

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Diplomová práce

Počítačová optimalizace investic na světovém trhu

Plzeň, 2016

Josef Pavelec

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 12. května 2016

Josef Pavelec

Poděkování

Poděkování patří vedoucí této práce RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za vynaloženou podporu během psaní diplomové práce, za její ochotu a čas věnovaný konzultacím.

Dále bych chtěl poděkovat všem, co mne jakýmkoliv způsobem během studia podporovali. Zejména pak mé přítelkyni a přátelům, kteří mi byli nedílnou oporou.

V neposlední řadě patří dík Fakultě aplikovaných věd, která mi umožnila vycestovat na rok studií do USA, kde jsem načerpal mnoho inspirace a zkušeností.

Abstrakt

Tato práce se zabývá problematikou volby optimálního portfolia na světovém kapitálovém trhu pomocí Markowitzova modelu s cílem maximalizovat investorův zisk.

Problematika nestacionarity časových řad kurzů akcií na kapitálovém trhu je řešena pomocí adaptivních metod odhadů. Práce dále nastiňuje i další možnou cestu, jak řešit problematiku nestability odhadu kovarianční matice, založenou na teorii náhodných matic.

Jedním z cílů této práce je srovnání dosažených výsledků tradičním modelem a modelem s adaptivní schopností. K tomuto účelu bylo vzhledem k výpočetní náročnosti a objemnosti dat vyvinuto a optimalizováno řešení v programovacím jazyce MATLAB[®], který je zároveň vybaven potřebným matematickým aparátem pro tuto úlohu.

Klíčová slova: Obchodování na kapitálovém trhu, optimalizace investic, nestacionární proces, GUI Matlab, Markowitzova teorie portfolia, adaptivní metody

Abstract

This diploma thesis deals with the problematics of optimal portfolio choice with focus on the world's stock market. The goal of such an optimization is a maximization of investor's revenue and is based on the Markowitz optimal portfolio model.

The problematics of non-stationary time serieses describing stocks on the world's stock market is solved by adaptive parameter estimations. This work introduces another possible way to deal with the phenomenon of non-stable covariance matrix estimates based on random matrix theory.

One of the goals of this thesis is comparison of the obtained results - results from traditional model and from its adaptive extension. For this purpose was designed and optimized a software tool using MATLAB[®] as a programming language since the computational intensity and data volume is large and this language is also optimized for mathematical computations.

Keywords: Stock market trading, optimal investments, non-stationary process, GUI Matlab, Markowitz portfolio theory, adaptive methods

Obsah

1	Úvod	2
2	Kapitálové trhy a obchodování	4
2.1	Základní pojmy	4
2.1.1	Cenný papír	4
2.1.2	Investiční cenný papír	4
2.1.3	Kapitálový trh	5
2.1.4	Investice	5
2.1.5	Investiční portfolio	6
2.1.6	Optimální portfolio	6
2.2	České vs. světové kapitálové trhy	6
2.3	Legislativa obchodování	7
3	Metody modelování akciových trhů	8
3.1	Základní členění metod analýzy trhu	8
3.1.1	Technická analýza	8
3.1.2	Psychologická analýza	11
3.1.3	Fundamentální analýza	12
3.2	Volba optimálního portfolia	13
4	Markowitzův model optimálního portfolia	15
4.1	Riziko, výnos	15
4.2	Ekonomické předpoklady metody	16
4.3	Matematická formulace modelu	17
4.4	Nestacionarita vstupních dat	20

4.4.1	Adaptivní modifikace modelu	20
4.4.2	Teorie náhodných matic	21
5	Stacionarita finančních časových řad	25
5.1	Náhodný proces	25
5.2	Stacionarita procesu	26
5.3	Testování stacionarity procesu	27
5.3.1	KPSS test	27
6	Praktická část práce	28
6.1	Nástroj na stahování a zpracování dat	28
6.1.1	Spuštění programu	28
6.1.2	Správa seznamu dostupných akcií	29
6.1.3	Nahlížení do statistik a historie aktiv	31
6.1.4	Testování stacionarity dat	33
6.1.5	Výpočet efektivního portfolia	33
6.1.6	Simulace investic	41
6.2	Použitá data k testování	44
6.2.1	Akcie	45
6.2.2	Rychlostní optimalizace	46
6.3	Stacionarita a stabilita	47
6.4	Porovnání dosažených výsledků	48
7	Závěr	51
A	Přílohy	55
A.1	Přiložené CD	55

Seznam obrázků

3.1	Aplikace technické analýzy	9
3.2	Metoda klouzavých průměrů	10
4.1	Ukázka historické výnosnosti a volatility aktiva Yahoo! Inc. . .	19
4.2	Příklad vážení dat pro $\lambda = 0,85$	20
4.3	Rozdělení $P(\lambda)$ pro různé hodnoty Q	24
5.1	Příklad Wienerova procesu	26
6.1	Úvodní obrazovka StockMaTT	29
6.2	Obrazovka pro správu seznamu akcií	30
6.3	Obrazovka statistik a historických dat	31
6.4	Příklad štěpení akcií Apple Inc. - před a po ošetření	33
6.5	Okno pro testování stacionarity vstupních dat	34
6.6	Okno aktualizace dat a správy portfolia	35
6.7	Grafický výstup optimalizace - alokace optimálního portfolia .	37
6.8	Grafický výstup optimalizace - aktiva v prostoru riziko - výnos	38
6.9	Držené versus optimální portfolio	40
6.10	Okno Price details	40
6.11	Prostředí pro editaci portfolia	41
6.12	Okno pro simulace investic a testování parametrů	42
6.13	Detailní výsledky simulované investice	43

1 Úvod

Tato práce se soustředí na metody volby a modelování optimálního portfolia založeného na Markowitzově přístupu s cílem efektivního investování na kapitálových trzích.

Je zde využito veřejně dostupných historických dat ze světových kapitálových trhů a na jejich základě je navrhována nejvhodnější skladba portfolia pro investora. U takového portfolia pak v budoucnosti očekáváme co možná nejpříznivější vývoj cen. Za tímto účelem byl rozpracován v programovém prostředí MATLAB[®] nástroj, který dokáže zmíněná historická data, jejich zpracování a navržené výpočty realizovat v krátkých časových intervalech tak, aby byl prakticky použitelný.

Součástí diskuse bude také zdůvodnění efektivity navržené modifikace Markowitzova modelu optimálního portfolia, hledající odpověď v analýze finančních časových řad vstupujících do modelu a testování jejich stacionarity. Nestacionární charakter těchto dat má za následek nestabilní odhady optimálního portfolia, a proto práce navrhuje další možné řešení pomocí matematického aparátu.

Pro lepší orientaci zde uvedeme obsah jednotlivých kapitol. Po úvodu následuje krátká kapitola *Kapitálové trhy a obchodování*, která si klade za cíl uvedení čtenáře do problematiky a vysvětlení základních pojmů v práci užitých. Následuje kapitola 3, která blíže popisuje možné investorské přístupy k optimalizaci investic. Následující kapitola pak detailně popisuje námi zvolený - Markowitzův model optimálního portfolia, který zde rozšiřuje o adaptivní metody odhadu parametrů. Tato poměrně již tradiční metoda občas naráží na vlastnosti vstupních dat, kterými je zejména stacionarita finančních časových řad, které se věnuje kapitola 5. Poté práce přechází do její druhé pasáže - praktické části. Zde je detailně popsán a vysvětlen navržený program StockMaTT a otestován na reálných datech, která jsou rovněž představena. Téměř v závěru této kapitoly jsou pak uvedeny výsledky testů stacionarity finančních časových řad a detailně rozpracována druhá možnost řešení nestacionarity.

bility odhadu optimálního portfolia. Na konci této práce následuje shrnutí a diskuse dosažených výsledků, včetně porovnání klasického Markowitzova modelu a modelu s adaptivními odhady parametrů.

2 Kapitálové trhy a obchodování

Jelikož se tato práce věnuje specifické oblasti ekonomie, předpokládá od čtenáře alespoň základní znalost této disciplíny a základních faktů či pojmů. Nicméně pro jednoznačné porozumění dále diskutované problematiky zde uvedeme nejdůležitější pojmy a jejich definice.

2.1 Základní pojmy

Text se bude často opírat o slova jako jsou *investice*, *portfolio*, ... , a proto si uvedeme jejich význam, jak je chápeme v této práci.

2.1.1 Cenný papír

Cenný papír je dokument či záznam, který dává svému držiteli práva s ním spjata. Má stejně jako jiný statek svou jmenovitou hodnotu, která však nemusí být rovna té aktuální.

2.1.2 Investiční cenný papír

Investičními cennými papíry jsou dle §3, odst. 2, předpis č. 256/2004 Sb. zákona o podnikání na kapitálovém trhu, cenné papíry, které jsou obchodovatelné na kapitálovém trhu. Investičními cennými papíry jsou zejména:

- (a) akcie nebo obdobné cenné papíry představující podíl na společnosti nebo jiné právnické osobě,
- (b) dluhopisy nebo obdobné cenné papíry představující právo na splacení dlužné částky,
- (c) cenné papíry nahrazující cenné papíry uvedené v písmenech a) a b),

- (d) cenné papíry opravňující k nabytí nebo zcizení investičních cenných papírů uvedených v písmenech a) a b),
- (e) cenné papíry, ze kterých vyplývá právo na vypořádání v penězích a jejichž hodnota je určena hodnotou investičních cenných papírů, měnových kurzů, úrokových sazeb, úrokových výnosů, komodit nebo finančních indexů či jiných kvantitativně vyjádřených ukazatelů.

Tato práce se zaměřuje zejména na první pojem - Akcie. Tento cenný papír svému držiteli garantuje patřičný majetkový podíl ve společnosti a v některých případech rovněž případný podíl na zisku vyplácený v dividendách. Více informací lze nalézt v zákoně o podnikání na kapitálovém trhu.

2.1.3 Kapitálový trh

Kapitálový trh je místo, kde dochází ke střetu nabídky a poptávky cenných papírů. Z jedné strany tedy na tento trh vstupují subjekty - investoři, kteří jsou ochotni vložit své finanční prostředky do nabízených cenných papírů, obvykle s cílem zhodnotit či uložit vlastní kapitál. Z druhé strany pak musí existovat subjekty - eminenti, kteří tyto cenné papíry nabízejí k prodeji, s cílem získat zdroje pro financování své činnosti. Eminenty mohou být například podniky, státní instituce, veřejné instituce atd. Naopak investory obvykle bývají fyzické osoby, pojišťovny, banky.

2.1.4 Investice

Investici lze chápat jako tu část prostředků (např. finančních), která je vložena do kapitálu dlouhodobé povahy, nepřináší okamžitý prospěch, ale umožní realizovat budoucí užitek. Jedná se o alokaci té části kapitálu, pro které nemáme v blízké době konkrétní využití. Z tohoto důvodu pro takové prostředky hledáme zhodnocení vložením například do kapitálového trhu. Od investice tedy očekáváme jistý výnos, tj. na konci období předpokládáme navrácení

prostředků a k tomu určité procento navíc. Jelikož investice často nemají garantovaný výnos, může být zhodnocení i záporné.

2.1.5 Investiční portfolio

Investiční portfolio pro potřeby této práce budeme chápat jako soubor cenných papírů, které jsou drženy za účelem zhodnocení či uložení kapitálu. Investoři se navíc tato portfolia snaží diverzifikovat, tedy rozložit prostředky do několika cenných papírů, aby minimalizovali riziko celkové dramatické ztráty způsobené propadem dílčích titulů.

2.1.6 Optimální portfolio

Je investiční portfolio, které dle určité metriky chápeme jako optimální. Konkrétně hledáme takovou kombinaci aktiv, která poskytuje optimální alokaci kapitálu na škále riziko-výnos (v angličtině je často používaný termín *mean-variance portfolio*).

Další užitečné pojmy mohou být nalezeny například v [7].

2.2 České vs. světové kapitálové trhy

Pokud se obecně bavíme o kapitálových trzích, je nezbytné vnímat rozdílnost mezi českým a zahraničním trhem. Jednak na každém kapitálovém trhu figurují různá aktiva (některá se mohou prolínat mezi více trhy) a dále mohou platit jiná pravidla. V neposlední řadě různé kapitálové trhy mohou nabízet rozdílné finanční instrumenty mající různý charakter.

V této práci jsme se rozhodli optimalizovat nástroj pro obchodování na trh světový, jelikož zde:

- (a) je větší nabídka likvidních akcií,
- (b) je větší možnost diverzifikace rizika,

(c) lze případně využívat rozšiřujících finančních instrumentů.

2.3 Legislativa obchodování na zahraničních trzích

V případě, že investor žijící v České republice se rozhodne obchodovat na zahraničních trzích, může být povinen ke zdanění souvisejících příjmů, pokud daná země tyto příjmy z obchodování na kapitálových trzích zdaňuje a pokud neexistuje mezi touto zemí a Českou republikou smlouva o zamezení dvojího zdanění. V případě že tato smlouva existuje a daňová povinnost v zahraničí převyšuje daňovou povinnost v České republice, nelze v žádném případě žádat o vyrovnání přeplatku. Více viz §36, zákon č. 586/1992 Sb., o daních z příjmů.

3 Metody modelování akciových trhů

Jedním z hlavních rozhodnutí při modelování akciových trhů je zvolení přístupu či filosofie, se kterou se k chování akcií na trhu stavíme. Historie spekulací na kapitálových trzích postupem času utvářela poměrně rozdílné metody.

Tyto metody se od sebe zásadně liší, avšak mají společný cíl. Cílem všech těchto metod je předpovídat budoucí vývoj trhu a nalézat na něm potenciál pro vstup do pozice, které dokážeme využít ve svůj prospěch a zhodnotit tak vložený kapitál.

Mezi čtenáři jsou vedeny dlouhodobé diskuse: „Pokud existuje více metod, která z nich je nejlepší?“. Na tuto otázku pravděpodobně neexistuje jednoznačná odpověď. Pokud se podíváme na výroky známých investorů a obchodníků, pravděpodobně se nejčastěji setkáme s odpovědí, že optimální je kombinace více přístupů.

3.1 Základní členění metod analýzy trhu

Uvedme pro přehlednost hlavní metody analýzy kapitálových trhů a jejich výhody a nevýhody.

3.1.1 Technická analýza

Technická analýza se skládá ze dvou součástí. První z nich se zaměřuje na identifikaci *formací* a druhá pracuje s tzv. *indikátory*.

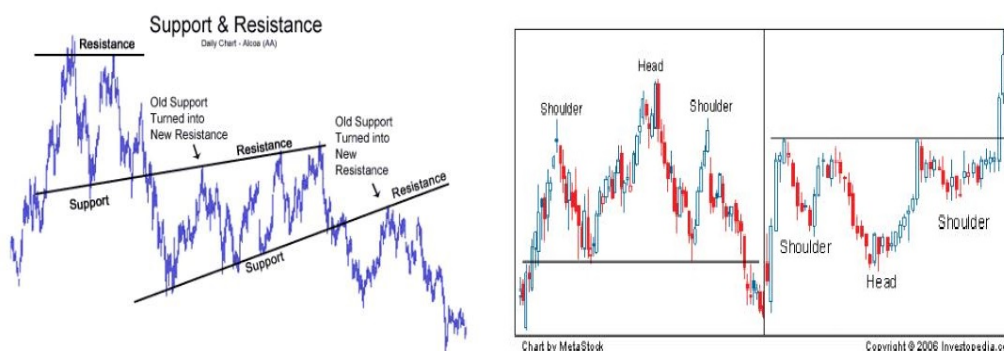
Nejprve se podívejme na část identifikující formace v historických časových řadách, resp. v jejich vizuálním vyobrazení pomocí grafů. Tato analýza hledá v grafech opakující se trendy a útvary, často označované jako *paterny*.

Takový postup jednoznačně vychází z chování aktiva v předcházejících obdobích a snaží se v tomto chování najít nějaké logické spojitosti a pravidla. Jejím zakladatelem je Charles Dow, vydavatel časopisu Wall Street

a zakladatel burzovního indexu zvaného *Dow Jones index* [15].

Princip technické analýzy je založen na postupu, kdy nejprve graficky zobrazíme historický vývoj aktiva a začneme následně hledat výše zmíněné trendy a útvary. V této disciplíně existuje řada historicky vyzorovaných grafických formací (*head, shoulders, cup, support, resistance, ...*) a na jejich základě usuzujeme očekávaný budoucí vývoj. Součástí vstupních dat do technické analýzy jsou v neposlední řadě informace o obchodovaném množství aktiv k příslušným datům.

Ukázku aplikace technické analýzy, konkrétně hledání útvarů a formací lze vidět na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Aplikace technické analýzy

Jak bylo řečeno, druhou součástí technické analýzy jsou již zmiňované indikátory. Jedná se o odvozené časové řady z obecně dostupných dat, jako jsou kurzy a objemy prodejů. Mezi tyto matematické ukazatele řadíme například:

- (a) Klouzavé průměry a metody od nich odvozené, MACD.
- (b) Objemové indikátory.
- (c) Sentiment indikátory.
- (d) Oscilátory.

Pravděpodobně jedním z nejrozšířenějších indikátorů jsou právě klouzavé průměry, jež je možné pro ilustraci vidět na obrázku 3.2. Tato metoda primárně slouží k vyhlazování prudkých a krátkodobých variabilit v časové řadě, díky čemuž se můžeme zaměřit na odhalování dlouhodobějších trendů.



Obrázek 3.2: Metoda klouzavých průměrů

Více o indikátorech a technické analýze lze nalézt například v [4].

Předpoklady metody:

1. Ceny aktiv odpovídají fundamentální ceně (skutečnosti) a zahrnují veškeré tržní síly na ně působící.
2. Ceny aktiv se pohybují v trendech a tyto trendy se opakují a jsou determinovány nabídkou a poptávkou a lze je odhalit studiem historických cen.
3. Historie se opakuje v cyklech a paternech, mají tendenci se opakovat a chování akcie lze tak predikovat na základě nalezení vhodných paternů.

Výhody:

1. Požaduje pouze veřejně dostupná data o aktivu.

2. Poměrně jednoduchá metoda založena především na analýze vizualizace časové řady historických cen.

Nevýhody:

1. Je založena na subjektivní identifikaci vzorů.
2. Hledání vzorů a paternů je těžko zautomatizovatelné.
3. V případě indikátorů je třeba „nastavit“ řadu parametrů daného indikátoru (například délka okénka u metody klouzavých průměrů) a rozhodovací procesy založené na sadách indikátorů je třeba často kalibrovat.

3.1.2 Psychologická analýza

Jedná se o analýzu založenou na studiu, analýze a psychologii lidí namísto racionálních informací. Investor řídicí se psychologickou analýzou zpracovává okolní informace a vlivy na trh, na jejichž základě usuzuje o chování ostatních lidí, držících pozici na kapitálovém trhu či do pozice vstupujících. Nejedná se tedy tolik o analýzu a odhad předpokládané ceny aktiva, ale o odhad chování ostatních investorů.

Předpoklady metody:

1. Investoři se chovají racionálně a v případě dvou stejně ziskových investic volí méně rizikovou.
2. Ceny aktiv odpovídají realitě a zahrnují veškeré tržní síly na ně působící.

Výhody:

1. Nevyžaduje hlubokou znalost matematické disciplíny.
2. Může zahrnout do modelu okolnosti, které jsou z matematického pohledu těžko zohlednitelné.

Nevýhody:

1. Metoda je těžko měřitelná a subjektivní, nelze jednoduše kvantifikovat a porovnávat různé investice.
2. Metoda je rovněž velmi těžko algoritmizovatelná.

3.1.3 Fundamentální analýza

Tento typ analýzy se zabývá všemi okolními podněty, které ovlivňují hodnotu aktiva. Pokud je aktivem například akcie společnosti, pak může zahrnovat zhodnocení ekonomické situace společnosti, vývoj jejich zákazníků, ekonomické události v daném segmentu, politické situace, demografické a sociální faktory atd.

Předpoklady metody:

1. Máme k dispozici informace ideálně ze všech oblastí, které mohou cenu aktiva ovlivňovat.
2. Ceny aktiv odpovídají realitě a zahrnují veškeré tržní síly na ně působící.

Výhody:

1. Hledá vnitřní cenu aktiva.
2. Může zvýhodňovat investora, který má k dispozici více informací.
3. Zohledňuje okolní informace trhu.
4. Dokáže reagovat na změny na trhu dříve, než se projeví na hodnotě aktiva.

Nevýhody:

1. Může zvýhodňovat investora, který má k dispozici více informací.

2. Teoreticky zahrnuje neomezené množství okolních faktorů, které do modelu vstupují.
3. Metoda je obtížně algoritmizovatelná.
4. Vnitřní cena aktiva nemusí mít bezprostřední odezvu na tržní ceně.

3.2 Volba optimálního portfolia

Všechny přístupy popsané v předcházející kapitole se zaměřují na predikci vývoje jedné zvolené akcie a mohou být využity k identifikaci jejich lukrativity. Na regulovaných trzích však má investor k dispozici celou řadu akcií, pro které očekává obdobný nebo naopak navzájem opačný vývoj a jelikož obecný záměr investorů je diverzifikace rizika, tak je žádoucí z několika takových aktiv sestavit portfolio. Otázkou zůstává, jakým poměrem rozložit prostředky v tomto portfoliu mezi jednotlivé akcie. Navíc požadované vlastnosti metody (nástroje) pro tuto práci lze shrnout následovně. Metoda:

1. Musí být algoritmizovatelná za účelem její realizovatelnosti v SW nástroji.
2. Vychází z veřejně dostupných zdrojů informací, které lze automatizovaně získat v „rozumném“¹ časovém horizontu.
3. Je objektivní a nevychází tedy ze subjektivních a nehmatatelných informací.
4. Zahrnuje omezené množství vstupních informací tak, aby bylo možné je zpracovat.

¹Například pokud je nástroj postaven na denních uzavíracích cenách akcií, tak v rámci hodin až do jednoho dne. Není nutné v rámci sekund, ale několikadenní zpoždění je nežádoucí.

Jako vhodná metoda splňující výše uvedené požadavky se jeví teorie moderního portfolia, jejíž základem je Markowitzův model optimalizace. Vzhledem ke splnění výše uvedených požadavků byla zvolena jako stěžejní pro tuto práci a jejímu detailnímu popisu věnujeme celou následující kapitolu.

4 Markowitzův model optimálního portfolia

V kapitole 3 jsme popsali přístupy k modelování akciových trhů a na základě jejich analýzy jsme se v této práci vydali cestou teorie moderního portfolia (někdy známé také jako „mean-variance analysis“) - Markowitzův model optimálního portfolia.

Jak předesílá úvod této práce, cílem investorů vstupujících na kapitálové trhy je zhodnocení investic do obchodování vložených. Tento model předpokládá, že investor nebude investovat do jednoho aktiva, ale že své prostředky rozloží do více aktiv, neboli portfolia. Takovou úvahou se obvykle snaží řídit snad každý investor, jelikož chce minimalizovat pravděpodobnost velké ztráty způsobené možným významným propadem jednoho aktiva, neboli snaží se minimalizovat celkové riziko. Tím se dostáváme k prvnímu ze dvou důležitých pojmů.

4.1 Riziko, výnos

Rizikovitost (lze se rovněž setkat s pojmem *volatilita*) aktiva nám říká, jak moc v historii kolísala hodnota aktiva, ať už nahoru či dolů. Slovo riziko je podvědomě spojeno s něčím negativním. I v tomto případě je vnímáno jako nežádoucí a investor se ho snaží minimalizovat¹.

Výnosnost aktiva je naopak parametr, který chceme maximalizovat. Výnosnost o aktivu říká, jaký trend má hodnota aktiva, tedy jestli v čase roste či klesá a jak prudce. Při investování finančních prostředků přirozeně volíme taková aktiva, co mají očekávanou výnosnost co možná nejvyšší.

Klíčová myšlenka Markowitzova modelu tkví v tom, že vhodnou kom-

¹Předpokládáme rizikově averzního investora, v teoretických či výjimečných případech může investor riziko vyhledávat

binací aktiv, neboli sestavením vhodného portfolia, lze dosáhnout lepšího poměru riziko - výnos, než investicí do jakéhokoliv jednoho jediného aktiva. Investor tedy investicí do takového portfolia získá lepší pozici a optimalizuje očekávaný výnos.

Při sestavení optimálního portfolia využíváme toho, že mezi jednotlivými aktivy existuje závislost (ať už pozitivní nebo negativní) a tuto závislost nám umožňuje vhodnou kombinací především minimalizovat riziko.

4.2 Obecné ekonomické předpoklady metody

Před samotnou formulací modelu je nutné zmínit, že stejně jako většina ostatních modelů, i tento vychází z daných předpokladů o chování finančních trhů a o chování investorů na daném trhu realizujících své obchody:

Předpokládáme, že investoři:

- se chovají racionálně (snaží se dosahovat maximálního výnosu),
- mají k dispozici stejné informace,
- jsou averzní k riziku, tedy v případě dvou investic se stejnou očekávanou výnosností volí investici s nižším rizikem,
- nejsou schopni velikostí svých obchodů v jednotkovém čase ovlivnit cenu aktiv, neboli tvořit trh.

Dále vycházíme z předpokladů, že trh:

- je bez transakčních nákladů či jiných nákladů ovlivňujících výsledek investice,
- je bez arbitráže,
- má k dispozici neomezeně dělitelná aktiva, abychom byli schopni dosáhnou přesně požadovaného rozložení portfolia.

4.3 Matematická formulace modelu

Předpokládejme, že máme k dispozici N akcií charakterizovaných jejich náhodnou výnosností ve zvoleném časovém období. Pak náhodný vektor výnosností je vektor $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$ pro jednotlivá aktiva [1].

Rozdělení vektoru $\boldsymbol{\rho}$ je charakterizováno vektorem středních hodnot s prvky $\mathbb{E}\rho_i = r_i$ a kovarianční maticí \mathbf{V} , jejíž it ý a jt ý prvek je kovariancí mezi ρ_i a ρ_j náhodnými veličinami. Prvky na diagonále matice \mathbf{V} - σ_i^2 , reprezentují rozptyl aktiva i .

Portfolio je vektor vah, které určují objem prostředků investovaných do jednotlivých aktiv a cílem je tedy tyto váhy nalézt. Matematicky psáno

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T, \quad (4.1)$$

za podmínky

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad (4.2)$$

kde x_i je část jednotkové investice do portfolia. Interpretace této podmínky může být taková, že investor vkládá všechny své prostředky, ale nemůže si vypůjčit další.

Markowitzova teorie optimálního portfolia se zaměřuje na nalezení optimálního poměru objemu jednotlivých aktiv v portfoliu tak, že celkové portfolio disponuje nejvyšším očekávaným výnosem za daného rizika, nebo naopak co nejnižší rizikovostí za dané očekávané výnosnosti. Konkrétně, střední výnos R_p portfolia P s N aktivy je definován jako

$$R_p = \sum_{i=1}^N w_i r_i, \quad (4.3)$$

kde w_i odpovídá objemu prostředků investovaných do aktiva i a r_i jsou očekávané výnosnosti jednotlivých aktiv.

Podobně rizikovost portfolia P lze reprezentovat celkovým rozptylem

$$\sigma_P^2 = \sum_{i,j=1}^N w_i V_{ij} w_j, \quad (4.4)$$

nebo alternativně

$$\sigma_P^2 = \sum_{i,j=1}^N w_i \sigma_i C_{ij} \sigma_j w_j, \quad (4.5)$$

kde σ_i^2 je rozptyl aktiva i a \mathbf{C} je korelační matice. Optimální portfolio, které minimalizuje σ_P^2 pro danou hodnotu R_p , lze najít přes Lagrangeův multiplikátor a vede k lineárnímu problému, kde matice \mathbf{C} musí být regulární [1]. Alternativním přístupem je pak nalezení optimálního portfolia na množině efektivních portfolií užitím metody CML s bezrizikovým aktivem, či pomocí křivek definujících investorův vztahu k riziku [7].

Optimalizačním problémem je tedy úloha

$$\min \sigma_P^2 = \sum_{i,j=1}^N w_i V_{ij} w_j, \quad (4.6)$$

za podmínky

$$\sum_{i=1}^N w_i r_i = R_p, \quad (4.7)$$

kde R_p je nyní požadovaný, předem stanovený výnos portfolia.

Jako výsledek této optimalizace je portfolio s minimálním rizikem pro danou výnosnost $R_P = \sum w_i r_i$, splňující vztah

$$w_i \sigma_i = R_p \frac{\sum_j C_{ij}^{-1} r_j / \sigma_j}{\sum_{i,j} r_i / \sigma_i C_{ij}^{-1} r_j / \sigma_j}. \quad (4.8)$$

Pokud nyní předefinujeme $w_i \sigma_i$ jako w_i , pak σ_i je obsažena v r_i a w_i a rovnice (4.10) může být psána v maticové podobě

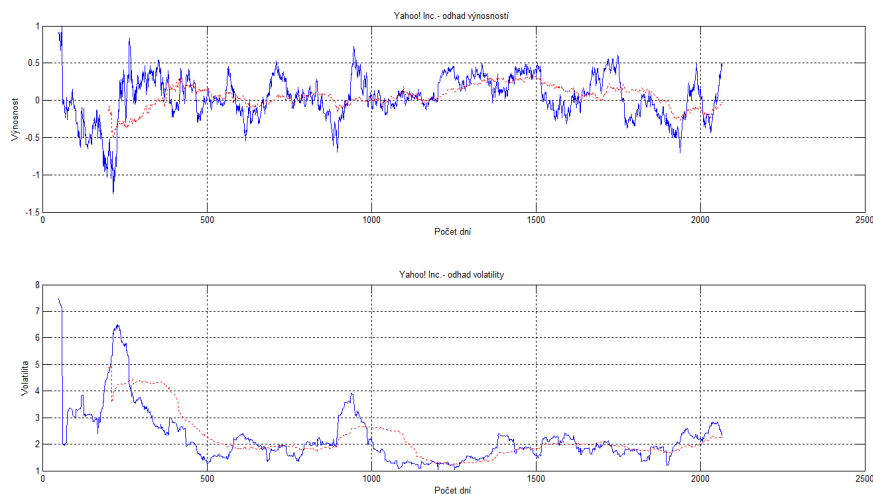
$$\mathbf{w}_C = R_p \frac{\mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}}{\mathbf{r}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}} \quad (4.9)$$

a odpovídající rizikovost portfolia vycházející z této konstrukce je

$$\sigma_P^2 = \frac{R_p^2 \mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{r}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}}. \quad (4.10)$$

Při praktických aplikacích modelu je tedy třeba vycházet z odhadů výnosností \hat{r}_i a odhadu kovarianční matice $\hat{\mathbf{V}}$, resp. odhadu rizikovosti $\hat{\sigma}_i$ a korelací $\hat{\mathbf{C}}$.

Pokud mají investoři k dispozici dostatečně dlouhé časové řady výnosností sledovaného souboru aktiv, lze pro odhad střední hodnoty výnosností použít průměrných výnosností a také odhady rozptylů (volatility) a korelací lze založit na historických datech. Kvůli problémům s nestacionaritou časových řad (více v kapitole 5) popisujících daná aktiva však narážíme na problémy s nestabilním odhadem optimálního portfolia a proto se část této práce věnuje možným řešením tohoto problému. Příklad vizuální demonstrace nestacionarity výnosností a volatility aktiva *Yahoo! Inc.* lze vidět v grafech na obrázku 4.1.



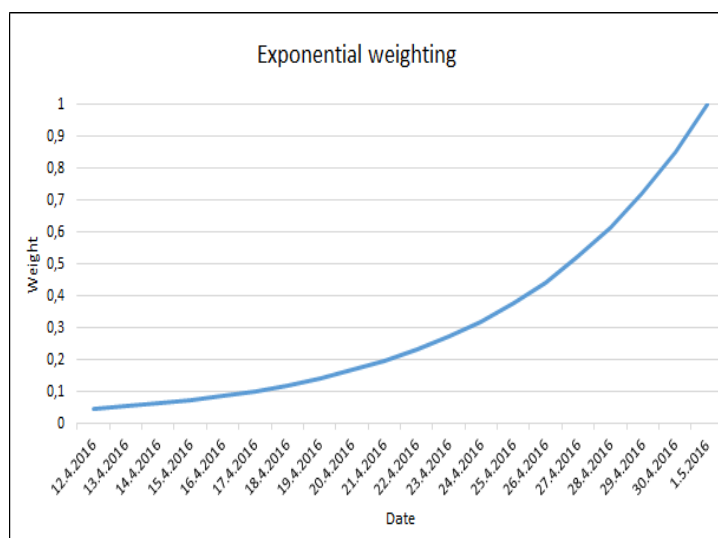
Obrázek 4.1: Ukázka historické výnosnosti a volatility aktiva Yahoo! Inc.

4.4 Nestacionarita vstupních dat

Tato práce navrhuje dvě možné metody, jak nežádoucí efekty nestacionárních dat vstupujících do modelu ošetřit.

4.4.1 Adaptivní modifikace modelu

Jednou z možností, jak částečně ošetřit nestacionaritu časových řad, na kterých je náš model postaven, je nelineární vážení historických dat. Tato úvaha vychází z filosofie, že historicky mladší data mají vyšší vypovídající schopnost o dané hodnotě a vývoji aktiva, než data historicky starší. Jedinou otázkou pak tedy je, jakou funkcí vstupní hodnoty vážit. Pokud si hodnoty v časové řadě seřadíme od nejmladší po nejstarší, pak by hledaná funkce měla být z hlediska monotonie klesající a neměla by se dostat do záporných hodnot. Funkce, která se pro tento účel jeví jako vhodná je funkce exponenciální. Pro demonstraci průběhu vážení dat do historie lze na obrázku 4.2 vidět postupné „zapomínání“ při posunu dále do historie.



Obrázek 4.2: Příklad vážení dat pro $\lambda = 0,85$

Pozn.: Toto je extrémní a demonstrativní příklad pro $\lambda = 0,85$, kdy pravděpodobně chybně již dvacet dní stará data nemají téměř žádnou váhu.

Tento postup oproti tradičnímu Markowitzovu optimálnímu portfoliu upravuje odhady vstupních parametrů takto:

- **Výnos** - očekávaná výnosnost aktiva je namísto klasického průměru odhadnuta váženým průměrem

$$\hat{r}_i = \left(\sum_{t=1}^T r_i^t \cdot \lambda^t \right) / \left(\sum_{t=1}^T \lambda^t \right). \quad (4.11)$$

- **Riziko** - rizikovost aktiva je místo váženého rozptylu odhadnuta výběrovým váženým rozptylem

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T \lambda^t \cdot (r_i^t - \bar{r}_i)^2}{\sum_{t=1}^T \lambda^t} \cdot \frac{T}{T-1}}, \quad (4.12)$$

kde $\lambda \in (0, 1)$.

- Empirická **korelační matice** při exponenciálním vážení má tvar

$$E_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_t \delta^t x_i^t x_j^t, \quad \text{kde } x_i^t = r_i^t / \hat{\sigma}_i \quad (4.13)$$

a $\lambda \in (0, 1)$ je vázící parametr. Tento parametr λ je někdy nazýván „koeficient zapomínání“ a bývá volen velmi blízko číslu 1. Čím je zvolen menší, tím rychleji historická data ztrácí na významnosti.

Pozn.: Optimální hodnota parametru λ nelze jednoznačně určit, a proto je doporučeno ji stanovovat na základě výsledků řady simulací na reálných datech.

4.4.2 Teorie náhodných matic

Druhá možnost ošetření nestacionarity finančních časových řad, která se nabízí, je založena na tzv. teorii čištění matic [5], kterou lze použít k modifikaci

korelační matice odhadnuté ze vstupních dat, na které je Markowitzovo optimální portfolio založeno.

Pozn.: Tento přístup nám umožňuje zlepšit pouze kvalitu a stabilitu odhadu kovarianční matice.

Empirická korelační matice

Předpokládejme, že máme N časových řad výnosností aktiv, každé o délce T . Pokud chceme měřit a optimalizovat rizikovost portfolia, je nutné použít spolehlivý odhad kovarianční matice \mathbf{V} resp. korelační matice \mathbf{C}).

Mějme r_i^t denní výnosnost aktiva i v čase t , empirický rozptyl každého aktiva je dán vztahem

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_t (r_i^t - \bar{r}_i)^2 \quad (4.14)$$

a pro jednoduchost předpokládejme, že je znám. Dále předpokládejme, že denní výnosnost aktiva r_i^t je $\bar{r}_i = 0$. Empirická korelační matice má tvar

$$E_{ij} = \frac{1}{T} \sum_t x_i^t x_j^t, \quad \text{kde } x_i^t = r_i^t / \sigma_i, \quad (4.15)$$

nebo v maticové podobě $\mathbf{E} = (1/T) \mathbf{X}^T \mathbf{X}$, kde \mathbf{X} je normalizační $T \times N$ matice výnosností $X_{it} = r_i^t / \sigma_i$.

Teorie náhodných matic, čištění matic

Pro skupinu N různých aktiv, korelační matice obsahuje $N(N - 1)/2$ prvků, které jsou vypočteny z N časových řad délky T . Pokud není T výrazně větší než N , lze očekávat, že určení kovariancí je obtížné a tedy že empirická korelační matice je z velké části náhodná. Protože kovarianční matice je pozitivně semidefinitní, tak její struktura může být popsána vlastními čísly² a příslušnými vlastními vektory. Vlastní čísla matice, která jsou malá (či dokonce nulová) korespondují s portfolii aktiv, které mají nenulovou výnosnost,

²Vlastní čísla jsou obvykle značena symbolem λ a toto značení nijak nesouvisí s koeficientem zapomínání v podkapitole 4.4.1

ale extrémně nízkou rizikovost. Taková portfolia mohou být spojena např. s chybnými odhady způsobenými nedostatečnými vstupními daty. Jedním z postupů, jak ošetřit malé hodnoty vlastních čísel v odhadované korelační matici je takzvaná technika náhodných matic (RMT, z angl. random matrix theory). Tato technika původně vznikla v odvětví fyziky, ale dnes je rovněž využívána v oblasti financí a ekonomie [5].

Spektrální vlastnosti matice \mathbf{C} jsou srovnatelné s vlastnostmi náhodné korelační matice. Jak je popsáno v [5] a další literatuře, pokud je R libovolná matice definována vztahem $\mathbf{R} = (1/T) \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, kde \mathbf{A} je an $N \times T$ matice, jejíž prvky jsou i.i.d. náhodné proměnné s průměrem 0 a fixním rozptylem σ^2 , potom limita $T, N \rightarrow \infty$ respektující vztah $Q = T/N \geq 1$ je konstantní a hustota vlastních čísel R je dána vztahem

$$P(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{min})}}{\lambda}; \quad \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}, \quad (4.16)$$

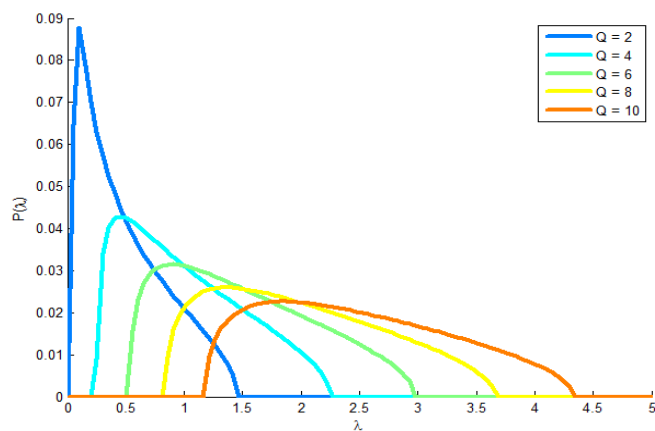
kde maximální a minimální hodnoty vlastních čísel jsou dány takto:

$$\lambda_{max/min} = \sigma^2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{Q}} \right)^2. \quad (4.17)$$

Rozdělení $P(\lambda)$ (ilustrované na obr. 4.3) je známé jako Marčenko-Pasturovo a teoretické maximální a minimální vlastní čísla určují hraniční hodnoty pro náhodnou matici. Pokud jsou vlastní čísla za těmito hranicemi, řekneme, že tyto hodnoty se vychylují. Pokud aplikujeme toto teoretické pozadí metody RMT na korelační matici, dokážeme oddělit „zašuměné“ a „nezašuměné“ hodnoty matice.

Samotná procedura očištění matice pak probíhá takto:

1. zkonstruujeme empirickou korelační matici dle (4.15),
2. oddělíme zašuměná vlastní čísla od nezašuměných dle (4.16),
3. ponecháme nazašuměná vlastní čísla a z ostatních uděláme průměr,
4. nahradíme každé zašuměné vlastní číslo průměrem vlastních čísel,

Obrázek 4.3: Rozdělení $P(\lambda)$ pro různé hodnoty Q

5. zrekonstruujeme korelační matici.

Zlepšení struktury odhadu korelační matice založené na metodě náhodných matic obecně může zlepšit odhady optimálních portfolií a zvýšit stabilitu.

5 Stacionarita finančních časových řad

Tato kapitola hlouběji rozpracovává myšlenku, co je vlastně motivací k úpravě Markowitzova modelu a proč zavádíme takzvané exponenciální vážení historických dat.

V práci [7] byla intuitivně navržena modifikace výpočtu optimálního portfolia. Pokud se podíváme detailněji, proč očekáváme lepší výsledky od takového přístupu, dostaneme se k otázce stacionarity a nestacionarity procesu. Nejprve tedy definujme potřebné pojmy.

5.1 Náhodný proces

Náhodný, nebo také stochastický proces, je kolekce náhodných veličin, které reprezentují vývoj systému náhodných hodnot v čase. Speciální jednoduchá interpretace této definice v diskrétním čase říká, že stochastický proces je sekvence náhodných veličin.

Speciálním typem stochastického procesu, který je využíván při modelování cen akcií je Wienerův proces.

Definice 5.1.1. *Standardní (1-dimenzionální) Wienerův proces je stochastický proces $\{W_t\}_{t \geq 0}$, pro který platí:*

1. $W_0 = 0$,
2. funkce $t \rightarrow W_t$ je spojitá v t s pravděpodobností 1,
3. proces $\{W_t\}_{t \geq 0}$ má nezávislé přírůstky, tj. $W_{t+s} - W_s$ je nezávislý,
4. přírůstky $W_{t+s} - W_s$ se řídí normálním rozdělením $\mathcal{N}(0, t)$.

Ilustrační příklad několika trajektorií Wienerova procesu lze vidět na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Příklad Wienerova procesu

5.2 Stacionarita procesu

Stacionární proces je stochastický proces, pro který platí, že jeho sdružené rozdělení pravděpodobností se v čase nemění, tedy že parametry střední hodnota a rozptyl se rovněž nemění. Pro takovou definici se také můžeme setkat s pojmem striktně stacionární proces.

Pro potřeby této práce budeme definovat stacionární proces jako proces Z_t , kde Z_t je náhodná veličina Z v čase t , splňující následující požadavky:

1. $E(Z_t) = \mu$,
2. $var(Z_t) = E(Z_t - \mu)^2 = \sigma^2$, $k = 1, 2, \dots$,
3. $cov(Z_t, Z_{t+k}) = cov(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_k$.

5.3 Testování stacionarity procesu

Za účelem zjištění, zda daný náhodný proces je stacionární či nikoliv, můžeme aplikovat některý z testů stacionarity.

5.3.1 KPSS test

Tento test, celým názvem Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin test, je využíván zejména ve financích a ekonomii. Testujeme jím nulovou hypotézu, že pozorovaný náhodný proces je stacionární okolo daného deterministického trendu D_t oproti alternativní hypotéze, že daný proces stacionární není okolo téže deterministického trendu [14].

Testujeme nulovou hypotézu:

H_0 : pozorovaný náhodný proces je stacionární okolo daného deterministického trendu;

proti alternativě:

H_A : pozorovaný náhodný proces není stacionární okolo daného deterministického trendu.

Pozn.: Realizace tohoto testu je provedena pomocí integrovaných funkcí SW MATLAB[®] [10].

6 Praktická část práce

V první části této práce jsme se zabývali popisem obchodování na kapitálových trzích a posléze volbou a budováním vhodného matematického aparátu pro hledání optimálního portfolia. V praktické části se zaměříme na realizaci a otestování těchto poznatků v reálném prostředí.

6.1 Nástroj na stahování a zpracování dat

Tak abychom dokázali jednak aplikovat poměrně složitý matematický aparát s řadou operací na objemná data, potřebovali jsme zvolit vhodný programovací jazyk, který si s takovou úlohou poradí a zároveň bude mít k dispozici potřebné statistické a ekonomické zázemí. Jelikož výsledný nástroj má být zároveň uživatelsky příjemný a jednoduchý, bylo nutné zvolit vhodné prostředí i z pohledu praktičnosti.

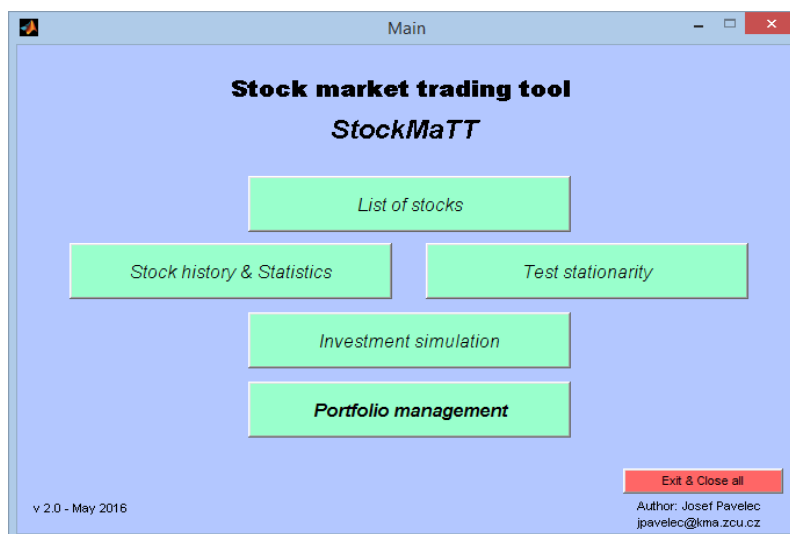
Matematický software a programovací jazyk MATLAB[®] s rozšiřujícím GUI grafickým uživatelským rozhraním dobře splňuje obě tyto podmínky a proto byl zvolen jako realizační program. Vytvořený nástroj byl pojmenován **StockMaTT**, po optimalizačních a strukturálních změnách ve verzi 2.0.

6.1.1 Spuštění programu

Program se skládá z několika grafických modulů a mnoha desítek funkcí. Vše je spustitelné přes funkci **Main.m**¹, která vyvolá úvodní okno patrné na obrázku 6.1, ze kterého se dostaneme do všech částí programu. Spustitelná funkce **Main.m** se nachází v adresáři *4_GUI&load*.

K navigaci mezi jednotlivými okny StockMaTTu slouží zpravidla tlačítka *Exit* či *Main menu*, umístěna v pravých dolních rozích.

¹Pozor, po spuštění programu je zapotřebí zůstat v Matlabu v daném *workspace*, tedy *4_GUI&load*



Obrázek 6.1: Úvodní obrazovka StockMaTT

6.1.2 Správa seznamu dostupných akcií

První úkon, který potřebujeme zajistit, je zadání či úprava seznamu dostupných akcií, které eventuálně budeme v portfoliu uvažovat. Jak bude uvedeno v podkapitole 6.2, rozhodli jsme se pro využití dat dostupných na *Yahoo Finance*. Jednotlivé tituly na tomto světovém serveru vystupují pod několikačlennými kódy (*tickery*), obvykle dvou až čtyř místnými. Proto pro založení a editaci seznamu dostupných akcií musíme kromě názvu titulu také evidovat příslušný kód, pod kterým na serveru vystupuje.

Ke správě tohoto seznamu dochází v okně viditelném na obrázku 6.2, do kterého je možné se dostat z hlavního menu kliknutím na tlačítko **List of stocks**. Pro účely prvotního testování je k dispozici aktuálně 14 titulů, které můžeme doplňovat o další, eventuálně některé z nich odstranit.

- **Přidání aktiva**

Pro zařazení nového titulu je zapotřebí stisknout tlačítko **Edit list**, po čemž se nám zpřístupní oblast *Add asset*, kam již můžeme zadat název nové akcie, kterou si přejeme přidat a k ní odpovídající ticker (nutno ověřit ze serveru <http://finance.yahoo.com/>). Ten je vždy uveden



Obrázek 6.2: Obrazovka pro správu seznamu akcií

vedle názvu akcie či místo něj. Poté už jen uložíme stiskem **Save list** a seznam je aktualizovaný o námi přidanou akcií².

- **Smazání aktiva**

Pro tuto akci je opět nejprve nutná aktivace oblasti *Delete row* pomocí tlačítka **Edit list**. Posléze zadáme číslo řádku, který chceme smazat, provedeme tlačítkem **Delete** a uložíme.

- **Editace aktiva**

Existující akci je rovněž možno upravit. Po stisknutí tlačítka **Edit list** se nám lehce zbarví tabulka seznamu akcií a je možné ji přímo editovat. Poté je opět zapotřebí změny uložit.

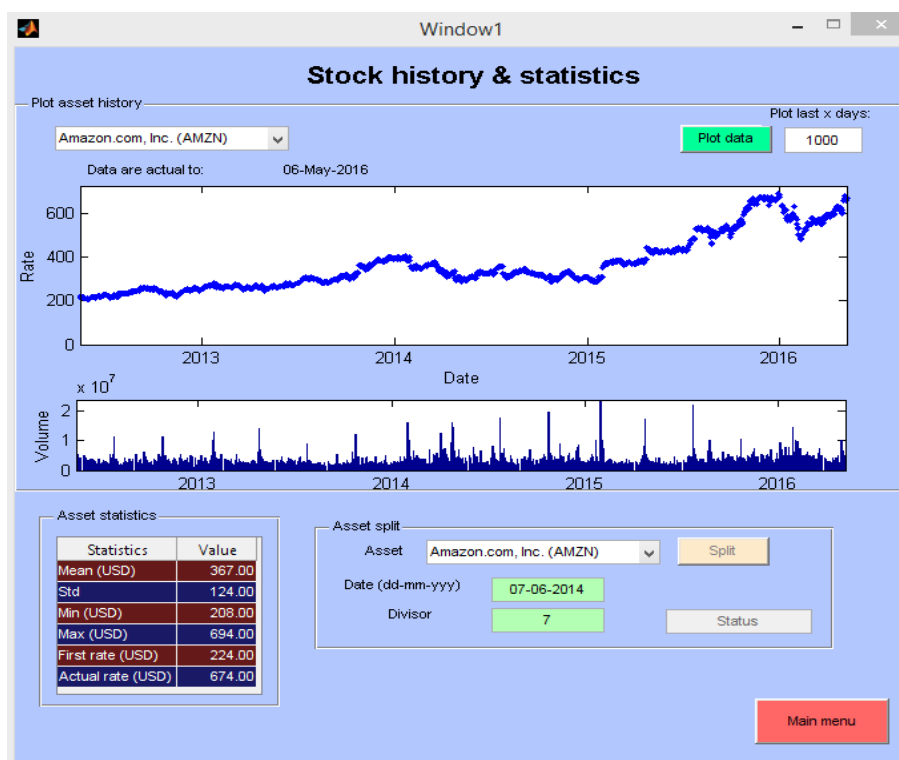
Kromě této editace, která by měla být primárním zdrojem změn, lze

²Při pokusu o zadání akcie s totožným tickerem aktivum nebude přidáno.

rovněž načíst kompletní seznam ze souboru typu *.xls*. Tento soubor existuje v podsložce */data* s názvem *list2.xls*. Po jeho otevření lze zadat požadované tituly s jejich tickery a posléze načíst pomocí tlačítka **Load from .xls**.

6.1.3 Nahlížení do statistik a historie aktiv

Abychom si udělali hrubý přehled o historickém vývoji akcií, které chceme v portfoliu uvažovat a jednoduše jsme viděli jejich základní charakteristiky, bylo za tímto účelem vytvořeno speciální prostředí dostupné z hlavního menu po stisknutí tlačítka **Stock history & statistics**.



Obrázek 6.3: Obrazovka statistik a historických dat

- Vykreslení dat a výpočet statistik

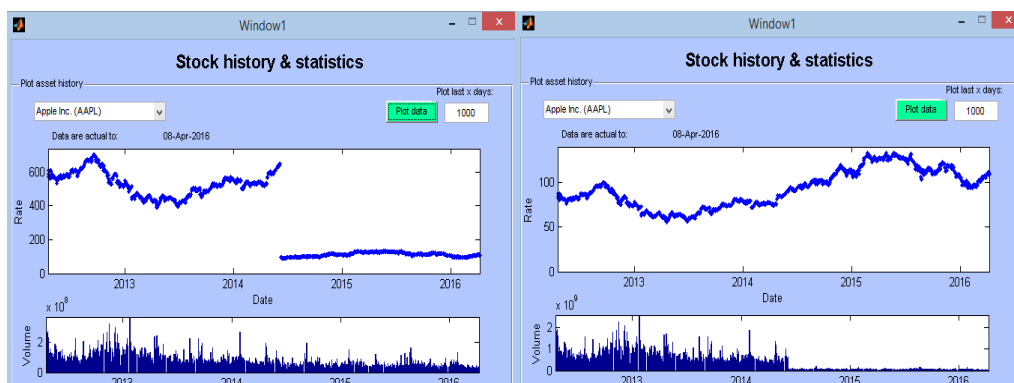
K titulům, ke kterým již máme stažená data, lze jednoduše vykreslit historický vývoj ceny, objemy prodeje za dané období a zároveň zobrazit základní statistiky (střední hodnota, směrodatná odchylka, minimální a maximální cena, počáteční cena a koncová cena). Toto lze jednoduše učinit v oblasti *Plot asset history* zvolením požadované akcie, zadáním délky historie počtem pracovních dní (přednastaveno na 1000) a potvrzením tlačítkem **Plot data**. V horním grafu pak můžeme vidět vývoj ceny aktiva, ve spodním odpovídající objem realizovaných obchodů a v tabulce pak zmiňované statistiky.

- **Štěpení akcií**

U některých titulů si můžeme všimnout na první pohled zajímavého jevu a to znatelné skokové změny ceny. Tato změna je způsobena takzvaným štěpením akcií, která nastane obvykle u titulů vysoké hodnoty. Při štěpení například poměrem 10:1 dostane držitel akcie 10 ks namísto původní jedné, avšak každé o desetinové hodnotě. Záměrem štěpení akcií je obvykle snaha emitenta o zvýšení objemů obchodů s danou akcií. Jedním příkladem jsou akcie společnosti Apple Inc. (AAPL), pro které se 6. června 2014 v pátek uzavřela cena jedné akcie na \$645,57 a následující pondělí se cena otevřela na částce \$92,70. Došlo tedy ke štěpení poměrem 7:1, viz obr. 6.4.

Tato akce samozřejmě musí být ošetřena a běžně se řeší tak, že cena před štěpením se vydělí příslušným štěpícím poměrem, čímž se odstraní falešný skok v grafu. I v nástroji StockMaTT je tato akce řešena v oblasti *Asset split*, kde vybereme štěpené aktivum, zadáme datum, ke kterému ke štěpení došlo, příslušný štěpící poměr (například pro zmiňované štěpení akcií společnosti Apple Inc. bychom použili číslo 7) a provedeme tlačítkem **Split**.

Pozn.: Chybné zadání štěpení lze opravit buďto opětovným štěpením ke stejnému datu převrácenou hodnotou poměru původně zadaného, či stažením a přeepsáním všech dat k dané akcií.



Obrázek 6.4: Příklad štěpení akcií Apple Inc. - před a po ošetření

6.1.4 Testování stacionarity dat

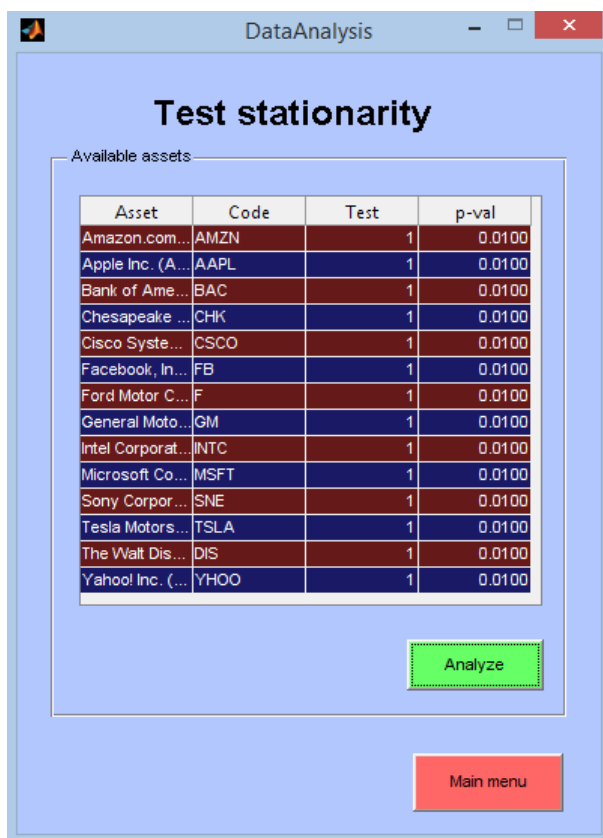
Dalším analytickým nástrojem programu StockMaTT je prostředí určené k testování stacionarity vstupních finančních časových řad výnosností aktiv. Prostředí *Test stationarity* lze vidět na obrázku 6.5. Zde lze po stisknutí tlačítka **Analyze** obdržet výsledky statistického *KPSS* testu ke každému aktivu.

Výslednými hodnotami jsou:

- **Test** - hodnota 0 či 1, kdy 1 značí výsledek testu zamítající hypotézu H_0 (viz podkapitola 5.3.1) a 0 pro případ opačný.
- **p-val** - p-hodnota statistiky příslušného testu (viz. například [8]). Pokud je $p - val < 0,01$, tak program zobrazuje hodnotu 0,01.

6.1.5 Výpočet efektivního portfolia

Prakticky nejdůležitějším a nejpoužívanější obrazovkou programu je okno *Portfolio management*. Zde dochází jak k aktualizaci dostupných dat akcií, tak k samotnému výpočtu optimálního portfolia a jeho následné úpravě. Co se týče rozložení tohoto okna, tak levá část je primárně zaměřena na správu



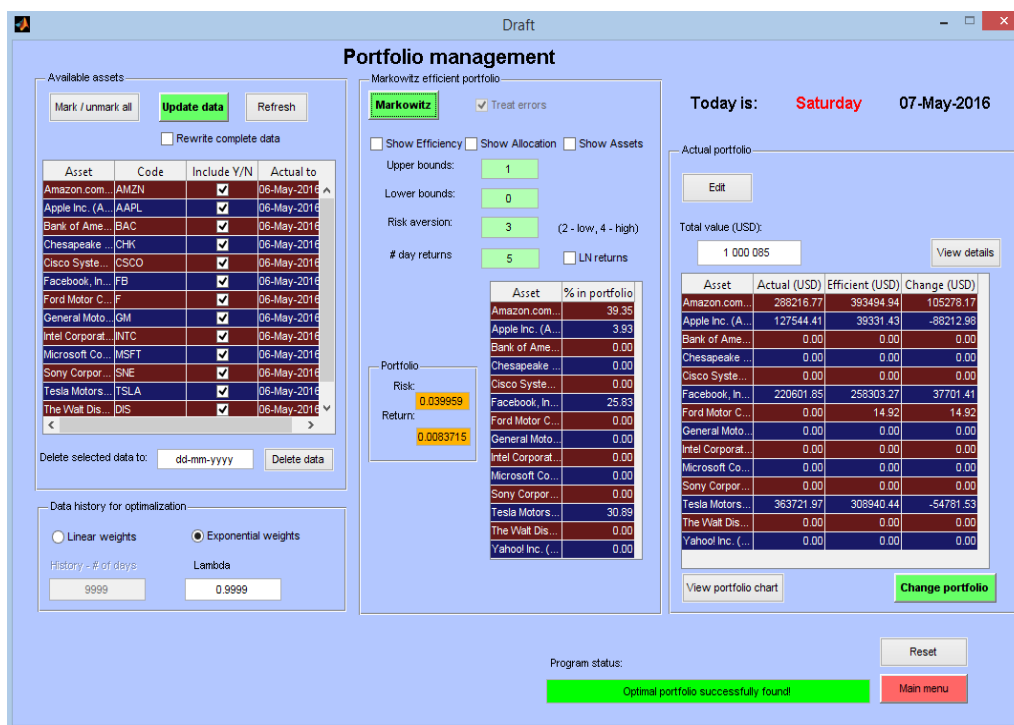
Obrázek 6.5: Okno pro testování stacionarity vstupních dat

a aktualizaci dostupných dat, střední oblast pak slouží k nastavení parametrů optimalizace a k následnému výpočtu a nakonec v pravé části vidíme a upravujeme současně držené portfolio na základě aktuální optimalizace postavené na nejaktuálnějších datech. Ilustrace je k dispozici na obrázku 6.6.

Podívejme se tedy na jednotlivé procesy aktualizace dat a optimalizace portfolio.

- **Aktualizace dat**

V levé části okna nalezneme tabulku s dostupnými tituly, které můžeme v portfoliu uvažovat. Zároveň lze v posledním sloupci vidět, do kdy jsou jednotlivá data o akciích aktuální a případně můžeme aktualizovat. Jednoduše zaškrtneme přímo v tabulce tituly, které chceme zkontrolo-



Obrázek 6.6: Okno aktualizace dat a správy portfolia

vat (pro hromadnou manipulaci slouží tlačítko **Mark / unmark all**) a stiskem tlačítka **Update data** spustíme proces aktualizace. Algoritmus pak projde všechna označená aktiva a zkontroluje, zda jsou již aktuální. V případě, že ne, spustí proces aktualizace a při nalezení titulu, který je úplně nový a neexistují k němu historická data, spustí stahování kompletní historie. Pro znovunačtení tabulky akcií včetně nově stažených dat slouží tlačítko **Refresh**.

Pro účely testování a zachycení situací, kdy dojde k poškození dat (například nevhodnou manipulací s procesem štěpení akcie - viz podkapitola 6.1.3) je připravena funkcionální vynucené stažení a přepsání všech dat o akciích zaškrtnutím pole **Rewrite complete data**. Dále je za účelem testování nástroje vytvořeno pole pod tabulkou sloužící k odebrání nejaktuálnějších dat až do zadaného data (například pro testování funkčnosti aktualizace).

O úspěšnosti procesů jsme programem StockMaTT informováni v dialogovém okně *Program status* v dolní části okna.

Pozn.: Aktuální data jsou denně k dispozici v pracovní dny, tedy o víkendech a svátcích se může zdát, že data máme i po aktualizaci stále zastaralá, byť tomu tak není. V daný den pouze nejsou aktuálnější informace dostupné.

- **Volba modelu pro optimalizaci**

Samotný algoritmus výpočtu efektivního portfolia s adaptivním přístupem odhadu parametrů i tradiční Markowitzův model, je realizován v této obrazovce nástroje StockMaTT .

Volbu mezi tradičním a adaptivním modelem ovládáme v oblasti *Data history for optimization*. Přednastavená volba **Linear weights** reprezentuje klasický Markowitzův model. Délku historie (v počtu obchodovaných dní), ze které chceme parametry odhadovat, můžeme navíc nastavit v příslušném poli **History - # of days** s tím, že pokud chceme uvažovat všechna dostupná data, zadáme libovolné dostatečně velké číslo (například přednastavené 9999). Pokud chceme optimalizovat držené portfolio dle adaptivního modelu, tedy uvažujícího exponenciální vážení historických dat, zvolíme možnost **Exponential weights**. V poli **Lambda** pak můžeme nastavit příslušný koeficient „zapomínání“ - $\lambda \in (0, 1]$

Pozn.: Čím více se blíží λ k nule, tím rychleji model zapomíná.

- **Výpočet optimálního portfolia**

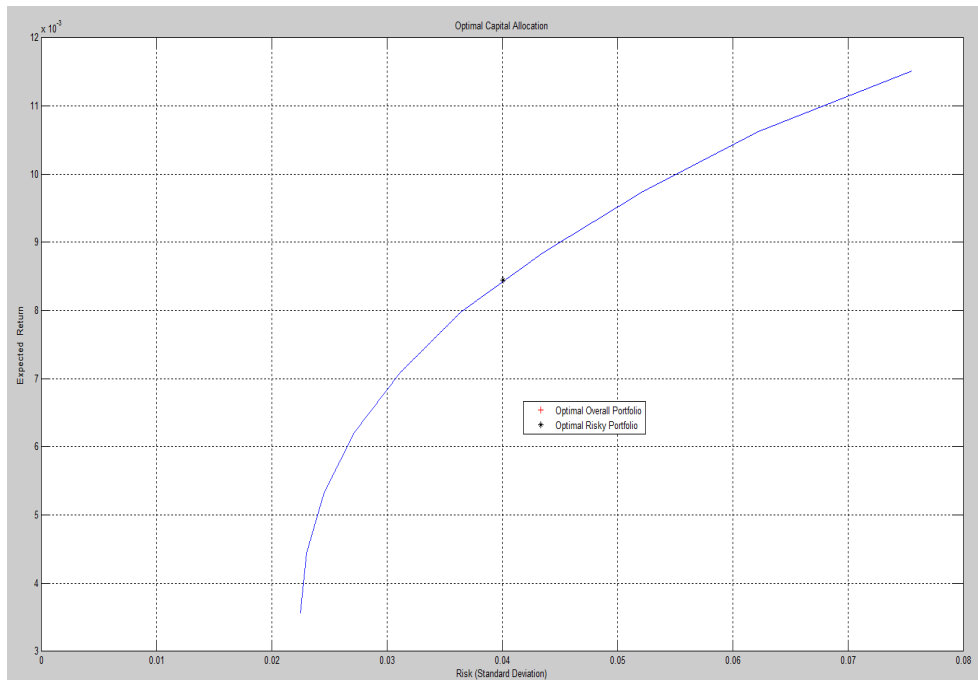
V části *Markowitz efficient portfolio* dochází k nastavení parametrů optimalizace a vizualizaci výsledků.

Nejprve je tedy zapotřebí nastavit požadované parametry optimalizace, kterými jsou:

- Upper bounds - UB ($UB \in (0, 1]$, $UB \geq \frac{1}{N}$, kde N - počet aktiv)
- nastavuje maximální investovaný podíl do jednoho aktiva.

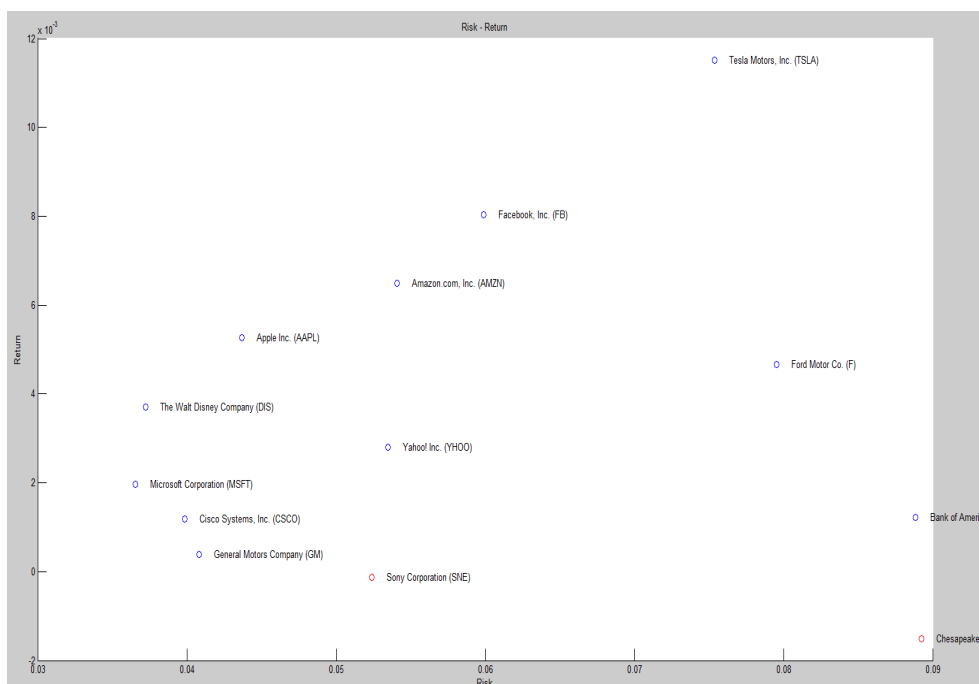
- Lower bounds - LB ($LB \in [0, 1)$, $LB \leq \frac{1}{N}$) - nastavuje minimální investovaný podíl do každého aktiva.
- Risk aversion - RA , $RA \in [2, 4]$ s tím, že 4 značí rizikově velmi averzního investora a naopak.
- # day returns - DR , $DR \in \mathbb{N}$ (a zřejmě volíme menší, než je délka historie dat) - značí, kolikadenní výnosnosti uvažujeme při výpočtu optimálního portfolia.
- LN returns - pole pro volbu lineárních (přednastaveno) či logaritmických výnosností.

Další možnost volby máme v požadovaném výstupu výpočtu. Kromě zanesení doporučených podílů investice do tabulky k příslušným akciím, vidíme také v oblasti *Portfolio* celkovou rizikovost a očekávanou výnosnost takto složeného portfolia. Navíc máme volitelně k dispozici tři grafické výstupy:



Obrázek 6.7: Grafický výstup optimalizace - alokace optimálního portfolia

- Show Efficiency - zobrazí křivku efektivního portfolia dle Markowitze.
- Show Allocation - zobrazí alokaci optimálního portfolia na množině efektivních portfolií - ilustrace na obrázku 6.7.
- Show Assets - zobrazí uvažovaná aktiva v prostoru riziko / výnos - viz obr 6.8.



Obrázek 6.8: Grafický výstup optimalizace - aktiva v prostoru riziko - výnos

Po zadání výše uvedených parametrů pak spustíme výpočet optimálního portfolia tlačítkem **Markowitz** a o výsledku jsme informováni v dialogovém okně *Program status*.

• Správa portfolia

Pravá část okna *Portfolio management* slouží k vizualizaci aktuálního portfolia a nově doporučeného. V poslední tabulce na této obrazovce vidíme seznam dostupných aktiv a k nim v příslušných sloupcích po řadě - aktuálně držené prostředky v titulu, efektivní alokace do daného titulu

a navrhovaná úprava, rozdíl. Celkovou investovanou částku můžeme vidět v poli **Total value (USD)**. Navíc skladbu současného a navrhovaného portfolia lze zobrazit graficky stisknutím tlačítka **View portfolio chart**. Tento výstup lze vidět na obrázku 6.9, kde dle legendy modře je zobrazena současná skladba naší investice a červeně optimální rozložení prostředků.

Pokud uživatel souhlasí s navrženým optimálním portfoliem dle zadaných parametrů, může ho uložit pomocí tlačítka **Change portfolio**, čímž z něj nově udělá výchozí. Zároveň lze jednoduše zjistit, kolik je třeba koupit či prodat kterých akcií, aby požadovaného portfolia dosáhl. Pro takový detail změny je nutno tlačítkem **View details** vyvolat okno s podrobnostmi o investici, viz obrázek 6.10.

- **Manuální úprava portfolia**

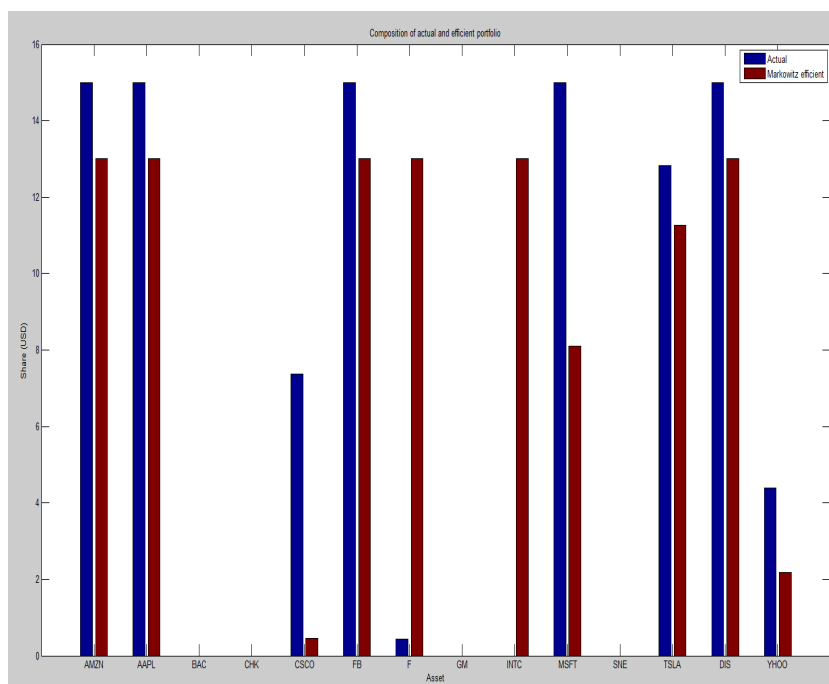
V případě, že se investor rozhodne investovat více (nebo méně) prostředků, či ručně upravit jejich rozložení, vyvolá prostředí *Actual portfolio* pro editaci pomocí tlačítka **Edit**. Tuto obrazovku lze vidět na obrázku 6.11.

Nejprve je nutné načíst aktuální portfolio volbou zdroje (defaultně z *.mat* souboru, eventuálně ze souboru *.xls*, do kterého lze zasahovat i mimo StockMaTT, dostupného dostupný ve složce */4_GUI&load/data/current_portfolio.xls*).

Editaci lze provádět po aktivaci módu úprav stiskem tlačítka **Edit portfolio**. Upravovat můžeme přímo v tabulce přepsáním hodnoty a posléze musíme uložit pomocí tlačítka **Save**. O stavu je uživatel informován v dialogovém okně. Celková částka je zároveň automaticky přepočítávána a zobrazována v poli **Total value (USD)**. Po skončení úprav se vrátíme do předchozího okna pomocí tlačítka **Exit**.

- **Reset okna**

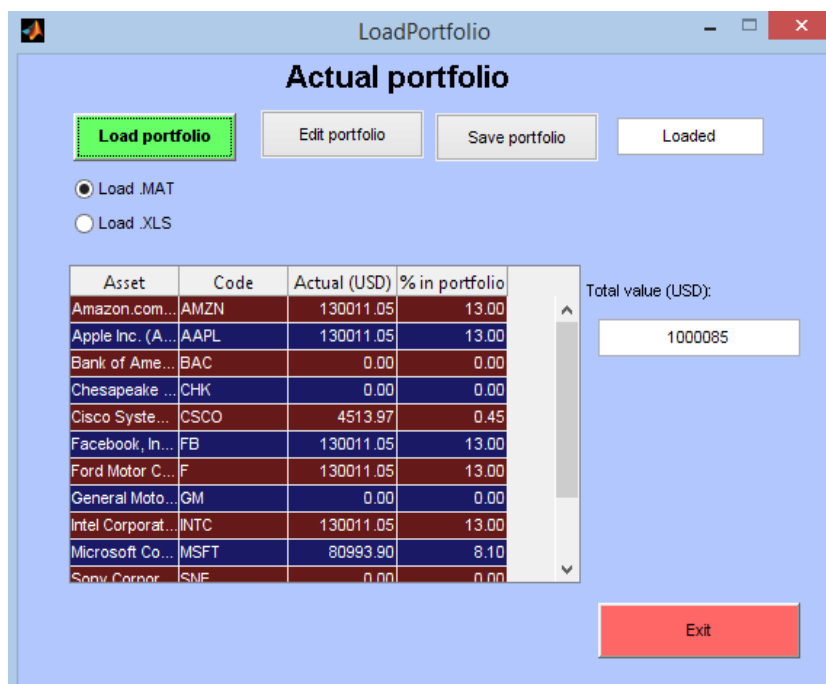
Pokud nastane jakákoliv chyba v programu, lze jednoduše resetovat okno pomocí tlačítka **Reset**, které neprovede žádné změny v portfoliu, datech a pod., pouze znovu spustí okno s výchozím nastavením.



Obrázek 6.9: Držené versus optimální portfolio

Asset	Actual (USD)	Efficient (USD)	Change (USD)	Rate (USD)	Volume change (pcs)
Amazon.com...	130011.05	244753.33	114742.28	594.60	193
Apple Inc. (A...	130011.05	168558.03	38546.98	108.66	355
Bank of Ame...	0.00	0.00	0.00	12.88	0
Chesapeake ...	0.00	0.00	0.00	3.76	0
Cisco Syste...	4513.97	0.00	-4513.97	27.69	-163
Facebook, In...	130011.05	224024.44	94013.39	110.63	850
Ford Motor C...	130011.05	0.00	-130011.05	12.55	-10359
General Moto...	0.00	0.00	0.00	29.37	0
Intel Corporat...	130011.05	0.00	-130011.05	31.63	-4110
Microsoft Co...	80993.90	0.00	-80993.90	54.42	-1488
Sony Corpor...	0.00	0.00	0.00	26.07	0
Tesla Motors...	112658.50	362749.20	250090.70	250.07	1000
The Walt Dis...	130011.05	0.00	-130011.05	96.42	-1348

Obrázek 6.10: Okno Price details



Obrázek 6.11: Prostředí pro editaci portfolia

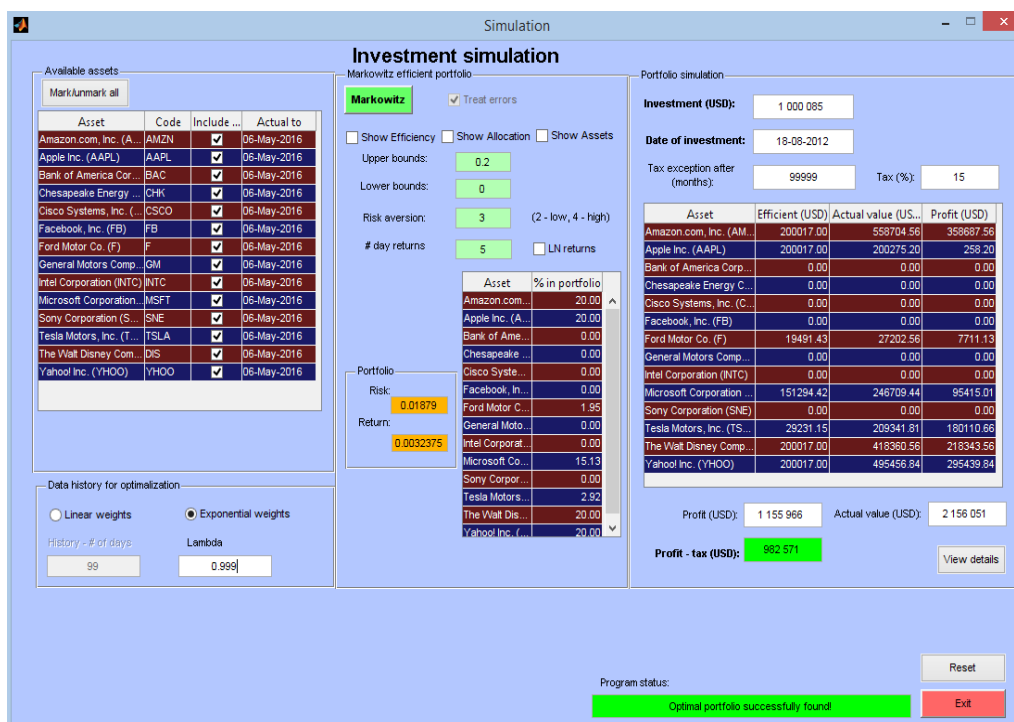
6.1.6 Simulace investic

Pro účely simulace a otestování parametrů na reálných datech poslouží okno *Investment simulation*, ilustrované na obrázku 6.12.

Toto prostředí je z velké části podobné předchozímu *Portfolio management*, které sloužilo ke skutečné správě portfolia, a proto i velká část manipulace s tímto oknem odpovídá již popsanému rozhraní. Nelze zde však aktualizovat data a zasahovat do drženého portfolia. Samotná manipulace s optimalizací je totožná a klíčový rozdíl je na pravé straně okna, kde nastavujeme a vizualizujeme simulaci.

- **Nastavení simulace**

Prvně nastavíme výši investice v poli **Investment USD**, příslušný datum, kdy k investici došlo v poli **Date of Investment** a také srážkovou daň, kterou jsme povinni dle platné legislativy zaplatit v poli **Tax (%)**. V případě, že je dle platné legislativy možné uplatnit tzv. daňový test,



Obrázek 6.12: Okno pro simulace investic a testování parametrů

tj. při držení portfolia určitou dobu nemusíme hradit daň, můžeme tuto dobu nastavit v poli **Tax exception after (months)**.

Dále nastavíme parametry simulace (stejně jako při reálné správě portfolia) a provedeme stisknutím tlačítka **Markowitz**. Hodnotu jednotlivých titulů v době investice, dnes a rozdíl mezi těmito hodnotami lze nalézt v příslušné tabulce. Celkové výsledky pak jsou pod tabulkou takto:

- **Actual value (USD)** - současná hodnota portfolia.
- **Profit (USD)** - rozdíl mezi současnou hodnotou portfolia a hodnotou v době investice.
- **Profit - tax (USD)** - rozdíl mezi současnou hodnotou portfolia a hodnotou v době investice ponížen o odvedenou daň v případě prodeje portfolia.

- **Detailní výsledky simulace**

Pro detailnější informace o výsledcích simulace lze vyvolat okno *Investment details* tlačítkem **View details**, které lze vidět na obrázku 6.13.

Name	Efficient (USD)	Historic rate (USD)	Volume (pcs)	Present rate (USD)	Present value (USD)	Change (USD)
Amazon.com, Inc. (AMZN)	200017.00	241.17	829.00	594.60	492923.38	292906.38
Apple Inc. (AAPL)	200017.00	92.59	2160.00	108.66	234705.61	34688.61
Bank of America Corpor...	0.00	8.00	0.00	12.88	0.00	0.00
Chesapeake Energy Cor...	0.00	19.14	0.00	3.76	0.00	0.00
Cisco Systems, Inc. (CS...	0.00	19.06	0.00	27.69	0.00	0.00
Facebook, Inc. (FB)	0.00	19.05	0.00	110.63	0.00	0.00
Ford Motor Co. (F)	200017.00	9.63	20770.00	12.55	260863.50	60846.50
General Motors Compan...	0.00	22.01	0.00	29.37	0.00	0.00
Intel Corporation (INTC)	49561.30	26.33	1882.00	31.63	59527.66	9966.36
Microsoft Corporation (M...	0.00	30.90	0.00	54.42	0.00	0.00
Sony Corporation (SNE)	0.00	11.95	0.00	26.07	0.00	0.00
Tesla Motors, Inc. (TSLA)	124725.19	30.01	4156.00	250.07	1039290.95	914565.76
The Walt Disney Compa...	200017.00	50.46	3964.00	96.42	382208.87	182191.87
Yahoo! Inc. (YHOO)	25730.51	15.03	1712.00	36.07	61751.84	36021.33

Obrázek 6.13: Detailní výsledky simulované investice

Zde máme v tabulce k jednotlivým aktivům v investici k dispozici po sloupcích následující údaje:

- **Efficient (USD)** - vložené prostředky do aktiva v době investice.
- **Historic rate (USD)** - jednotková cena akcie v době investice.
- **Volume (pcs)** - počet nakoupených akcií.
- **Present rate (USD)** - jednotková cena akcie v současnosti.
- **Present value (USD)** - současná hodnota investice v daném titulu.
- **Profit - tax (USD)** - rozdíl mezi současnou hodnotou a hodnotou v době investice.

Algoritmus simulace:

StockMaTT na pozadí funguje tak, že program „zapomene“ všechna data od data investice do dneška a na základě zbylých vypočte optimální portfolio. Pak předpokládá, že výši prostředků jsme rozložili v daném datu v doporučeném poměru do jednotlivých aktiv. Při vyhodnocení pak vezme dnešní hodnotu akcií a z nich vypočte celkovou hodnotu drženého portfolia dnes. Jednoduchým výpočtem pak dokážeme určit hrubý zisk z investice (bez případných jiných poplatků a nákladů).

6.2 Použitá data k testování

Jako bylo řečeno v kapitole 2, na počátku této práce bylo třeba rozhodnout poměrně zásadní otázku a to z jakých dat budeme vycházet a na kterých bude postaven celý StockMaTT v2.0.

Z několika důvodů jsme se rozhodli pro zdroj *Yahoo Finance*, který vyhovoval nejlépe našim kritériím. Mezi ty nejzákladnější bychom mohli zařadit například:

- nabídku titulů (možnost využití nástroje na světovém trhu),
- spolehlivou integraci s SW MATLAB[®],
- rychlost stahování dat.

Právě přechod na *Yahoo Finance*, jakožto zdroj dat pro StockMaTT, je jednou z nejdůležitějších změn oproti v1.0. Kvůli přechodu ze zdroje *kurzy.cz*, který používá jako jednoznačný identifikátor aktiva číselný kód, musela být předělána většina funkcí používaných na pozadí a zejména procesy stahování dat musely být kompletně nově navrženy. Nicméně také díky této změně se podařilo velmi znatelně optimalizovat rychlost programu, což má zcela zásadní vliv na jeho praktickou použitelnost. Zároveň lze z tohoto serveru

poměrně jednoduše získat data očištěná o dividendy [7], která jsou pro optimalizaci realistictější.

6.2.1 Akcie

Praktické testování adaptivního matematického modelu a zároveň navrženého SW prostředí StockMaTT bylo provedeno na čtrnácti titulech, dostupných především na burzovním trhu NASDAQ. Ten je zároveň největším v USA a nabízí více než 3900 titulů z 39 zemí. Pro testování byly vybrány tituly akcií, které jsou obchodovány ve velkých objemech a spadají zejména do oblasti elektroniky, automobilového průmyslu a sociálních sítí.

- Amazon,
- Apple Inc.,
- Bank of America Corp.,
- Chesapeake Energy Corp.,
- Cisco Systems, Inc.,
- Facebook, Inc.,
- Ford Motor Co.,
- General Motors Company,
- Intel Corporation,
- Microsoft Corp.,
- Sony Corp.,
- Tesla Motors, Inc.,
- The Walt Disney Company,
- Yahoo! Inc.

Výše uvedený seznam byl využit k testování, nicméně jak je popsáno v 6.1.2, v nástroji StockMaTT lze jednoduše rozšiřovat.

6.2.2 Rychlostní optimalizace

Jak již bylo naznačeno v podkapitole 6.2, StockMaTT v2.0 byl oproti předcházející verzi 1.0 poměrně zásadně optimalizován po stránce rychlosti běhu programu. Rychlost takovýchto nástrojů zcela zásadně ovlivňuje praktickou použitelnost (zejména během simulace investic pro otestování parametrů potřebujeme zrealizovat velké množství pokusů a také při nárůstu počtu uvažovaných aktiv je optimalizace v podstatě nevyhnutelná). Pokud půjdeme do extrému, společnosti zabývající se tzv. algoritmickým obchodováním stěhují své servery optimálně přímo k budovám burzy, aby minimalizovali zpoždění toku informací mezi burzou a jejich počítači³.

Pokud se podíváme na hlavní oblasti, díky kterým se podařilo výrazně zrychlit běh nástroje, pak jsou to následující tři:

- Zdroj dat

Použití integrovaných funkcí SW MATLAB[®] na import dat ze serveru *Yahoo Finance* výrazně zvyšuje rychlost oproti dřívějšímu načítání dat do *Excel* souborů (často několika desítek na jednu akcii) a následnému vyhledávání a přiřazování správných hodnot. Zároveň se díky tomu podařilo odstranit problém verze 1.0, kdy díky častým změnám struktur webových stránek *kurzy.cz* docházelo k nefunkčnosti aktualizace dat.

- Interní úložiště

Ve verzi 1.0 sloužilo jako úložiště seznamu akcií a stavu současného portfolia několik souborů typu *.xls*, jelikož při nevhodné manipulaci s daty v programu mohlo dojít k jejich poškození a v takovém případě je bylo třeba ručně opravit mimo programový nástroj. Při otevírání

³Klíčovou myšlenkou této optimalizace je okamžitá reakce na podněty trhu v rámci zlomků sekund.

v podstatě každého okna programu pak bylo třeba tento *.xls* soubor nahrávat a překopírovávat data.

Ve verzi 2.0 se díky zabezpečení manipulace s daty podařilo použít úložičtější typu *.mat*, tedy formát, pro který je MATLAB[®] optimalizovaný a se kterým je schopen komunikovat nesrovnatelně rychleji. Zároveň je již jakákoliv úprava dat možná přímo z prostředí nástroje, přičemž je ponechána i možnost data jednorázově naimportovat z Excelu v případě, že to uživatel vyžaduje.

- Optimalizace funkcí a procesů

V GUI uživatelském rozhraní dochází při každé akci (kliknutí na tlačítko, otevření nového okna, zaškrtnutí políčka, ...) k vyvolání nejrůznějších funkcí (načtení dat, uložení dat, zpřístupnění jiných tlačítek, atd.). Proto byla detailně zvážena každá tato reakce, která zpomaluje chod systému. Nedošlo však k omezení funkcionalit, ale řada z nich byla vyřešena efektivněji. Tato optimalizace primárně ovlivnila odezvu na stisk tlačítek a otevírání nových oken.

Jako benefit pak může být vnímán i vyšší komfort pro uživatele, který nečeká příliš dlouho na výstup programu.

6.3 Stacionarita finančních časových řad, stabilita odhadu

Pro testování stacionarity našich dat, tedy finančních časových řad použitých v této práci, jsme využili testu KPSS, popsaného v podkapitole 5.3.1, který je pro tyto účely často používán.

Pro všechny testované akcie byla na základě testu KPSS zamítnouta hypotéza H_0 na hladině významnosti 1%, tedy tyto časové řady vykazují nestacionaritu. Tento fakt podporuje myšlenku ošetření nestacionarity pomocí jednoho ze dvou navržených řešení v podkapitole 4.4. V této práci je prak-

ticky zpracována první varianta, adaptivní přístup odhadu parametrů popsán v 4.4.1.

6.4 Porovnání dosažených výsledků

Jedním z cílů této práce bylo porovnat výsledky klasického Markowitzova modelu a jeho adaptivní modifikace zohledňující nestacionaritu finančních časových řad. Proto v nástroji StockMaTT lze simultovat investice v historii a dívat se na to, jakou by dnes měla hodnotu portfolia navržená těmito algoritmy.

Během testování programu StockMaTT byla realizována řada těchto testů, ale jelikož možných kombinací parametrů optimalizace, dat investic atd., je prakticky nekonečně mnoho, pro rámcové porovnání dvou metod zde uvedeme pro ukázkou jeden test. Za tímto účelem jsme potřebovali zafixovat některé parametry a to například takto:

- fixní datum, zvolen **18. 8. 2013** (tedy investice na cca 2 roky a 9 měsíců),
- fixní částku, **1 000 000 USD**,
- legislativu, kde **neplatí** daňový test, tj. daní se jakkoliv dlouhá investice a to částkou 15% ze zisku,
- zahrnuli jsme **všechna** dostupná aktiva vyjmenovaná v podkapitole 6.2.1, tedy 14 titulů,
- parametr *Risk aversion* roven **3**, tedy rizikově středně averzní investor,
- parametr *# day returns* roven **5**, tedy odhady výnosností jsou spočteny na základě 5 denních výnosností.

V tabulce 6.4 můžeme vidět výsledky simulací výše popsané investice s různými parametry minimálních a maximálních investic do jednoho aktiva

a s různými parametry délky historie pro lineární model (tradiční Markowitzův) a parametrem λ pro model exponenciální. Modře jsou pro přehlednost vyznačené výsledky lineárního modelu a zeleně exponenciálního (včetně jejich příslušných parametrů).

	Linear	Exponential	Upper bounds	Lower bounds	Profit - tax (USD)	
	# of days	λ			Linear	Exponential
1	99	0,999	0,2	0	426 014	606 281
2	99	0,999	0,3	0	466 436	546 042
3	99	0,999	0,4	0	512 563	563 702
4	99	0,999	0,2	0,02	419 785	552 195
5	99	0,999	0,3	0,02	467 915	517 473
6	99	0,999	0,4	0,02	341 996	321 670
7	99	0,999	0,2	0,05	435 056	446 603
8	99	0,999	0,3	0,05	497 671	419 861
9	99	0,999	0,4	0,05	433 176	397 888
10	∇	0,9999	0,2	0	584 521	586 467
11	∇	0,9999	0,3	0	463 646	467 254
12	∇	0,9999	0,4	0	404 817	405 790
13	∇	0,9999	0,2	0,02	406 385	446 603
14	∇	0,9999	0,3	0,02	459 492	470 120
15	∇	0,9999	0,4	0,02	337 868	337 241
16	∇	0,9999	0,2	0,05	406 149	446 603
17	∇	0,9999	0,3	0,05	373 313	385 849
18	∇	0,9999	0,4	0,05	352 421	367 871

Tabulka 6.1: Simulace investic s různými parametry

Jak již bylo řečeno, obdobných simulací bychom mohli realizovat prakticky nekonečně mnoho a toto je jedno konkrétní zadání investice. Nicméně pokud se pro hrubé srovnání z tabulky 6.4 podíváme na výsledky investic, tak zjistíme, že v 14 z 18 simulací si vede skutečně lépe model exponenciální (a při kratší historii dat v první polovině tabulky dokonce poměrně výrazným způsobem).

Navíc si na této simulaci lze všimnout faktu, že pokud adaptivní model neomezujeme minimální investicí do jednotlivých aktiv, vede si vždy lépe než model klasický.

7 Závěr

Tato práce se zaměřuje na dva hlavní cíle. Zaprvé navrzení a validaci vhodného matematického modelu, který bude jako výstup dávat optimální složení investičního portfolia. Druhým cílem byla implementace tohoto matematického modelu do prakticky použitelného nástroje na světovém kapitálovém trhu, kterým se stal program StockMaTT v2.0 realizovaný v jazyce MATLAB®.

V [7] byla víceméně intuitivně navržena úprava Markowitzova modelu. Průběhem této práce se nám podařilo zdůvodnit jeho efektivitu a ověřit příčinu, proč odhady dle klasického modelu vykazují nestabilitu. Ta je způsobena nestacionaritou vstupních finančních časových řad, kterou jsme potvrdili pro tyto účely často používaným KPSS testem. Dle tohoto testu všech 14 uvažovaných akcií vyazuje nestacionaritu, resp. finanční časové řady tyto aktiva charakterizující. Dále je v práci navrženo druhé možné řešení založené na matematické úpravě odhadovaných parametrů pomocí teorie náhodných matic, která původně vznikla pro fyzikální účely, avšak dnes se již hojně používá i v oblasti financí. Z těchto dvou navržených řešeních nestability je v praktické implementaci použita první varianta, upravující odhady vstupních parametrů modelu pomocí exponenciálního vážení dat do historie.

Nedílnou součástí práce byl vývoj a optimalizace programu StockMaTT v2.0 implementujícího v první polovině práce popsany matematický model a integraci na databázi aktiv *Yahoo Finance*. Velký důraz byl kladen na rychlost a uživatelskou přívětivost prostředí tak, aby byl reálně použitelný a pro uživatele komfortní i vzhledem k faktu, že některé parametry modelu nezbývá než optimalizovat simulačně na historických datech.

Nově navržené metody byly testovány a jak je uvedeno v podkapitole 6.4, bylo rovněž provedeno základní srovnání s klasickou metodou na modelové investici založené na reálných datech. Zde se adaptivnímu modelu podařilo poskytnout optimálnější portfolio v 14 z 18 simulovaných nastaveních investice.

Výsledky této práce byly využity v článku *Adaptive parameter estimations of Markowitz model* od autorů Blanky Šedivé a Josefa Pavelce na konferenci *MME 2016*.

Literatura

- [1] DUPAČOVÁ, Jitka. *Markowitzův model optimální volby portfolia - předpoklady, data, alternativy* [online]. [cit. 2016-04-12].
Dostupné z: <http://msekcce.karlin.mff.cuni.cz/~dupacova/downloads/Markowitz.pdf>
- [2] FRIESEL, Michal, ŠEDIVÁ, Blanka. *Finanční matematika hypertextově* [online]. 2003 [cit. 2013-05-12]. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~friesl/h-fim/>
- [3] GUERARD, John B., jr. *Handbook of Portfolio Construction: Contemporary Applications of Markowitz*. New York: Springer, 2010. ISBN 978-0-387-77438-1.
- [4] JEŽKOVÁ, Martina. *Indikátory technické analýzy akcií*. Brno, 2010. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Přírodovědecká fakulta.
- [5] LALOUX, Laurent, CIZEAU, Pierre, POTTERS, Marc. *Random matrix theory and financial correlations*. International Journal of Theoretical and Applied Finance (2000), 3(03), 391-397.
- [6] LUNDE, Asger, SHEPHARD, Neil, SHEPHARD, Kevin. *Econometric analysis of vast covariance matrices using composite realized kernels*. New York: Springer, 2011. ISBN 978-1-483-01428-3.
- [7] PAVELEC, Josef. *Programový nástroj pro volbu optimálního portfolia*. Plzeň, 2013. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd.

- [8] REIF, Jiří. *Metody matematické statistiky*. Plzeň: ZČU, 2004. ISBN 80-7043-302-7.
- [9] SCHERER, Bernd, DOUGLAS, Martin. *Introduction to modern portfolio optimization with NUOPT and S-PLUS*. New York: Springer, 2005. ISBN 0-387-21016-4.
- [10] Documentation center. *MathWorks* [online]. [cit. 2013-05-12].
Dostupné z:
<http://www.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- [11] *Finanční a pojistná matematika: Přednášky k předmětu*. MAREK, Patrice. [online]. [cit. 2013-05-12]. ZČU, 2012. Dostupné z:
http://www.kma.zcu.cz/main.php?KMAfile=./CLENOVE/main.php&DRC=./STRUCTURE/02_pracovnici/001_abeceda/&DRL=CZ&DROF=0&nick=PaMar&kam=vyuka.php
- [12] *Finanční matematika: Přednášky k předmětu*. MAREK, Patrice. [online]. [cit. 2013-05-12]. ZČU, 2012. Dostupné z:
http://www.kma.zcu.cz/main.php?KMAfile=./CLENOVE/main.php&DRC=./STRUCTURE/02_pracovnici/001_abeceda/&DRL=CZ&DROF=0&nick=PaMar&kam=vyuka.php
- [13] *Statistická analýza 2: Přednášky k předmětu*. ŠEDIVÁ, Blanka. [online]. [cit. 2013-05-12]. ZČU, 2013. Dostupné z:
<http://home.zcu.cz/sediva/sa2/>
- [14] KPSS test. *Wikipedia: the free encyclopedia*. [online]. 2001- [cit. 2016-04-09]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/KPSS_test
- [15] Dow Jones Industrial Average. *Wikipedia: the free encyclopedia*. [online]. 2001- [cit. 2016-05-08]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Dow_Jones_Industrial_Average

A Přílohy

A.1 Přiložené CD

Součástí této diplomové práce je CD s následujícím obsahem:

- Text diplomové práce ve formátu pdf: **JosefPavelec-DP.pdf**.
- Program StockMaTT ve složce **StockMaTT** (spustitelná funkce *Main.m* se nachází v podadresáři *4_GUI&load*).