

Západočeská Univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Oceňování Bermudských opcí**

Plzeň, 2016

Ing. Jarmila Švajcrová

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 13.5. 2016

Jarmila Švajcrová

## Poděkování

Děkuji Ing. Janu Pospíšilovi, Ph.D., vedoucímu diplomové práce, za cenné rady, připomínky a metodické vedení v průběhu zpracovávání této práce. V neposlední řadě děkuji své rodině a přátelům za podporu při studiu.

## **Abstrakt**

Tato diplomová práce se věnuje oceňování Bermudských opcí pomocí Black-Scholesova a Hestonova modelu a to pomocí různých numerických metod, konkrétně simulací Monte Carlo a metodou konečných diferencí.

## **Klíčová slova**

Bermudská opce, Black-Scholesův model, Hestonův model, Lonstaff-Schwarzova metoda,  $\theta$ -schéma

## **Abstract**

This thesis shows how to price Bermudan options using Black-Scholes and Heston model using different numerical methods, in particular by Monte Carlo simulation and by finite difference method.

## **Key words**

Bermudan option, Black-Scholes model, Heston model, Lonsstaff-Schwarz method,  $\theta$ -scheme

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>8</b>
1.1 Bermudská opce . . . . .	8
1.2 Bermudské opce a metoda Monte Carlo . . . . .	8
1.3 Věčná Bermudská opce . . . . .	9
1.4 Cíl práce . . . . .	9
1.5 Struktura práce . . . . .	10
<b>2 Základní pojmy</b>	<b>11</b>
2.1 Základní pojmy týkající se opcí . . . . .	11
2.2 Teorie pravděpodobnosti . . . . .	12
2.3 Bermudská opce a její podoby . . . . .	15
2.4 Metoda Monte Carlo . . . . .	17
<b>3 Metodika</b>	<b>19</b>
3.1 Black-Scholesův model . . . . .	19
3.1.1 SDE modelu . . . . .	19
3.1.2 Simulace modelu . . . . .	19
3.2 Hestonův model . . . . .	20
3.2.1 SDE modelu . . . . .	20
3.2.2 Simulace modelu . . . . .	21
3.3 Oceňování . . . . .	22
3.3.1 Longstaff-Schwartzova metoda . . . . .	22
3.3.2 Analytické řešení Black-Scholesovy PDE . . . . .	23
3.3.3 Analytické řešení Hestonovy PDE . . . . .	25
3.3.4 Théta schéma . . . . .	25
<b>4 Vlastní práce</b>	<b>29</b>
4.1 Black-Scholesův model a Longstaff-Schwartzova metoda . . . . .	30

4.2 Hestonův model a Longstaff-Schwarzova metoda . . . . .	33
4.3 Black-Scholesův model a Théta schéma . . . . .	37
4.4 Hestonův model a Théta schéma . . . . .	39
4.5 Rollover opce . . . . .	42
<b>5 Závěr</b>	<b>45</b>
<b>Literatura</b>	<b>46</b>

# 1 Úvod

## 1.1 Bermudská opce

Opce je právo jejího držitele na prodej či nákup daného podkladového aktiva za předem stanovenou částku bez ohledu na momentální tržní cenu. Tato práce se zabývá speciálním druhem opce a to opcí Bermudskou. Nejběžnějšími druhy jsou opce Evropské a Americké. Hlavním znakem Evropské opce je, že může být uplatněna pouze v den splatnosti, na rozdíl od Americké, která může být uplatněna kdykoliv až do termínu splatnosti včetně. Mimo tyto dvě opce existuje celá řada dalších druhů opcí. V následujícím textu se budeme zabývat Bermudskou opcí. Bermudy jsou malé souostroví v Atlantickém oceánu mezi Evropou a Amerikou, odtud název pro Bermudskou opci, která je něco mezi opcí Evropskou a Americkou. Bermudská opce může být uplatněna v předem definované časové okamžiky a v den vypršení kontraktu.

Bermudským opcím a vyčíslením jejich hodnoty se v posledních letech věnují desítky článků ve vědeckých periodikách. Pro příklad uveďme *International Journal of Computer Mathematics*, *Quantitative Finance* nebo *SIAM Journal on Financial Mathematics*. Články se zabývají především oceňování těchto opcí různými metodami. V následujících dvou kapitolách jsou některé tyto články zmíněny.

## 1.2 Bermudské opce a metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo je hojně používaný nástroj pro oceňování Bermudských opcí.

Ke konstrukci dolní a horní hranice cen Bermudské opce používají Denis Belomestny, Grigori Milstein a Vladimir Spokoyny ve článku [3] právě Monte Carlo simulaci, k níž potřebné algoritmy byly získány pomocí regresních metod. Algoritmus je otestován pomocí nacenění Bermudské max-call opce.

Další publikace [10] zabývající se oceňováním Bermudských opcí zveřejnili Daniel Egloff, Michael Kohler a Nebojsa Todorovic. Přicházejí zde se simulačním algoritmem pro numerické řešení v diskrétním čase a dále pomocí neparametrické metody nejmenších čtverců vyčíslují rekurzivně hodnoty



ve spojitém případě. Ukazují také míru konvergence a konzistentnosti nového algoritmu. A konečně vše demonstrují na příkladu s vícedimenzionální Bermudskou opcí.

Ve článku [4], jehož autory jsou Denis Belomestny, G. N. Milstein a John Schoenmakers, je ukázáno několik metod pro výpočet citlivosti Bermudské opce, pomocí regresních metod a Monte Carlo simulace. Výsledky jsou podpořeny testovacím algoritmem a numerickou ilustrací problému.

### 1.3 Věčná Bermudská opce

Mnohé publikace poslední doby se také zabývají tzv. věčnou Bermudskou opcí. Ta na rozdíl od klasické Bermudské opce nemá datum expirace.

Například v práci [6] odvozují Boyarchenko a Levendorski exaktní analytickou formuli pro ocenění věčné Bermudské opce v binomickém modelu.

Metodu založenou na řešení parciálních diferenciálních rovnic můžeme nalézt v publikaci [13], kterou publikoval Jian Wei Lin. Používá Black-Scholesovu formuli a odvozuje nelineární rovnici k výpočtu optimálního okamžiku uplatnění opce.

Autoři Jianwei Lin a Jin Liang se také zabývají oceněním věčné Bermudské opce a to ve článku [14]. Pro vyjádření diskrétního modelu je použita metoda binomického stromu. Nalézají nelineární systém, který oceňuje opci v předem dané časové okamžiky, ve kterých může být opce uplatněna. Dokazují existenci a jedinečnost řešení tohoto systému a vše je také podpořeno numerickým příkladem.

### 1.4 Cíl práce

Cílem práce je seznámit čtenáře s Bermudskou opcí, základními pojmy týkající se opcí, teorie pravděpodobnosti a oceňování opcí. Představeny budou modely simulace ceny podkladového aktiva, a to Black-Scholesův model, neboli model vycházející z geometrického Brownova pohybu a Hestonův model, který je modelem se stochastickou volatilitou. Dále pak budou uvedeny některé možnosti ocenění Bermudské opce vycházející z těchto modelů, a to konkrétně metoda Monte Carlo a Longstaff-Schwarzův algoritmus, přímé analytické řešení oceňovací parciální diferenciální rovnice a  $\theta$ -schéma, které je numerickým řešením oceňovací PDE.

Vlastní práce si pak klade za cíl výše zmíněné metody implementovat v softwaru Matlab a to jak v Black-Scholesově, tak v Hestonově modelu. Získané výsledky budou okomentovány, porovnány a graficky prezentovány.

## 1.5 Struktura práce

Struktura diplomové práce je následující. Nejprve jsou v druhé kapitole představeny základní pojmy užívané ve spojitosti s opcemi, dále základní pojmy z teorie pravděpodobnosti, třetí částí kapitoly je pak detailnější seznámení s Bermudskými opcemi a kapitolu uzavírá seznámení s metodou Monte Carlo. Ve třetí kapitole nalezneme popis Black-Scholesova a Hestonova modelu a metodiku použitou k ocenění Bermudské opce. Kapitola čtvrtá obsahuje vlastní práci, tedy výstupy simulací s komentáři. Poslední pátá kapitola zakončuje práci shrnutím a závěrem.

## 2 Základní pojmy

### 2.1 Základní pojmy týkající se opcí

- **Opce** - druh smlouvy mezi kupujícím a prodávajícím. Dává kupujícímu právo, nikoliv však povinnost, prodat či koupit dané podkladové aktivum (underlying asset) za danou realizační cenu (strike price)  $K$ , ať již je momentální cena  $S$  podkladového aktiva jakákoliv.
- **Podkladové aktivum** (underlying asset) - předmět smlouvy, od kterého je opce odvozena. Například akcie, dluhopisy, indexy nebo komodity. Jeho cenu značíme  $S$ .
- **Realizační cena** (strike price) - cena, za kterou může vlastník opce prodat či koupit podkladové aktivum, značíme ji  $K$ .
- **Put opce** - právo na prodej podkladového aktiva. Výplatní funkce (payoff) je dána vztahem  $V = \max(K - S, 0)$ .
- **Call opce** - právo na nákup podkladového aktiva. Výplatní funkce (payoff) je dána vztahem  $V = \max(S - K, 0)$ .
- **Opční prémie** (Option price) - poplatek za získání opce, neboli její cena.
- **Vnitřní hodnota opce** - zisk, který by majitel inkasoval okamžitým uplatněním opce.
- **Volatilita** - míra kolísání hodnoty, značíme  $v$ , resp.  $v_t$  u modelů se stochastickou volatilitou.
- **OTM** - out of the money - mimo peníze. Jedná se o situaci, kdy je uplatnění opce zcela nevýhodné. Pro call opci tedy  $K \gg S$  a pro put opci  $K \ll S$ .
- **ATM** - at the money - na penězích. Strike koresponduje nebo je velmi blízko aktuální ceně podkladového aktiva, to je  $K \approx S$ .
- **ITM** - in the money - v penězích. V této situaci je uplatnění opce velmi výhodné. Pro call opci platí  $K \ll S$  a pro put opci  $K \gg S$ .

- **Hedging** - finanční nástroj k zajištění budoucí ceny aktiva. Používá se na příklad ke snížení měnového rizika.

## 2.2 Teorie pravděpodobnosti

**Definice 2.1**  $\sigma$ -algebra se nazývá neprázdný systém  $\mathcal{A}$  podmnožin neprázdné množiny  $\Omega$ , pokud platí

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ ,
- $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

**Definice 2.2** Pravděpodobnostním prostorem je označována trojice  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , kde  $\Omega$  je množina elementárních jevů,  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra jevů z  $\Omega$  a  $P$  je množinová funkce, která se nazývá pravděpodobnost, na  $\mathcal{A}$ , s následujícími vlastnostmi.

- $P(A) \geq 0, A \in \mathcal{A}$ ;
- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$ ;
- $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ , je-li  $A_n$  posloupnost po dvou disjunktních jevů.

**Definice 2.3** Náhodný proces je množina náhodných proměnných  $X = X(t, \omega), t \in [0, T], \omega \in \Omega$  v pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nabývajících hodnot v  $\mathbb{R}$ .

Pro pevné  $\omega \in \Omega$  nazýváme  $t \rightarrow X(t, \omega)$  trajektorii (path).

Pro pevné  $t \in [0, T]$  nazýváme  $\omega \rightarrow X(t, \omega)$  náhodnou veličinou.

**Definice 2.4** Necht  $E(X^2) < \infty$  a  $E(Y^2) < \infty$ . Kovariance  $cov(X, Y)$  náhodných veličin  $X$  a  $Y$  je definována vztahem

$$cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) \quad (2.1)$$

a koeficient korelace  $corr(X, Y)$  je dán vztahem

$$corr(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{varX}\sqrt{varY}} = \frac{E(X - EX)(Y - EY)}{\sqrt{varX}\sqrt{varY}}. \quad (2.2)$$

**Definice 2.5** Wienerův proces nebo také Brownův pohyb budeme značit  $W_t$  a jedná se o spojitý náhodný proces, mající následující vlastnosti.

- $W_0 = 0$  skoro jistě,
- $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  jsou nezávislé  $\forall t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0 = 0$ ,

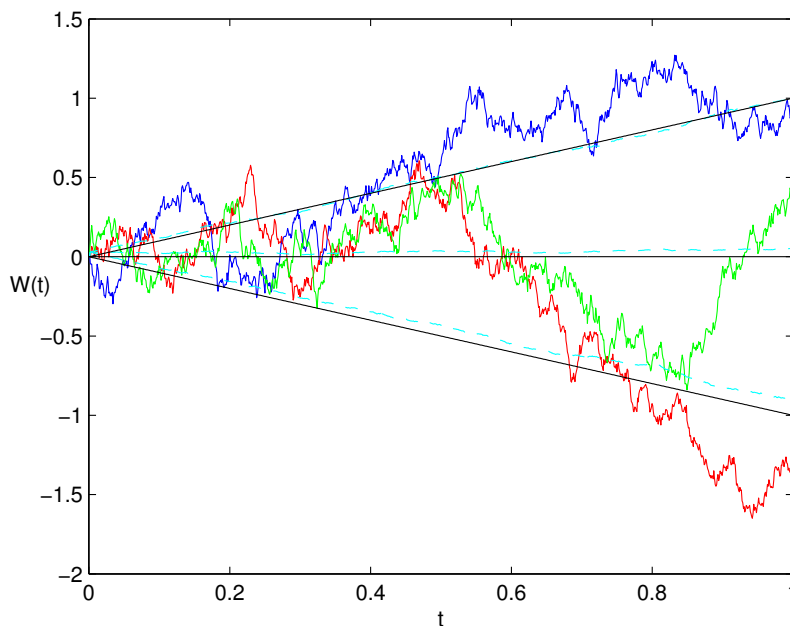
- $W_t - W_s$  má normální rozdělení -  $\mathcal{N}(0, t - s), \forall t \geq s \geq 0$ .

### Simulace Wienerova procesu

```
nPaths = 10^eM; %number of simulation
N = 20; %discretization
dt = tau/N;
dW = sqrt(dt)*randn(nPaths,N);
W = cumsum(dW,2); % cumulative sum
```

Na grafu níže jsou zobrazeny tři trajektorie Wienerova procesu z celkem tisíce simulovaných. Dále je zobrazena střední hodnota a rozptyl zjištěný ze všech těchto trajektorií. Na obrázku 1 můžeme vidět, že již při tisíci simulacích jsou tyto hodnoty blízké přesným teoretickým hodnotám. Pro Wienerův proces platí:

- $E[W_t] = 0, t \geq 0$ ,
- $\text{Var}[W_t] = t, t \geq 0$ .



Obrázek 1: Tři trajektorie Wienerova procesu, střední hodnota a střední hodnota  $\pm$  rozptyl

**Definice 2.6** Nechť  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor, na kterém je definován Wienerův proces  $W(t), t \geq 0$ . Pak filtrací nazveme systém  $\sigma$ -algeber  $\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}, t \geq 0$ , který splňuje následující podmínky.

- Je-li množina v  $\mathcal{F}(s)$  je také v  $\mathcal{F}(t)$ ,  $\forall 0 \leq s < t$ ,
- $\forall t \geq 0$  je  $W(t)$   $\mathcal{F}(t)$ -měřitelný.
- $\forall 0 \leq t \leq u$  jsou přírůstky  $W(u) - W(t)$  na  $\mathcal{F}(t)$  nezávislé.

**Definice 2.7** Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $\mathcal{G}$  sub- $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  a  $X$  náhodná veličina, která je buď nezáporná nebo integrovatelná. Podmíněnou pravděpodobnost veličiny  $X$  za předpokladu  $\mathcal{G}$  značíme  $E[X|\mathcal{G}]$  a splňuje toto,

- $E[X|\mathcal{G}]$  je  $\mathcal{G}$ -měřitelné a

- 

$$\int_A E[X|\mathcal{G}](\omega) dP(\omega) = \int_A X(\omega) dP(\omega), \forall A \in \mathcal{G}. \quad (2.3)$$

**Definice 2.8** Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $T > 0$  pevné a  $\mathcal{F}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  filtrace  $\mathcal{F}$ . Mějme adaptovaný proces  $M(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Potom  $M(t)$  je martingal, pokud

$$E[M(t)|\mathcal{F}(s)] = M(s), \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

submartingal, pokud

$$E[M(t)|\mathcal{F}(s)] \leq M(s), \forall 0 \leq s \leq t \leq T \quad (2.5)$$

a supermartingal, pokud

$$E[M(t)|\mathcal{F}(s)] \geq M(s), \forall 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (2.6)$$

Jinak řečeno, je-li proces martingal, pak nemá tendenci růst ani klesat. Je-li submartingal, může mít tendenci růst, a je-li supermartingal, může mít tendenci klesat.

**Definice 2.9** Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor, proces  $X(t)$  nazveme semimartingal, pokud je možné ho rozložit na

$$X(t) = M(t) + A(t), \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

kde proces  $M(t)$  je lokální martingal a proces  $A(t)$  je adaptovaný RCLL (zprava spojitý s limitami zleva) proces<sup>1</sup> s lokálně konečnou variací. [8]

**Definice 2.10** Stochastický proces  $X(t)$  s hodnotami v  $\mathbb{R}^d$  je  $\sigma$ -martingal, pokud je semimartingal a pokud existuje takový martingal proces  $M(t)$  s hodnotami v  $\mathbb{R}^d$  a takový  $M$ -integrovatelný předvídatelný proces  $\phi$  s hodnotami v  $\mathbb{R}_+$ , že [8]

$$X = \phi M. \quad (2.8)$$

**Definice 2.11** Symbolem  $\mathbf{M}_\sigma^e$  značíme množinu ekvivalentních  $\sigma$ -martingal měř  $Q$ .

<sup>1</sup>nebo také càdlàg proces z francouzského continue à droite, limite à gauche

## 2.3 Bermudská opce a její podoby

**Definice 2.12** *Bermudská opce* je dvojice  $(U, R)$ , kde  $R \subseteq [0, T]$  jsou okamžiky, kdy je možné uplatnění opce a  $U = (U_t)_{0 \leq t \leq T}$  je nezáporný adaptovaný RCLL proces, který se nazývá výplatní (payoff) proces. Držitel Bermudské opce si může zvolit čas  $\tau \in R$  a získá tak výplatu  $U_\tau$  od emitenta opce. Symbolem  $S_{t,T}$  značíme množinu všech  $\tau \in [t, T]$  a definujeme  $S_{t,T}(R) = \{\tau \in S_{t,T} | \tau \in R\}$ . Předpokládáme, že  $T \in R$ .

*Poznámka.* Například pro Americkou opci máme  $R = [0, T]$  a pro Evropskou  $R = \{T\}$ .

Při oceňování Bermudské opce můžeme uvažovat dva přístupy. První možností je podívat se přímo na proces  $V^0$ , který je definován jako

$$V_t^0 = \text{ess.sup}_{Q \in \mathbf{M}_\sigma^e, \tau \in S_{t,T}(R)} \mathbb{E}_Q[U_\tau | \mathcal{F}_t], 0 \leq t \leq T, \quad (2.9)$$

kde  $\mathbb{E}_Q[U_\tau | \mathcal{F}_t]$  je podmíněná pravděpodobnost v  $\sigma$ -martingal míře  $Q$ . Druhým přístupem je analogie s opcí Americkou. Bermudská opce je tedy nahrazena opcí Americkou s výplatní funkcí

$$\tilde{U}_t = U_t \mathbb{I}_{\{t \in R\}}, 0 \leq t \leq T, \quad (2.10)$$

kde  $\mathbb{I}_{\{t \in R\}}$  je indikátor, tedy je roven jedné pokud je splněno  $t \in R$ , jinak je roven nule.

Oceňujeme pak procesem  $\tilde{V}^0$ , který je definován jako

$$\tilde{V}_t^0 = \text{ess.sup}_{Q \in \mathbf{M}_\sigma^e, \tau \in S_{t,T}} \mathbb{E}_Q[\tilde{U}_\tau | \mathcal{F}_t], 0 \leq t \leq T. \quad (2.11)$$

Abychom pomocí obou přístupů získali tentýž výsledek, je nutné, aby výplatní funkce splňovala RCLL podmínku, jak již bylo zmíněno v definici Bermudské opce. Podíváme se proto na tuto vlastnost detailněji.

**Věta 2.13** Proces  $V^0$  je adaptovaný, nezáporný a pro  $\forall Q \in \mathbf{M}_\sigma^e$  platí

$$\mathbb{E}_Q[V_t^0 | \mathcal{F}_s] \leq V_s^0 \quad Q - s.j. \quad s \leq t.$$

Pokud je

$$\sup_{Q \in \mathbf{M}_\sigma^e, \tau \in S_{0,T}(R)} \mathbb{E}_Q[U_\tau] < \infty,$$

pak je proces  $V^0$  také  $Q$ -integrovatelný  $\forall Q \in \mathbf{M}_\sigma^e$  a je tedy  $\mathbf{M}_\sigma^e$  - supermartingale.

*Důkaz.* viz [12] věta č. 4.3.

**Věta 2.14** Proces  $\tilde{V}^0$  je nezáporný zobecněný  $\mathbf{M}_\sigma^e$  - supermartingale a pokud

$$\sup_{Q \in \mathbf{M}_\sigma^e, \tau \in S_{0,T}(R)} \mathbb{E}_Q[U_\tau] < \infty,$$

pak je také  $\mathbf{M}_\sigma^e$  - supermartingale.

*Důkaz.* Použitím věty 2.8 na dvojici  $(\tilde{U}, [0, T])$  a rovnosti

$$\sup_{Q \in \mathbf{M}_\sigma^e, \tau \in S_{0,T}([0, T])} \mathbb{E}_Q[U_\tau] = \sup_{Q \in \mathbf{M}_\sigma^e, \tau \in S_{0,T}(R)} \mathbb{E}_Q[U_\tau].$$

**Věta 2.15** Pokud  $R$  je nejvýše spočetná a seřazená vzestupně, pak proces  $\tilde{V}^0$  je podmnožinou procesu  $V^0$ .

*Důkaz.* viz [19] věta č. 2.5.

**Definice 2.16** Řekneme, že  $R \subseteq [0, T]$  splňuje podmínku URC (stejněměrná spojitost zprava), pokud existuje ostře klesající posloupnost  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s limitou  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  a taková, že  $s + r_n \in R$  pro každé  $s \in R \setminus \{T\}$  a pro dostatečně velká  $n \in \mathbb{N}$ .

*Poznámka.* Příkladem takového  $R$  může být  $R = [a, b) \cup \{T\}$ , kde můžeme vzít  $r_n = \frac{1}{n}$  nebo  $r_n = 2^{-n}$ .

**Věta 2.17** Předpokládejme, že  $R$  splňuje URC podmínku a fixujme  $t \in [0, T)$ . Pro jakýkoliv čas výplaty  $\tau \in S_{t,T}$  existuje posloupnost  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  časů výplat taková, že  $q_n \in S_{t+r_n, T}(R)$  pro všechna dostatečně velká  $n$  a  $(q_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}} \supseteq (\tau(\omega), T]$  klesá k  $\tau(\omega) \forall \omega$  taková, že  $\tau(\omega) \in R \setminus \{T\}$ .

*Důkaz.* viz [19] věta č. 2.7.

**Věta 2.18** Pokud  $R$  splňuje URC podmínku, pak proces  $\tilde{V}^0$  je podmnožinou procesu  $V^0$ .

*Důkaz.* viz [19] věta č. 2.8.

**Definice 2.19** Bod  $t \in [0, T]$  se nazývá izolovaný zprava v  $R$  pokud existuje  $\delta = \delta(t) > 0$  takové, že  $(t, t + \delta)$  neobsahuje žádné body  $r \in R$ . Pokud  $t$  není izolovaný zprava v  $R$ , pak existuje ostře klesající posloupnost  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  v  $R$  s limitou  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = t$  a řekneme pak, že  $R$  je zprava spojitě v  $t$ .

**Věta 2.20** Funkce  $g(t) = \mathbb{E}_Q[V_t^0], 0 \leq t \leq T$  je zprava spojitá ve všech bodech  $t \in [0, T)$ , pro který současně neplatí, že se nachází v  $R$  a že je izolovaný zprava v  $R$ .

*Důkaz.* viz [19] věta č. 2.10.

**Věta 2.21** Necht'  $(U, R)$  je Bermudská opce taková, že

$$\sup_{Q \in \mathbf{M}_\sigma^e, \tau \in S_{0,T}(R)} \mathbb{E}_Q[U_\tau] < \infty$$

a  $R$  splňuje URC podmínku. Pak  $V^0$  a  $\tilde{V}^0$  mají společný RCLL podproces  $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$  a  $V$  je nejmenší RCLL  $\mathbf{M}_\sigma^e$ -supermartingale, pro který platí, že  $V_t \geq U_t$  skoro jistě v  $(U, R), \forall t \in R$ . Navíc  $(U, R)$  může být dynamicky oceněno v tom smyslu, že existuje  $X$ -integrovatelný proces  $\theta = (\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$



s předpověditelnými hodnotami  $\mathbb{R}^d$  a adaptovaný RCLL proces  $C = (C_t)_{0 \leq t \leq T}$ , kde  $C_0 = 0$  takový, že

$$V = V_0 + \int_{\mathbb{R}} \theta dX - C.$$

*Důkaz.* viz [19] věta č. 2.12.

**Definice 2.22** Trojici  $(V_0, \theta, C)$  nazveme hedgovací strategií. Kde  $V_0$  je počáteční kapitál,  $\theta_t^i$  je počet jednotek aktiva  $i$  držného v čase  $t$  a  $C_t$  jsou celkové diskontované náklady na spotřebu v intervalu  $[0, t]$ .

### Bermudské call a put opce a jejich výplatní funkce.

- Bermudská call opce - právo koupit podkladové aktivum v některém z předem stanovených okamžiků  $b_1 < b_2 < \dots < b_n = T \in B$ .

$$V_t = \max\{S_t - K, 0\}, t \in B. \quad (2.12)$$

- Bermudská put opce - právo prodat podkladové aktivum v některém z předem stanovených okamžiků  $b_1 < b_2 < \dots < b_n = T \in B$ .

$$V_t = \max\{K - S_t, 0\}, t \in B. \quad (2.13)$$

### Některé další modifikace bermudských opcí.

- N-dimenzionální Bermudská put/call opce - podkladové aktivum opce je tvořeno  $n$  složkami.
- Bermudská max-call opce - právo koupit aktivum s maximální hodnotou z  $n$  podkladových aktiv.
- Rollover opce - jeden z nejjednodušších příkladů Bermudské opce. Její uplatnění je možné kromě koncového času  $T$  pouze v jednom dalším čase  $t_0 \in (0, T)$  a výplatní funkce je tvaru

$$U_{t_0} = \max(X_{t_0}, Ke^{-rt_0}) = X_{t_0} + (Ke^{-rt_0} - X_{t_0})^+, \quad (2.14)$$

$$U_T = \max(X_T, \frac{X_{t_0}}{X_0} Ke^{-r(T-t_0)}) = X_T + (\frac{X_{t_0}}{X_0} Ke^{-r(T-t_0)} - X_T)^+. \quad (2.15)$$

## 2.4 Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo vznikla již ve 40. letech 20. století a její zakladatelé jsou Stanislaw Marcin Ulam a John von Neumann. K oceňování opcí byla metoda poprvé použita Phelimem Boylem v roce 1977. Metoda používá k simulaci pseudonáhodná čísla. Na vytvořeném modelu dynamiky finančního trhu

se nechá proběhnout dostatečně velké množství simulací, poté lze získaná data zpracovat klasickými statistickými metodami. Tohoto lze využít i při oceňování Bermudských opcí, jak je popsáno i dále v textu, konkrétně u Longstaff-Schwarzovy metody.

# 3 Metodika

## 3.1 Black-Scholesův model

### 3.1.1 SDE modelu

Black-Scholesův model nebo také Black-Scholes-Mertonův (BSM) model byl poprvé publikován roku 1973 Fischerem Blackem and Myronem Scholesem [5] a znamenal revoluci v oboru oceňování opcí. Za svoji práci dostali v roce 1997 Merton a Scholes Nobelovu cenu za ekonomii, Black se tohoto ocenění nedožil. Přestože od této doby byly publikovány další sofistikovanějších modely, BSM model má stále své místo v oceňování opcí.

Cena podkladového aktiva  $S$  se v čase  $t$  řídí následující stochastickou diferenciální rovnicí.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t = [0, T], \quad (3.1)$$

kde  $W_t$  je Wienerův proces,  $r$  úroková míra a  $\sigma$  volatilita.

### 3.1.2 Simulace modelu

Pro simulaci trajektorií modelu můžeme použít přímo řešení jeho stochastické diferenciální rovnice, tedy

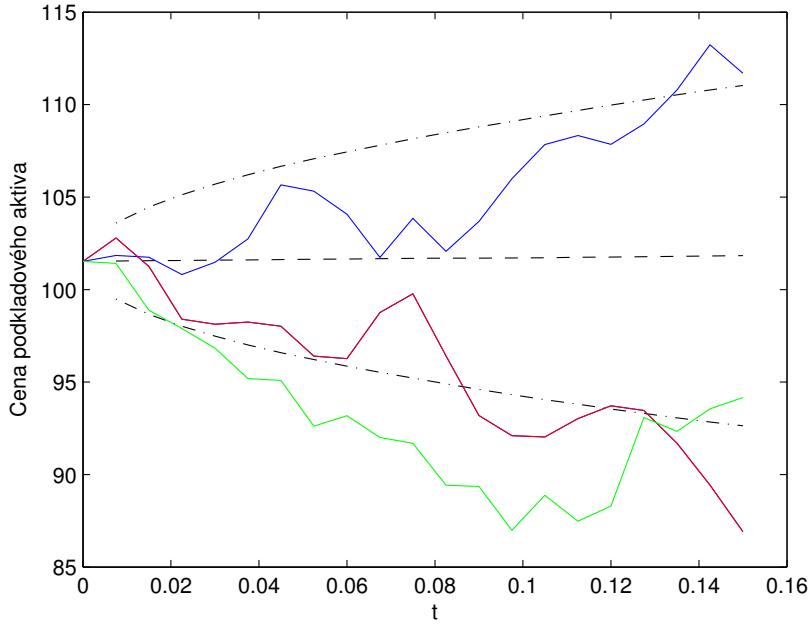
$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \quad t = [0, T], \quad (3.2)$$

kde  $W_t, r, \sigma$  jsou stejné jako výše a  $S_0$  je počáteční cena podkladového aktiva.

#### Simulace Black-Scholesova modelu

```
W = cumsum(dW,2); % cumulative sum
t=dt:dt:tau;
S = S0*exp((r - 1/2 * sqrt(v0)^2)*repmat(t,[nPaths 1]) + sqrt(v0)*W);
```

Na obrázku 2 jsou zobrazeny tři trajektorie vývoje ceny podkladového aktiva, nasimulované dle Black-Scholesova modelu. Dále je zobrazena střední hodnota těchto cen a střední hodnota  $\pm$  směrodatná odchylka.



Obrázek 2: Tři trajektorie, střední hodnota a střední hodnota  $\pm$  směrodatná odchylka

## 3.2 Hestonův model

### 3.2.1 SDE modelu

Model navržený Stevenem Hestonem v roce 1993 [11] zohledňuje vývoj volatilitu, na rozdíl od Black-Scholesova modelu, kde je volatilita konstantní. Jedná se o model stochastické volatilitu, hodnota volatilitu se řídí náhodným procesem.

U tohoto modelu se cena podkladového aktiva vyvíjí dle stochastické diferenciální rovnice

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S, \quad (3.3)$$

kde  $W_t^S$  je Wienerův proces,  $r$  úroková míra a  $v$  stochastická volatilita vyjádřená rovnicí CIR procesu [7]

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dW_t^v, \quad (3.4)$$

kde  $\kappa$  je míra návratnosti ke střední hodnotě,  $\theta$  dlouhodobý rozptyl,  $\xi$  volatilita rozptylu a Wienerův proces  $W_t^v$  je korelovan s Wienerovým procesem  $W_t^S$ , tedy

$$dW_t^S dW_t^v = \rho dt, \quad \rho \in [-1, 1]. \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Simulace modelu

K simulaci použijeme QE schéma, neboli kvadratické exponenciální schéma, které je jedním z nejvhodnějších postupů, jak simulovat cenu aktiva dle Hestonova modelu. Poprvé bylo představeno Andersenem v roce 2008 [2]. Schéma se zakládá na tom, že hodnota  $v_{n+1}$  je závislá na hodnotě  $v_n$  a řídí se  $\chi^2$  rozdělením.

#### Popis algoritmu QE schématu

1. Spočteme hodnotu parametru  $\psi$ , kritická hodnota tohoto parametru je  $\psi_C \in [1, 2]$ .

$$\psi = \frac{s^2}{m^2},$$

kde

$$s^2 = \frac{v_n \sigma^2 e^{-\kappa \Delta_n}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa \Delta_n}) + \frac{\Theta \sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa \Delta_n})^2,$$

$$m = \Theta + (v_n - \Theta) e^{-\kappa \Delta_n}.$$

2. Pokud  $\psi \leq \psi_C$ , pak

$$v_{n+1} = a (b + Z_v)^2,$$

kde

$$a = \frac{m}{1 + b^2},$$

$$b^2 = 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \geq 0,$$

$$Z_v = \Phi^{-1}(U_v),$$

kde  $U_v$  je náhodné číslo z rovnoměrného rozdělení na  $[0, 1]$  a  $\Phi$  je standardní kumulativní distribuční funkce normálního rozdělení

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\phi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (3.6)$$

3. Pokud  $\psi > \psi_C$  pak

$$v_{n+1} = \Psi^{-1}(U_v; p, \beta),$$

kde

$$\Psi^{-1}(u; p, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq u \leq p \\ \beta^{-1} \ln\left(\frac{1-p}{1-u}\right) & \text{for } p < u \leq 1 \end{cases}$$

$$p = \frac{\psi - 1}{\psi + 1},$$

$$\beta = \frac{1 - p}{m}.$$

4. Konečně schéma pro výpočet cen je dáno takovýmto vztahem.

$$\ln(S_{n+1}) + K_0 + K_1 v_n + K_2 v_{n+1} + \sqrt{K_3 v_n + K_4 v_{n+1}} Z_S, \quad (3.7)$$

kde

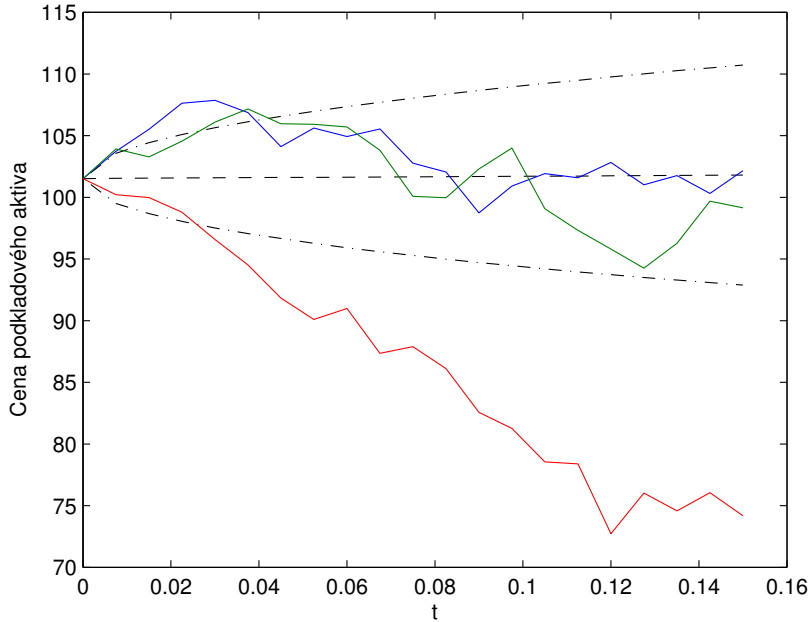
$$K_0 = -\frac{\rho\kappa\Theta}{\sigma}\Delta_n, K_1 = \gamma_1\Delta_n\left(\frac{\rho\kappa}{\sigma} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\rho}{\sigma}, K_2 = \gamma_2\Delta_n\left(\frac{\rho\kappa}{\sigma} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\rho}{\sigma},$$

$$K_3 = \gamma_1\Delta_n(1 - \rho^2), K_4 = \gamma_2\Delta_n(1 - \rho^2)$$

a  $Z_S$  je hodnota standardního normálního rozdělení a  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$  pro exaktní schéma s centrální diferenciací času.

Volba parametru  $\psi_C$  nemá velký vliv na výsledek simulace a Andersen volí  $\psi_C = 1,5$ .

Na obrázku 3 jsou zobrazeny tři trajektorie vývoje ceny podkladového aktiva, nasimulované dle Hestonova modelu. Dále je zobrazena střední hodnota těchto cen a střední hodnota  $\pm$  směrodatná odchylka.



Obrázek 3: Tři trajektorie, střední hodnota a střední hodnota  $\pm$  směrodatná odchylka

### 3.3 Oceňování

#### 3.3.1 Longstaff-Schwartzova metoda

S metodou oceňující americké, a tedy potažmo i bermudské opce, přišli v roce 2001 Francis A. Longstaff a Eduardo S. Schwartz [15]. K odhadu ceny dané opce využívá Longstaff-Schwartzova metoda (LSM) několikanásobné regrese na cenách nasimulovaných Monte Carlo metodou. Hodnoty

opce aproximuje pomocí zpětné iterace od času expirace opce. V každém momentu, kdy je možné opci uplatnit, dává její ocenění za předpokladu, že ještě uplatněna nebyla. Odhadnuté hodnoty pak můžeme porovnat s těmi okamžitými. Pokud jsou větší, je optimální strategií opci zatím neuplatňovat.

Důležitá je u LSM volba bázových funkcí. Tyto funkce jsou lineárně nezávislé. Takové jsou například Laguerrovy, Hermitovy, Legendrovy, Čebyševovy, Gegenbauerovy nebo Jacobiho polynomy [1]. V praktické části bude využito polynomů, které se k oceňování používají nejčastěji, a to Laguerrových

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = 1 - x, L_{k+1}(x) = \frac{(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)}{k+1}, k \geq 1 \quad (3.8)$$

a Čebyševových

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), k \geq 1. \quad (3.9)$$

### Popis algoritmu LS metody

1. Simulace  $N$  trajektorií vývoje ceny podkladového aktiva od času 0 do času  $T$  dle daného modelu.
2. Výpočet zisku z uplatnění opce v čase  $T$ .
3. Pro  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ 
  - (a) V čase  $t_{i-1}, i = 1, \dots, n$  vybrat ty cesty, kdy opce přináší svému držiteli výhodu.
  - (b) Výpočet vektoru  $Y$  pro vybrané cesty.  $Y = (\text{hodnota výplatní funkce v čase } t) \cdot (\text{diskontní faktor})$
  - (c) Odhad podmíněné střední hodnoty  $E[Y|X]$  pomocí regrese  $Y$ , kde  $X$  je zvolená regresní funkce.
  - (d) Porovnáním hodnot  $E[Y|X]$  a hodnot výplatní funkce v  $t_{i-1}, i = 1, \dots, n$  zjistíme, zda se vyplatí uplatnit opci ihned, nebo počkat do následujícího času.
4. Výpočet hodnoty opce pomocí diskontování do času 0 a výpočtu průměru přes všechny cesty.

### 3.3.2 Analytické řešení Black-Scholesovy PDE

Pro výpočet ceny opce je možné sestavit následující Black-Scholesovu parciální diferenciální rovnici. Hledáme tedy spojitou funkci  $c(t, x)$ , která tuto rovnici splňuje.  $c(t, x)$  značí cenu call opce,  $p(t, x)$  cenu put opce.

$$c_t(t, x) + rxc_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2c_{xx}(t, x) = rc(t, x), t \in [0, T], x \geq 0, \quad (3.10)$$

s koncovými podmínkami pro put a call opci

$$p(T, x) = \max(0, K - x), \quad (3.11)$$

$$c(T, x) = \max(0, x - K), \quad (3.12)$$

okrajovou podmínkou pro  $x = 0$

$$p(t, 0) = c(t, 0) = 0, t \in [0, T] \quad (3.13)$$

a okrajovou podmínkou pro  $x \rightarrow \infty$  zvlášť pro put a call opci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [(x - e^{-r(T-t)}K) - p(t, x)] = 0, t \in [0, T], \quad (3.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [c(t, x) - (x - e^{-r(T-t)}K)] = 0, t \in [0, T]. \quad (3.15)$$

Vzhledem k tomu, že uzavřená formule pro výpočet ceny obecné Bermudské opce z Black-Scholesovi PDE neexistuje, uvedeme si tuto formuli pro opci Evropskou a pro rollover opci.

#### Uzavřená formule pro Evropskou opci

$$c(t, x) = x\Phi(d_+(T-t, x)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(T-t, x)), t \in [0, T], x > 0, \quad (3.16)$$

kde

$$d_{\pm}(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[ \ln \frac{x}{K} + \left( r \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right] \quad (3.17)$$

a kde  $\Phi$  je standardní kumulativní distribuční funkce normálního rozdělení

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\phi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (3.18)$$

Pro put opci potom dle put-call parity máme

$$p(x, t) = Ke^{-r(T-t)} - x + c(x, t) = \Phi(-d_-(T-t, x)) - \Phi(-d_+(T-t, x))x. \quad (3.19)$$

#### Uzavřená formule pro rollover put opci

$$V_0 = (1+c)(S_0(1+\Phi(d_1^*)) - K\Phi(d_2^*)), \quad (3.20)$$

kde

$$d_{1,2}^* = \frac{\ln \frac{(1+c)S_0}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t_0}{\sigma\sqrt{t_0}}, \quad (3.21)$$

kde

$$c = \frac{K}{S_0} \Phi(-d_2) - \Phi(-d_1) \quad (3.22)$$

a kde

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0)}{\sigma\sqrt{T-t_0}}. \quad (3.23)$$



### 3.3.3 Analytické řešení Hestonovy PDE

V případě Hestonova modelu musí funkce  $c(x, v, t)$  splňovat následující parciální diferenciální rovnici.  $c(x, v, t)$  značí cenu call opce,  $p(x, v, t)$  cenu put opce.

$$\frac{1}{2}x^2vc_{xx} + \rho\sigma xvc_{xv} + \frac{1}{2}\sigma^2vc_{vv} + rxc_x + (\kappa(\theta - v) - \lambda v)c_v - rc + c_t = 0. \quad (3.24)$$

s okrajovými podmínkami

$$p(x, v, T) = \max(0, K - x), c(x, v, T) = \max(0, x - K), \quad (3.25)$$

$$p(0, v, t) = c(0, v, t) = 0, \quad (3.26)$$

$$p_x(\infty, v, t) = -1, c_x(\infty, v, t) = 1, \quad (3.27)$$

$$rxc_x(x, 0, t) + \kappa\theta c_v(x, 0, t) - rc(x, 0, t) + c_t(x, 0, t) = 0 \quad (3.28)$$

a

$$\lim_{v \rightarrow \infty} p(x, v, t) = \lim_{v \rightarrow \infty} c(x, v, t) = x. \quad (3.29)$$

Stejně jako u Black-Scholesova modelu uvedeme řešení PDE pouze pro Evropské opce.

#### Uzavřená formule pro Evropskou call opci

$$c(x, v, t) = xP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2, \quad (3.30)$$

kde  $P_1$  je delta Evropské call opce a  $P_2$  podmíněná rizikově neutrální pravděpodobnost, že cena podkladového aktiva bude v čase výplaty větší než strike. Pro  $j = 1, 2$

$$P_j(\ln x, v, T, \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\phi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\Phi(\ln x - \ln K)}}{i\Phi} \right] d\Phi. \quad (3.31)$$

### 3.3.4 Théta schéma

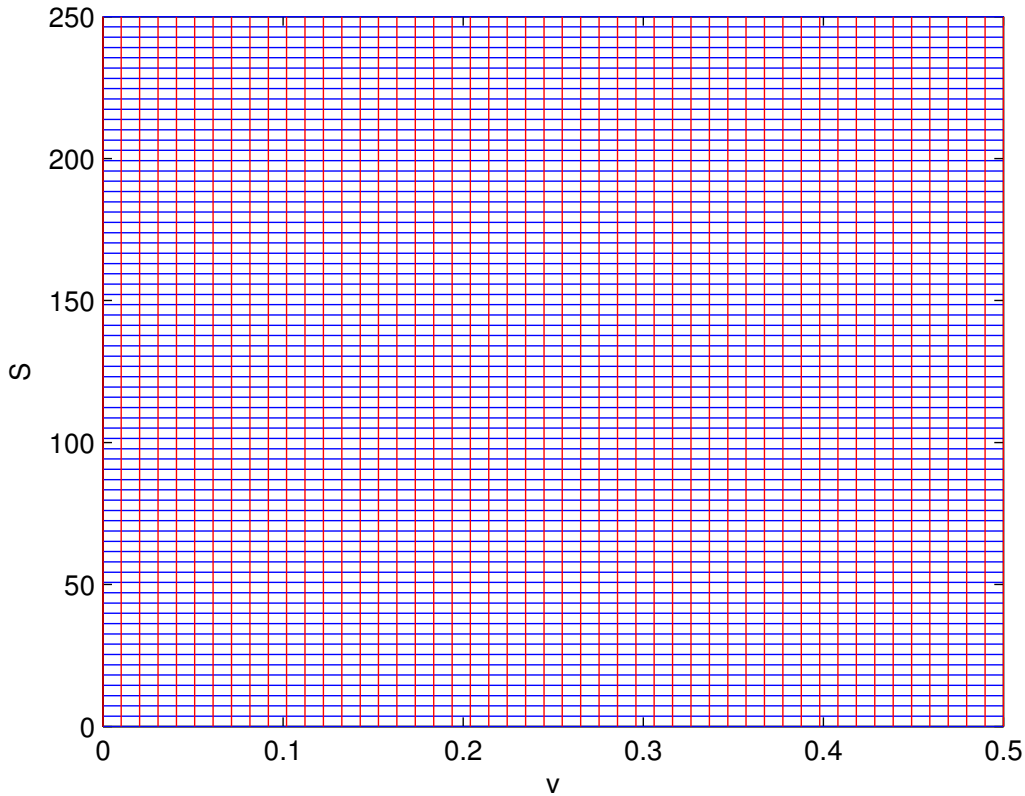
$\theta$ -schéma je metodou, jak řešit parciální diferenciální rovnice pomocí konečných diferencí, kdy jsou derivace v rovnici nahrazeny příslušnými konečnými diferencemi.

Nejprve je tedy třeba vytvořit diskretizace proměnných. První možnost je rovnoměrná diskretizace, kdy jsou vzdálenosti mezi jednotlivými body mřížky stejně velké.

$$X_i = i \times dX, i = 1, \dots, N_X, \quad (3.32)$$

$$dX = \frac{X_{max} - X_{min}}{N_X}$$

Příklad takové mřížky je zobrazen na obrázku níže. Modré linie zobrazují diskretizaci ceny podkladového aktiva a červené diskretizaci volatility.



Obrázek 4: Uniformní mřížka

Další možností je diskretizace nerovnoměrná, která se zjemňuje v okolí významných bodů. V našem případě to pro diskretizaci  $S$  bude v okolí hodnoty striku  $K$ . Mřížku je možné zkonstruovat například takto [16]

$$S_i = K + c \sinh(\xi_i), i = 0, 1, \dots, N_S, \quad (3.33)$$

kde

$$c = \frac{K}{5},$$

$$\xi_i = \sinh^{-1}\left(-\frac{K}{c}\right) + i\Delta\xi$$

a kde

$$\Delta\xi = \frac{1}{N_S} \left[ \sinh^{-1}\left(\frac{S_{max} - K}{c}\right) - \sinh^{-1}\left(-\frac{K}{c}\right) \right].$$

Konstrukce nerovnoměrné diskretizace volatility je taková, že difference se zmenšují, čím víc se hodnota blíží nule.

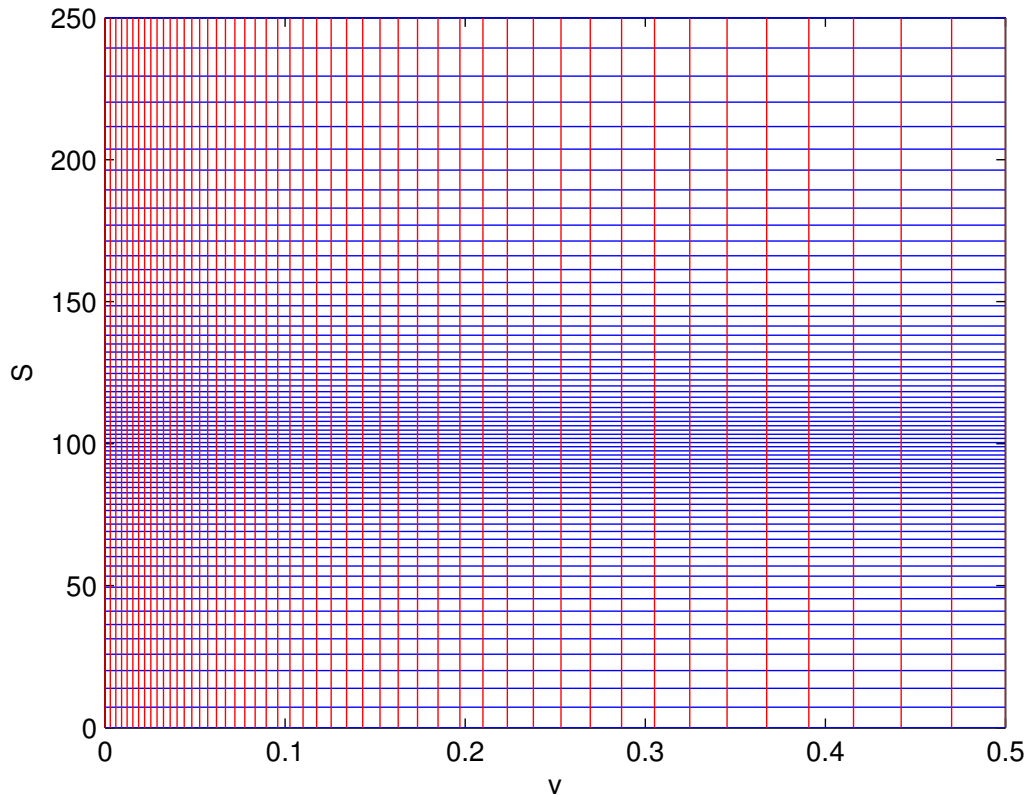
$$v_j = d \sinh(j\Delta\eta), j = 0, 1, \dots, N_v, \quad (3.34)$$

kde

$$\Delta\eta = \frac{1}{N_v} \sinh^{-1} \left( \frac{V_{max}}{d} \right),$$

$$d = \frac{V_{max}}{500}.$$

Pro hodnoty  $t$  bude použita rovnoměrná diskretizace. Na následujícím obrázku je zobrazen příklad nerovnoměrné mřížky. Modré linie znázorňují diskretizaci ceny podkladového aktiva, která se zjemňuje v okolí realizační ceny  $K = 6654,6$ . Červené linie pak zobrazují diskretizaci volatilitu zjemňující se směrem k nule.



Obrázek 5: Neuniformní mřížka

Nyní, když již máme zkonstruovanou diskretizaci, nahradíme derivace diferencemi. Pro derivace dle  $S$  máme

$$\frac{\partial U}{\partial S}(S_i, v_j) = \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{S_{i+1} - S_{i-1}}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(S_i, v_j) = \frac{2U_{i-1,j}^n}{(S_i - S_{i-1})(S_{i+1} - S_{i-1})} - \frac{2U_{i,j}^n}{(S_i - S_{i-1})(S_{i+1} - S_i)} + \frac{2U_{i+1,j}^n}{(S_{i+1} - S_i)(S_{i+1} - S_{i-1})}. \quad (3.36)$$

Navíc pro Hestonův model potřebujeme derivace dle volatility a smíšenou derivaci

$$\frac{\partial U}{\partial v}(S_i, v_j) = \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{v_{j+1} - v_{j-1}}, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}(S_i, v_j) = \frac{2U_{i,j-1}^n}{(v_j - v_{j-1})(v_{j+1} - v_{j-1})} - \frac{2U_{i,j}^n}{(v_j - v_{j-1})(v_{j+1} - v_j)} + \frac{2U_{i,j+1}^n}{(v_{j+1} - v_j)(v_{j+1} - v_{j-1})}, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v}(S_i, v_j) = \frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n + U_{i-1,j-1}^n}{(S_{i+1} - S_{i-1})(v_{j+1} - v_{j-1})}. \quad (3.39)$$

Definujeme matici  $\mathbf{U}^n$  jako matici cen opce v čase  $t_n$  a různé kombinace hodnot  $S$  a  $v$ .

$$\mathbf{U}^n(i+1, j+1) = U_{i,j}^n, \quad i = 0, \dots, N_S; \quad j = 0, \dots, N_v.$$

Potom  $\theta$ -schéma, nebo také vážená metoda, je dáno následujícím vztahem

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{dt} = \mathbf{L}(\theta \mathbf{U}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{U}^n), \quad (3.40)$$

který je možné vyřešit tak, že

$$\mathbf{U}^{n+1} = (\mathbf{I} - \theta dt \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{I} + (1 - \theta) dt \mathbf{L}) \mathbf{U}^n, \quad (3.41)$$

kde  $\mathbf{U}^0 = \max(0, S - K)$  pro call opci a  $\mathbf{U}^0 = \max(0, K - S)$  pro put opci a kde  $\mathbf{L}$  je matice  $N \times N$ ,  $N = (N_S + 1)(N_v + 1)$  a její hodnoty jsou definovány operátorem  $L$ , který je pro Balck-Scholesův model

$$L = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r \quad (3.42)$$

a pro Hestonův model

$$L = \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2}{\partial v \partial S} + rS \frac{\partial}{\partial S} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial}{\partial v} - r. \quad (3.43)$$

Speciálně pak pro volbu  $\theta = 0$  dostáváme explicitní schéma, pro  $\theta = 1$  implicitní schéma a pro  $\theta = \frac{1}{2}$  metoda vede na Crank-Nikolsonovo schéma.

## 4 Vlastní práce

Vzhledem k tomu, že tržní data na Bermudské opce nejsou volně k dispozici, použili jsme data na Evropské (vanilla) opce. Pro všechny následující simulace byly použity parametry, které jsou k simulacím používány v [16]. Hodnota  $\tau$  je čas do expirace,  $S_0$  je počáteční cena podkladového aktiva.

$$\tau = 0,15$$

$$S_0 = 101,52$$

Příslušná realizační cena byla volena dle pozice opce, její hodnoty v pro pozice OTM až ITM jsou z intervalu

$$K \in [0,7S_0, 1,3S_0].$$

Dalšími parametry modelu jsou úroková míra  $r$ , počáteční volatilita  $v_0$ , míra návratu ke střední hodnotě  $\kappa$ , dlouhodobý rozptyl  $\theta$  a míra korelace Wienerových procesů  $\rho$ .

$$r = 0,02$$

$$v_0 = 0,05412$$

$$\kappa = 1,5$$

$$\theta = 0,04$$

$$\rho = -0,9$$

Pro přiblížení obou modelů volíme rozptyl v Black-Scholesově modelu takto

$$\sigma = \sqrt{v_0}.$$

Pro Hestonův model máme volatilitu rozptylu

$$\sigma = 0,3.$$

## 4.1 Black-Scholesův model a Longstaff-Schwarzova metoda

Nejprve bylo provedeno ocenění Bermudské opce metodou Monte Carlo pomocí Black-Scholesova modelu a Longstaff-Schwarzova algoritmu. Jako základní funkce byly použity Čebyševovy polynomy třetího až pátého řádu a Laguerrovy polynomy také třetího až pátého řádu. Tyto byly vybrány vzhledem k tomu, že polynomy nižších řádů vykazovaly velkou chybu při regresi a naopak pro polynomy vyšších řádů není v regresi dostatečné množství hodnot.

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(6 - 18x + 9x^2 - x^3)$$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}(24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4)$$

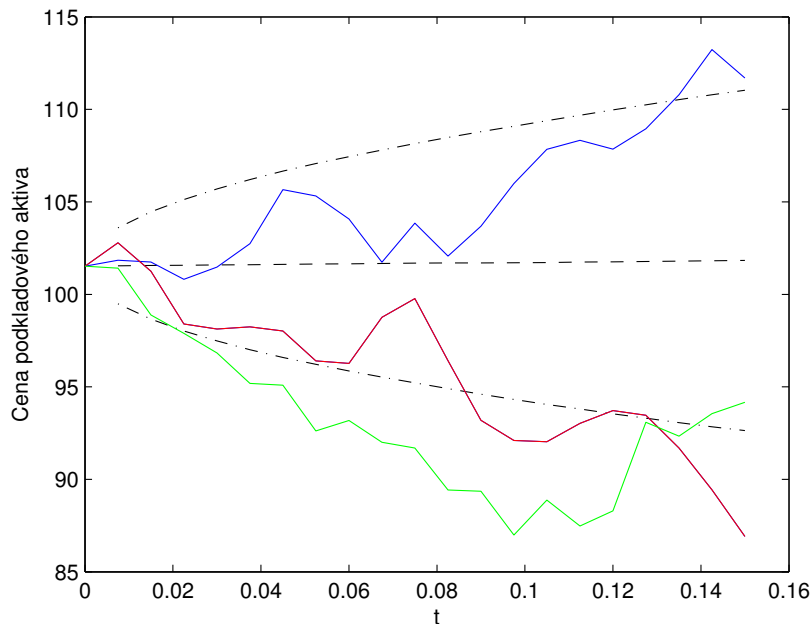
$$L_5(x) = \frac{1}{120}(120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5)$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

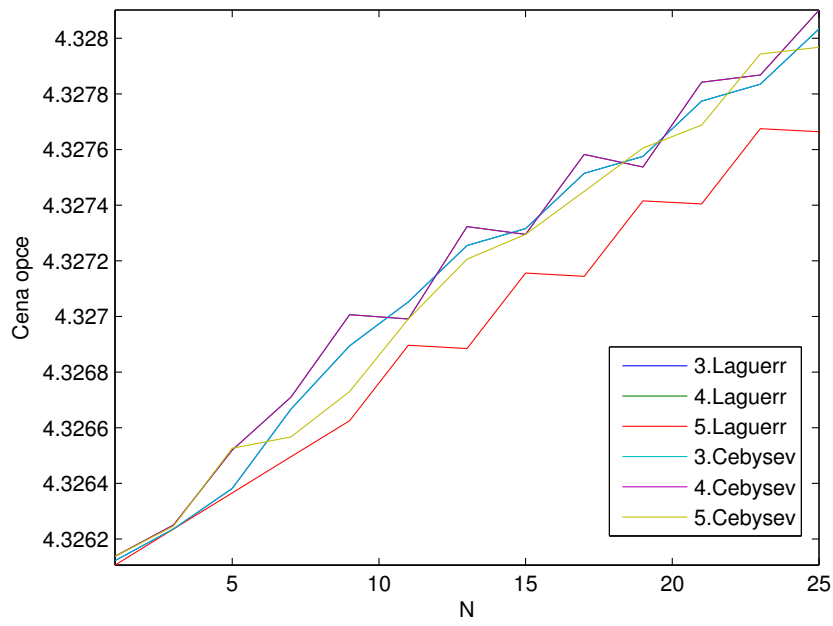
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 - 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

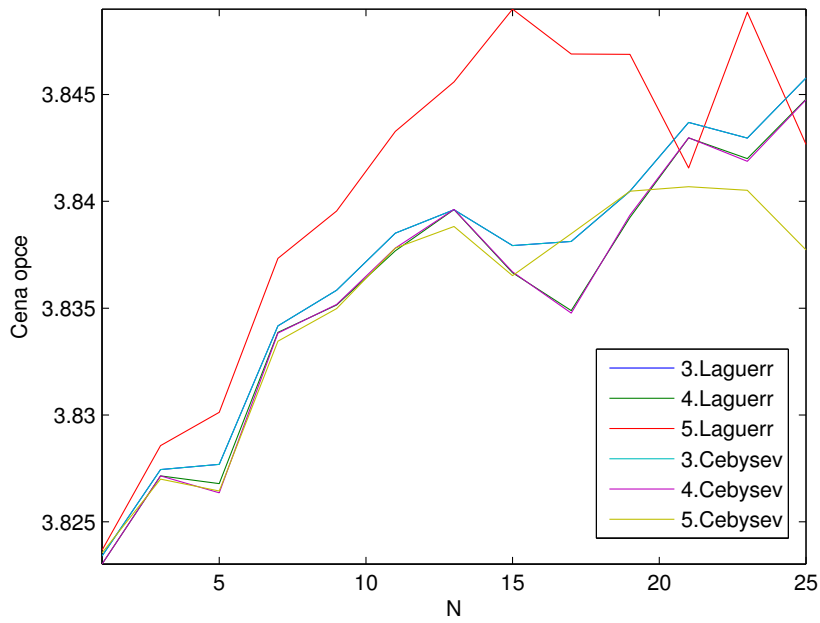
Na obrázku 6 je zobrazen vývoj ceny podkladového aktiva, včetně její střední hodnoty a směrodatné odchylky. Celkem bylo simulováno  $10^5$  trajektorií, v grafu jsou zobrazeny tři. Na obrázcích 7-9, každý pro jeden druh opce (ITM, ATM, OTM), je pak znázorněna zjištěná cena Bermudské call opce v závislosti na počtu okamžiků ( $N$ ), kdy je možné uplatnění opce, za použití různých základních funkcí v LS metodě.



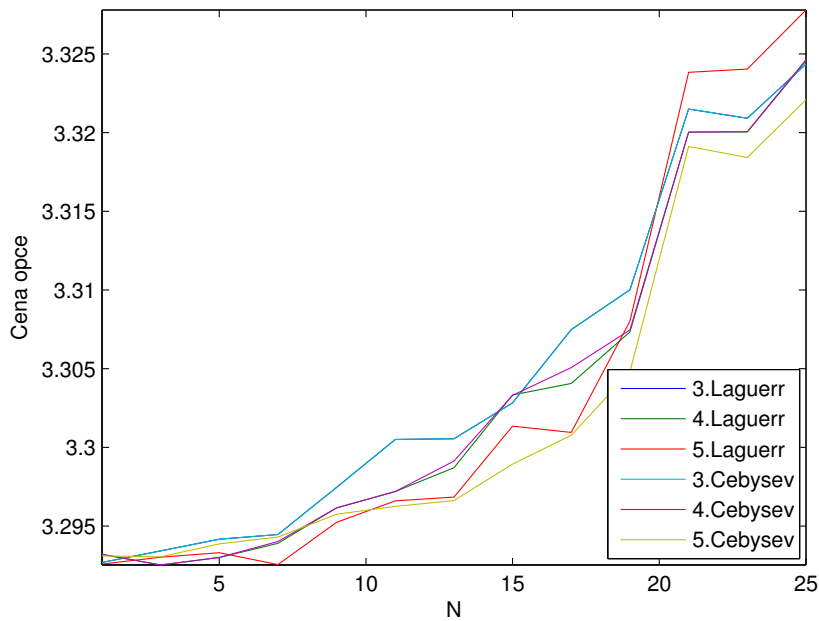
Obrázek 6: Cena podkladového aktiva



Obrázek 7: Cena Bermudské call opce ITM



Obrázek 8: Cena Bermudské call opce ATM

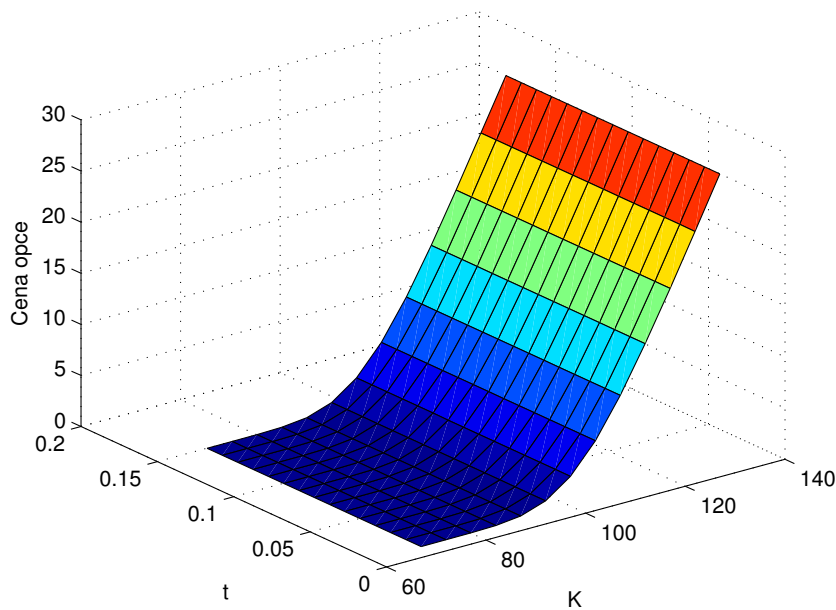


Obrázek 9: Cena Bermudské call opce OTM

Z grafů vidíme, že nejnižší ceny opcí vycházejí pro opce v pozici OTM, což souhlasí se skutečností, že uplatnění opce je v danou chvíli nevýhodné a je i nižší pravděpodobnost, že v budoucnu výhodné bude. Naopak nejvyšší ceny mají opce v pozici ITM, kdy je její uplatnění výhodné. Pro rostoucí počet okamžiků, kdy je možné uplatnění opce, roste i cena opce - více možností uplatnění dává držiteli větší flexibilitu a možnost uplatnit opci výhodně, cena opce je tedy vyšší.

Následující obrázek 10 zobrazuje hodnotu Bermudské put opce v závislosti na čase do expirace a výši realizační ceny. K provedení regrese byl použit Laguerrov polynom třetího stupně. Čím vyšší máme strike, tím je i vyšší cena opce, neboť její uplatnění je pro jejího držitele výhodné.



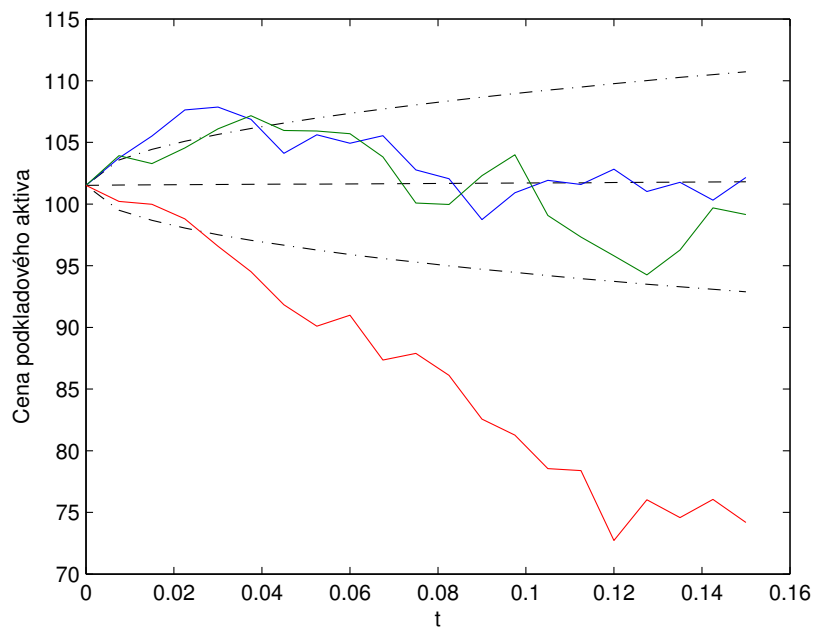


Obrázek 10: Cena Bermudské put opce

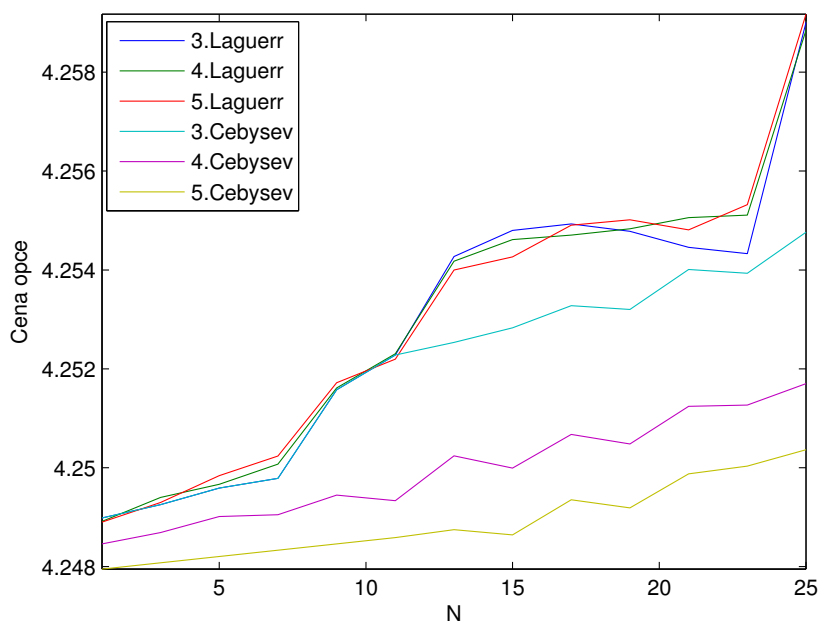
## 4.2 Hestonův model a Longstaff-Schwarzova metoda

Nyní stejný postup aplikujeme na Hestonův model. Na prvním grafu opět máme vývoj ceny podkladového aktiva se střední hodnotou a směrodatnou odchylkou a na následujících třech (ITM, ATM, OTM) cenu Bermudské call opce v závislosti na počtu okamžiků ( $N$ ), kdy je možné uplatnění opce, a volbě základní funkce.

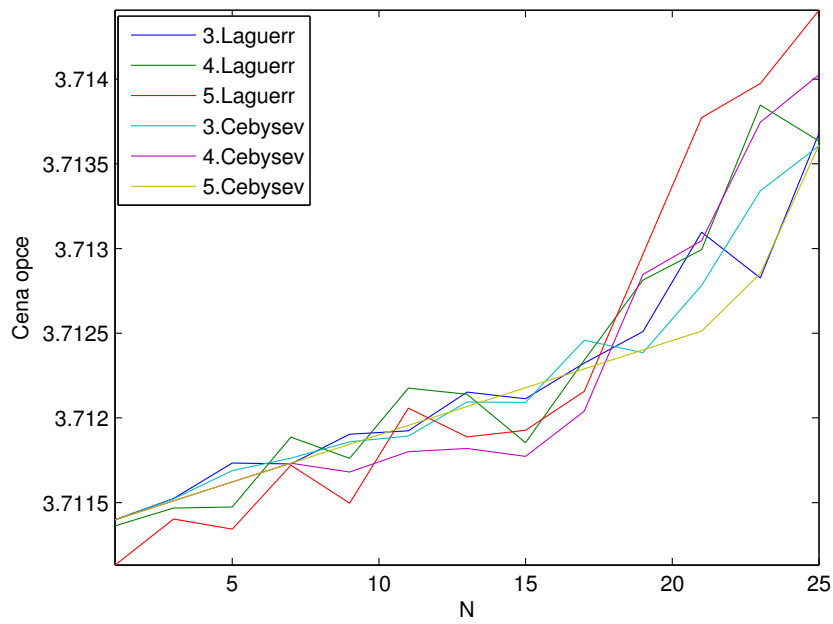
Také při užití Hestonova modelu vycházejí nižší ceny pro opce OTM a vyšší pro opce ITM a také tak roste cena opce s rostoucím množstvím okamžiků, kdy je možné opci uplatnit. Pokud srovnáme výsledky Black-Scholesova modelu a Hestonova modelu, jsou ceny opce u Black-Scholesova modelu vyšší než u Hestonova modelu.



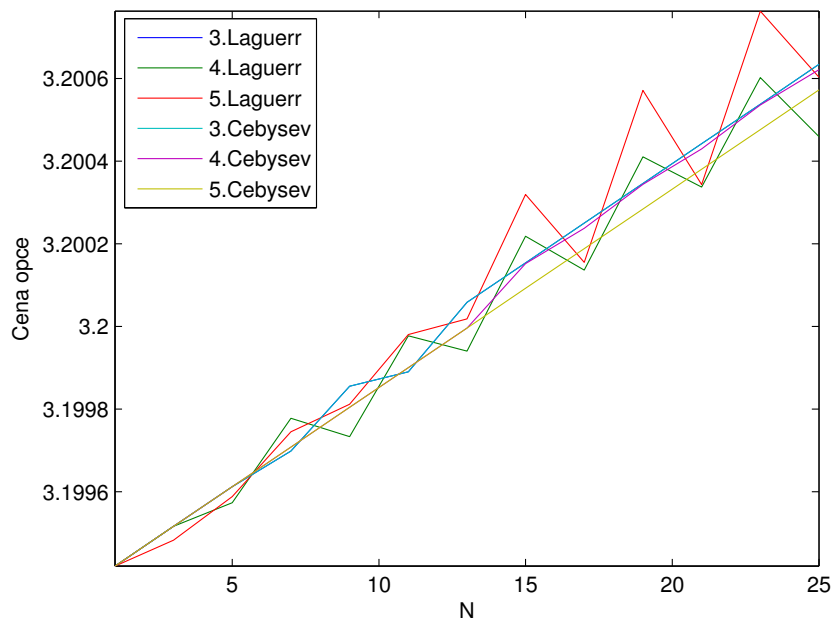
Obrázek 11: Cena podkladového aktiva



Obrázek 12: Cena Bermudské call opce ITM

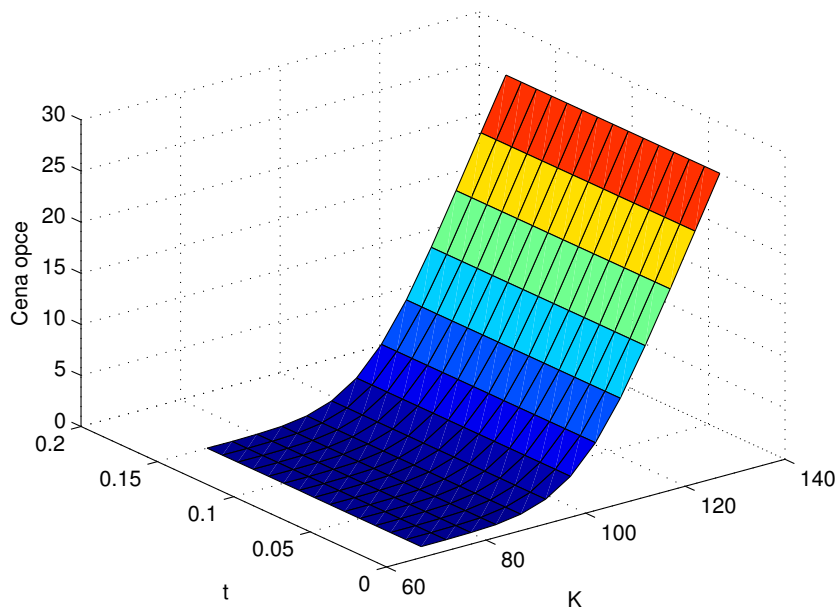


Obrázek 13: Cena Bermudské call opce ATM



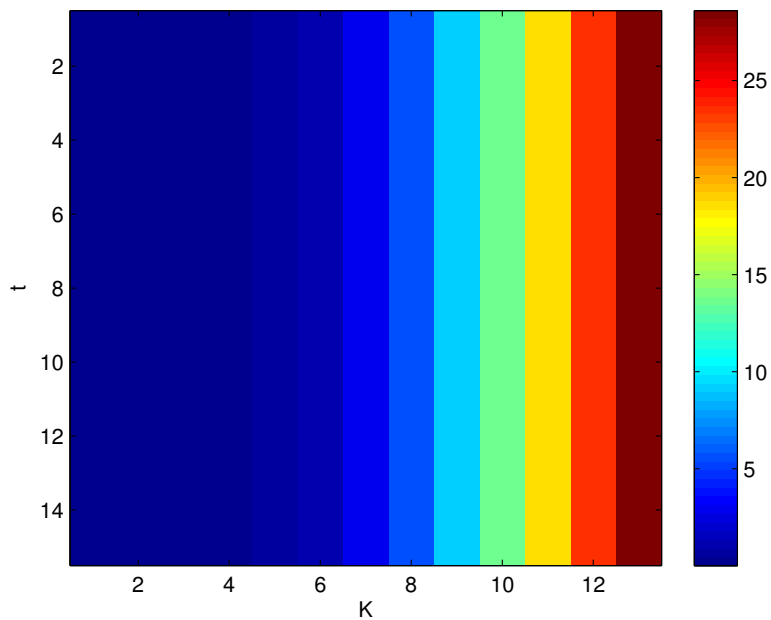
Obrázek 14: Cena Bermudské call opce OTM

Následující graf zobrazuje hodnotu Bermudské put opce v závislosti na čase do expirace a výši realizační ceny. K provedení regrese byl použit Laguerrův polynom třetího stupně. A opět čím vyšší máme strike, tím je i vyšší cena opce.

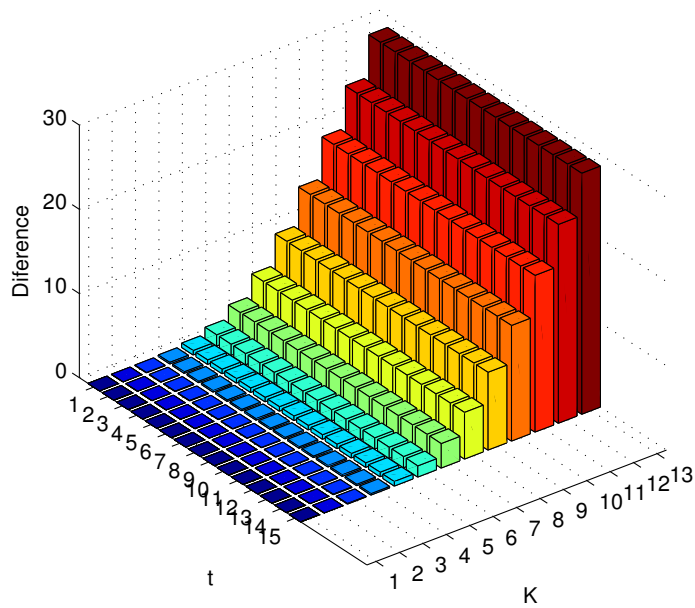


Obrázek 15: Cena Bermudské put opce

Obrázky 16 a 17 ilustrují odlišnost získaných výsledků v případě, že byl použit Black-Scholesův model a v případě, že Hestonův model. Cena opce vychází vyšší pro Hestonův model. Na druhém grafu jsou pak zobrazeny hodnoty těchto odchylek, které se s rostoucím strikem zvyšují.



Obrázek 16: Rozdíl výsledků Hestonova a BS modelu



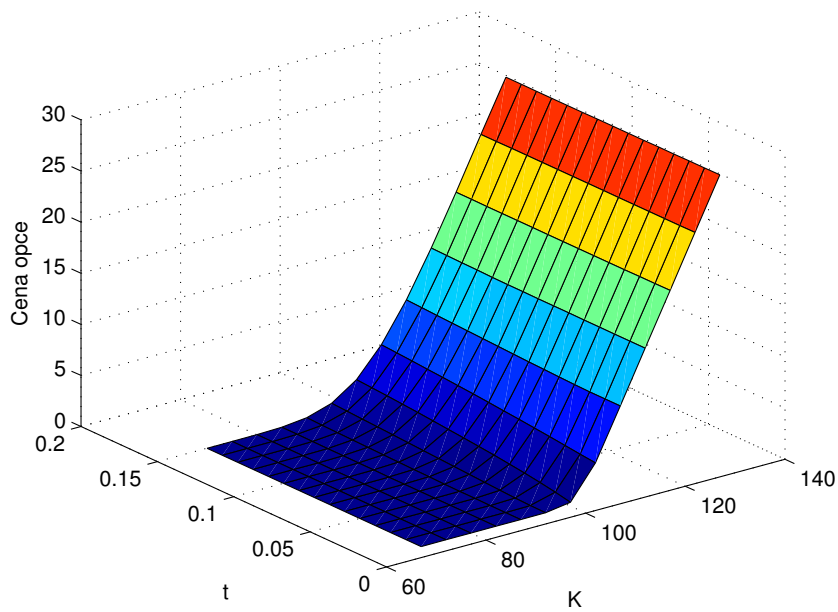
Obrázek 17: Absolutní hodnota rozdílu výsledků Hestonova a BS modelu

### 4.3 Black-Scholesův model a Théta schéma

Druhou z metod výpočtu ceny opce je numerické řešení její PDE. K tomu bylo využito  $\theta$ - schéma, kde bylo zvoleno

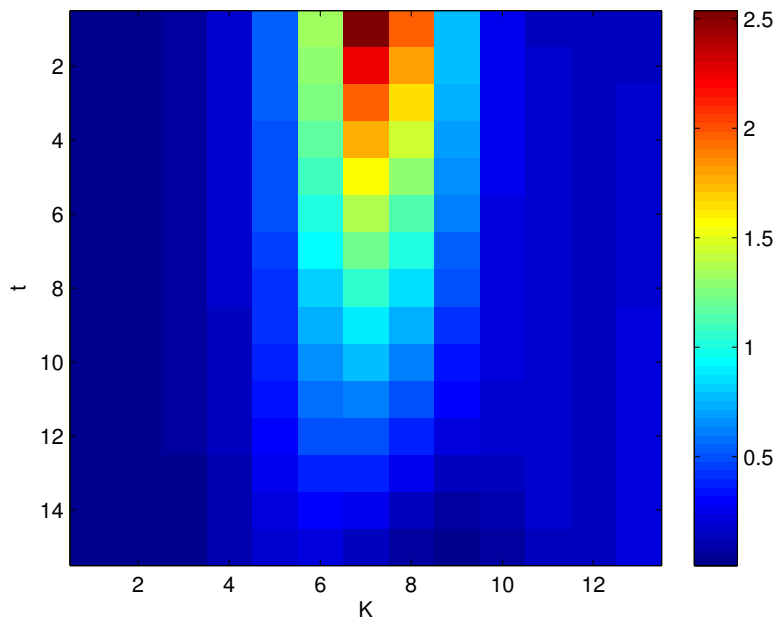
$$\theta = 1,$$

což odpovídá implicitní metodě konečných diferencí (FDI). Důvodem pro tuto volbu byl fakt, že u implicitní metody není nutné kontrolovat CFL podmínku. Na následujícím grafu je znázorněna cena Bermudské put opce, kterou je možné uplatnit v každý druhý časový okamžik, v závislosti na hodnotě realizační ceny a na zbývajícím čase do expirace. Opět vidíme, že cena opce roste s rostoucí realizační cenou.

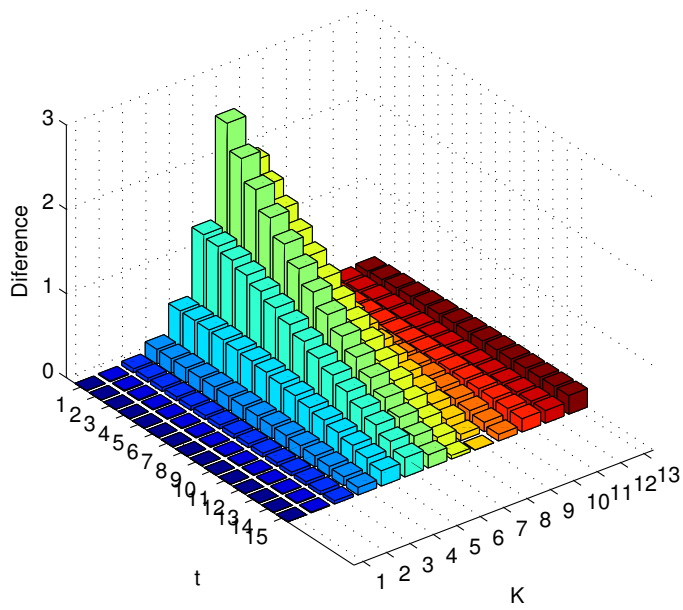


Obrázek 18: Cena Bermudské put opce

Obrázky 19 a 20 zobrazují porovnání získaných výsledků pomocí Longstaff-Schwarzovi metody a Théta schématu v Black-Scholesově modelu. Vyšší ceny vycházejí v případě LS metody, nižší naopak při použití Théta schématu. Hodnoty těchto rozdílů jsou zobrazeny na druhém grafu.



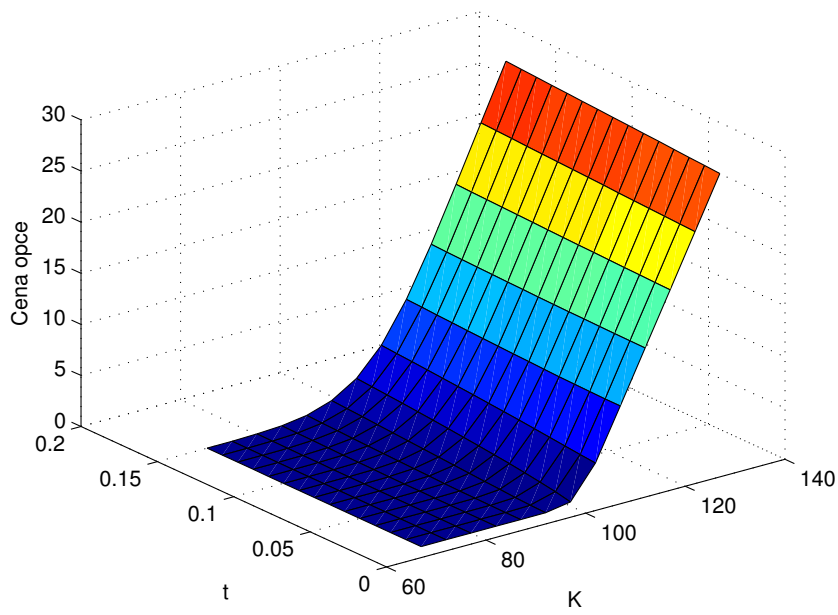
Obrázek 19: Rozdíl výsledků LS metody a FDI



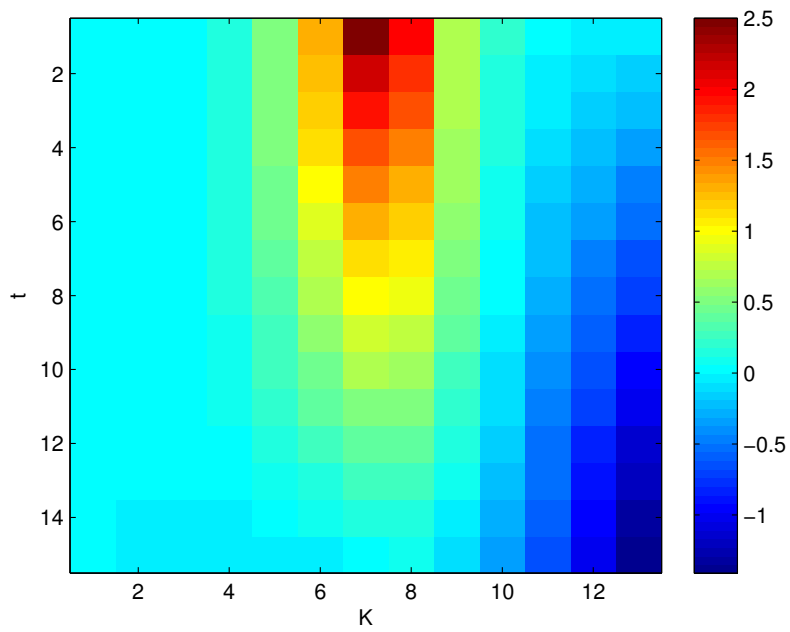
Obrázek 20: Absolutní hodnota rozdílu výsledků LS metody a FDI

#### 4.4 Hestonův model a Théta schéma

Analogicky získáme řešení i pro Hestonův model. Cena Bermudské put opce opět roste s rostoucí realizační cenou. Vyšší hodnoty vycházejí ve většině případů pro LS metodu, pouze pro velké  $K$  je cena opce vyšší pro FDI. Absolutní hodnoty těchto odchylek jsou znázorněny na obrázku 23.

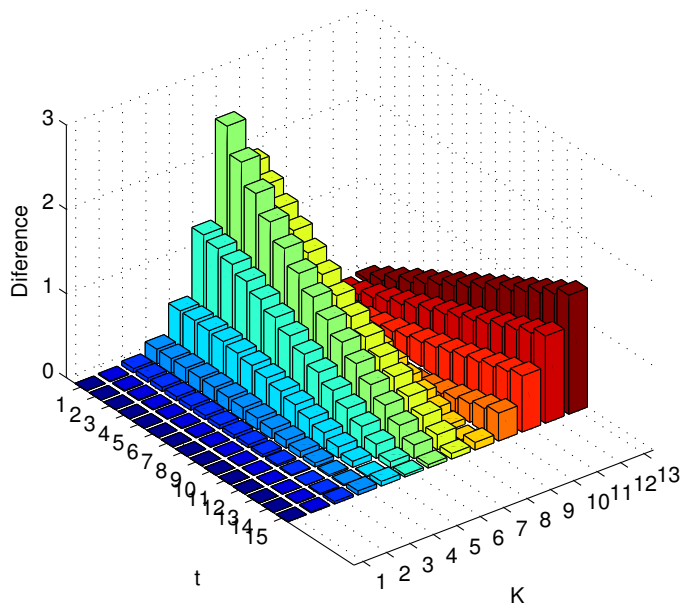


Obrázek 21: Cena Bermudské put opce



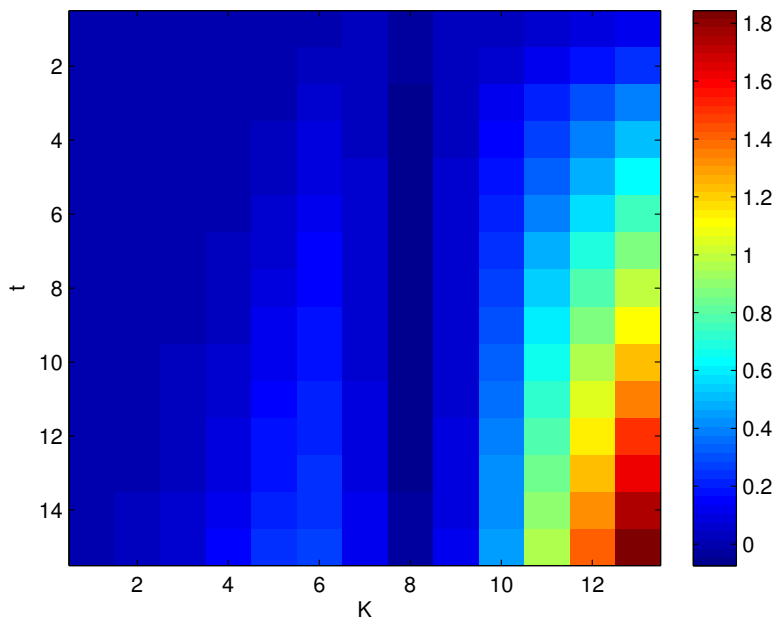
Obrázek 22: Rozdíl výsledků LS metody a FDI



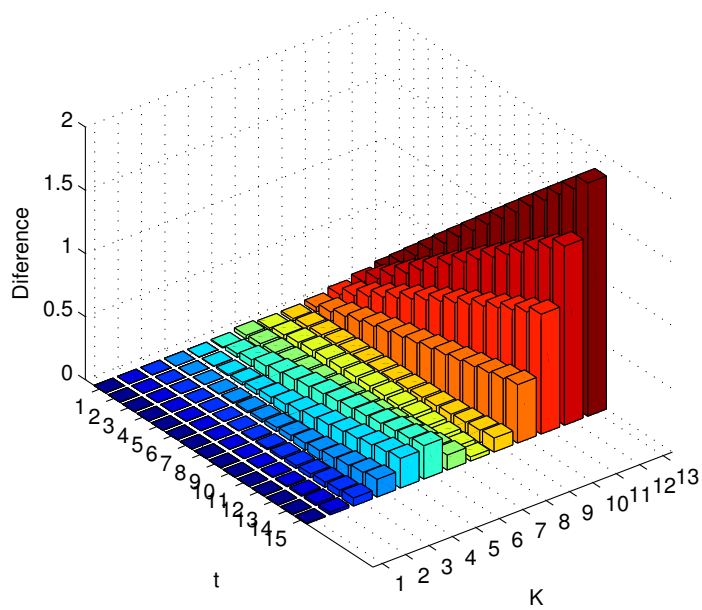


Obrázek 23: Absolutní hodnota rozdílů výsledků LS metody a FDI

Při porovnání obou modelů, viz obrázky 24 a 25, je cena Bermudské opce vyšší za použití Hestonova modelu.



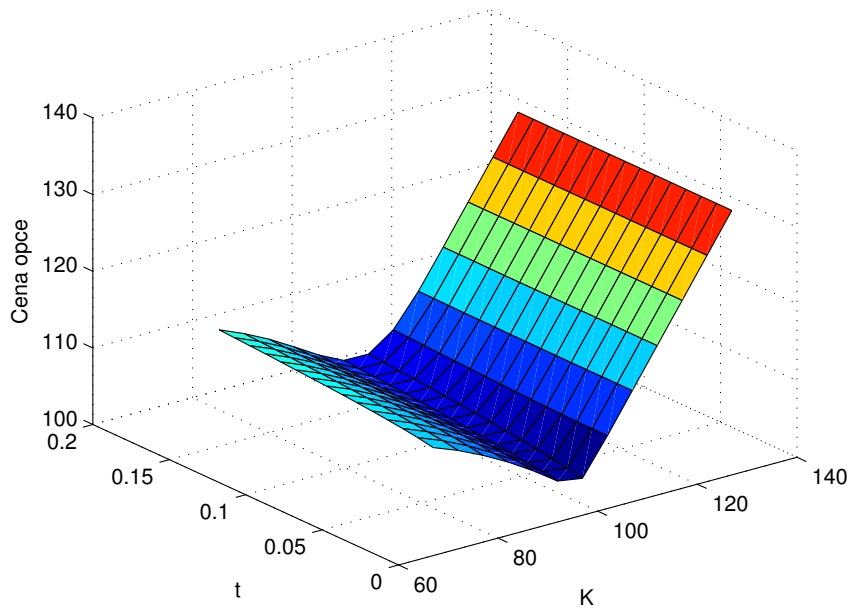
Obrázek 24: Rozdíl výsledků Hestonova a BS modelu



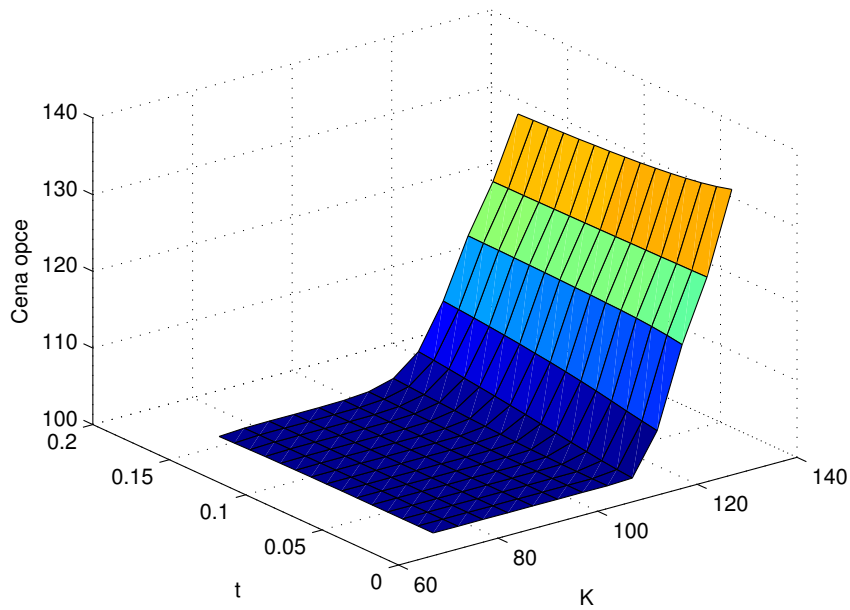
Obrázek 25: Absolutní hodnota rozdílů výsledků Hestonova a BS modelu

## 4.5 Rollover opce

Jak již bylo zmíněno dříve, Rollover opce je forma Bermudské opce, ke které známe řešení pomocí uzavřené formule. Na obrázku 26 je zobrazeno toto řešení v závislosti na čase do expirace a na realizační ceně. Na obrázku 27 je pak cena této opce spočtena pomocí implicitní metody konečných prvků za použití Black-Scholesova modelu.

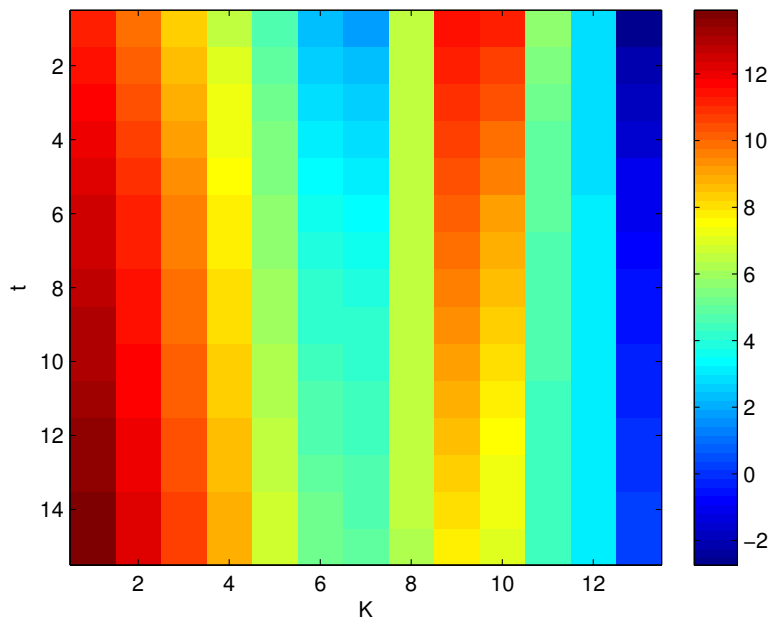


Obrázek 26: Cena put Rollover opce

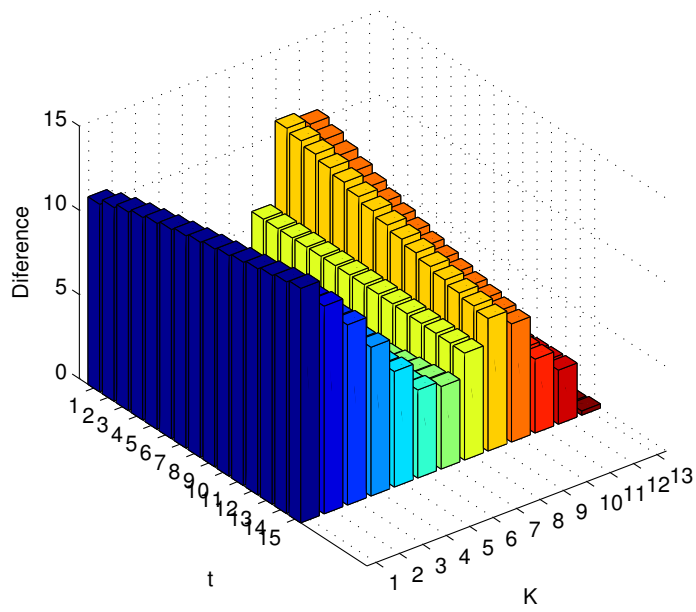


Obrázek 27: Cena put Rollover opce

Obrázky 28 a 29 ilustrují odlišnost výsledků dle formule a dle FDI. Ceny Rollover opce, vypočtené oběma přístupy. Pro nižší realizační ceny je vyšší hodnota spočtená pomocí formule, pro vyšší realizační ceny naopak hodnota dle FDI. Absolutní hodnoty těchto odchylek jsou zobrazeny na obrázku 29.



Obrázek 28: Rozdíl výsledků FDI a formule



Obrázek 29: Absolutní hodnota rozdílu výsledků FDI a formule

## 5 Závěr

Diplomová práce se zabývá druhem takzvané exotické opce, opcí Bermudskou. Prvním cílem práce bylo zpracovat rešerši. V první části práce je tedy čtenář seznámen se základními pojmy z prostředí opcí, teorie pravděpodobnosti a Wienerovým procesem, který je důležitou součástí simulací Monte Carlo. Je prezentován matematický základ a podmínky potřebné k oceňování Bermudských opcí.

Druhým bodem zadání bylo popsat matematické vlastnosti klasického modelu vycházejícího z geometrického Brownova pohybu (tj. Black-Scholesova modelu), Hestonova modelu se stochastickou volatilitou a případně vhodného modelu se skoky. V této části jsme se tedy zabývali metodikou následně použitou ve vlastní práci. Jednalo se o popis Black-Scholesova a Hestonova modelu a algoritmu, který je umožňuje simulovat. Dále pak o možné způsoby, jak opci ocenit. Věnovali jsme se Longstaff-Schwarzově metodě, analytickému řešení oceňovací parciální diferenciální rovnice a  $\theta$ -schématu. Model se skoky nebyl vzhledem k rozsahu práce uvažován.

Dalším cílem práce bylo navrhnout postupy simulace jednotlivých modelů, oceňování a kalibrace a implementovat tyto postupy ve vhodném SW. Popis postupů simulací a oceňování nalezneme v již zmíněné kapitole věnující se metodice. Konečně pak v kapitole Vlastní práce byly výše zmíněné postupy implementovány v softwaru Matlab. Podařilo se ocenit Bermudskou opci za použití obou modelů a pomocí obou metod. Vzhledem k tomu, že tržní data na Bermudské opce nejsou volně k dispozici nahradili jsme kalibraci převzetím parametrů z jiného zdroje.

Tyto výsledky byly vzájemně porovnány, čímž byl splněn poslední cíl práce. Zajímali jsme se také, jak ovlivní cenu opce její momentální pozice vůči podkladovému aktivu (OTM, ITM, ATM). Jako poslední byly tyto simulace a srovnání v BS modelu provedeny pro konkrétní příklad Bermudské opce - rollover opci.

# Literatura

- [1] Abramowitz, W., Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publication, Inc., New York., (1972).
- [2] Andersen, L. *Simple and efficient simulation of the heston stochastic volatility model*. Journal of Computational Finance 11 (2008). no. 3. s. 1–42.
- [3] Belomestny, D., Milstein, G., Spokoiny, V. *Regression methods in pricing American and Bermudan options using consumption processes*. Quantitative Finance 3 (2009). s. 315–327.
- [4] Belomestny, D., Milstein, G. N., Schoenmakers, J. *Sensitivities for Bermudan options by regression methods*. Decisions in Economics and Finance 2 (2010). s. 117–138.
- [5] Black, F., Scholes, M. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy 81 (1973). s. 637–654.
- [6] Boyarchenko, S. I., Levendorski, S. Z. *Pricing of perpetual Bermudan options*. Quantitative Finance 2 (2002). s. 432–442.
- [7] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A. *A theory of the term structure of interest rates*. Econometrica 53 (1985). no. 2. s. 385–407.
- [8] Delbaen, F., Schachermayer, W. *The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes*. Mathematische Annalen 312 (1998). no. 2. s. 215–250.
- [9] Dupač, V., Hušková, M. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Karolinum, Praha (2005). s. 162.
- [10] Egloff, D., Kohler, M., Todorovic N. *A dynamic look-ahead Monte Carlo algorithm for pricing Bermudan options*. The Annals of Applied Probability 4 (2007). s. 1138–1171.
- [11] Heston, S. L. *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*. Review of Financial Studies 6 (1993). no. 2. s. 327–343.

- [12] Kramkov, D. O. *Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets*. Probability Theory and Related Fields 105 (1996). s. 459-479.
- [13] Lin, J. W. *Pricing formula for perpetual Bermudan options*. Tongji Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban 36 (2008). s. 1443-1447.
- [14] Lin, J., Liang, J. *Pricing of perpetual American and Bermudan options by binomial tree method*. Frontiers of Mathematics in China 2 (2007). s. 243-256.
- [15] Longstaff, F.A., Schwartz, E.S. *Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach*. Financial Stud. 14 (2001). s. 113-148.
- [16] Rouah, F. D. *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C#*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2013). s. 416.
- [17] Shreve, S. E. *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer (2004). s. 571.
- [18] Scholleová, H. *Hodnota Flexibility*. C.H. Beck, Praha (2007). s. 171.
- [19] Schweizer, M. *On Bermudan option*. Advances in Finance and Stochastics. Springer (2002). s. 258-270.