řad řídicích uzlů ve směrech os y a z . Parametr α_i , proporcionálně řekne, o kolik se posune i -tá řada dvou řídicích bodů. Když bod $B_{3,3,3}$ posuneme o nějaké α_i ve směru $(0, 0, 1)$, tak $B_{3,3,2}$ se posune o $2/3\alpha_i$, $B_{3,3,1}$ o 0 a $B_{3,3,0}$ také o 0.



Obrázek 5.6: Designové řídicí body (červenou barvou); Mohou se hýbat ve směrech souřadných os x, y, z .

Parametrizace 1

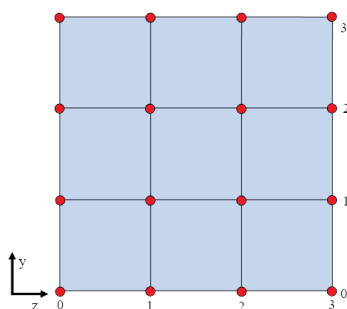
Pokud je v oblasti nedesignovatelný panel na hranici Γ_P , máme 32 opt. parametrů a využitých řídicích bodů 32, viz obr. (5.7). Řídicí body na Γ_P jsou nehybné úplně a žádný řídicí bod se nehýbe ve směru osy x . Jinak je parametrizace shodná s předchozím odstavcem.



Obrázek 5.7: Designové řídicí body (červenou barvou); Mohou se hýbat ve směrech souřadných os x, y, z .

Parametrizace 2

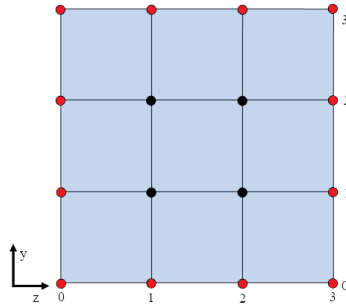
V tomto případě designovatelného panelu optimalizujeme oblast jen posunem všech 16 řídicích bodů na Γ_P ve směru osy x , viz obr. (5.8), viz (5.4)₁. Pohyb všech bodů je svázán jediným optimalizačním parametrem. Hýbeme tedy deskou translačním pohybem ve směru normály k její ploše. Během optimalizace je Γ_P stále rovina.



Obrázek 5.8: Designové řídicí body na Γ_P (červenou barvou); Mohou se hýbat ve směrech souřadné osy x .

Parametrizace 3

Při této parametrizaci uvažujeme pouze změnu tvaru desky jen v rámci její roviny na Γ_P . Designové řídicí body jsou body podél hranice Γ_P . Jde o celkem 8 řídicích bodů, které se mohou pohybovat v y -vém a z -ovém směru každý. Uvažujeme celkem 16 optimalizačních parametrů.



Obrázek 5.9: Designové řídicí body na Γ_P (červenou barvou)

5.5.4 Kontrola výsledků citlivostní analýzy pomocí konečných diferencí

V této kapitole si numericky ověříme výsledné citlivostní vztahy pro

- rigidní hranici na celé $\partial\Omega$ (5.49)
- designovatelnou poddajnou hranici Γ_P (5.74)
- nedesignovatelnou poddajnou hranici Γ_P (5.77)

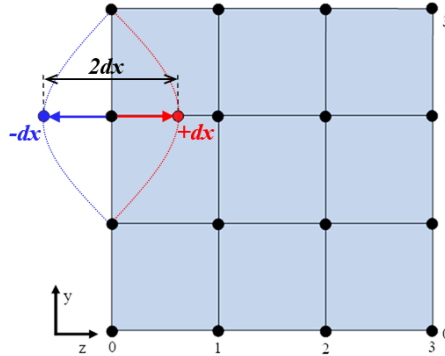
Ke kontrolnímu výpočtu použijeme konečných diferencí (KD), konkrétně centrální diference [Míka S., 2006]. Podotýkáme, že implementovat kontrolu pomocí KD je mnohdy mnohem obtížnější úkol, než implementace CA samotné.

Citlivostní analýza (CA) nám říká, jak velká je citlivost změny objektivní funkce Φ na změnu tvarových optimalizačních parametrů α_i . Citlivost danou CA označíme $\delta\Phi$ a citlivost danou KD $\Delta\Phi$. Citlivost testujeme vždy jen pro změnu jednoho parametru tj. posuv jednoho řídicího bodu ve směru jedné z souřadných os x, y, z .

Nejdříve vypočteme příslušnou stavovou a následně adjungovanou úlohu pro nedeformovanou konfiguraci a získáme $\delta\Phi$.

Pro získání $\Delta\Phi$ design zvukovodu deformujeme pohnutím říd. bodu v kladném smyslu o

$+dx$. Pro deform. konfigur. vyřešíme stavovou úlohu a následně vyhodnotíme účelovou funkci a získáme hodnotu Φ^+ . Postup opakujeme a v nedeform. konfigur. posunem stále stejný říd. bod o $-dx$ a získáme hodnotu Φ^- . Pro ilustraci lze nahlédnout do obr. (5.10)



Obrázek 5.10: Příklad aplikování centrální konečné diference

Vztah pro výpočet KD pro Φ je

$$\Delta\Phi = \frac{\Phi^+ - \Phi^-}{2dx}, \quad (5.95)$$

kde dx volíme dostatečně malé, v našem případě $dx = 10^{-6}$.

Testování provádíme samozřejmě, tak jak odpovídá zadání. Například neměníme tvar desky u případu nedesignovatelného panelu nebo nenarušujeme rovinný charakter hranice s deskou Γ_P .

Srovnáme citlivosti jen pro účelovou funkci $\Phi_2 = -T_{AB}$. Výsledky porovnání CA a KD zapíšeme do tabulky (5.1) jako relativní odchylky r spočtené takto

$$r = \left| \frac{\delta\Phi_2 - \Delta\Phi_2}{\Delta\Phi_2} \right|. \quad (5.96)$$

Tabulka 5.1: Porovnání citlivostní analýzy a konečných diferencí pro tři frekvence. Každé pole reprezentuje spočtenou příslušnou hodnotu r dle vzorce 5.96

f [Hz]	200	300	600
Rigidní stěny	4.13e-08	2.94e-07	-9.16e-06
Design.deska	2.04e-03	5.51e-04	1.54e-03
Nedesign.deska	3.36e-07	2.66e-07	1.68e-07

Z tabulky (5.1) je vidět, že CA a KD se shodují nejlépe pro vlnovod modelovaný s kompletně rigidními stěnami nebo pro model nedesignovatelnou deskou. Zde citlivost sedí

spolehlivě.

Varianta s designovatelnou deskou vychází o tři až čtyři řády hůře. Parciální citlivostní vzorce (5.74) jsou otestovány a zřejmě může být numerická chyba zanesena při výpočtu citlivosti od dynamických členů desky (členy s $\rho\omega^2$). Chybu může způsobovat také to, že stavové proměnné a hlavně adjungované proměnné desky vychází velmi malé (až 10^{-8}). Pro takto malé hodnoty mohou nastávat numerické chyby. Třetí možností je, že CA je správně a chybný je ověřovací výpočet KD pro tuto variantu, který se ukázal být komplikovanější než u ostatních variant.

6 Optimalizační výpočty

V této kapitole optimalizujeme tvar zvukovodu (5.1) při minimalizaci jedné účelové funkce z (5.6). V předchozích kapitolách jsme odvodili a definovali nástroje potřebné pro úspěšné provedení optimalizačních úloh pro tři případy - případ s rigidní hranicí na celé Ω , případ s nedesignovatelnou deskou na Γ_P a designovatelnou deskou na Γ_P . Pro všechny tyto tři možnosti máme z minulých kapitol odvozeny citlivostní vztahy (5.49), (5.77) a (5.74) efektivně poskytující citlivost účelových funkcí na změnu tvaru zvukovodu.

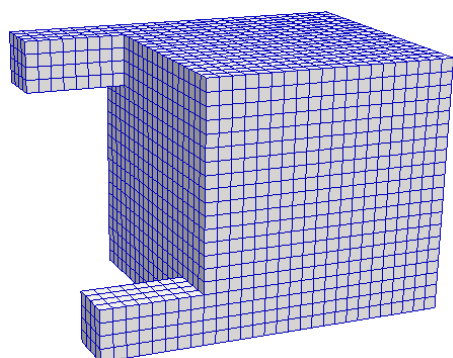
Postupně si představíme diskretizaci našeho modelu, kdy použijeme metodu konečných prvků (MKP). Řekneme něco k použitým účelovým funkcím a soustředíme se na funkci neprozvučnosti (transmission loss). Definujeme dle uvážení vhodnou parametry obou modelovaných kontinuí - desky a akustické kavity.

V samotné optimalizaci se nejprve zabýváme případem s rigidní stěnou. Pak přecházíme k příkladům se poddajnou deskou, kde ukážeme několik dalších výpočtů týkajících se vlastních frekvencí modelované desky a vlivu tloušťky desky. Úlohy optimalizace s deskou rozdělíme na dvě větší podkapitoly pro designovatelnou a nedesignovatelnou desku.

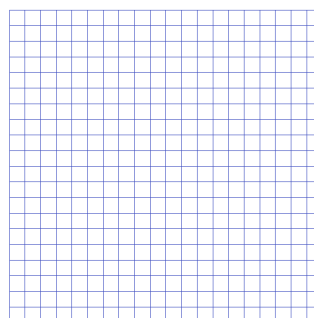
6.1 Zvolená MKP diskretizace

Naši modelovanou oblast (5.1) diskretizujeme pomocí MKP. Připravíme síť jak akustické kavity, tak i poddajných desek.

Definujeme rozměry zvukovodu (5.1). Jedná se o pravidelnou krychli o straně $a = 1$ [m], do které ústí dva kanály o délce $l = 0.4$ [m]. Hrany vstupu Γ_{in} a výstupu Γ_{out} měří $b = 0.2$ [m]. Na úvod ukážeme použitou MKP síť modelované oblasti Ω , viz obr. (6.1). Ta je tvořena výhradně pravidelnými krychlemi. Hrana každého elementu má přesně rozměr 0.05 [m]



Obrázek 6.1: MKP síť oblasti Ω - 8128 elementů, 9661 stupňů volnosti



Obrázek 6.2: MKP síť jedné desky na hranici Γ_P - 400 elementů, 441 stupňů volnosti

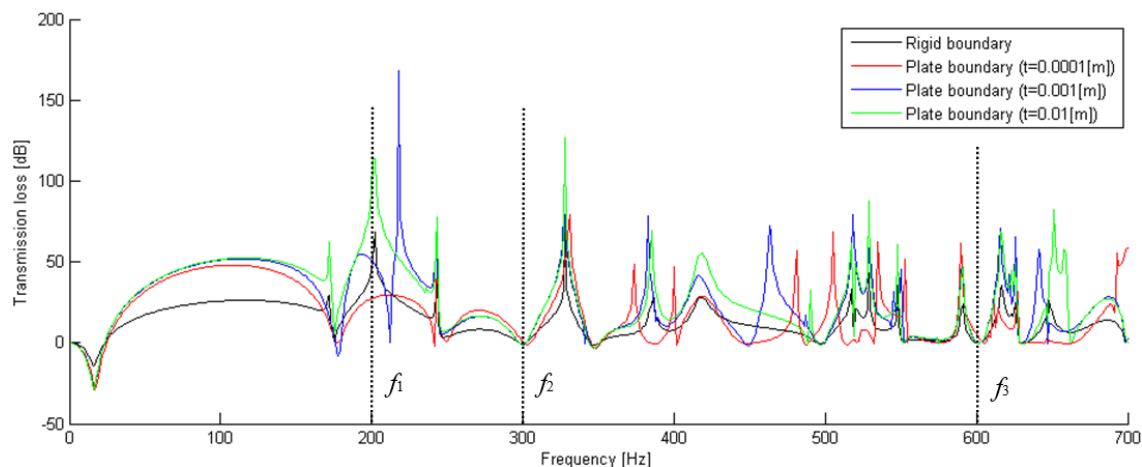
Síť volíme s touto hustotou, abychom dostali numericky správné řešení pro vyšší frekvence. Dle zdroje [S., 2008] je v pořádku použít mezi 6 a 10 elementy na jednu vlnovou délku. My nechceme nepřekročit počet 8 elementů na nejkratší vlnovou délku. Pak je limitní frekvencí 857.5 [Hz]. Nicméně my se pohybujeme během našich výpočtů v ještě nižších frekvencích.

Na modelování desek na Γ_P použijeme síť 2D shell elementů stejných rozměrů jako v případě kavity, viz obr. (6.2). Hrana každého elementu má přesně rozměr 0.05 [m]

6.2 Vyhodnocení účelové funkce v neoptimalizované oblasti

V příkladech optimalizace využijeme hlavně účelové funkce Φ_2 a maximalizujeme tedy útlum průchodu zvukové vlny z Ω_A do Ω_B . Nás zajímá závislost $T_{AB} = T_{AB}(f)$ před a po optimalizaci. Můžeme si ukázat pro ilustraci křivku pro neoptimalizovaný design.

Konkrétně příklad neprozvučnosti $T_{AB} = T_{AB}(f)$ pro oblast Ω viz (5.1) s akusticky tvrdou stěnou (černá křivka), respektive s jednou poddajnou stěnou (ostatní barvy), vypadá ve frekvenčním pásmu následovně



Obrázek 6.3: Transmission loss (neprozvučnost) [dB] napříč námi sledovaným frekvenčním pásmem 1 – 700 [Hz]

Pro frekvence, kde jsou píky nejvyšší (např. pro $f_1 = 200[\text{Hz}]$) platí, že námi zvolená geometrie vykazuje nejvyšší útlum. Neboli rozdíl tlaků v oblastech Ω_A a Ω_B je nejvyšší právě pro tyto frekvence.

Naopak v místech kde T_{AB} nabývá nejmenších hodnot (např. pro $f_2 = 300[\text{Hz}]$), je útlum nejmenší. Pro tyto frekvence s nejmenším T_{AB} optimalizujeme tvar Ω_D s ohledem na účelovou funkci $\Phi_2 = -T_{AB}$. Po provedení tvarové optimalizace opět vyhodnocujeme T_{AB} v již optimalizovaném tvaru. Jako očekávaný výsledek by mělo být zřejmé posunutí píky do frekvence, pro kterou optimalizujeme (např. pro f_2). My frekvence volíme dle vlastního uvážení. V inženýrské praxi bychom volili takovou frekvenci pro optimalizaci, které odpovídají běžné podmínky chodu nějakého zařízení (např. provozní otáčky motoru).

Z grafu je také zřejmé, že poddajná hranice vykazuje lepší tlumící schopnosti v porovnání s akusticky tuhou stěnou. Toto se děje díky přeměně části šířené energie na deformační energii v poddajné Reissner-Mindlin desce na hranici Γ_P . Z obrázku (6.3) je patrné, že pro různé tloušťky desky na hranici Γ_P se nám neprozvučnost mění podél celého frekvenčního pásu ale například pro $f_2 = 300; [\text{Hz}]$ zůstává podobná. Proto se v následujících příkladech optimalizace zaměříme hlavně na tuto frekvenci.

6.3 Parametry úloh

Vzhledem modelování dvou kontinuí - akustické tekutiny a poddajné desky, potřebujeme znát jejich vhodně zvolené reálné parametry. Je také nutné zadefinovat parametry incidenční vlny. A v neposlední řadě zvolit omezení tvarových optimalizačních parametrů.

Hodnoty všech optimalizačních parametrů α_ν vždy omezíme shora (α_u) i zdola (α_l) stejně.

Počáteční hodnoty α_0 vždy uvažujeme nulové

$$\begin{aligned}\alpha_u &= 0.2 [m] \\ \alpha_l &= 0.2 [m] \\ \alpha_0 &= 0 .\end{aligned}\tag{6.1}$$

Tyto hodnoty se zdají vhodné, protože pro ně síť během optimalizace tolik nedegeneruje. Jako akustické médium v kavitě volíme vzduch při teplotě 20°C. Při této teplotě hodnoty parametrů vzduchu jsou následovné

$$\begin{aligned}\rho_{air} &= 1.2041 [kg/m^3] \\ p_a &= 50 [Pa] \\ c &= 343.21 [m/s] ,\end{aligned}\tag{6.2}$$

kde ρ_{air} je hustota vzduchu, p_a je amplituda incidenční vlny a c je rychlost šíření zvukové vlny vzduchem.

Materiálem pro desku zvolíme ocel, jejíž parametry jsou následující

$$\begin{aligned}\rho_{steel} &= 7850 [kg/m^3] \\ E &= 210 [GPa] \\ \nu &= 0.3 [-] \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 80.769 [GPa] \\ \gamma &= \frac{5}{6}G = 67.308 [GPa]\end{aligned}\tag{6.3}$$

$$t_1 = 0.0001 [m]; t_2 = 0.001 [m]; t_3 = 0.01 [m] ,$$

kde ρ_{steel} je hustota oceli, E je Youngův modul pružnosti, ν je Poissonovo číslo, G je modul pružnosti ve smyku, γ je korigovaný G a $t_{1,2,3}$ jsou tři volené tloušťky desky.

Oblast zvukovodu Ω je zatěžována zvukovou vlnou vcházející skrze Γ_{in} o frekvenci f a amplitudě akustického tlaku p_a

$$\begin{aligned}p_a &= 50 [-] \\ f_1 &= 200 [Hz]; f_2 = 300 [Hz]; f_3 = 600 [Hz] ,\end{aligned}\tag{6.4}$$

kdy se koncentrujeme jen na tyto tři frekvence $f_{1,2,3}$.

6.4 Oblast s rigidní stěnou

Zde uvedeme několik příkladů optimalizace oblasti (5.1), kdy uvažujeme podél celé hranice Γ akusticky tuhé stěny

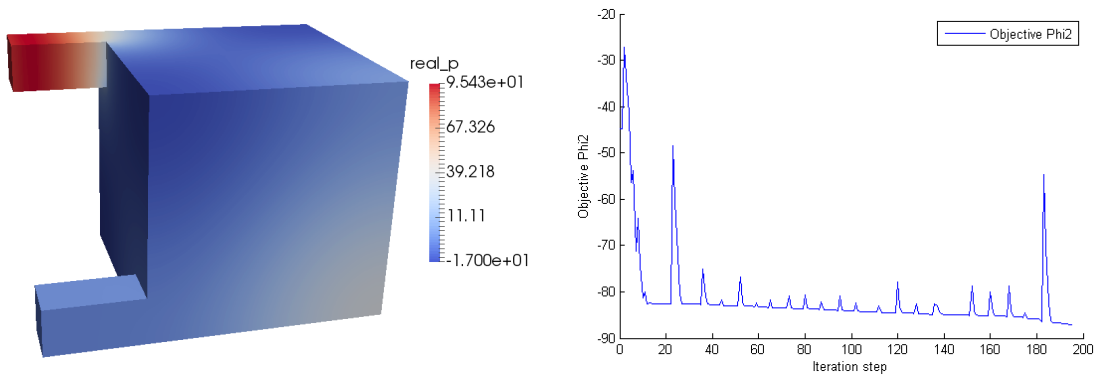
$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 .\tag{6.5}$$

Parametry úloh jsou (6.2) a (6.4). K parametrizaci použijeme Spline-boxu tak, abychom mohli optimalizovat tvar celé hranice Γ_D , viz (5.5.3)

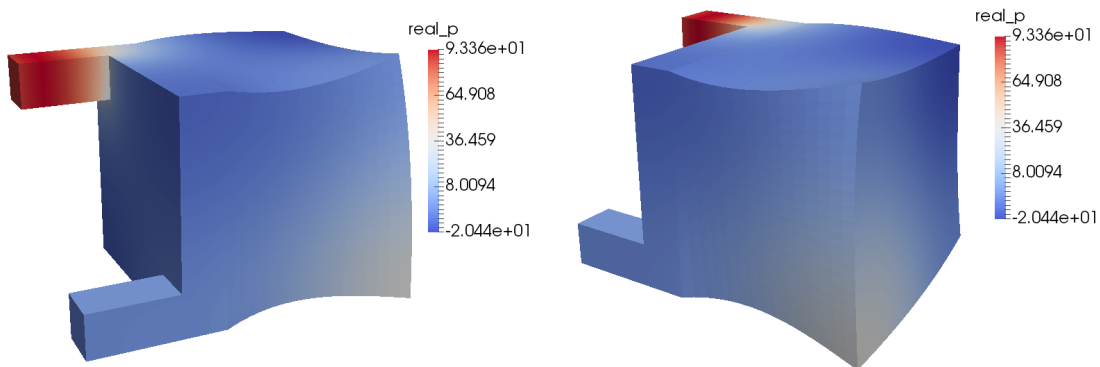
Příklady rozdělíme podle tří uvažovaných frekvencí $f_{1,2,3}$.

Vždy ukážeme řešení akustický tlak p v neoptimalizovaném designu, viz. obr. (6.4)₁, (6.7)₁ a (6.10)₁, graf poklesu účelové funkce, viz obr. (6.4)₂, (6.7)₂ a (6.10)₂, a nově optimalizovaný tvar s opět zobrazeným p , viz obr. (6.5), (6.8) a (6.11). Nakonec představíme graf funkce T_{AB} v okolí frekvence, pro kterou optimalizujeme, aby bylo zřejmé, jestli a jak se nám posunou píky (nejvyšší útlum), viz obr. (6.6), (6.9) a (6.12).

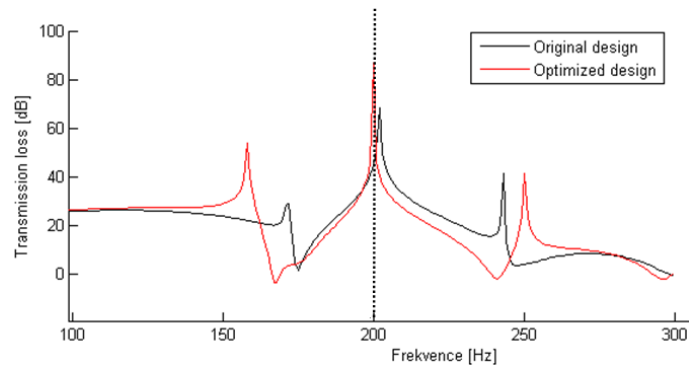
Frekvence 200 [Hz], parametrizace 0



Obrázek 6.4: *Nalevo*: Neoptimalizovaná oblast pro frekvenci 200 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem p [Pa]; *Napravo*: graf závislosti hodnoty účelové funkce Φ_2 na iteraci optimalizace

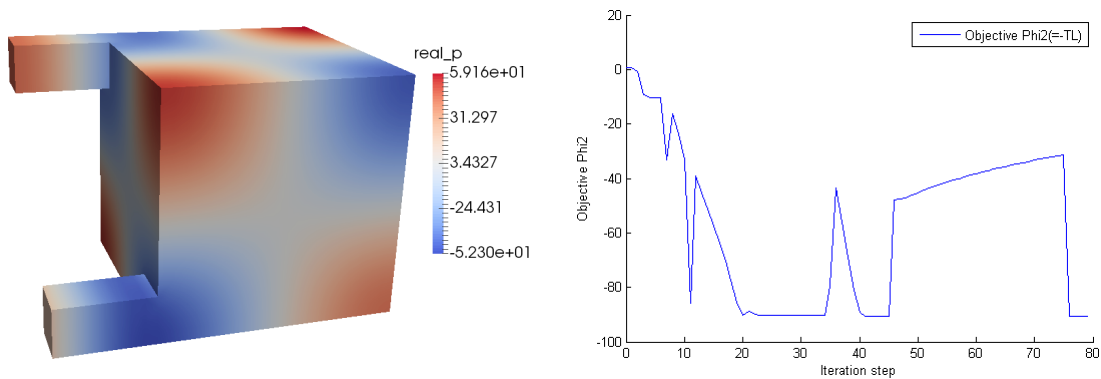


Obrázek 6.5: Optimalizovaná oblast pro frekvenci 200 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem p

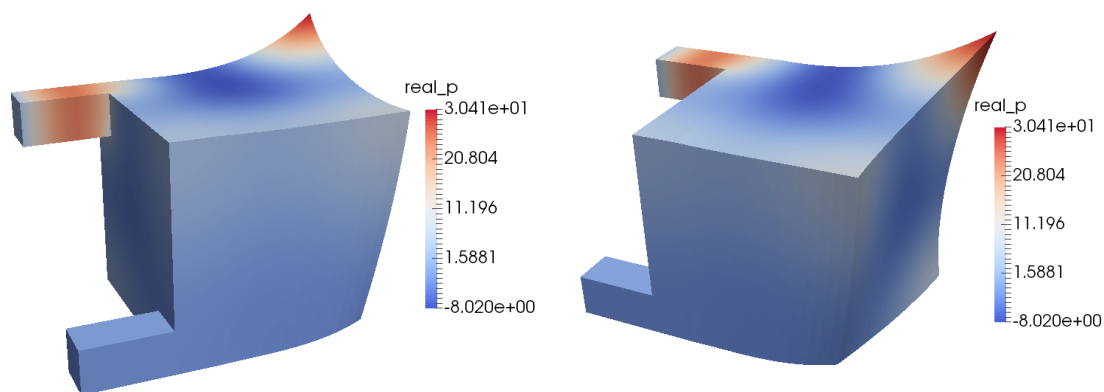


Obrázek 6.6: Porovnání křivek neprozvučností, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

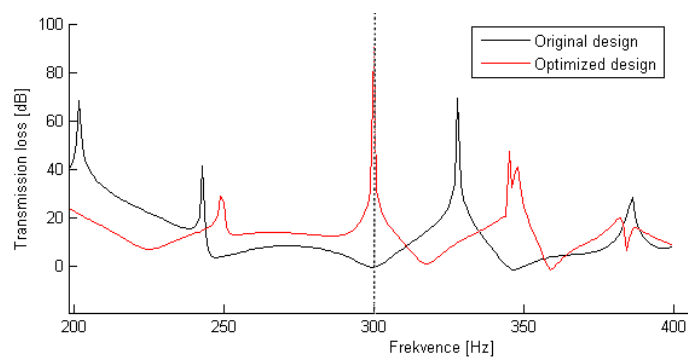
Frekvence 300 [Hz], parametrizace 0



Obrázek 6.7: *Nalevo*: Neoptimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem $p[Pa]$; *Napravo*: graf závislosti hodnoty účelové funkce Φ_2 na iteraci optimalizace

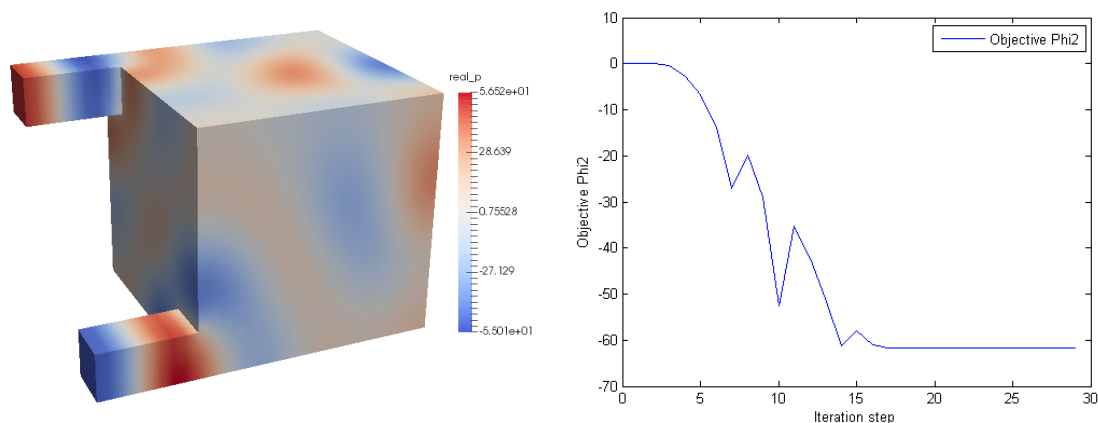


Obrázek 6.8: Optimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem $p[Pa]$

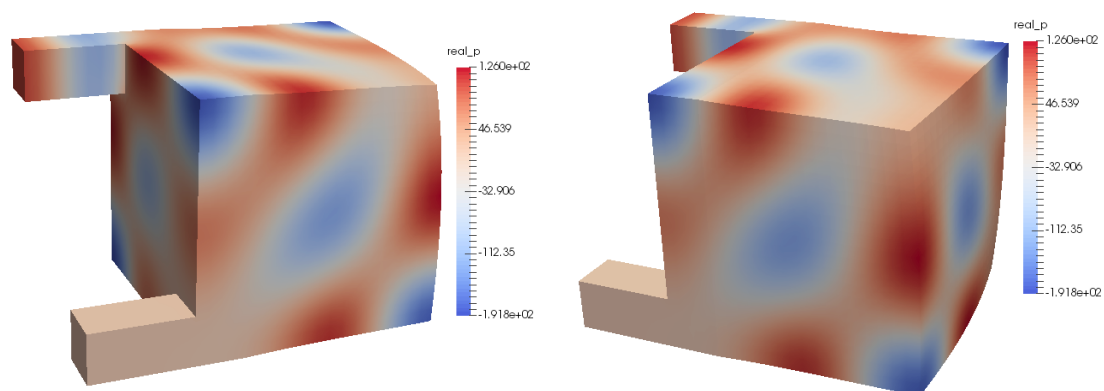


Obrázek 6.9: Porovnání křivek neprozvučností, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

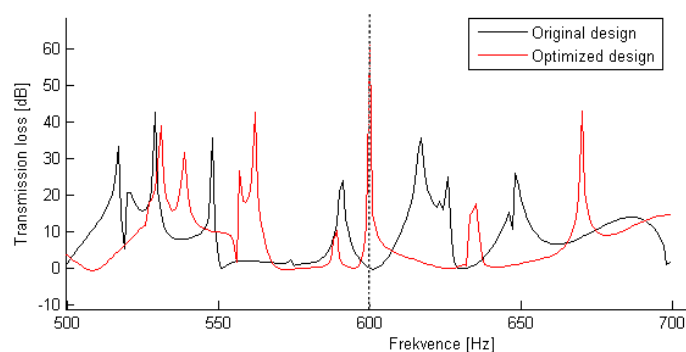
Frekvence 600 [Hz], parametrizace 0



Obrázek 6.10: *Nalevo*: Neoptimalizovaná oblast pro frekvenci 600 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem p ; *Napravo*: graf závislosti hodnoty účelové funkce Φ_2 na iteraci optimalizace



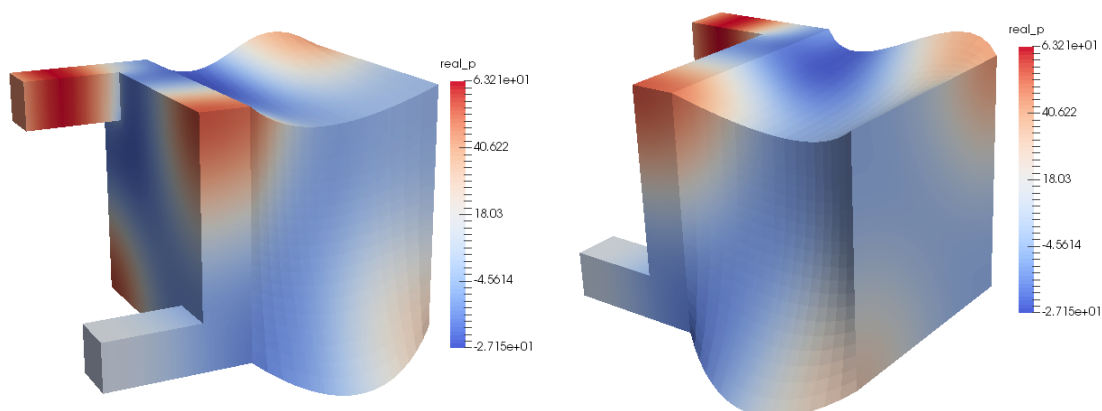
Obrázek 6.11: Optimalizovaná oblast pro frekvenci 600 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem p [Pa]



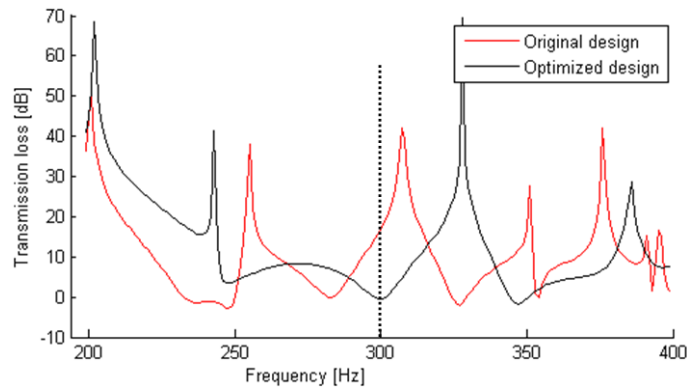
Obrázek 6.12: Porovnání křivek neprozvučnosti, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

Frekvence 300 [Hz], parametrizace 1

Zde uvádíme příklad, kde stejně jako u úlohy s nedesignovatelným panelem, viz (5.5.3), parametrizujeme i úlohu s rigidní hranicí tak, že hranice Γ_P zůstává nehybná. Ukážeme řešení akustický tlak p v optimalizovaném designu, viz. obr. (6.13)₁. Nakonec představíme graf funkce T_{AB} v okolí frekvence f_2 , aby bylo zřejmé, jestli a jak se nám posunou píky (nejvyšší útlum), viz obr. (6.14).



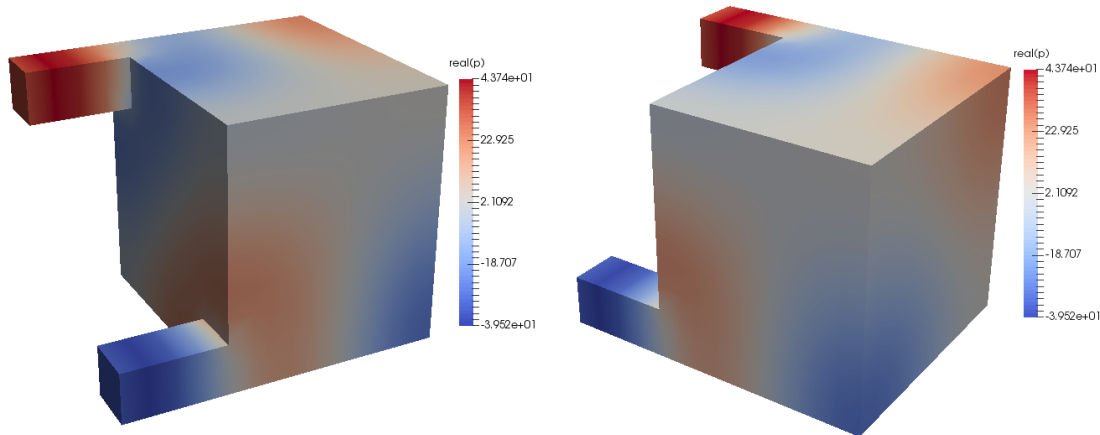
Obrázek 6.13: Optimalizovaná oblast s rigidní hranicí pro frekvenci 300 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem $p[Pa]$ parametrizovaná stejně jako příklady s nedesignovatelnou deskou na hranici Γ_P



Obrázek 6.14: Porovnání křivek neprozněvností, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

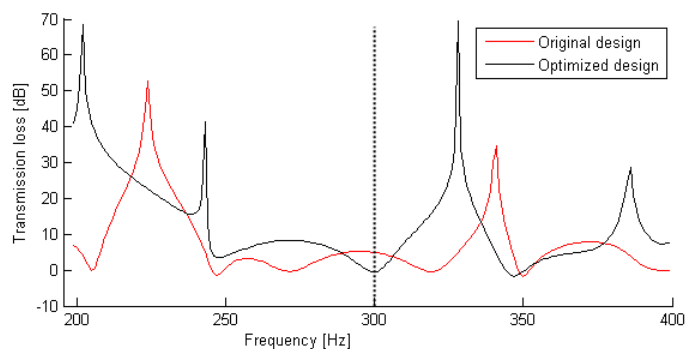
Frekvence 300 [Hz], parametrizace 2

Zde uvádíme příklad, kde stejně jako u úlohy s nedesignovatelným panelem, viz (5.5.3), parametrizujeme i úlohu s rigidní hranicí tak, že optimalizujeme jen polohu hranice Γ_P . Ukážeme řešení akustický tlak p v optimalizovaném designu, viz. obr. (6.15)₁. Nakonec představíme graf funkce T_{AB} v okolí frekvence f_2 , aby bylo zřejmé, jestli a jak se nám posunou píky (nejvyšší útlum), viz obr. (6.16), (6.16).



Obrázek 6.15: Optimalizovaná oblast s rigidní hranicí pro frekvenci 300 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem p [Pa] parametrizovaná stejně jako příklady s nedesignovatelnou deskou na hranici Γ_P

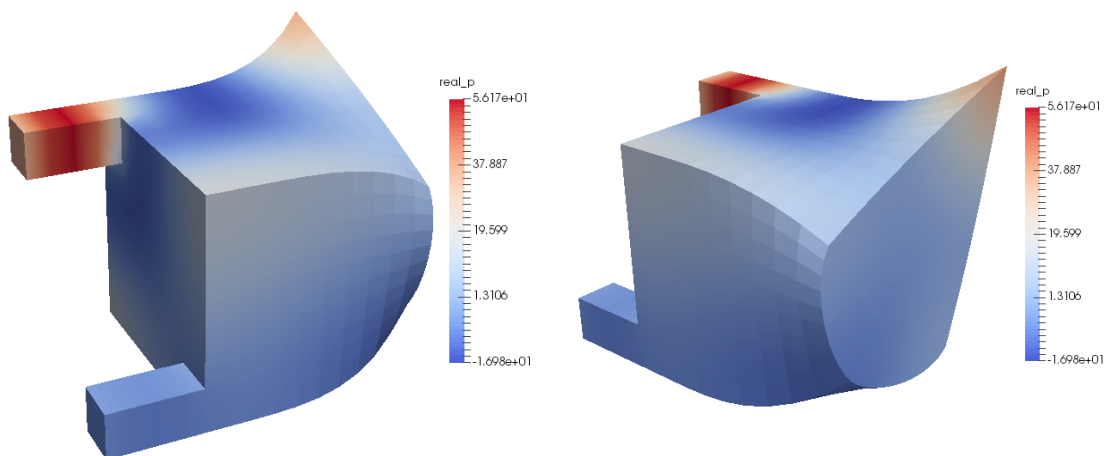
Stěna se posunula od -0.154 [m] v záporném směru osy x .



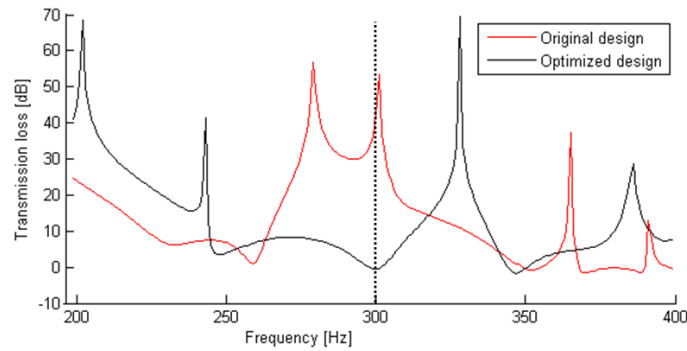
Obrázek 6.16: Porovnání křivek neprozvučnosti, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

Frekvence 300 [Hz], parametrizace 3

Zde uvádíme příklad, kde stejně jako u úlohy s nedesignovatelným panelem, viz (5.5.3), parametrizujeme i úlohu s rigidní hranicí tak, že optimalizujeme jen tvar hranice desky na Γ_P . Ukážeme řešení akustický tlak p v optimalizovaném designu, viz. obr. (6.17)₁. Nakonec představíme graf funkce T_{AB} v okolí frekvence f_2 , aby bylo zřejmé, jestli a jak se nám posunou píky (nejvyšší útlum), viz obr. (6.42).



Obrázek 6.17: Optimalizovaná oblast s rigidní hranicí pro frekvenci 300 [Hz] se zobrazeným akustickým tlakem p [Pa] parametrizovaná stejně jako příklady s nedesignovatelnou deskou na hranici Γ_P



Obrázek 6.18: Porovnání křivek neprozvučnosti, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

6.5 Oblast s poddajnou stěnou

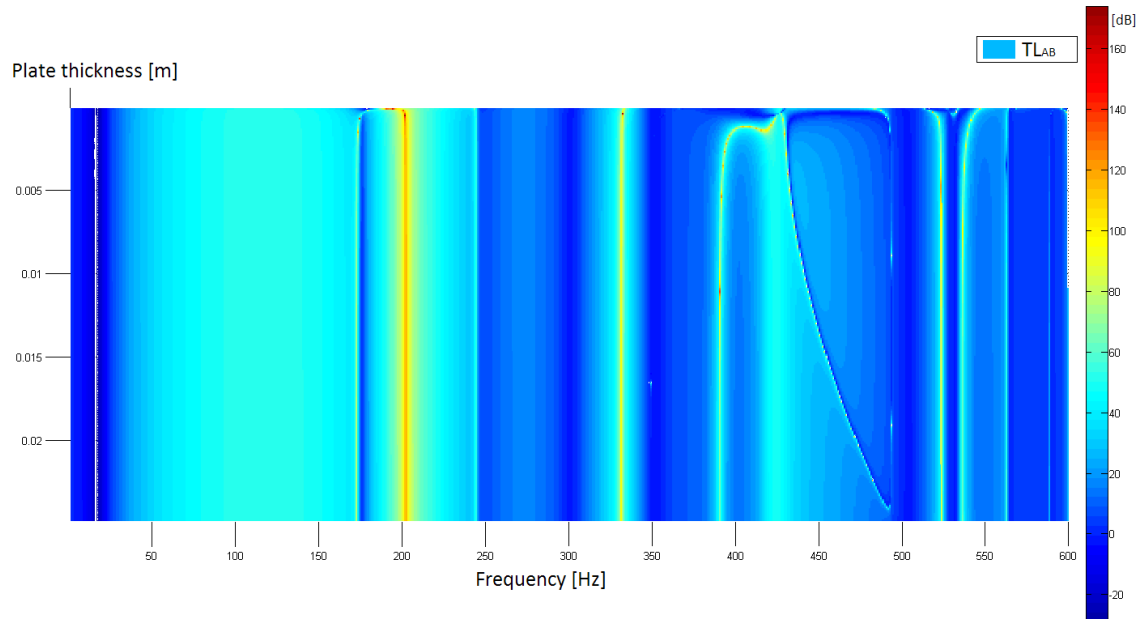
Zde uvedeme několik MKP příkladů oblasti zvukovodu (5.1), kdy uvažujeme podél celé hranice Γ akusticky tuhé stěny. Jen na Γ_P je poddajná deska, kterou uvažujeme vetknutou podél celé její hranice

$$w = 0, \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Gamma_P. \quad (6.6)$$

Parametry úlohy jsou výchozí hodnoty definované v (6.2), (6.3) a (6.4).

6.5.1 Analýza vlivu tloušťky desky na hodnotu neprozvučnosti

Tloušťka stěny poddajné desky na hranici má určitě vliv na přenos zvuku skrz oblast zvukovodu Ω . Uvažujeme model s jednou poddajnou deskou na $\Gamma_{P0} \subset \Gamma_D$, viz (6.25). Provedeme sérii MKP výpočtů, kdy vyhodnocujeme funkci neprozvučnosti T_{AB} [dB] v závislosti na frekvenci f [Hz] a tloušťce stěny t [m]. Výsledkem je graf závislosti $T_{AB} = T_{AB}(f, t)$, viz obr. (6.19)



Obrázek 6.19: Graf závislosti neprozvučnosti $T_{AB} = T_{AB}(f, t)[dB]$ na frekvenci $f[Hz]$ a tloušťce stěny $t[m]$

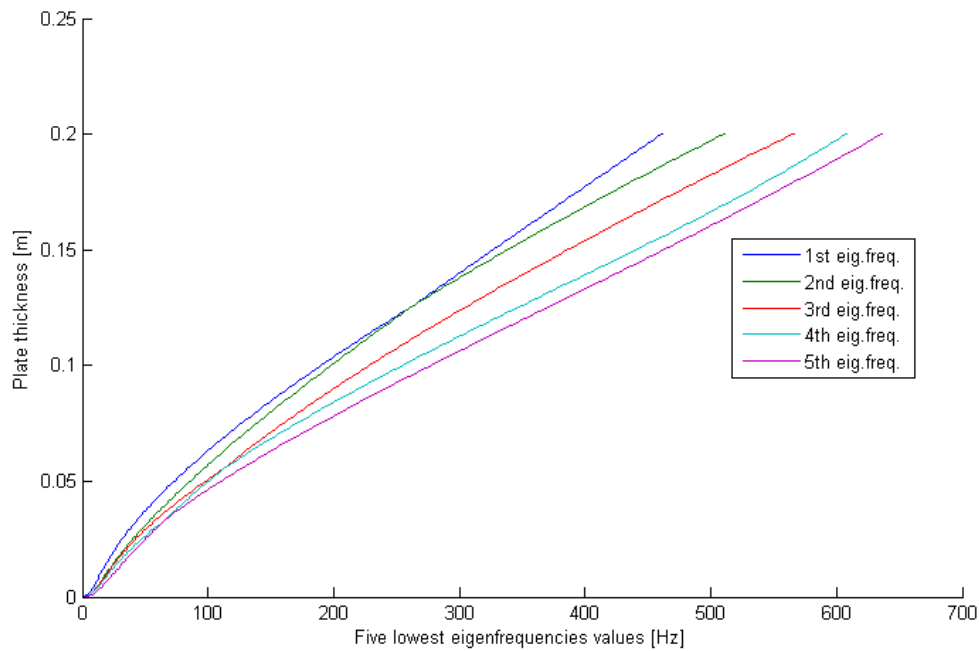
Lze z této zobrazené závislosti usoudit, že pro $f < 300 [Hz]$ neprozvučnost nezávisí na tloušťce desky, pokud deska není velmi tenká $t < 0.001 [m]$. Ve vyšších frekvencích je už patrná závislost na t .

6.5.2 Analýza vlivu tloušťky desky na její vlastní frekvence

Zde zkoumáme vliv tloušťky t na vlastní frekvence λ_i desky. Předpokládáme totiž, že se na výsledku optimalizace také projevují vlastní frekvence desky a to právě hlavně tehdy, když jako incidenční frekvenci nastavíme jednu z vlastních frekvencí.

Uvažujeme desku podél celé své hranice vetknutou a mající parametry viz (6.3).

Potom závislost prvních pěti vlastních frekvencí $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ na tloušťce t .

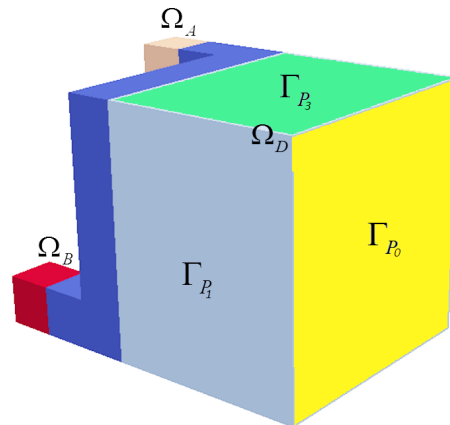


Obrázek 6.20: Závislosti prvních pěti vlastních frekvencí $\lambda_i = \lambda_i(t)$ na tloušťce t

Z obr. (6.20) vidět, že existuje nelineární závislost mezi hodnotami vlastních frekvencí desky λ_i a její tloušťkou t .

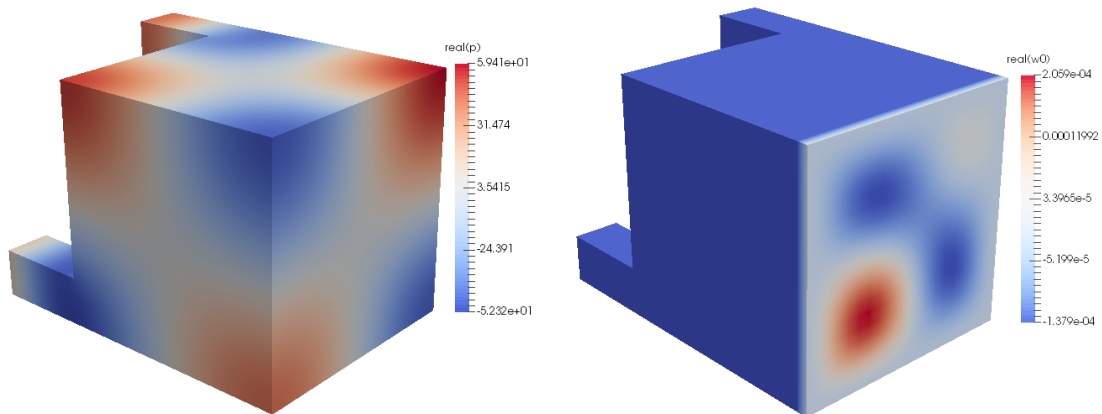
6.5.3 Příklad MKP řešení příkladu vibroakustiky

Zde si představíme model zvukovodu, kdy uvažujeme okolo naší oblasti Ω pět poddajných desek. Parametry úlohy jsou stejné jako v (6.3), (6.2), (6.4) a (6.1). Tloušťku všech stěn volíme jednotnou $t_3 = 0.01$ [m] a frekvenci $f_2 = 300$ [Hz]. Uvažujeme sice pět poddajných desek, ale z důvodu úspory prostoru se podrobněji podíváme jen na tři desky Γ_{P_0} , Γ_{P_1} a Γ_{P_3} , definované na obr. (6.21)

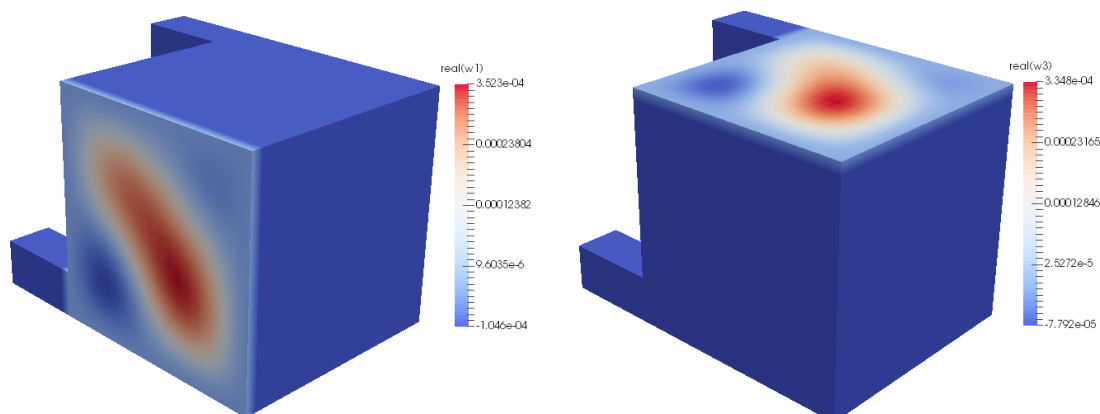


Obrázek 6.21: Definování tří zájmových desek Γ_{P_0} , Γ_{P_1} , Γ_{P_3} na hranici Γ_D

Pro ilustraci si zobrazíme akustický tlak $p[Pa]$ v obr. (6.22) a výsledné jednotlivé průhyby desek $w_0[m]$ v obr. (6.22), $w_1[m]$ a $w_3[m]$ v obr. (6.23)

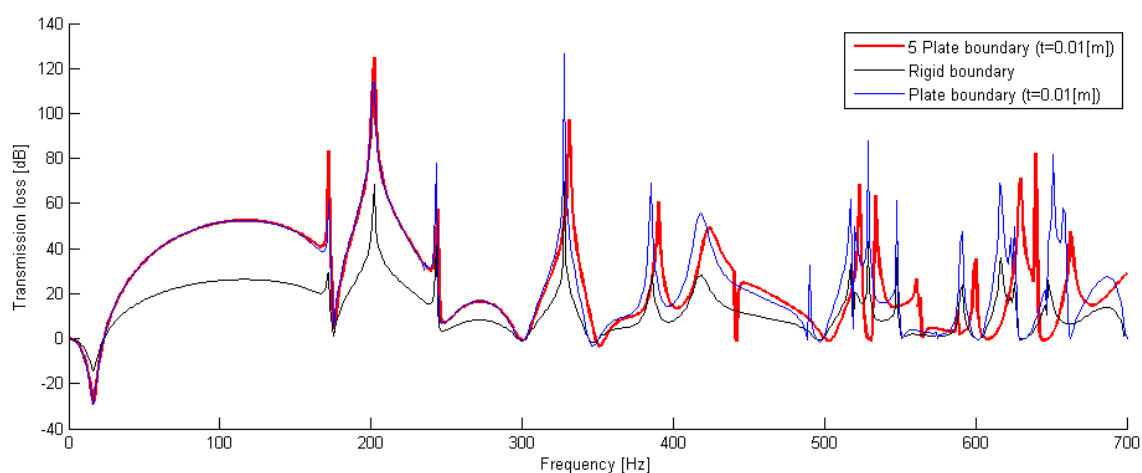


Obrázek 6.22: *Nalevo*: akustický tlak $p [Pa]$ pro frekvenci $f_3[Hz]$; *Napravo*: průhyb desky $w_0 [m]$ na Γ_{P_0}



Obrázek 6.23: *Nalevo*: průhyb desky w_1 [m] na Γ_{P_1} ; *Napravo*: průhyb desky w_3 [m] na Γ_{P_3}

Porovnáme neprozvučnost zvukovodu s pěti poddajnými stěnami (červená), s jednou poddajnou stěnou (modrá) a rigidní hranicí (černá) na obr. (6.24)

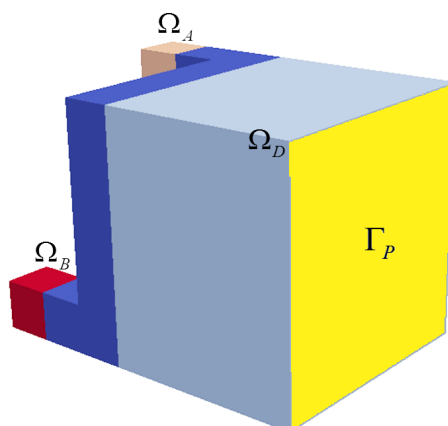


Obrázek 6.24: Transmission loss (neprozvučnost) [dB] napříč námi sledovaným frekvenčním pásmem 1 – 700 [Hz]

Z obr. obr. (6.24) lze usoudit, že pro $f < 300$ [Hz] je neprozvučnost zvukovodu s jednou a pěti stěnami velmi podobná. Pro frekvence cca $f > 300$ [Hz] se už píky už neprozvučnosti pro případ jedné a pěti desek liší výrazněji. Zase se potvrzuje, že model s uvažováním poddajných stěn má lepší tlumící schopnosti než jen s čistě rigidní hranicí.

6.6 Oblast s nedesignovatelnou poddajnou stěnou

V této kapitole uvažujeme jen jednu frekvenci a to $f_3 = 300 [Hz]$. Spíše nás zajímá vliv tloušťky desky na výsledný tvar zvukovodu po optimalizaci. Poddajnou desku definujeme na jedné straně Γ_P naší modelové oblasti Ω_D , jak lze vidět v obr. (6.25). Parametry úlohy volíme stejné jako v (6.3), (6.2), (6.4) a (6.1).

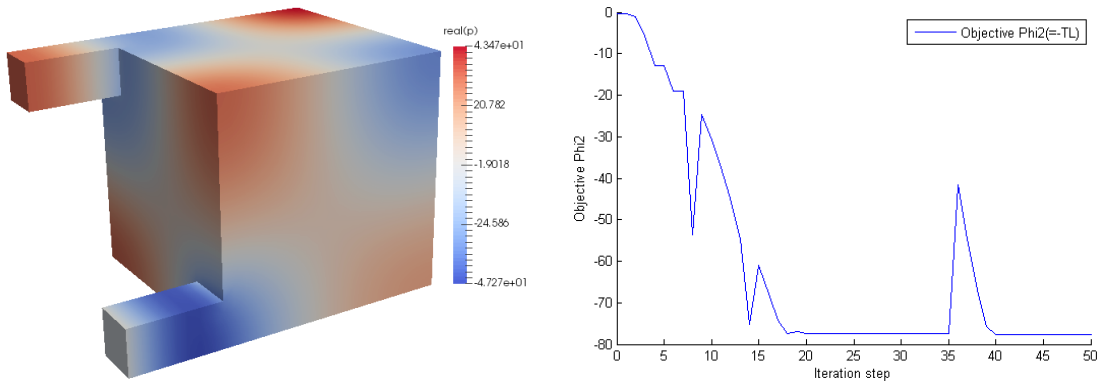


Obrázek 6.25: Oblast s deskou Γ_P (žlutou barvou)

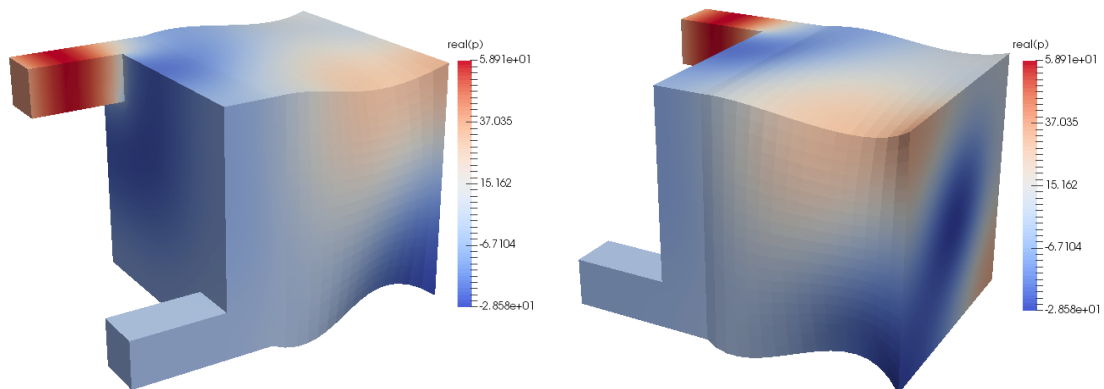
6.6.1 Analýza vlivu tloušťky desky na výsledný tvar

Zde se zaměříme na tři tloušťky desky $t_{1,2,3}$ a provedeme optimalizace. Příklady rozdělujeme podle tří uvažovaných tlouštěk. Vždy ukážeme řešení akustický tlak p v neoptimalizovaném designu, viz. obr. (6.26)₁, (6.29)₁ a (6.32)₁, graf poklesu účelové funkce, viz obr. (6.26)₂, (6.29)₂ a (6.32)₂, a nově optimalizovaný tvar s opět zobrazeným p , viz obr. (6.27), (6.30) a (6.33). Nakonec představíme graf funkce T_{AB} v okolí frekvence, pro kterou optimalizujeme, aby bylo zřejmé, jestli a jak se nám posunou píky (nejvyšší útlum), viz obr. (6.28), (6.31) a (6.34).

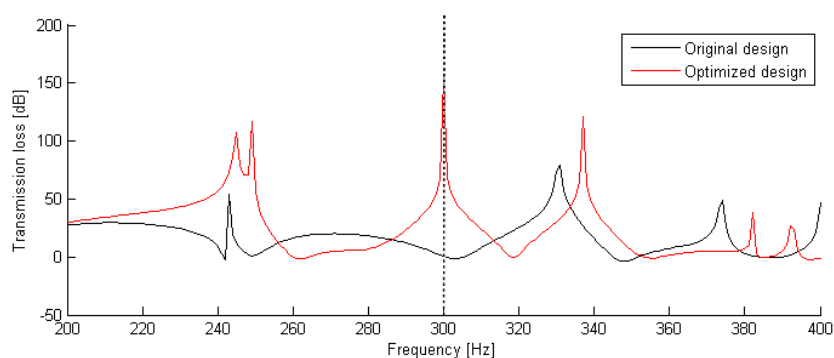
Tloušťka desky 0.0001 [m]



Obrázek 6.26: *Nalevo*: Neoptimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] a tloušťku desky 0.0001 [m]; *Napravo*: graf závislosti hodnoty účelové funkce Φ_2 na iteraci optimalizace

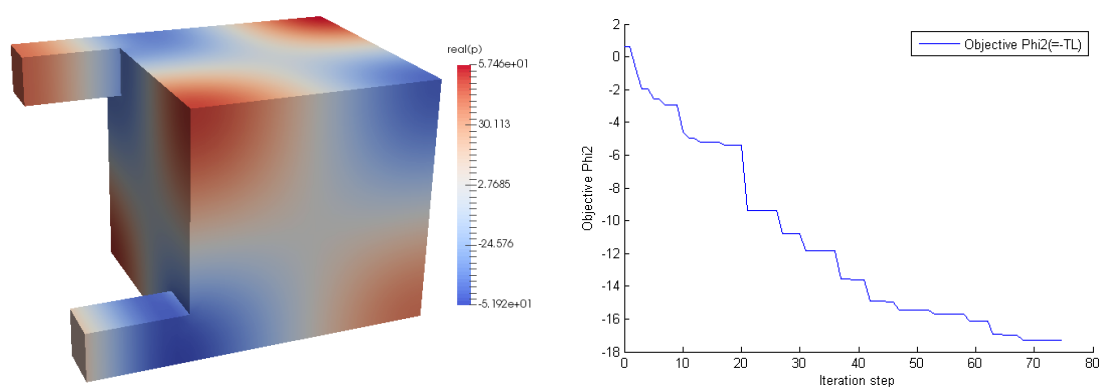


Obrázek 6.27: Optimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] a tloušťku desky 0.0001 [m]

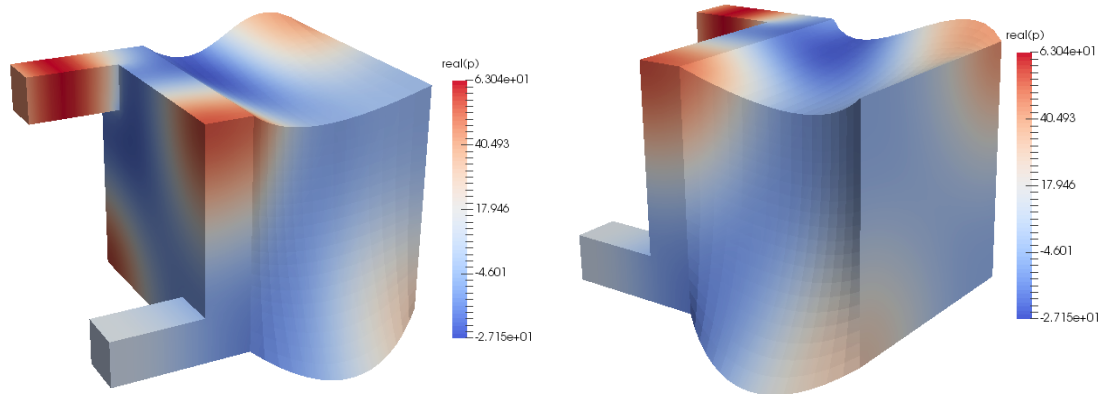


Obrázek 6.28: Porovnání křivek neprozvučnosti, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

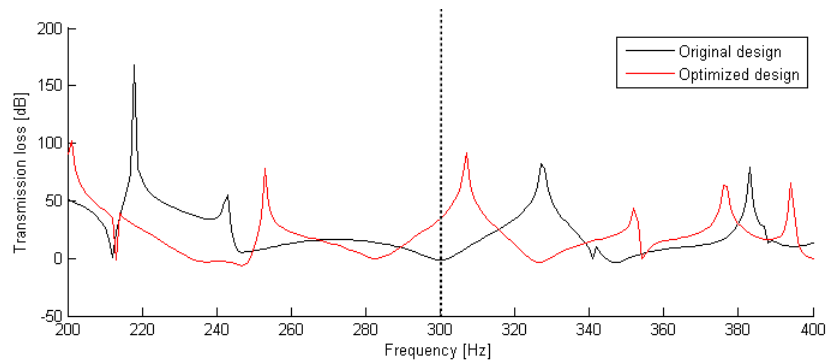
Tloušťka desky 0.001 [m]



Obrázek 6.29: *Nalevo*: Neoptimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] a tloušťku desky 0.001 [m]; *Napravo*: graf závislosti hodnoty účelové funkce Φ_2 na iteraci optimalizace



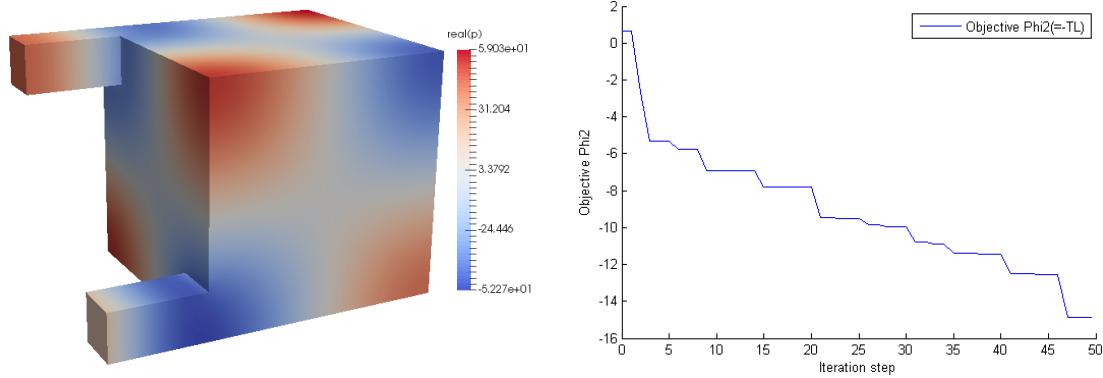
Obrázek 6.30: Optimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] a tloušťku desky 0.001 [m]



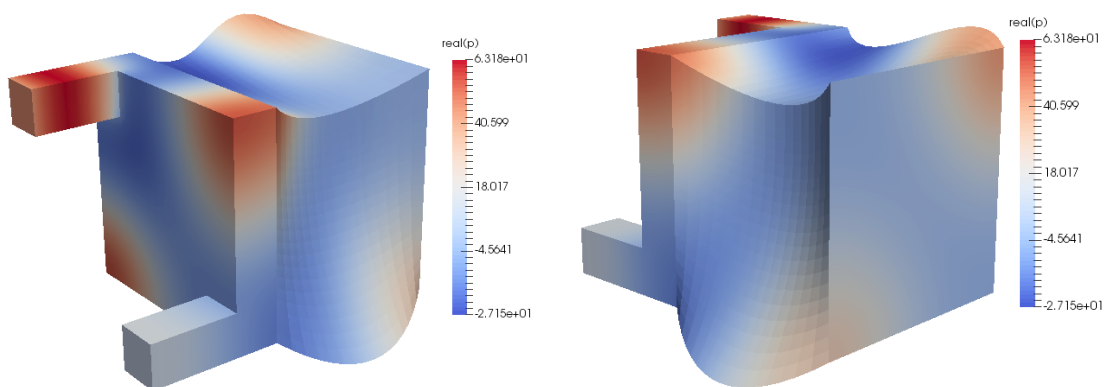
Obrázek 6.31: Porovnání křivek neprozvučnosti, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

Pro tento případ dosáhly velikosti optimalizačních parametrů na námi definované limity (6.1). Jako následek je v grafu (6.31) vidět, že pík není přímo v námi optimalizované frekvenci, nýbrž o cca 7 [Hz] posunut. Ale také z grafu v obr.(6.29) vidíme, že účelová funkce poklesla o asi 15 [dB].

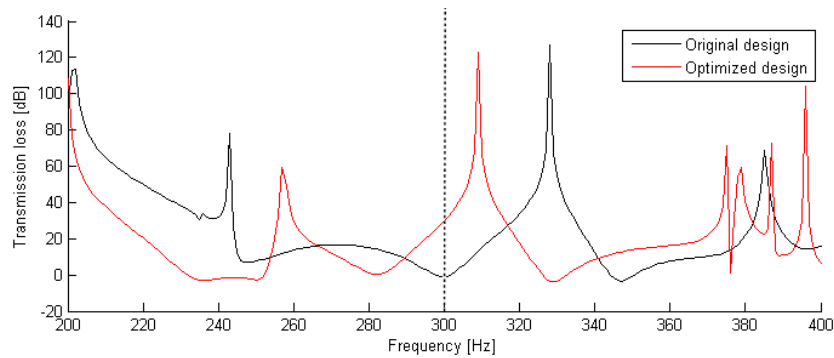
Tloušťka desky 0.01 [m]



Obrázek 6.32: *Nalevo*: Neoptimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] a tloušťku desky 0.01 [m]; *Napravo*: graf závislosti hodnoty účelové funkce Φ_2 na iteraci optimalizace



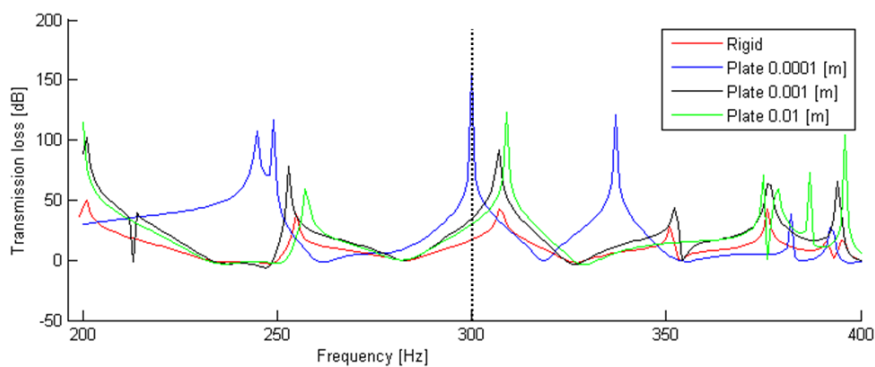
Obrázek 6.33: Optimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] a tloušťku desky 0.01 [m]



Obrázek 6.34: Porovnání křivek neprozněčnosti, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

Zde nám vychází téměř shodné výsledky jako pro tloušťku desetkrát menší. A opět optimalizační parametry dosáhly svých limitů, viz (6.1), a pík v se nemohl dostat až do frekvence, pro kterou optimalizujeme.

Pokud porovnáme výsledky (6.27), (6.33) a (6.13), výsledné optimalizované tvary vycházejí téměř identické. Rozdíly v rozměrech jsou do 5[cm]. Při uvažování délky oblasti 1[m] je tedy relativní rozdíl do 5%. Čím je stěna silnější, tím je logicky svými vibroakustickými vlastnostmi více podobná rigidní hranici. Porovnáme křivky neprozněčnosti optimalizovaných designů pro všechny tloušťky stěn t_1 obr. (6.28), t_2 obr. (6.31), t_3 obr. (6.34) a rigidní hranici obr. (6.14) při stejné parametrizaci 1.

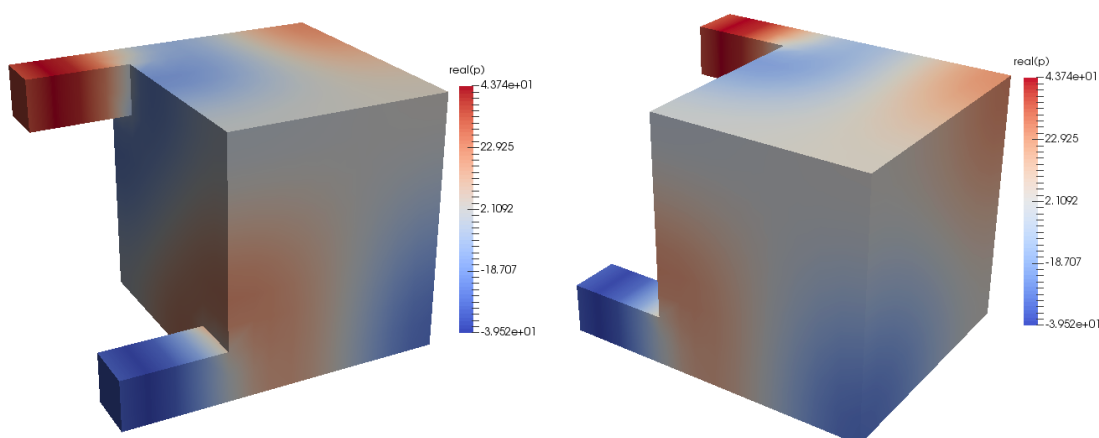


Obrázek 6.35: Porovnání křivek neprozněčnosti optimalizovaného designu, rigidní hranice (červená)

6.7 Oblast s designovatelnou poddajnou stěnou

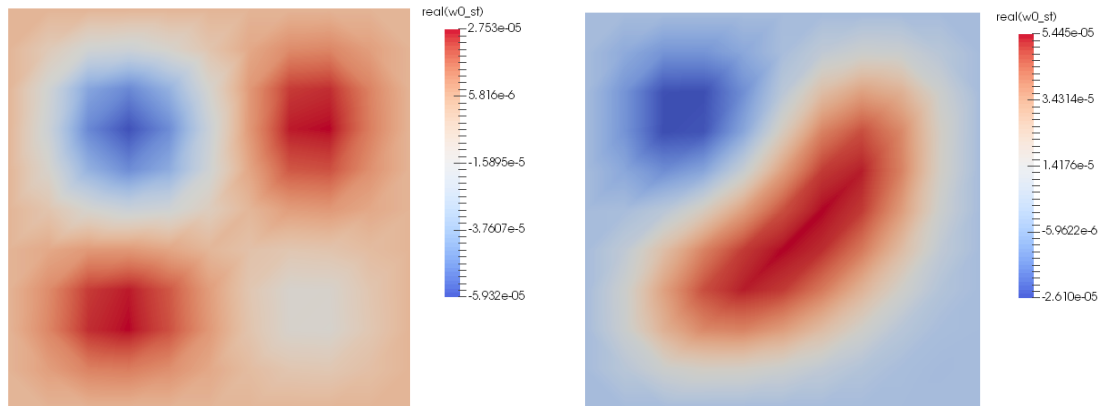
V této kapitole ukážeme výsledky optimalizace s designovatelnou deskou na hranici Γ_P . Ve dvou podkapitolách se nejprve zaměříme na příklad s param. 2 (5.5.3), tedy kdy jen optimalizujeme polohu desky translačním pohybem ve směru normály k desce. Jako druhou param. volíme param. číslo 3 (5.5.3). Optimalizujeme jen tvar v rovině desky samotné. Parametry volíme viz (6.2) a (6.3), tloušťku desky $t_{1,2,3}$ s frekvencí $f_2 = 300 [Hz]$ (ve shrnutí výsledků zahrneme ještě frekvenci $f_3 = 300 [Hz]$). Ukážeme již jen optimalizovaný design akustické kavity, viz obr. (6.36) a (6.40), jelikož neoptimalizovaný design se zobrazeným řešením p jsme už pro tuto konfiguraci parametrů zobrazili v předchozích kapitolách. Zobrazíme si průhyb desky $w[m]$ před a po optimalizaci na obr. (6.37) a (6.41). Ukážeme také neprozvučnosti v optimalizovaném designu na obr. (6.38) a (6.42).

Tloušťka desky 0.01 [m], frekvence 300 [Hz], parametrizace 2

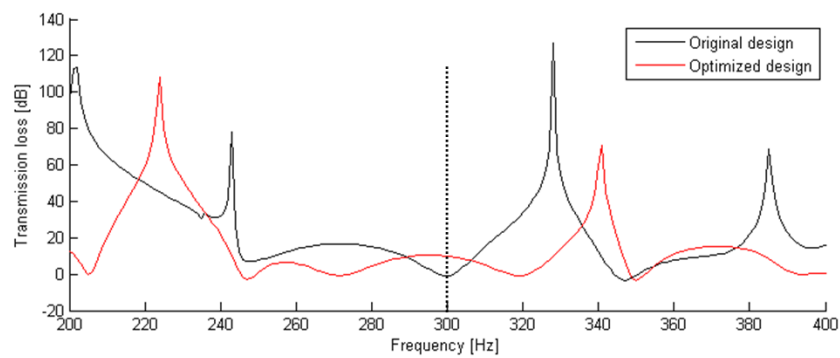


Obrázek 6.36: Optimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] a tloušťku desky 0.01 [m]

Hranice se posunula o $-0.1539 [m]$ tedy v záporném směru osy x .

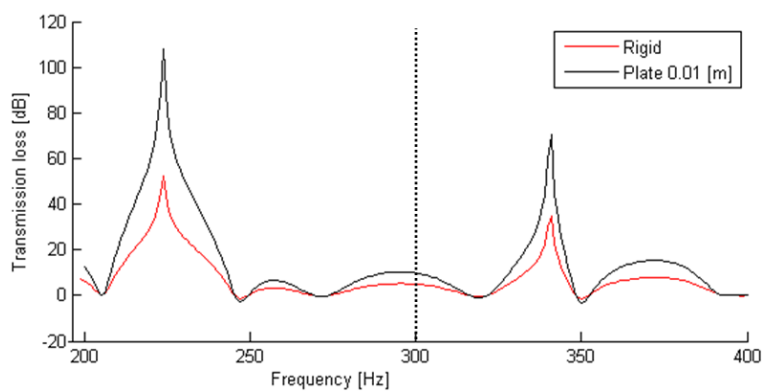


Obrázek 6.37: *Nalevo*: průhyb desky $w_0[m]$ v neoptimalizovaném designu; *Napravo*: průhyb desky $w_0[m]$ v optimalizovaném designu



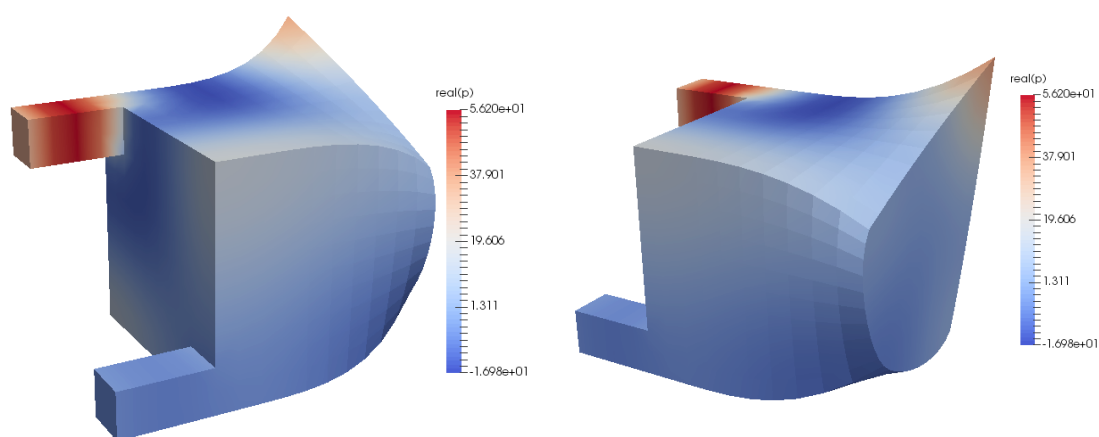
Obrázek 6.38: Porovnání křivek neprozvučností, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

Srovnáme tuto variantu s optimalizací rigidní hranice se stejnou parametrizací viz (6.4) a získáme obr. 6.39

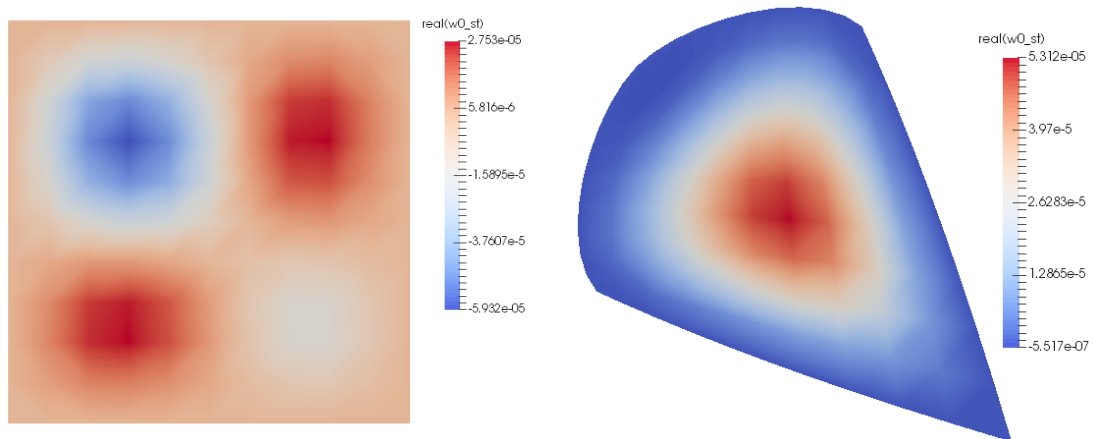


Obrázek 6.39: Porovnání křivek neprozvučností, rigidní hranice (červená), poddajná hranice (černá)

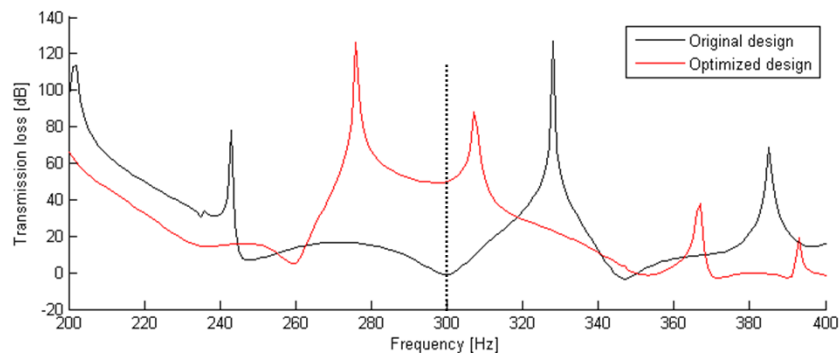
Tloušťka desky 0.01 [m], frekvence 300 [Hz], parametrizace 3



Obrázek 6.40: Optimalizovaná oblast pro frekvenci 300 [Hz] a tloušťku desky 0.01 [m]

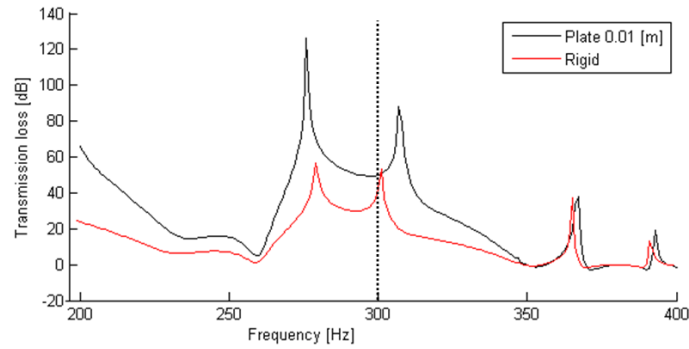


Obrázek 6.41: *Nalevo*: průhyb desky w_0 v neoptimalizovaném designu; *Napravo*: průhyb desky w_0 v optimalizovaném designu



Obrázek 6.42: Porovnání křivek neprozvučnosti, neoptimalizovaný design (černá) a optimalizovaný design (červená)

Srovnáme tuto variantu s optimalizací rigidní hranice se stejnou parametrizací viz (6.4) a získáme obr. 6.43



Obrázek 6.43: Porovnání křivek neprozvučností, rigidní hranice (červená), poddajná hranice (černá)

6.8 Vyhodnocení numerických výsledků optimalizace

V této kapitole provádíme vyhodnocení dosažených výsledků optimalizace z předchozích kapitol. Porovnáváme dosažené výsledky pro různé varianty poddajnosti hranice a její parametrizace.

6.8.1 Oblast s rigidní stěnou

V kapitole s rigidní hranicí (6.4) jsme provedli nejvíce výpočtů. Těm, které se věnují stejné parametrizaci jako příklady s poddajnou stěnou, budeme diskutovat později. Pro parametrizaci 0 se nám povedlo pro všechny frekvence dosáhnout výrazného zvýšení funkce neprozvučnosti, viz následující tabulka (6.1), ve které zobrazujeme hodnoty neprozvučnosti T_{AB} [dB]

$$T_{AB}(p) = 10 \log_{10} \left(\frac{\|p\|_{\Omega_A}^2}{\|p\|_{\Omega_B}^2} \right) [dB]. \quad (6.7)$$

Pamatujme, že účelová funkce $\Phi_2 = -T_{AB}$ a tedy v optimalizaci jsme maximalizovali útlum zvukového signálu jdoucího z Ω_A do Ω_B . Je zřejmé, že pro frekvenci $f_3 = 300$ [Hz] je efekt optimalizace nejvyšší, což jsme očekávali vzhledem k obr.(6.3), kde vidíme výrazný propad neprozvučnosti k této frekvenci. Naopak pro $f_2 = 200$ [Hz] je zvýšení neprozvučnosti nejméně výrazné opět dle očekávání, jelikož v této frekvenci již nějaký pík byl.

Tabulka 6.1: Srovnání výsledků optimalizačních výpočtů 1; hodnoty funkce neprozvučnosti *neopt.* - v neoptimalizovaném designu, *opt.* - v optimalizovaném designu, *rozdíl* - o kolik se zlepšil útlum (neprozvučnost)

f [Hz]	200			300			600		
T_{AB} [dB]	<i>neopt.</i>	<i>opt.</i>	<i>rozdíl</i>	<i>neopt.</i>	<i>opt.</i>	<i>rozdíl</i>	<i>neopt.</i>	<i>opt.</i>	<i>rozdíl</i>
Rigidní stěny (par.0)	44.87	87.02	42.14	-0.62	90.53	91.15	-0.03	61.80	61.84
Rigidní stěny (par.1)				-0.62	17.02	17.63			
Nedesign.deska (par.1)	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$t_1 = 0.0001$ [m]				0.30	77.69	77.39			
$t_2 = 0.001$ [m]				-0.63	17.31	17.94			
$t_3 = 0.01$ [m]				-0.62	14.88	15.50			

6.8.2 Oblast s nedesignovatelnou poddajnou stěnou

V kapitole s poddajnou nedesignovatelnou stěnou (6.6) parametrizovanou parametrizací 1, viz kapitola (5.5.3), lze pozorovat, že tvarové výsledky optimalizace, viz (6.13), (6.27), (6.30) a (6.33), vycházejí velmi podobně případu s rigidní stěnou. I hodnoty, viz tabulka (6.1), vykazují podobnost. Jen pro tloušťku stěny 0.1 [mm] je útlum výrazně vyšší. Možná je tato tloušťka volena až nevhodně malá a model desky už nedává dostatečně přesné výsledky. Ve všech případech, kromě pro t_1 , nám optimalizační parametry dosáhly námi definovaných horních a dolních omezení, viz (6.1). Jinak by nám MKP síť příliš degenerovala a výsledky by nebyly již relevantní. Pak v křivkách neprozvučnosti pro neoptimalizovaný design neplatí, že je pík ve frekvenci, pro kterou optimalizujeme, ale mimo ni, viz obr. (6.31) a (6.34). V budoucnu by chtělo vyzkoušet ještě jiný typ parametrizace, který by dovolil optimalizaci dosáhnout minima bez podstatné degenerace sítě.

6.8.3 Oblast s designovatelnou poddajnou stěnou

Jako poslední shrneme výsledky optimalizace s designovatelnou poddajnou stěnou, viz (6.7), které máme přehledně v tabulce (6.2). Z tabulky (6.2) je zřejmé, že při aplikování parametrizace 2 (jen posuv stěny Γ_P , viz kapitola (5.5.3)), a uvažování frekvencí f_1, f_2 design. deska na hranici nemá takový vliv na hodnotu funkce neprozvučnosti oproti čistě rigidní hranici stejně parametrizované.

Naopak například pro f_3 a parametrizaci 3, viz kapitola (5.5.3)), model s deskou projevuje výraznější schopnost utlumit zvukovou vlnu ve zvukovodu než s rigidní stěnou. Ale optimalizované tvary pro rigidní stěnu (obr. (6.15)) a designovatelnou desku ((6.36)) vychází opět velmi podobně. Pravděpodobně se do výsledků promítají vlivy zvolené frekvence a tloušťky stěny poddajné desky, kdy se můžeme jistou konfigurací přiblížit jedné vlastní frekvenci desky. Lze i připustit chybu implementace citlivosti pro designovatelnou desku,

Tabulka 6.2: Srovnání výsledků optimalizačních výpočtů 2; hodnoty funkce neprozvučnosti *neopt.* - v neoptimalizovaném designu, *opt.* - v optimalizovaném designu, *rozdíl* - o kolik se zlepšil útlum (neprozvučnost)

f [Hz]	200			300		
T_{AB} [dB]	<i>neopt.</i>	<i>opt.</i>	<i>rozdíl</i>	<i>neopt.</i>	<i>opt.</i>	<i>rozdíl</i>
Rigidní stěny (par.2)	46.38	87.21	40.82	-0.45	4.93	5.38
Design.deska (par.2)	—	—	—	—	—	—
$t_1 = 0.0001$ [m]	42.30	65.28	22.99	-0.32	4.93	5.25
$t_2 = 0.001$ [m]	48.17	87.29	39.10	-0.63	4.93	5.56
$t_3 = 0.01$ [m]	46.53	87.21	40.68	-0.62	4.92	5.54
Rigidní stěny (par.3)	44.87	86.21	41.34	-0.62	24.90	25.52
Design.deska (par.3)	—	—	—	—	—	—
$t_1 = 0.0001$ [m]	42.30	86.93	44.63	0.30	88.58	88.28
$t_2 = 0.001$ [m]	48.17	88.09	39.90	-0.63	88.33	88.99
$t_3 = 0.01$ [m]	46.53	88.20	41.67	-0.62	24.97	25.59

jelikož se nám ji nepodařilo ověřit, viz tabulka kontroly pomocí konečných diferencí (5.1).

7 Závěr

Cílem této práce bylo naučit se modelovat interakci akustické tekutiny s vibrující deskou a implementovat model zvukovodu tvořený soustavou vibrujících desek, věnovat se problematice citlivostní analýzy s řešením adjungované úlohy v úlohách tvarové optimalizace ve vibroakustice.

V druhé kapitole jsme vysvětlili rovnice popisující šíření akustického tlaku prostředím. Odvodili jsme při řešení pro danou frekvenci Helmholtzovu rovnici s vhodnými okrajovými podmínkami.

V třetí kapitole jsme představili a stručně odvodili rovnice desky dle Reissnerovy-Mindlinovy teorie pro monochromatického zatížení. Náplní čtvrté kapitoly bylo sjednocení kapitol druhé a třetí. Definovali jsme problém vibroakustiky, tedy interakci akustické tekutiny a poddajné vibrující desky, aplikováním dvou transmisních podmínek mezi tekutinou a deskou.

Ve páté kapitole jsme formulovali úlohu tvarové optimalizace zvukovodu ve vibroakustice. Představili jsme modelovaný design oblasti. Vysvětlili jsme dva zástupce vhodných účelových funkcí, kdy zájmovou byla hlavně funkce neprozvučnosti. Definovali jsme postupně pro případ rigidní hranice a poddajné desky na hranici optimalizační úlohu. Provedli jsme citlivostní analýzu. Aplikovali jsme na zvukovod parametrizaci pomocí Spline-boxu. Přiřadili jsme Lagrangeovu funkci a následně řešili adjungovanou úlohu. Podrobně jsme se zabývali vysvětlením implementace v systému *SfePy*.

V šesté kapitole jsme demonstrovali několik optimalizačních výpočtů pro 3D oblast zvukovodu. Aplikovali jsme námi odvozené citlivostní vztahy případ s rigidní hranicí, s nedesignovatelnou deskou a designovatelnou deskou. Některé tyto výsledky jsme ke konci kapitoly vyhodnotili a okomentovali. Z výsledků, viz tab.(6.1) a (6.2), je zřejmé, že se povedlo pro všechny uvedené příklady tvarovou optimalizací minimalizovat účelovou funkci a zvýšit tak útlum akustického signálu procházejícího zvukovodem.

Na úplný závěr lze konstatovat, že zadání práce bylo ve všech bodech splněno. Nicméně zůstává velký prostor pro vylepšení práce. Určitě je třeba lépe odladit implementaci citlivosti pro designovatelnou desku jako hranici zvukovodu, viz tab. (5.1). Jako rozšíření práce se nabízí modelování situace, kdy by se desky nemodelovaly jako upevněné v rigidním rámu. Vibrace by se tedy přenášely nejen skrze akustickou tekutinu ale i přímo napojením desek skrze jejich rotace a posuvy. Tento komplexnější model vibroakustiky by se jistě lépe reflektoval skutečný zvukovod.

Literatura

- [B. Engquist 1977] B. ENGQUIST, Andrew M.: Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. (1977). – URL <http://www.math.mcgill.ca/~gantumur/docs/down/Engquist77.pdf>
- [D. Cioranescu 2008] D. CIORANESCU, G. G.: The periodic unfolding method in homogenization. (2008)
- [E. Bängtsson 2002] E. BÄNGTSSON, Martin B.: Shape optimization of an acoustic horn. (2002). – URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782502006564>
- [Eduard 2007] EDUARD, Rohan: *SPBOX*, 2007
- [Eduard 2012] EDUARD, Rohan: *Citlivostní analýza pro optimalizaci v mechanice kontinua*, 2012
- [Haslinger J. 1996] HASLINGER J., Neittaanmäki P.: Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design. (1996)
- [Křen Jiří 2006] KŘEN JIŘÍ, Rosenberg J.: *MECHANIKA KONTINUA*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2006. – ISBN 80-7082-908-7
- [Kitware 2013] KITWARE: *ParaView*, 2013. – URL <http://www.paraview.org>
- [Škvor 2001] ŠKVOR, Z.: *AKUSTIKA A ELEKTRO-AKUSTIKA*. Praha : Academia, 2001. – ISBN 80-200-0461-0
- [Linhart 2009] LINHART, J.: *Mechanika tekutin I*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2009. – ISBN 978-80-7043-766-7
- [MathWorks 2013] MATHWORKS: *Constrained optimization - fmincon*, 2013
- [Míka S. 2006] MÍKA S., Brandner M.: Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2006. – ISBN 80-86843-13-0
- [Ondřej 2002] ONDŘEJ, Jiříček: *Úvod do akustiky*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2002. – ISBN 80-01-02460-1

- [Pavel 1994] PAVEL, Drábek: *Úvod do funkcionální analýzy*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 1994. – ISBN 80-7082-124-8
- [Robert 2016] ROBERT, Cimrman: *Sfepy - Simple finite elements in Python*, 2016. – URL <http://www.sfepy.org>
- [Rohan Eduard 2006] ROHAN EDUARD, B. M.: Homogenization and shape sensitivity of microstructures for design of piezoelectric bio-materials. (2006)
- [Rohan Eduard 2010a] ROHAN EDUARD, Lukeš V.: Homogenization of the acoustic transmission through perforated layer. (2010)
- [Rohan Eduard 2010b] ROHAN EDUARD, Lukeš V.: Sensitivity analysis for acoustic waves propagating through homogenized thin perforated layer. (2010)
- [Rohan Eduard 2011a] ROHAN EDUARD, Lukeš V.: Homogenization of the vibro-acoustic transmission on perforated Reissner-Mindlin plate. (2011)
- [Rohan Eduard 2012] ROHAN EDUARD, Lukeš V.: Sensitivity analysis for optimal design of perforated plates in vibro-acoustics: homogenization approach. (2012)
- [Rohan Eduard 2015] ROHAN EDUARD, Miara B.: Elastodynamics of strongly heterogeneous periodic plates using Reissner-Mindlin and Kirchhoff-Love models. (2015)
- [Rohan Eduard 2011b] ROHAN EDUARD, Vladimír L.: Homogenized perforated interface in acoustic wave propagation – modeling and optimization. (2011)
- [S. 2008] S., Marburg: Discretization Requirements: How many Elements per Wavelength are Necessary. (2008)
- [Stanislav 2007] STANISLAV, Míka: *Numerické metody řešení okrajových úloh pro ODR*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2007