Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Geometrické procházky

Autor práce: Bc. Lenka Šellerová
Vedoucí práce: RNDr. Světlana Tomiczková, Ph.D.

Plzeň 2016

Čestné prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr magisterského studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

Datum: 13. 5. 2016

. . . .

podpis

Poděkování

Touto cestou bych chtěla poděkovat mé vedoucí práce RNDr. Světlaně Tomiczkové, Ph.D za odbornou pomoc, ochotu a věcné připomínky. Dále bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Marii Novotné, CSc. za pomoc s geografickou částí diplomové práce a v neposlední řadě mé rodině a přátelům za jejich trpělivost.

Abstrakt

Práce je zaměřena na mezipředmětové vztahy mezi matematikou a geografií a slouží k výuce nadanějších žáků na gymnáziích. Hlavním cílem je prohloubit znalosti v oblasti geografie a ukázat žákům možnosti využití geometrie v praktickém životě. Práce je rozdělena do čtyř procházek, z nichž každá obsahuje část teoretickou a praktickou a součástí každé procházky je i pracovní list. V každé procházce žáci využívají GPS a Google Earth k zdokumentování prošlé trasy.

Klíčová slova

Země, geoid, sféra, elipsoid, rovina, geografická zobrazení, geografická zkreslení, mapa, měřítko, buzola, GPS, Google Earth, vzdálenost, výška, objem, obsah, geometrická zobrazení, identita, osová souměrnost, posunutí, rotace, středová souměrnost, stejnolehlost, shodné zobrazení, podobné zobrazení, mozaiky, rotační plocha, válcová plocha, kuželová plocha, paraboloid, anuloid.

Abstract

The work is focused on the inter-relationships between mathematics and geography and used to teach more talented pupils in secondary schools. The main aim is to deepen knowledge of geography and show pupils possibilities of geometry in everyday life. The work is divided into four separate walks of which contains theoretical and practical parts with each also containing a worksheet. In every walk students use GPS and Google Earth to document the Track.

Keywords

Earth, geoid, sphere, ellipsoid, plane, geographic representation, geographic bias, map,scale, compass , GPS, Google Earth, distance, height, volume, content, geometric representation, identity, axial symmetry, translation, rotation, central symmetry, homothety, congruent, similar views, mosaics, rotary surface, cylindrical surface, conical surface, parabolic surface, torus.

Obsah

Úvod

Tato práce je zaměřena na mezipředmětové vztahy, konkrétně na matematiku a geografii. Jako oblast těchto procházek jsem vybrala Domažlicko a procházky jsou určené především pro gymnázia, ale aplikace této práce je možná i na jiný druh střední školy. Hlavním cílem je prohloubit znalosti v oblasti geometrie a geografie a ukázat žákům možnosti využití geometrie v praktickém životě. Tato práce by měla sloužit jako projekt pro dobrovolný kroužek pro nadané studenty. Práce je rozdělena na čtyři procházky, v nichž se snažím propojit vědomosti získané ve škole s reálnými situacemi kolem nás.

Každá procházka obsahuje teoretickou a praktickou část, která je doplněna ještě o pracovní list, který se nachází v příloze. V teoretické části je rozebráno rozšiřující učivo, které žáci ještě neznají a to je doplněno o řešené příklady. Tato část obsahuje i neřešené příklady, které žáci musí vyřešit sami nebo s pomocí vyučujícího. Teoretickou část budou mít žáci k dispozici ať už v pdf nebo přímo vytištěnou vždy před každou procházkou. K dispozici budou mít i přílohy, ve kterých najdou základní učivo, které by už měli znát a mapy ke každé procházce.

Každá procházka začíná nejprve teoretickou částí, která je uskutečněna ve škole a podle obtížnosti látky trvá v každé procházce různě dlouho. Praktická část probíhá venku a k dispozici mají žáci pracovní listy, buzoly, GPS a mapy. Každá procházka by měla být zakončena zdokumentováním trasy v Google Earth. Po domluvě s vedoucím projektu je možné, aby si žáci zdokumentovali trasy procházky v Google Earth pomocí návodu ve vytištěné teoretické části doma, ale doporučovala bych, aby bylo provedeno zdokumentování alespoň jedné procházky ve škole.

První procházka je určena pro žáky 9. tříd (čtvrtý ročník osmiletého studia a druhý ročník šestiletého studia). Je zaměřena na geografii s využitím matematiky. Žáci si prohloubí základní znalosti o Zemi, druzích map a orientaci v mapě. Zároveň se naučí pracovat s buzolou, GPS a geoinformačními technologiemi. Hlavním cílem je naučit žáky orientovat se v přírodě s i bez využití GPS a buzoly. Tyto nově nabyté dovednosti budou praktikovat i v dalších procházkách.

Druhá procházka je určena pro žáky 9. tříd nebo 1. ročník na SŠ. Tato procházka je zaměřena spíše na matematiku s využitím geografického softwaru. Cílem procházky je zopakování a prohloubení si základních znalostí o trojúhelnících a mnohoúhelnících a naučit se počítat výšky a vzdálenosti objektů, obsahy a objemy útvarů. V závěru se žáci naučí vytvořit graf výškového profilu procházky.

Třetí procházka je určena pro žáky 3. ročníků (sedmého ročníku osmiletého studia, pátého ročníku šestiletého studia a třetího ročníku čtyřletého studia na gymnáziu). Žáci musí znát geometrická zobrazení. Cílem procházky je využít poznatky o geometrických zobrazeních a pokusit se najít jejich využití v přírodě, na dlážděních a na budovách.

Čtvrtá procházka je určena pro žáky 3. ročníků. Cílem procházky je využít znalosti z geometrie, kterou se doposud žáci učili a naučit žáky geometrii rotačních ploch. Hlavním cílem je, aby si žáci po skončení procházky uvědomovali, k čemu slouží rotační plochy a že jsou využívány v mnoha různých oborech.

Část I

První procházka

Cílová skupina

Tato procházka je určena pro žáky 9. ročníku (čtvrtý ročník osmiletého studia nebo druhý ročník šestiletého studia). Žáci mají základní poznatky z geometrie a o planetě Zemi. Tato procházka by byla vhodná i pro vyšší gymnázium, žáci získají poznatky mimo rámec RVP a ŠVP.

Cíl

První procházka je zaměřena na geografii s využitím matematiky. Cílem procházky je zopakování a prohloubení si základních znalostí o Zemi, druzích map, orientaci v mapě a druzích měřítek. Žáci se naučí pracovat s GPS, buzolou a různými geoinformačními technologiemi. Dále se naučí určovat světové strany s buzolou i bez ní, vzdálenost dvou míst nebo případné převýšení procházky. Naučí se samostatně plánovat procházky podle různých indikátorů.

Motivace

Naučit se používat mapu a buzolu, pomocí nichž se žáci dokáží zorientovat v přírodě. Naučit se pracovat s geoinformačními technologiemi.

Časová náročnost

Na teoretickou část je nutné vyhradit alespoň tři vyučovací hodiny a na praktickou část dvě vyučovací hodiny.

Pomůcky

Na tuto procházku budou žáci potřebovat papír, tužku, buzolu, GPS, fotoaparát, měřící pásmo a mapu Hánova parku.

1 Teoretická část

1.1 Země jako fyzikální těleso

Ze základní školy víme, že Země patří společně s Merkurem, Venuší a Marsem mezi terestrické planety[1], tj. mají pevný povrch. Z těchto planet je Země největší, rotuje nejrychleji, je nejhmotnější, má nejvyšší hustotu, nejsilnější magnetické pole a největší gravitaci. Dalším faktem, který také jistě každý zná je, že se naše planeta skládá z několika sfér (atmosféra, litosféra, pedosféra, hydrosféra a biosféra). My se budeme zabývat pouze litosférou. Povrch Země je značně ***nepravidelný***. Má velkou vertikální členitost a je neustále přetvářen díky exogenním (vnějším) a endogenním (vnitřním) činitelům. Mezi exogenní činitele řadíme vodu, vítr, sluneční záření, činnost člověka atd. Mezi endogenní činitele patří například sopečná činnost nebo zemětřesení.

Jaký tvar má Země? O této otázce se začalo spekulovat už hodně dávno. První domněnku o tom, že Země není plochá, ale je kulatá, předpokládal údajně již Pythagoras. Dnes už víme, že Země není plochá. Jaký tvar ale má? Jedná se skutečně o kouli? Zemi bychom mohli definovat jako velmi složitý, dynamický systém, který se neustále mění v čase i v prostoru, a to hlavně díky endogenním a exogenním činitelům. Na Zemi je mnoho míst s různou nadmořskou výškou, kvůli kterým je tvar Země velmi těžko matematicky definovatelný.

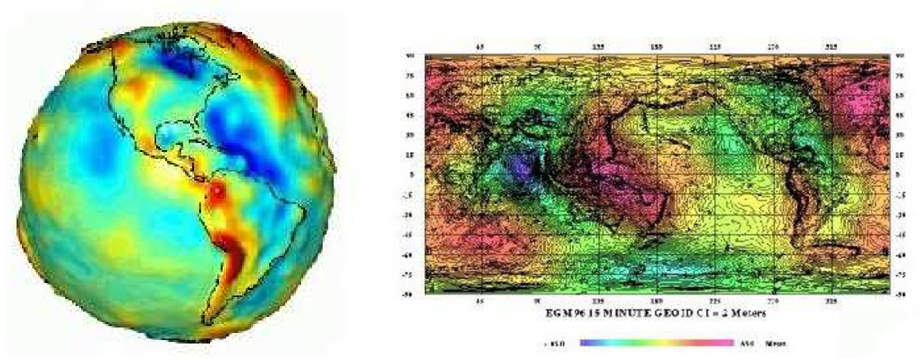
Pro to, abychom mohli naši planetu modelovat využíváme tzv. ***referenční plochy***. Tyto plochy nám nabízejí možnost matematického uchopení, protože na nich dokážeme lépe počítat např. poloměr Země, délku poledníků a rovnoběžek, vzdálenost dvou míst atd. Jsou to tedy matematicky definované plochy, kterými můžeme nahradit zemské těleso, nebo alespoň jeho část. Mezi tyto plochy řadíme ***geoid***, ***elipsoid***, ***sféru (kouli)*** a ***rovinu***. V následující části se seznámíme s těmito referenčními plochami. [2]

1.1.1 Geoid

Referenční plocha, která nejlépe vystihuje tvar Země se nazývá ***geoid*** *(obrázek 1* - obrázek převzat z knihy [2]). V kartografii se využívá zřídka, protože je špatně matematicky definovaný a výpočty jsou obtížněji proveditelné. Proto jsou matematické výpočty prováděné na jiných referenčních plochách. [2]

Z *obrázku 1* je vidět, že tvar geoidu je velmi nepravidelný. Červená barva označuje místa s nejvyšší nadmořskou výškou a modrá naopak s nejnižší.

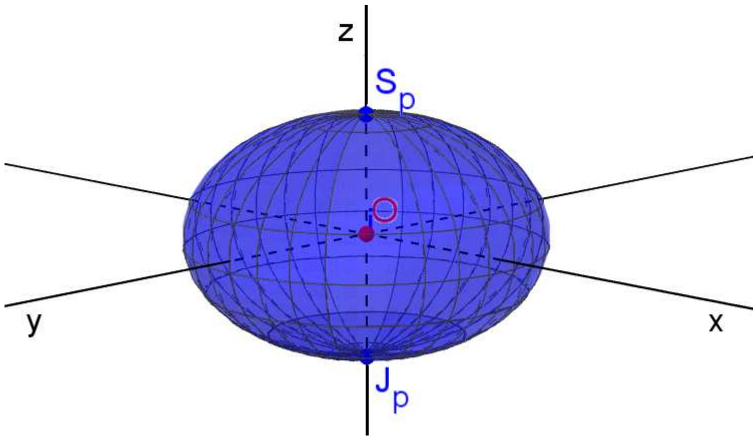
[1] terra-země



Obrázek 1: Geoid

1.1.2 Elipsoid

Vzhledem k problémům uvedeným výše nahrazujeme geoid (Zemi) ***rotačním elipsoidem***. Díky rotaci a dalším silám, které působí na zemské těleso, je Země zploštělá na pólech. Rotační elipsoid vzniká rotací elipsy kolem vedlejší poloosy. Rotační elipsoid má hlavní a vedlejší poloosu stejně dlouhou a třetí poloosa má velikost kratší. [2]

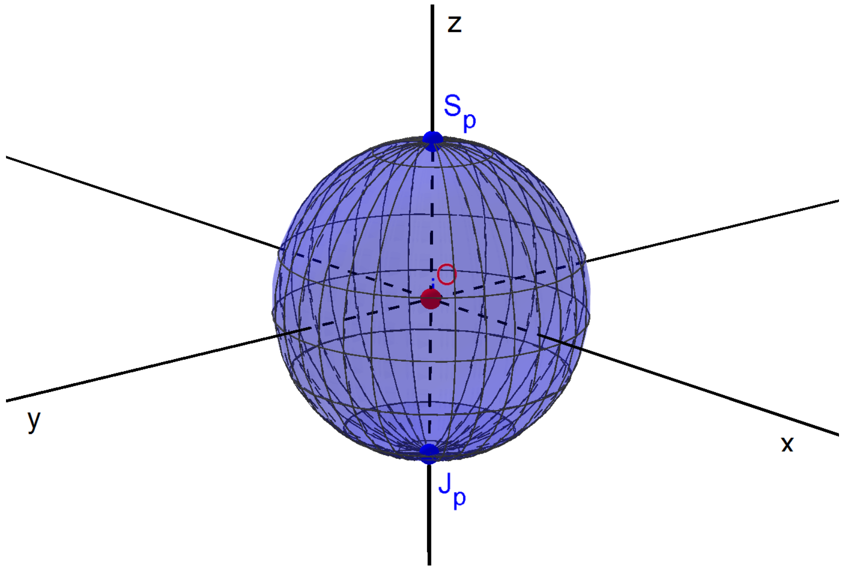


Obrázek 2: Elipsoid

Na *obrázku 2* znamená S_p severní pól a J_p jižní pól. Bod O značí jádro. Je vidět, že v rotačním elipsoidu jsou dvě poloosy stejně dlouhé a třetí (spojující S_p a J_p) je kratší.

1.1.3 Sféra

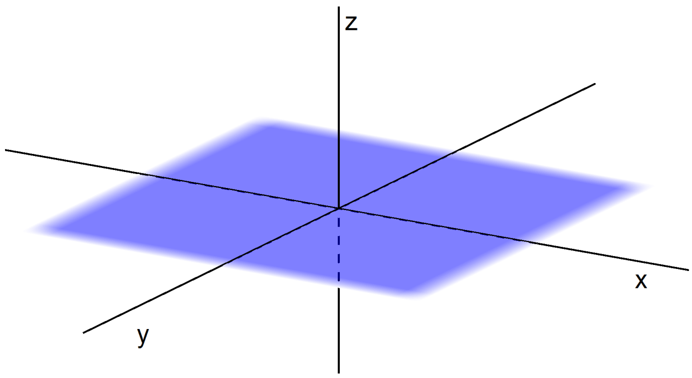
K méně přesným výpočtům či k vyhotovení map s velmi malým měřítkem využíváme ***sféru*** *(obrázek 3)*. Výhodou této plochy je, že ve všech výpočtech používáme stejný poloměr. Poloměr Země je přibližně ***6378 km***.



Obrázek 3: Sféra

1.1.4 Rovina

Rovinu *(obrázek 4)* využíváme tehdy, pokud naše zkoumaná oblast je velmi malého rozsahu, tedy dochází k zanedbatelnému zkreslení. V tomto okamžiku je totiž možné promítnout Zemi do roviny. Často se uvádí požadavek, aby se zkoumaná oblast vešla do kruhového tvaru o průměru do $7 - 15$ km. Důležité je, že zobrazením do roviny nevzniká mapa, nýbrž hovoříme o plánu. Jaký je rozdíl mezi plánem a mapou? Mapa je určena pro větší území, kdežto plán se vyhotovuje pro velmi malé území, např. pro města nebo oblasti výstavby. Mapa zohledňuje všechna zakřivení a délky v určitých směrech, kdežto u plánu můžeme všechna tato zakřivení zanedbat. Mapa také obsahuje dvě měřítka, hlavní a vedlejší, ale plán obsahuje pouze jedno měřítko. O tom, co to je měřítko, a jaké druhy známe, si povíme v kapitole *1.5.1*. [2]



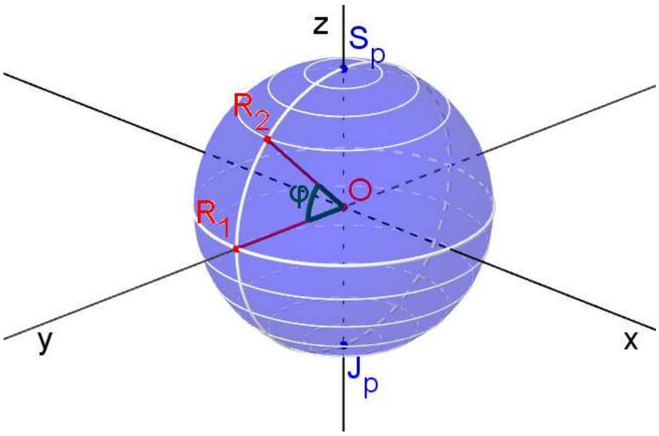
Obrázek 4: Rovina

1.2 Souřadnicové systémy na referenčních plochách

Mezi referenční plochy jsme zařadili elipsoid, sféru a rovinu a nyní budeme určovat polohu bodu na referenční ploše. Mezi souřadnicové systémy řadíme ***geografický*** a ***rovinný souřadnicový systém***. My se budeme zabývat pouze geografickým systémem, který si podrobněji rozebereme v následujícím textu.

1.2.1 Geografický systém

Zeměpisná šířka U *(obrázek 5)* je úhel φ, který svírá normála (kolmice k referenční ploše) v uvažovaném bodě s rovinou rovníku. Nabývá hodnot od $0°$(zeměpisná šířka rovníku) do $90°$ (zeměpisná šířka pólu). Na severní polokouli mluvíme o severní zeměpisné šířce $(+)$ a značíme ji s.š.. Na jižní polokouli o jižní zeměpisné šířce $(-)$ a značíme ji j.š.. Body, které mají stejnou zeměpisnou šířku leží na referenčním elipsoidu i na kouli na kružnici, která má střed na ose. [2]



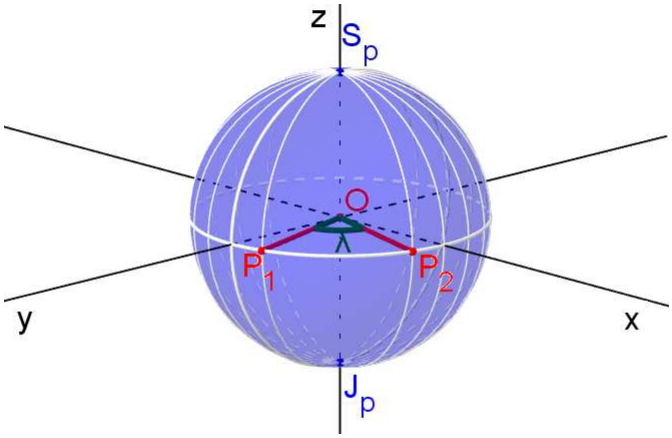
Obrázek 5: Zeměpisná šířka

Zeměpisná délka V *(obrázek 6)* je úhel λ mezi rovinou základního poledníku a rovinou poledníku uvažovaného bodu. Nabývá hodnot od $0°$ do $180°$. Zeměpisné délky můžeme rozdělit na východní $(-)$, kterou značíme v.d. a západní $(+)$, kterou označujeme z.d. V současnosti je uvažován jako nultý poledník Greenwichský poledník, který prochází Královskou astronomickou observatoří v Londýně. [2]

Příklad 1 Zjistěte na jaké zeměpisné šířce a délce leží Domažlice. Výsledek si zaznamenejte, protože ho budete potřebovat v dalších příkladech.

V matematické kartografii často uvádíme velikost poledníkového oblouku, který značíme s_p a rovnoběžkového oblouku a ten značíme s_r. Pro délky těchto oblouků platí vztah:

$$s_p = R \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot \Delta U[°] \qquad (1)$$



Obrázek 6: Zeměpisná délka

$$s_r = R \cdot \cos U \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot \Delta V[°], \tag{2}$$

kde R značí poloměr Země (6378 km), ΔU je rozdíl zeměpisných šířek a ΔV označuje rozdíl zeměpisných délek. [2]

Pokud se body nacházejí na stejných polokoulích, zeměpisné šířky od sebe odečteme tak, že platí:

$$\Delta U = |U_1 - U_2|$$

Pokud se dva body na sféře nacházejí na opačných polokoulích, zeměpisné šířky sčítáme. Platí vztah:

$$\Delta U = |U_1 + U_2|$$

Příklad 2 V létě máte v plánu jet na dovolenou do Říma, anebo do Paříže *(obrázek 7)*. Vaše rozhodnutí ovlivní vzdálenost cílového města od Domažlic a doba cesty. Vypočítejte, do jakého města je to blíže a výsledek porovnejte se skutečnou vzdáleností po silnici. Dále zjistěte, jakým dopravním prostředkem se dostanete z Domažlic do Říma a Paříže nejrychleji a nejlevněji.

Řešení:

Domažlice ($49°$s.š. $12°$ v.d.)

Řím ($42°$s.š $12°$v.d.)

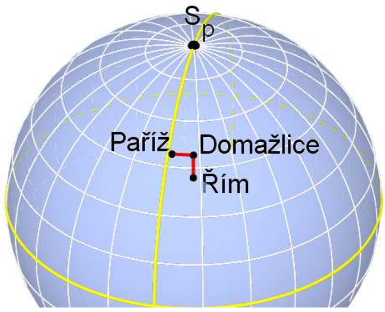
$$x = 6378 \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot 7°$$

$$x \doteq 779,22 \text{ km}$$

Vzdálenost Domažlic a Říma je přibližně $779,22$ km.

Domažlice ($49°$s.š. $12°$ v.d.)

Paříž ($49°$s.š. $2°$ v.d.)



Obrázek 7: Vzdálenost Domažlice - Řím a Domažlice - Paříž

$$x = 6378 \cdot \cos 49^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot (10^\circ)$$

$$x \doteq 730,3\,\mathrm{km}$$

Vzdálenost Domažlic a Paříže je $730,3$ km.

Tato vzdálenost však není nejkratší. Je to vzdálenost po vedlejší kružnici. Nejkratší vzdálenost určíme jako délku ortodromy. Co to je ortodroma se dozvíme v *kapitole 1.3*.

□

1.3 Důležité křivky na referenční ploše

Na referenční ploše existuje několik typů speciálních křivek, mezi které patří kromě ***poledníku*** a ***rovnoběžky*** i ***ortodroma*** a ***loxodroma***.

1.3.1 Ortodroma

Ortodroma *(obrázek 8)* je nejkratší spojnice bodů na kulové ploše. Je kratší z oblouků hlavní kružnice spojující oba body. Hlavní kružnice leží v rovině procházející středem kulové plochy. Ortodromou jsou například poledníky a rovník. Ostatní rovnoběžky ortodromami nejsou. Pomocí ortodromy vypočítáme nejkratší vzdálenost dvou bodů. [2]

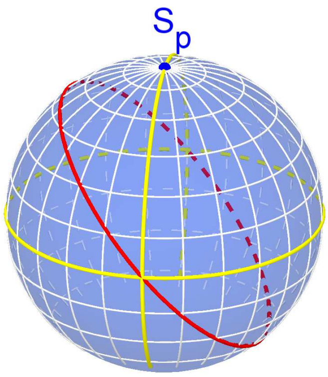
Vzdálenost bodů na kulové ploše můžeme vypočítat v míře stupňové jako délku oblouku hlavní kružnice

$$|AB| = R \cdot \varphi[^\circ] \tag{3}$$

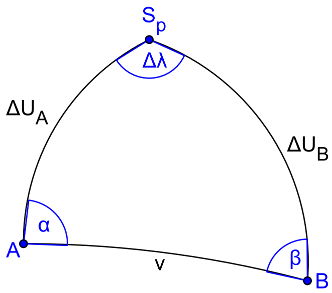
i v míře délkové

$$|AB| = R \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi[^\circ] = R\varphi[rad] \tag{4}$$

V *kapitole 1.2.1*, konkrétně v příkladech, jsme se naučili počítat vzdálenost dvou bodů, které leží na stejné rovnoběžce, resp. poledníku. V této části si ukážeme, jak vypočítat vzdálenost dvou bodů, které neleží na stejné rovnoběžce resp. poledníku. Pro tento výpočet využíváme tzv. sférický trojúhelník *(obrázek 9)*, jehož strany jsou tvořeny třemi oblouky hlavních kružnic.



Obrázek 8: Ortodroma



Obrázek 9: Sférický trojúhelník

S_p značí severní pól, v vzdálenost mezi body A a B, $90 - \varphi_A$ a $90 - \varphi$ vzdálenost bodů A a B od severního pólu, φ_A a φ_B jsou zeměpisné šířky míst A a B.

Obecně není nutné mít jeden vrchol v severním nebo jižním pólu. My však tento vrchol budeme raději dávat do pólu, protože známe zeměpisné souřadnice jak severního, tak i jižního pólu.

V tomto trojúhelníku platí několik základních vět, z nichž nás bude zajímat pouze ***kosinová věta***, pro kterou platí vztah:

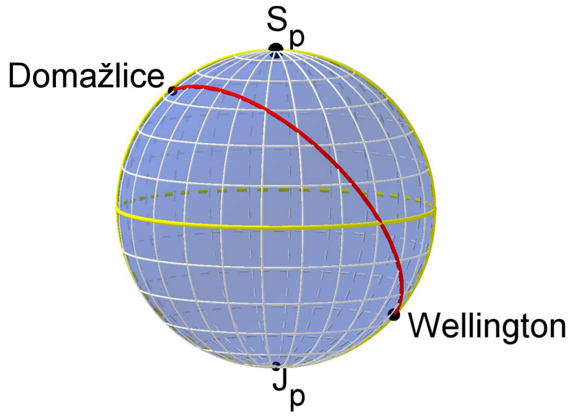
$$cosv = \cos\Delta U_D \cdot \cos\Delta U_W + \sin\Delta U_D \cdot \sin\Delta U_W \cdot \cos\Delta\lambda \tag{5}$$

Jistě jste si všimli, že tato kosinová věta je jiná, než kterou znáte z matematiky. Dávejte si tedy pozor na jejich zaměňování.

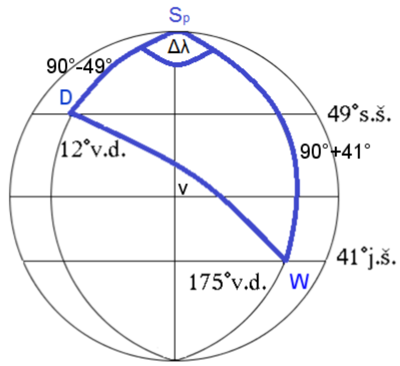
Pro vyvození sférické kosinové věty se vychází z kosinové věty rovinné trigonometrie. S využitím Pythagorovy věty a pár úprav se dojde k vztahu sférické kosinové věty. [2]

Příklad 3 Každého jistě trochu láká jet na Nový Zéland *(obrázek 10)*, proto si nyní vypočteme vzdálenost Domažlic ($49°$s.š. $12°$ v.d.) a Wellingtonu ($41°$j.š. $175°$ v.d.), jež je hlavním městem Nového Zélandu *(obrázek 11)*.

Řešení:



Obrázek 10: Vzdálenost Domažlic a Wellingtonu



Obrázek 11: Sférický trojúhelník

Nejprve si vypočítáme pólovou vzdálenost Domažlic a Wellingtonu. Tu vypočítáme pomocí vztahu:

$$\Delta U_D = 90° - U_D$$

$$\Delta U_W = 90° - U_W$$

Dosadíme tedy za U_D, U_W zeměpisné šířky měst :

$$\Delta U_D = 90° - (49°) = 41°$$

$$\Delta U_W = 90° - (-41°) = 131°$$

Rozdíl zeměpisných délek $\Delta\lambda$ Domažlic a Wellingtonu je:

$$\Delta\lambda = 175° - 12° = 163°$$

Nyní už můžeme dosadit do kosinové věty a dopočítat vzdálenost.

$$\cos v = \cos 41° \cdot \cos 131° + \sin 41° \cdot \sin 131° \cdot \cos 163°$$

$$v = 165,61°$$

Stupně převedeme na kilometry:

$$v = R \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot v = 18\,435,22 \text{ km}$$

Vzdálenost Domažlic a Wellingtonu je $18\,435,22$ km.

□

Tato vzdálenost je nejkratší, jelikož jsme příklad počítali přes délku ortodromy.

Příklad 4 Nyní bychom se mohli podívat znovu na *příklad č.*3. Našim úkolem bude vypočítat nejkratší vzdálenost mezi určenými místy.

Řešení: Domažlice($49°$s.š. $12°$ v.d.) a Řím ($42°$s.š $12°$v.d.)

$$\Delta U_D = 90° - (49°) = 41°$$

$$\Delta U_R = 90° - (42°) = 48°$$

$$\Delta\lambda = 12° - 12° = 0°$$

$$\cos v = \cos 41° \cdot \cos 48° + \sin 41° \cdot \sin 48° \cdot \cos 0°$$

$$v = 7°$$

Nyní převedeme tyto stupně na kilometry.

$$v = R \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot v = 779,22 \text{ km}$$

Vzdálenost Domažlic a Říma je $779,22$ km.

Domažlice ($49°$s.š. $12°$ v.d.) a Paříž ($49°$s.š. $2°$ v.d.)

$$\delta_D = 90° - (49°) = 41°$$

$$\delta_P = 90° - (49°) = 41°$$

$$\Delta\lambda = 12° - 2° = 10°$$

$$\cos v = \cos 41° \cdot \cos 41° + \sin 41° \cdot \sin 41° \cdot \cos 10°$$

$$v = 6,55^\circ$$

$$v = R \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot v = 729,13\ \mathrm{km}$$

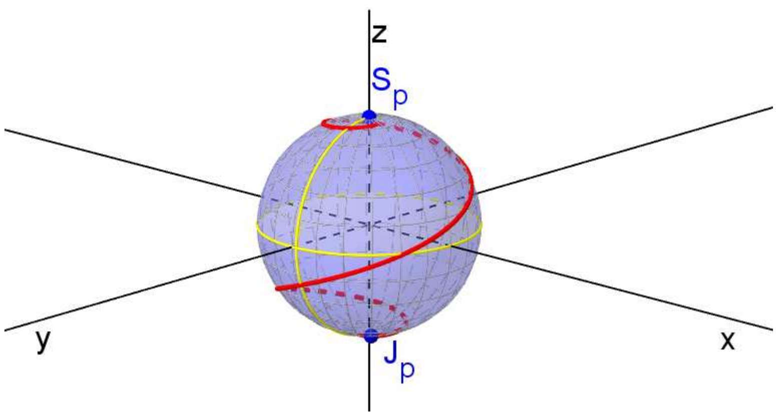
Vzdálenost Domažlic a Paříže je $729,13$ km.

V tomto příkladě nám vyšlo, že z Domažlic je to do Paříže o $50\ \mathrm{km}$ blíže. Jaká je vzdálenost po silnici? Zkuste zjistit, zda je do Paříže skutečně kratší cesta, nebo naopak delší, když pojedeme autem.

□

1.3.2 Loxodroma

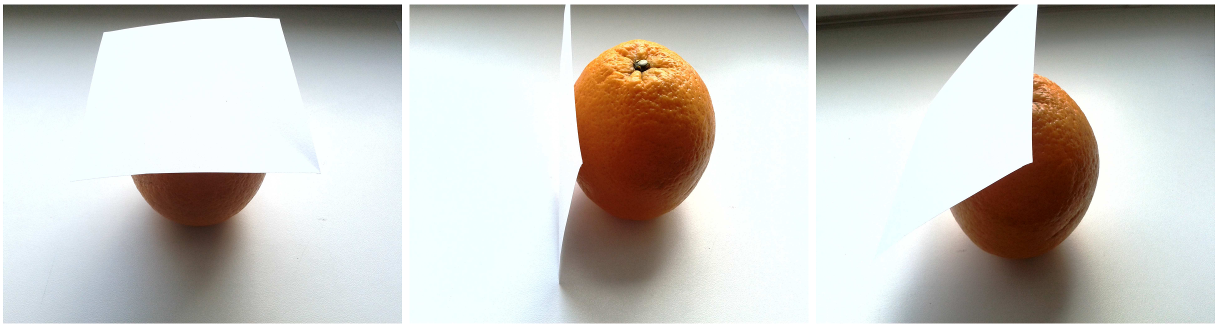
Loxodroma *(obrázek 12)* je křivka, která protíná všechny poledníky pod ***konstantním úhlem*** (azimutem). Můžeme si ji představit, jako spirálu, která se blíží k pólu, ale nikdy ho nedosáhne. Pro azimut různý od nuly se jedná o spirálu, která se blíží k pólu stále pod stejným úhlem. Jedná-li se o azimut rovný 0° nebo 90°, přechází loxodroma v poledník nebo rovnoběžku (rovník). Nacházíme-li se na severní polokouli, tak ortodroma leží severněji od loxodromy. Nacházíme-li se na jižní polokouli, tak ortodroma leží jižněji od loxodromy. Můžeme tedy říci, že ortodroma je více přilehlá k pólu té polokoule, ve které se nachází. Ortodroma splývá s loxodromou na rovníku a polednících. Loxodroma je využívána v námořní a letecké dopravě a pro mapy malých měřítek. Jako příklad si zde můžeme uvést Mercatorovo zobrazení (válcové v normální poloze), kterému se dnes říká Loxodromická mapa. Jedná se o pravoúhlou síť rovnoběžek a poledníků, kde loxodroma představuje přímku, která protíná poledníky stále pod stejným úhlem. Z tohoto důvodu je vhodné použít toto zobrazení v letecké a námořní dopravě, protože se jedná o navigační pomůcku, pomocí níž lze udržet stále stejný směr. [2]



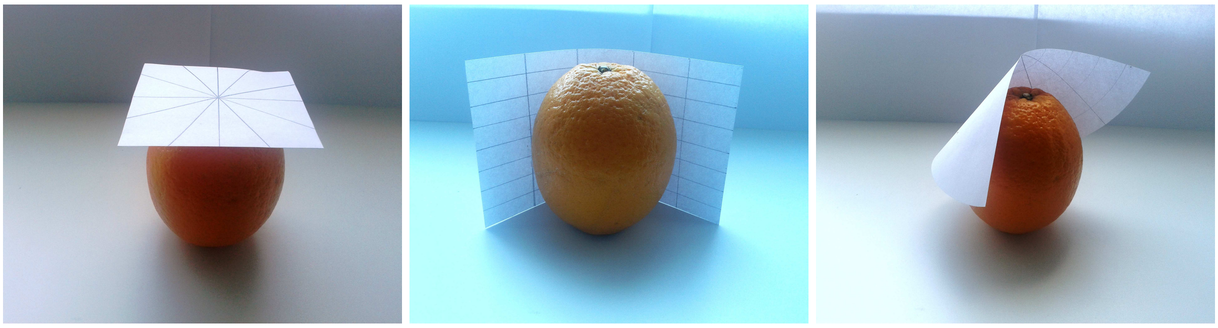
Obrázek 12: Loxodroma

1.4 Kartografická zobrazení

Úkolem tohoto zobrazení je zajistit jednoznačný převod bodů z referenční plochy do roviny mapy. Je to způsob, který každému bodu na referenční ploše přiřadí právě jeden bod na ploše zobrazovací. Rozlišujeme zobrazení ***azimutální*** (zobrazovací plochou je rovina), ***válcová*** (zobrazovací plochou je rotační válcová plocha) a ***kuželová*** (zobrazovací plochou rotační kuželová plocha) *(obrázek 14)*. Podle polohy rozvinutelné plochy, která je přiřazena k referenční ploše rozlišujeme polohu ***normální***, ***příčnou*** a ***obecnou*** *(obrázek 13)*. Pro lepší představu si představte povrch Země jako slupku pomeranče. Normální poloze se jinak říká polární a osa plochy je shodná se zemskou osou. Příčná osa, jinak také transversální, má osu zobrazovací plochy v rovině rovníku. Osa šikmé, neboli obecné plochy, prochází středem referenční plochy, ale v jiném směru než se tomu tak děje u plochy normální a příčné. [2]



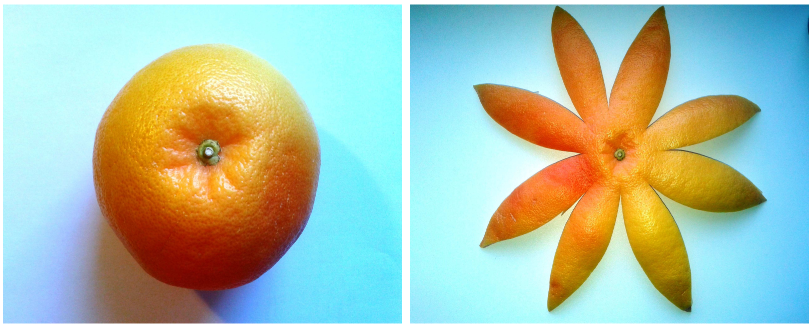
Obrázek 13: Polohy zobrazovacích ploch - normální, příčná, šikmá



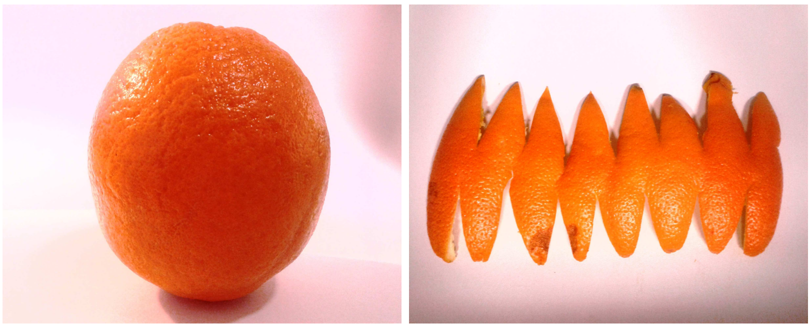
Obrázek 14: Zobrazovací polohy - azimutální, válcová, kuželová

Nesmíme však zanedbávat kartografická zkreslení. Musíme brát v potaz, co chceme nejpřesněji a nejvěrněji zobrazit. Nemůžeme docílit 100 % přesnosti zobrazení, jelikož každé ze zobrazení zkresluje buď ***délky***, ***úhly*** nebo ***plochy***. Podle zkreslení můžeme zobrazení třídit na ***ekvivalentní*** (stejnoplochá, zachovávají v každém bodě mapy nezkreslené plochy), ***konformní*** (stejnoúhlá, nezkreslují úhly a dobře zachovávají tvar, ale zkreslují plochy a délky), ***ekvidistantní*** (stejnodélková, nezkreslují délky) a ***vyrovnávací*** (zkreslují všechno tak, aby zkreslení ploch a úhlů bylo v rovnováze). [2]

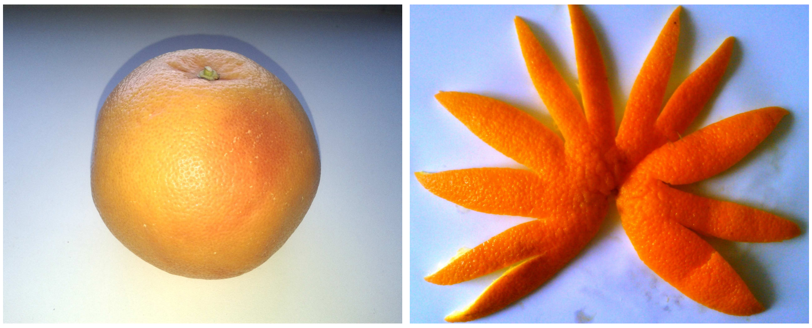
Pro lepší pochopení zkreslení podle typu zobrazení slouží *obrázky 15*, *16* a *17*.



Obrázek 15: Zkreslení azimutálního zobrazení



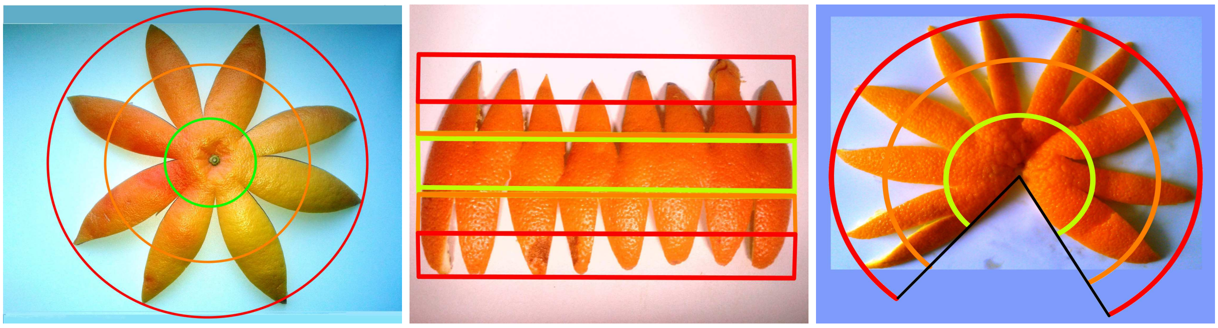
Obrázek 16: Zkreslení válcového zobrazení



Obrázek 17: Zkreslení kuželového zobrazení

Z *obrázků 15*, *16* a *17* vidíte zkreslení, kterého dosáhneme jednotlivými zobrazeními. Azimutální zobrazení vytvoří mapu kruhového tvaru, proto všude, kde vám chybí pomeranč, je velké zkreslení. Je to z toho důvodu, že pomeranč musíte roztáhnout všude do kruhové oblasti. Tím, že ho roztáhnete, změníte úhly, délky i plochy, tudíž dojde k velkému zkreslení. Pro ještě lepší pochopení slouží obrázek *18*.

Zelená barva značí velmi malé zkreslení, oranžová větší zkreslení a červená největší zkreslení.



Obrázek 18: Upravené zkreslení zobrazení - azimutální, válcové, kuželové

1.5 Mapa

Mapy jsou v dnešní době nejrozšířenějším a nejdostupnějším kartografickým dílem. Můžeme sem zahrnout mapové soubory, atlasy či glóby, které znázorňují objekty a jevy na Zemi, ale i hvězdnou oblohu, planety či Měsíc.

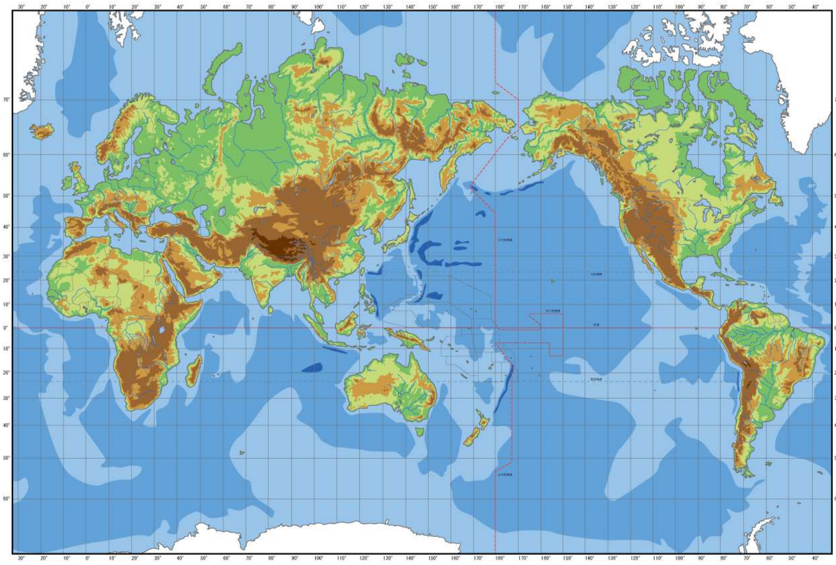
Mapa je zmenšený generalizovaný konvenční obraz Země, nebeských těles, kosmu, či jejich částí, převedený do roviny pomocí matematicky definovaných vztahů (kartografickým zobrazením), ukazující podle zvolených hledisek polohu, stav a vztahy přírodních, socioekonomických a technických objektů a jevů.

Mapy máme topografické (polohově velmi přesné), všeobecně zeměpisné (zobrazují větší území a mají malá měřítka) a tematické (účelové a oborové). Mapy můžeme dále dělit na mapový soubor (existence více map s jednotnou koncepcí, stejné vyjadřovací prostředky a stejné měřítko), mapové dílo (jednotná koncepce, vyjadřovací prostředky, stejná velikost mapových listů a pokrývá celé území beze spár a překryvů) a plán (relativně malá území okrouhlého tvaru, kde můžeme zanedbat zakřivení zemského povrchu). Důležité je však i měřítko. [2]

1.5.1 Měřítko

Měřítko mapy udává ***poměr zmenšení mapy oproti skutečnosti***. Tuto hodnotu vyjadřujeme poměrem $1 : M$, kde M je měřítková číslice, která vyjadřuje kolikrát je délka na mapě zmenšena oproti skutečné délce. Vzhledem k tomu, že u map dochází ke zkreslení ploch a úhlů, budeme u map určovat dvě měřítka. Hlavním měřítkem budeme značit pouze poměr zmenšení ve směru křivek v nichž nedochází ke zkreslení. Vedlejším měřítkem budeme určovat poměr v místech mapy, kde se bude projevovat zkreslení v závislosti na poloze a délkovém elementu. Vedlejší měřítka se běžně u map neudávají. [2] Zkreslení, ke kterému může dojít, si ukážeme na *obrázku 19*. Vybereme si mapu a bez znalostí druhů map a typů zkreslení si ukážeme, že mapa zkreslená je.

První, čeho si každý jistě všimne, je, že severní pól je bod a na této mapě je označen jako přímka. Na mapě je více indikátorů, které poukazují na zkreslení. V předchozí ka-



Obrázek 19: Mapa světa

pitole jsme uváděli, že zobrazení zkreslují délky, úhly i plochy. Vidíme tedy, že mapa zkresluje délky, protože všechny rovnoběžky na mapě mají stejnou délku, což není ve skutečnosti pravda. Důležité je tedy vědět, že mapa má dvě měřítka. Hlavní, které udává kolik centimetrů na mapě je centimetrů ve skutečnosti a vedlejší, které nám říká, do jaké míry je mapa zkreslená.

Příklad 5 1. Zjistěte vzdálenost na mapě s měřítkem $1 : 50\,000$, je-li skutečná vzdálenost dvou míst 15 km.

Řešení: Měřítko $1 : 50\ 000$ nám říká, že 1 cm na mapě je ve skutečnosti $50\ 000$ cm. Nejprve převedeme 15 km na centimetry.

$$15 \ \text{km} = 1\ 500\ 000 \ \text{cm}$$

Dále vydělíme výsledné centimetry měřítkem.

$$\frac{1\ 500\ 000}{50\ 000} = 30$$

Výsledek tedy je, že 15 km ve skutečnosti odpovídá 30 cm na mapě.

$\square$

Příklad 6 Doplňte tabulku

Tabulka 1: Měřítko mapy

Měřítko mapy	Vzdálenost na mapě	Vzdálenost ve skutečnosti
1 : 60 000	5 cm	
1 : 200 000		10 km
1 : 100 000	8 cm	
1 : 150 000		30 km

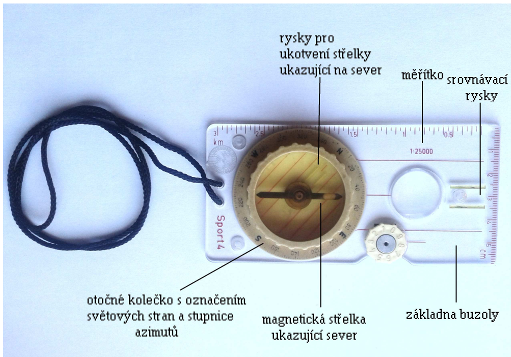
1.6 Orientace v mapě

V mapě už byste se všichni měli vyznat. Pro připomenutí zde shrnu základní poznatky. Nejprve se vždy podívejte na měřítko mapy. Dále vás musí zajímat mapové značky (cesty, železnice, řeky atp.), vrstevnice, orientace mapy (většinou jsou orientovány na sever).

1.6.1 Orientace s buzolou

Co to je buzola a jaký je rozdíl mezi buzolou a kompasem?

Buzola *(obrázek 20)* i kompas slouží k orientaci v terénu. Od sebe se liší pouze tím, že buzola má otočné víčko, díky kterému můžeme určit azimut. To je úhel, který svírá střelka směřující na sever a směr cíle v terénu. Orientace úhel se určuje podle směru hodinových ručiček.

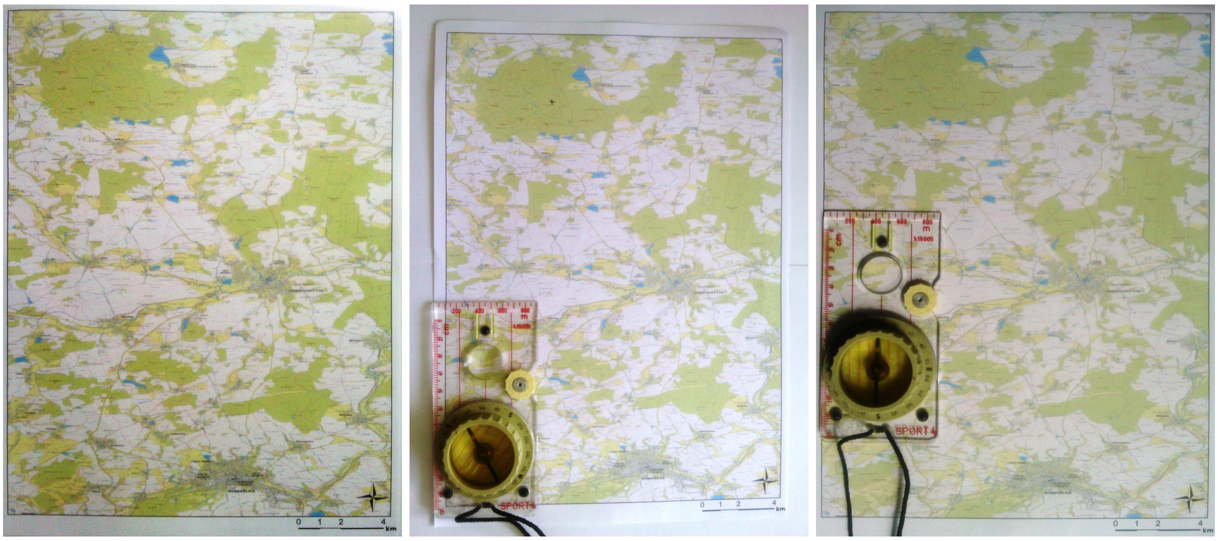


Obrázek 20: Buzola

Buzola se skládá ze střelky, která tvoří nejdůležitější část, dále z šipky (většinou označené červenou barvou), která určuje směr zaměření azimutu, azimutovou kružnici, vlastní kompas a to vše je umístěné na tzv. těle buzoly. Na buzole je uvedeno měřítko, pro jaké mapy lze buzola použít. Většinou jsou buzoly určené pro mapy s měřítky $1 : 50000$ až $1 : 25000$.

Příklad 7 Se třídou vyjedete na výlet do Sedmihoří. Nikdo z Vás tam nikdy nebyl a k dispozici máte jen mapu a buzolu. Dokážete se zorientovat na mapě a dojít/dojet zpátky do Domažlic?

Řešení: Stojíte v lese a před sebou máte mapu a buzolu. Pokud máte k dispozici tyto dvě pomůcky, máte štěstí a s velkou pravděpodobností se dostanete do cíle. První, co musíte udělat, je správně si zorientovat mapu (*obrázek 21*). Většina map má sever na horním okraji mapy. Položíte mapu na rovný povrch a vezmete buzolu. Přiložíte ji delší stranou na okraj mapy, buď k západní nebo východní straně, a pomalu budete otáčet mapou tak dlouho, dokud se vám střelka buzoly neztotožní se severním směrem mapy. Dávejte přitom pozor na kovové předměty v blízkosti buzoly. Pokud se v blízkosti buzoly budou nacházet nějaké kovy, buzola nebude ukazovat na sever.

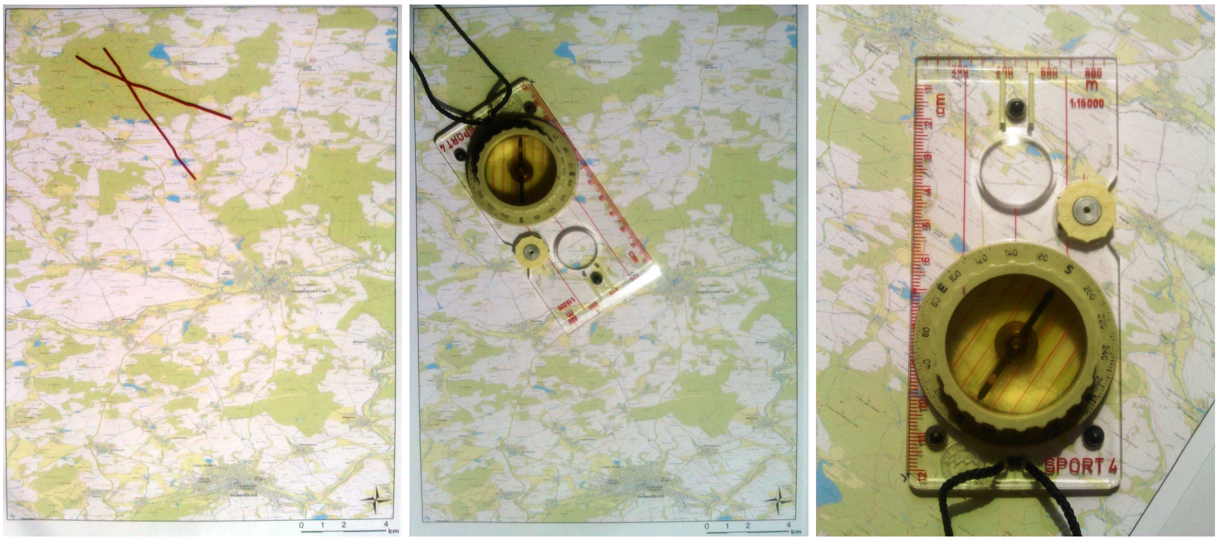


Obrázek 21: Zorientování mapy

Musíte určit, kde se v mapě nacházíte. Nyní si ukážeme, jak na to přijít (*obrázek 22*). K tomu využijeme stejnolehlost, kterou najdete v příloze. Stále máte zorientovanou mapu a podíváte se kolem sebe. Uvidíte-li výrazný kopec, řeku nebo vesnici kolem sebe i v mapě, máte vyhráno. Vezměte si provázek nebo klacek, který najdete kolem sebe. Nasměrujte provázek na váš bod a ve stejném směru položte provázek od bodu v mapě. Nyní si vyberte druhý bod kolem vás i v mapě a opět namiřte provázek na bod a ve stejném směru ho přiložte na mapu od druhého bodu. Tam, kde se tyto provázky protnou, byste se měli nacházet.

Posledním krokem bude vybrat si trasu, kterou půjdete do cíle. Víte, kde se nacházíte, i kde leží cíl. Pečlivě si tedy prostudujte nejprve mapu. Mohlo by se Vám stát, že cesta, kterou půjdete, bude nepřístupná, moc strmá, budete se muset brodit řekou atp. Je tedy lepší nejprve prostudovat mapu a vybrat kudy půjdete. Pokud se rozhodnete jít přímou cestou, zjistěte si nejprve, podle jakého azimutu půjdete *(obrázek 22)*.

Přiložte si buzolu na mapu tak, aby delší strana buzoly spojovala bod na němž se nacházíte s cílovým bodem a průzor buzoly směřoval k cílovému bodu. Nyní si ještě pootočte víčkem buzoly tak, aby sever označený na víčku směřoval jako severní část střelky. Úhel, který bude svírat střelka buzoly (víčko na sever) s osou buzoly se nazývá azimut. Tento úhel určujeme podle hodinových ručiček.



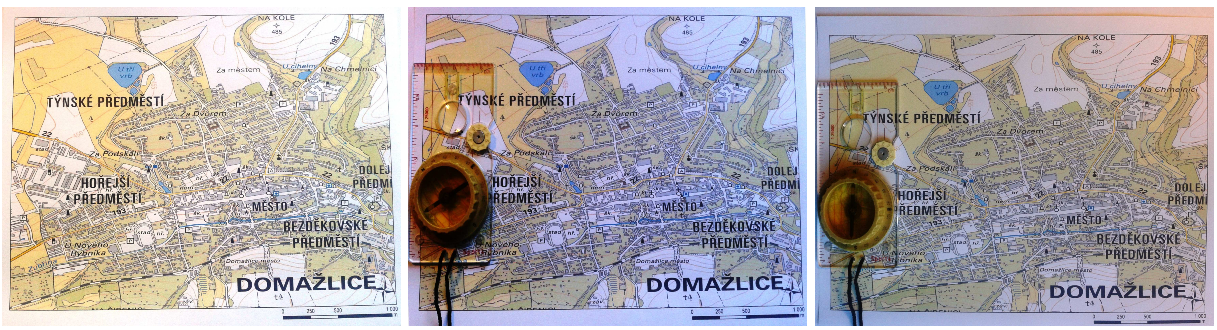
Obrázek 22: Orientace v mapě s využitím stejnolehlosti

Pokud už víte, kde se nacházíte a kam máte dojít, máte zjištěnou trasu i azimut, nezbývá nic jiného než vyrazit.

□

Příklad 8 Zjistěte, podle jakého azimutu půjdete, pokud budete chtít jít od Gymnázia ke Třem Vrbám. Podle měřítka zjistěte, jak daleko se tato místa od sebe nacházejí vzdušnou čarou a po silnici. Nejprve si zorientujte mapu *(obrázek 23)*, dále umístěte buzolu od Gymnázia ke Třem vrbám delší stranou a určete azimut *(obrázek 24)*.

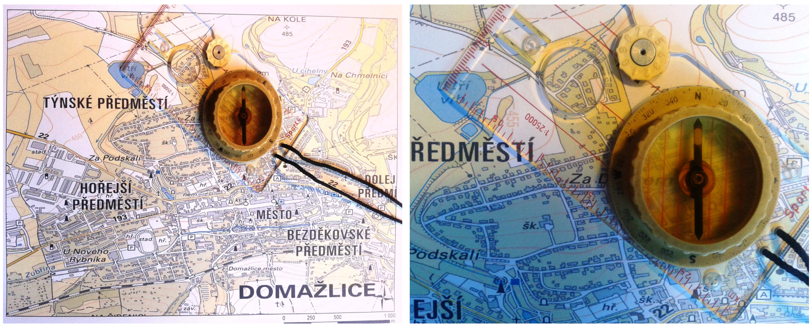
Řešení:



Obrázek 23: Zorientování mapy

Od Gymnázia ke Třem Vrbám půjdeme podle azimutu 105°.

□



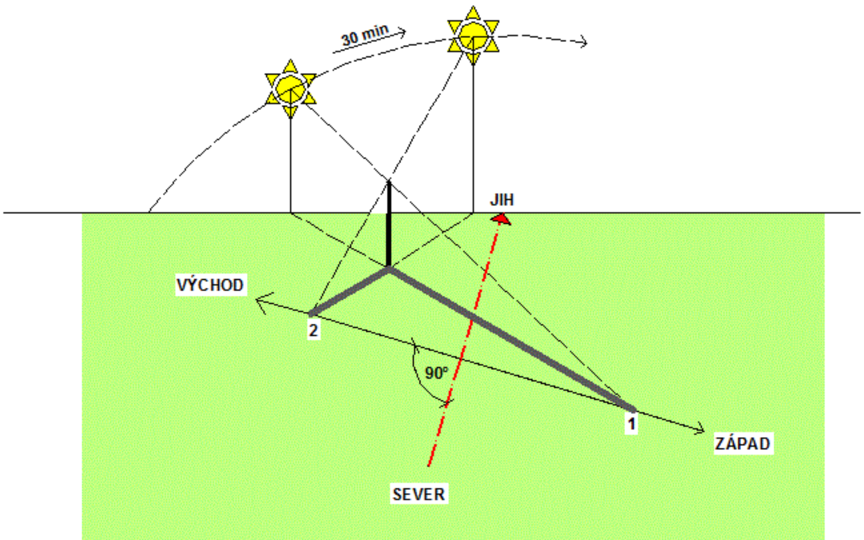
Obrázek 24: Výpočet azimutu

1.6.2 Orientace bez buzoly

Příklad 9 K dispozici máte jen mapu. Jak si správně zorientujete mapu bez buzoly?

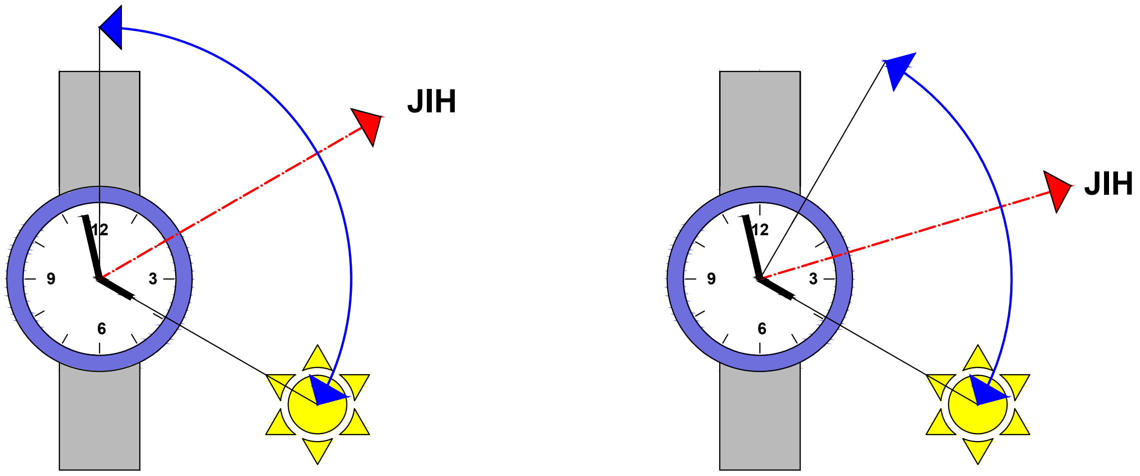
Řešení: Dokážete to pomocí různých přírodních jevů, díky kterým určíte světové strany.

Orientace pomocí Slunce I. Vezmeme tyč, hůlku nebo rovnou větev a zapíchneme ji kolmo do země. Tyč nám vrhá stín, a proto vezmeme další a zapíchneme ji v koncové části stínu první tyče. Nyní počkáme půl hodiny, a po této době se směr stínu tyče změní. Proto vezmeme další tyčku a zapíchneme ji opět do další koncové části stínu tyče. Naši původní tyč vyndáme a přiložíme ji k tyčím tak, aby se dotýkala zbylých, vytvoří tak pomyslnou přímku. Tato přímka nám určuje západovýchodní směr. První bod je vždy na západ a druhý bod na východ. Nyní už není těžké zjistit sever a jih.



Obrázek 25: Orientace pomocí Slunce I.

Orientace pomocí Slunce II. Máme-li hodinky, dokážeme určit světové strany pomocí nich *(obrázek 26)*. Hodinky musíme natočit tak, aby malá ručička ukazovala na Slunce (hýbeme pouze hodinkami, nepřenastavujeme čas!). Úhel, který svírá malá ručička a 12. hodina rozpůlíme a tato osa určuje směr na jih.



Obrázek 26: Orientace pomocí Slunce II.

Na obrázku *(26)* vidíme dva obrázky. Na levé straně je popis určování světových stran podle zimního času a na pravém obrázku popis určování světových stran podle letního času. V zimě určujeme jih mezi malou ručičkou a 12. hodinou a v letním čase určujeme jih mezi malou ručičkou a 13. hodinou.

Orientace pomocí hvězd Na obloze najdeme souhvězdí Velký vůz. Vzdálenost zadních kol souhvězdí pětkrát prodloužíme a najdeme Polárku (Severku), která určuje sever *(obrázek 27)*.

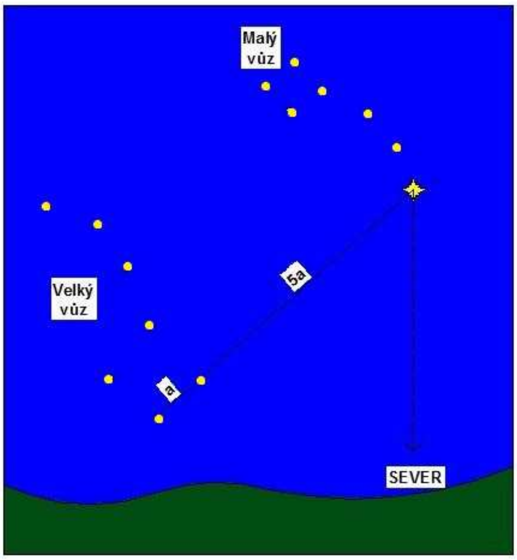
Všechny tyto následující pomůcky k určování směru světových stran neplatí vždy 100%. Proto pokud budete mít s sebou buzolu, kompas nebo GPS, využívejte raději tyto přístroje. Pokud je mít nebudete, můžete se orientovat pomocí těchto ne příliš přesných ukazatelů. Berte však v úvahu, že se setkáte s mnoha nepravdivými ukazateli. Je proto lepší využít kombinaci výše zmíněných způsobů a pokud se budou shodovat, orientovat se podle nich.

□

1.7 Globální polohový systém

1.7.1 Historie a princip GPS

Co to je a jak funguje GPS? K čemu slouží a jak s ním můžeme pracovat?



Obrázek 27: Orientace pomocí hvězd

Do 15. století stačilo lidem znát pouze světové strany a používali k tomu kompas, buzolu, sextant atp. Navigační systémy se začaly rozvíjet až s rozvojem vědy a techniky. Tyto systémy byly založené na vysílání a příjmu rádiových signálů.

Princip tohoto navigačního systému je založen na zjištění vzdálenosti k vysílačům, jejichž polohu známe. K tomu, abychom určili polohu místa, využíváme vzdálenost od čtyř vysílačů, která se měří pomocí času, za jak dlouho dojde signál z vysílače do místa, které potřebujeme zjistit. Zpočátku byly vysílače umisťovány na Zemi, ale v dnešní době jsou na umělých družicích. Plný provoz tohoto systému byl spuštěn v roce 1995. GPS není jediným polohovým systémem. Další polohové systémy můžeme najít např. v Rusku (GLONASS), v EU (GALILEO). GPS přístroje se liší přesností, cenou, velikostí a vybaveností.

Princip GPS je založen na vysílání radových signálů z umělých družic Země a na Zemi jsou postaveny stanice, které tyto signály zachycují.

Systém GPS tvoří kosmický, řídící a uživatelský segment. Kosmický segment obsahuje 24 družic, z nichž 21 je navigačních a 3 jsou záložní. Tyto družice se pohybují ve výšce $20\ 200$ km. V každém okamžiku na každém místě je možné přijímat signály ze $4 - 8$ družic. Každá družice obsahuje tzv. atomové hodiny. Řídícím segmentem je 5 pozemních monitorovacích stanic. Uživatelský segment je tvořen přijímacími stanicemi GPS. Nepřesnost $5 - 15$ metrů či přesnost určení nadmořské výšky $15 - 40$ metrů můžete zaznamenat například v autonavigaci ale i GPS pro turistiku. [2]

1.7.2 Práce s GPS

Každý se určitě někdy setkal s GPS navigací. My se budeme zabývat především záznamem prošlé trasy, který budeme následně využívat v programu Google Earth.

Budeme používat navigace GARMIN Dakota 20. Tímto budeme moci po procházce stáhnout digitální mapu prošlé procházky, ze které budeme moci snadno vyčíst vzdálenost, průměrnou rychlost, nadmořskou výšku a převýšení. Dále využijeme fotoaparáty, jimiž zaznamenáme objekty na procházce a ty následně vložíme do Google Earth.

Návod při práci s GPS

Po zapnutí GPS vyčkejte, dokud Vaše GPS nebude mít alespoň 4 příjmy satelitních signálů. Poznáte to tak, že na hlavní straně GPS v dolní části uvidíte signál, na tuto ikonu kliknete a objeví se Vám okno s několika signály. Vám stačí 4, ale pokud počkáte déle, je možné, že signálů zachytíte více a tím dosáhnete větší přesnosti zaměření. Pokud máte dobrý satelitní příjem, začneme s dokumentováním procházky.

Nejprve musíte jít do "Nastavení" a zde dáte "Vynulovat", "Vymazat aktuální trasu", "Ano". Nyní otevřete opět "Nastavení", "Prošlé trasy", kde dáte "Záznam prošlé trasy". Stisknete možnost "Zaznamenávat a ukázat na mapě". Pro uložení a zaznamená prošlé trasy kliknete na "Správce tras" a "Aktuální trasa".

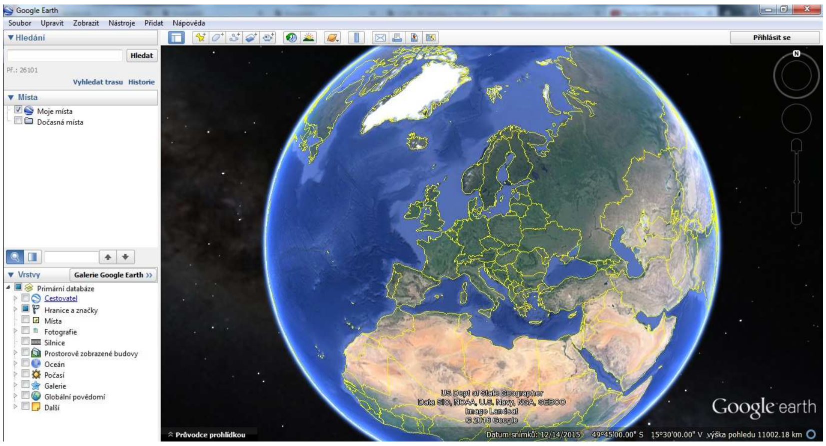
V dalším kroku budete vkládat trasové body. Kliknete na "Označit trasový bod", dále "Uložit a upravit", "Změnit název" a pojmenujete si trasový bod jak chcete. Poté stiskněte zelené potvrzení. Dále najedete na "Průměrování trasového bodu", kde se Vám zvýší přesnost trasového bodu na $1-5$ metrů. GPS nevypínáte, aby se Vám zaznamenala celá procházka. Ostatní body zaznamenáváte stejným způsobem. Posledním krokem je "Správce tras", "Současná trasa" a "Uložit prošlou trasu". Trasu si opět pojmenujete podle sebe a GPS se Vás zeptá, zda chcete uložit i další část, zde dáte "Ne", jinak byste měli uloženou procházku dvakrát. Tato data z GPS můžete nahrát do počítače a v Google Earth se Vám vykreslí Vaše procházka. Dále můžete zjistit např. převýšení procházky nebo průměrnou rychlost chůze. [20]

Návod při práci s Google Earth

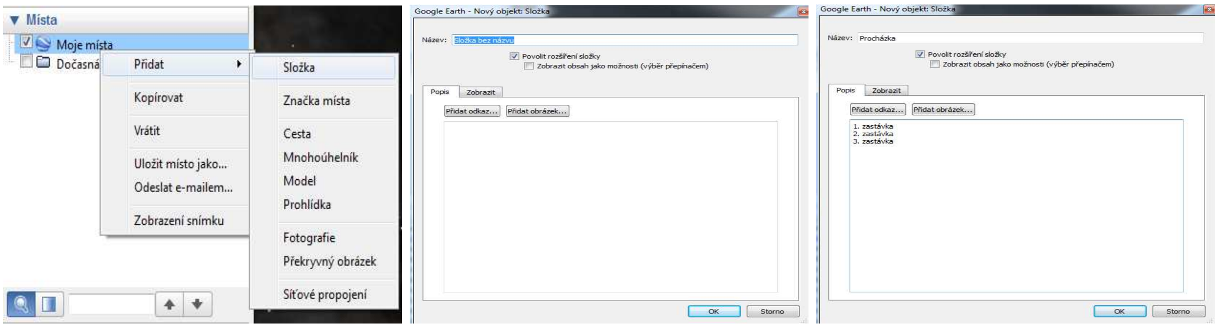
Spusťte si aplikaci Google Earth. Po načtení se Vám objeví okno *(obrázek 28)*, ve kterém Vás jistě zaujme planeta Země, ale podíváte-li se na levou část stránky, uvidíte tři okna s názvem "Hledání", "Místa" a "Vrstvy". Do "Hledání" napíšeme Domažlice a dále dejte "Hledat". Všechny vrstvy vypneme a necháme si zapnuté pouze "Hranice a značky".

Dále potřebujeme zadat body procházky *(obrázek 29)*. Pravým tlačítkem klikněte na "Moje místa" dále na "Přidat" a potom na "Složka". Objeví se vám okno, kde do názvu napíšete "Procházka" a do popisu napíšete názvy zastávek.

Nyní potřebujeme označit body v mapě *(obrázek 30)*. Klikneme pravým tlačítkem

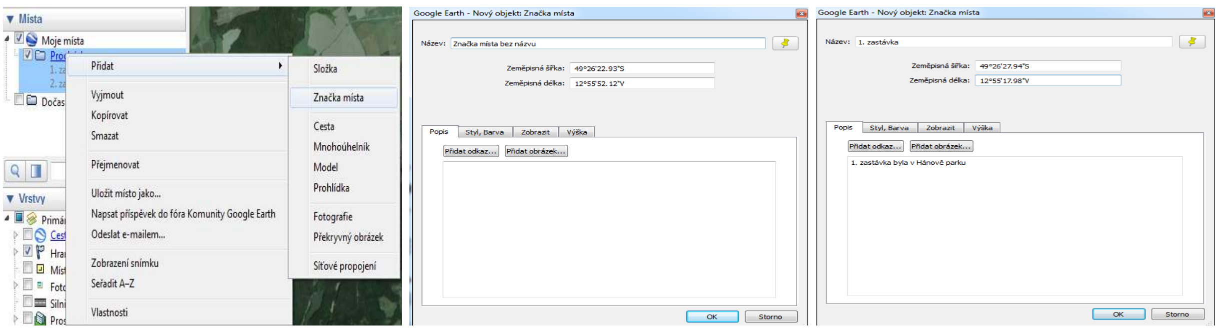


Obrázek 28: Google Earth



Obrázek 29: Google Earth - vytvoření složky

na "Procházka", dále na "Přidat" a na "Značku místa". Objeví se vám okno, ve kterém musíte doplnit název zastávky, zeměpisné souřadnice a popis toho, kde se otázka nacházela a co jste na dané zastávce řešili. V ostatních složkách "Styl, Barva", "Zobrazit" a "Výška" můžete měnit barvu, polohu nebo styl ikony. Stejným způsobem zavedeme další zastávky.



Obrázek 30: Google Earth - vytvoření zastávek

Pro vložení obrázku ke značce místa musíte kliknout pravým tlačítkem na Značku místa např. "1. zastávka" dále na "Vlastnosti" a v "Popisu" napíšete *(obrázek 31)*:

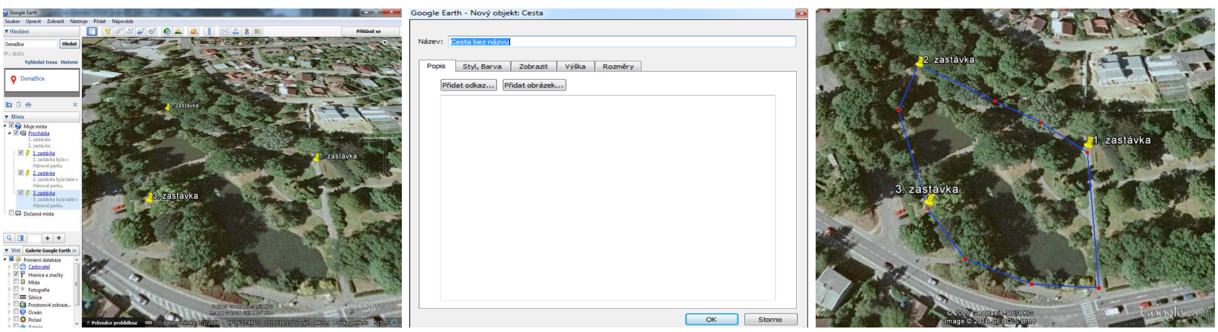
Přepíšete si všechny uvozovky do tvaru, který požadujete. Dávejte pozor na umístění

```
<table>
<tr>
<td valign="top">
<div style="width: 300px">
<font size="3"><b>GPS:</b>
49$^\circ$26'27.94"S;
 12$^\circ$55'17.98"V</font><br><br>
<font size="5"><b>Popis stanoviště:</b></
font><br>
<font size="3"><b>Zde napíšete o stanovišti
</b></font><br>
</div>
</td>
<td valign="top">
      <img
src="">
</td>
</tr>
</table>
<div align="center"><font
color="#666666"><i>&copy; Jména autorů, 2015</
i></font></div>
```

Obrázek 31: HTML kód

obrázku, nesmíte ho mít uložený mimo složku, kde se nachází vaše procházka. Ještě si nastavíte počáteční zobrazení procházky.

Dalším úkolem je spojit všechny zastávky jednou linií *(obrázek 32)*. Pravým tlačítkem klikněte na "Procházka" dále na "Přidat" a na "Cesta". Objeví se okno "Nová cesta" a stiskněte "Ctrl + Shift + T". Vyjedete-li z dialogového okna "Nová cesta" kurzor myši se změní na čtverec. Klikněte do mapy na začátek procházky a dále spojujte zastávky procházky (můžete klikat i mimo body, abyste kopírovali trasu a nechodili např. přes rybník). Po označení procházky, pojmenujte cestu a stejně jako u bodů, můžete změnit barvu i styl cesty.



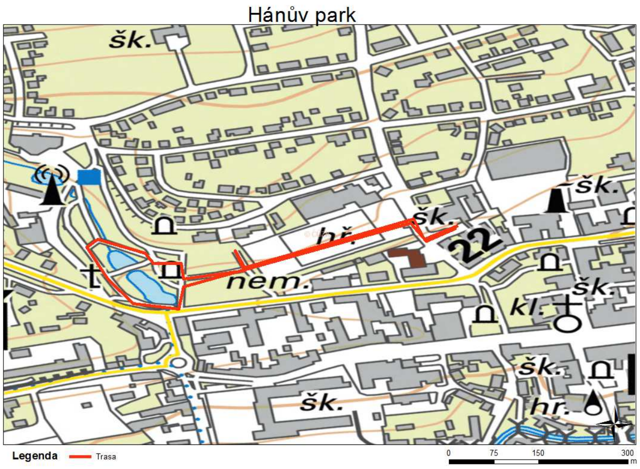
Obrázek 32: Google Earth - vytvoření cesty

Nyní klikněte pravým tlačítkem na "Procházka" a "Vlastnosti". Nastavte si procházku z takové vzdálenosti, kterou budete chtít, aby se otevřela při počátečním otevření. Pokud máte nastavenou pozici, v záložce ”Zobrazit” dejte ”Zaznamenat aktuální pohled”.

Poslední krok je uložit procházku. Klikněte pravým tlačítkem na ”Procházka” a ”Uložit místo jako” a pojmenujte to jakýmkoliv způsobem, ale musí to mít příponu ”.kmz”. [19]

2 Praktická část

Praktická část se uskuteční formou procházky *(obrázek 33*, kde se žáci naučí zacházet s buzolou a GPS s následným vkládáním dat do počítače a ovládáním Google Earth.



Obrázek 33: Trasa první procházky - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky(2016)

2.1 Přesun třídy

Celá třída se přesune do Hánova parku. K dispozici budou mít žáci pouze atlas, metr, GPS, buzolu, kalkulačku, sešit a tužku. Nejprve si zopakujeme teorii, kterou jsme se učili ve škole a následně budete hledat v Hánově parku rozmístěné karty s otázkami pomocí buzoly a GPS.

2.2 Světové strany

Žáci mají určit světové strany jakýmkoliv způsobem a pomocí buzoly si to zkontrolovat. (viz Příloha)

2.3 Zorientování mapy

Pomocí předchozího úkolu si mají zorientovat mapu.

2.4 Krokování

Dalším úkolem je změřit si délku svých kroků. Pomocí měřícího pásma si na rovině žáci naměří 100 metrů a ty si označí start a cíl. Všichni si stoupnou na start a normální chůzí ujdou těchto 100 metrů. Každý si musí sám pro sebe počítat kroky (lepší je počítat dvojkroky). Toto zkusí alespoň 3 krát.

Nyní jim vyšla jejich kroková vzdálenost na 100 metrů a tu si musí pamatovat do budoucna. To samé ještě udělají poklusem. Tato informace se jim bude hodit, když si pomocí měřítka zjistí vzdálenost na mapě a ve skutečnosti. Budou tedy vědět, kolik budou muset udělat kroků, než ujdou tuto vzdálenost.

2.5 Hledání schovaných otázek

Podle počtu buzol a GPS se žáci rozdělí do skupin po čtyřech. Každý ve skupině bude mít nějakou roli. Rozdělí se tedy ve skupině na geodeta, kartografa, geografa a geoinformatika. Kromě své role budou všichni objevitelé a budou hledat schované otázky a následně řešit úkoly na nich. V případě, že bude málo buzol mohou chodit po větších skupinkách. Každá skupinka dostane mapu, buzolu, GPS a jeden příklad. Po vypočítání příkladu, získají azimut a vzdálenost, která je dovede k první otázce. Otázek je v parku ukryto pět. První kartu s otázkou dostanou žáci již na začátku, tudíž zbývající otázky v parku budou jen čtyři.

Práce geodeta Geodet má za úkol zaznamenávat geografickou polohu zastávek do GPS.

Práce kartografa Kartograf má k dispozici mapu, do které zaznamenává jednotlivé zastávky a cestu procházky. Fotí jednotlivé zastávky, které dá po skončení procházky geoinformatikovi.

Práce geografa Geograf má připravenou tabulku, do které zaznamenává získané informace. Tabulka bude obsahovat ”název zastávky”, ”zeměpisnou polohu” a ”popis stanoviště”. Tato data využije geoinformatik.

Práce geoinformatika Geoinformatik využije data geodeta, kartografa a geografa k znázornění procházky v Google Earth. [19]

Část II

Druhá procházka

Cílová skupina

Tato procházka je určena pro žáky 9. tříd (čtvrtý ročník osmiletého studia a druhý ročník šestiletého studia) nebo 1. ročník na SŠ (pátý ročník osmiletého studia nebo třetí ročník šestiletého studia). Žáci musí umět vlastnosti trojúhelníků, počítat obsahy mnohoúhelníků a objemy různých těles.

Cíl

Tato procházka je zaměřena na matematiku. Cílem procházky je zopakování a prohloubení si základních znalostí o trojúhelnících a mnohoúhelnících. Naučit se počítat výšky a vzdálenosti objektů, obsahy a objemy útvarů. Žáci se naučí vytvořit graf výškového profilu procházky.

Motivace

Naučit se počítat výšky a vzdálenosti nepřístupných míst nebo obsahy a objemy různých těles, které jsou využitelné v praxi. S použitím GPS i bez něj zjistit výškový profil procházky.

Časová náročnost

Na teoretickou část je nutné vyhradit alespoň dvě vyučovací hodiny a na praktickou část tři vyučovací hodiny.

Pomůcky

Na tuto procházku je potřeba papír, tužka, buzola, GPS, měřící pásmo a mapa určená pro druhou procházku.

3 Teoretická část

V této procházce využijete znalosti získané na základní škole, týkající se vlastností trojúhelníků. Bude nezbytné, abyste uměli počítat strany, výšky, úhly, obvody i obsahy trojúhelníků. Dále je důležité znát věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků, Pythagorovu a Euklidovy věty. V praktické části nebudete pracovat pouze s trojúhelníky, ale i s jinými útvary (např. čtyřúhelníky), proto je nezbytné si vlastnosti těchto útvarů nejprve zopakovat. Základní poznatky najdete v příloze.

Nyní se podíváme na příklady využití těchto vět v přírodě a na stavbách (domy, schodiště a jiná architektonická díla).

3.1 Měření výšky

Každý se jistě dostal do situace, kdy se někde zastavil a podíval se na vysokou věž, strom či budovu a přemýšlel, kolik asi měří. Jak zjistit výšku objektu? Budeme počítat výšku Domažlické věže různými způsoby a při tom budeme využívat znalosti, které jsme si v úvodu této procházky zopakovali.

3.1.1 Měření podle délky stínu

Tato metoda je použitelná pouze za slunečného počasí. Sluneční paprsky dopadají na zem přibližně rovnoběžně. Využijeme tedy podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *(obrázek 34)*. K této metodě potřebujeme metr a tyč. Tyč zapíchneme v okolí věže (mimo dopadající stín věže) kolmo do země a změříme délku stínu vrženého tyčí. V případě, že stín bude stejně dlouhý jako tyč, změříme i délku stínu věže a ta se bude rovnat výšce věže. Je ale nesmysl čekat celý den, až bude délka stínu dlouhá jako tyč, a proto využijeme ještě úhlu dopadajících paprsků. Jak to uděláme? Nejprve si změříme výšku tyče a označíme si ji například l a délku stínu vrženého tyčí m. Díky tomu, že tyč je zapíchnutá do země kolmo víme, že se bude jednat o pravoúhlý trojúhelník KLM. Dále změříme délku stínu věže a označíme ji c. Výšku věže neznáme, ale označíme ji b. Získáme tedy druhý rovnostranný trojúhelník ABC, [21]

kde: l ...... výška tyče

m ..... délka stínu tyče

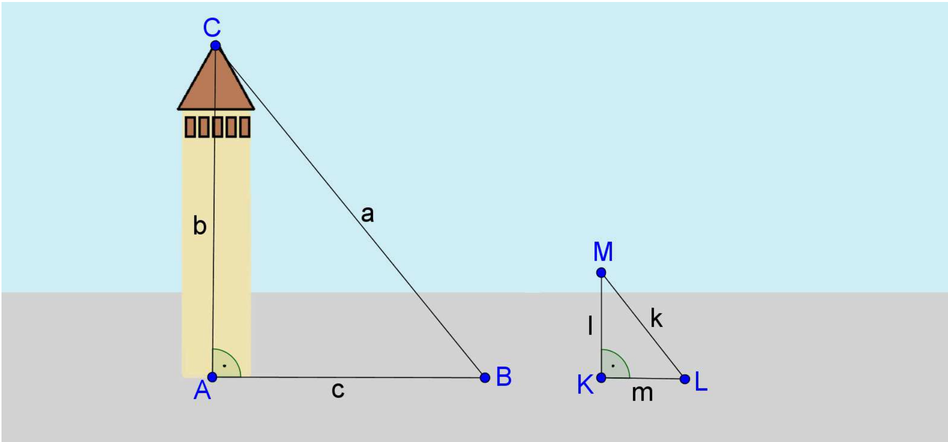
b ...... výška věže

c ...... délka stínu věže

Z trojúhelníku KLM můžeme vypočítat úhel dopadajících paprsků β.

$$tg\beta = \frac{l}{m} = \frac{b}{c} \tag{6}$$

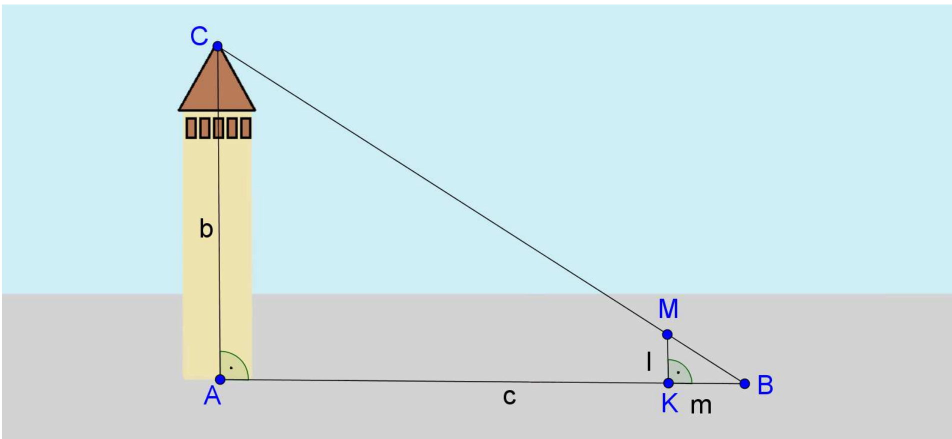
$$b = \frac{l}{m} \cdot c \tag{7}$$



Obrázek 34: Měření pomocí délky stínu

3.1.2 Měření pomocí tyče I.

Tuto metodu je vhodné použít, když nesvítí Slunce nebo pokud chceme měřit výšku domu v okolí výškových budov či výšku stromu v lese *(obrázek 35)*. Protože je okolo našeho stromu více stromů, nevíme přesně, jaký stín náš strom vrhá. Nebo okolo věže, jejíž výšku chceme měřit, jsou další budovy, a stín z věže dopadá na jinou budovu. V této metodě je nutné si lehnout na zem. Opět potřebujeme tyč a metr. Tyč zapíchneme kolmo do země v okolí věže a změříme její výšku l nad zemí. Dále si lehneme v takové vzdálenosti od tyče, abychom viděli přes špičku tyče M vrcholek věže C. Pokud nalezneme takovéto místo, změříme vzdálenost od paty tyče K k našemu oku m a vzdálenost c od našeho oka k patě věže A. Pomocí stejnolehlosti vypočítáme výšku věže. (Pokud si potřebujete zopakovat stejnolehlost, najdete ji v příloze). [21]

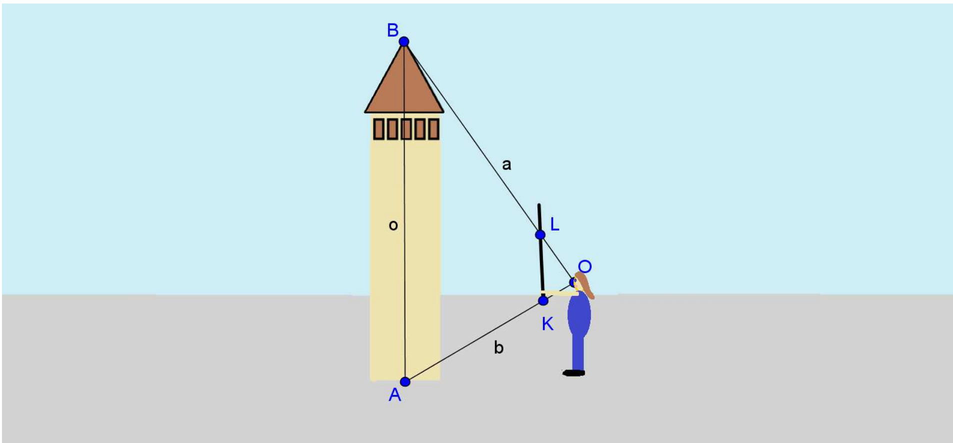


Obrázek 35: Měření pomocí tyče I.

3.1.3 Měření pomocí tyče II.

Nyní si ukážeme, jak změřit výšku věže velmi podobnou metodou s tím rozdílem, že nemusíme ležet *(obrázek 36)*.

Opět zde potřebujeme tyč a metr a využijeme stejnolehlost. Postavíme se ve vzdálenosti x metrů od věže a natáhneme ruku do vzdálenosti y metru s tyčí ve svislé poloze před sebe. Tyč musíme držet v takové poloze, abychom viděli přes její dolní část K spodek věže A. Dále se musíme podívat na vrcholek věže B a na tyči označíme místo L, které protíná spojnice našeho oka a vrcholku věže. Ještě si označíme naše oko O, abychom získali dva podobné trojúhelníky OKL a OAB. [21]



Obrázek 36: Měření pomocí tyče II.

Po změření všech vzdáleností vypočítáme pomocí stejnolehlosti výšku věže. Trojúhelník OAB je obrazem trojúhelníku OKL ve stejnolehlosti se středem O. Nyní zbývá už jen dopočítat koeficient stejnolehlosti s využitím výšek trojúhelníků. Výška trojúhelníku OKL je y a výška trojúhelníku OAB je x.

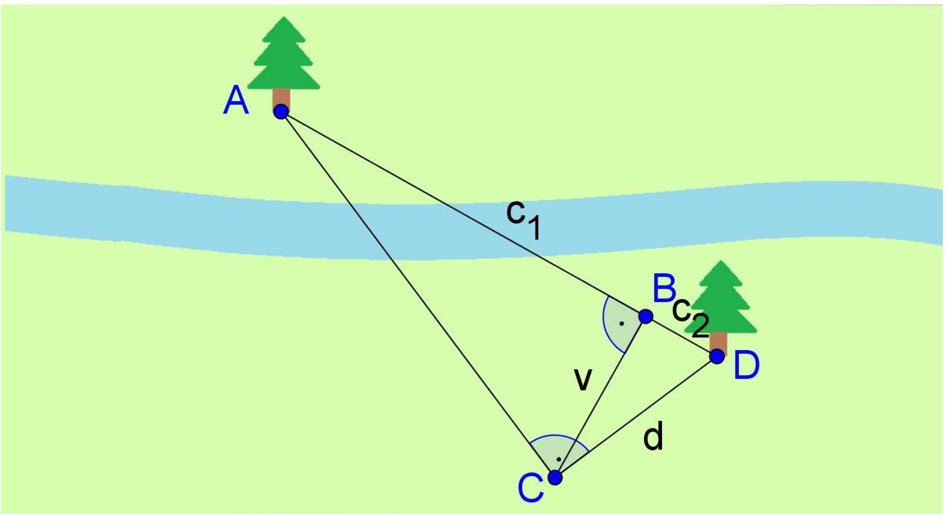
$$k = \frac{x}{y}$$

Výšku věže dopočítáme snadno tak, že známe velikost úsečky KL a tu vynásobíme koeficientem k.

3.2 Měření vzdálenosti

3.2.1 Měření vzdálenosti pomocí podobnosti trojúhelníků

Může nastat situace, kdy potřebujete zjistit vzdálenost místa, kde se nacházíte od místa, které není dostupné. Ukážeme si příklad měření takovéto vzdálenosti *(obrázek 37)*. Stojíte na kraji řeky a potřebujete vypočítat vzdálenost mezi místem, kde se nacházíte A a stromem na druhé straně řeky B. [21]



Obrázek 37: Vzdálenost dvou bodů I.

Při řešení tohoto příkladu využijeme Euklidovy věty. Vzdálenost AB označíme c_1. Z bodu A vedeme kolmici v a libovolně na této kolmici zvolíme bod C. Spojíme body B a C a vedeme kolmici d v bodě C k přímce BC. Průsečík přímky c_1 a d označíme D. Vzdálenost bodů A a D označíme c_2. Dostali jsme pravoúhlý trojúhelník ACD, v němž známe výšku v, stranu d a část přepony c_2.

Využijeme tedy Euklidovu větu o vlastnostech pravoúhlého trojúhelníka a vzdálenost c_1 vypočítáme následovně:

$$v^2 = c_1 \cdot c_2$$

$$c_1 = \frac{v^2}{c_2}$$

anebo

$$d^2 = (c_1 + c_2) \cdot c_2$$

tedy

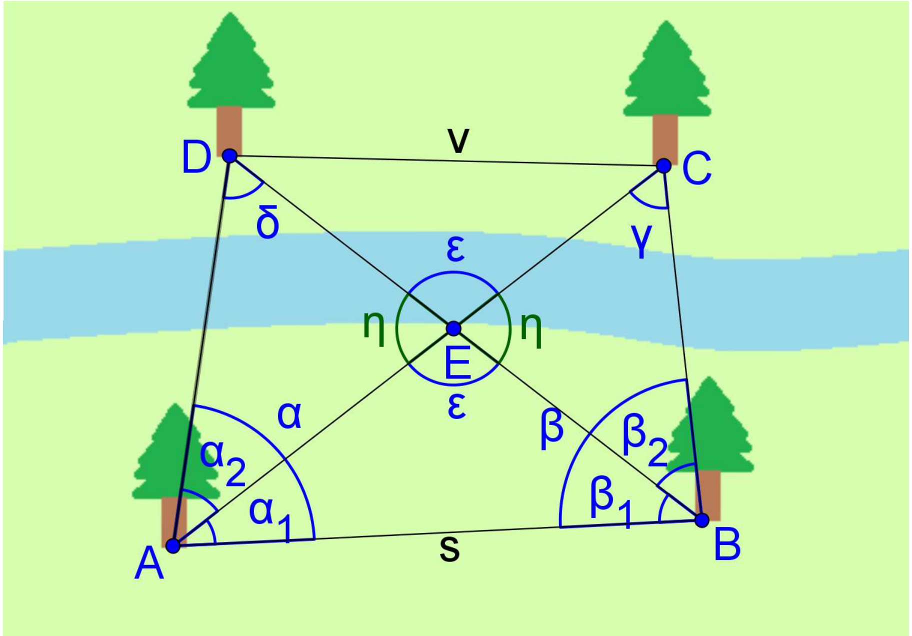
$$c_1 = \frac{d^2}{c_2} - c_2 = \frac{d^2 - c_2^2}{c_2}$$

$$c_1 = \frac{(d - c_2) \cdot (a + c_2)}{c_2}$$

Tuto úlohu můžeme vypočítat i pomocí podobnosti trojúhelníků, podobně jako v předchozích řešeních výpočtů výšky věže. [21]

3.2.2 Měření vzdálenosti pomocí sinové a kosinové věty

Nacházíme se na kraji řeky a potřebujeme vypočítat vzdálenost dvou stromů na druhé straně řeky *(obrázek 38)*. Jak na to? Při řešení využijeme znalost sinové a kosinové věty.



Obrázek 38: Vzdálenost dvou bodů II.

Vybereme si nějaké dva body A a B na našem kraji řeky a dva stromy C a D jejichž vzdálenost chceme vypočítat na druhé straně řeky. Dostáváme tak nepravidelný čtyřúhelník. Nejprve změříme vzdálenost dvou bodů na naší straně. Tuto vzdálenost označíme s. Dále využijeme buzolu a s její pomocí určíme úhly v trojúhelnících ABC (β) a ABD (β_1). To uděláme tak, že si stoupneme do bodu A a nastavíme buzolu na bod B a určíme azimut. Dále nastavíme buzolu na bod C a změříme azimut. Rozdílem těchto dvou azimutů získáme úhel BAC (α_1). Stejným způsobem zjistíme úhel ABC (β). Nyní už jen dopočteme úhel ACB (γ) pomocí znalosti, že součet vnitřních úhlů trojúhelníka je $180°$.

V druhém trojúhelníku zjistíme také všechny úhly stejným způsobem. Průsečíkem E stran AC a BD dostáváme další čtyři různé trojúhelníky ABE, BCE, CDE a ADE. Úhel AEB (ϵ) je shodný s úhlem CED (ϵ). Jeho velikost zjistíme z trojúhelníku ABE, protože dva úhly již známe. Úhly BEC (η) a AED (η) zjistíme odečtením úhlů AEB (ϵ) a CED (ϵ) od $360°$ a tento výsledek vydělíme dvěma.

Když už známe všechny potřebné úhly, můžeme začít používat sinové věty. Začneme s trojúhelníkem ABE. V tomto trojúhelníku známe všechny úhly a jednu stranu. Dopočítáme tedy zbylé strany $|AE|$ a $|BE|$.

Strana $|AE|$:

$$\frac{|AB|}{\sin \varepsilon} = \frac{|AE|}{\sin \beta_1}$$

$$|AE| = \frac{|AB|}{\sin \varepsilon} \cdot \sin \beta_1 \tag{8}$$

Strana $|BE|$:

$$\frac{|AB|}{\sin \varepsilon} = \frac{|BE|}{\sin \alpha_1}$$

$$|BE| = \frac{|AB|}{\sin \varepsilon} \cdot \sin \alpha_1 \tag{9}$$

V trojúhelníku AED známe opět jednu stranu a všechny úhly.

Strana $|DE|$:

$$\frac{|AE|}{\sin \delta} = \frac{|DE|}{\sin \alpha_2}$$

$$|DE| = \frac{|AE|}{\sin \delta} \cdot \sin \alpha_2 \tag{10}$$

V trojúhelníku BCE známe všechny úhly a jednu stranu.

Strana $|CE|$:

$$\frac{|BE|}{\sin \gamma} = \frac{|CE|}{\sin \beta_2}$$

$$|CE| = \frac{|BE|}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta_2 \tag{11}$$

V trojúhelníku CDE potřebujeme vypočítat stranu $|CD|$ a známe dvě strany a jeden úhel proti straně $|CD|$. Proto použijeme kosinovou větu:

$$|CD|^2 = |CE|^2 + |DE|^2 - 2bc \cos \varepsilon$$

$$|CD| = \sqrt[2]{|CE|^2 + |DE|^2 - 2bc \cos \varepsilon}$$

Tímto řešením jsme dosáhli takového vzoru, podle kterého spočítáte vzdálenost dvou míst, ke kterým se nedostanete. Jelikož jsme neznali ani vzdálenost míst na našem břehu, ani úhly k jednotlivým stromům, počítali jsme tento příklad jen s neznámými. Pro výpočet už bude snadné jen dosazovat jednotlivé naměřené vzdálenosti a úhly a dojdete snadno k hledanému výsledku vzdálenosti dvou míst. [21]

3.3 Měření obsahu a objemu

Příklad 10 Vaše rodina se rozhodla, že si nechá předělat střechu, jelikož chcete získat více prostoru. Místo vaší rovinné střechy jste se rozhodli pro střechu sedlovou. Váš dům má rozměry 10×10 metrů a sklon střechy chcete mít $30°$. Vypočítejte, o kolik m^3 se Vám zvětší prostor v domě.

Řešení:

Pro výpočet objemu střechy využijeme následující vztah:

$$V = S_p \cdot v = \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot v$$

Dopočítáme si stranu v_a pomocí pravoúhlého trojúhelníka ADC.

$$\mathrm{tg}(30) = \frac{\mathrm{v_a}}{\frac{\mathrm{a}}{2}}$$

$$v_a = \mathrm{tg}(30) \cdot \frac{\mathrm{a}}{2}$$

$$v_a = \mathrm{tg}(30) \cdot 5 = 2.89 \text{ m}$$

Nyní už můžeme dosadit do vztahu pro výpočet objemu.

$$V = S_p \cdot v = \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot v = \frac{10 \cdot 2.89}{2} \cdot 10 = 144.5\mathrm{m}^3$$

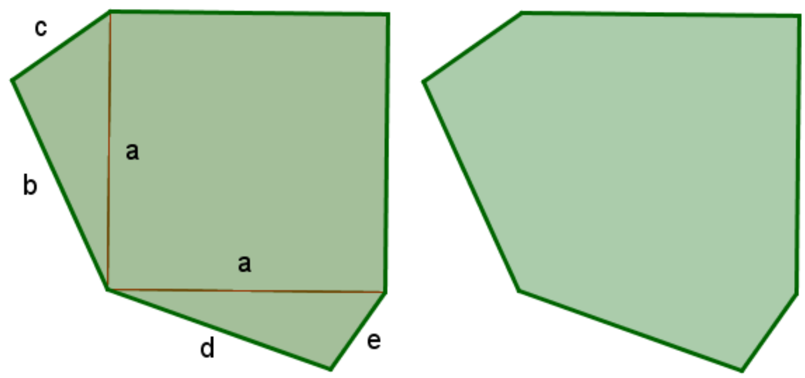
Prostor v domě se nám zvětší o $144.5\mathrm{m}^3$.

□

Příklad 11 Spočítejte obsah plochy zahrady *(obrázek 40)*, která má velmi nepravidelný tvar a nemůžete ho vypočítat s pomocí vzorečku.

Řešení:

- Tuto plochu dokážeme spočítat s pomocí GPS. Ta má v sobě zabudovanou funkci s názvem "Výpočet plochy". Nejprve se postavte na kraj plochy, kterou chcete změřit. Následně klikněte na "Výpočet plochy", a dále na "Start", a poté projděte obvod zahrady. Po dokončení výměru plochy a vrácení se do původního místa stiskněte "Vypnout" a "Uložit prošlou trasu". Výpočet plochy se Vám objeví na GPS a u této výměry můžete změnit ihned i jednotky obsahu.
- Co budete dělat, když nebudete mít k dispozici GPS? Musíte si plochu zahrady rozdělit na útvary *(obrázek 40)*, jejichž obsah dokážete spočítat. Konkrétně tuto zahradu můžete rozložit na čtverec a dva trojúhelníky. Obsah čtverce, ve kterém znáte délky stran, spočítáte snadno. Obsahy trojúhelníků, ve kterých znáte všechny strany, dokážete také spočítat.



Obrázek 40: Zahrada

K tomu vám poslouží **Heronův vzorec**, jehož předpis je:

$$S = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}, \tag{12}$$

kde

$$s = \frac{a+b+c}{2} \tag{13}$$

a a, b, c jsou strany trojúhelníka.

Tímto způsobem byste dopočítali obsah dvou trojúhelníků a s přičtením obsahu čtverce by vám vyšel obsah celé zahrady.

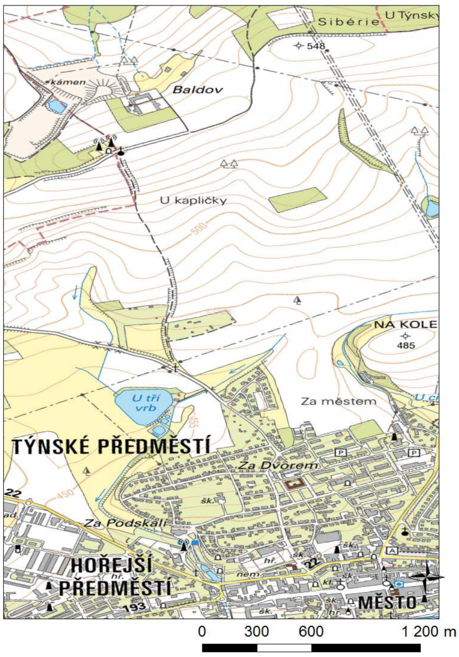
□

3.4 Vrstevnice

Členitost reliéfu na mapě udávají ***vrstevnice***. To jsou uzavřené linie, které reprezentují místa se stejnou nadmořskou výškou. V mapě se s nimi setkáte v podobě černé tenké čáry a kóty, která značí nadmořskou výšku. Každá vrstevnice obsahuje kótu, ale ne u všech je uvedená. Proto si musíte vypočítat rozdíl dvou vrstevnic označených nadmořskou výškou a rozpočítat výškový stupeň - ekvidistanci. Díky vrstevnicím si dokážeme představit členitost terénu a díky tomu naplánovat procházku.

Příklad 12 Vašim úkolem je naplánovat trasu od Gymnázia na Baldov. Zjistěte pomocí mapy, o jak velké převýšení se bude jednat. Výsledek si ověříte v druhém úkolu pomocí GPS.

Řešení: Vezmeme si mapu *(obrázek 41)* a podíváme se na měřítko. Zjistíme, kolik cm na mapě odpovídá cm ve skutečnosti.



Obrázek 41: Mapa trasy - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky(2016)

Na mapě najdeme dva body, jejichž vzdálenost chceme zjistit. Změříme vzdálenost na mapě a zaznamenáme si ji. Tuto vzdálenost převedeme do skutečné vzdálenosti. Nyní máme dvě možnosti, jak určit graf převýšení pomocí mapy. Vytvoříme si *tabulku 2* a do ní budeme zaznamenávat nadmořskou výšku například každých 300 metrů. Tabulka bude mít 2 řádky a n sloupců. Do prvního řádku budeme zaznamenávat hodnoty x po 300 metrech a do druhého řádku hodnoty y tedy nadmořskou výšku. Jak zjistíme hodnoty pro nadmořskou výšku? Podíváme se do mapy a zjistíme ekvidistanci. Dále zjistíme, na jaké vrstevnici se nachází gymnázium a tuto hodnotu zaneseme do tabulky. Další hodnotou bude vzdálenost 300 metrů od gymnázia. Na mapě představuje $300\ \mathrm{m}$ ve skutečnosti $x\ \mathrm{cm}$. Tudíž naměříme $x\ \mathrm{cm}$ a zjistíme nadmořskou výšku. Takto budeme pokračovat až k Baldovu.

Tabulka 2: Ukázka tabulky pro graf převýšení I.

vzdálenost [km]	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8
nadmořská výška [m n. m.]	430	450	465	460	470	490

Máme-li hotovou tabulku není nic jednoduššího, než zaznamenat zjištěné uspořádané dvojice do grafu.

Druhou, přesnější, ale pracnější, možností je sestrojit si *tabulku 3*, do které budeme opět zadávat vzdálenost od gymnázia k Baldovu a do druhého řádku budeme zapisovat hodnoty pro nadmořskou výšku. Nejprve zapíšeme nadmořskou výšku gymnázia. Vezmeme pravítko a změříme vzdálenost na mapě k první vrstevnici. Napíšeme si vzdálenost v cm a do druhého řádku výšku vrstevnice. Dále změříme vzdálenost k druhé vrstevnici a opět nadmořskou výšku. Stejný postup budeme provádět až k Baldovu. Graf znázorněný touto metodou najdete na *obrázku 42*.

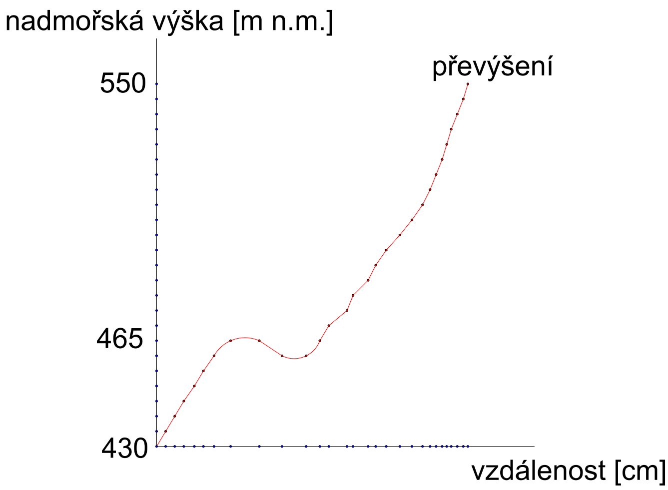
□

Tabulka 3: Ukázka tabulky pro graf převýšení II.

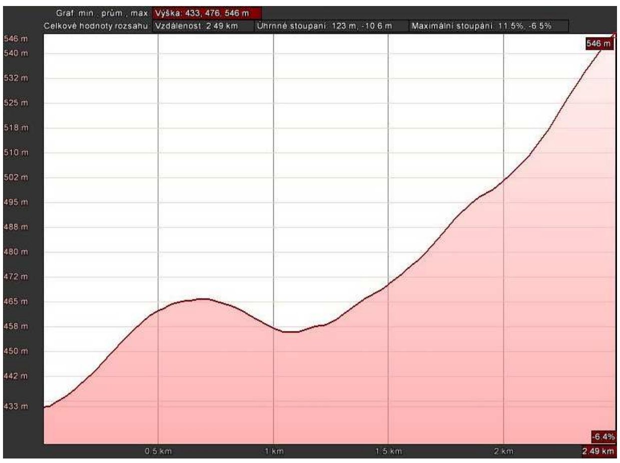
vzdálenost [cm]	0	0.7	0.6	0.5	0.7	0.6
nadmořská výška [m n. m.]	430	435	440	445	450	455

Rozdíl mezi první a druhou možností, jak určit graf převýšení, je v přesnosti. Pokud budete dělat graf převýšení druhou možností, graf bude přesnější, ale pracnější, protože do grafu zakreslíte všechny vrstevnice. V první možnosti se vám může stát, že nějakou vrstevnici přeskočíte.

Pokud máte hotovou procházku v Google Earth dáte pouze ”Upravit” a ”zobrazit výškový profil”. Graf převýšení se Vám sám vygeneruje jako na *obrázku 43*.



Obrázek 42: Graf převýšení pomocí mapy



Obrázek 43: Graf převýšení pomocí Google Earth

4 Praktická část

Trasa je vedena od Gymnázia přes Hánův park ke Třem vrbám, na Baldov a zpět ke Gymnáziu *(obrázek 44)*. Žáci budou měřit výšky, vzdálenosti, objemy a obsahy různým způsobem. Naučí se pracovat s vrstevnicemi a GPS. Pomocí GPS lokalizují všechna místa, kde budou provádět měření.

Obrázek 44: Trasa druhé procházky - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky(2016)

4.1 Přesun do Hánova parku

V Hánově parku dojdou žáci až ke schodům pod kostelem. Schody jsou dlouhé 9 m, Dolní schod leží na úrovni 440 m n. m. a horní schod na 444 m n. m.. Žáci mají zjistit, jaký by měl být spád schodů a výška jednoho schodu, aby se na schodech nevyskytovala žádná podesta, přičemž schodů by mělo být 30.

Dalším úkolem je zjistit, jak se změní spád schodů, pokud umístí do schodů 2 podesty, když každá má délku 1.5 m a počet schodů je 21?

4.2 Vrbova ulice

V tomto úkolu mají vypočítat kolik střešní krytiny budou potřebovat na střechu rodinného domu. Dům má rozměry 10×10 metrů a majitelé by chtěli sedlovou střechu se sklonem $30°$.

4.3 Zahrady u rybníka

Žáci vypočítají vzdálenost od místa, kde stojí, ke stromu v zahrádce.

4.4 U Tří vrb

V dalším úkolu mají zjistit plochu rybníka U Tří vrb.

4.5 Přesun na Baldov

Na Baldově je postaven nový kalich. Žáci mají zjistit jeho výšku jakýmkoliv postupem, jaký jsme si uváděli v teoretické části.

Dodatečným úkolem bude zkusit vypočítat objem kalicha.

Spodní část má průměr $300\ \mathrm{cm}$, prostřední $145\ \mathrm{cm}$ a vrchní $300\ \mathrm{cm}$. Výška jednoho prstence je $18\ \mathrm{cm}$ a prstenců je celkem 31.

4.6 Google Earth

Posledním úkolem je zdokumentovat procházku v Google Earth. To žáci udělají ve škole nebo doma po domluvě s vyučujícím.

Část III

Třetí procházka

Cílová skupina

Třetí procházka je určena pro žáky 3. ročníků SŠ (sedmého ročníku osmiletého studia, pátého ročníku šestiletého studia a třetího ročníku čtyřletého studia na gymnáziu). Žáci by měli znát geometrická zobrazení, tj. identitu, osovou souměrnost, posunutí, středovou souměrnost, otočení, stejnolehlost, shodná a podobná zobrazení.

Cíl

Tato procházka je zaměřena na geometrii. Cílem procházky je využít poznatky o geometrických zobrazeních a pokusit se najít jejich využití v přírodě, na dlážděních a na budovách.

Motivace

Díky této procházce si žáci uvědomí, že geometrická zobrazení se využívají v různých oborech jako například v architektuře nebo strojírenství. Naučí se používat geometrická zobrazení.

Časová náročnost

Na teoretickou část je nutné vyhradit alespoň dvě vyučovací hodiny a na praktickou část také dvě vyučovací hodiny.

Pomůcky

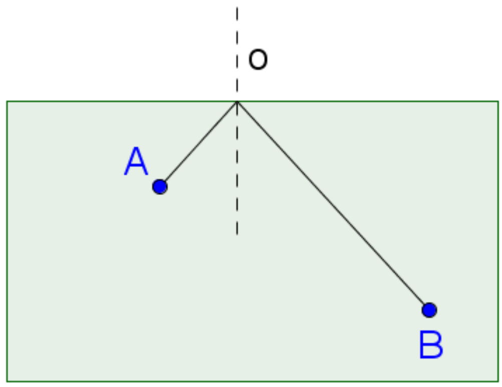
Na tuto procházku je potřeba papír, tužka, GPS, fotoaparát a mapa určená pro třetí procházku.

5 Teoretická část

V této procházce se půjdeme podívat do centra Domažlic. Budeme si všímat geometrických zobrazení v na budovách a na dlážděních. Už byste měli znát pojmy jako shodná a podobná zobrazení nebo středová a osová souměrnost, otočení, posunutí nebo stejnolehlost. Pokud se ale najde někdo, kdo by si rád zopakoval geometrická zobrazení, může se podívat do přílohy, kde najde vše podrobně vysvětlené. V této části se zaměříme na opakování jednotlivých zobrazení a příkladů k nim určených.

5.1 Osová souměrnost

Známým případem konstrukčního využití osové souměrnosti je kulečník. Abychom dostali kouli z místa A do místa B odrazem o mantinel, využíváme osovou souměrnost. Musí platit, že úhel dopadu koule na mantinel se musí rovnat úhlu odrazu *(obrázek 45)*.



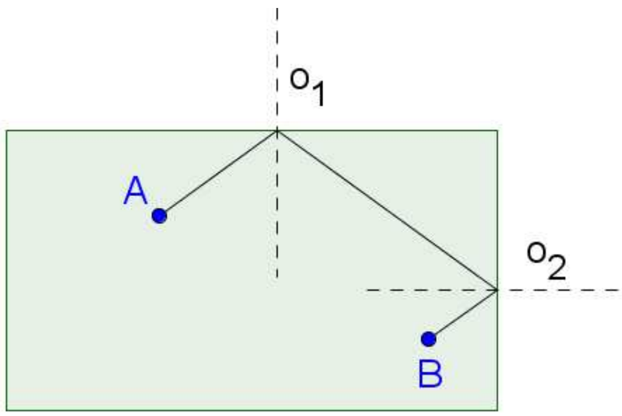
Obrázek 45: Kulečník

Příklad 13 Určete dráhu koule, která se má dostat z bodu A do bodu B (koule se nacházejí na stejných místech jako na obrázku 45) dvojitým odrazem o mantinel. Do obrázku zakreslete i osové souměrnosti a dráhu pohybu koule.

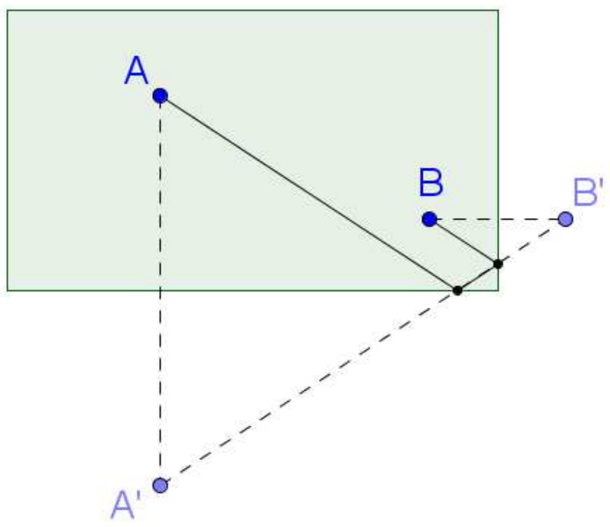
Řešení:

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby:

První způsob:



Obrázek 46: První způsob řešení



Obrázek 47: Druhý způsob řešení

Druhý způsob:

□

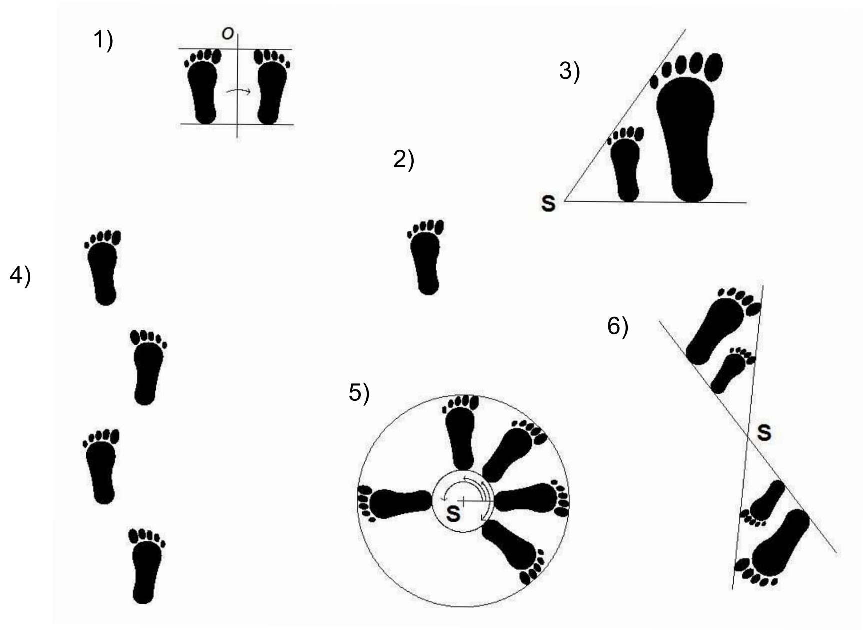
Příklad 14 Určete, kolik lze nalézt osových souměrností na (nakreslete i náčrtek):

čtverec	....
pravoúhlý trojúhelník	....
rovnoramenný trojúhelník	....
rovnostranný trojúhelník	....
obdélník	....
kruh	....

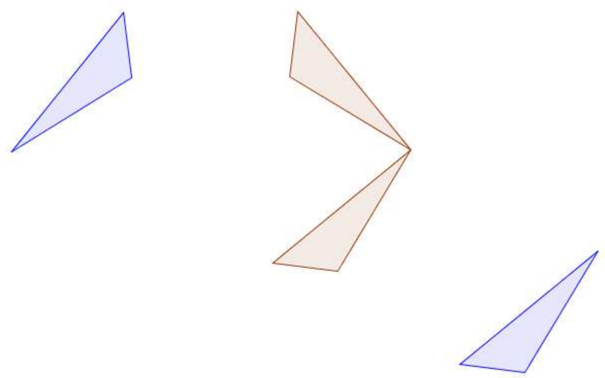
Příklad 15 Na obrázku 48 jsou zobrazení očíslovaná od 1 do 6. Přiřaďte správně jednotlivá zobrazení k obrázkům.

Identita	....
Posunutí	....
Osová souměrnost	....
Středová souměrnost	....
Otočení	....
Stejnolehlost	....
Shodná zobrazení	....
Podobná zobrazení	....

Příklad 16 Rozhodněte, jaká geometrická zobrazení byla použita k přemístění modrého trojúhelníku na druhý modrý trojúhelník. Zakreslete tato zobrazení do *obrázku 49*.



Obrázek 48: Příklad 15 na geometrická zobrazení



Obrázek 49: Řešení příkladu 16 na procvičení zobrazení

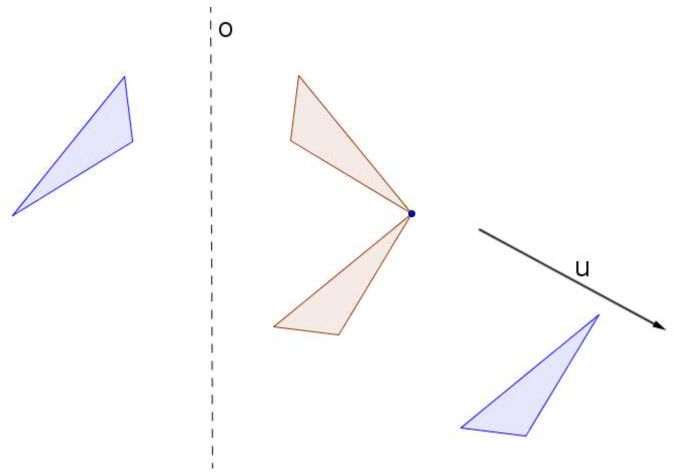
Řešení:

Pro přemístění modrého trojúhelníku byla nejprve využita osová souměrnost. Poté rotace o $90°$ a nakonec posunutí o daný vektor **u** *(obrázek 50)*.

□

5.2 Mozaiky

Shodná zobrazení se využívají při vytváření pravidelných mozaik a dláždění. Umění navrhování mozaik a dláždění má dlouhou historii, a proto je velmi dobře popsané. Mozaiky patří mezi nejstarší umělecké techniky, které byly známy již ve 4. tisíciletí př. n. l.



Obrázek 50: Řešený příklad na procvičení zobrazení

v Mezopotámii. Byly tvořeny drobnými barevnými kamínky, které byly vykládány do různých geometrických útvarů, případně do zvířecích motivů a sloužily ke zdobení podlah a stěn. Využívaly se i mozaiky keramické, například k výzdobě Ištářiny brány. V antickém Římě ve 2. a 3. století byla používána kamenná mozaika k výzdobě podlah. V 5. a 6. století byla uplatňována skleněná figurální mozaika především na stěnách a klenbách bazilik a chrámů. V románském období se začala objevovat vitráž, což je skleněná plocha tvořená různobarevnými dílky skla, pomocí které zasklívali vysoká okna kostelů. Ve 20. století se začali mozaikám věnovat i matematici. Již staří Egypťané znali všechny typy symetrického pokrytí roviny libovolnými obrazci. Samotného vrcholu dokonalosti pak dosáhli Maurové.

Mozaika je způsob, jak zaplnit rovinu shodnými tvary bez přesahů nebo mezer. Termín dláždění je někdy používán k popisu speciální mozaikové roviny s použitím jednoho rovinného polygonu. Všimněme si, že výrazy mozaika a dláždění jsou často používány zaměnitelně. Existuje mnoho typů mozaik. Například libovolný trojúhelník a jakýkoli libovolný čtyřúhelník mohou být použity pro rovinné dláždění. Pokud bychom chtěli, aby dlaždice byla pravidelným mnohoúhelníkem, dláždění nazýváme pravidelnými mozaikami. [24]

Příklad 17 Zkuste se zamyslet, jakými pravidelnými n-úhelníky byste mohli pokrýt rovinu tak, aby mezi nimi nevznikla žádná prázdná místa.

Řešení: Musíme si uvědomit, že výsledkem by měly být pouze přirozená čísla. Nejprve si napíšeme vztah pro výpočet součtu vnitřních úhlů n-úhelníka. Pro tento vztah platí

$$s_n = (n-2)\pi \tag{14}$$

Dále víme, že každý vnitřní úhel pravidelného n-úhelníka má velikost

$$u_n = 2\pi \div \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{2n}{n-2} \tag{15}$$

Protože se ve jakémkoliv vrcholu musí dotýkat k mnohoúhelníků, musí platit:

$$k = 2\pi \div \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{2n}{n-2} \tag{16}$$

Tedy:

$$\frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}, \tag{17}$$

k je přirozené číslo pro

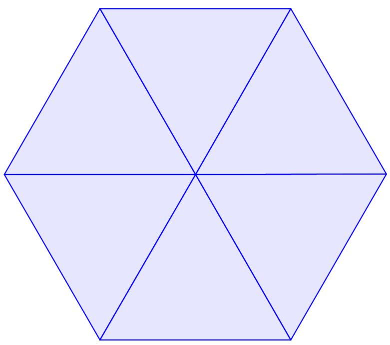
$$\begin{aligned} n &= 3, \text{ potom je } k = 6, \\ n &= 4, \text{ potom je } k = 4, \\ n &= 6, \text{ potom je } k = 3. \end{aligned}$$

Žádná jiná přirozená čísla n nemůžeme brát v úvahu. Dosazením do

$$2 + \frac{4}{n-2}, \tag{18}$$

bychom dostali číslo racionální, což je v rozporu s naším předpokladem. (Dosazením $n = 5$, potom je $k = \frac{10}{3}$, což není přirozené číslo. Z tohoto důvodu nemůžeme pokrýt rovinu pětiúhelníky. Pro $n \geq 7$, nebude nikdy výsledkem přirozené číslo.) [35]

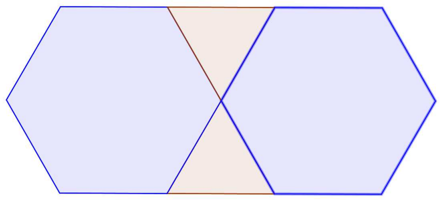
Přestože nám vyšlo, že rovinu můžeme pokrývat pouze 3 typy pravidelných mnohoúhelníků, čili rovnostrannými trojúhelníky *(obrázek 51)*, čtverci nebo pravidelnými šestiúhelníky, v další části se dozvíme, že kombinací těchto útvarů budeme moci rovinu pokrývat taktéž.



Obrázek 51: Pravidelná mozaika

□

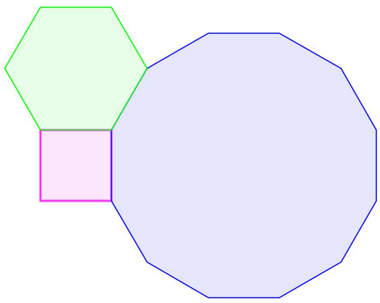
V případě mozaik, které používají dva nebo více různých pravidelných mnohoúhelníků přidáváme pravidlo, že každý vrchol musí mít přesně stejnou tzv. konfiguraci. To znamená, že v každém vrcholu musí být stejný počet a stejný sled stejných pravidelných mnohoúhelníků. Mozaiky, kde jsou splněna tato pravidla nazýváme polopravidelnými *(obrázek 52)*. [13]



Obrázek 52: Polopravidelná mozaika

Tato polopravidelná mozaika *(obrázek 52)* má konfiguraci 3.6.3.6.

Chceme-li pojmenovat různé typy mozaiek, napíšeme jejich konfiguraci vrcholů. Například, jeli v každém vrcholu čtverec, pravidelný šestiúhelník a pravidelný dvanáctiúhelník, zapíšeme konfiguraci 4,6,12 *(obrázek 53)*.

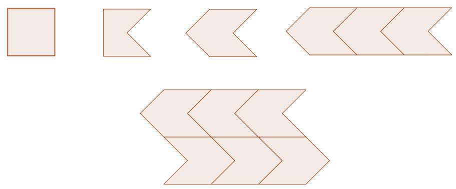


Obrázek 53: Konfigurace 4, 6, 12

Mozaikami, jako shodným zobrazením, se zabýval Maurits Cornelius Escher (1898-1958). Zaobíral se problematikou grup rovinných symetrií. V letech mezi 1936 - 1942 zhotovil 43 barevných kreseb založených na pravidelně se opakujících vzorech. [24]

Příklad 18 Vašim úkolem bude nyní vytvořit libovolnou mozaiku z polopravidelných n-úhelníků a napsat její konfiguraci.

Příklad 19 Tento příklad je pro dobrovolníky. Pokuste si zahrát na M. C. Eschera a vytvořte unikátní mozaiku, která nebude tvořena pouze trojúhelníky, čtverci nebo šestiúhelníky. Pokud nevíte jak na to, napoví vám *obrázek 19*.

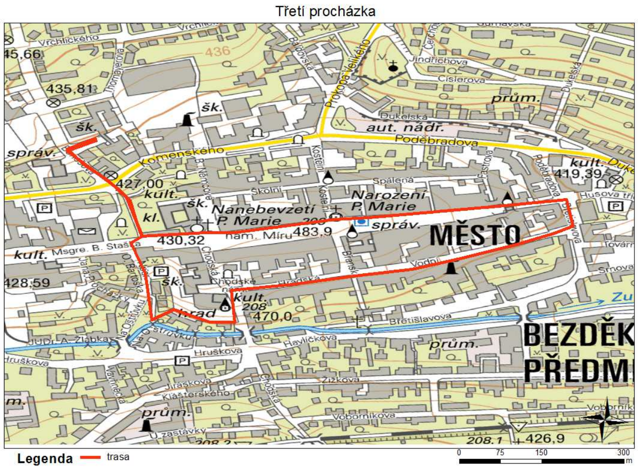


Obrázek 54: Příklad mozaiky

Nejprve si vytvoříme pravidelný n-úhelník, kterým budeme chtít pokrýt rovinu. V našem případě se jedná o čtverec. Z tohoto čtverce vyřízneme část a tu přiložíme na protější stranu tak, aby nám nechyběla. Nyní využijeme posunutí a hotové objekty vložíme za sebe. V poslední řadě využijeme buď osovou souměrnost nebo v našem případě rotaci a zaplníme rovinu.

6 Praktická část

Trasa procházky *(obrázek 55)* povede od gymnázia na náměstí, odtud pod hrad a zpátky ke Gymnáziu. K dispozici budou mít žáci GPS, pomocí níž lokalizují všechna místa, kde budou řešit úkoly.



Obrázek 55: Trasa třetí procházky - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky (2016)

6.1 Česká pošta

Budova České pošty v Domažlicích je velmi zajímavá svou souměrností. Proto zde budou žáci určovat osy souměrnosti. Na budově je vidět minimálně ještě jedno zajímavé zobrazení, kterého si jistě žáci všimnou. I toto zobrazení musí žáci zakreslit do pracovního listu. Východní bokorys budovy najdou žáci ve svých pracovních listech, kam zakreslí osy souměrnosti a další zobrazení.

6.2 Ornament u kostela

Tento úkol budou mít žáci u Klášterního kostela Nanebevzetí Panny Marie. Na bráně do zahrady je krásný pravidelný ornament, kde žáci budou muset určit opět osy souměrnosti a rotaci.

6.3 Dláždění na náměstí

Na náměstí mají žáci najít nějaký druh mozaiky.

6.4 Kašna

Dalším úkolem je najít alespoň dvě geometrická zobrazení na kašně. Pokud žáci nějaká najdou, mají popsat jaká našli.

6.5 Lidový dům

Na lidovém domě, který se nachází na náměstí bude si všimnout mozaiek na domě a určit osy souměrnosti.

6.6 Dveře na domě

Na těchto dřevěných dveřích je pěkný vzor, který je opět nějak souměrný. Úkolem je určit na dveřích alespoň tři geometrická zobrazení.

6.7 Altánek pod hradem

Střecha altánku je velmi pravidelná, jaká geometrická zobrazení mohou žáci pozorovat? Úkolem je najít tři zobrazení.

6.8 Schodiště

Jaké zobrazení se ukrývá ve schodišti? Patří toto zobrazení do shodného nebo podobného zobrazení? Své tvrzení mají žáci odůvodnit.

6.9 Google Earth

Posledním úkolem je zdokumentovat procházku v Google Earth. To žáci udělají ve škole nebo doma po domluvě s vyučujícím.

Část IV
Čtvrtá procházka

Cílová skupina

Čtvrtá procházka je určena pro žáky sedmého ročníku osmiletého studia, pátého ročníku šestiletého studia a třetího ročníku čtyřletého studia na gymnáziu.

Cíl

Cílem procházky je využít znalosti z geometrie, kterou se doposud žáci učili a seznámit žáky geometrii rotačních ploch. Hlavním cílem je, aby si žáci po skončení procházky uvědomovali, k čemu slouží rotační plochy, a že jsou využívány v mnoha různých oborech.

Motivace

Žáci se naučí jinou geometrii, než na jakou byli doposud zvyklí. Procházka je zaměřena na rotační plochy, tudíž žáci zjistí, že rotační plochy nás obklopují skutečně všude kolem nás a jsou využívány v mnoha oborech.

Časová náročnost

Na teoretickou část je nutné vyhradit tři vyučovací hodiny a na praktickou část také tři vyučovací hodiny.

Pomůcky

Na procházku je potřeba papír, tužka, GPS, fotoaparát a mapu určená pro čtvrtou procházku.

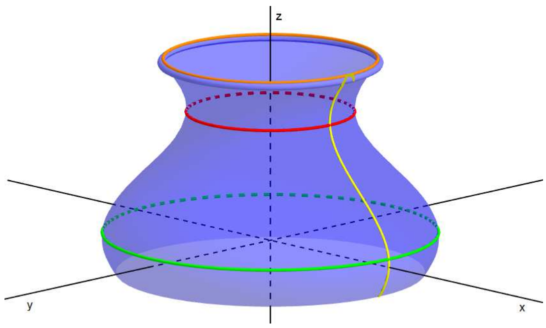
7 Teoretická část

Tato procházka bude poměrně dlouhá, a proto uvidíte spoustu rotačních ploch. Pro jejich popis se však budeme muset seznámit s geometrií, kterou ještě neznáte. Začneme tedy nejprve s rotačními plochami.

7.1 Rotační plochy

Mezi rotační plochy řadíme plochy, které vznikají rotací tzv. **tvořící křivky** k kolem přímky o a té říkáme **osa rotace**. Předpokladem je, že tvořící křivka k nesplývá s osou rotace o a není na ni ani kolmá. Rotační plochy jsou souměrné podle osy rotace.

Vezmeme-li libovolný bod A na tvořící křivce k a touto křivkou rotujeme kolem osy rotace o, bod A opíše tzv. **rovnoběžkovou kružnici**. Existují tři speciální názvy pro rovnoběžkovou kružnici tzv. **rovník**, **hrdlo** a **kráter** *(obrázek 56)*. Rovník je rovnoběžková kružnice, která má ze všech okolních rovnoběžek největší poloměr. Přesněji řečeno, tečny podél této rovnoběžky tvoří rotační válcovou plochu a poloměr je lokálním maximem. Hrdlo je rovnoběžková kružnice, která má na rozdíl od rovníku poloměr s lokálním minimem. Je to kružnice, která má nejmenší poloměr. Kráter je rovnoběžková kružnice podél které tečny tvoří rovinu. [17]



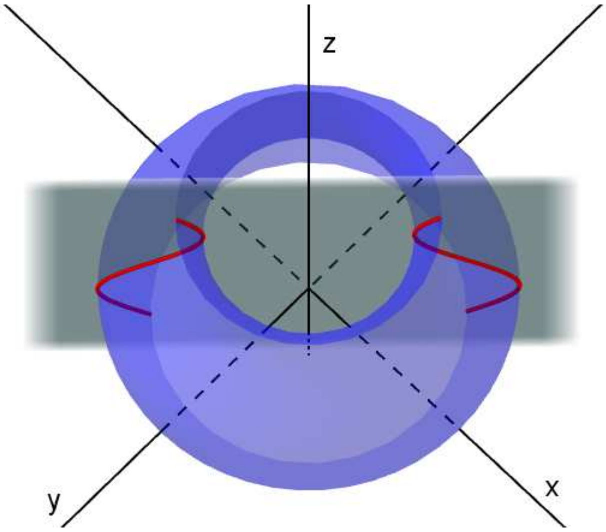
Obrázek 56: Rovník, hrdlo a kráter

Žlutá barva značí tvořící křivku, oranžová kráter, červená hrdlo a zelená rovník.

Dalším důležitým pojmem u rotačních ploch je tzv. **meridián** (poledník) *(obrázek 57)*. Ten vzniká řezem vedeným rotační plochou procházející osou rotace. **Hlavní meridián** je meridián, který má rovinu řezu rovnoběžnou s průmětnou. Protože rovina každého meridiánu prochází osou rotace, je podle ní plocha souměrná. [17]

Rotační plochy dělíme podle tvořící křivky na **přímkové**, **cyklické** a **rotační kvadriky**. Mezi přímkové rotační plochy patří válcová a kuželová plocha a plocha jednodílného rotačního hyperboloidu. Mezi cyklické rotační plochy řadíme například kulovou plochu nebo anuloid a do rotačních kvadrik patří např. elipsoid a paraboloid. Nyní se zaměříme na vznik rotačních ploch. [17]

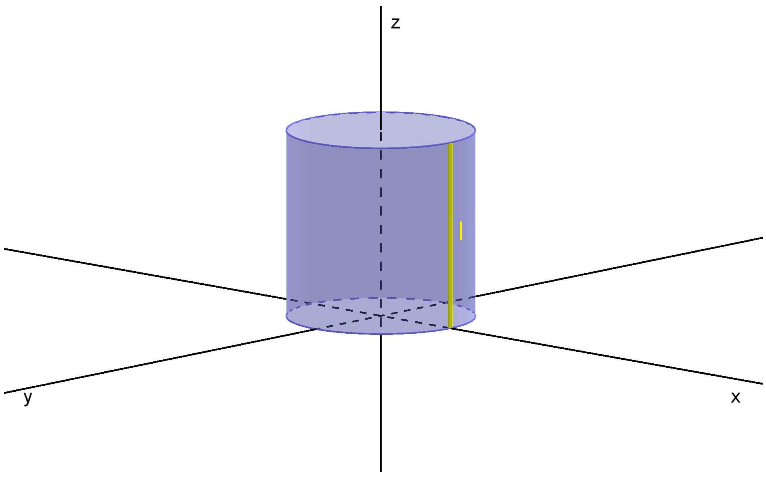
Jako příklad takovýchto ploch si uvedeme **válcovou rotační plochu**, **kuželovou rotační plochu** a **sféru**. Existuje více rotačních ploch, které si zde pouze lehce nastíníme a v praktické části se jimi budeme zabývat více.



Obrázek 57: Meridián

7.1.1 Rotační válcová plocha

Rotační válcovou plochu *(obrázek 58)* vytvoříme rotačním pohybem přímky l rovnoběžné s osou rotace o kolem osy rotace o. Jako osu rotace budeme brát osu z a přímka l bude rovnoběžná s osou rotace.



Obrázek 58: Válcová rotační plocha

Na *obrázku 58* je žlutou barvou znázorněna tvořící křivka. Předpis pro rotační válcovou plochu je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{19}$$

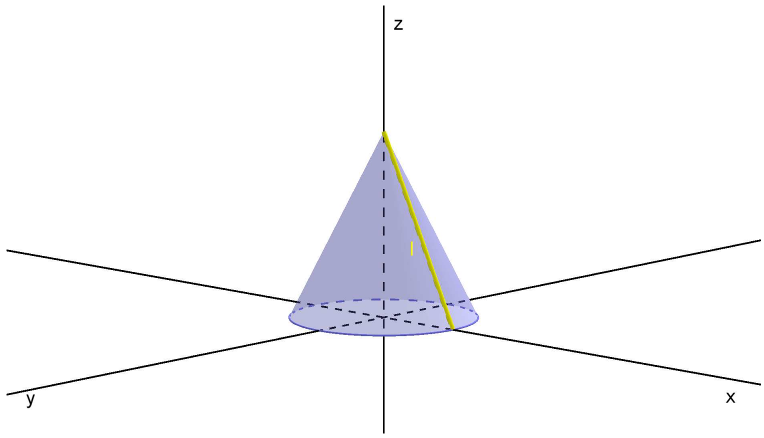
Využití v praxi: Rotační válcové plochy mohou být použity například na sloupy, věže, potrubí nebo okapy.

Příklad 20 Znáte ještě nějaké příklady využití válcové plochy v praxi? Pokuste se vymyslet alespoň další tři.

Příklad 21 Najdete na rotační válcové ploše rovník, hrdlo a kráter? Pokud ano, zakreslete je.

7.1.2 Kuželová rotační plocha

Rotační kuželovou plochu *(obrázek 59)* vytvoříme rotačním pohybem přímky l různoběžné s osou rotace o kolem osy rotace o. Jako osu rotace budeme brát osu z a přímka l bude různoběžná s osou rotace. [17]



Obrázek 59: Kuželová rotační plocha

Na *obrázku 59* je žlutou barvou znázorněna tvořící křivka. Předpis pro rotační kuželovou plochu je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{20}$$

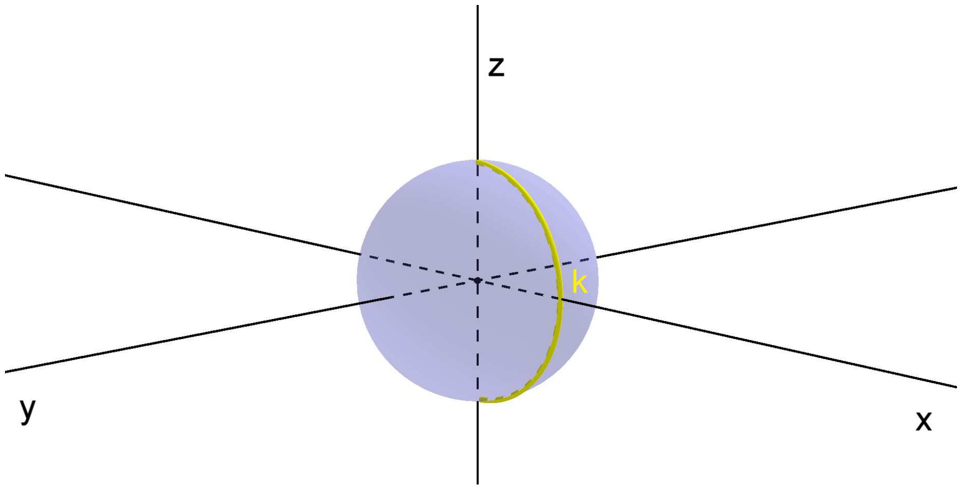
Využití v praxi: Kuželovou plochu známe především z architektury, kde slouží především k zastřešování věží. Pokud jste již někdo navštívil Liberecký kraj, jistě jste zavítali na vysílač nad Libercem, známým pod jménem Ještěd. Spodní část tohoto vysílače má totiž tvar rotační kuželové plochy. Dalšími částmi Ještědu jsou i hyperboloid, který navazuje na kužel, dále anuloid a v horní části nalezneme i rotační válec.

Příklad 22 Znáte ještě nějaké příklady využití kuželové plochy v praxi? Pokuste se vymyslet alespoň další tři.

Příklad 23 Najdete na rotační kuželové ploše rovník, hrdlo a kráter? Pokud ano, zakreslete je.

7.1.3 Kulová plocha

Rotační kulovou plochu *(obrázek 60)* vytvoříme rotačním pohybem kružnice k kolem osy rotace o, přičemž střed kružnice musí ležet na ose rotace. Osa rotačního pohybu musí ležet v rovině tvořící kružnice. Tato kružnice je zároveň meridiánem plochy. [17]



Obrázek 60: Kulová rotační plocha

Na *obrázku 60* je žlutou barvou znázorněna tvořící křivka. Předpis pro rotační kulovou plochu je:

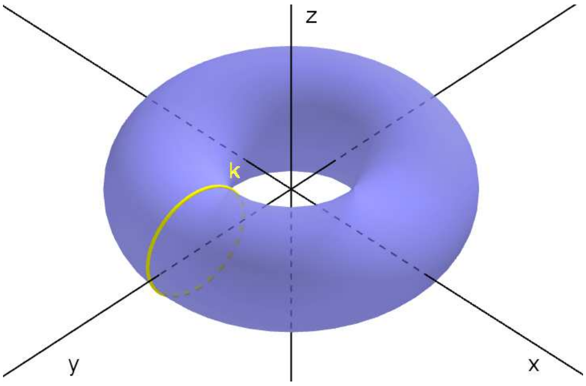
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{21}$$

Využití v praxi: Kulovou plochu využíváme v praxi například v architektuře, strojírenství, ale i v běžných předmětech, které máme doma. Z architektury je nejvíce známa budova Opery v Sydney v Austrálii, kde jsou využívány části kulové plochy k zastřešení budovy. Kulová plocha se využívá i jako zastřešení kostelů a chrámů nebo ve formě nik, což jsou výklenky ve zdech. Jsou většinou polováleového tvaru a v horní části přechází v čtvrtinu kulové plochy. Ve strojírenství se využívá kulová plocha např. na ložiska. Z geografie známe kulovou plochu ve formě glóbu.

7.1.4 Anuloid

Plochu anuloidu *(obrázek 61)* vytvoříme rotačním pohybem kružnice k kolem osy rotace o, přičemž střed kružnice musí ležet mimo osu rotace. Osa rotačního pohybu musí ležet v rovině tvořící kružnice. [17]

Předpis pro plochu anuloidu je čtvrtého stupně, proto ji zde nebudeme uvádět. Podíváme se pouze na využití této plochy v praxi.



Obrázek 61: Anuloid

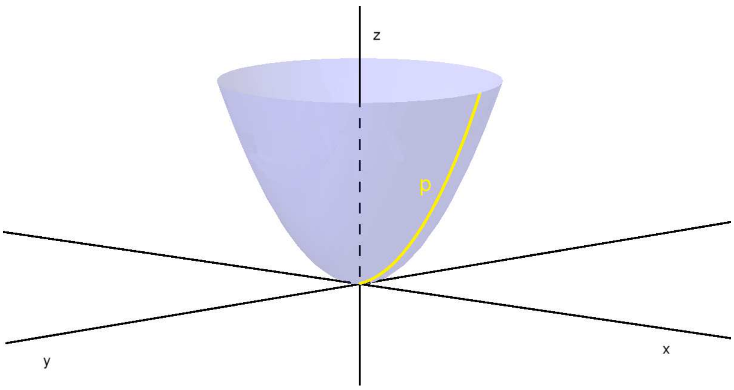
Využití v praxi: Plochu anuloidu využíváme v cyklistice. Ve většině kol jsou duše a ty mají tvar anuloidu. Posilovací kroužek k posílení prstů a předloktí má také tvar anuloidu. Části anuloidu jsou využívány jako přechodové části mezi potrubím.

Příklad 24 Znáte ještě nějaké příklady využití anuloidu v praxi? Pokud ano, jmenujte je.

Příklad 25 Najdete na ploše anuloidu rovník, hrdlo a kráter? Pokud ano, zakreslete je.

7.1.5 Rotační paraboloid

Rotační paraboloid *(obrázek 62)* vytvoříme rotačním pohybem paraboly p kolem osy rotace o, přičemž vrchol tvořící křivky tj. paraboly musí ležet na ose paraboly. Tato osa je zároveň osou rotace. [17]



Obrázek 62: Rotační paraboloid

Na *obrázku 62* je žlutou barvou znázorněna tvořící křivka. Předpis pro rotační paraboloid je:

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \pm z = 0 \tag{22}$$

Využití v praxi: Rotační paraboloid známe např. v podobě satelitních přijímačů nebo jako akustické zrcadlo. Využívá se i v dalekohledech.

Příklad 26 Znáte ještě nějaké příklady využití rotační parabolické plochy v praxi? Pokud ano, jmenujte je.

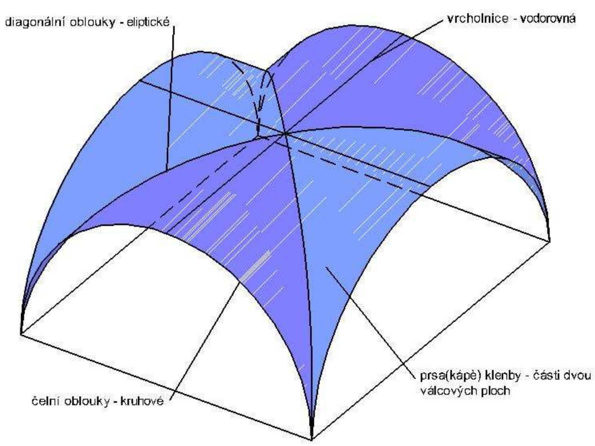
Příklad 27 Najdete na rotačním paraboloidu rovník, hrdlo a kráter? Pokud ano, zakreslete je.

7.1.6 Rotační elipsoid

Rotační elipsoid jsme zmiňovali již v první procházce. Pokuste se definovat plochu rotačního elipsoidu sami a uveďte příklady jeho využití. Dále se pokuste na této ploše najít rovník, hrdlo a kráter. Pokud je najdete, zakreslete je.

7.1.7 Klenby

Počátky vývoje kleneb sahají cca 3300 př. n. l. do říše Sumerů. Na našem území se klenby začaly objevovat až v 9. století. Nejstarší zachovaná klenba se nachází v rotundě sv. Petra na hradišti Budeč, která je právě z konce 9. století. O dvě století později se u nás již objevují valené, křížové *(obrázek 63* - obrázek převzat z [23]) a žebrové klenby. Ve 13-15. století u nás vznikají klenby obkročné, šestidílné, osmidílné, hvězdové, síťové a kroužené. Křížová klenba s kruhovými čely. Koncem 15. století vznikají klenby sklípkové, hřebínkové, hráňové, neckové a zrcadlové klenby. V 17. a 18. století se v architektuře klenby využívají spíše než z důvodu stabilního z důvodu vzhledového. V této době vznikla ještě klenba pruská, ale tím vývoj zdokonalování kleneb končí. [22] Na náměstí v Domažlicích se setkáme s klenbou křížovou.



Obrázek 63: Příklad křížové klenby

Na *obrázku 63* je příklad křížové klenby. Tuto klenbu tvoří dvě části válcových ploch, jejichž osy jsou na sebe kolmé. A průnik těchto ploch tvoří křížovou klenbu. Vaším úkolem bude všimnout si této klenby v Domažlicích. Tento tvar je využíván i jako zastřešování komínů.

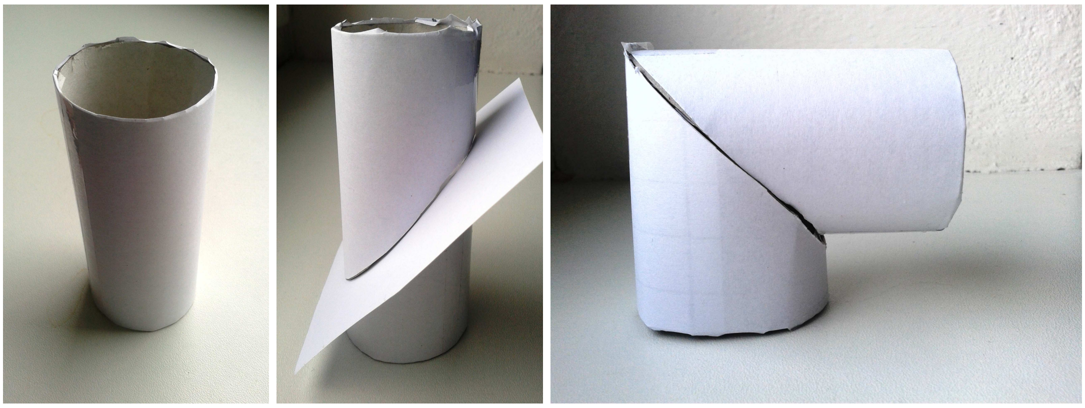
Příklad 28 Jaké kuželosečky vzniknou řezem rotační válcové plochy rovinou v případě, že se jedná o řez kolmý a kosý?

Řešení:

- Jedná-li se o řez kolmý, výslednou kuželosečkou bude kružnice, jejíž střed bude ležet na ose válcové plochy a poloměr kružnice je roven poloměru válcové plochy.
- Jedná-li se o řez kosý, je výsledkem elipsa. Střed elipsy leží také na ose válcové plochy a poloměr vedlejší poloosy je roven poloměru válcové plochy.

□

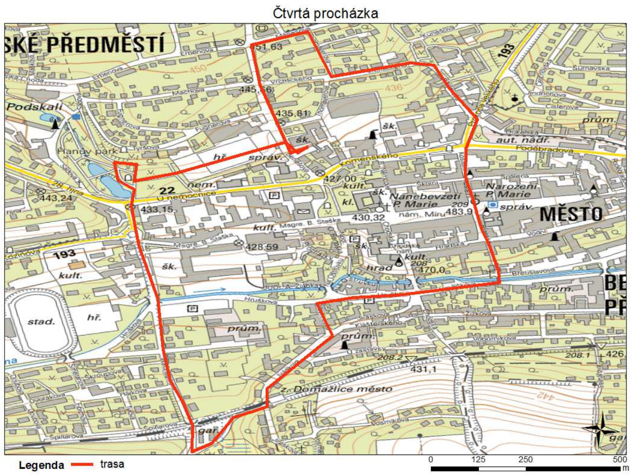
Dalším příkladem průniků válcových ploch jsou například okapy. Na *obrázku 64* si ukážeme řez rovinou válcové plochy.



Obrázek 64: Řez rovinou válcové plochy

8 Praktická část

Čtvrtá procházka *(obrázek 65)* povede od Gymnázia přes Hánův park, Waldhegerovou ulicí až k viaduktu, tudy k vlakovému přejezdu, odtud k budově Hasičů, pod náměstím, dále k Domažlické věži na náměstí, přes autobusové nádraží a zpět ke Gymnáziu. Procházka bude dlouhá 4.5 km. K dispozici budou mít žáci GPS, pomocí níž lokalizují všechna místa, kde budou řešit úkoly.



Obrázek 65: Trasa čtvrté procházky - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky (2016)

Žáci budou mít za úkol hledat geometrické útvary na procházce. Tyto útvary mohou hledat na budovách, v architektuře, schodech a klenbách. Na procházce bude daný určitý počet zastávek s geometrickým útvarem. Pokud se ovšem žák zastaví a uvidí sám nějaký geometrický prvek, který je něčím zajímavý, je dobré se zdržet i na této zastávce a s žáky se pokusit popsat jejich geometrický objekt. Bylo by vhodné ho následně i zařadit na pracovní list. K dispozici budou mít GPS, pomocí níž lokalizují všechna místa, kde budou hledat rotační plochy nebo řešit jiné úkoly.

8.1 Hánův park

První zastávka bude v Hánově parku, protože zde nalezneme mnoho druhů a tvarů záhonů. Prvním úkolem pro žáky bude popsat tvar záhonu a pokusit se vytvořit postup pro vyhotovení tohoto tvaru záhonu bez metru, tužky a kružítka. K dispozici by měli pouze klacek a provázek. Dalším úkolem bude vymyslet, jak sestrojit záhon tvaru elipsy opět s využitím pouze klacíků a provázku.

8.2 Satelitní anténa

V teoretické části byly probírány různé rotační plochy. Žáci mají určit, k jaké rotační ploše patří satelitní anténa a popsat, na jakém fyzikální principu funguje.

8.3 Věž

Zde budou žáci zjišťovat, jaké rotační plochy najdeme na Domažlické věži.

8.4 Vypuklé zrcadlo

Toto zrcadlo patří také mezi rotační plochy. Úkolem žáků bude popsat na jakém principu funguje toto zrcadlo.

8.5 Kostel nanebevzetí panny Marie

V kostele je využíváno taktéž mnoho rotačních ploch. Žáci mají najít některé rotační plochy a pojmenovat alespoň jednu rotační plochu, která je použitá na stropě.

8.6 Podloubí

V teoretické části jsme upozorňovali na křížové klenby na náměstí v podloubí. Žáci si je mají pozorně prohlédnout.

8.7 Erbenova ulice

Na libovolném rodinném domu žáci mají najít rotační válcovou plochu, na které je vidět řez.

8.8 Google Earth

Posledním úkolem je zdokumentovat procházku v Google Earth. To žáci udělají ve škole nebo doma po domluvě s vyučujícím.

Závěr

Cílem diplomové práce „Geometrické procházky“ bylo navrhnout trasy procházek se zaměřením na matematiku a geografii pro žáky středních škol. Jako oblast těchto procházek jsem vybrala Domažlicko a procházky byly určené především pro žáky gymnázia, ale mohou být použity i na jiném druhu střední školy. Tato práce by měla sloužit jako projekt pro dobrovolný kroužek pro nadané studenty. Smyslem každé procházky bylo využít znalosti nabyté ve škole k řešení různých matematických či geografických úkolů.

V teoretických částech jsem se snažila popsat jen důležité a zajímavé učivo, které žáci potřebují k praktické části. Látku, kterou žáci mají znát jsem úmyslně nezařadila do teoretické části, ale zařadila jsem ji do přílohy pro studenty, kteří by si látku chtěli zopakovat. Každou novou látku jsem se snažila vysvětlit na řešených příkladech doplněných o mnoho obrázků.

V praktických částech jsem se zaměřila na samostatnou práci studentů. Snažila jsem se, aby žáci viděli látku probíranou v teoretických částech kolem nich. Dále jsem propojila v každé procházce geometrii s geografií s využitím GPS a Google Earth. Ve škole žáci nemají přístup k geografickému softwaru, proto jsem ho zařadila do procházek.

První procházka byla realizována na Gymnáziu J. Š. Baara a zúčastnilo se jí 9 studentů kvarty. Teoretická část trvala přibližně hodinu a půl, ale pokud by byly příklady řešeny samostatně každým studentem, zabrala by alespoň tři vyučovací hodiny. Praktická část se uskutečnila v Hánově parku a trvala přibližně hodinu a půl. Studenti se většinou zúčastnili i zeměpisných olympiád, proto jejich následné vyjádření k této procházce vnímám jako užitečné. Teoretická část se zdála žákům velice zajímavá, protože v ní bylo mnoho pojmů, které se objevují i v olympiádách. V praktické části měli trochu problémy s GPS, protože většina studentů s ní nikdy nepracovala. Totéž platí i pro Google Earth. Žáci by chtěli, aby tento projekt byl zařazen mezi dobrovolné předměty, protože je bavil a zdál se jim velmi užitečný.

Každou procházku jsem se snažila uchopit jinak. První procházka je spíše geografická s využitím matematiky. Ostatní procházky jsou matematické, ale jsou provázané s využitím geografie. V této práci jsem se zabývala pouze čtyřmi procházkami, ale takovýchto procházek by bylo možné vymyslet ještě několik. Další možná procházka by mohla být zaměřena například na perspektivu, jiné typy zajímavých ploch nebo na druhy a typy půd.

Reference

[1] Geohe: Geografie, geologia. Mapa světa [online]. 2011 [cit. 2016-02-19]. Dostupné z: `http://geohe.webnode.sk/mapa-a-globus`

[2] NOVOTNÁ, Marie, Monika ČECHUROVÁ a Jakub BOUDA. GEOGRAFICKÉ INFORMAČNÍ SYSTÉMY VE ŠKOLÁCH. 1. Plzeň: Aleš Čeněk, s. r. o., 2012. ISBN 978-80-7380-385-8.

[3] PYŠEK, Jiří. KARTOGRAFIE, KARTOMETRIE A MATEMATICKÁ GEOGRAFIE V PŘÍKLADECH. 1. Plzeň: ZČU-Pedagogická fakulta, 1995. ISBN 80-7043-157-1.

[4] GLAESER, Georg. Geometry and its applications in arts, nature and technology. Vídeň: Springer-Verlag, 2012. ISBN 978-3-7091-1450-6.

[5] PYŠEK, Jiří. KARTOGRAFIE A TOPOGRAFIE: I. KARTOGRAFIE. 1. Plzeň: ZČU-Pedagogická fakulta, 1995. ISBN 80-7043-031-1.

[6] PYŠEK, Jiří. KARTOGRAFIE A TOPOGRAFIE: II. KARTOGRAFIE. 1. Plzeň: ZČU-Pedagogická fakulta, 1993. ISBN 80-7043-063-X.

[7] VOŽENÍLEK, Vít. APLIKOVANÁ KARTOGRAFIE I.: TEMATICKÉ MAPY. 2. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2004. ISBN 80-244-0270-X.

[8] VEVERKA, Bohuslav a Růžena ZIMOVÁ. TOPOGRAFICKÁ A TEMATICKÁ KARTOGRAFIE. 1. Praha: ČVÚT, 2008. ISBN 978-80-01-04157-4.

[9] PYŠEK, Jiří. MATEMATICKÁ KARTOGRAFIE: Třída jednoduchých zobrazení. 1. Plzeň: ZČU-Pedagogická fakulta, 1995. ISBN 80-7043-165-2.

[10] POTTMANN, H.; ASPERL, A.; HOFER, M.; KILIAN, A.: Architectual Geometry, Bently Institute Press, 2007. ISBN 978-1-934493-04-5.

[11] URBAN, Alois. Deskriptivní geometrie I. Třetí. Praha: Alfa, 1982. ISBN 04-809-82.

[12] ASKEW, Mike a Sheila EBBUTTOVÁ. Geometrie bez (m)učení. Praha: GRADA, 2012. ISBN 978-80-247-4125-3.

[13] ROBOTOVÁ, Jarmila. Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky. Praha: PROMETHEUS, spol. s. r. o., 2014. ISBN 978-80-7196-445-2.

[14] Svět outdooru.cz: Kompasy a buzoly [online]. KRUPKA, Pavel. 2002 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: `http://www.svetoutdooru.cz/rady/kompasy-a-buzoly/`

[15] Svět outdooru.cz: Kompasy a buzoly [online]. KRUPKA, Pavel. 2002 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: SkautKuim:Buzola[online].2008[cit. 2016-03-08].Dostupnz:http://www.skautkurim.cz/druziny/buzola/

[16] Geometrické vidění světa: Klasické třídy ploch [online]. Plzeň, 2013 [cit. 2016-05-10]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/GVS/texty/L12_Tridy_ploch.pdf. ZČU.

[17] TOMICZKOVÁ, Světlana a František JEŽEK. Geometrie pro FST: Pomocný učební text [online]. Plzeň, 2013 [cit. 2016-05-10]. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/243/.ZŒU.

[18] Rotační plochy v technické praxi [online]. [cit. 2016-05-10]. Dostupné z: http://www.eprojekt.gjs.cz/Services/Downloader.ashx?id=19673

[19] NOVOTNÁ, Marie. Výuka s Google Earth [online]. Plzeň, 2010 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: http://envirogis.fpe.zcu.cz/E-knihovna/zpracovany_material/GIS_2010/GIS_19_Vyuka_s_Google_Earth_2010.pdf. ZČU.

[20] NOVOTNÁ, Marie. Použití GPS [online]. Plzeň, 2010 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: http://envirogis.fpe.zcu.cz/E-knihovna/zpracovany_material/GIS_2010/GIS_41_GPS_2010.pdf. ZČU.

[21] KRÁLÍKOVÁ, Jana. Matematické úlohy v přírodě [online]. Praha, 2010 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120014812. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.

[22] VONDRA, Jan. Geometrie historické klenby [online]. Brno, 2009 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~vondra/vyuka/p2009/sege1/klenby8.pdf. Masarykova univerzita.

[23] HLAVÁČKOVÁ, Ivana. Deskriptivní geometrie a architektura [online]. Praha [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: http://15122.fa.cvut.cz/projekty/grant01/klenby/. ČVUT.

[24] KAŠPÁRKOVÁ, Lenka. Mozaika [online]. Opava, 2011 [cit. 2016-05-13]. Dostupné z: http://www.strojka.opava.cz/UserFiles/File/_sablony/Technologie_grafiky_III/VY_32_INOVACE_B-04-06.pdf

[25] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. 126 s. [cit. 2012-12-26]. Dostupné z:

www<http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf>.

[26] Školní vzdělávací program Gymnázium J. Š. Baara – vyšší gymnázium. [online]. Domažlice: Gymnázium J. Š. Baara, 2014. 165 s. [cit. 2015-12-15]. Dostupné z: www<http://gymdom.cz/o-skole/dokumenty/file/120-skolni-vzdelavaci-program-gymnazium-j-s-baara-vyssi\\-gymnazium>.

[27] LÁVIČKA, Miroslav. Syntetická geometrie [online]. Plzeň, 2007 [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg_text.pdf. ZČU.

[28] VONDRA, Jan. Geometrie historické klenby [online]. Brno, 2009 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1433/podzim2006/PV097/um/3_Mozaik1_10.pdf Masarykova univerzita.

[29] VONDRA, Jan. Geometrie historické klenby [online]. Brno, 2009 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1433/podzim2006/PV097/um/3a_Mozaik2_12.pdf Masarykova univerzita.

[30] VONDRA, Jan. Geometrie historické klenby [online]. Brno, 2009 [cit. 2016-05-11]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1433/podzim2006/PV097/um/3b_Mozaik3_5.pdf Masarykova univerzita.

[31] BONO art [online]. [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: http://www.bonoart.cz/product/kvetiny-15-331/

[32] Dům jedním tahem [online]. [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: http://www.dumjednimtahem.cz/cz/dum_zefyros_24

[33] Spoznaj stromy [online]. [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: http://spoznajstromy.webnode.sk

[34] Ochrana přírody [online]. [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: https://cz.pinterest.com/martinah479/ochrana-prrody/

[35] HORÁKOVÁ, Lucie. Grupy symetrií [online]. Brno, 2006 [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/106253/prif_b/Grupy_symetrii.pdf. Bakalářská práce. Masarykova univerzita.

[36] FIALA, Václav. Kalich pro Baldov. Pomník bitvy u Domažlic. Klatovy: Městský úřad Domažlice, 2015.

Část V

Příloha

Příloha je rozdělena na čtyři procházky. V každé části se nachází různé množství teorie a jiných doplňků (pracovní listy, mapy, otázky). Je to z toho důvodu, že v procházkách žáci navazují na nějakou látku a ta látka je vysvětlena v příloze, anebo nenavazují, proto v příloze látka chybí. Ve všech přílohách je přiložena mapa a pracovní list k dané procházce.

9 1. PROCHÁZKA

Příloha k první procházce obsahuje pouze otázky, které budou ukryté v Hánově parku, mapu Hánova parku a pracovní listy. Všechna teorie se nachází v teoretické části.

9.1 Otázky

1. Jděte 50 metrů podle azimutu $246°$. Druhá otázka se nachází v okolí 5 metrů.

---

2. Co mají společného Domažlice a N'Djamena?
a) zeměpisnou délku, jděte na $N49°26.463'$, $E12°55.288'$
b) zeměpisnou šířku, jděte na $N49°25.472'$, $E12°56.350'$
c) nic, jděte na $N49°27.472'$, $E12°55.350'$

---

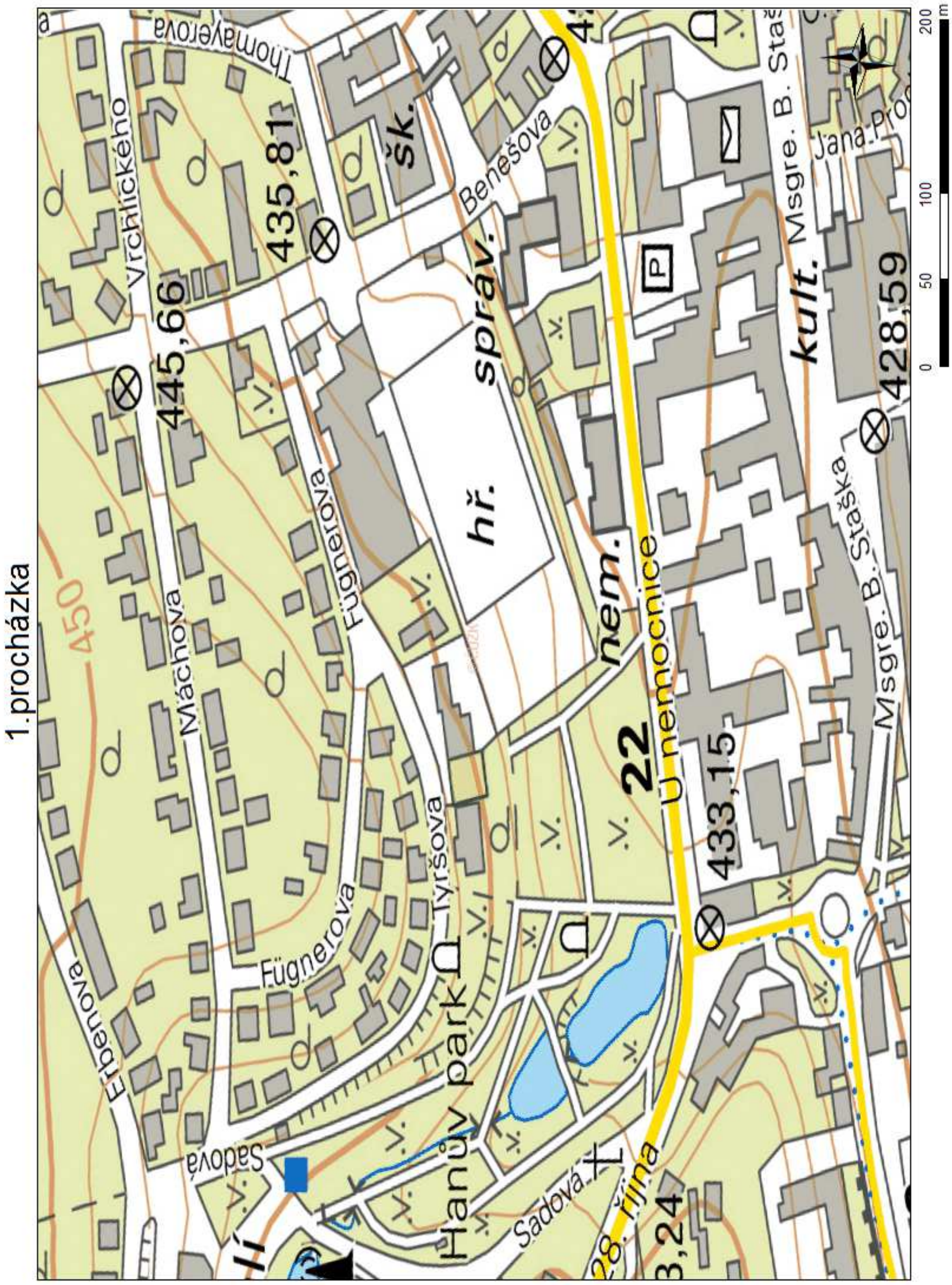
3. Podle jakého azimutu půjdete, budete-li se chtít dostat od Gymnázia ke Třem Vrbám? Jděte také podle tohoto azimutu 50 metrů.

---

4. Jaký je rozdíl rovnoběžek mezi Prahou a Rio de Janeirem?
a) $72,5°$, jděte na $N49°26.448'$, $E12°55.317'$
b) $37,5°$, jděte na $N49°25.528'$, $E12°55.317'$

---

5. Podle jakého azimutu dojdete zpět k bráně a jak je vzdálená tato otázka od cíle?

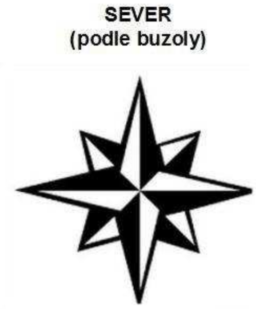


Obrázek 66: První procházka - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky (2016)

Pracovní list

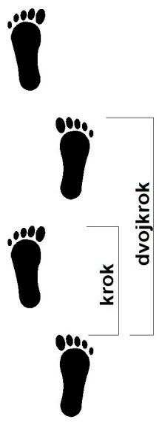
1) SVĚTOVÉ STRANY

a. Určete světové strany libovolnou metodou probíranou v teoretické části. Popište použitou metodu.



b. Správnou orientaci ověřte buzolou. Případnou odchylku zakreslete do růžice světových stran.

2) KROKOVÁNÍ



	1. pokus	2. pokus	3. pokus	průměrný počet kroků na 100m
Chůzí				
Chůzí – dvojkrok				
Klus				
klus – dvojkrok				

3) OTÁZKY

- Zakroužkujte správnou odpověď (otázku a odpovědi najdete na schované kartičce v parku) :
  A
  B
  C

  Výsledné souřadnice:

- Zakroužkujte správnou odpověď (otázku a odpovědi najdete na schované kartičce v parku) :
  A
  B

  Výsledné souřadnice:

- Výpočet azimutu

Výsledný azimut: ………………………………

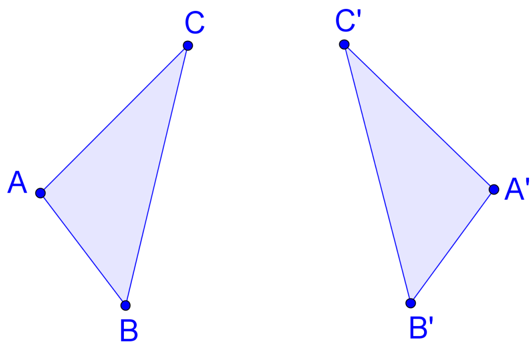
- Určete azimut: ………………………………

Určete vzdálenost: ………………………………

10 2. PROCHÁZKA

Příloha k druhé procházce obsahuje teorii k zopakování si základních pojmů, pracovní listy a mapu určenou pro tuto procházku.

10.1 Věty o shodnosti trojúhelníků

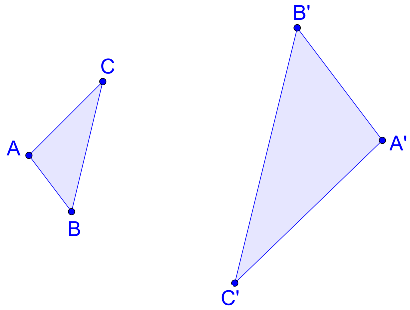


Obrázek 67: Shodnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky *(obrázek 67)* jsou **shodné**, pokud se shodují:

- **věta** ***sss*** ve všech stranách
- **věta** ***sus*** ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném
- **věta** ***usu*** v jedné straně v obou úhlech k ní přilehlých
- **věta** ***Ssu*** ve dvou stranách a úhlu proti delší z nich [27]

10.2 Věty o podobnosti trojúhelníků



Obrázek 68: Podobnost trojúhelníků

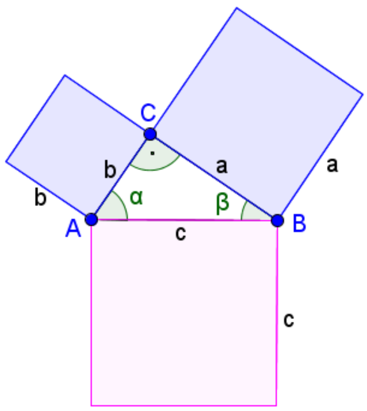
Dva trojúhelníky jsou **podobné** *(obrázek 68)*, shodují-li se:

- **věta** ***sss*** v poměru délek všech tří odpovídajících si stran ($a : b = a' : b'$, $b : c = b'c'$, $a : c = a'c'$)
- **věta** ***uu*** ve dvou úhlech ($\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ nebo $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$ nebo $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$)
- **věta** ***sus*** v poměrech délek dvou odpovídajících si stran a v úhlu jimi sevřeném
- **věta** ***Ssu*** v poměrech délek dvou odpovídajících si stran a v úhlu proti větší z nich

Jako příklad dalších dvou podobných trojúhelníků můžeme uvést dva rovnostranné trojúhelníky, dva rovnoramenné trojúhelníky, které mají stejný jeden ostrý úhel nebo dva pravoúhlé trojúhelníky, které mají stejný ostrý úhel. [27]

10.3 Pythagorova věta

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad odvěsnami *(obrázek 69)*. [27]



Obrázek 69: Pythagorova věta

Uvažujeme trojúhelník ABC s pravým úhlem ve vrcholu C, pro který platí vztah:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{23}$$

Součet úhlů α a β musí dát $90°$. Nyní se podíváme na úhly v pravoúhlém trojúhelníku. Pro tyto úhly platí:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

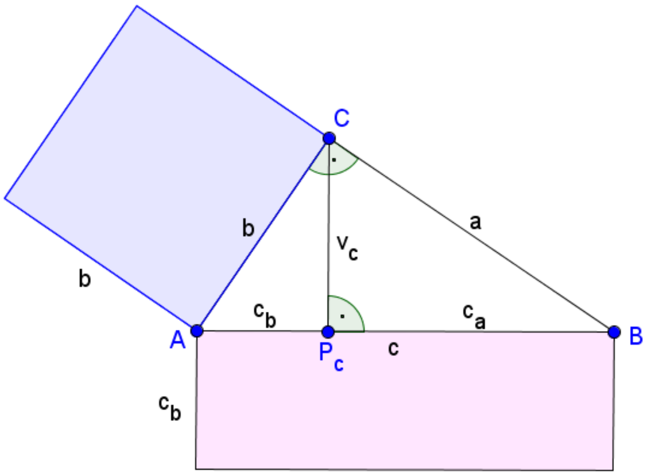
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \qquad \mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \qquad \mathrm{cotg}\beta = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

10.4 Euklidovy věty

10.4.1 Euklidova věta o odvěsně

Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka, jehož jednou stranou je přepona a druhá strana je shodná s úsekem přepony přilehlým k této odvěsně *(obrázek 70)*. [27]



Obrázek 70: Euklidova věta o odvěsně

Pro Euklidovu větu o odvěsně platí:

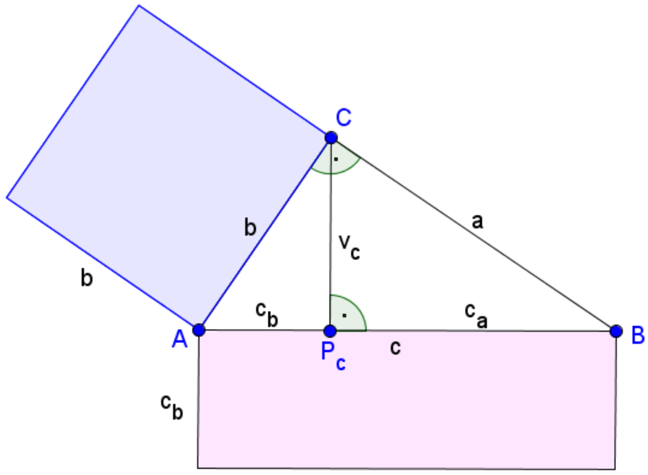
$$a^2 = c \cdot c_a \tag{24}$$

$$b^2 = c_a \cdot c_b \tag{25}$$

10.4.2 Euklidova věta o výšce

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z úseků přepony tvořených výškou *(obrázek 71)*. [27]

Pro Euklidovu větu o výšce platí:



Obrázek 71: Euklidova věta o výšce

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

10.5 Sinová věta

Sinová věta je použitelná v libovolném trojúhelníku, ve kterém známe alespoň dvě strany a jeden úhel nebo dva úhly a jednu stranu. Pro tuto větu platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{26}$$

[27]

10.6 Kosinová věta

Kosinová věta se používá v případě, kdy známe tři strany a chceme vypočítat úhel nebo známe dvě strany a jeden úhel proti straně, kterou chceme vypočítat. Pro tuto větu platí: [27]

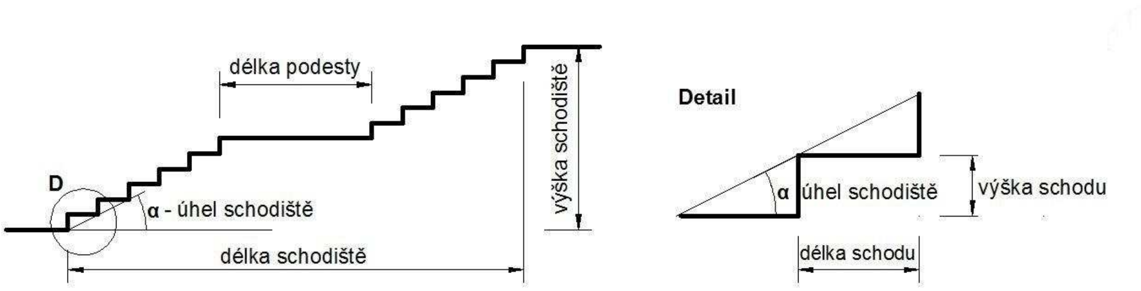
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{27}$$

Obrázek 72: Druhá procházka - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky (2016)

Pracovní list

1) SCHODY

Schody jsou dlouhé 9 metrů. Dolní část leží v nadmořské výšce 440 m n. m. a horní část v 444 m n. m.



a. Určete výšku schodu a sklon schodu (úhel schodiště), jehož délka bude 30 cm a chcete, aby se na schodech nevyskytovala žádná podesta.

b. Jak se změní sklon schodu, pokud umístíte do schodů 2 podesty dlouhé dohromady 3 metry a počet schodů bude 21?

2) STŘECHA RODINNÉHO DOMU

Rodina ve Vrbově ulici se rozhodla přestavět střechu. Místo rovné střechy by chtěli sedlovou. Vypočítejte kolik střešní krytiny potřebují, když dům má rozměry 10x10 metrů a sklon střechy bude 30°. Připočítejte 5% materiálu navíc.

3) VZDÁLENOST

Vypočítejte vzdálenost ke stromu v zahrádce.

Vzdálenost ke stromu je: ……………………………………..

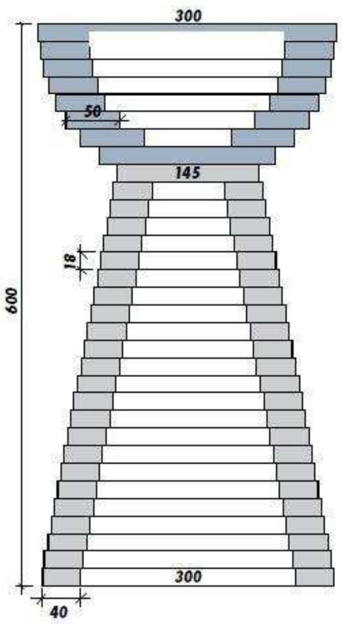
4) PLOCHA RYBNÍKA

S pomocí GPS zjistěte plochu rybníka.

Plocha rybníka je: ……………………………………..

5) VÝŠKA

a. Jakoukoliv metodou z teoretické části vypočítejte výšku kalicha.



Kalich je vysoký:………………………………..

b. Vypočítejte objem kalicha (přibližně). Spodní část má průměr 300 cm, prostřední 145 cm a vrchní 300 cm. Výška jednoho prstence je 18 cm a prstenců je celkem 31.

Kalich má objem přibližně: ……………………………

11 3. PROCHÁZKA

Příloha ke třetí procházce obsahuje hodně teorie, kterou žáci mají znát, pracovní listy a mapu ke třetí procházce.

11.1 Geometrická zobrazení

Geometrickým zobrazením nazýváme předpis $f : A \mapsto B$, který každému bodu X z množiny A (tzv. vzoru) přiřazuje nejvýše jeden bod $X' = f(X)$ z množiny B (tzv. obraz).

Mezi základní geometrická zobrazení v rovině patří identita, posunutí, osová souměrnost, středová souměrnost, otáčení, stejnolehlost a podobnost. [11]

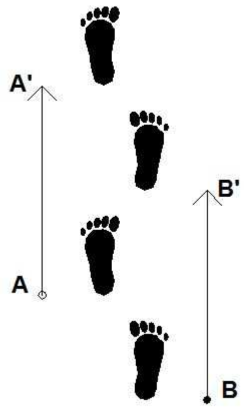
11.1.1 Identita

Indentita *(obrázek 73)* v rovině je zobrazení, které každému bodu A přiřazuje týž bod A. Platí tedy, že každý bod a každý útvar v rovině je samodružný (bod nebo jiný útvar zobrazený sám na sebe). [11]

Obrázek 73: Identita

11.1.2 Posunutí

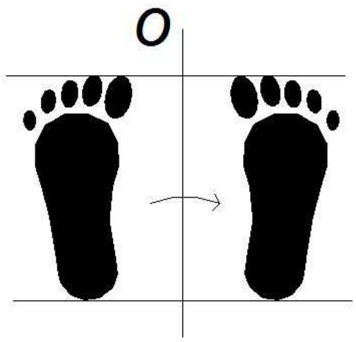
Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu A přiřazuje bod A' ($A \neq A'$), tak že pro každou další dvojici odpovídajících si bodů B, B' platí, že střed úsečky AB' splývá se středem úsečky $A'B$, nazýváme **posunutí** (translace) *(obrázek 74)*. **Směr** posunutí je určen odpovídajícími body A, A', **velikost posunutí** velikostí úsečky AA' a **smysl posunutí** pořadím bodů A, A'. Provedením dvou posunutí po sobě vznikne opět posunutí, tj. nezáleží na pořadí. [11]



Obrázek 74: Posunutí

11.1.3 Osová souměrnost

Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu A přiřazuje bod A' tak, že všechny úsečky AA' mají společnou osu o, které říkáme osa souměrnosti, se nazývá **osová souměrnost** (souměrnost podle osy) *(obrázek 75)*. [11]



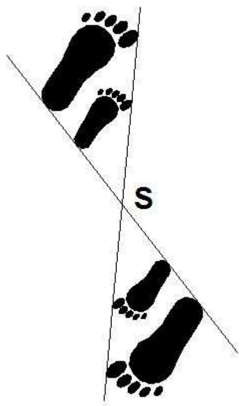
Obrázek 75: Osová souměrnost

11.1.4 Středová souměrnost

Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu roviny A přiřazuje bod A' tak, že všechny úsečky mají společný střed S, se nazývá **středová souměrnost** (souměrnost podle středu) *(obrázek 76)*. [11]

11.1.5 Otočení

Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu roviny S přiřazuje týž bod S a každému bodu $A \neq S$ bod A', pro který platí $AS = A'S$ a úhel $\measuredangle\ ASA'$=ω, kde ω je daný orientovaný úhel, se nazývá **otočení** (rotace) *(obrázek 77)* kolem středu S o orientovaný úhel ω.

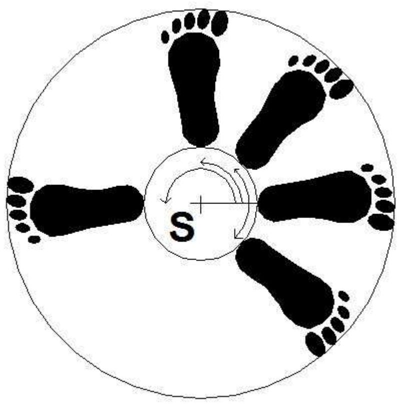


Obrázek 76: Středová souměrnost

Bodu S se říká **střed otáčení**, úhlu ω **úhel otáčení** a orientace úhlu ω udává **smysl otáčení**.

Úhel otáčení se udává jak v míře obloukové, tak v míře stupňové. Orientace otáčení je dána buď kladným nebo záporným znamínkem nebo šipkou.

Pokud je úhel otočení $\omega = (2k + 1)\pi$, k je celé číslo, tj. jedná se o lichý násobek 180°, jedná se o středovou souměrnost. Pokud je úhel otočení $\omega = 2k\pi$, tj. sudý násobek 180°, jedná se o identitu. [11]

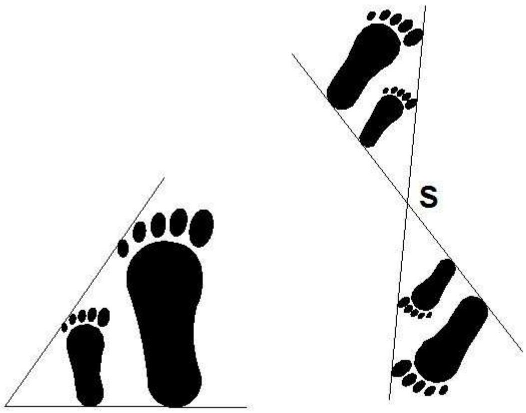


Obrázek 77: Otočení

11.1.6 Stejnolehlost

Geometrické zobrazení v rovině, které bodu S přiřazuje týž bod S a bodu $A \neq S$ bod A', jehož vzdálenost od S je $SA' = |k| \cdot SA$, přičemž pro $k > 0$ bod A' leží na polopřímce SA a pro $k < 0$ na opačné polopřímce, se nazývá **stejnolehlost** (homotetie) *(obrázek 78)*.

S je **střed stejnolehlosti** a číslo k je **koeficient stejnolehlosti**. Pokud je $k = 1$ jedná se o identitu, pro $k = -1$ středovou souměrnost. [11]



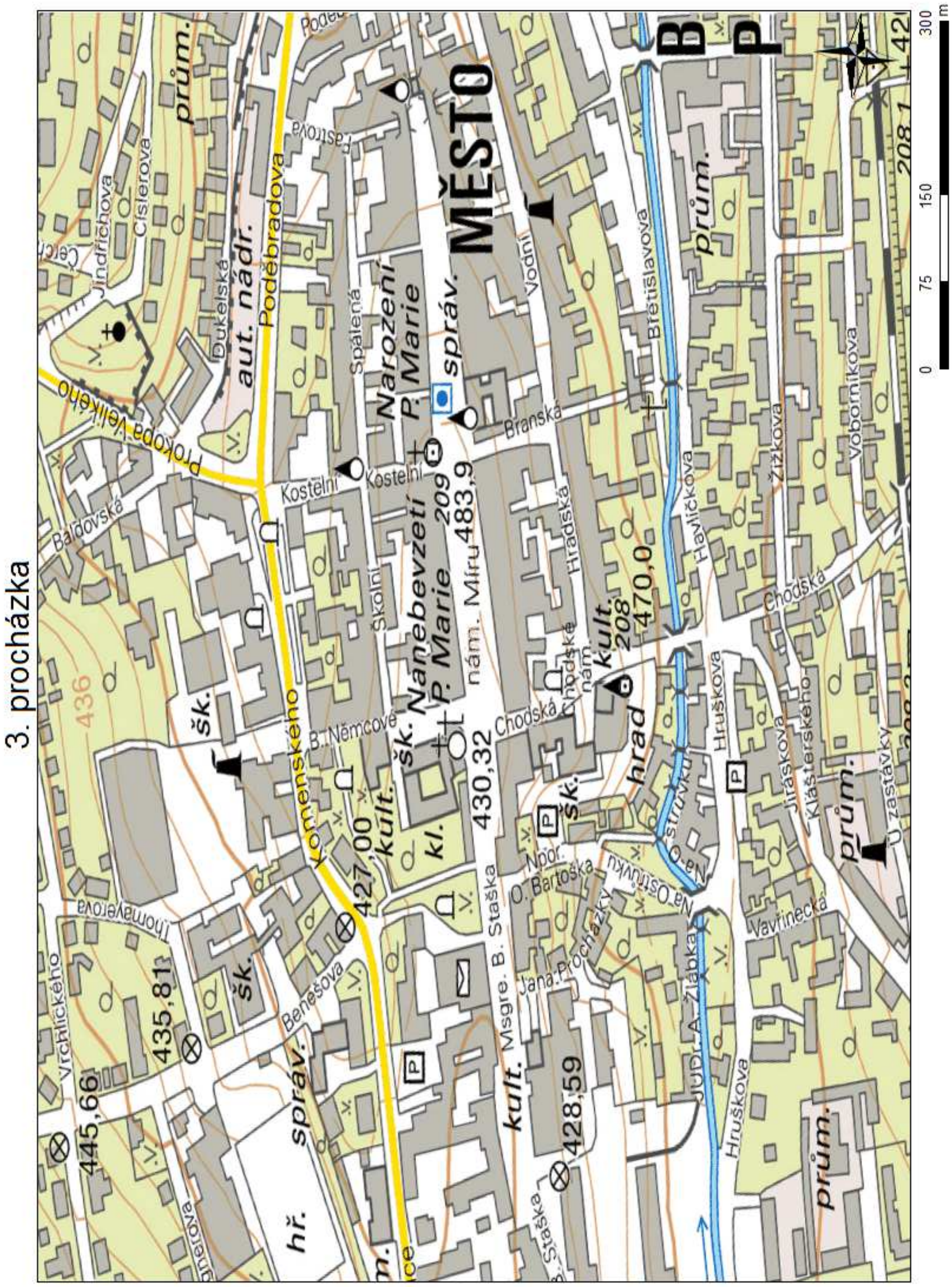
Obrázek 78: Stejnolehlost

11.1.7 Shodná a podobná zobrazení

Zobrazení je **shodné** *(shodnost)* právě tehdy, když obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$, pro kterou platí $|A'B'| = |AB|$.

Shodná zobrazení zachovávají *velikosti úhlů, obsahy a objemy*. Mezi shodná zobrazení patří identita, posunutí, osová souměrnost, středová souměrnost a rotace. Každé shodné zobrazení lze získat složením osových souměrností, středových souměrností, posunutím a otočením. Rozlišujeme shodnosti *přímé a nepřímé*. Mezi přímé řadíme identitu, středovou souměrnost, posunutí a otočení a mezi nepřímé osovou souměrnost.

Zobrazení je **podobné** *(podobnost)* právě tehdy, pokud existuje kladné reálné číslo k takové, že pro každé dvě dvojice bodů A, A' a B, B' vzoru a obrazu je splněn vztah $|A'B'| = k \cdot |AB|$. Nejvýznamnější podobností je stejnolehlost. [11]



Obrázek 79: Třetí procházka - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky (2016)

Pracovní list

1) ČESKÁ POŠTA

Určete osy souměrnosti a zakreslete je do obrázku.

2) ORNAMENT

Určete osy souměrnosti a rotaci a zakreslete je do obrázku.

3) KAŠNA

Určete alespoň dvě geometrická zobrazení

4) LIDOVÝ DŮM

Všimněte si symetrie a ornamentů na domě a určete osy symetrie.

5) MOZAIKY

Najděte alespoň jednu mozaiku na náměstí.

6) **DVEŘE**

Určete alespoň dvě geometrická zobrazení

7) **ALTÁNEK**

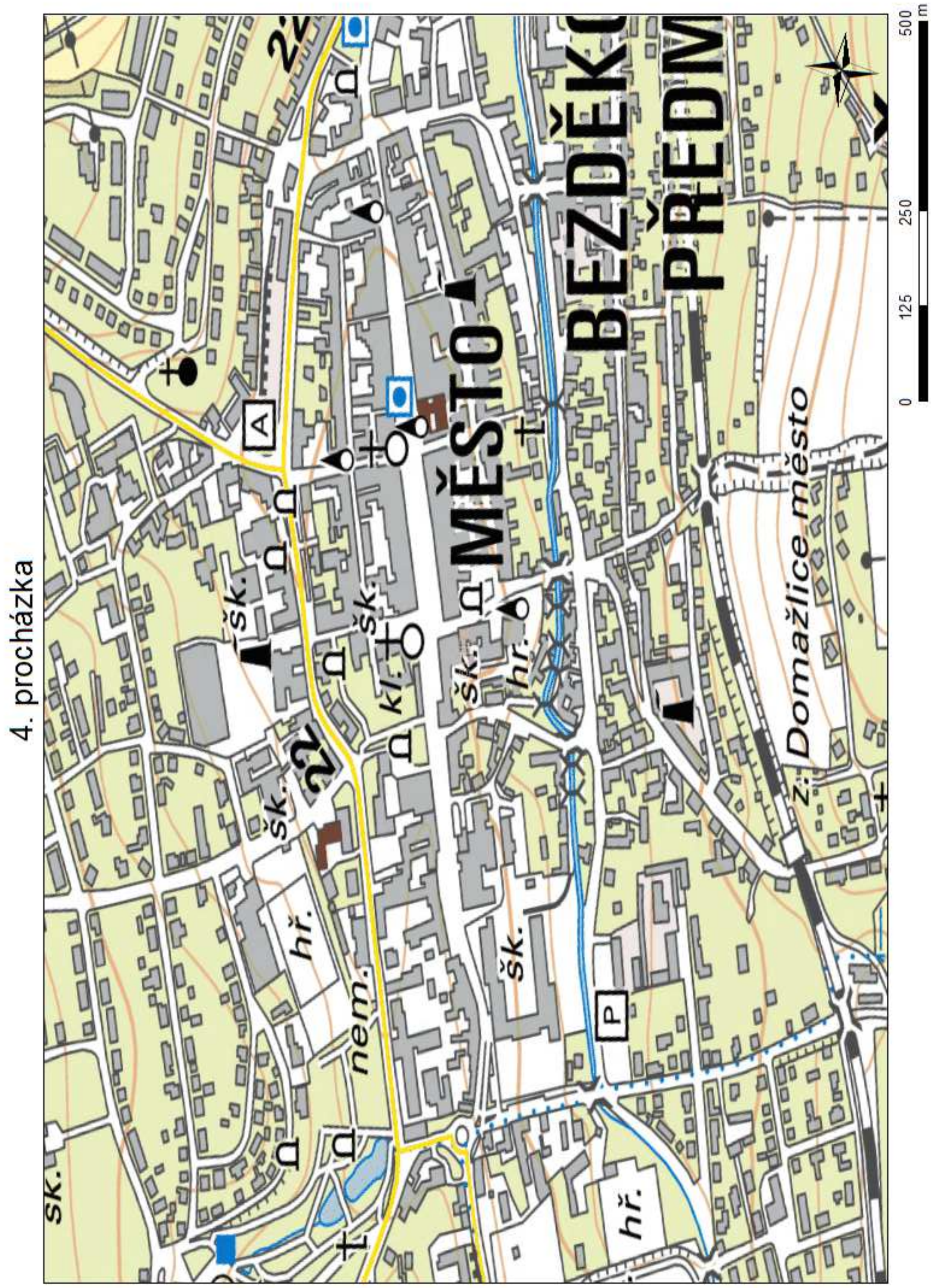
Kolik geometrických zobrazení najdete na altánku? Vyjmenujte je.

8) **SCHODIŠTĚ**

Jaké geometrické zobrazení najdete na schodišti, které se nachází vedle altánku?

12 4. PROCHÁZKA

Příloha ke čtvrté procházce obsahuje pouze mapu a pracovní listy.



Obrázek 80: čtvrtá procházka - vlastní zpracování v ArcGIS 10.2 na základě WMS služby z Geoportálu České republiky (2016)

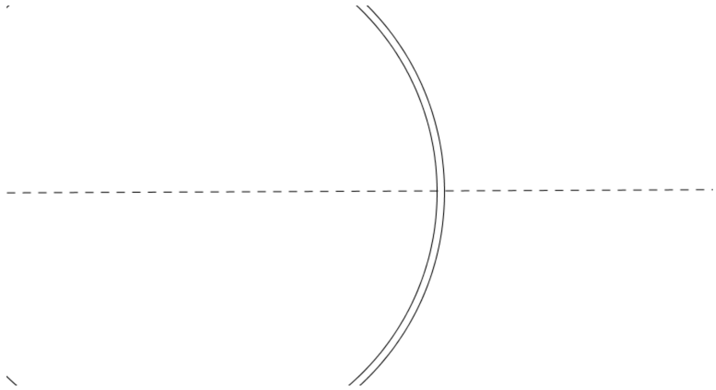
Pracovní list

1) TVAR ZÁHONU

Popište postup vytvoření záhonu ve tvaru elipsy.

2) Satelitní anténa

Ke které rotační ploše byste zařadili satelitní anténu? A popište, jak funguje.



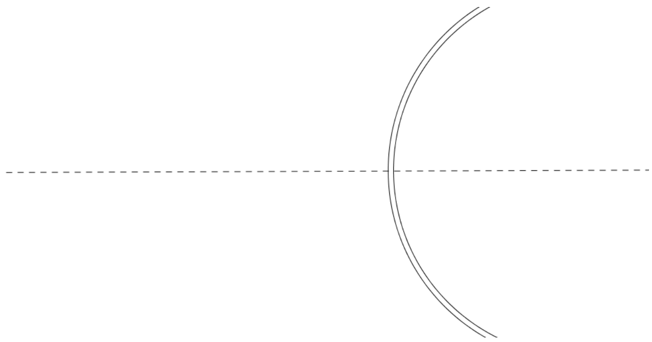
Rotační plocha: ....

3) VĚŽ

Jaké rotační plochy najdete na věži na náměstí? Vypište je.

4) VYPUKLÉ ZRCADLO

Na jakém principu funguje vypuklé zrcadlo. Vyjmenujete alespoň 3 možná použití tohoto zrcadla.



Využití: ....

5) KOSTEL

Jaké rotační plochy najdete v kostele? Vypište je.

6) PODLOUBÍ

Za pomocí jakých rotačních ploch vzniklo domažlické podloubí. O jaký typ klenby se jedná?

7) ERBENOVA ULICE

Napište příklad použití rotační válcové plochy s využitím řezů.