

**Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd**

OPTIMALIZACE ROBOTICKÝCH ARCHITEKTUR

Ing. Martin Švejda

**disertační práce
k získání akademického titulu
Doktor
v oboru Kybernetika**

**Školitel: Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.
Katedra kybernetiky**

Plzeň 2016

**University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences**

OPTIMIZATION OF ROBOT ARCHITECTURES

Ing. Martin Švejda

**A dissertation submitted in partial fulfillment
of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy
(Cybernetics)**

**Supervised by: Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.
Department of Cybernetics**

Pilsen 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Disertační práce byla vypracována pod vedením prof. Ing. Miloše Schlegela, CSc. na Západočeské univerzitě v Plzni.

V Plzni dne

Abstrakt

Předložená disertační práce se zabývá problematikou kinematické optimalizace robotických architektur formující klíčovou úlohu syntézy zejména v případě nestandardních kinematických architektur manipulátorů pro speciální aplikace. V práci jsou předloženy základní aspekty a požadavky pro strukturální a parametrickou syntézu (optimalizaci) manipulátorů. Hlavní náplň práce je věnována parametrické optimalizaci manipulátorů. Cílem je nalezení efektivních algoritmů optimalizace pro obecný manipulátor umožňující splnění reálných technických požadavků na manipulátorem vykonávanou úlohu. Dosažené výsledky jsou kategorizovány do tří sekcí věnovaných statické optimalizaci (nalezení konstantních kinematických návrhových parametrů), optimalizaci pohybu redundantních manipulátorů a využití optimálního řízení pohybu redundantních manipulátorů s ohledem na parametrickou a strukturální optimalizaci. Součástí práce je vlastní knihovna předimplementovaných funkcí a funkčních bloků (robotLib) pro tvorbu virtuálních simulačních modelů a implementaci optimalizačních algoritmů. Použití navržených metod je demonstrováno na řadě příkladů a podpořeno experimentálními výsledky.

Abstract

The thesis deals with kinematic optimization of robotic architectures which forms a crucial role in synthesis, especially for nonstandard kinematic architectures of manipulators for special applications. The basic aspects and requirements for structural and parametric optimization are presented. The main topic of the thesis is devoted to parametric optimization of manipulators. The goal is to develop effective optimization algorithms for general manipulators which are able to fulfill the technical requirements of given task. Achieved theoretical results are categorized into three sections devoted to static optimization (finding the constant kinematic parameters), optimal motion control of redundant manipulators and using optimal motion control of redundant manipulators for parametric and structural optimization. The thesis includes in-house library of functions and functional blocks (robotLib) for implementation of virtual simulation models and development of optimization algorithms. The proposed methods are demonstrated and proved by a number of examples and supported by experimental results.

Poděkování

Předloženou práci od samotného začátku provázela, vedle samotného autora, celá řada lidí, kteří se odborně i neodborně, záměrně i nevědomky a intenzivně i jen částečně zapojili do jejího vzniku. Umožnili tak vytvořit prostředí, ve kterém je možné pohodlně pracovat, být motivován, přiměřeně kritizován a zejména podporován, což jsou jistě faktory zcela zásadní. Proto mi dovolu v první řadě poděkovat mému školiteli prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc., pod jehož přímým vedením mám možnost systematicky pracovat, bádát a vzdělavát se nejen v odborné, ale i lidské rovině. Děkuji mu za jeho snahu, ochotu i toleranci při vedení předložené práce. Velký dík také patří všem kolegům a celému našemu týmu, který pod vedením Miloše Schlegela vytváří pohodovou a ve všech ohledech vstřícnou pracovní atmosféru, která je v dnešní hektické době velmi vzácná. Jen velmi obtížně je však možné pracovat a bádát bez podpory a lásky těch nejbližších. Děkuji především svým rodičům i prarodičům za to, že jsem tím, co jsem, mají na tom bezpochyby ten největší podíl. Děkuji své ženě Janině včetně jejích rodičů, že mi jsou vždy oporou v časech pohodových i tíživých a děkuji své malé dceři Elišce, neboť přesto, že s největší pravděpodobností ještě řadu let nepochopí, co to ten táta v práci dělá, je pravděpodobně tím klíčovým motorem mého působení.

Obsah

Seznam obrázků	iii
Použité zkratky	vii
Použité matematické značení	ix
1. Úvod	1
1.1. Základní a klíčové problémy při návrhu robotických systémů	2
1.2. Strukturální a parametrická optimalizace	3
1.3. Typické úlohy optimalizace vyplývající z dosavadních řešených projektů . .	5
1.3.1. Planární paralelní řadící robot	5
1.3.2. Sério-paralelní manipulátor AGEBOT	7
1.3.3. Manipulátor SÁVA pro NDT kontroly potrubních svarů	11
1.3.4. Paralelní manipulátor typu „zakladač“	15
1.3.5. Výukový model sériového redundantního manipulátoru ALICE . . .	16
1.4. Hlavní cíle a výsledky práce	17
2. Strukturální syntéza robotického zařízení - strukturální optimalizace	21
2.1. Kinematická struktura manipulátoru je plně určena	23
2.2. Kinematická struktura manipulátoru je přeúčtená	27
2.3. Kinematická struktura manipulátoru je nedourčená	29
2.4. Metody vyšetřování počtu DoF z topologického uspořádání manipulátoru .	30
2.4.1. Jednoduché formulace pro výpočet DoF koncového efektoru mani- pulátoru	30
2.4.2. Podrobná analýza kompletní kinematiky manipulátoru	34
3. Parametrická syntéza robotického zařízení - parametrická optimalizace	37
3.1. Úvod	38
3.2. Současný stav problematiky parametrické optimalizace	39
3.2.1. Kritéria optimality	40
3.2.2. Definice optimalizačních úloh	46
3.2.3. Standardní přístupy k řešení	49
3.2.4. Alternativní přístupy k řešení	68
3.3. Statická optimalizace	81
3.3.1. Definice pracovního prostoru robotu či jeho restriktce (požadovaná trajektorie koncového efektoru):	81
3.3.2. Definice kriteriální funkce:	82
3.3.3. Definice přípustné množiny kinematických návrhových parametrů: .	83
3.3.4. Definice optimalizační úlohy	83
3.3.5. Metody řešení optimalizační úlohy	84
3.3.5.1. Globální optimalizace	84
3.3.5.2. Lokální optimalizace	91
3.4. Optimální řízení redundantních manipulátorů	110
3.4.1. Standardní přístupy k řízení redundantních manipulátorů	119

3.4.2.	Nový přístup k optimálnímu řízení redundantních manipulátorů (aplikace principů optimálního řízení)	142
3.4.2.1.	Bellmanova optimalizační rekurze	148
3.4.2.2.	Hamiltonův přístup	151
4.	Využití optimálního řízení redundantních manipulátorů	173
4.1.	Zobecnění standardního kinematického popisu manipulátorů	180
4.2.	Zobecnění standardního dynamického popisu manipulátorů	187
4.3.	Zhodnocení a předpokládané přínosy	188
5.	Závěr	193
A.	Matematika v robotice	199
A.1.	Reprezentace obecného pohybu v robotice	199
A.1.1.	Reprezentace polohy	199
A.1.2.	Reprezentace rychlosti a zrychlení	205
A.2.	Denavit-Hartenbergova úmluva	207
A.3.	Přímý a inverzní geometrický model (DGM, IGM)	210
A.3.1.	Neredundantní manipulátory	212
A.3.2.	Redundantní manipulátory	213
A.3.3.	Nástin řešení DGM/IGM pro paralelní manipulátory	214
A.4.	Přímá a inverzní okamžitá kinematická úloha manipulátoru (DIK, IIK)	215
A.4.1.	Neredundantní manipulátory	216
A.4.2.	Redundantní manipulátory	220
A.5.	Automatické generování závislostí rychlostí a zrychlení	220
A.5.1.	Závislosti rychlostí	221
A.5.2.	Závislosti zrychlení	222
A.5.3.	Nástin řešení DIK/IIK pro paralelní manipulátory	224
A.6.	Automatické generování dynamických modelů (DDM, IDM)	225
A.6.1.	Nástin řešení IDM/DDM pro paralelní manipulátory	234
A.7.	Singulární polohy v robotice	237
A.7.1.	Singulární polohy sériových manipulátorů	237
A.7.2.	Singulární polohy paralelních manipulátorů	239
A.8.	Energie manipulátoru	241
A.9.	Zobecněná inverze matice	242
A.10.	Možné principy řešení úlohy optimálního řízení	244
A.10.1.	Dynamické programování (Bellmanova optimalizační rekurze)	244
A.10.2.	Variační počet (Hamiltonův přístup)	256
A.11.	Knihovna „robotLib“	260
A.11.1.	Standardní funkce a funkční bloky	260
A.11.2.	Funkce a funkční bloky pro modelování zobecněných (redundantních) sériových manipulátorů	267
A.11.3.	Funkce pro plánování trajektorie koncového efektoru	270
B.	Seznam publikovaných i nepublikovaných prací autora	279
B.1.	Publikace	279
B.2.	Ostatní práce	279
Literatura		283

Seznam obrázků

1.1. Příklady redundantních manipulátorů	5
1.2. Řadící robot - planární paralelní manipulátor (3 varianty)	6
1.3. Uvažovaný pracovní prostor manipulátoru a význam některých parametrů	7
1.4. Výsledný pracovní prostor manipulátoru řadícího robotu	7
1.5. Integrace manipulátoru AGEBOT do průmyslového mytí	8
1.6. Paralelní manipulátor typu <i>PSW</i> (součást manipulátoru AGEBOT)	9
1.7. Princip nalezení pracovního prostoru	9
1.8. Vepsaný pracovní prostor regulárního tvaru (válec) a výsledek optimalizace	10
1.9. GUI: Správa optimalizace <i>PSW</i>	10
1.10. Prototyp manipulátoru AGEBOT	11
1.11. Schématické uspořádání manipulátoru SÁVA	12
1.12. Uvažované typy svarů testované pomocí manipulátoru SÁVA	12
1.13. GUI: Generátor trajektorií svarů manipulátoru SÁVA	13
1.14. Funkce <i>Lim</i> pro hodnocení příslušnosti parametru do definovaného intervalu	14
1.15. Prototyp manipulátoru SÁVA	15
1.16. Dvě uvažované varianty manipulátoru - zakladač	16
1.17. Sériový redundantní manipulátor ALICE	17
2.1. Paralelní manipulátor typu sférického zápěstí	23
2.2. Paralelní singulární polohy manipulátoru	24
2.3. Manipulátor současně v sériové i paralelní singulární poloze	25
2.4. Sériový manipulátor typu RRR	25
2.5. Singulární polohy manipulátoru znázorněné v prac. prostoru	26
2.6. Paralelní Dual-Scara manipulátor s nevhodně zvolenou orientací kloubu	28
2.7. Paralelní Dual-Scara manipulátor	29
2.8. Paralelní Dual-Scara manipulátor s nedourčenou strukturou	29
2.9. Grafová reprezentace paralelního manipulátoru	31
2.10. Příklady manipulátorů, pro které je výpočet dle CGK formulace korektní	32
2.11. Příklady paralelních manipulátorů, pro které výpočet dle CGK selhává	33
2.12. Paralelní kartézský manipulátor včetně grafové reprezentace	33
2.13. Kinematický řetězec paralelního kartézského manipulátoru	34

SEZNAM OBRÁZKŮ

3.1. Lineární transformace $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}$	43
3.2. Lineární transformace $\mathbf{F} = (\mathbf{J}^T(\mathbf{Q}))^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}$	43
3.3. Přístupy k parametrické optimalizaci kinematiky manipulátorů	48
3.4. Princip lineárního programování	51
3.5. Grafické znázornění algoritmu Pattern search	57
3.6. Simplexový algoritmus	59
3.7. Four Bar Mechanism	71
3.8. <i>FBM</i> s uvolněnými vazbami	72
3.9. Jednoduché příklady staticky vyvážených manipulátorů	77
3.10. Přidaný paralelogram	80
3.11. Zobecnění pro sériový manipulátor	81
3.12. Culling algoritmus globální optimalizace	87
3.13. Porovnání výpočetní náročnosti - Culling algoritmus	90
3.14. Schématické uspořádání manipulátoru - zakladač	92
3.15. Kinematické uspořádání manipulátoru - zakladač	92
3.16. Omezení a diskretizace pracovního prostoru	98
3.17. Průběh hodnot kritériální funkce J - glob. opt.	102
3.18. Znázornění změny hodnot počátečních parametrů - glob. opt	103
3.19. Průběh hodnot kritériální funkce J - lok. opt.	104
3.20. Znázornění změny hodnot počátečních parametrů - lok. opt	105
3.21. Původní (PM) a modifikovaná (MM) varianta manipulátoru - zakladač . .	106
3.22. Výsledky optimalizace pro „těžkou“ variantu manipulátoru	109
3.23. Výsledky optimalizace pro „lehkou“ variantu manipulátoru	110
3.24. Planární paralelní redundantní manipulátor	111
3.25. Průmyslový manipulátor firmy KUKA - příklad redundance	112
3.26. Snake robot od firmy OC robotics	113
3.27. 6 DoF průmyslové manipulátory - redundance plynoucí z definované úlohy .	113
3.28. Dvouramenný planární sériový manipulátor	114
3.29. Pohyb manipulátoru - redundance	115
3.30. Porovnání pohybu redundantního manipulátoru	117
3.31. Pohyb kloubových souřadnic manipulátoru bez a s optimalizací pohybu . . .	118
3.32. Integrand kritéria J bez a s optimalizací pohybu	118
3.33. Hodnota kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$	130
3.34. Optimální průběh kloubových souřadnic a kritériální funkce	131
3.35. Vizualizace optimálního pohybu manipulátoru včetně kritéria	131
3.36. Průběhy kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$ - optimální a perturbovaný průběh	132

3.37. Optimální průběh kloubových souřadnic a kritériální funkce	133
3.38. Vizualizace optimálního pohybu manipulátoru včetně kritéria	133
3.39. Průběhy kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$ - optimální a perturbovaný průběh	134
3.40. Průběh kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$	135
3.41. Optimální průběhy pohybu kloubových souřadnic a sil/momentů	140
3.42. Optimální průběh kritéria a vizualizace optimálního pohybu manipulátoru .	140
3.43. Průběhy kritériální funkce $J(\ddot{\mathbf{Q}}_0)$ - optimální a perturbovaný průběh	141
3.44. Schéma lin. dynamického modelu vývoje stavu redundantního manipulátoru	144
3.45. Optimální průběh stavu a řízení.	150
3.46. Optimální průběh Bellmanovy funkce a váhové funkce.	150
3.47. Porovnání optimální hodnoty kritéria s hodnotami kritéria pro pert. řízení .	151
3.48. 4 DoF sériový redundantní manipulátor.	160
3.49. D-H úmluva pro 4 DoF sériový redundantní manipulátor	161
3.50. Generovaná požadovaná trajektorie koncového efektoru	163
3.51. Polynomiální odhad stavu a řízení	164
3.52. Odhad kostavu	165
3.53. Porovnání průběhu váhové funkce pro optimální a perturbovaná řízení . . .	165
3.54. Porovnání průběhu optimálního a perturbovaných řízení	166
3.55. Porovnání optimální a perturbované hodnoty kritéria	166
3.56. Časosběrný snímek optimálního pohybu manipulátoru.	167
3.57. Polynomiální odhad stavu a řízení	168
3.58. Odhad kostavu	169
3.59. Porovnání průběhu váhové funkce pro optimální a perturbovaná řízení . . .	169
3.60. Porovnání průběhu optimálního a perturbovaných řízení	170
3.61. Porovnání optimální a perturbované hodnoty kritéria	170
3.62. Časosběrný snímek optimálního pohybu manipulátoru.	171
4.1. Dvě varianty trajektorie koncového efektoru manipulátoru	176
4.2. Optimální průběhy polohy a rychlosti kloubových souřadnic	177
4.3. Průběhy váhové funkce g podél plánované trajektorie	178
4.4. Optimální průběhy polohy a rychlosti kloubových souřadnic	179
4.5. Průběhy váhové funkce g podél plánované trajektorie	180
4.6. Volba neúplně určených s.s. v popisu kinematiky manipulátorů	181
4.7. Zobecněné redundantní rameno manipulátoru s aktuátorem se 4 DoF	182
4.8. Znázornění síly \mathbf{f}_i a momentu $\boldsymbol{\mu}_i$ působící na rameno <i>Link i</i>	188
4.9. Schématické znázornění optimalizace manipulátoru	191
A.1. Transformace souřadných systémů	199

SEZNAM OBRÁZKŮ

A.2. Simulační schémata generování polohy	206
A.3. D-H úmluva	208
A.4. Zavedení souřadných systémů pro dle D-H úmluvy	210
A.5. Princip kompenzací polohy základny a koncového efektoru manipulátoru	212
A.6. Grafová reprezentace manipulátoru	215
A.7. Prostory generované singulárními vektory jakobiánu \mathbf{J}	219
A.8. Vzájemná interakce ramen manipulátoru	226
A.9. Dekompozice paralelního manipulátoru na dílčí kinematické řetězce	236
A.10. Grafické znázornění výpočtu IDM (DDM) pro paralelní manipulátory	237
A.11. Řešení IKŮ obecného paralelního manipulátoru	240
A.12. Diskretizovaný stavový prostor	248
A.13. Tabulka číselných hodnot optimální hodnoty kritéria	251
A.14. Ukázka interpolace hodnoty kritéria	251
A.15. Vývoj stavu \mathbf{q}_k	254
A.16. Vývoj řízení \mathbf{u}_k	254
A.17. Vývoj Bellmanovy funkce $V_k(\mathbf{q}_k)$	255
A.18. Standardní bloky knihovny „robotLib“ do prostředí SimMechanics	267
A.19. Zobecněné bloky knihovny „robotLib“ do prostředí SimMechanics	270
A.20. Příklad aproximace zadaných koincidenčních bodů	272
A.21. Průběh polohy, rychlosti a zrychlení podél uvažované trajektorie	273
A.22. Příklad interpolace zadaných koincidenčních bodů	275
A.23. Průběh polohy, rychlosti a zrychlení podél uvažované trajektorie	276

Použité zkratky

DoF (Degrees Of Freedom)

Stupně volnosti koncového efektoru manipulátoru, DoF lze dále dělit na translační a rotační, translačními DoF rozumíme translaci (posun) v osách x , y , z v prostoru, rotačními DoF potom rotace např. vyjádřené jako Eulerovy úhly dle daného schématu (XYZ , XZX , ...).

s.s.

Souřadný (souřadnicový) systém.

DGM (Direct Geometric Model)

Přímý geometrický model (poloha kloubů manipulátoru \Rightarrow poloha koncového efektoru).

IGM (Inverse Geometric Model)

Inverzní geometrický model (poloha koncového efektoru \Rightarrow poloha kloubů manipulátoru).

DIK (Direct Instantaneous Kinematics)

Přímá okamžitá kinematická úloha (rychlosti, zrychlení kloubů manipulátoru \Rightarrow rychlosti, zrychlení koncového efektoru).

IIK (Inverse Instantaneous Kinematics)

Inverzní okamžitá kinematická úloha (rychlosti, zrychlení koncového efektoru \Rightarrow rychlosti, zrychlení kloubů manipulátoru).

DDM (Direct Dynamic Model)

Přímá dynamická úloha (síly/silové momenty aktuátorů (kloubů) manipulátoru \Rightarrow polohy, rychlosti, zrychlení kloubů manipulátoru).

IDM (Inverse Dynamic Model)

Inverzní dynamická úloha (polohy, rychlosti, zrychlení kloubů manipulátoru \Rightarrow síly/silové momenty aktuátorů (kloubů) manipulátoru).

R, P

1 DoF klouby rotační, prizmatický.

R, P

Podtržení značí aktivní kloub (aktuátor) v kin. řetězci manipulátoru, např. **PRRR**.

D-H

Denavit-Hartenbergova úmluva, Denavit-Hartenbergovy parametry.

K-K

Khalil-Kleinfingerova úmluva.

#

Značení pro „počet“, např. # parametrů manipulátoru = počet parametrů manipulátoru

BVP (Boundary Value Problem)

Problém řešení soustavy diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami (okrajová úloha).

Použité zkratky

Použití matematické značení

F_i (označení souřadného systému)

$F_i = \{\mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i\}$ označení i -tého s.s. určeného počátkem a souřadnými osami (pravotočivý s.s.).

$O[i : j]$ (výběr prvků z vektoru)

i -tý až j -tý prvek (složka) vektoru (bodu) \mathbf{O}

$O[i, j, k]$ (výběr prvků z vektoru)

i -tý, j -tý a k -tý prvek (složka) vektoru (bodu) \mathbf{O}

$T[i : j, k : l]$ (výběr submatice z matice)

i -tý až j -tý řádek a k -tý až l -tý sloupec matice \mathbf{T}

$T[:, k : l]$ (výběr sloupců z matice)

všechny řádky a k -tý až l -tý sloupec matice \mathbf{T} , analogicky pro výběr řádků

$T[:, k, l]$ (výběr sloupců z matice)

všechny řádky a k -tý a l -tý sloupec matice \mathbf{T} , analogicky pro výběr řádků

O_i^j (souřadnice bodu v daném s.s.)

Souřadnice bodu \mathbf{O}_i vyjádřené v s.s. F_j .

$r_{i,j}^k$ (souřadnice orientovaného vektoru v dané s.s.)

Souřadnice vektoru $\mathbf{r}_{i,j}^k$ reprezentují vektor s počátkem v bodě \mathbf{O}_i a koncem v bodě \mathbf{O}_j jehož souřadnice jsou vyjádřené v s.s. F_k .

\mathbf{R}_i^j (matice rotace)

3×3 ortogonální matice rotace definující orientaci souřadných os s.s. F_i vyjádřenou v s.s. F_j .

$$\mathbf{R}_i^j = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^j & \mathbf{y}_i^j & \mathbf{z}_i^j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_i^j \cdot (\mathbf{R}_i^j)^T = \mathbf{I}$$

kde $\mathbf{x}_i^j, \mathbf{y}_i^j, \mathbf{z}_i^j$ jsou souřadnicové osy s.s. F_i vyjádřené vzhledem k s.s. F_j .

Můžeme definovat základní (elementární) matice rotace:

$$\text{rot}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{elementární rotace kolem osy } \mathbf{x} \text{ o úhel } \alpha)$$
(0.1)

$$\text{rot}(\mathbf{y}, \beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (\text{elementární rotace kolem osy } \mathbf{y} \text{ o úhel } \beta)$$
(0.2)

$$\text{rot}(\mathbf{z}, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{elementární rotace kolem osy } \mathbf{z} \text{ o úhel } \gamma)$$
(0.3)

XYZ (schéma rotace)

XYZ rozumíme schéma rotace (pokud není uvedeno jinak) postupně podle: osy x o úhel α , podle nově vzniklé osy y o úhel β a podle nově vzniklé osy z o úhel γ .

T_i^j (homogenní transformační matice)

Homogenní transformační matice - pozice (rotace a orientace) $F_i = \{O_i - x_i y_i z_i\}$ vzhledem k s.s. F_j .

$$T_i^j = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & \mathbf{R}_i^j & & \mathbf{O}_i^j \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (0.4)$$

X (zobecněné souřadnice koncového efektoru manipulátoru)

Označuje polohu koncového efektoru, poloha je dána pozicí (translace počátku s.s. koncového efektoru, většinou vyjádřena jako posun v ose x, y, z) a orientací koncového efektoru (orientace osy x, y, z s.s. koncového efektoru, většinou vyjádřena jako matice rotace, rotace okolo jednotlivých souřadnicových os ve formě Eulerových úhlů dle daného schématu, osou rotace a úhlem kolem této osy, jednotkovým kvaternionem, atd.).

Q (kloubové souřadnice manipulátoru)

Vektor polohy kloubových souřadnic manipulátoru $\mathbf{Q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$, kde q_i vyjadřuje i -tou kloubovou souřadnici (většinou polohu \mathbf{R} či \mathbf{P} 1 DoF kloubu).

Trans(z, d) (Transformace prostého posunutí)

Homogenní transformační matice prostého posunutí v ose z o vzdálenost d .

$$\text{Trans}(z, d) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (0.5)$$

Rot(z, γ) (Transformace prosté rotace)

Homogenní transformační matice prostého otočení okolo osy z o úhel γ .

$$\text{Rot}(z, \gamma) = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos(\gamma) & \sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (0.6)$$

S(ω) (Antisymetrická matice složená z prvků vektoru ω)

Není-li uvedeno jinak, platí:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (0.7)$$

J (Jakobián manipulátoru)

$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{Q})$, jakobián manipulátoru závislý na polohách kloubových souřadnic

\dot{J} (Časová derivace jakobiánu manipulátoru)

$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$, čas. derivace jakobiánu manipulátoru závislá na polohách a rychlostech kloubových souřadnic

$I_{i \times j}$ resp. $0_{i \times j}$ resp. $A_{i \times j}$

Jenotková resp. nulová resp. obecná matice o rozměrech $i \times j$ (počet řádků \times počet sloupců)

$\dim(\mathbf{A})$ (**Dimenze vektoru resp. matice resp. prostoru**)

$\dim(\mathbf{A})$ označuje dimenzi vektoru resp. matice resp. prostoru ve tvaru [počet prvků] resp. [počet řádků, počet sloupců] resp. počet nezávislých generátorů.

$\text{Rand}(i, j)$ (**Generátor náhodných čísel**)

$\text{Rand}(i, j)$ generuje náhodný vektor/matici reálných čísel dimenze $i \times j$, jejíž prvky náleží intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a jsou generovány jako náhodná čísla s normálním rozdělením pravděpodobnosti.

$\text{Rank}(\mathbf{J})$ (**Hodnota matice**)

$\text{Rank}(\mathbf{J}) \leq \min(m, n)$ označuje hodnotu matice $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m, n}$.

$\mathbb{R}^{m, n}$ (**Matice reálných čísel**)

Obecně matice reálných čísel příslušných dimenzí, m řádků, n sloupců.

$\|\mathbf{Q}\|_W$ (**Norma vektoru**)

Normou vektoru \mathbf{Q} rozumíme $\|\mathbf{Q}\|_W^2 = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}$, kde \mathbf{W} je odpovídající pozitivně definitní váhová matice, v případě značení $\|\mathbf{Q}\|$, uvažujeme normu jako velikost vektoru, $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, $\|\mathbf{Q}\|^2 = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}$.

$\mathcal{N}(\mathbf{J})$, $\mathcal{R}(\mathbf{J})$ (**Nulový prostor, obor hodnot**)

Nulový prostor či jádro matice (null space) a *obor hodnot* (range space) lineární transformace vektoru \mathbf{x} maticí \mathbf{J} : $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$

$\mathbf{Q}_{\text{orig}} = \text{IGM}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}})$ (**Řešení IGM pro red. manipulátory**)

Formální označení¹ řešení inverzního geometrického modelu pro redundantní manipulátory, viz Kapitola A.3.2, kde \mathbf{Q}_{orig} označují původní kloubové souřadnice jako výsledek řešení IGM pro danou polohu koncového efektoru \mathbf{X} parametrizované kloubovými souřadnicemi \mathbf{Q}_{par} .

$\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} = \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}})$ (**Řešení IIK (rychlosti) pro red. manipulátory**)

Formální označení¹ řešení inverzní okamžité úlohy pro rychlosti pro redundantní manipulátory, viz Kapitola A.4.2, kde \mathbf{Q}_{orig} , $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}$ označují polohy a rychlosti původních kloubových souřadnic jako výsledek řešení IIK pro danou polohu a rychlost koncového efektoru \mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$ parametrizované polohou a rychlostí kloubových souřadnic \mathbf{Q}_{par} , $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$.

$\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} = \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}, \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}})$ (**Řešení IIK (zrychlení) pro red. manipulátory**)

Formální označení¹ řešení inverzní okamžité úlohy pro zrychlení pro redundantní manipulátory, viz Kapitola A.4.2, kde \mathbf{Q}_{orig} , $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}$, $\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}$ označují polohy, rychlosti a zrychlení původních kloubových souřadnic jako výsledek řešení IIK pro danou polohu, rychlost a zrychlení koncového efektoru \mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$, $\ddot{\mathbf{X}}$ parametrizované polohou, rychlostí a zrychlením kloubových souřadnic \mathbf{Q}_{par} , $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$, $\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$.

$f(\star)$ (**nahrazení argumentu/ů funkce formálním symbolem**)

Symbol \star formálně nahrazuje dříve uvažovaný či předpokládaný argument funkce.

$\tau = \text{IDM}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}, \mathbf{F})$ (**Řešení IDM pro manipulátory**)

Formální označení řešení inverzní dynamické úlohy pro manipulátory (redundantní i nerdundantní) v prostoru kloubových souřadnic. $\mathbf{F} = [\mathbf{f}^T \quad \boldsymbol{\mu}^T]^T$, kde \mathbf{f} resp. $\boldsymbol{\mu}$

¹V případě nerdundantních manipulátorů zůstává značení formálně shodné a platí $\mathbf{Q}_{\text{orig}} \rightarrow \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}, \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$ neexistují.

označují externí síly resp. momenty působící na koncový efektor manipulátoru. τ je vektor výsledných sil/momentů v aktuátorech manipulátoru realizující požadovaný kloubový pohyb definovaný polohou Q , rychlostí \dot{Q} a zrychlením \ddot{Q} s uvažováním externího silového/momentového působení F .

$\ddot{Q} = \text{DDM}(\tau, Q, \dot{Q}, F)$ (Řešení DDM pro manipulátory)

Formální označení řešení přímé dynamické úlohy pro manipulátory (redundantní i neredundantní) v prostoru kloubových souřadnic. \ddot{Q} je výsledné zrychlení kloubových souřadnic vyvolané silovým/momentovým působením τ v jednotlivých aktuátorech manipulátoru a silovým/momentovým působením na koncový efektor $F = [f^T \ \mu^T]^T$.

$Q_p = \text{A2P}(Q_a)$ (Vztah mezi polohami pas. a akt. kl. souř.)

Formální značení funkce vracející polohy pasivních kloubových souřadnic Q_p v závislosti na polohách aktivních kloubových souřadnic Q_a .

$\{\dot{Q}_p, \ddot{Q}_p\} = \text{IKA2P}(Q_a, \dot{Q}_a, \ddot{Q}_a)$ (Vztah mezi rych. a zrych. pas. a akt. kl. souř.)

Formální značení funkce vracející rychlosti a zrychlení pasivních kloubových souřadnic Q_p v závislosti na polohách, rychlostech a zrychlení aktivních kloubových souřadnic Q_a .

$\mathbb{R}^{m,n}$ (Množina vektorů/matic s reálnými koeficienty)

$x \in \mathbb{R}^{m,n}$ značí vektor/matici s m řádky a n sloupci s reálnými koeficienty.

s_θ, c_θ (Zkrácený zápis geom. funkcí)

$s_\theta = \sin(\theta)$, $c_\theta = \cos(\theta)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ atd.

Kapitola 1.

Úvod

Obsah kapitoly:

- Úvod do problematiky strukturální a parametrické optimalizace robotických architektur
- Dopusud řešené projekty/výzkumné úkoly využívající optimalizační algoritmy
- Formulace hlavních cílů a výsledků (výstupů) práce, identifikace vlastního přínosu

1.1. Základní a klíčové problémy při návrhu robotických systémů

Robotika, jejíž obsah beze sporu spadá do dnes velmi rozšířené vědní disciplíny mechatronika, hraje nedílnou součást v podstatě ve všech průmyslových odvětvích. Roboty samotné, stejně tak jako celé robotizované systémy a komplexní automatické linky, dnes výrazným a nenahraditelným způsobem realizují nejen celé výrobní procesy (automatické svařování, obrábění, broušení, lakování, kompletace, vizuální kontroly atd.), ale také činnosti, jakými jsou průzkumy neznámých prostředí, metody nedestruktivního zkoušení materiálových defektů (ultrazvukové zkoušení, zkoušení vířivými proudy, atd.), asistované chirurgické zákroky atd. K úspěšnému návrhu kompletního robotického systému však vede dlouhá a komplikovaná cesta, kde jsou ve většině případů všechny dílčí úkoly vzájemně propojeny. Tento fakt zůstává bohužel velmi často opomenut a k návrhu robotických systémů se přistupuje až příliš automaticky, dokonce jsou některé klíčové elementární problémy dnes považovány za zcela vyřešené a odsouvané tak odbornou veřejností do pozadí. V souvislosti s robotikou se tak dnes především hovoří o problémech spojených s umělou inteligencí jako je automatické rozpoznávání pro navádění robotů, autonomní chování a rozhodování, procesy učení atd. Bezpochyby takové problémy v moderní vědě hrají důležitou roli však spíše na úrovni humanoidních a částečně či zcela autonomních zařízení. Nicméně ani takové systémy se v robotice neobejdou bez uspokojivého řešení problémů elementárních. Právě tyto elementární problémy nakonec diktují, jestli celé robotické zařízení je vůbec funkční s ohledem na realizování požadovaných pohybů, energetické náročnosti, volbu a dimenzování nosných konstrukcí, kloubů a pohonů, realizace řídicích algoritmů, a je tedy možné efektivně aplikovat další „vyšší“ algoritmy umělé inteligence. Mezi tyto běžně řešené úkoly při návrhu robotického manipulátoru patří zejména:

- přímý a inverzní geometrický model (vztah mezi polohami zobecněných a kloubových souřadnic, tedy polohou koncového efektoru a polohou aktuátorů)
- přímý a inverzní kinematický model (vztah mezi rychlostmi, zrychleními či vyššími časovými derivacemi polohy zobecněných a kloubových souřadnic)
- identifikace a vyřešení singulárních poloh (sériové a paralelní singularity manipulátorů přinášejí kritické problémy při řízení pohybu manipulátorů)
- vyšetření pracovních prostorů manipulátorů (různé typy pracovních prostorů: *constant orientation workspace*, *translation workspace*, *maximal workspace*, *reachable workspace*, *dexterous workspace* atd.)
- dynamické modelování manipulátorů (přímý a inverzní dynamický model)
- plánování pohybu manipulátorů (interpolační a aproximační metody generování pohybu koncového efektoru s ohledem na plynulost pohybu, časově optimální trajektorii, definovanou rychlost podél obecných křivek atd.)
- návrh řízení pro manipulátory (decentralizované a centralizované metody řízení, pokročilé metody řízení - prediktivní řízení, robustní řízení, řízení poddajných konstrukcí manipulátorů, tlumení vibrací, atd.)

Většina výše uvedených problémů je obsáhle shrnuta v řadě předních a kvalitních publikacích [74], [95], [44], [66]. Přestože se může zdát, že jsou tyto elementární problémy vyřešeny, stále se, zejména pak v praktických a průmyslových aplikacích, objevují nové problémy a úskalí, které nejsou v žádném případě vyřešeny uspokojivě. Příkladem může být právě problém kinematického modelování manipulátoru a s tím související témata, zajímavým způsobem zpracován v [71]. Autor zde upozorňuje na celosvětový trend, který považuje

výpočet kinematiky manipulátorů za vyřešený problém. Navíc, díky rapidnímu vylepšení a zlevňování komponent řídicího systému (výkonné počítače, inteligentní čidla a pohony), lze mechanické nedostatky snadno kompenzovat aktivním řízením, a tedy podrobná kinematická analýza nehraje zvláště významnou roli při návrhu manipulátoru. Autor však ukazuje na následující fakty:

- náklady na mechanickou část manipulátoru nepřesahují zpravidla 20-30% celého systému
- měření chyb v mechanické konstrukci je sice možné, nicméně vývoj řídicího systému pro jejich následnou kompenzaci je velmi obtížný a zdlouhavý
- výpočetní výkon by měl být využit především na vývoj „intelligence“ manipulátoru bez nutnosti jej využívat pro zásah do chování manipulátoru dané jeho architekturou

Dále autor zmiňuje některé doposud otevřené problémy v robotice, které dodnes nejsou uspokojivě řešeny, zejména pak problém *syntézy a optimalizace* manipulátorů.

1.2. Strukturální a parametrická optimalizace

Přesto, že návrh robotických zařízení s sebou bezesporu nese nutnost věnovat se všem výše uvedeným problémům, významnou roli zde hraje tzv. **strukturální a parametrická syntéza (strukturální a parametrická optimalizace)**. Jinými slovy, jakým způsobem vůbec konstruovat dané zařízení, aby vyhovělo všem požadavkům a zároveň maximálním možným způsobem redukovalo komplikace při řešení přidružených problémů (výpočet kinematických transformací, návrhy a realizace algoritmů řízení, atd.). Tato oblast je bohužel často opomíjena, což s sebou v řadě případů nese nemalé problémy, které mnohdy lze jen obtížně dále řešit, nebo dokonce tyto není možné řešit vůbec. Uveďme některé příklady:

- **Nevhodná konstrukce manipulátoru s ohledem na umístění kloubů a ramen** (strukturální syntéza, viz Kapitola 2) může výrazně zkomplikovat řešení kinematických úloh (IGM, DGM, IIK, DIK). V drtivé většině případů v průmyslové praxi je strukturální návrh konstrukce určen již konkrétní aplikací, ve které bude manipulátor využit. Strukturální návrh je tak zpravidla navržen odborníky z oblasti nasazení manipulátoru. V některých případech je nutné strukturální návrh dále modifikovat v průběhu návrhu manipulátoru a jeho řídicího systému. Typickým případem takové modifikace je situace, kdy pro původně navržený manipulátor nelze uspokojivě vypočítat právě kinematické úlohy, avšak relativně drobná změna ve strukturálním uspořádání ramen a kloubů vede na zachování požadované funkčnosti manipulátoru a zároveň k výrazné redukcí výpočetní složitosti kinematických úloh. Například je možné docílit kinematické dekompozice 6 DoF sériového manipulátoru s klouby typu **R** na více nezávislých celků (typicky na translační část manipulátoru a sférické zápěstí, viz [125]), [128]), a tím dekomponovat i řešení IGM na dvě soustavy rovnic a získat tak řešení IGM v uzavřeném tvaru. V obecném případě sériového manipulátoru (libovolně umístěné osy **R** kloubů, z nichž žádná po sobě jdoucí trojice netvoří sférické zápěstí - osy těchto kloubů se neprotínají v jediném bodě) však lze ukázat, viz [44], [87], [62], že IGM vede na řešení (minimálního) polynomu 16. řádu, a tudíž neexistuje analytické řešení IGM.
- **Nevhodné navržení parametrů** (parametrická syntéza, viz Kapitola 3) ramen a kloubů manipulátoru (typicky např. Denavit-Hartenbergových [18] či Khalil-Kleinfingerových parametrů [46], [125], reprezentující délky ramen a umístění kloubů) nelze docílit požadovaných DoF koncového efektoru, není možné pokrýt celý požadovaný pracovní prostor či dochází při požadovaném pohybu manipulátoru k jeho

přiblížení k singulárním polohám. Dále často dochází k nevhodnému poměru převodu sil/momentů či rychlostí (kinetostatická dualita) mezi aktuátory a koncovým efektoru manipulátoru. Poměr mezi převody sil/momentů hraje významnou roli zejména pro sériové manipulátory, kdy vlivem otevřeného kinematického řetězce dochází k nasčítávání požadavků na síly/momenty v aktuátorech, které významně závisí právě na délce jednotlivých ramen. Snadno se tak může stát, že výsledný navržený manipulátor nemůže na svém koncovém efektoru již nést téměř žádné břemeno - navyšování výkonů aktuátorů je sice možné, nicméně poměr hmotnosti a výstupního momentu/síly aktuátoru je v reálně nasazovaných aktuátorech nepříznivý (hmotnost aktuátoru většinou roste velmi strmě s rostoucími požadavky na výstupní momenty/síly, navíc je třeba dále navyšovat pevnost, a tedy i robustnost, celé konstrukce manipulátoru).

- **Nevhodné plánování trajektorie manipulátoru** v případech, kdy tento požadavek můžeme ovlivnit. Tento problém spadá do parametrické syntézy (nalezení vhodných parametrů plánované trajektorie, např. interpolační body či parametry spline křivek, atd.). Příklady situací, kdy lze uvažovat o změně plánované trajektorie za účelem zlepšení určitých vlastností při pohybu manipulátoru jsou:

- „**Pick and place**“ aplikace, kde, vyjma situací, kdy je třeba objet danou překážku, požadujeme pouze přesun koncového efektoru manipulátoru z počáteční do cílové pozice (obecně polohy a orientace). V takovém případě je možné plánovat trajektorii mezi počátečním a cílovým bodem tak, aby mohlo být optimalizováno některé z vedlejších kritérií, např. vzdálenost od singulárních poloh, pohyb aktuátorů co nejbližší jejich středních poloh, minimalizace momentů/sil na aktuátorech způsobených gravitací, časově optimální trajektorie (ne vždy musí časově optimální trajektorie propojovat počáteční a cílovou pozici přímkou, neboť na takovém úseku se může manipulátor přiblížit singulární poloze, která povede na snížení rychlostí pohybu koncového efektoru z důvodu limitace maximálních rychlostí aktuátorů), atd.

- **Redundantní případy**. Redundantním případem během plánování trajektorie manipulátoru rozumíme stav, kdy k potřebnému pohybu manipulátoru není zapotřebí všech DoF, který manipulátor umožňuje. To může nastat ve dvou situacích. Buď se jedná o manipulátor ze své konstrukce redundantní, tzn. počet nezávislých aktuátorů převyšuje počet DoF koncového efektoru, např. 7 DoF sériový manipulátor *Dextrous Lightweight Arm LWA 4D* firmy Schunk pro polohování a orientování součástí v prostoru (požadováno 6 DoF), viz Obrázek 1.1(a), nebo je některý DoF koncového efektoru nahrazen pohybem pracovního nástroje, např. orientace kolem rotační osy frézy připevněné na koncový efektor 6DoF manipulátoru ABB IRB6640 firmy ABB, viz Obrázek 1.1(b).

V takových případech je opět možné plánovat pohyb manipulátoru tak, aby bylo optimalizováno nějaké vedlejší kritérium.



(a) Dextrous Lightweight Arm LWA 4D



(b) ABB IRB6640

Obrázek 1.1.: Příklady redundantních manipulátorů

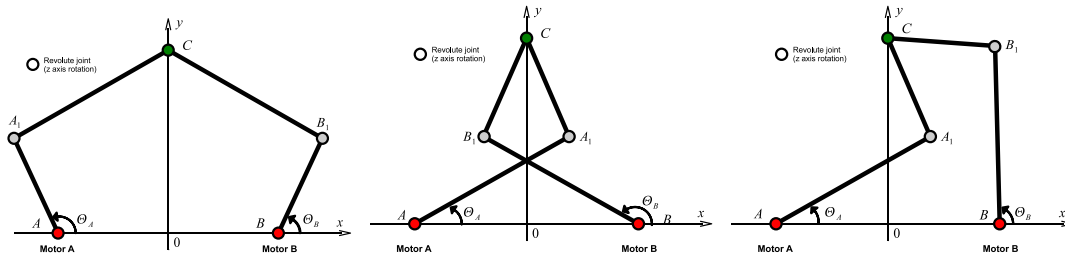
- **Spojitosť vyšších časových derivací plánovaného pohybu.** Na optimalizaci trajektorie lze nahlížet i tak, že požadujeme co možná nejvíce přirozený a plynulý pohyb koncového efektoru manipulátoru. Tento požadavek je zřejmý, neboť nespojitosti časových derivací, tedy rychlostí, zrychlení a jerku vede k momentovým/silovým rázům v konstrukci manipulátoru a v samotných aktuátorech (přirozeně, např. skoková změna ve zrychlení odpovídá skokové změně v působící síle/momentu), což může vést např. k vybuzení reziduálních vibrací.

1.3. Typické úlohy optimalizace vyplývající z dosavadních řešených projektů

Předložená práce byla motivována celou řadou reálných problémů, které musely být řešeny s ohledem na optimální návrh často nestandardních robotických architektur s komplexními požadavky na jejich chování (kriteria optimality, omezení, atd.). Uvedme proto v této kapitole stručný přehled a popis hlavních výsledků v rámci projektů a další výzkumné činnosti, které byly doposud řešeny a optimální návrh byl jejich nedílnou součástí. Některé z uvedených problémů budou dále podrobně analyzovány v průběhu textu.

1.3.1. Planární paralelní řadící robot

Cílem výzkumné činnosti byl návrh architektury řadícího robotu a jeho následná parametrická optimalizace. Řadící robot byl vyvíjen v součinnosti s firmou ATEGA s.r.o. a byl určen k automatizovaným testům řazení převodovek, kdy navržený manipulátor byl svým koncovým efektoem připevněn k řadící páce testované převodovky. Za tímto účelem byly navrženy 3 možné uspořádání planárního paralelního manipulátoru s 2 DoF koncového efektoru (Dual Scara), kde byl koncový efektor manipulátoru připojen k řadící páce prostřednictvím sférického kloubu s možností translačního posunu ve směru řadící páky, viz Obrázek 1.2.

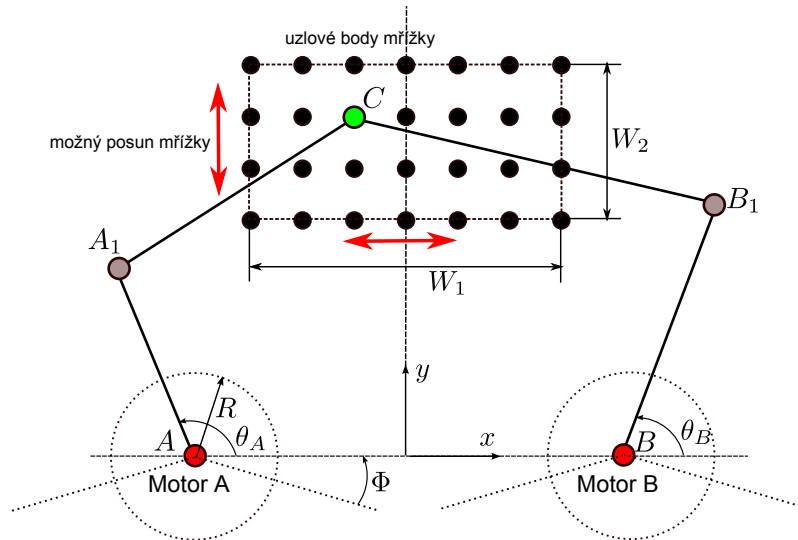


Obrázek 1.2.: Řadící robot - planární paralelní manipulátor (3 varianty)

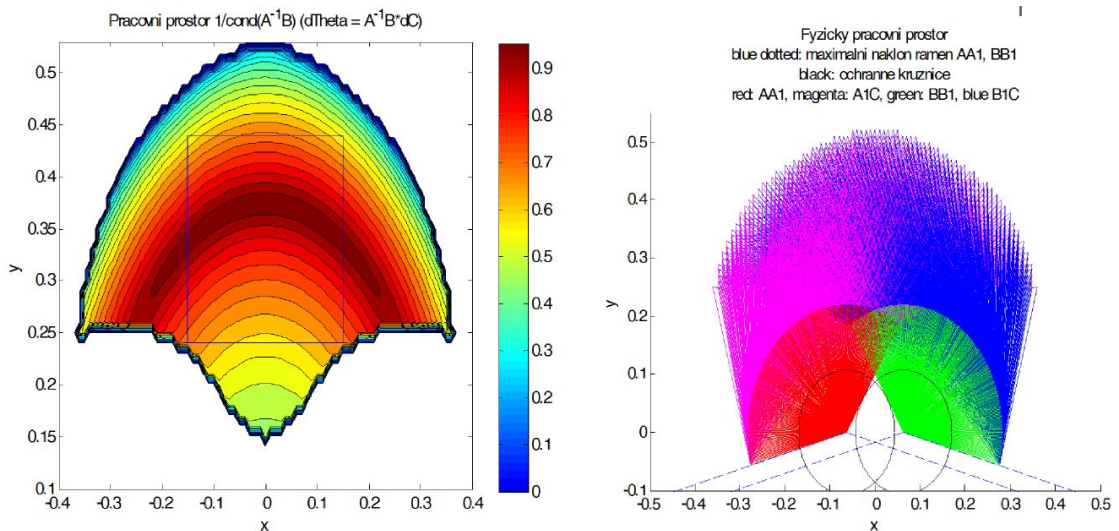
Cílem optimalizace bylo nalezení délek ramen $L_1 = \|\mathbf{AA}_1\| = \|\mathbf{BB}_1\|$, $L_2 = \|\mathbf{A}_1\mathbf{C}\| = \|\mathbf{B}_1\mathbf{C}\|$ a $L_0 = \|\mathbf{AB}\|$ takových, aby byla splněna omezení na maximální vyklonění ramen Φ , poloměr tzv. ochranné kružnice R (minimální povolená vzdálenost ramen od daného aktuátoru), minimální vzdálenost ramen ΔL (zamezení kolizí - dáno minimální povolenou vzdáleností úseček reprezentující ramena) a zároveň koncový efektor manipulátoru (bod \mathbf{C}) bylo možné polohovat uvnitř obdélníku daných rozměrů ($W_1 \times W_2$, uvažovaný pracovní prostor) - parametr posunu obdélníku v ose \mathbf{x} a \mathbf{y} byl rovněž optimalizován. Význam jednotlivých parametrů je znázorněn na Obrázku 1.3. Kritériem optimalizace byla maximalizace minimálního čísla podmíněnosti kinematického jakobiánu manipulátoru (dexterity index, viz Kapitola 3.2.1), tedy nalezení nejlepšího možného kompromisu mezi přenosem sil/silových momentů a rychlostí z aktuátorů manipulátoru na jeho koncový efektor. Alternativně bylo ke zvolenému kritériu optimality aditivně přidáno ještě kritérium hodnotící celkovou velikost robotu (ve smyslu součtu hledaných délek ramen v poměru k uvažovaným maximálním přípustným hodnotám) \Rightarrow vážený kompromis mezi podmíněností a velikostí manipulátoru.

Vlastní proces optimalizace byl založen na metodě *Monte Carlo*, viz Kapitola 3.2.3. Hledané kinematické parametry (délky ramen) byly generovány náhodně s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti z přípustných omezených intervalů. Pro každou generovanou sadu parametrů byla nalezena minimální hodnota kritériální funkce přes uvažovaný pracovní prostor (v diskretizovaných bodech). Po daném počtu iterací byla vybrána sada parametrů zajišťující maximální hodnotu minima kritériální funkce přes uvažovaný pracovní prostor. Pracovní prostor optimalizovaného manipulátoru pro 1. variantu je pro ilustraci znázorněn na Obrázku 1.4. Poznamenejme, že hledaný parametr posunu uvažovaného pracovního prostoru ve směru osy \mathbf{x} má význam pouze v případě nesymetrického uspořádání v 3. uvažované variantě.

1.3. Typické úlohy optimalizace vyplývající z dosavadních řešených projektů



Obrázek 1.3.: Uvažovaný pracovní prostor manipulátoru a význam některých parametrů



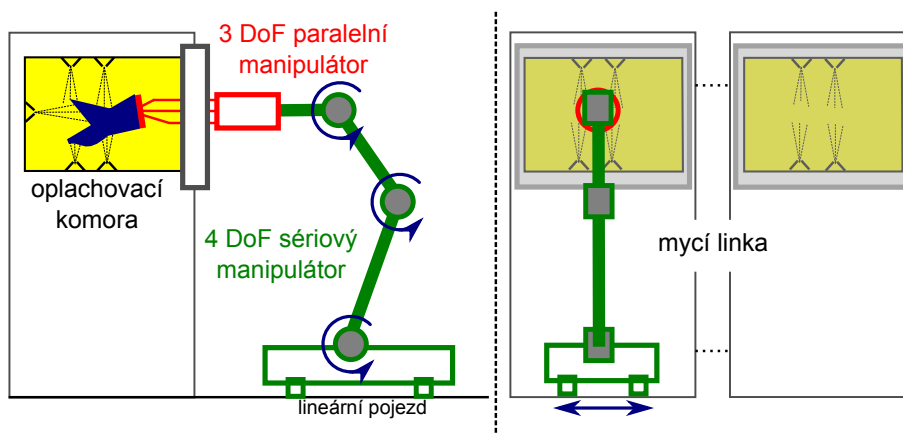
Obrázek 1.4.: Výsledný pracovní prostor manipulátoru včetně fyzického pracovního prostoru (vyznačeny oblasti pohybu dílčích ramen manipulátoru)

Podrobné informace k uvedené parametrické optimalizaci lze nalézt v [122, 123]. Výsledný reálný prototyp nebyl nakonec realizován a obdobný projekt byl později řešen ve spolupráci s firmou ZF Engineering Plzeň (jiná konstrukce, realizace a nasazení prototypu v reálném provozu).

1.3.2. Sério-paralelní manipulátor AGEBOT

Séριο-paralelní manipulátor AGEBOT (AGgressive Environment roBOT) je manipulátor určený k polohování technologických dílů uvnitř mycích komor průmyslových mycích linek, viz Obrázek 1.5. Manipulátor se skládá ze 4 DoF sériové části tvořené kloubem typu **P** (lineární pojezd) a třemi **R** klouby umožňující polohovat svůj koncový efektor libovolně v prostoru (3 DoF translační) a orientovat jej v rovině kolmé na osy rotací **R** kloubů (1 DoF rotační). Na koncovém efektoru sériové části je připojen 3 DoF paralelní manipulátor

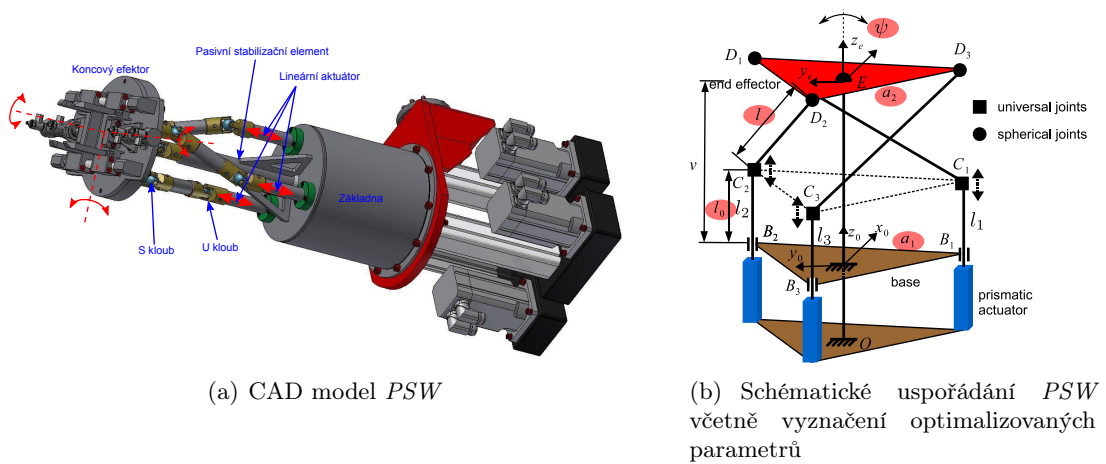
typu *sférického zápěstí* (*PSW - Parallel Spherical Wrist*), který umožňuje nezávisle orientovat manipulovanou součást ve třech osách (3 DoF rotační). Hlavním důvodem použití nestandardní paralelní architektury *PSW* byla možnost umístit 3 nezávislé lineární aktuatory (rotační motory s kuličkovými šrouby) vně samotné oplachovací komory mycí linky (snadno utěsnitelné přímé výsuvy lineárních aktuatorů ze základny *PSW* + přetlakování základny *PSW*). Všechny zbývající (neelektrické) části *PSW* (ramena, klouby, pneumatický uchopovač) pak bylo možné vyrobit s dostatečnou odolností vůči vnitřnímu prostředí mycí komory (tlak, teplota, agresivní chemikálie). Podrobný kinematický popis manipulátoru AGEBOT lze nalézt v [26, 126], problematika kompenzace gravitačního působení (majoritní složka silových momentů v aktuatorech pro pomalý předpokládaný pohyb manipulátoru) je analyzována v [116], dynamický model a návrh řízení lze nalézt v [25]. Analýza možných metod kinematické kalibrace manipulátoru je popsána v [127].



Obrázek 1.5.: Integrace manipulátoru AGEBOT do průmyslového mytí

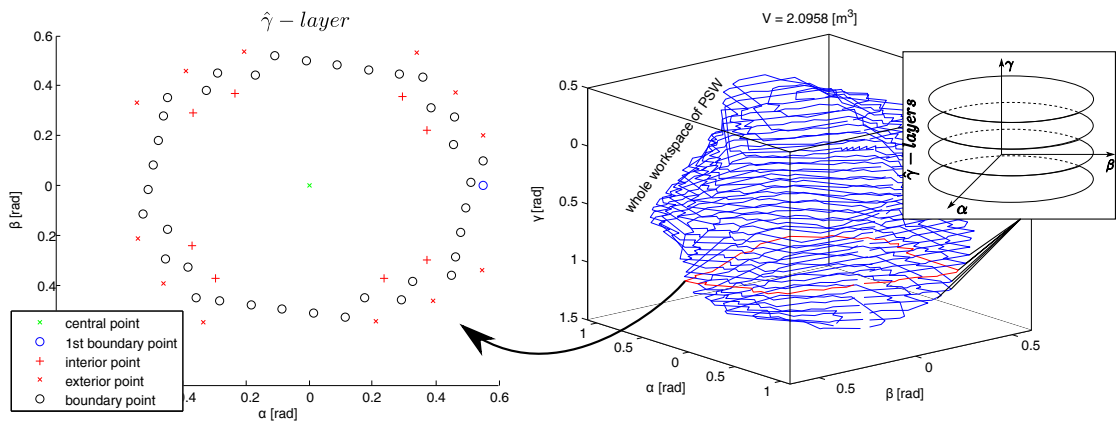
Vzhledem k relativně komplikované paralelní kinematické architektuře *PSW*, viz Obrázek 1.6(a) byla navržena optimalizační úloha, viz [121, 124], pro nalezení kinematických návrhových parametrů a_1, a_2 (délky hran rovnostranných trojúhelníků reprezentující základnu a koncový efektor), l délka spojovacích ramen aktuatorů a koncového efektoru, ψ natočení koncového efektoru vůči základně v domovské poloze ($\alpha = \beta = \gamma = 0$), l_0 domovské vysunutí lineárních aktuatorů (definující společně s l a ψ celkovou výšku v). Poloha koncového efektoru je dána zobecněnými souřadnicemi $\mathbf{X} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$ definující 3 Eulerovy úhly postupných rotací koncového efektoru vzhledem k základně ve schématu XYZ. Kloubové souřadnice jsou reprezentovány délkami výsuvů l_1, l_2, l_3 lineárních aktuatorů. Cílem optimalizace bylo nalezení maximálního pracovního prostoru regulárního tvaru uvažovaného jako těleso parametrizované rozsahem zobecněných souřadnic \mathbf{X} s minimální danou (garantovanou) kvalitou (minimální požadovaná hodnota μ čísla podmíněnosti přes uvažovaný regulární pracovní prostor). Regulární tvar byl volen jako válec o objemu V_{inCyl} (optimalizované - maximalizované kritérium), s poloměrem odpovídajícím $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a výškou γ vepsaný do skutečného pracovního prostoru manipulátoru (obecné těleso v prostoru α, β, γ), viz Obrázek 1.8. Omezení kladené na nalezení pracovního prostoru byly: maximální povolené vysunutí aktuatorů Δl_i^{\max} (tzn. $l_i = \langle l_0 - 0.5\Delta l_i^{\max}, l_0 + 0.5\Delta l_i^{\max} \rangle$), maximální povolené natočení (odklon) δ^{\max} v **S** a **U** kloubech, minimální povolená vzdálenost l^{\min} mezi rameny $\mathbf{C}_i\mathbf{D}_i$ a \mathbf{OE} , minimální hodnota μ^{\min} čísla podmíněnosti kinematického jakobiánu (*dexterity index*).

1.3. Typické úlohy optimalizace vyplývající z dosavadních řešených projektů



Obrázek 1.6.: Paralelní manipulátor typu *PSW* (součást manipulátoru AGEBOT)

Algoritmus hledání pracovního prostoru manipulátoru byl založen na metodě nalezení jeho dílčích hranic v jednotlivých diskretizovaných vrstvách (ve směru γ , použit diskretní algoritmus založený na prohledávání okolí hranice pracovního prostoru v jedné 2 DoF vrstvě), viz Obrázek 1.7. Algoritmus včetně algoritmu vepsání největšího možného pracovního prostoru regulárního tvaru (válec) je detailně popsán v [121, 124].

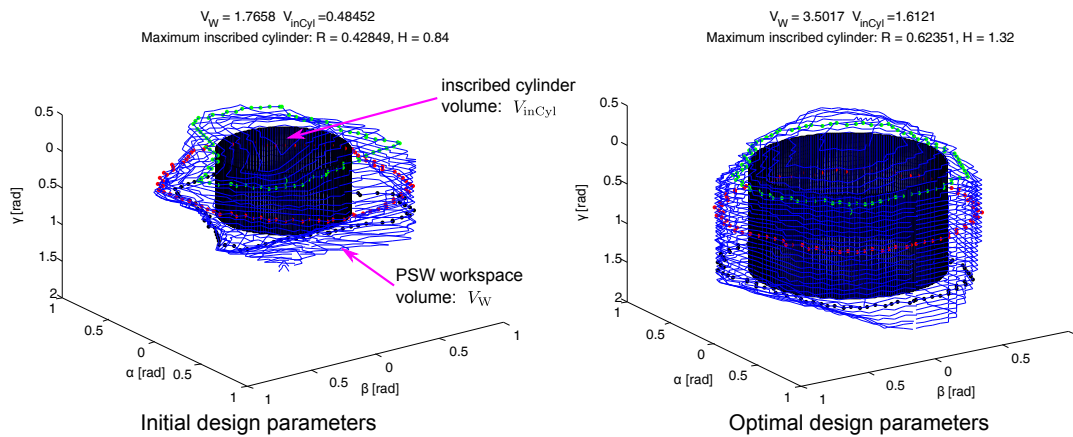


Obrázek 1.7.: Princip nalezení pracovního prostoru

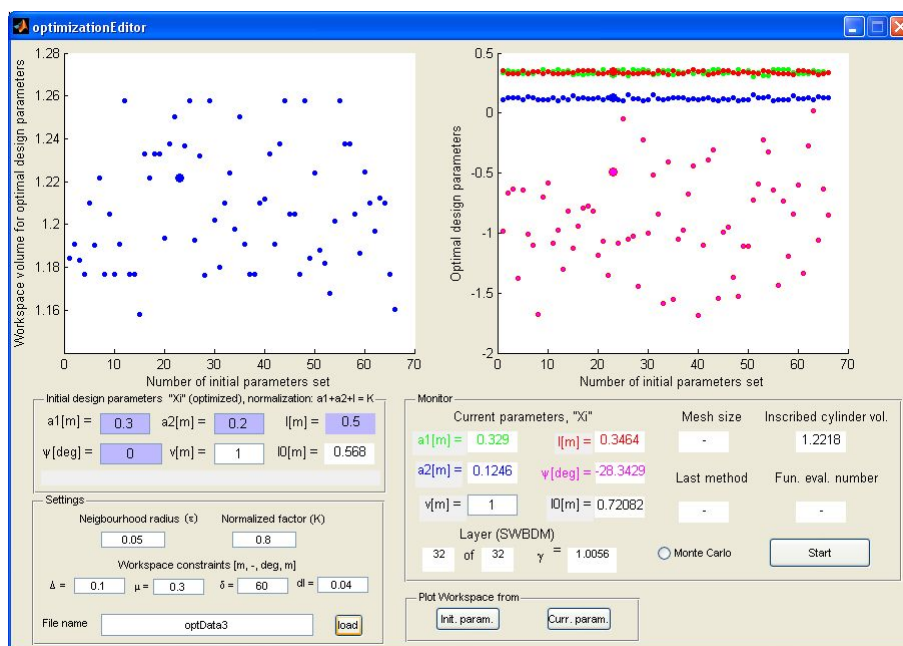
Optimalizační úloha s nelineární účelovou funkcí (objem vepsaného pracovního prostoru regulárního tvaru V_{inCyl}) a nelineárními výše uvedenými omezeními typu nerovnosti byla řešena prostřednictvím algoritmu přímého prohledávání, viz Kapitola 3.2.3, implementovaného v Matlabu jako *General Pattern Search Algorithm* (funkce `patternsearch`). Výsledek parametrické optimalizace pro počáteční a optimalizované hodnoty kinematických návrhových parametrů $\xi = [a_1 \ a_2 \ l \ l_0 \ \psi]^T$ jsou znázorněny na Obrázku 1.8.

Pro účely opakování optimalizace kinematických návrhových parametrů *PSW* pro různé hodnoty omezení a požadované kvality pracovního prostoru bylo vyvinuto a implementováno grafické uživatelské rozhraní v prostředí Matlab, viz Obrázek 1.9, umožňující intuitivní konfiguraci a vizualizaci optimalizačního algoritmu (včetně jednorázové Monte Carlo optimalizace pro počáteční hrubý odhad parametrů a vizualizaci pracovního prostoru manipulátoru před a po optimalizaci).

Kapitola 1. Úvod

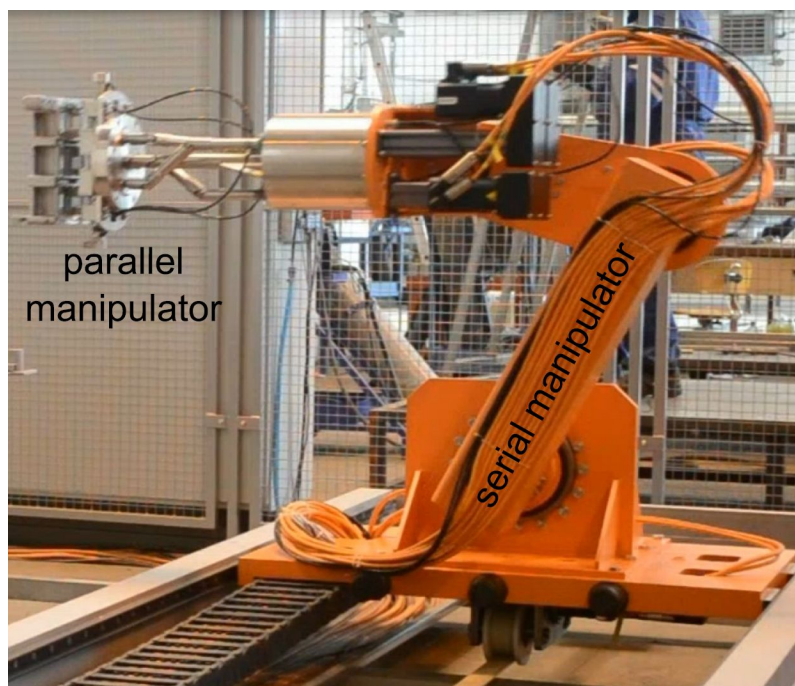


Obrázek 1.8.: Vepsaný pracovní prostor regulárního tvaru (válec) a výsledek optimalizace



Obrázek 1.9.: GUI: Správa optimalizace *PSW*

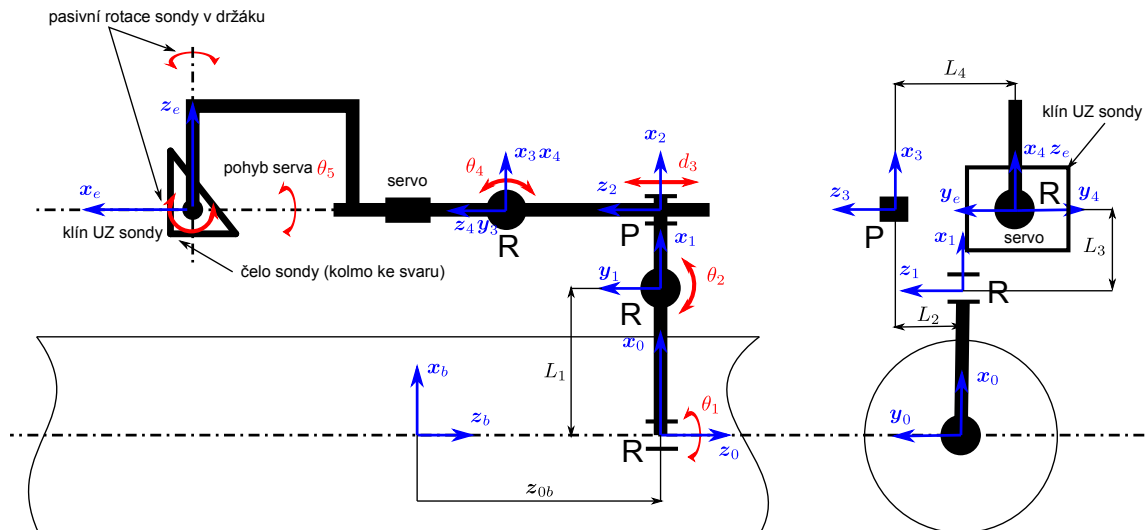
Výsledný reálný prototyp manipulátoru je znázorněn na Obrázku 1.10 a byl vyvinut ve spolupráci s firmou EuroTec JKR s.r.o. Manipulátor je v současnosti nabízen v portfoliu firmy EuroTec JKR s.r.o. Manipulátor AGEBOT byl hlavním výsledkem projektu MPO (Výzkum a vývoj modulárního robotického manipulátoru pro nasazení v odmašťovacích a odlakovacích linkách) č. FR-TII/174. Demonstrační video lze nalézt zde: <https://youtu.be/sYWX33oE8wc>.



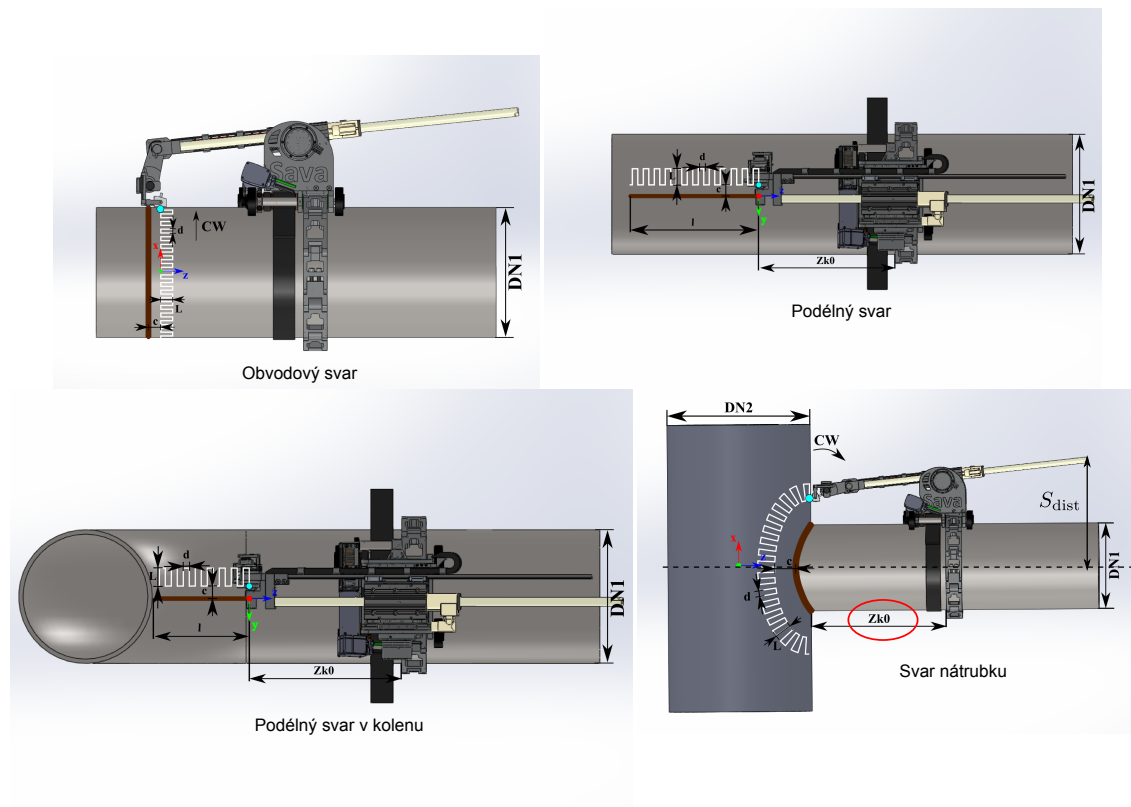
Obrázek 1.10.: Prototyp manipulátoru AGEBOT

1.3.3. Manipulátor SÁVA pro NDT kontroly potrubních svarů

Manipulátor SÁVA je sériový manipulátor s 5 DoF koncového efektoru s nestandardní kinematickou architekturou. Manipulátor je určen k nedestruktivní kontrole (Non Destructive Testing - NDT) potrubních svarů komplexních geometrií a byl vyvinut ve spolupráci s ÚJV Řež a.s. Schématické uspořádání manipulátoru Sáva je znázorněno na Obrázku 1.11, na Obrázku 1.12 jsou poté znázorněny všechny uvažované trajektorie, které manipulátor za účelem NDT testování svarů prostřednictvím ultrazvukových (UZ) sond instalovaných na jeho koncovém efektoru může vykonávat. Klouby manipulátoru jsou tvořeny aktivními klouby typu \mathbf{R} (obvodový pojezd po obvodu potrubí realizovaný vedením a hnaným obvodovým řemenem), \mathbf{R} (naklopení lineárního výsuvu), \mathbf{P} (lineární výsuv), \mathbf{R} (orientace UZ sondy), \mathbf{R} (pomocné servo, orientace „nosu“ UZ sondy - kolmost k rovině svaru) a dvojice pasivních \mathbf{R} kloubů v držáku UZ sondy (sloužící k pasivnímu udržení kontaktu UZ sondy s povrchem potrubí - držák UZ sondy je doplněn pružinou). Kloubové souřadnice manipulátoru jsou postupně označeny jako $\mathbf{Q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ d_3 \ \theta_4 \ \theta_5]^T$. Manipulátor umožňuje nezávisle polohovat 3 translační DoF koncového efektoru x, y, z a dva rotační DoF koncového efektoru (orientace držáku UZ sondy ve smyslu odklonu od normály k povrchu potrubí ϕ a orientace „nosu“ UZ sondy ψ), tedy zobecněné souřadnice $\mathbf{X} = [x \ y \ z \ \phi \ \psi]^T$. Kompletní kinematická analýza manipulátoru SÁVA včetně algoritmů generování svarů je prezentována v [131, 130, 132], návrh realizace řídicího systému manipulátoru lze nalézt v [129] a výsledná podoba manipulátoru a jeho řízení (včetně modifikací přidáním serva pro polohování „nosu“ sondy) je prezentována v [133]. Algoritmy interpolace generovaných trajektorií s ohledem na hladký průběh pohybu a předepsaný profil rychlosti podél křivky trajektorie jsou diskutovány v [115].

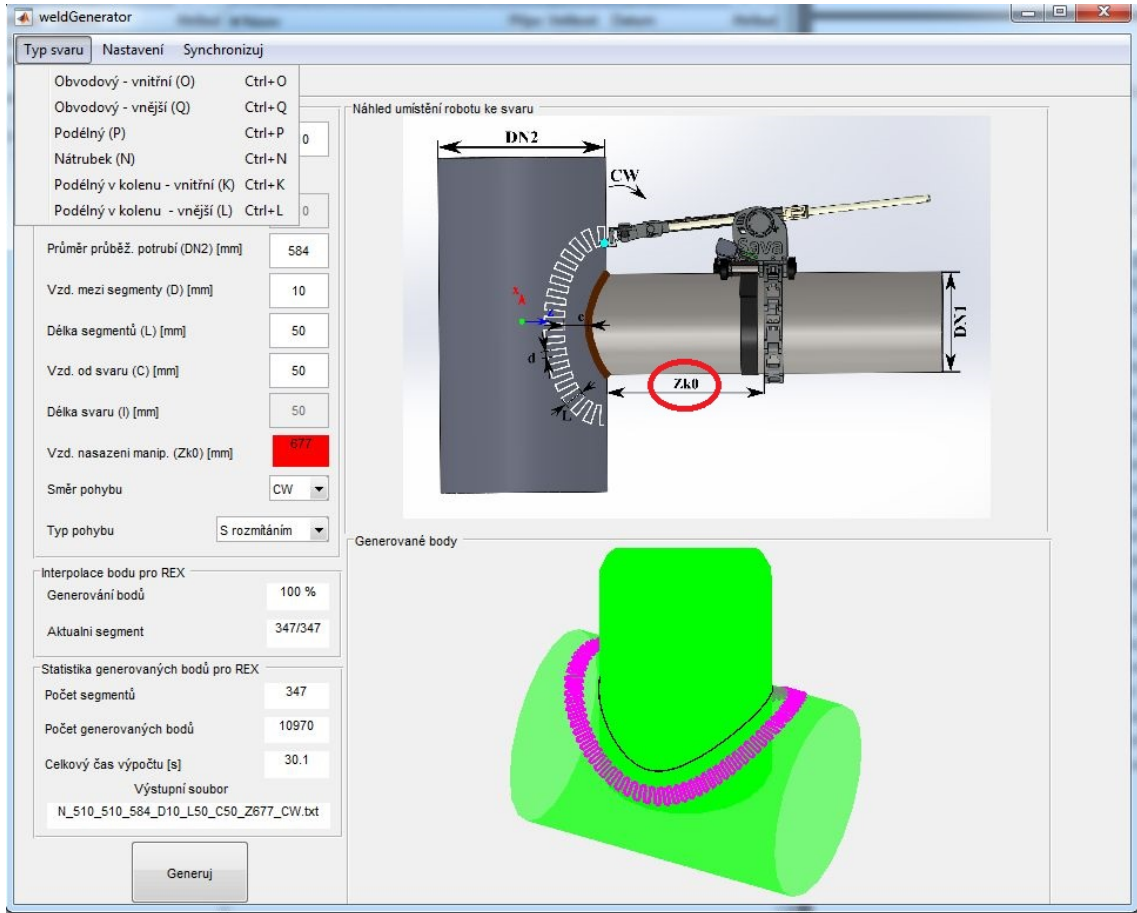


Obrázek 1.11.: Schématické uspořádání manipulátoru SÁVA



Obrázek 1.12.: Uvažované typy svařů testované pomocí manipulátoru SÁVA

Za účelem uživatelského generování požadovaných trajektorií koncového efektoru manipulátoru bylo vyvinuto grafické uživatelské rozhraní, viz Obrázek 1.13. Vygenerované trajektorie byly poté předávány přímo do řídicího systému manipulátoru ve formátu souborů dat.



Obrázek 1.13.: GUI: Generátor trajektorií svarů manipulátoru SÁVA

Optimalizační úloha byla pro manipulátor SÁVA použita za účelem nalezení parametru z_{k0} , viz Obrázek 1.12, 1.13 (resp. z_{ob} viz Obrázek 1.11), tedy optimální vzdálenost nasazení manipulátoru na potrubí pro testování podélného svaru v kolenu a svaru nátrubku (tzn. pro diskretizovanou množinu zobecněných souřadnic \mathbf{X}_{opt} definující uvažovanou trajektorii), a integrována do aplikace generátoru požadovaných trajektorií. Optimalizační úloha byla definována jako optimalizační úloha s omezeními typu nerovnosti transformovanými formou penalizací do hodnoty výsledné kriteriální funkce J (aditivně k funkci účelové), viz Kapitola 3.2.3:

$$z_{k0}^* = \operatorname{argmax}_{z_{k0} \in \mathcal{Z}_{k0}} \left(\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{opt}} \frac{1}{J(\mathbf{X}, z_{k0})} \right) \quad (1.1)$$

$$J(\mathbf{X}, z_{k0}) = J_{obj}(\mathbf{X}, z_{k0}) + J_{pen}(\mathbf{X}, z_{k0})$$

kde účelová funkce J_{obj} je definována jako:

$$J_{obj}(\mathbf{X}, z_{k0}) = 1 + \frac{1}{4} \left(\operatorname{Lim}(S_{dist}(\mathbf{X}, z_{k0}), R, NaN) + \operatorname{Lim}(\theta_2(\mathbf{X}, z_{k0}), \theta_2^{\min}, \theta_2^{\max}) + \right. \\ \left. + \operatorname{Lim}(d_3(\mathbf{X}, z_{k0}), d_3^{\min}, d_3^{\max}) + \operatorname{Lim}(\theta_4(\mathbf{X}, z_{k0}), \theta_4^{\min}, \theta_4^{\max}) \right) \quad (1.2)$$

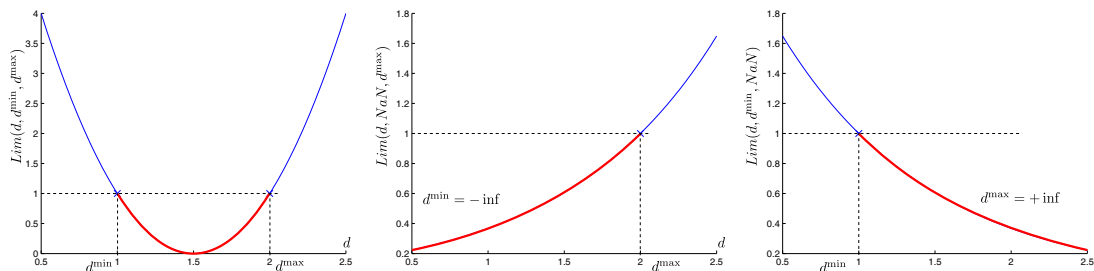
kde θ_2 , d_3 , θ_4 jsou příslušné kloubové souřadnice manipulátoru, funkce S_{dist} vrací hodnotu vzdálenosti konce lineárního výsuvu od osy potrubí (o poloměru R), na které je manipulátor připevněn, viz Obrázek 1.12, \star^{\min} , \star^{\max} jsou příslušná omezení na polohu aktuátorů a funkce Lim hodnotí míru vyhovění dané proměnné definovaným limitům, viz Obrázek 1.14, a její implementaci lze nalézt v [137], \mathcal{Z}_{k0} je přípustná množina parametru z_{k0} .

Účelová funkce tedy udává míru, zda-li se uvažované aktuátory manipulátoru pohybují uprostřed svého povoleného rozsahu (pro optimální hodnotu $J_{\text{obj}} \rightarrow 1$), tyto rozsahy vyplývají přímo s konstrukčně-technologických parametrů manipulátoru (omezení pohybu aktuátorů a možné kolize).

Penalizační funkce je definována následovně:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{pen}}(\mathbf{X}, z_{k0}) &= \sum_{i=1}^4 K_i \cdot P_i \\
 P_i &= \begin{cases} 0 & \text{pro: } \mathbf{f}[i] \in \langle \mathbf{f}^{\min}[i], \mathbf{f}^{\max}[i] \rangle \\ \mathbf{f}^{\min}[i] - \mathbf{f}[i] & \text{pro: } \mathbf{f}[i] < \mathbf{f}^{\min}[i] \\ \mathbf{f}[i] - \mathbf{f}^{\max}[i] & \text{pro: } \mathbf{f}[i] > \mathbf{f}^{\max}[i] \end{cases} \quad (1.3) \\
 \mathbf{f} &= [S_{\text{dist}}(\mathbf{X}, z_{k0}), \theta_2(\mathbf{X}, z_{k0}), d_3(\mathbf{X}, z_{k0}), \theta_4(\mathbf{X}, z_{k0})] \\
 \mathbf{f}^{\min}[i] &= [R, \theta_2^{\min}, d_3^{\min}, \theta_4^{\min}] \\
 \mathbf{f}^{\max}[i] &= [NaN, \theta_2^{\max}, d_3^{\max}, \theta_4^{\max}]
 \end{aligned}$$

kde $K_i = +\infty$ jsou penalizační konstanty zajišťující nekonečně velkou hodnotu kriteriální funkce J pro porušení libovolného omezení. Tedy platí, že pro $J = +\infty$ neexistuje řešení optimalizační úlohy, tedy manipulátor nelze nasadit na potrubí tak, aby jeho koncový efektor dokázal projet celou plánovanou trajektorií. V případě existence řešení optimalizační úlohy je nalezeno takové umístění z_{k0} manipulátoru na potrubí, která optimálně udržuje sledované polohy aktuátorů co možná nejdále od svých limitních poloh (robustnost vzhledem k případným nepřesnostem).

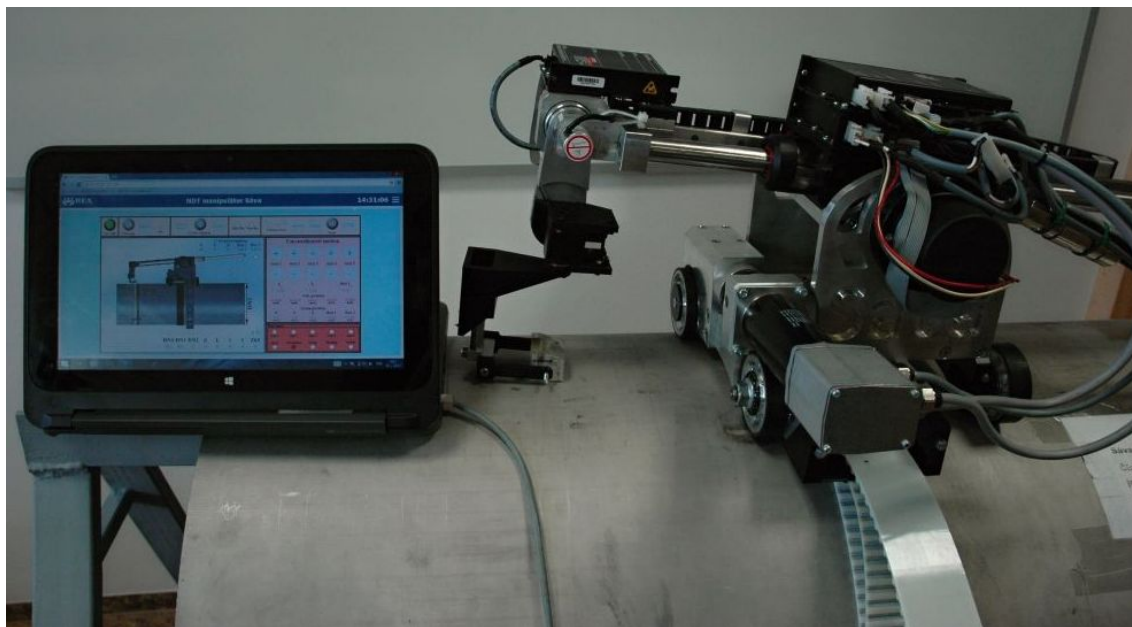


Obrázek 1.14.: Funkce Lim použitá pro hodnocení míry udržení daného parametru d uvnitř definovaných omezení (oboustranných d^{\min}, d^{\max} či jednostranných - se substitucí daného limitu symbolem NaN), funkce nabývá minimální (nulové) hodnoty pro hodnotu parametru uprostřed uvažovaného omezení (pro jednostranná omezení se hodnota funkce blíží limitně k nule), na hranicích omezení pak funkce nabývá hodnoty 1

Optimalizační úloha byla řešena jako úloha statické optimalizace prostřednictvím tzv. *Culling* algoritmu, viz Kapitola 3.3 a výsledná nalezená optimalizovaná hodnota parametru z_{k0} byla (pro definovaný typ a parametrizaci svaru) zobrazena v aplikaci generátoru trajektorií svarů jako hodnota optimálního umístění manipulátoru. Pokud bylo takto navržené umístění manipulátoru dodrženo operátorem, bylo zároveň zajištěno projetí koncového efektoru manipulátoru celou trajektorií. V opačném případě se sice manipulátor pohyboval po trajektorii korektně (díky procesu homování po nasazení manipulátoru), nicméně v průběhu pohybu mohlo dojít k porušení technologických omezení, a tedy k nouzového zastavení manipulátoru.

1.3. Typické úlohy optimalizace vyplývající z dosavadních řešených projektů

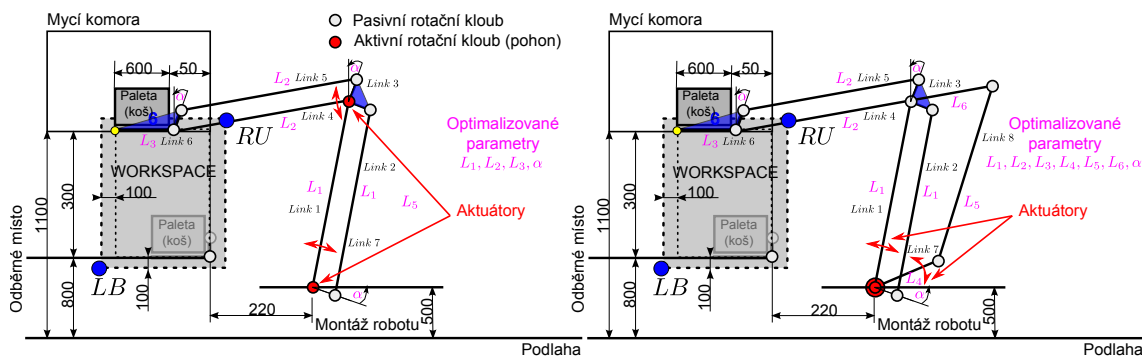
Výsledný reálný prototyp manipulátoru je znázorněn na Obrázku 1.15 (mechanická konstrukce byla vyvinuta ve spolupráci s firmou ATEGA s.r.o.). Manipulátor SÁVA byl hlavním výsledkem projektu TAČR (Výzkum, vývoj a validace univerzální technologie pro potřeby moderních ultrazvukových kontrol svarových spojů komplexních potrubních systémů jaderných elektráren) č. TA01020457. Demonstrační video lze nalézt zde: <https://youtu.be/dRKET4rQd7s>.



Obrázek 1.15.: Prototyp manipulátoru SÁVA

1.3.4. Paralelní manipulátor typu „zakladač“

Manipulátor typu „zakladač“ je 2 DoF paralelní manipulátor sloužící k zakládání palet (košů) s technologickými díly do mycích komor průmyslových myček. Manipulátor je koncipován jako alternativa sériové části manipulátoru AGEBOT a díky své paralelní architektuře umožňuje pasivně stabilizovat orientaci svého posledního ramene (typická vlastnost pro paletizační roboty). Manipulátor je uvažován ve dvou variantách, viz Obrázek 1.16, kde ve druhé uvažované variantě je, díky přidané paralelní struktuře, možno umístit oba aktuátory na nepohyblivou základnu manipulátoru. Cílem statické optimalizační úlohy, která je detailně popsána v Kapitole 3.3, konkrétně v Příkladech 3.6, 3.7, je nalezení kinematických návrhových parametrů manipulátoru, viz Obrázek 1.16, které minimalizují požadovaný moment působící v aktuátorech manipulátoru pro uvažovaný pracovní prostor regulárního tvaru (obdélník definovaný svými rohy LB , RU). Parametrická optimalizace byla provedena pro obě uvažované varianty manipulátoru a výsledky byly použity k rozhodnutí, zda-li a za jakých podmínek je výhodné využívat paralelní struktury za účelem umístění všech aktuátorů nepohyblivě na základnu manipulátoru (tedy. manipulátor neobsahuje žádný nesený aktuátor - přídavné hmotnosti, momenty setrvačnosti).



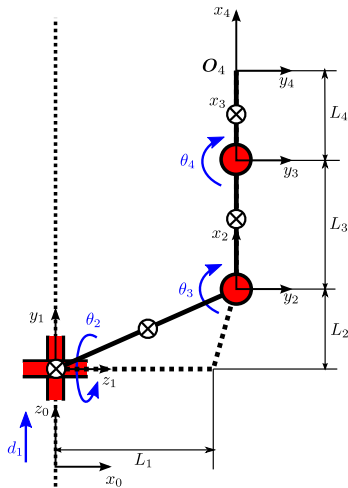
Obrázek 1.16.: Dvě uvažované varianty manipulátoru s vyznačenými optimalizovanými parametry

V současnosti je manipulátor vyvíjen v rámci projektu TAČR (CIDAM) č. TE02000103 ve spolupráci s firmou Eurotec JKR s.r.o. Detailní výsledky lze nalézt v [136].

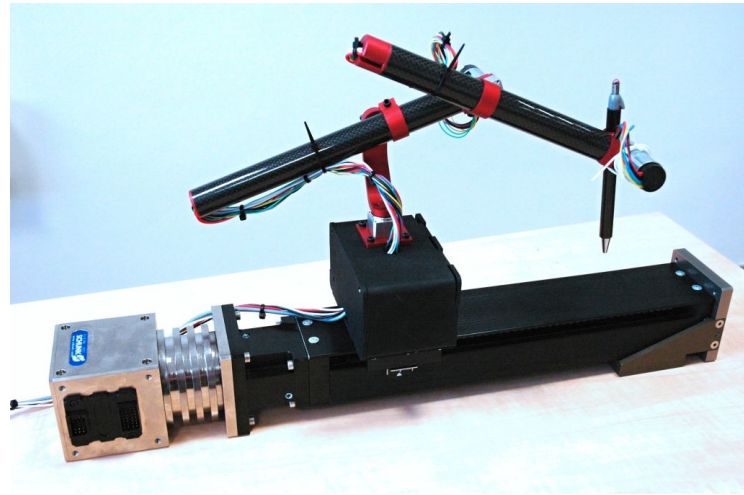
1.3.5. Výukový model sériového redundantního manipulátoru ALICE

Manipulátor ALICE je 4 DoF sériový redundantní manipulátor s klouby typu **PRRR**: lineární pojezd a trojice standardních rotačních aktuátorů, kloubové souřadnice $\mathbf{Q} = [d_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$. Manipulátor umožňuje nezávisle polohovat 3 translační DoF svého koncového efektoru, zobecněné souřadnice $\mathbf{O}_4^0 = [x \ y \ z]^T$ (redundantní manipulátor). Manipulátor ALICE, který byl navržen jako výukový model pro předměty související s robotikou a mechatronikou na katedře kybernetiky ZČU v Plzni je znázorněn na Obrázku 1.17(b), jeho kinematické uspořádání je znázorněno na Obrázku 1.17(a).

Cílem parametrické optimalizace manipulátoru ALICE bylo navržení optimální trajektorie pohybu lineárního pojezdu (výběr z nekonečného počtu možných řešení IGM pro redundantní manipulátory, pro konstantní zadané kinematické návrhové parametry) takového, který vyhovuje předepsané trajektorii koncového efektoru a zároveň minimalizuje rychlosti resp. síly/silové momenty v aktuátorech manipulátoru ve smyslu integračního kritéria (integrál kvadrátu normy rychlostí resp. sil/silových momentů podél celé trajektorie pohybu, viz Poznámka 3.9). Definice a řešení nastíněné optimalizační úlohy pro redundantní manipulátory je detailně popsáno v Kapitole 3.4.2, konkrétně v Příkladu 3.13.



(a) Schématické uspořádání manipulátoru ALICE



(b) Prototyp manipulátoru ALICE

Obrázek 1.17.: Sériový redundantní manipulátor ALICE

Manipulátor ALICE byl hlavním výsledkem projektů vnitřní soutěže na ZČU (Výukový model pro robotiku) č. VS-14-019 a (Výukový model pro robotiku - rozšíření, moderní algoritmy v robotice) č. VS-15-011. Detailní výsledky lze nalézt v [138, 139]. Mechanická konstrukce manipulátoru byla vyvinuta ve spolupráci s firmou SmartMotion s.r.o.

1.4. Hlavní cíle a výsledky práce

V Kapitole 1.3 byly zmíněny některé z řešených projektů týkající se optimalizace a syntézy robotických architektur, které zásadním způsobem ovlivnily náplň předložené práce. Problémy, které byly průběžně formulovány v rámci řešení uvedených projektů, byly dále rozvíjeny a konkretizovány za účelem vytvoření ucelené metodologie zabývající se optimalizací robotických architektur. Přesto, že předložený obsah práce nelze považovat za vyčerpávající řešení komplexní problematiky optimalizace robotických architektur, důraz byl kladen především na možnosti využití předložených postupů k řešení reálných požadavků na optimální návrh průmyslových manipulátorů, především takových, jejichž nestandardní kinematická architektura byla navržena na základě potřeby nasazení těchto manipulátorů ve specializovaných aplikacích. Zároveň je předložená metodologie založena na systematickém a obecném přístupu k optimalizaci manipulátorů, který hraje zásadní roli při vývoji nových robotických architektur v kontextu celosvětového přístupu označovaného jako tzv. *rapid prototyping*. Hlavní cíle a odpovídající přínosy (výsledky) práce lze kategorizovat následovně:

- **Vývoj a implementace podpůrných SW prostředků pro efektivní tvorbu virtuálních simulačních modelů**

Oblast výzkumu a vývoje, která bezprostředně nesouvisí s hlavním tématem práce, neboť se principiálně nezabývá tématem optimalizace robotických architektur. Nicméně, vzhledem k faktu, že přeložený přístup k optimálnímu návrhu robotických architektur má sloužit především jako prvotní nástroj k výzkumu a vývoji nových nestandardních robotických systémů pro relativně konkrétně definované vykonávané úlohy, je výhodné mít k dispozici odpovídající SW nástroje pro tvorbu virtuálních simulačních modelů. V našem případě se jedná zejména o soubor předimplementovaných funkcí v programovém prostředí Matlab a funkčních bloků v prostředí

Matlab/Simulink/SimMechanics, které umožňují efektivně realizovat standardní kinematické a dynamické úlohy a rychlým modulárním způsobem tak vytvářet komplexní simulační virtuální modely. Současně je výhodné tyto SW prostředky využívat přímo v optimalizačních algoritmech (např. za účelem vyčíslení hodnoty kriteriální funkce, atd.). Teoretický základ pro předimplementované funkce a funkční bloky je z velké části zahrnut v příloze práce, viz Příloha A, konkrétní funkce a funkční bloky formují novou knihovnu s názvem **robotLib**, viz [137], a jejich stručná dokumentace je uvedena v Kapitole A.11.

Identifikace vlastního přínosu práce:

Knihovna **robotLib** byla kompletně vyvinuta a implementována v rámci řešené práce a dále intenzivně využívána v algoritmech kinematické optimalizace předložených robotických architektur. Obecné algoritmy použité v knihovně **robotLib** byly odpovídajícím způsobem modifikovány za účelem vytvoření konzistentního SW nástroje pro modulární tvorbu virtuálních simulačních modelů s ohledem na uvažované přístupy k parametrické optimalizaci. Funkce a funkční bloky knihovny **robotLib** byly používány nejen ve vlastních uvedených demonstračních příkladech, ale zároveň byly i nedílnou součástí předložených algoritmů optimalizace.

- **Algoritmy parametrické optimalizace**

Budeme-li na optimální návrh robotických architektur nahlížet jako na obecný problém „zrození“ unikátního mechatronického zařízení, které má být optimalizováno k vykonávání předepsané úlohy, musí být brány do úvahy obě dříve zmíněné oblasti optimalizace, a to: *strukturální* i *parametrická* syntéza. Předpokládejme však dále, že (velmi komplexní) problém strukturální syntézy, ve významu nastíněném v Kapitole 2, formálně nahradíme určitým „inženýrským citem“ a schopností odhadnout vhodnou strukturu manipulátoru na základě nabytých zkušeností. Tedy strukturální podoba manipulátoru je známá, jednoznačně určená a nebudeme se jí tak v práci dále zabývat. Hlavní náplň práce tak přirozeně spadá do tématu *parametrické syntézy (optimalizace)*, viz Kapitola 3, kterou budeme dále kategorizovat následovně:

- **Statická optimalizace**

Cílem *statické optimalizace* je nalezení takových *konstantních* kinematických návrhových parametrů manipulátoru (délky ramen, umístění kloubů, atd., obecně např. D-H parametry), které optimalizují hodnotu zvoleného kritéria optimality podél požadované trajektorie koncového efektoru manipulátoru (alternativně na dané restrikci pracovního prostoru). *Statická optimalizace* je náplní Kapitoly 3.3. Optimalizační úloha je zde definována jako problém *minimax* ve smyslu nalezení takových kinematických návrhových parametrů, které maximalizují minimální hodnotu kriteriální funkce přes uvažovaný pracovní prostor manipulátoru. Za tímto účelem je definována a řešena úloha *globální* a *lokální* optimalizace. *Globální optimalizace* je založena na přímém prohledávání stavového prostoru řešení, tzv. *Culling* algoritmus, které garantuje nalezení globálního optima (či několika „prvních“ extrémů) v přípustné diskretizované množině kinematických návrhových parametrů. Je ukázáno, že navržený algoritmus je v porovnání s algoritmy hrubé síly výrazně efektivnější. *Lokální optimalizace* je definována jako optimalizační úloha vedoucí k zpřesnění výsledků globální optimalizace a je založena na standardních známých lokálních algoritmech.

Navržený přístup ke *statické optimalizaci* umožňuje v akceptovatelném čase nalézt globální optimální řešení (z diskretizované množiny) na standardním výpočetním HW. Mezi klíčové výhody navrženého přístupu patří robustnost, stabilita a globální platnost výsledků optimalizačního algoritmu.

Identifikace vlastního přínosu práce:

Realizována modifikace a implementace *Culling* algoritmu pro účely kinematické optimalizace robotických architektur v uvažované interpretaci a jeho srovnání s metodou hrubé síly. Zajímavým přínosem, vzhledem k možnosti spuštění následných lokálních algoritmů optimalizace z různých počátečních podmínek, je především doplnění algoritmu o možnosti vyhledávání dalších následných globálních optim (tzn. kromě globálního optima, také v pořadí 2. optimum, 3. optimum, atd.). Demonstrace předloženého optimalizačního algoritmu pro kinematickou optimalizaci planárního paralelního manipulátoru (zakladač - paletizační manipulátor) a využití výsledků pro nalezení odpovědi na dnes aktuální otázku, zda-li má smysl v daných specifických případech nahrazovat sériové architektury manipulátorů architekturami paralelními (s ohledem na možné umístění aktuátorů na základně manipulátoru). V rámci příkladu byl zároveň předložen vlastní algoritmus umožňující zohlednit dynamické projevy manipulátoru (vedle vlivu gravitace) v případech, kdy je požadovaný pracovní prostor manipulátoru definován výhradně ve smyslu požadovaných (dosažitelných) poloh, tzn. není specifikována konkrétní trajektorie koncového efektoru ve smyslu jeho polohy, rychlosti a zrychlení.

– Optimální řízení redundantních manipulátorů

Optimální řízení pohybu redundantních manipulátorů je podrobně diskutováno v Kapitole 3.4. Souvislost optimálního řízení pohybu redundantních manipulátorů s *parametrickou optimalizací* je motivována myšlenkou rozvolnění některých původně konstantních kinematických návrhových parametrů a jejich uvažování jako přídavné redundantní kloubové souřadnice. V takovém případě může být úloha *parametrické optimalizace* transformována na problém optimalizace pohybu redundantních manipulátorů. Hlavní náplní kapitoly je formulování obecného algoritmu optimalizace pohybu takto vzniklých redundantních manipulátorů s ohledem na integrální kritérium optimality (kritérium optimality je definováno globálně přes celou uvažovanou trajektorii pohybu koncového efektoru manipulátoru) a jeho konfrontace se standardními přístupy řízení pohybu redundantních manipulátorů. Výsledný optimalizační algoritmus je založen na principem optimálního řízení, viz Kapitola 3.4.2, konkrétně pak na principech variačního počtu, viz Kapitola 3.4.2.2. Je ukázáno, že pro obě základní uvažovaná kritéria optimality (minimalizace normy kloubových rychlostí a minimalizace normy kloubových sil/silových momentů) lze optimalizační úlohu převést (vyřešením algebraické nutné podmínky existence extrému) na řešení dvoubodového problému (řešení soustavy diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami). Základní algoritmus je dále doplněn za účelem zrychlení algoritmu o počáteční odhad řešení na základě polynomiální aproximace řešení a nalezení příslušných parametrů polynomu.

Identifikace vlastního přínosu práce:

Podrobná analýza stávajících metod numerických algoritmů výpočtu IGM pro redundantní manipulátory (včetně vlastních demonstračních příkladů) s ohledem na optimalizaci daného kritéria optimality (polohově závislá kritéria, integrace dynamického modelu) a specifikace jejich nedostatků s ohledem na uvažované optimalizační úlohy s globálními kritérii optimality. Definice optimalizační úlohy pro redundantní manipulátory prostřednictvím přístupu optimálního řízení (konkrétně variačního počtu). Důkaz existence analytického řešení algebraické nutné podmínky existence minima v případě využití variačního počtu (algebro-diferenciální Hamiltonovy kanonické rovnice) pro minimalizaci integrálu normy kloubových rychlostí (triviální řešení) a zejména pro minimali-

zaci integrálu normy kloubových sil/silových momentů (netriviální problém). Polynomiální odhad řešení získaných diferenciálních rovnic za účelem efektivního využití standardních algoritmů výpočtu diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami (Boundary Value Problem). Demonstrace algoritmů na vlastních virtuálních simulačních modelech.

Výsledné přínosy práce v rámci současných přístupů k parametrické optimalizaci manipulátorů, viz Kapitola 3.2, jsou znázorněny na Obrázku 3.3.

- **Využití optimálního řízení pohybu redundantních manipulátorů s ohledem na strukturální a parametrickou optimalizaci**

V závěrečné Kapitole 4 je nastíněn nový přístup k optimalizaci robotických architektur založený na využití optimalizace pohybu redundantních manipulátorů. V předloženém přístupu je využito zobecnění standardního kinematického popisu obecného sériového manipulátoru prostřednictvím D-H parametrů, kdy je možné uvažovat libovolné D-H parametry jako aktivní kloubové souřadnice a využít tak dříve formulované optimalizační úlohy pro optimální pohyb redundantních manipulátorů. V rámci předloženého přístupu je odvozen zobecněný kinematický a dynamický popis manipulátoru, jehož ramena mohou být k sobě připojena až 4 nezávislými klouby (dva klouby typu **R** a dva klouby typu **P**) jejichž poloha je reprezentována odpovídajícími D-H parametry. Předložený přístup je diskutován s ohledem na využití pro statickou parametrickou optimalizaci a jako dílčí nástroj strukturální optimalizace (konkrétně s ohledem na optimální volbu aktuátorů). Knihovna **robotLib** je odpovídajícím způsobem rozšířena o zobecněné funkce a funkční bloky. V Kapitole 4 jsou shrnuty další předpokládané oblasti výzkumu, které jsou graficky znázorněny v kontextu předložené optimalizace robotických architektur na Obrázku 4.9.

Identifikace vlastního přínosu práce:

Nový přístup k zobecnění standardního popisu kinematické architektury manipulátoru založený na cíleném „rozvolnění“ D-H parametrů (až 4 nezávislé parametry - aktuátory na jedno rameno manipulátoru), adekvátní modifikace kinematického a dynamického modelu manipulátoru, aktualizace knihovny **robotLib** pro zobecněný model. Aplikace algoritmů optimálního řízení pohybu redundantních manipulátorů. Definice a analýza potenciálního využití pro parametrickou i strukturální optimalizaci (vlastní demonstrační příklady). Formulace předpokladů pro další výzkumné aktivity.

Kapitola 2.

Strukturální syntéza robotického zařízení - strukturální optimalizace

Obsah kapitoly:

- Stručný úvod do strukturální syntézy manipulátorů
- Analýza strukturálních vlastností manipulátoru vzhledem k počtu realizovaných DoF (přeurčenost, nedourčenost mechanismů)
- Metody vyšetřování DoF manipulátoru (z topologického uspořádání, z kinematických rovnic)

Přesto, že problematika strukturální syntézy není hlavní náplní předložené práce, hraje v komplexním pohledu na oblast optimalizace robotických architektur významnou roli. Za účelem vytvoření ucelené představy se jí proto v této kapitole věnujme alespoň okrajově. Jak již bylo výše uvedeno, každá dílčí aplikace, ve které má být nasazeno robotické zařízení, by měla být předem specifikována s ohledem na požadované chování. Požadovaným chováním s ohledem na strukturální syntézu rozumíme základní strukturální kinematické vlastnosti manipulátoru jako jsou:

- **Počet stupňů volnosti koncového efektoru:** Počet nezávisle polohovatelných zobecněných souřadnic koncového efektoru.
- **Typ stupňů volnosti koncového efektoru:** Rotační/translační či některé speciální případy.

Např. nechť požadujeme robot s 4 DoF koncového efektoru s následujícím uspořádáním:

- 3 translační stupně volnosti koncového efektoru - pohyb v ose x, y, z
- 1 rotační stupeň volnosti, který však není vyjádřen jako elementární rotace souřadného systému koncového efektoru, ale jako úhel mezi dvěma rameny manipulátoru.

- **Uspořádání os jednotlivých kloubů:** Umístění a orientace os rotace/translace kloubů **R/P** či umístění a orientace kloubů složených (typicky např. *kulový /sférický kloub S* - trojice elementárních kloubů **RRR** s protínajícími se kolmými osami rotace či *univerzální/kardanův kloub U* dvojice elementárních kloubů **RR** s protínajícími se kolmými osami rotace).
- **Sériová/paralelní struktura:** Uspořádání kinematických řetězců (otevřené a uzavřené kinematické řetězce).

Strukturální syntéza a optimalizace se zabývá nalezením právě výše uvedených topologických vlastností manipulátoru bez ohledu na to, jak budou vypadat jeho skutečné dimenze (délky ramen, přesná finální orientace os rotací/translací kloubů, umístění a hmotnosti těžišť, atd.). Definovat z daných požadavků konkrétní aplikace topologické vlastnosti manipulátoru je však úloha velmi obtížná. I když připustíme, že je možné popsat a formulovat topologii manipulátoru vzhledem k jeho strukturálním vlastnostem, viz např. [145], samotný problém nalezení případně optimalizace vhodné topologie vede spíše na metody umělé inteligence (produkční algoritmy, algoritmy založené na evoluci - genetické algoritmy), prohledávací algoritmy a heuristické algoritmy, algoritmy využívající výpočty kombinací či algoritmy založené na hrubé síle.

V drtivé většině případů v průmyslové praxi je geometrická konstrukce určena již konkrétní aplikací, ve které bude systém využit a strukturální návrh je tak zpravidla navržen odborníky z oblasti nasazení mechatronického systému (v některých případech je strukturální návrh dále modifikován v průběhu návrhu řídicího systému). Přesto, že se v tomto textu nebudeme dále podrobně zabývat strukturální syntézou, ponecháme ji v pozadí a budeme předpokládat, že tato byla již navržena experty z oboru, jedna její součást hraje natolik významnou roli, že stojí za stručné zhodnocení. Konkrétně se jedná o rozhodnutí, zda topologicky navržený robotický systém je vůbec schopen požadovaného pohybu, a tedy zda je možné nezávisle polohovat všechny požadované DoF koncového efektoru. V tomto ohledu lze pozorovat následující klíčové vlastnosti topologického uspořádání manipulátoru:

2.1. Kinematická struktura manipulátoru je plně určena

Tzn. počet nezávislých aktuátorů n odpovídá počtu nezávislých DoF koncového efektoru m .

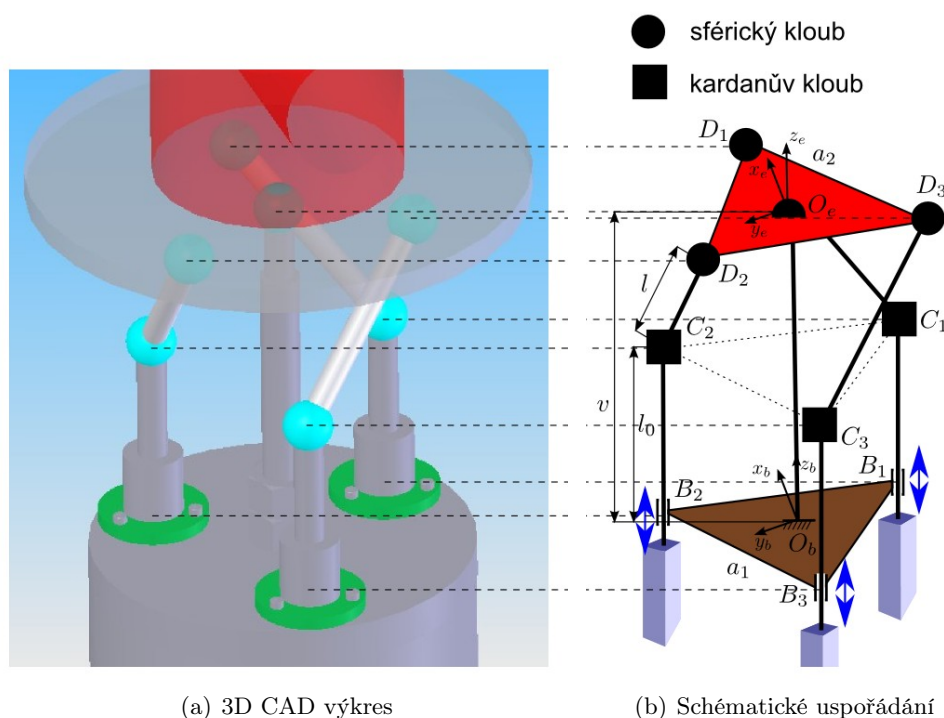
V takovém případě se jedná o správně strukturálně navržený manipulátor, kinematický jakobián \mathbf{J} (vztahující rychlosti kloubových $\dot{\mathbf{Q}}$ a zobecněných souřadnic $\dot{\mathbf{X}}$, viz (2.1))

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \text{kde } \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (2.1)$$

je regulární maticí (má plnou hodnotu) $\text{Rank}(\mathbf{J}) = \min(m, n) = m = n$ a zároveň platí $\det(\mathbf{J}) \neq 0$ v celé množině bodů $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m,n}$ pracovního prostoru manipulátoru s výjimkou spočetně mnoha bodů, tzv. *bodové singulární polohy* či dané restriktce množiny pracovního prostoru (varieta stupně menšího než m), tzv. *množinové singulární polohy*, viz následující příklady. Stručný úvod do problematiky singulárních poloh sériových a paralelních manipulátorů je uveden v Kapitole A.7.

★ Příklad 2.1 (Bodová sing. poloha 3 DoF paralelního manipulátoru)

Uvažujme 3 DoF paralelní manipulátor typu sférické zápěstí, viz Obrázek 2.1, složený z trojice identických kinematických řetězců typu PUS s kloubovými souřadnicemi $\mathbf{Q} = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T$ a zobecněnými souřadnicemi definujícími orientaci koncového efektoru $\mathbf{X} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$, kde α, β, γ jsou Eulerovy úhly dle schématu XYZ a rychlost koncového efektoru je vyjádřena nikoliv jako derivace Eulerovských úhlů α, β, γ , ale vektorem úhlové rychlosti $\dot{\mathbf{X}} \triangleq \boldsymbol{\omega}_e \in \mathbb{R}^3$. Poznamenejme, že vztah mezi derivacemi Eulerových úhlů a vektorem úhlové rychlosti jsou dány tzv. *Eulerovými kinematickými rovnicemi*, viz [128], [125] a Kapitola A.1.2. Návrhové parametry manipulátoru jsou dány rozměry základny, koncového efektoru a ramen kinematických řetězců jako $\boldsymbol{\xi} = [a_1 \ a_2 \ l \ v]^T$.



Obrázek 2.1.: Paralelní manipulátor typu sférického zápěstí

Lze ukázat, viz [125], že *inverzní* kinematický jakobián $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ zkoumaného manipulátoru

lze vyjádřit v uzavřeném tvaru následovně:

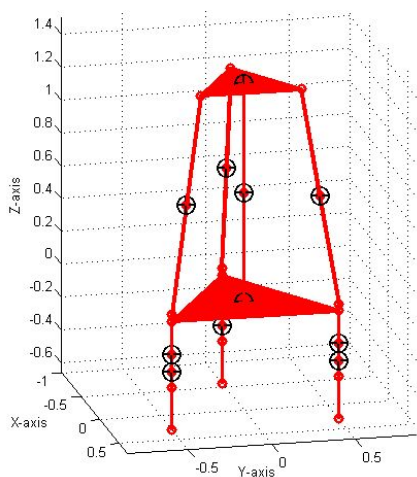
$$\mathbf{A} \cdot \dot{\Theta} = \mathbf{B} \cdot \omega_e^b \Rightarrow \dot{\Theta} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \omega_e^b, \text{ kde } \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (2.2)$$

kde

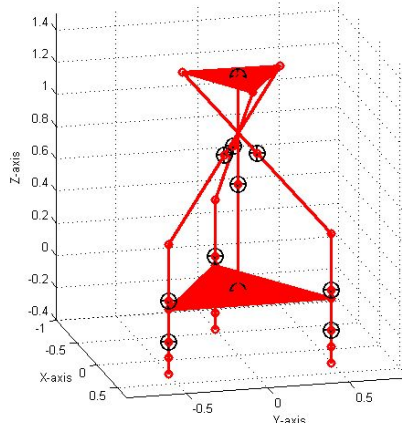
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\overrightarrow{C_1 D_1^b})^T \cdot \vec{u}^b & 0 & 0 \\ 0 & (\overrightarrow{C_2 D_2^b})^T \cdot \vec{u}^b & 0 \\ 0 & 0 & (\overrightarrow{C_3 D_3^b})^T \cdot \vec{u}^b \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\overrightarrow{O_e D_1^b} \times \overrightarrow{C_1 D_1^b})^T \\ \dots \dots \dots \\ (\overrightarrow{O_e D_2^b} \times \overrightarrow{C_2 D_2^b})^T \\ \dots \dots \dots \\ (\overrightarrow{O_e D_3^b} \times \overrightarrow{C_3 D_3^b})^T \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

a vektory $\overrightarrow{C_i D_i^b}$, $\overrightarrow{O_e D_i^b}$ vyjádřené vzhledem k s.s. F_b lze vypočítat ze znalosti řešení IGM manipulátoru, viz [125], a $\vec{u}^b = [0 \ 0 \ 1]^T$ je konstantní jednotkový vektor ve směru pohybu \mathbf{P} aktivních kloubů.

Manipulátor se nachází v *paralelní* singulární poloze, pokud matice \mathbf{B} je singulární (inverzní jakobián $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ je taktéž singulární maticí). Je zřejmé, že toto nastává v případě, pokud je alespoň jeden vektor $(\overrightarrow{O_e D_i^b} \times \overrightarrow{C_i D_i^b})$ nulovým vektorem ($\overrightarrow{O_e D_i^b}$ a $\overrightarrow{C_i D_i^b}$ jsou vzájemně rovnoběžné), nebo jsou vektory $(\overrightarrow{O_e D_i^b} \times \overrightarrow{C_i D_i^b})$ lineárně závislé, viz Obrázek 2.2 a Obrázek 2.3. Poznamenejme, že v druhém případě dochází zároveň i k *sériové* singulární poloze, neboť matice \mathbf{A} je taktéž singulární (nulová).



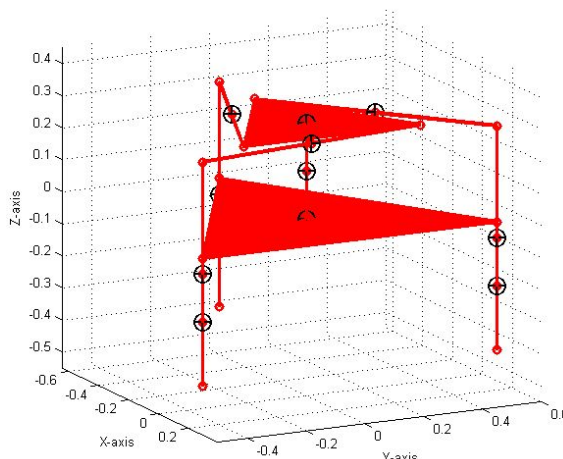
(a) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = -\frac{2}{3}\pi$



(b) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{3}\pi$

Obrázek 2.2.: Paralelní singulární polohy manipulátoru, vektory $\overrightarrow{O_e D_i^b} \times \overrightarrow{C_i D_i^b}$ jsou lineárně závislé (leží v jedné rovině se vzájemným pootočením o $\frac{2}{3}\pi$).

2.1. Kinematická struktura manipulátoru je plně určena

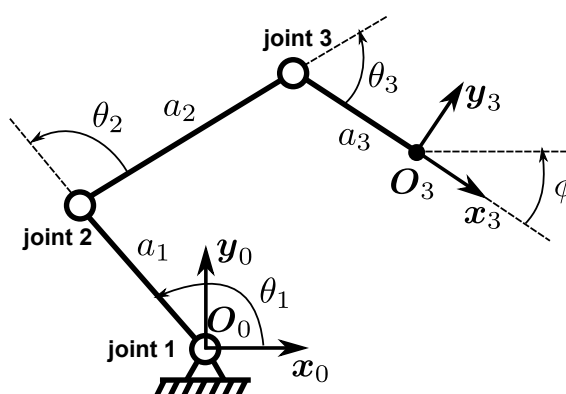


Obrázek 2.3.: Manipulátor současně v sériové i paralelní singulární poloze, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (manipulátor uvažován s jinými rozměry než v předchozím případě), vektory $(\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i^b \times \mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^b)$ jsou lineárně závislé (rovnoběžné), vektory $\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i$ a \mathbf{u} jsou kolmé.

V obou případech sériové a paralelní singularity se však jedná o bodovou záležitost, tedy singularita nastává pouze v daném izolovaném bodě polohy koncového efektoru manipulátoru. Genericky se tedy jedná o manipulátor, který je z hlediska strukturální syntézy navržen správně, neboť jeho kinematická struktura je plně určena (3 DoF koncového efektoru pro 3 nezávislé prismatické aktuátory) pro téměř všechny body pracovního prostoru (s výjimkou zmíněných singulárních izolovaných bodů). ★

★ Příklad 2.2 (Množinová sing. poloha 3 DoF sériového manipulátoru)

Uvažujme 3 DoF sériový manipulátor, viz Obrázek 2.4 tvořený otevřeným kinematickým řetězcem typu **RRR** s kloubovými souřadnicemi $\mathbf{Q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ a zobecněnými souřadnicemi $\mathbf{X} = [\mathbf{O}_3[1:2]^T \ \phi]^T$. Návrhové parametry manipulátoru jsou dány délkami jednotlivých ramen jako $\boldsymbol{\xi} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$.



Obrázek 2.4.: Sériový manipulátor typu **RRR**

Lze ukázat, viz [128], že kinematický jakobián $\mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta})$ manipulátoru lze vyjádřit v uzavřeném

tvaru následovně:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}, \text{ kde } \mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} -a_3 s_{\theta_{123}} - a_2 s_{\theta_{12}} - a_1 s_{\theta_1} & -a_3 s_{\theta_{123}} - a_2 s_{\theta_{12}} & -a_3 s_{\theta_{123}} \\ a_3 c_{\theta_{123}} + a_2 c_{\theta_{12}} + a_1 c_{\theta_1} & a_3 c_{\theta_{123}} + a_2 c_{\theta_{12}} & a_3 c_{\theta_{123}} \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

kde $s_{\theta_{123}} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, analogicky pro $\cos(\star)$.

Singulární (sériové) polohy lze stanovit v prostoru kloubových souřadnic z podmínky singularity kinematického jacobianu:

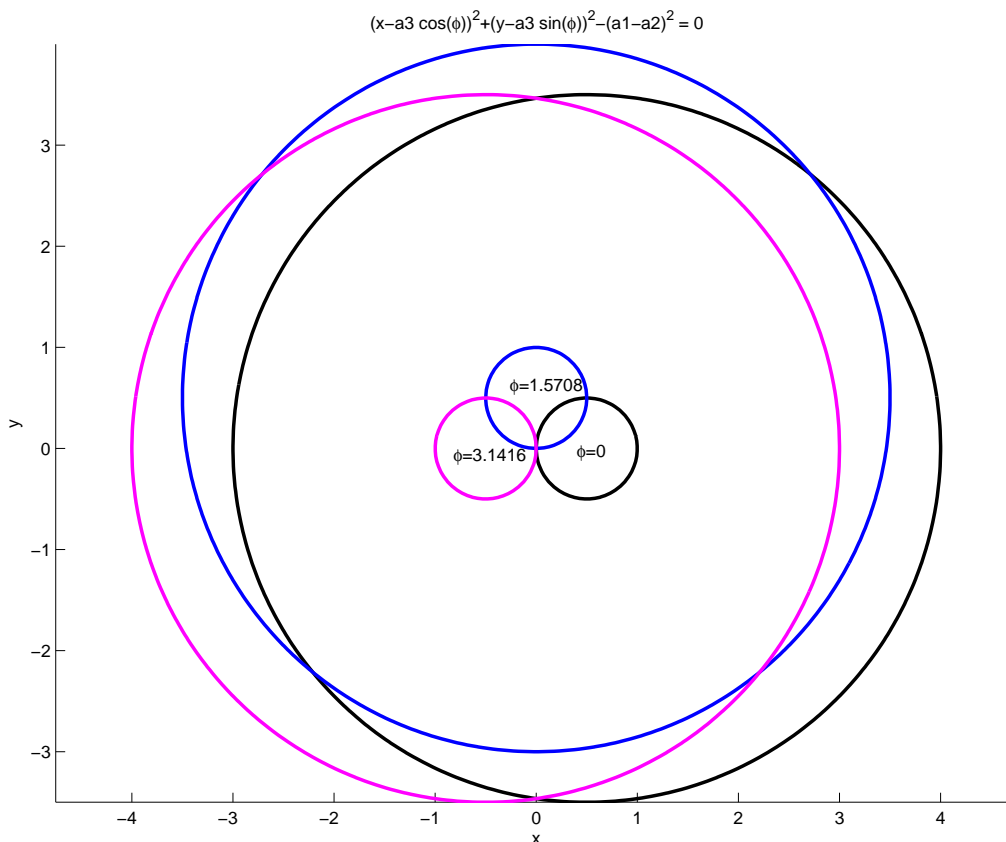
$$\det(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) = 0 \Rightarrow -a_2 c_{\theta_{12}} s_{\theta_1} a_1 + a_2 s_{\theta_{12}} c_{\theta_1} a_1 = a_1 a_2 s_2 = 0 \quad (2.5)$$

Tedy singulární polohy manipulátoru nastávají v hodnotách kloubových souřadnic:

$$\theta_1 = \text{lib.}, \quad \theta_2 = k\pi, \quad k = \{0, 1\}, \quad \theta_3 = \text{lib.} \quad (2.6)$$

Dosažením podmínky (2.6) do řešení DGM, viz [128], lze získat ekvivalentní podmínku v prostoru zobecněných souřadnic ve tvaru variety 1. řádu, konkrétně se jedná o dvojici soustředných kružnic ležících v prostoru zobecněných souřadnic (rovině \mathbf{xy}) jejichž počátek je parametrizovaný třetí zobecněnou souřadnicí ϕ . Implicitní vyjádření této variety je dáno rovnicí (2.7) a její grafické znázornění na Obrázku 2.5.

$$\begin{aligned} (x - a_3 c_\phi)^2 + (y - a_3 s_\phi)^2 &= (a_1 + a_2)^2 \quad (\text{pro } \theta_2 = 0) \\ (x - a_3 c_\phi)^2 + (y - a_3 s_\phi)^2 &= (a_1 - a_2)^2 \quad (\text{pro } \theta_2 = \pi) \end{aligned} \quad (2.7)$$



Obrázek 2.5.: Singulární polohy manipulátoru znázorněné v prac. prostoru (rovině \mathbf{xy}) parametrizované zobec. souřadnicí orientace ϕ , malá kružnice - ramena manip. se překrývají, velká kružnice - ramena manip. jsou „natažena“

Z uvedeného je patrné, že v případě zkoumaného manipulátoru můžou nastávat singulární polohy, které existují na dané restrikcí (varietě) pracovního prostoru. Přesto, že tedy bezesporu existuje nekonečně mnoho singulárních poloh manipulátoru, jsou tyto polohy dané uzavřenou množinou v pracovním prostoru. Genericky se tedy opět jedná o manipulátor, který je z hlediska strukturální analýzy navržen správně. Jeho kinematická struktura je plně určena (3 DoF koncového efektoru pro 3 nezávislé rotační aktuátory) pro téměř všechny body pracovního prostoru s výjimkou bodů ležících na nalezené varietě. ★

2.2. Kinematická struktura manipulátoru je přeúčřená

Zde je situace odlišná pro sériové a paralelní manipulátory. Pro sériové manipulátory platí, že jejich kinematická architektura nikdy nemůže být z principu přeúčřena. Manipulátor je reprezentován sériovým kinematickým řetězcem a může tak obsahovat libovolný počet aktuátorů. Tyto aktuátory se svým pohybem nijak neomezují a je možné a dokonce nutné vždy všechny nezávisle polohovat. Situace, kdy sériový manipulátor obsahuje více aktuátorů (kloubů n) než je počet DoF koncového efektoru m , tzn. $n > m \leq 6$ (max. 6 DoF v prostoru, 3 translace, 3 rotace) je chápána jako *redundantní* manipulátor a existuje nekonečně mnoho řešení IGM, IIK pro daný pohyb koncového efektoru. Zabývejme se proto dále paralelními manipulátory.

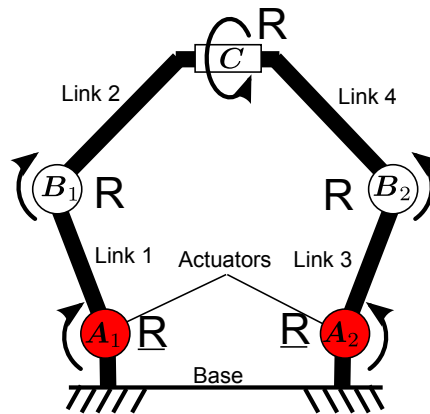
Přeúčřenou kinematickou strukturou paralelního manipulátoru lze rozumět dvě alternativy:

- **Struktura manipulátoru je topologicky přeúčřena (bez ohledu na počet aktuátorů)**

K této situaci dochází nezávisle na počtu aktuátorů. V každé kinematicky uzavřené struktuře hraje významnou roli vlastní uspořádání jednotlivých kloubů a ramen, neboť právě jím je dán výsledný počet DoF koncového efektoru manipulátoru. Snadno pak může nastat situace, kdy je kinematická soustava přeúčřená, tzn. počet DoF koncového efektoru je $\leq 0 \Rightarrow$ koncový efektor se z principu nemůže pohybovat (tato situace bývá někdy označována jako *uzamčení manipulátoru*), viz následující příklad:

★ Příklad 2.3 (Topologicky přeúčřená struktura manipulátoru)

Uvažujme 2 DoF paralelní Dual-Scara manipulátor složený z \mathbf{R} kloubů ve standardním uspořádání, viz Obrázek 2.7(a), ale s tou výjimkou, že \mathbf{R} kloub v bodu \mathbf{C} má změněnou osu rotace, viz Obrázek 2.6. V takovém případě (nezávisle na počtu aktuátorů) je kinematická struktura manipulátoru přeúčřena a manipulátor není zřejmě schopen žádného pohybu.



Obrázek 2.6.: Paralelní Dual-Scara manipulátor s nevhodně zvolenou orientací kloubu v bodě C

★

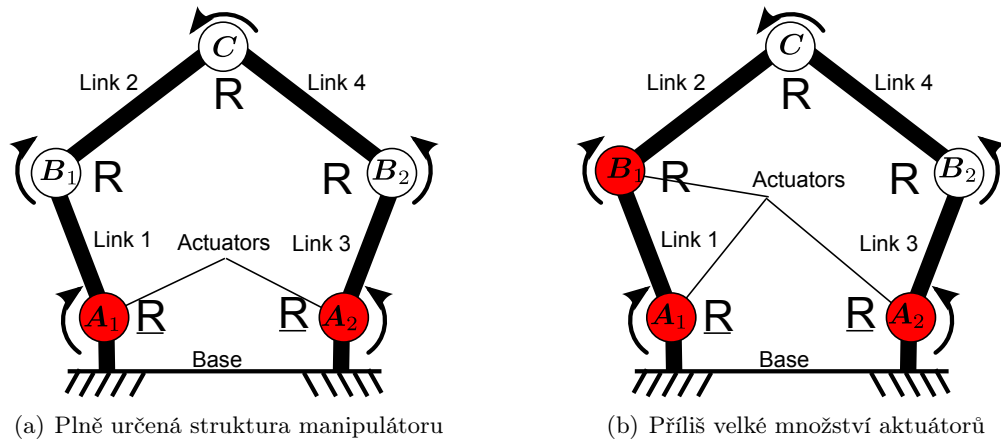
- **Struktura topologicky plně určena, nicméně počet aktuátorů převyšuje DoF koncového efektoru.**

K této situaci dochází, pokud počet nezávislých aktuátorů převyšuje maximální možný počet DoF koncového efektoru manipulátoru¹. To má za následek, že některý z aktuátorů (jeden či více) navrženého manipulátoru nemůže vykonávat svůj pohyb (je zablokován) za podmínky, že v daném okamžiku nedochází k současnému pohybu žádného jiného aktuátoru, viz následující příklad:

★ **Příklad 2.4 (Přeurčená struktura manipulátoru počtem aktuátorů)**

Uvažujme 2 DoF paralelní Dual-Scara manipulátor složený z R kloubů, viz Obrázek 2.7(a). Standardně je tento manipulátor vybaven 2 nezávislými R aktuátory pevně umístěnými na základně v bodech A_1 a A_2 . Lze ukázat, že koncový efektor manipulátoru C má tak právě 2 DoF (pohyb v rovině xy). Zároveň platí, že kinematická omezení, která jsou určena spojením 2 RR kinematických řetězců v bodě C jednoznačně definují polohu všech ramen manipulátoru pro libovolné 2 aktivní klouby. Přidání aktuátoru do libovolného dalšího kloubu má za následek nikoliv navýšení DoF koncového efektoru (toto zřejmě není z topologického uspořádání kinematických řetězců ani možné), ale k přeurčení kinematické struktury, viz Obrázek 2.7(b). Tzn. nelze pohybovat nezávisle se všemi třemi aktuátory.

¹Tzn. počet DoF, který dovoluje topologické uspořádání kinematické struktury, nikoliv počet DoF, které vyžaduje daná aplikace, ten může být nižší.



Obrázek 2.7.: Paralelní Dual-Scara manipulátor

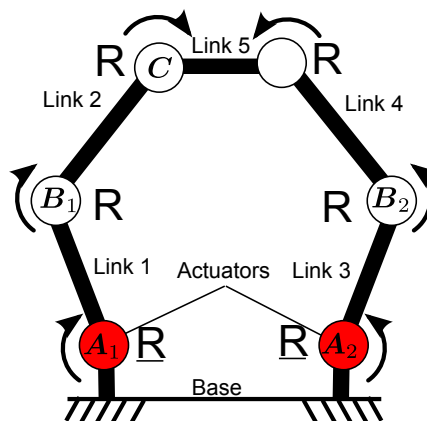
★

2.3. Kinematická struktura manipulátoru je nedourčená

Situace je opět odlišná pro sériové a paralelní manipulátory. Pro sériové manipulátory tvořené sériovým kinematickým řetězcem je zřejmé, že struktura bude nedourčená, pokud by manipulátor obsahoval kloub, který není současně aktuátorem. V takovém případě nelze cíleně polohovat všechny DoF koncového efektoru. V případě paralelních manipulátorů je situace složitější. Kinematická struktura manipulátoru je označena za topologicky nedourčenou, pokud pro zvolený počet uzamčených aktuátorů (aktuátor se nepohybuje) vykazuje manipulátor nenulový počet DoF koncového efektoru, viz následující příklad:

★ Příklad 2.5 (Topologicky nedourčená struktura manipulátoru)

Přidáním **R** kloubu, který nebude aktuátorem, do 2 DoF Dual-Scara manipulátoru je pohyb koncového efektoru manipulátoru v rovině nedourčen, resp. koncový efektor se může volně pohybovat i pro nepohybující se aktuátory, viz Obrázek 2.8.



Obrázek 2.8.: Paralelní Dual-Scara manipulátor s nedourčenou strukturou

★

2.4. Metody vyšetřování počtu DoF z topologického uspořádání manipulátoru

S ohledem na výše uvedené vlastnosti manipulátorů vyplývá, že prioritním problémem při jejich strukturální syntéze (optimalizaci) je určení počtu DoF koncového efektoru. Jinými slovy, jak zajistit, aby měl navrhovaný manipulátor právě požadovaný počet DoF. Je zřejmé, že v případě sériových manipulátorů je problém přímočarý, neboť otevřený kinematický řetězec má vždy tolik DoF, kolik je nezávislých kloubů. Těchto kloubů potom může být libovolné množství (pro počet větší než 3 v rovině a 6 v prostoru mluvíme o manipulátorech redundantních) a tyto klouby musí být zároveň aktuátory. Pro paralelní manipulátory, které jsou tvořeny uzavřenými kinematickými řetězci je však problém určení DoF koncového efektoru na základě jeho strukturálních vlastností daleko komplikovanější. Zabývejme se tedy dále stručně touto problematikou.

Předpokládejme, že strukturálními vlastnostmi manipulátoru rozumíme právě počet a typ kloubů, ramen, jejich vzájemné geometrické uspořádání a počet kinematických řetězců, ze kterých je manipulátor složen. V zásadě existují dvě principiální možnosti analýzy, a to využití jednoduchých formulací, které se pokouší určit počet DoF právě z výše uvedených parametrů či metody založené na podrobné analýze kompletní kinematiky manipulátoru.

2.4.1. Jednoduché formulace pro výpočet DoF koncového efektoru manipulátoru

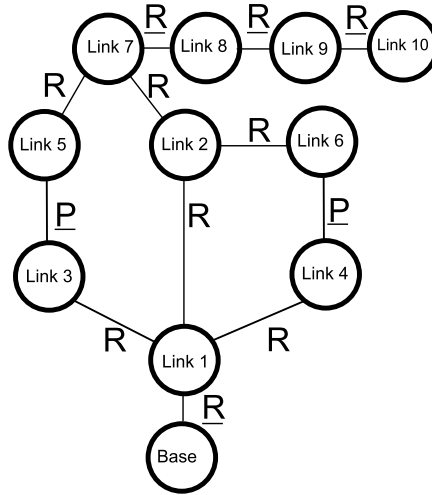
Jedná se o formulace založené na principech grafového znázornění struktury manipulátoru, které z podstaty této grafické reprezentace určují právě počet DoF koncového efektoru manipulátoru. Jako vstupní data jsou vyžadovány pouze základní strukturální parametry, kterými jsou počet kloubů a počet jejich DoF, typ manipulátoru (planární/prostorový), počet geometricky nezávislých smyček a některé další. V literatuře je možné nalézt celou řadu různě sofistikovaných formulací pro výpočet DoF, poměrně rozsáhlý přehled je zpracován v [24], [8].

Snad nejznámější formulací pro určení DoF koncového efektoru manipulátoru však zůstává *Chebychev-Grübler-Kutzbachova formulace (CGK)*, formulovaná v základní podobě jako:

$$M = \sum_{i=1}^p f_i - \underbrace{b \cdot q}_r \quad (2.8)$$

kde M je počet DoF koncového efektoru manipulátoru, p je počet kloubů manipulátoru, b je číslo pohyblivosti ($b = 3$ pro manipulátor v rovině, $b = 6$ pro manipulátor v prostoru), q je počet geometricky nezávislých smyček, f_i je počet DoF i -tého kloubu a r je počet rovnic kinematického omezení.

Využijme dále grafickou reprezentaci znázornění kinematické struktury manipulátoru, a to takovým způsobem, že vrcholy grafu reprezentují ramena manipulátoru a hrany grafu reprezentují klouby manipulátoru, viz Obrázek 2.9.



Obrázek 2.9.: Grafová reprezentace paralelního manipulátoru (podtržením je znázorněn aktuátor manipulátoru)

Počet geometricky nezávislých smyček manipulátoru lze z jeho grafové reprezentace získat prostřednictvím *Eulerovy vztahu*, viz teorie grafů, který má tvar:

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{vrcholy grafu}} - \underbrace{p}_{\text{hrany grafu}} + \underbrace{(q+1)}_{\text{uzavřené oblasti včetně vnější nekonečné}} = 2 \Rightarrow q = p - m + 1 \quad (2.9)$$

kde m je počet ramen manipulátoru (včetně základny), n je počet pohyblivých ramen manipulátoru ($n = m - 1$), q je počet geometricky nezávislých smyček.

Dosazením Eulerova vztahu (2.9) do CGK formulace (2.8) dostáváme její výslednou známou podobu:

$$M = b \cdot (m - 1 - p) + \sum_{i=1}^p f_i, \quad b = \{3, 6\} \quad (2.10)$$

kde M je počet DoF koncového efektoru manipulátoru, p je počet kloubů manipulátoru, b je číslo pohyblivosti ($b = 3$ pro manipulátor v rovině, $b = 6$ pro manipulátor v prostoru), f_i je počet DoF i -tého kloubu, m je počet ramen manipulátoru (včetně základny).

Bohužel, CGK formulace platí pouze v generickém případě a nepostihuje, z principu ani nemůže, kinematické závislosti mezi uzavřenými kinematickými řetězci, viz následující příklady:

★ Příklad 2.6 (Správné určení počtu DoF pomocí CGK formulace)

1. Sériový antropomorfní manipulátor

Sériový antropomorfní manipulátor a jeho grafická reprezentace je znázorněna na Obrázku 2.10(a). Výpočet CGK formulace dává očekávaný výsledek, tedy 6 DoF koncového efektoru manipulátoru.

$$b = 6, \quad m = 7, \quad p = 6, \quad f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 6$$

$$M = 6 \cdot (7 - 1 - 6) + \sum_{i=1}^6 1 = 6 \quad (2.11)$$

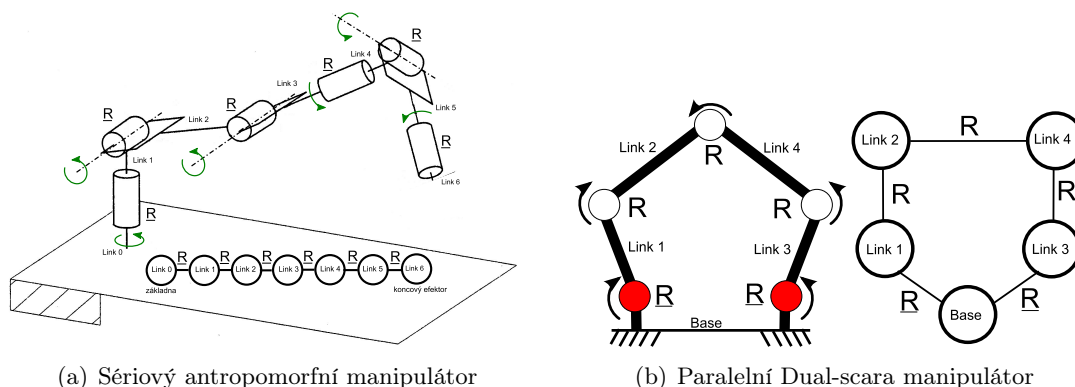
Připomeňme, že CGK formulace přirozeně dává správný výsledek pro všechny sériové manipulátory. Volbou aktuátorů za všechny klouby bude manipulátor kinematicky plně určen.

2. Paralelní Dual-scara manipulátor

Paralelní Dual-scara manipulátor a jeho grafická reprezentace je znázorněna na Obrázku 2.10(b). Výpočet CGK formulace dává očekávaný výsledek, tedy 2 DoF koncového efektoru manipulátoru, v případě, že za aktuátory zvolíme právě dva klouby manipulátoru, bude manipulátor kinematicky plně určen.

$$b = 3, m = 5, p = 5, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 5$$

$$M = 3 \cdot (5 - 1 - 5) + \sum_{i=1}^5 1 = 2 \quad (2.12)$$



Obrázek 2.10.: Příklady manipulátorů, pro které je výpočet dle CGK formulace korektní

★

★ Příklad 2.7 (Chybné určení počtu DoF pomocí CGK formulace)

1. Sarrus linkage

Jedná se o paralelní prostorový manipulátor znázorněný na Obrázku 2.11(a). Je známo, že Sarrus linkage má právě 1 DoF (lineární posun v ose z). Výpočet CGK formulace však označuje tento paralelní manipulátor za přeurlčený, tedy neschopný pohybu.

$$b = 6, m = 6, p = 6, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 6$$

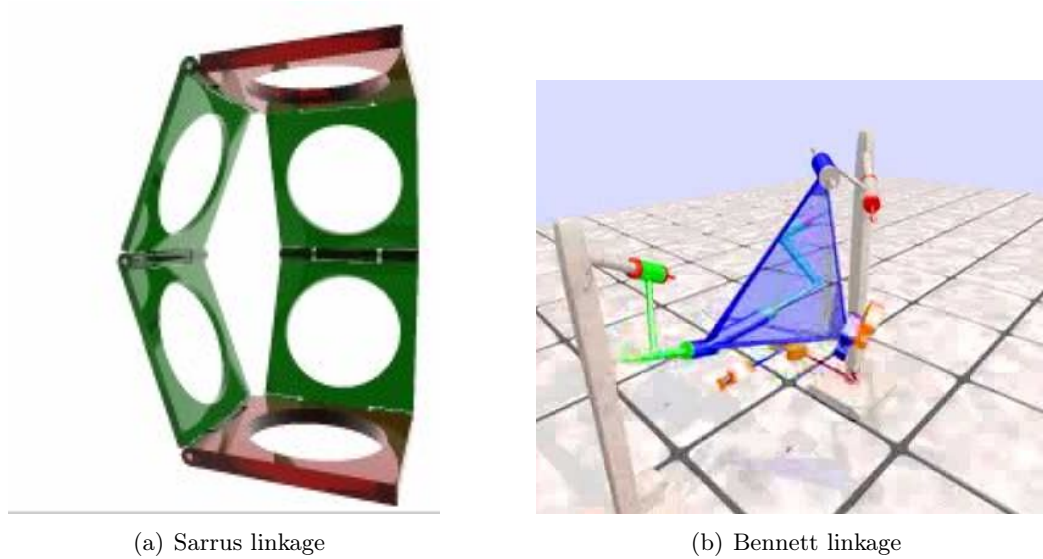
$$M = 6 \cdot (6 - 1 - 6) + \sum_{i=1}^6 1 = 0 \quad (2.13)$$

2. Bennett linkage

Jedná se opět o paralelní manipulátor znázorněný na Obrázku 2.11(b). Je známo, že Bennett linkage má právě 1 DoF, což je opět v rozporu s CGK formulací, která označuje manipulátor jako přeurlčený (dokonce stupněm 2), tedy opět neschopný pohybu.

$$b = 6, m = 4, p = 4, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 4$$

$$M = 6 \cdot (4 - 1 - 4) + \sum_{i=1}^4 1 = -2 \quad (2.14)$$



Obrázek 2.11.: Příklady paralelních manipulátorů, pro které výpočet dle CGK selhává

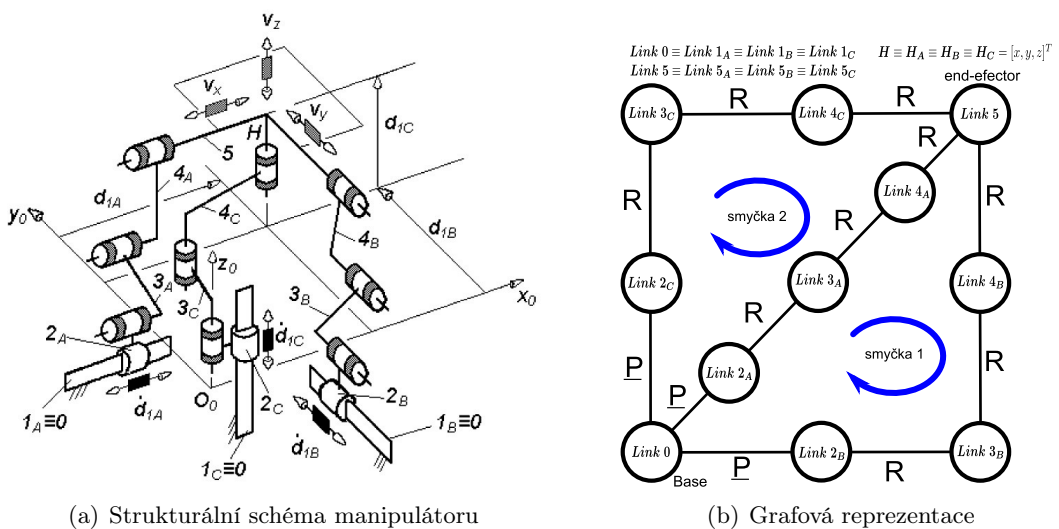
3. Kartézský paralelní manipulátor

Předpokládejme kartézský paralelní manipulátor, viz Obrázek 2.12. Manipulátor sestává z 3 kinematických řetězců typu **PRRR**, viz Obrázek 2.13. Koncový efektor manipulátoru umožňuje 3 translační DoF (pohyb v osách xyz). Zobecněné souřadnice \mathbf{X} koncového efektoru jsou dány souřadnicemi bodu \mathbf{H} , rychlosti potom jejich časovými derivacemi.

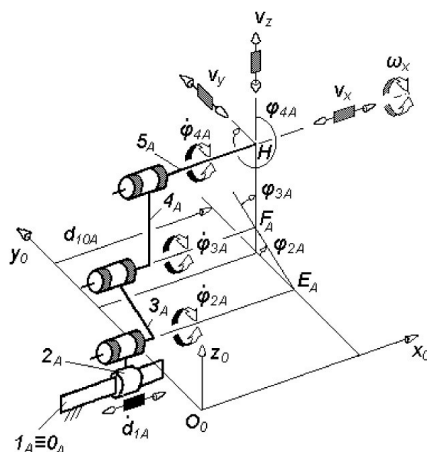
$$\mathbf{X} = [H_x \ H_y \ H_z]^T, \quad \dot{\mathbf{X}} = [V_x \ V_y \ V_z]^T \quad (2.15)$$

Kloubové souřadnice manipulátoru a jejich časové derivace jsou pro každý kinematický řetězec **A**, **B**, **C** dány jako:

$$\mathbf{Q}_x = [d_{1x} \ \varphi_{2x} \ \varphi_{3x} \ \varphi_{4x}], \quad \dot{\mathbf{Q}}_x = [\dot{d}_{1x} \ \dot{\varphi}_{2x} \ \dot{\varphi}_{3x} \ \dot{\varphi}_{4x}], \quad \text{kde } x = \{A, B, C\} \quad (2.16)$$



Obrázek 2.12.: Paralelní kartézský manipulátor včetně grafové reprezentace



Obrázek 2.13.: Kinematický řetězec paralelního kartézského manipulátoru

Výpočet DoF koncového efektoru manipulátoru prostřednictvím CGK formulace opět dává nekorektní výsledek, neboť označuje zkoumaný paralelní manipulátor jako kinematicky přeurečený, koncový efektor by nemohl vykonávat žádný pohyb.

$$b = 6, m = 11, p = 12, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 12$$

$$M = 6 \cdot (11 - 1 - 12) + \sum_{i=1}^{12} 1 = 0 \quad (2.17)$$

★

2.4.2. Podrobná analýza kompletní kinematiky manipulátoru

Z Kapitoly 2.4.1 je patrné, že CGK formulace nedává vždy správné výsledky, a to dokonce pro jednoduché paralelní struktury manipulátorů. Podobné projevy chování lze pozorovat i u ostatních formulací pro výpočty DoF koncového efektoru manipulátoru, viz [24]. Důvodem je fakt, že kinematické vlastnosti manipulátoru jsou sice dány genericky jeho strukturálními parametry, ale výsledek dle zavedených formulací je relevantní pouze v případě, když jednotlivé smyčky manipulátoru tvořené jeho kinematickými řetězci jsou nejen geometricky, ale zejména kinematicky nezávislé. V případě, že smyčky jsou kinematicky závislé (a to nutně neznamená, že se robot nachází v singulární poloze z definice v Kapitole A.7), dochází k porušení generického předpokladu, kdy lze vypočítat DoF koncového efektoru manipulátoru pouze ze strukturálních parametrů udávající počty jednotlivých entit (kloubů, ramen, počty DoF kloubů atd.). Různé jiné formulace odvozené podobně jako CGK formulace se snaží tyto kinematické závislosti určitým způsobem zohlednit, avšak relevantní výsledky mohou být dány pouze podrobnou kinematickou analýzou (bohužel za cenu řádově vyšších výpočetních nároků). Problém demonstrujeme na následujícím příkladu, kdy se budeme zabývat analýzou právě paralelního kartézského manipulátoru z Příkladu 2.7. Podobné analýzy lze nalézt např. v [23], [36], [8].

★ Příklad 2.8 (Podrobná kinematická analýza paralelního kartézského manip.)

Z podmínky uzavřeného kinematického řetězce v bodě koncového efektoru \mathbf{H} musí platit, že rychlosti (translační i úhlová) posledního ramena (posledního s.s.) kinematických řetězců \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} vzhledem k s.s. F_0 musí být shodné.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_A}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_A}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_B}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_B}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_C}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_C}^0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.4. Metody vyšetřování počtu DoF z topologického uspořádání manipulátoru

Můžeme tedy stanovit rovnice tzv. **kinematických omezení** pro dvě geometricky nezávislé uzavřené kinematické smyčky:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_A}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_A}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_B}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_B}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ (smyčka 1)}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_A}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_A}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_C}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_C}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ (smyčka 2)} \quad (2.19)$$

Vzhledem k lineárním závislostem mezi rychlostmi kloubových a zobecněných souřadnic pro manipulátor v dané poloze, lze rovnice kinematických omezení (2.19) přepsat do tvaru (např. pomocí D-H úmluvy a metod pro výpočet DIK, IIK pro sériové manipulátory uvedené v A.5):

$$\mathbf{A}_{1[6 \times 8]} \cdot [d_{1A}^{\dot{}} , \dot{\varphi}_{2A}, \dot{\varphi}_{3A}, \dot{\varphi}_{4A}, d_{1B}^{\dot{}} , \dot{\varphi}_{2B}, \dot{\varphi}_{3B}, \dot{\varphi}_{4B}]^T = \mathbf{0}_{[6 \times 1]} \text{ (smyčka 1)} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{A}_{2[6 \times 8]} \cdot [d_{1A}^{\dot{}} , \dot{\varphi}_{2A}, \dot{\varphi}_{3A}, \dot{\varphi}_{4A}, d_{1C}^{\dot{}} , \dot{\varphi}_{2C}, \dot{\varphi}_{3C}, \dot{\varphi}_{4C}]^T = \mathbf{0}_{[6 \times 1]} \text{ (smyčka 2)} \quad (2.21)$$

kde \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 závisí na aktuální poloze manipulátoru, tzn. kloubových souřadnicích d_{1x} , φ_{2x} , φ_{3x} , φ_{4x} pro $x = \{A, B, C\}$

Sloučením rovnic (2.20) a (2.21) dostáváme výslednou rovnici kinematického omezení manipulátoru:

$$\mathbf{A}_{[12 \times 12]} \cdot [d_{1A}^{\dot{}} , \dot{\varphi}_{2A}, \dot{\varphi}_{3A}, \dot{\varphi}_{4A}, d_{1B}^{\dot{}} , \dot{\varphi}_{2B}, \dot{\varphi}_{3B}, \dot{\varphi}_{4B}, d_{1C}^{\dot{}} , \dot{\varphi}_{2C}, \dot{\varphi}_{3C}, \dot{\varphi}_{4C}]^T = \mathbf{0}_{[12 \times 1]} \quad (2.22)$$

Existuje tedy 12 rovnic pro 12 neznámých (rychlosti kloubových souřadnic), které musí platit v každém bodě pro uzavřený kinematický řetězec (2 smyčky) zkoumaného manipulátoru. Poznamenejme, že může opět existovat izolované množství bodů či daná podmnožina (varieta) pracovního prostoru, ve kterém budou rovnice kinematického omezení závislé. Tyto body opět nazýváme bodovými či množinovými singularitami, analogicky jako v Kapitole 2.1. V obecném (generickém) případě však počet nezávislých kinematických omezení daný počtem nezávislých rovnic v (2.22) určuje skutečný počet reálných omezení počtu DoF pro pohyb zkoumaného manipulátoru, v CGK formulaci právě parametr r . V případě paralelního kartézského manipulátoru lze ukázat (výpočtem hodnoty symbolického vyjádření matice \mathbf{A} v rovnici (2.22) např. ve výpočetním softwaru Maple [65]), že $\text{Rank}(\mathbf{A}) = 9$, tedy že existuje 9 nezávislých rovnic kinematického omezení ($r=9$). Těchto 9 nezávislých rovnic znamená, že z celkového počtu DoF, které jsou dodány do struktury manipulátoru jednotlivými klouby ($\sum_{i=1}^1 1 = 12$) je právě 9 DoF odebráno díky kinematickému omezení popsaného rovnicemi (2.22). Výsledný počet DoF manipulátoru je tedy dán ve tvaru původní definice CGK formulace (2.8) jako:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^p f_i}_{\text{počet DoF dodaný klouby}} - \underbrace{r}_{\text{počet nez. rovnic kin. omezení}} = 12 - 9 = 3 \quad (2.23)$$

Poznamenejme, že vyšetřením hodnoty matic \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 definující počet nezávislých rovnic kinematického omezení pro dvě geometrické smyčky manipulátoru vede k následujícímu pozorování:

$$\text{Rank}(\mathbf{A}_1) = r_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 \text{ nez. rovnic kin. omezení smyčky 1} \quad (2.24)$$

$$\text{Rank}(\mathbf{A}_2) = r_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 \text{ nez. rovnic kin. omezení smyčky 2}$$

Každá geometricky nezávislá smyčka manipulátoru odebírá tedy právě 5 DoF, tedy výsledný počet DoF by byl místo výše uvedených 3 pouze 2.

$$\sum_{i=1}^p f_i - (r_1 + r_2) = 12 - 10 = 2 \quad (2.25)$$

Toto ovšem platí pouze v případě, že rovnice kin. omezení smyčky 1 jsou nezávislé s rovnicemi kin. omezení smyčky 2 (smyčky jsou nejen geometricky, ale také kinematicky nezávislé). Protože ale $\text{Rank}(\mathbf{A}) = 9$, *kinematická závislost mezi smyčkami existuje a nelze ji ignorovat*. Korektní výsledek počtu DoF koncového efektoru paralelního kartézského manipulátoru je tedy 3. ★

Strukturální syntéza s ohledem na vyšetřování DoF koncového efektoru manipulátoru, která hraje primární roli při syntéze celého zařízení, lze tedy shrnout následovně:

- Výsledek pomocí CGK formulace není obecně platný pro všechny manipulátory (totéž platí i pro ostatní odvozené formulace)

Důvod:

Formule nebere v potaz kinematické závislosti ve struktuře manipulátoru, uvažují se pouze strukturální parametry, tzn. počet kloubů, počet DoF kloubů, počet ramen, počet smyček (geometricky nezávislých), atd.

- Obecně neplatí, že geometricky nezávislé smyčky jsou zároveň i kinematicky nezávislými
- CGK formulace a další odvozené mají pouze omezené použití (neplatí dokonce pro mnoho i jednoduchých případů)
- Dodnes nenalezena „univerzální“ (rychlá, jednoduchá a obecná) formulace pro výpočet DoF paralelních manipulátorů
- Relevantní výsledky při vyšetřování DoF paralelních manipulátorů je možné získat pouze podrobnou analýzou - nalezením nezávislých rovnic kinematického omezení.

Kapitola 3.

Parametrická syntéza robotického zařízení - parametrická optimalizace

Obsah kapitoly:

- Diskuze nad současným stavem řešení úlohy parametrické optimalizace manipulátorů
 - Kritéria optimality (lokální, globální, časté komplikace)
 - Standardní gradientní/negradientní přístupy k řešení optimalizačních úloh (obecné optimalizační úlohy)
 - Alternativní metody řešení optimalizačních úlohy (dynamická metoda optimalizace, metoda rozvolnění kinematických parametrů, metoda vyvažování)
- Statická optimalizace (optimalizace konstantních kinematických návrhových parametrů)
 - Definice úlohy typu *minimax*
 - Globální algoritmy řešení (vlastní modifikovaný *Culling* algoritmus)
 - Lokální algoritmy řešení (simplexový algoritmus)
 - Vlastní demonstrační příklad statické parametrické optimalizace a zhodnocení výsledků
- Optimální řízení redundantních manipulátorů - nový směr k optimalizaci robotických architektur
 - Standardní přístupy k řízení redundantních manipulátorů (numerické algoritmy řešení IGM, integrace dynamického modelu, analýza a zhodnocení vlastností, demonstrace na vlastních příkladech)
 - Nový přístup k optimálnímu řízení redundantních manipulátorů (aplikace principů optimálního řízení)
 - * Aplikace dynamického programování - Bellmanova optimalizační rekurze
 - * Aplikace variačního počtu - Hamiltonův přístup
 - Vlastní důkaz existence analytického řešení algebraické nutné podmínky optima pro optimalizaci rychlostí a sil/momentů umožňující převod optimalizační úlohy na okrajovou úlohu
 - Vlastní přístup k polynomiálnímu odhadu optimálního řešení (počáteční podmínky okrajové úlohy)
 - Vlastní demonstrační příklady optimalizace pohybu redundantních manipulátorů a zhodnocení výsledků

3.1. Úvod

V Kapitole 2 jsme se stručně zabývali strukturální syntézou manipulátorů ve smyslu jejich strukturálních (topologických) vlastností. Bylo ukázáno, že prioritním problémem je určení počtu DoF koncového efektoru daného manipulátoru. Tento problém je snadný pro sériové manipulátory, ale značně se komplikuje pro manipulátory paralelní. Jak již bylo řečeno, často je však problém strukturální analýzy ponechán na návrhářích daného robotického systému, kteří mají zkušenosti z oblasti nasazení a oblasti konstrukce robotických systémů. Společně s moderními možnostmi simulace mechanických soustav (Simulink/SimMechanics, Modelica, MapleSim) je tak návrh struktury manipulátoru řešen většinou simulacemi a následnými dílčími modifikacemi (tento proces je často iterován).

Nedílnou součástí návrhu robotického systému však tvoří následující proces, a to proces tzv. *parametrické syntézy*. Parametrická syntéza zahrnuje vlastní návrh kinematických parametrů, tzn. délky ramen manipulátoru, rozměry základny a koncového efektoru, orientace rotačních/ translačních os kloubů atd.). Syntéza kinematických parametrů hraje klíčovou roli při návrhu robotického systému a nelze ji přikládat nikterak menší důležitost než návrhu strukturálnímu. Neuváženým a nesprávným návrhem kinematických parametrů lze velmi snadno zkazit vlastnosti jinak strukturálně vhodně navrženého zařízení. Hlavní náplň práce bude soustředěna právě na parametrickou optimalizaci. Podstatu parametrické optimalizace lze formulovat následovně:

Jak navrhnout kinematické parametry mechatronického systému (manipulátoru) s pevně danou strukturou (strukturálním návrhem), aby navržený mechanismus splňoval požadovaná kritéria (případně jejich kompromis) buď na celém svém pracovním prostoru, případně na jeho požadované podmnožině?

Uveďme dva příklady:

★ **Příklad 3.1 (Příklady parametrické optimalizace manipulátorů)**

1. Jak navrhnout délku dvou ramen 2 DoF planárního sériového manipulátoru takovým způsobem, aby při pohybu manipulátoru po zvolené trajektorii (přímce či obecně křivce v rovině) vykazovaly silové momenty na kloubech manipulátoru minimální hodnoty?
2. Jak navrhnout délky tří ramen 3 DoF cylindrického manipulátoru, aby se, při pohybu manipulátoru po zvolené trajektorii (přímce či obecně křivce v prostoru), projevila gravitace působící na ramena a koncový efektor manipulátoru minimálním možným způsobem do silových momentů aktuátorů?

★

Proces návrhu parametrů mechatronických systémů s danou strukturou může být dále rozšířen na návrh dynamických parametrů, např. hmotnosti, momenty setrvačnosti-rozložení hmoty. Tyto parametry jsou pochopitelně z velké části určeny již navrženou strukturou a kinematickými parametry společně s použitým materiálem při konstrukci. Nicméně v některých speciálních případech lze zvažovat přidání dodatečných hmotností případně silových elementů (pružiny, tlumiče, přidané hmotnosti) do stávající navržené konstrukce manipulátoru za účelem zlepšení statických/dynamických vlastností. Pokročilou možností parametrické optimalizace pak může být stanovení kinematických případně dynamických parametrů za účelem optimalizace říditelnosti mechatronického systému opět v pracovním prostoru či jeho podmnožině. Jinými slovy, jak navrhnout parametry mechatronického systému, aby byla zajištěna optimální možnost jeho ovlivnění řídicím systémem prostřednictvím použitých aktuátorů.

Poznamenejme, že zmíněné postupy optimalizace vedou vždy na nalezení **konstantních** kinematických návrhových parametrů manipulátoru za účelem optimalizovat dané kritérium. Takové postupy budeme dále nazývat jako **statická optimalizace** a budou podrobně diskutovány v Kapitole 3.3.

Jako na speciální případ optimalizace kinematických parametrů manipulátoru lze nahlížet na řízení redundantních manipulátorů. Pro redundantní manipulátory platí, že obsahují větší počet nezávislých aktuátorů (nezávislých řízených kloubových souřadnic), než je požadovaný počet stupňů volnosti koncového efektoru. V takovém případě neexistuje jednoznačné řešení kinematických úloh (pro sériové manipulátory IGM, IIK). Z podstaty popisu kinematické struktury manipulátoru (např. prostřednictvím D-H úmluvy, viz Kapitola A.2) lze na každou kloubovou souřadnici nahlížet jako na proměnný kinematický parametr manipulátoru (parametr, který se může měnit během pohybu manipulátoru). Vybrané redundantní kloubové souřadnice (parametry) manipulátoru lze potom dynamicky měnit během pohybu manipulátoru a docílit tak zvolené optimality. **Optimálním řízením pohybu redundantních manipulátorů** se budeme zabývat podrobně v Kapitole 3.4.

3.2. Současný stav problematiky parametrické optimalizace

V této kapitole je shrnut současný stav problematiky týkající se parametrické optimalizace. Klíčové informace jsou čerpány z obsahu relevantních článků a ostatních publikací a předkládají základní principy a často používané metody, které lze v současnosti nalézt. Předložené informace jsou výsledkem dlouhodobé rešeršní práce autora a reprezentují současný stav problematiky parametrické optimalizace kinematiky manipulátorů ve smyslu její formulace v Kapitole 3.1 ve vlastní interpretaci autora. S ohledem na celosvětově masivně rozšířenou vědecko-výzkumnou komunitu, včetně oblasti optimálního návrhu manipulátorů, nelze definitivně garantovat pokrytí všech skutečně dostupných přístupů, metod a algoritmů. Autor však předpokládá, že na základě mnoha zkušeností, a to nejen na teoretické úrovni, ale velkou měrou i na úrovni praktického využití při návrhu a řízení reálných manipulátorů, viz Kapitola 1.3, následující text reprezentuje relevantní současný stav problematiky a zároveň tak umožňuje na tento současný stav navázat s dalšími upravenými, pozměněnými či zcela novými přístupy, které jsou dále předloženy v Kapitole 3.3 (Statická optimalizace), v Kapitole 3.4 (Optimální řízení redundantních manipulátorů) a v Kapitole 4 (Využití optimálního řízení redundantních manipulátorů).

S ohledem na parametrickou optimalizaci kinematické architektury manipulátoru, tedy nalezení optimálních hodnot kinematických návrhových parametrů, které splňují podmínky optimality, lze formulovat tři klíčové problémy:

1. Definice optimalizační úlohy

Jednoznačně nejdůležitější část optimalizace, od které se odvíjí všechny ostatní navazující postupy. Je intuitivně zřejmé, že nevhodná formulace optimalizační úlohy může snadno vést ke zcela nesmyslným či nerealizovatelným výsledkům i za předpokladu, že je tato úloha, ve smyslu své definice, vyřešena korektně. Budeme-li uvažovat klasický přístup formulace optimalizační úlohy na základě optimalizace (minimalizace/maximalizace) zvoleného kritéria optimality, kritériální funkce (tzv. *performance index*), nese právě toto kritérium (resp. jeho definice) zásadní podíl na úspěšné optimalizaci.

2. Řešení optimalizační úlohy

Jedná se o vlastní jádro optimalizace, typicky řešení definovaného optimalizačního problému, který lze obecně formulovat jako nalezení extrému (lokálního, globálního) hodnoty kritériální funkce a odpovídajícího argumentu reprezentovaného zvolenými

kinematickými návrhovými parametry. Právě zde existuje celá řada metod, zahrnující standardní gradientní či negradientní přístupy, metody přímého prohledávání, intervalovou analýzu, heuristické metody atd. Zásadní limitací metod řešení optimalizačních úloh jsou především výpočetní čas, paměťová náročnost, neexistence analytického řešení, stabilita a přesnost numerických metod atd.

3. Alternativní přístupy k řešení

Jedná se o oblast výzkumu, která otevírá nové možnosti optimalizace a syntézy manipulátorů za účelem jejich optimálního chování vzhledem k definované úloze. Klasická úloha kritériální optimalizace je ekvivalentně nahrazena úlohou, která principiálně umožňuje takový problém řešit s využitím odlišných přístupů a jejich výsledky lze potom vhodně interpretovat na problém původní. Zásadním přínosem takových metod je možnost získání určité přidané hodnoty (např. náhled do strukturálních vlastností, viz Kapitola 2, uvažovaného manipulátoru tak, jak je nastíněno v Kapitole 3.4, 4).

V návaznosti na výše uvedené klíčové problémy jsou dále diskutovány nalezené a analyzované přístupy. Poznamenejme, že relativně podrobný strukturovaný výťah z obsahu relevantních článků je možné najít v [135], dále jsou uvedeny pouze klíčové vlastnosti a poznatky.

3.2.1. Kritéria optimality

Definice kritéria optimality jsou s ohledem na parametrickou optimalizaci klíčovým problémem zahrnující kvalitativní zhodnocení chování daného manipulátoru pro konkrétní hodnotu jeho kinematických návrhových parametrů. S ohledem na platnost kritéria lze toto rozdělit na dvě základní skupiny:

Lokální kritéria

Kritéria s lokální (bodovou) platností, které jsou definována v jednom daném bodě pracovního prostoru manipulátoru (jednu hodnotu zobecněných souřadnic \mathbf{X} resp. kloubových souřadnic \mathbf{Q}) jako skalární funkce vektorového argumentu $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$. Lokální kritéria tak hodnotí vlastnosti manipulátoru v daném bodě pracovního prostoru, či, v případě plánování pohybu koncového efektoru, v daném bodu příslušné trajektorie (tzn. poloze, rychlosti či zrychlení zobecněných resp. kloubových souřadnic). Drtivá většina všech dnes používaných kritérií vychází z vlastností kinematického jakobiánu manipulátoru, viz Kapitola A.4. Kinematický jakobián manipulátoru vztahuje rychlosti kloubových a zobecněných souřadnic a zároveň kloubových sil/silových momentů a sil/silových momentů působících na jeho koncový efektor. Souhrnně jsou tyto závislosti označovány jako **kinetostatická dualita**, viz [95, 44, 66], a lze je formulovat následujícími vztahy:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3.2)$$

kde $\dot{\mathbf{X}}$ je vektor rychlostí zobecněných souřadnic (typicky vektor translační $\dot{\mathbf{O}}_n^0$ a úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_n^0$ s.s. posledního ramena manipulátoru), $\dot{\mathbf{Q}}$ je vektor rychlostí kloubových souřadnic, \mathbf{F} je vektor sil/silových momentů působící na koncový efektor a $\boldsymbol{\tau}$ je vektor sil/silových momentů působících v jednotlivých kloubech manipulátoru (aktuátorech).

Pro demonstraci dále uvažujme 2 DoF sériový neredundantní manipulátor, tzn. $\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a uvažujme lineární transformaci mezi rychlostmi (3.1). Vlastnosti kinematického jakobiánu jsou dány jeho vlastními čísly λ_1, λ_2 či odpovídajícími čísly singulárními $\sigma_1,$

σ_2 . Vzhledem k faktu, že singulární čísla jsou vždy reálná nezáporná čísla, jsou přirozeně vhodnějším ukazatelem, než čísla vlastní. Grafický význam vlastních a singulárních čísel jakobiánu $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ je znázorněn na Obrázku 3.1. Pro vlastní a singulární čísla zřejmě platí:

- Vlastní čísla $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_i]$, vlastní vektory \mathbf{v}_{λ_i} , $\|\mathbf{v}_{\lambda_i}\| = 1$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{Q})) = 0\} \quad (3.3)$$

$$\lambda_i \cdot \mathbf{v}_{\lambda_i} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{v}_{\lambda_i}, \quad \forall i \quad (3.4)$$

- Singulární čísla $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_i]$, singulární vektory $\mathbf{v}_{\sigma_i}^L$ (levý), $\mathbf{v}_{\sigma_i}^R$ (pravý), $\|\mathbf{v}_{\sigma_i}^*\| = 1$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma = \sqrt{\lambda} : \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{Q})) = 0\} \quad (3.5)$$

Ekvivalentně lze definovat singulární čísla a vektory ze SVD rozkladu¹ jakobiánu $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$, viz (A.62, A.63):

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad (3.6)$$

kde $\mathbf{U} = [\mathbf{v}_{\sigma_1}^L, \mathbf{v}_{\sigma_2}^L]$ resp. $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_{\sigma_1}^R, \mathbf{v}_{\sigma_2}^R]$ jsou unitární² matice jejichž sloupce tvoří levý resp. pravý singulární vektor. $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ je diagonální matice se sestupně uspořádanými singulárními čísly.

Jednoduchou úpravou vztahu (3.6) zřejmě pro singulární čísla a vektory platí:

$$\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{v}_{\sigma_i}^R = \sigma_i \cdot \mathbf{v}_{\sigma_i}^L, \quad \forall i \quad (3.7)$$

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{J}(\mathbf{Q})^T \cdot \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}(\mathbf{Q})^T \cdot \mathbf{v}_{\sigma_i}^L = \sigma_i \cdot \mathbf{v}_{\sigma_i}^R, \quad \forall i \quad (3.8)$$

Grafická interpretace na Obrázku 3.1 koresponduje s teorií indukovaných maticových norm, a lze ukázat, viz [78, 35], že platí následující omezení:

$$\max_{\dot{\mathbf{Q}}} \left(\frac{\|\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}\|}{\|\dot{\mathbf{Q}}\|} \right) = \sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) = \|\mathbf{J}(\mathbf{Q})\|_2 = \sigma_1 \quad (3.9)$$

$$\min_{\dot{\mathbf{Q}}} \left(\frac{\|\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}\|}{\|\dot{\mathbf{Q}}\|} \right) = \sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) = \sigma_2 \quad (\text{Obecně poslední sing. číslo}) \quad (3.10)$$

kde $\|\star\|$ je Euklidovská norma (signálu) zobecněných a kloubových rychlostí a $\|\star\|_2$ je norma matice indukovaná Euklidovskou normou.

Tedy platí, že horní a dolní omezení na velikost normy zobecněných rychlostí $\dot{\mathbf{X}}$ lze s pomocí minimálního a maximálního singulárního čísla jakobiánu psát jako (horní resp. dolní omezení v grafické interpretaci odpovídá poloměru vepsané resp. opsané kružnice elipsy lineární transformace na Obrázku 3.1):

$$\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \cdot \|\dot{\mathbf{Q}}\| \leq \|\dot{\mathbf{X}}\| \leq \sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \cdot \|\dot{\mathbf{Q}}\| \quad (3.11)$$

Zohledníme-li nyní naopak transformaci mezi silami/silovými momenty působících na koncový efektor manipulátoru a odpovídajícími silami/silovými momenty v kloubech manipulátoru, je tato lineární transformace vztažena transformovaným inverzním jakobiánem $(\mathbf{J}^T(\mathbf{Q}))^{-1}$, viz (3.2). Ze SVD rozkladu lze ukázat (singulární čísla transponované matice se nezmění, zatímco inverze matice hodnoty singulárních čísel převrátí a následně uspořádá v opačném sledu):

$$(\mathbf{J}^T(\mathbf{Q}))^{-1} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_1} \right) \quad (3.12)$$

¹Např. Singulární rozklad matice v Matlabu - funkce `svd`.

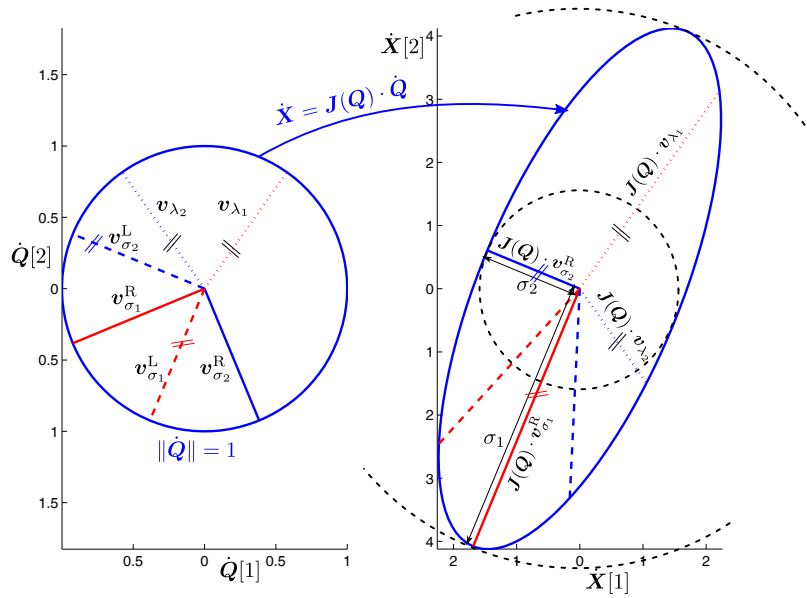
²Pro unitární matici \mathbf{U} platí: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$

kde \mathbf{U} , \mathbf{V} jsou obecně odlišné matice od předchozích a σ_i jsou singulární čísla jakobiánu $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$.

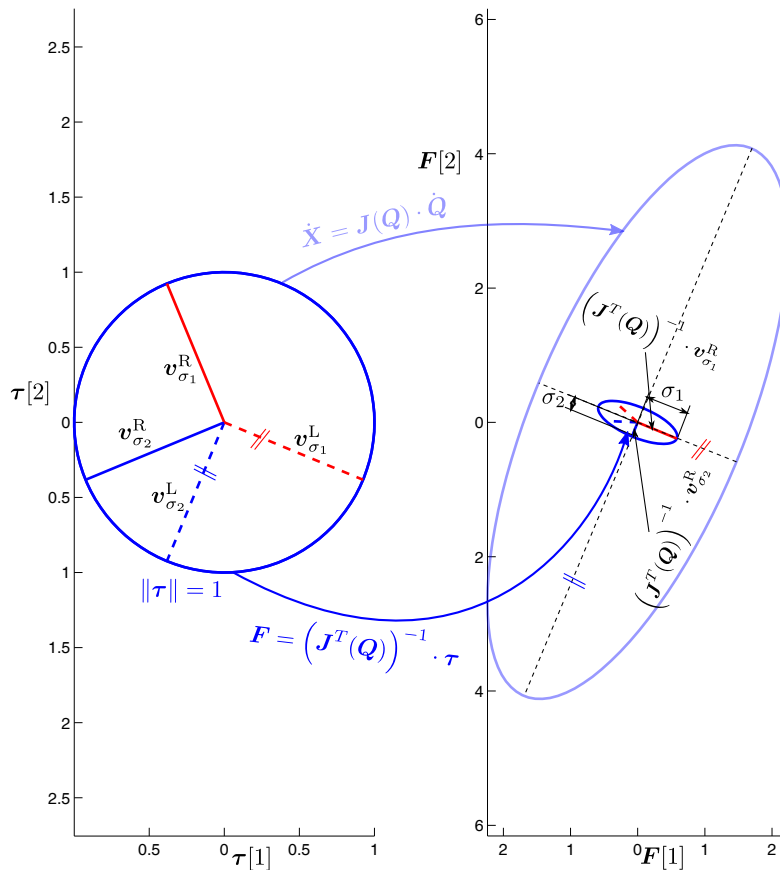
Z rovnice (3.2) a (3.11) tak ekvivalentně vyplývá:

$$\frac{1}{\sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} \cdot \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \|\mathbf{F}\| \leq \frac{1}{\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} \cdot \|\boldsymbol{\tau}\| \quad (3.13)$$

Grafická interpretace je znázorněna na Obrázku 3.2, kde je možné si všimnout typické vzájemně kolmé orientace elips (kinetostatická dualita).



Obrázek 3.1.: Lineární transformace $\dot{X} = J(Q) \cdot \dot{Q}$



Obrázek 3.2.: Lineární transformace $F = (J^T(Q))^{-1} \cdot \tau$ (Singularní čísla i vektory nyní odpovídají matici $(J^T(Q))^{-1}$)

Vrátíme-li se se zpět k původnímu záměru, a to najít vhodné kritérium optimality $J(\mathbf{Q})$, lze taková kritéria na základě vlastností jakobiánu definovat následovně:

- **Maximalizace rychlostí koncového efektoru manipulátoru:**

Založeno na základě vztahu (3.11). Norma rychlosti $\|\dot{\mathbf{X}}\|$ koncového efektoru je maximalizována. Nebo ekvivalentně, norma rychlostí kloubových souřadnic $\|\dot{\mathbf{Q}}\|$ bude vždy menší než $\frac{1}{\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} \cdot \|\dot{\mathbf{X}}\|$, kde $\|\dot{\mathbf{X}}\|$ představuje požadovanou normu rychlosti koncového efektoru:

$$J(\mathbf{Q}) = \sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \rightarrow \text{MAXIMALIZACE} \quad (3.14)$$

- **Maximalizace sil/silových momentů koncového efektoru manipulátoru:**

Založeno na základě vztahu (3.13). Norma síly/silového momentu $\|\mathbf{F}\|$ je maximalizována. Nebo ekvivalentně, norma sil/silových momentů $\|\boldsymbol{\tau}\|$ působících v kloubech manipulátoru bude vždy menší než $\sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \cdot \|\mathbf{F}\|$, kde $\|\mathbf{F}\|$ představuje požadovanou normu síly/silového momentu koncového efektoru:

$$J(\mathbf{Q}) = \sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \rightarrow \text{MINIMALIZACE} \quad (3.15)$$

- **Podmíněnosti kinematického jakobiánu manipulátoru (kompromis):**

Bohužel, definovaná kritéria, tak jak jsou voleny vztahy (3.14, 3.15), jsou přirozeně protichůdná, neboť pro singulární čísla platí: $\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \leq \sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))$ a maximalizací kritéria rychlosti, $\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))$, resp. minimalizací kritéria síly, $\sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))$, zhoršujeme vždy opačné, tedy silové/momentové resp. rychlostní vlastnosti manipulátoru. Právě z takového důvodu se velmi často v literatuře vyskytuje tzv. „kompromisní“ kritérium, které se snaží v ideálním případě zajistit rovnost minimálního a maximálního čísla jakobiánu (ideálně dokonce rovno jedné, což je nazýváno jako *izotropní* bod manipulátoru v dané poloze). Takové kritérium je známo z lineární algebry jako podmíněnost matice³ (jakobiánu) a je definováno následovně:

$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} = \frac{\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))}{\sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} \in \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \text{MAXIMALIZACE} \quad (3.16)$$

V případě $\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} \rightarrow 1$ tak dostáváme optimální kompromis mezi přenosem sil a rychlostí z aktuátorů manipulátoru na koncový efektor manipulátoru. V grafické reprezentaci, viz Obrázek 3.1, 3.2, tak zřejmě dochází k přiblížení elips (pro zobrazení rychlostí i sil/momentů) kružnicím. Z jiného pohledu lze také definovat, viz Kapitola A.7, že je manipulátor optimálně (maximálně) vzdálen od své singulární polohy. V případě, že $\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} = 0$, tedy nutně $\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) = 0$, manipulátor se nachází v sériové singularitě a elipsy degenerují k vzájemně kolmým úsečkám (rychlosti) a přímce (síly/momenty). Tedy koncový efektor se v tomto bodě může pohybovat pouze do jediného směru (s konečnou rychlostí) a zároveň ve směru kolmém udrží nekonečně velkou sílu/moment působící na koncový efektor (který se neprojevuje do sil/silových momentů aktuátorů⁴). Toto lze samozřejmě dále zobecňovat pro více DoF manipulátoru. Převrácená hodnota podmíněnosti jakobiánu $\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))}$ je někdy nazývána také jako tzv. *dexterity* index.

I přesto, že podmíněnost jakobiánu reprezentuje vhodné kritérium pro optimalizaci manipulátorů, stále lze v takovém přístupu odhalit celou řadu problémů, které iniciují hledání jiných kritérií optimality. S ohledem na dostupnou literaturu jmenujme některé klíčové:

³V Matlabu jako funkce `cond`.

⁴Takový singulární stav je někdy využíván s ohledem na jistou samosvornost mechanismu - typicky např. obyčejná přezka.

- **Nekonzistentnost fyzikálních jednotek**

Právě nekonzistentnost fyzikálních jednotek odpovídajícím vektorům rychlostí (či sil a silových momentů) hrají významnou roli v případně porovnání míry optimality navrhovaného manipulátoru. Kinematický jakobián vztahuje prvky vektorů s různými fyzikálními jednotkami $[m, \frac{m}{s}, rad, \frac{rad}{s}, N, Nm, \dots]$ a číslo podmíněnosti jakobiánu závisí na aktuálně uvažovaných hodnotách - nelze relevantně porovnávat translační a úhlovou rychlost - např. vyjádříme-li translační rychlost v $\frac{mm}{s}$ a úhlovou rychlost v rad , bude se jednat o diametrálně rozdílné hodnoty a jakobián bude tak zřejmě vykazovat apriori špatnou podmíněnost. Tento problém lze kompenzovat vhodným normováním kinematického jakobiánu, typicky např. s ohledem na délkové rozměry ramen (tzv. normování příslušných translačních rychlostí charakteristickou délkou ramen manipulátoru). Problémem je často právě nalezení vhodných normujících matic, kterým jsou sloupce/řádky jakobiánu upravovány, např. přenásobením jakobiánu diagonálními maticemi zleva a zprava odpovídajícímu normování zobecněných a kloubových souřadnic - proces homogenizace jakobiánu, viz [113, 19, 152, 53]. Řada přístupů homogenizace/normování jakobiánu manipulátoru je obdobná jako v případě realizovaných algoritmů kinematické kalibrace, viz [127].

Poznamenejme, že v obecném případě (bez explicitního uvažování fyzikálních jednotek) se jedná o tzv. vyvažování matic (jakobiánu) založené např. na algoritmu nalezení podobné matice k matici původní, tzn. matice jejíž spektrální vlastnosti jsou totožné s maticí původní (shodná vlastní čísla/vlastní vektory). Vyvážená matice vykazuje navíc maximální možnou shodu odpovídajících sloupcových a řádkových norem. Vyvážená matice vykazuje obecně lepší podmíněnost (menší hodnotu čísla podmíněnosti $\text{cond}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))$). Algoritmy vyvažování matic jsou k dispozici např. v Matlabu (funkce `balance`) či součástí knihovny metod LAPACK (Linear Algebra PACKage) pro řešení problémů lineární algebry.

V literatuře lze nalézt dále celou řadu odlišných přístupů ke stanovení kritéria optimality, které jsou založené na určitém identifikátoru vlastností manipulátoru na základě daných konzistentních měření (vlastností), které jsou nezávislé na skutečných fyzikálních jednotkách či velikosti (měřítku) manipulátoru a zároveň je možné kritérium snadno vypočítat. V [69] je kritériem optimality nalezení takové polohy manipulátoru a jeho příslušných kinematických návrhových parametrů, pro které se manipulátor blíží maximálně izotropnímu bodu (dán poměrem singulárních čísel jakobiánu) a zároveň dochází v tomto okolí k minimální změně (zajištění robustnosti optimalizace). Zcela nový přístup k volbě kritéria je uveden v [63, 64], kde je kritérium formulováno na základě generovaného výkonu manipulátoru jeho koncovým efektoem, kde tento výkon je vypočten na základě translačních rychlostí a sil resp. úhlových rychlostí a momentů konající jednotlivé aktuátory manipulátoru. V porovnání s výše uvedenými kinetostatickými kritérii přináší uvedený přístup možnost hodnotit optimalitu manipulátoru relevantně vzhledem k podanému mechanickému výkonu (nezávislý na jednotkách, měřítku atd.).

- **Pouze polohové závislosti**

Je zřejmé, že výše uvedená kinetostatická kritéria optimality (singulární čísla, číslo podmíněnosti) nezahrnují vyčerpávajícím způsobem dynamické vlastnosti manipulátoru, neboť jsou závislá výhradně na jeho aktuální poloze. Zároveň kompromisní přístup, tedy nalezení parametrů manipulátoru s co nejlépe podmíněným kinematickým jakobiánem (včetně metod normování, homogenizace atd.), je vhodný přístup zejména v případě nutnosti obecného vzájemného porovnávání zvolených manipulátorů na základě právě kinetostatických ukazatelů. V reálně definovaných problémech, viz Kapitola 1.3 však často potřebujeme manipulátor dimenzovat výhradně pro kon-

krétní typ úlohy, a to často přímo na danou předepsanou trajektorii pohybu (periodicky se opakující činnosti průmyslově nasazovaných manipulátorů, viz Příklad 3.13 či nějak, s ohledem na dynamické vlastnosti, kvalifikovaný pracovní prostor, viz Příklad 3.6. V takových případech jsou kinetostatická kritéria optimality nedostačující a je třeba přistoupit ke generování kritérií s uvažováním kompletních dynamických rovnic chování manipulátoru (závislých nejen na poloze, ale i na rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic). Typickým příkladem je optimalizace pohybu redundantních manipulátorů s ohledem na optimalizace rychlostí resp. sil/momentů v jednotlivých aktuátorech, viz Kapitola 3.4.

- **Zahrnutí omezení, vypořádání se se singularitami**

V případě výpočtu lokálních kritérií může během optimalizačního procesu (kdy se během parametrické optimalizace mění kinematické návrhové parametry manipulátoru) snadno dojít k situaci, že se manipulátor dostává do singulární polohy (může být ošetřeno např. kinetostatickými kritérii viz výše) nebo dokonce pro daný vyšetřovaný bod trajektorie (daného pracovního prostoru) neexistuje řešení IGM. Tato situace je velmi nebezpečná, neboť právě IGM je v uvažovaných optimalizačních procesech jedna z prvních řešených úloh (nalezení odpovídajících poloh kloubů manipulátoru) a na jejím základě jsou počítány všechny ostatní kinematické a dynamické vlastnosti manipulátoru. V optimalizačním procesu se proto často musí uvažovat daná omezení na přípustné hodnoty kinematických návrhových parametrů, existenci řešení IGM, viz [105], či omezení na některé další stavy manipulátoru (přiblížení k překážce, maximální/minimální povolené hodnoty aktuátorů atd.). Vzhledem k nutnosti koncipovat optimalizační proces robustně se proto často volí princip penalizace, viz [88, 104], kdy je k danému kritériu optimality ještě aditivně přidávána penalizační část hodnotící míru porušení uvažovaných omezení. Princip penalizací je využíván také v dále uvažovaných optimalizačních procesech.

Globální kritéria

Zatímco lokální kritéria optimality vypovídají o vlastnostech manipulátoru v jednom daném pracovním bodu (ať už se jedná o jeden bod na konkrétní plánované trajektorii či jeden bod z pracovního prostoru manipulátoru), v případě kritérií globálních uvažujeme, že vlastnosti manipulátoru jsou hodnoceny přes celou trajektorii či přes celý pracovní prostor manipulátoru. Často jsou taková kritéria reprezentovaná buď integrály přes danou trajektorii či pracovní prostor jejichž argumenty bývají právě lokální kritéria optimality či sumou lokálních kritérií vypočtených přes definovanou diskretizovanou množinu, viz Kapitola 3.4. Alternativním přístupem jsou dále globální kritéria optimality založené na principu minimalizace resp. maximalizace maximální resp. minimální hodnoty lokálního kritéria optimality přes celý uvažovaný pracovní prostor (metody typu *minmax* resp. *maxmin*), viz Kapitola 3.3.

3.2.2. Definice optimalizačních úloh

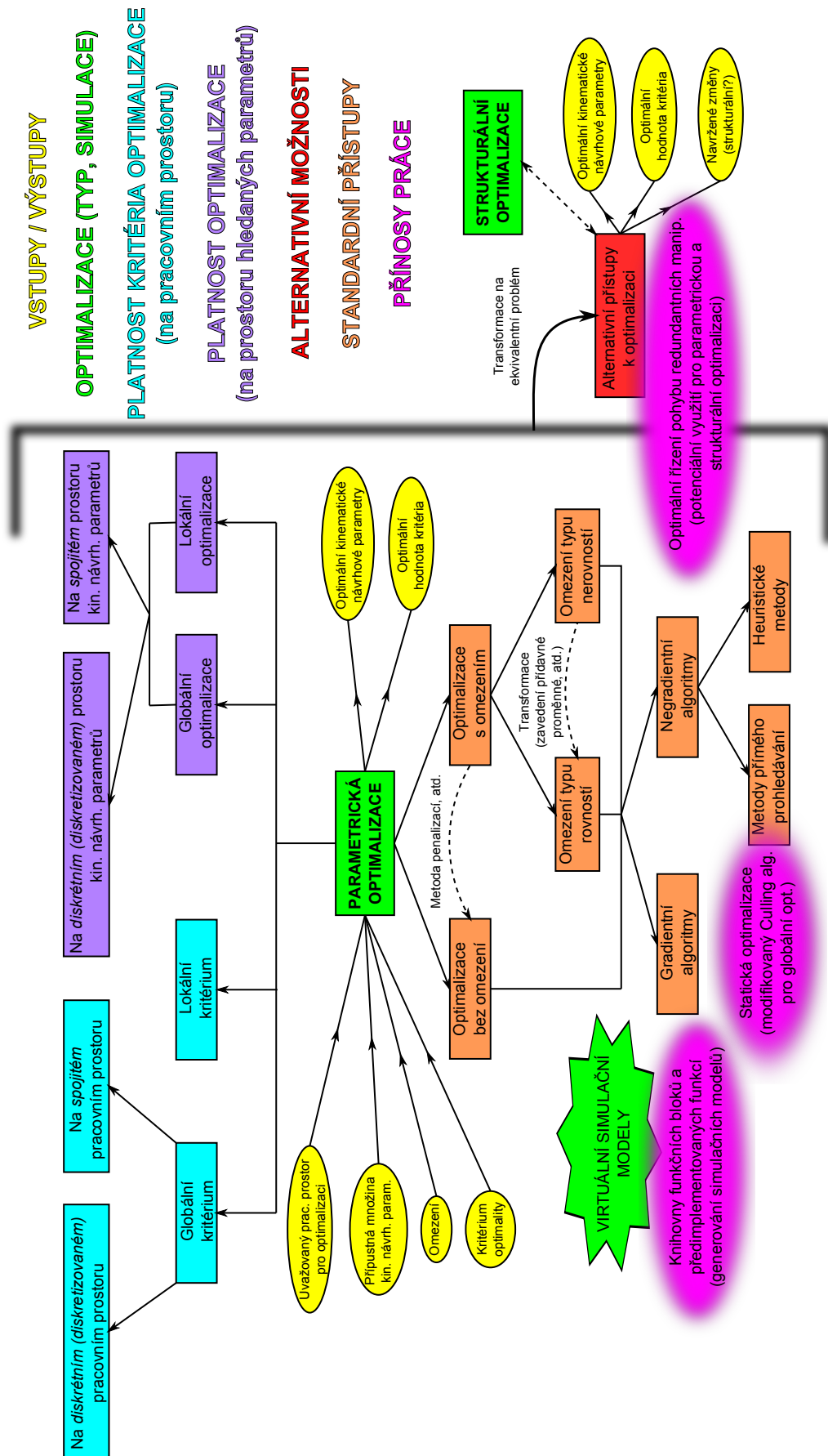
Obecně lze úlohu kinematické optimalizace manipulátoru definovat jako úlohu nalezení takových kinematických návrhových parametrů manipulátor, které optimalizují (minimalizují/maximalizují) dané kritérium optimality (lokální či globální). Často je dále vedle optimalizace uvažovaného kritéria optimality nutné ještě zvážit některá definovaná omezení, a to ať už ve tvaru rovností či nerovností. Takový problém lze poté formulovat jako nalezení optimálního řešení (hodnoty kinematických návrhových parametrů) na definované

restrikci úplného stavového prostoru (prostoru kinematických návrhových parametrů). Někdy je taková úloha označována jako nalezení vázaného extrému funkce. Z matematického hlediska lze uvažovanou optimalizační úlohu definovat následovně:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^* &= \underset{\boldsymbol{\xi} \in \Xi}{\operatorname{argmin}} (J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi})) \\ J^*(\mathbf{X}_{\text{opt}}) &= J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi}^*) = \min_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} (J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi})) \end{aligned} \quad (3.17)$$

vzhledem k omezení: $\mathbf{Eq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) = 0$
 $\mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) > 0$

kde $J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi})$ je skalární hodnota kritériální funkce, $\boldsymbol{\xi}$ je vektor vyšetřovaných parametrů z přípustné množiny Ξ (spojité či diskrétní, viz Obrázek 3.3, *platnost optimalizace na prostoru hledaných parametrů*), \mathbf{X} je stav manipulátoru v pracovním prostoru (obecně např. poloha, rychlost a zrychlení koncového efektoru či kloubů) z uvažované množiny, přes kterou dochází k optimalizaci \mathbf{X}_{opt} (v případě uvažování lokálního kritéria je množina \mathbf{X}_{opt} přirozeně jednoprvková na rozdíl od případu uvažování globálního kritéria, kdy množina \mathbf{X}_{opt} zahrnuje celou množinu stavů, viz Obrázek 3.3, *platnost kritéria optimalizace na pracovním prostoru*). Funkce $\mathbf{Eq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ resp. $\mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ definují omezení daná rovnostmi resp. nerovnostmi.



Obrázek 3.3.: Přístupy k parametrické optimalizaci kinematiky manipulátorů včetně významných vlastních přínosů práce.

Celkový náhled na řešení definované optimalizační úlohy parametrické optimalizace je graficky znázorněna na Obrázku 3.3. Diskutujme dále některé základní předpoklady, které diferencují různé přístupy k definici a řešení optimalizační úlohy. Zásadní stavební prvek optimalizační úlohy tvoří právě definice vhodného kritéria optimality, kterým jsme se již zabývali výše. Z celkového pohledu na výsledky optimalizační úlohy lze úlohu dělit na lokální optimalizaci, kdy je výsledkem nějaké lokální optimum a globální optimalizaci, kdy lze prohlásit, že nalezené optimum má globální platnost přes celý prostor uvažovaných kinematických návrhových parametrů, tedy množinu Ξ . Řešení uvažované optimalizační úlohy lze dále obecně dělit na *standardní metody* založené na řešení obecných optimalizačních úloh a *alternativní metody*, které využívají k řešení úloh transformaci původního optimalizačního problému na problém ekvivalentní (často jsou alternativní metody spojeny s řešením specifických optimalizačních úloh a integrují do optimalizačních přístupů poznatky právě z vybrané problémové oblasti).

3.2.3. Standardní přístupy k řešení

Budeme-li na optimalizační úlohu nahlížet jako na obecný problém nalezení optima nelineární skalární funkce $J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ více proměnných (vektor $\boldsymbol{\xi}$) s uvažováním omezení typu rovností a nerovností, lze nalézt celou řadu přístupů, které jsou velmi detailně shrnuty v celé řadě publikací, viz [104, 88, 78]. Vzhledem k tomu, že cílem předložené práce není explicitně hledat nové metody řešení obecné optimalizační úlohy, soustředíme se pouze na základní možnosti a charakteristiky s ohledem na využití standardních algoritmů pro optimalizaci kinematiky manipulátorů. Následující stručný souhrn standardních přístupů k řešení je přiložen z důvodu možnosti vytvoření komplexního náhledu na obecný problém optimalizace.

Vzhledem k faktu, že hledání nevázaných extrémů (optimalizace bez omezení) je přirozeně jednodušší úlohou, jedním z možných přístupů je transformace uvažovaných omezení do hodnoty kritériální funkce formou penalizací. V takovém případě funkce definující omezení $\mathbf{Eq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{N_{\text{eq}}}$, $\mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{N_{\text{ineq}}}$ formují tzv. *penalizační funkci* $J_{\text{pen}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$, která je poté přičítaná k hodnotě *účelové funkce* $J_{\text{obj}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ a celkově tvoří výslednou *kritériální funkci* $J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$:

$$J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) = J_{\text{obj}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) + J_{\text{pen}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.18)$$

kde $J_{\text{obj}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ je účelová funkce založená na zvoleném kritériu optimality, viz Kapitola 3.2.1 a penalizační funkce je definována jako:

$$J_{\text{pen}} = \sum_i^{N_{\text{eq}}} (K_i^{\text{eq}} \cdot P_i^{\text{eq}}) + \sum_j^{N_{\text{ineq}}} (K_j^{\text{ineq}} \cdot P_j^{\text{ineq}}) \quad (3.19)$$

kde K_i^{eq} resp. K_j^{ineq} jsou penalizační konstanty odpovídající omezením typu rovností resp. nerovností a

$$P_i^{\text{eq}} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } \mathbf{Eq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[i] = 0 \\ |\mathbf{Eq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[i]| & \text{pokud } \mathbf{Eq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[i] \neq 0 \end{cases}$$

$$P_j^{\text{ineq}} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } \mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[j] > 0 \\ |\mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[j]| & \text{pokud } \mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[j] \leq 0 \end{cases}$$

Přístupy vypořádání se s omezeními formou penalizací jsou často využívány [105, 75, 110, 20, 104, 88] právě pro svou robustnost a jednoduchost s ohledem na integraci do optimalizačního algoritmu bez uvažování omezení. Přístup navíc umožňuje realizovat tzv. „měkká“

omezení, kdy lze vhodnou volbou penalizačních konstant definovat kompromis mezi účelovou a penalizační funkcí (tedy kritériem optimality a omezujícími podmínkami). S ohledem na konvergenci optimalizačního algoritmu je za určitých podmínek vhodné dynamicky měnit (typicky navyšovat) hodnotu penalizačních konstant, a docílit tak postupného nalezení vázaného extrému, viz např. [103]. Metoda penalizací je využívána i v uvedené práci v Kapitole 3.3.

V případě uvažování omezení typu rovností (hledání extrému ležícího na dané nadploše) se nabízí využití standardního řešení optimalizační úlohy na základě integrace takových omezení do optimalizační úlohy prostřednictvím metody *Lagrangeových multiplikátorů* a definování rozšířeného kritéria jako:

$$\hat{J}(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi}) = J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{Eq}(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.20)$$

kde $\boldsymbol{\lambda}$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů.

Řešením soustavy rovnic nutné podmínky existence extrému

$$\frac{\partial \hat{J}(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \hat{J}(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$$

poté získáváme lokální hodnoty optima $\boldsymbol{\xi}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$. Bohužel, analytické řešení získané soustavy algebraických nelineárních rovnic není v případě kinematické optimalizace manipulátoru v drtivé většině případů možné vypočítat s ohledem na složité vztahy účelové a penalizační funkce (v případě globálních kritérií optimality je kritérium navíc často počítáno v diskretizovaných bodech uvažovaného prostoru \mathbf{X}_{opt}). Poznamenejme, že nutná podmínka existence extrému je zároveň podmínkou postačující pouze v případě, že účelová i penalizační funkce je konvexní funkcí, viz [104, 88].

V případě řešení obecných nelineárních úloh s obecně nelineárními omezeními typu rovností jsou pak často tyto úlohy řešeny iteračně s lokální aproximací účelové funkce a funkce omezení vhodným modelem (typicky kvadratickou aproximací účelové funkce a lineární aproximací omezení). V každém kroku iterace je tak nalezené lokální řešení (přírůstek ve smyslu směru a velikosti vektoru hledaných parametrů) využito k aktualizaci řešení současného (např. v kombinaci s algoritmy *line search*, viz dále).

V oblasti matematické optimalizace byl a je dlouhodobě kladen požadavek na zahrnutí nejenom omezení typu rovností, ale také omezení typu nerovností. Opět vyvstává otázka, jak přirozeně použít optimalizaci s omezením typu rovností a omezení typu nerovností do nich určitým způsobem transformovat. Jednou z možností je transformace omezení ve tvaru nerovností do omezení ve tvaru rovností zavedením přídatných proměnných v následující podobě:

$$\mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[j] < 0 \rightarrow \mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[j] + \theta_j^2 = 0$$

Tedy zavedením přídatné proměnné θ_j a řešením optimalizační úlohy s omezením typu rovností je původní omezení typu nerovností vždy splněno pro libovolnou nalezenou hodnotu přídatné proměnné θ_j , neboť: $\mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})[j] = -\theta_j^2$.

Speciálními případy optimalizace s omezeními typu nerovností jsou úlohy:

- **Lineární programování**

Lineární programování řeší typicky optimalizační úlohu, kde jsou účelová funkce i omezení uvažovány jako lineární vzhledem k optimalizovaným parametrům. Řešení úlohy tak odpovídá nalezení extrému účelové funkce definované lineární nadplochou na nadrovině definované uvažovanými omezeními. Bez újmy na obecnosti vypustíme

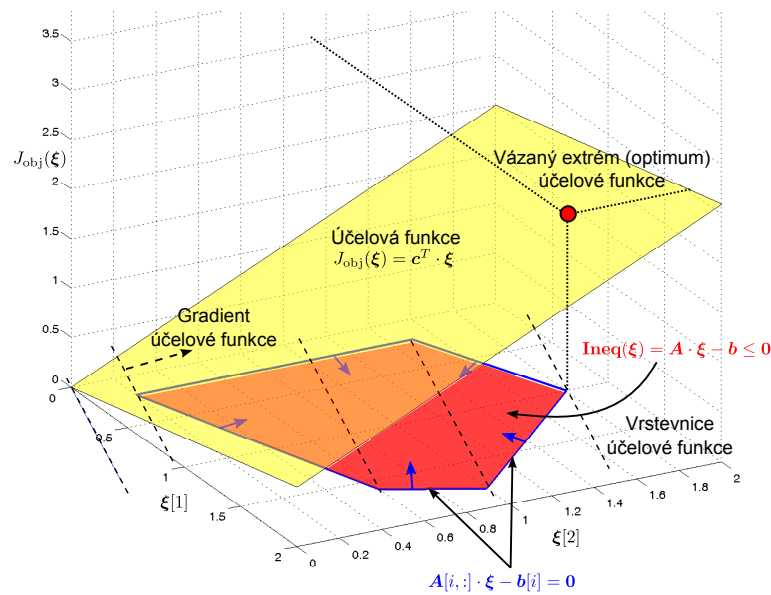
z účelové funkce a funkce omezení závislost na prohledávaném pracovním prostoru \mathbf{X}_{opt} , úlohu lineárního programování můžeme potom definovat jako:

$$\boldsymbol{\xi}^* = \underset{\boldsymbol{\xi} \in \Xi}{\operatorname{argmin}} (J_{\text{obj}}(\boldsymbol{\xi})) = \underset{\boldsymbol{\xi} \in \Xi}{\operatorname{argmin}} (\mathbf{c}^T \cdot \boldsymbol{\xi}) \quad (3.21)$$

vzhledem k omezení: $\mathbf{Ineq}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\xi} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$

kde $\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0}$ a \mathbf{c} resp. \mathbf{A} a \mathbf{b} jsou příslušné numerické matice/vektory parametrizující lineární předpisy pro účelovou funkci resp. omezení.

Grafická reprezentace lineárního programování je znázorněna na Obrázku 3.4. Je zřejmé, že hledané optimum bude jediné a bude ležet vždy v některém z extrémálních bodů definovaných jako průsečíky přímek lineárního omezení. V literatuře je možné nalézt efektivní metody k řešení úloh lineárního programování, např. *Simplexový algoritmus* atd., více v [78].



Obrázek 3.4.: Princip lineárního programování

- **Kvadratické programování (QP)**

V případě, že uvažovaná účelová funkce má tvar kvadratické funkce a omezení nerovnostmi zůstává lineární funkcí, mluvíme o tzv. kvadratickém programování:

$$\boldsymbol{\xi}^* = \underset{\boldsymbol{\xi} \in \Xi}{\operatorname{argmin}} (J_{\text{obj}}(\boldsymbol{\xi})) = \underset{\boldsymbol{\xi} \in \Xi}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{c}^T \cdot \boldsymbol{\xi} \right)$$

vzhledem k omezení: $\mathbf{Ineq}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\xi} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$

(3.22)

kde $\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0}$ a \mathbf{Q} , \mathbf{c} resp. \mathbf{A} a \mathbf{b} jsou příslušné numerické matice/vektory parametrizující kvadratický předpis pro účelovou funkci resp. lineární předpis pro omezení.

V případě kvadratického programování se stále jedná o konvexní úlohu, tedy řešení na omezené množině prohledávaných parametrů v takovém případě existuje jediné, a to buď uvnitř prohledávané množiny (jako extrém kvadratické funkce) či na hranicích množiny (jako extrém kvadratické funkce na restrikcii dané rovnostmi - přímkami v uvažovaném omezení) nebo v extrémálních bodech uvažované množiny (tedy

v průsečících přímkách definující lineární omezení). V literatuře je opět možné nalézt celou řadu algoritmů, např.: algoritmy založené na splnění nutných *Karush-Kuhn-Tuckerových* podmínek existence vázaného extrému, metody založené na stanovení aktivní množiny omezení (ta omezení, které jsou v aktuálním kroku algoritmu na hranici splnění, např. *Theil and Van de Panne method*, viz [104]), dále potom *interior point methods*, rozšířená metoda *Lagrangeových multiplikátorů* atd., více v [78].

• **Sekvenční kvadratické programování (SQP)**

V případě obecně uvažované optimalizační úlohy, tedy obecné nelineární účelové funkce a nelineárního omezení nerovnostmi, definované jako

$$\boldsymbol{\xi}^* = \underset{\boldsymbol{\xi} \in \Xi}{\operatorname{argmin}} (J_{\text{obj}}(\boldsymbol{\xi})) \quad (3.23)$$

vzhledem k omezení: $\mathbf{Ineq}(\boldsymbol{\xi}) \leq \mathbf{0}$

kde $J_{\text{obj}}(\boldsymbol{\xi})$ je nelineární účelová funkce a $\mathbf{Ineq}(\boldsymbol{\xi})$ je nelineární funkce omezení,

je často využívaným algoritmem tzv. metoda sekvenčního kvadratického programování, která v každém k -tém iteračním kroku (bodu $\boldsymbol{\xi}_k$) algoritmu lokálně aproximuje původní úlohu jako úlohu kvadratického programování:

$$\Delta \boldsymbol{\xi}_k^* = \underset{\Delta \boldsymbol{\xi}_k \in \Xi}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\xi}_k^T \cdot \mathbf{Q}_k \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{c}_k^T \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}_k \right) \Rightarrow \Delta \boldsymbol{\xi}_k^*$$

vzhledem k omezení: $\mathbf{A}_k \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{b}_k \leq \mathbf{0}$

(3.24)

kde $\mathbf{Q}_k = \frac{\partial^2 J_{\text{obj}}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}^2} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_k}$, $\mathbf{c}_k = \frac{\partial J_{\text{obj}}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_k}$ a $\mathbf{A}_k = \frac{\partial \mathbf{Ineq}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_k}$, $\mathbf{b}_k = \mathbf{Ineq}(\boldsymbol{\xi}_k)$.

A zároveň pro další iteraci platí:

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1}^* = \boldsymbol{\xi}_k^* + \alpha \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}_k$$

kde α je konstanta zesílení (např. řešena prostřednictvím metod *line search*).

Jako alternativu k metodě *SQP* lze považovat tzv. *Dynamic Q-method*, viz [108], kdy je v každém k -tém iteračním kroku využita (místo kvadratického programování) metoda *Spherical quadratic steepest descent method (SQSD)*, viz [107], využívající aproximace kritériální funkce sférickou kvadratickou funkcí - s pozitivně definitním Hessiánem (diagonální matice se shodnými prvky).

Poznamenejme, že součástí metody mohou být vedle omezení typu nerovností také omezení typu rovností (ekvivalentní s řešením úloh prostřednictvím metody *Lagrangeových multiplikátorů*, viz výše). Metoda sekvenčního kvadratického programování se dnes řadí mezi nejefektivnější algoritmy nelineární optimalizace s omezeními a je s různými modifikacemi implementována v podstatě ve všech výpočetních softwarových nástrojích (Maple, Mathematica, Matlab atd.).

Zabývejme se dále výhradně optimalizačními algoritmy bez omezení s předpokladem, že případná omezení jsou přirozeně integrována do účelové funkce formou penalizací, a formují tedy obecnou kritériální funkci, viz výše. Metoda penalizací je v práci dále využívána zejména z následujících důvodů:

- Jednoduché intuitivní integrování omezení typu rovností i nerovností
- Robustnost algoritmu (stabilní algoritmy optimalizace)
- Možnost vážit omezení (a volně přecházet mezi „tvrdými“ a „měkkými“ omezeními)

- Možnost využití algoritmů optimalizace bez omezení
- Možnost zahrnout v podstatě libovolná omezení (nehladká, nespojitá, diskrétní atd.)

Vraťme se nyní k samotnému principu řešení optimalizačních úloh z pohledu analýzy účelové funkce a funkcí případných omezení. Z tohoto pohledu lze dělit optimalizační metody na metod *gradientní* a *ngradientní*, přirozeně podle toho, zda-li ke své činnosti vyžadují znalost gradientu (potažmo Hessiánu či vyšších parciálních derivací) kriteriální funkce, nebo stačí pouze znalost její funkční hodnoty. Intuitivně lze předpokládat, že znalost gradientu funkce, případně vyšších parciálních derivací, umožňuje např. v iteračních algoritmech volit vhodnější směry či přírůstky prohledávání stavového prostoru (zrychlení algoritmu), dokazovat přítomnost lokálních extrémů funkce (a/nebo sedlových bodů) či formulovat odpovídající modely (aproximace) kriteriální funkce. Všechny tyto výhody jsou však vykoupěny dalšími výpočetními nároky na určení takových parciálních derivací (či jejich dostatečně přesného odhadu) včetně komplikací v situacích, kdy z důvodu nediferencovatelnosti kriteriální funkce nelze tyto parciální derivace počítat či v důsledku složitosti kriteriální funkce je jejich výpočet neúměrně složitý (např. při hledání analytického předpisu dochází k velké symbolické expanzi).

Gradientní metody

V následujícím textu jsou stručně shrnuty základní přístupy k lokální optimalizaci bez uvažování omezení. Informace jsou čerpány zejména z publikací [78, 88, 104], kde lze nalézt podrobnou analýzu a vysvětlení jednotlivých metod. Typickou vlastností gradientních algoritmů řešení je velmi často konvergence do nějakých lokálních optim a jejich globální platnost lze korektně dokázat pouze pro silně omezeně definovanou optimalizační úlohu, např. v případě konvexnosti kriteriální funkce. V případě, že je žadané hledat globální optimum či optima co možná globálním nejbližší, jsou za tímto účelem často gradientní algoritmy spouštěny z různých počátečních podmínek na základě jejich určitého výběru, ať už se jedná o náhodný výběr, či výběr podpořený nějakou heuristikou vycházející z hlubší znalosti optimalizační úlohy.

Předpokládejme skalární kriteriální funkci vektorového argumentu $J(\boldsymbol{\xi})$ a její příslušný Taylorův rozvoj v $\boldsymbol{\xi}_k$:

$$J(\boldsymbol{\xi}) \approx J(\boldsymbol{\xi}_k) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k)\Delta\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_k)\Delta\boldsymbol{\xi} + \dots \quad (3.25)$$

kde gradient je $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k) = \frac{\partial J(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_k}$ a Hessián $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_k) = \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}^2}|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_k}$.

Mezi základní gradientní algoritmy pro lokální optimalizaci lze zařadit následující:

Metoda největšího spádu

Jednoduchá metoda založená na výpočtu gradientu kriteriální funkce (směru největšího růstu) a posunu aktuálního hledaného řešení (argumentu) v záporném směru gradientu váženém danou konstantou α (např. proměnnou).

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \boldsymbol{\xi}_k - \alpha \cdot \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k) \quad (3.26)$$

Nevýhody:

Pomalá konvergence v blízkosti optima (z důvodu nerespektování vyšších členů Taylorova rozvoje, pouze lineární aproximace v okolí současného argumentu), konvergence závisí striktně na volbě konstanty α .

Newtonova metoda

Založena na aproximaci nelineární kriteriální funkce funkcí kvadratickou (Taylorův rozvoj)

a výpočet řešení pro nalezení minima této kvadratické funkce. Nalezené řešení je použito jako přírůstek argumentu původní funkce v následující iteraci algoritmu.

$$\begin{aligned}
 J(\boldsymbol{\xi}) &\underset{\text{approx.}}{\rightarrow} J(\boldsymbol{\xi}_k) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k)\Delta\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_k)\Delta\boldsymbol{\xi} \\
 \frac{\partial J(\boldsymbol{\xi})}{\partial \Delta\boldsymbol{\xi}} &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k) \\
 \boldsymbol{\xi}_{k+1} &= \boldsymbol{\xi}_k + \alpha\Delta\boldsymbol{\xi}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Výhody:

Podstatně rychlejší konvergence (o řád přesnější lokální aproximace původní funkce).

Nevýhody:

Kromě gradientu funkce nutno počítat i Hessián, pro obecnou funkci nemusí nalezený směr v daném kroku algoritmu vést na posun argumentu směrem k minimu $\Delta\boldsymbol{\xi}$, neboť nemusí být splněna nutná podmínka (směr vypočteného posunu je promítnut do směru největšího spádu funkce):

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k) \cdot \Delta\boldsymbol{\xi} < 0 \Rightarrow -\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k) < 0 \tag{3.28}$$

Tzn. pro $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) > 0$ nalezený směr $\Delta\boldsymbol{\xi}$ vede na snižování hodnoty funkce, pro $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) < 0$ vede na zvyšování hodnoty funkce a pro $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ nelze jednoznačně rozhodnout (sedlový bod). Pro obecné funkce lze experimentálně ověřit, že Newtonova metoda může být značně nespolehlivá a je třeba hledat další vylepšení.

Line search

Metody založené na tomto principu hledají řešení nedostatků předchozích metod s ohledem na zajištění konvergence algoritmu. Metody jsou založené na principu, že v každém kroku iterace je nalezen směr \mathbf{s}_k spádu kriteriální funkce (viz předchozí metody) a vzdálenost posunu v tomto směru (v našem případě hodnota konstanty α odpovídající posunu po přímce daného směru) je vhodně volena:

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \boldsymbol{\xi}_k + \alpha_k \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k), \quad \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k) = \begin{cases} -\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k) \\ -\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k) \\ \vdots \end{cases}$$

Najdi takové α_k pro které platí: $J(\alpha_k) = J(\boldsymbol{\xi}_k + \alpha_k \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)) \rightarrow \min$.

(3.29)

Výhody:

Efektivní algoritmus, pokud gradient (Hessián) lze efektivně a rychle počítat, lepší konvergence.

Nevýhody:

Jak efektivně řešit nalezení α_k , tedy minimalizaci funkce J podél přímky. (Možné přístupy jsou založeny např. na *backtracking line search*, *Wolfe*, *Goldstein conditions*⁵, podrobnosti viz [78]).

Trust region

Metody, jejichž princip doplňuje metody *line search*. Zatímco pro metody *line search* platí,

⁵Wolfe condition - zahrnuje dvě podmínky na volbu konstanty α_k :

1. $J(\boldsymbol{\xi}_k + \alpha_k \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)) \leq J(\boldsymbol{\xi}_k) + c_1 \cdot \alpha_k \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$, $c_1 \in (0, 1)$: Funkce J poklesne posunem α_k v prohledávaném směru $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$ o větší hodnotu než lineární klesající funkce s klesáním daným průmětem zvoleného směru $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$ do směru největšího spádu $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k)$, splněno i pro nekonečně malé α_k - proto:
2. $[\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k + \alpha_k \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k))]\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k) \geq c_2 \cdot \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$, $c_2 \in (c_1, 1)$: Míra poklesu funkce (daná průmětem zvoleného směru $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$ do směru největšího spádu $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k)$) v bodu $\boldsymbol{\xi}_k + \alpha_k \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$ je menší než v bodu původním $\boldsymbol{\xi}_k$ (tedy, posunem díky α_k se pravděpodobně blížíme k extrému).

že je nalezen směr prohledávání v daném kroku a následně optimalizovaná hodnota parametru posunu α , která minimalizuje kriteriální funkci J , pro metody *trust region* je nejprve nalezena důvěryhodná oblast v prostoru argumentu kriteriální funkce, kde je kriteriální funkce „dostatečně přesně“ aproximována nějakým modelem (např. funkcí kvadratickou). Hodnota přírůstku argumentu kriteriální funkce v dané iteraci algoritmu je pak dána exaktním výpočtem argumentu minima (aproximovaného) modelu kriteriální funkce. Typickým příkladem takového algoritmu je např. *Levenberg - Marquardt* algoritmus:

Algoritmus vychází z *metody největšího spádu* a *Newtonovy metody* a vhodným způsobem je kombinuje. Je známo, že zatímco *metoda největšího spádu* přináší zlepšení v iteracích algoritmu, kdy je počáteční argument daleko od hledaného optima, *Newtonova metoda* naopak vykazuje lepší konvergenci v případě argumentu nacházejícího se blízko hledaného optima. Hledaný směr $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$ posunu argumentu je tak dán jako:

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k) = -[\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_k) + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k) \quad (3.30)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice příslušných rozměrů a λ je konstanta.

Je zřejmé, že pro $\lambda \rightarrow +\infty$ platí, že hledaný směr $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k) \rightarrow -\frac{1}{\lambda} \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k)$ (*metoda největšího spádu*) a naopak pro $\lambda \rightarrow 0$ platí, že hledaný směr $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k) \rightarrow -\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_k) \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k)$ (*Newtonova metoda*).

Výsledný algoritmus tedy v každém kroku upravuje volbu konstanty λ (důvěryhodné oblasti) následovně:

1. Vypočti: $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k) = -[\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_k) + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\xi}_k) \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_{k+1} = \boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$
2.
 - Pokud $J(\boldsymbol{\xi}_{k+1}) < J(\boldsymbol{\xi}_k)$ pak zvětši hodnotu důvěryhodného regionu $\lambda_k = \frac{1}{2} \cdot \lambda_k$, $k = k + 1$ (přiblížení k efektivnějšímu *Newtonovu* algoritmu) a pokračuj bodem 1.
 - Pokud $J(\boldsymbol{\xi}_{k+1}) > J(\boldsymbol{\xi}_k)$ (region je příliš velký a nevede ke zlepšení), potom zmenši hodnotu regionu $\lambda_k = 2 \cdot \lambda_k$ (přiblížení k *metodě největšího spádu*) a pokračuj bodem 1 (pro stejné k , dokud nedojde ke zlepšení).

Výhody:

Rychlejší konvergence, omezení možné divergence algoritmu.

Nevýhody:

Nutný výpočet Hessiánu.

Metoda konjungovaných gradientů

Uvažujme nyní kriteriální funkci $J(\boldsymbol{\xi})$ ve tvaru kvadratické funkce dimenze N , $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$. Problém u předchozích uvedených metod spočívá ve volbě směru prohledávání $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$ a lze ukázat, že počet potřebných iterací (výpočet směru, případně alg. *line search*) není konečný (závisí na volbě konkrétní metody, počáteční podmínky atd.). Toto je způsobeno především faktem, že směr vektoru $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})$ a velikost posunu α (*line search*) v tomto směru není optimální vzhledem ke tvaru (plochy) kriteriální funkce a v jednotlivých iteracích algoritmu je argument $\boldsymbol{\xi}_k$ posunut o $\Delta \boldsymbol{\xi}_k$ takovým způsobem, že některý z následujících kroků tento posun zpětně částečně stornuje - částečně ruší předchozí příspěvek (směry nejsou ortogonální vzhledem ke křivosti funkce). Metoda konjungovaných gradientů umožňuje iteračním způsobem vypočítat posloupnost takových směrů $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_k)$ a posunů α_k , že je nalezeno přesné řešení pro optimum kvadratické kriteriální funkce právě po konečném počtu kroků, počet kroku je dán řádem N kvadratické funkce. Metoda konjungovaných gradientů lze rozšířit na hledání optima obecné nelineární funkce (již obecně s nekonečným počtem kroků iterace). Velmi přehledný úvod ilustrující problematiku optimalizace prostřednictvím metody konjungovaných gradientů je popsán v [99].

Výhody:

Efektivní metoda řešení v konečném počtu kroků pro kvadratickou funkci, obecně lepší konvergence.

Qasi-Newtonova metoda

Jedná se analogii k Newtonově metodě, kde ovšem předpokládáme, že Hessián funkce $J(\boldsymbol{\xi}_k)$ nelze počítat efektivně (symbolicky, rychle, přesně atd.). Na rozdíl od metody nejmenšího spádu však požadujeme lepší konvergenci (než pouze na základě znalosti gradientu $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}_k)$). Je intuitivně jasné, že v případě aproximace (3.27) funkce J může nastat situace, kdy aproximace není konvexní funkcí, tedy Hessián $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_k)$ není pozitivně definitní matricí a nalezený směr $\Delta\boldsymbol{\xi}_k$ tak nutně nekoresponduje s lokální konvergencí k minimu, viz (3.28). Qasi-Newtonova metoda předpokládá, že v každém iteračním kroku algoritmu bude počítán odhad Hessiánu $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_k)$ ve tvaru symetrické, pozitivně definitní matice (\Rightarrow konvexní aproximace, Qasi-Newtonova metoda může být tak dokonce efektivnější než metoda Newtonova). Princip nalezení aproximace Hessiánu symetrickou pozitivně definitní matricí rozděluje Qasi-Newtonovu metodu dále na různé varianty. Např. základní algoritmus *Davidon-Fletcher-Powell* (DPF), který vychází z podmínky rovnosti gradientů kvadratické funkce aproximující funkci J ve dvou po sobě jdoucích iteracích (společně s uvážením Wolfe condition a podmínky maximálního přiblížení k předchozímu odhadu Hessiánu), dále potom algoritmus *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS), jako modifikace algoritmu DPF a některé další. Alternativou k aproximaci Hessiánu je tzv. *Spherical quadratic steepest descent* (SQSD) metoda, viz [107], která vychází z aproximace kriteriální funkce sférickou kvadratickou funkcí (s diagonálním Hessiánem se stejnými hodnotami na diagonále).

Výhody:

Rychlá metoda bez nutnosti počítat Hessián (různé modifikace algoritmů odhadu Hessiánu).

Negradientní metody

Důležitou vlastností všech gradientních algoritmů je potřeba výpočtu gradientu (případně Hessiánu) kriteriální funkce či jejich numerická aproximace. Vzhledem k matematické složitosti kriteriálních funkcí (včetně např. penalizačních příspěvků od uvažovaných omezení) lze často narazit na zásadní omezení s ohledem na použití gradientních algoritmů, jedná se zejména o:

- Symbolický výpočet gradientu, zvláště pak Hessiánu, je natolik složitou funkcí (symbolická expanze), že jejich použití v iteracích optimalizačního algoritmu je v podstatě nemožné (jenom dosazování konkrétních hodnot vyžaduje velký výpočetní čas, problém s výpočetní přesností), další manipulace s mnohačlenými výrazy je obtížná.
- Numerický odhad gradientu či Hessiánu vede na navýšení potřebného času pro iteraci optimalizačního algoritmu (za předpokladu potřeby mnoha iterací se problém stává neřešitelný v rozumném čase), problém s přesností odhadu.
- Kriteriální funkce může vykazovat „nepříjemné“ vlastnosti s ohledem na spojitost a hladkost (např. vlivem nastavení velkých penalizačních konstant pro daná omezení) \Rightarrow možnost velmi špatné numerické stability v iteracích gradientních algoritmů (zejména pak numerických odhadů gradientu a Hessiánu) \Rightarrow selhání použité metody \Rightarrow málo robustní algoritmy (selhání algoritmu v pokročilém výpočetním čase, např. po několika hodinách běhu).
- V některých případech optimalizačních úloh může být velmi obtížné či dokonce nemožné formulovat předpis kriteriální funkce. Jedná se zejména o případy, kdy hodnota kriteriální funkce je získána ze simulačního experimentu (např. spuštěním simulace

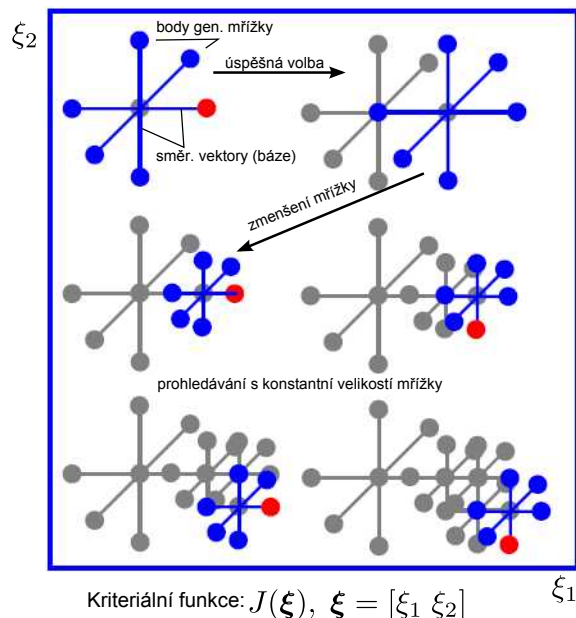
v prostředí SimMechanics s využitím pokročilých bloků pro modelování mechanických systémů).

1. Algoritmy přímého prohledávání (Direct search)

Zásadní předností algoritmů přímého prohledávání je zejména jejich robustnost, necitlivost k numerickým chybám a jednoduchost s ohledem na implementaci. Jmenujme příklady některých základních algoritmů, relativně podrobná analýza dostupných metod přímého prohledávání je uvedena v [50].

Pattern search algoritmus (PSA)

Algoritmy přímého vyhledávání jsou založené na prohledávání okolí kritériální funkce v diskrétních bodech, které jsou vypočteny dle dané předlohy (pattern). Předlohou je často množina směrových vektorů (tzv. báze) definovaných nad prostorem optimalizovaných parametrů (definiční obor kritériální funkce). V každém kroku algoritmu je generována odpovídající mřížka (množina diskrétních bodů v definičním oboru kritériální funkce), která vznikne vynásobením směrových vektorů příslušnou velikostí mřížky (skalární konstanta) a přičtením k současnému argumentu funkce. Dalším krokem je volba (polling) nového argumentu funkce výběrem optimálního (minimálního) bodu z množiny vygenerovaných hodnot. V případě že bod na mřížce s minimální hodnotou kritériální funkce je menší než hodnota kritériální funkce současného bodu, je současný bod nahrazen bodem takto nalezeným (úspěšná volba). V případě, že tomu tak není, zůstává současný bod do dalšího kroku iterace algoritmu (neúspěšná volba). V algoritmu je dále uvažována modifikace velikosti generované mřížky prostřednictvím zvyšování/snižování skalární konstanty. V případě neúspěšné volby je zpravidla tato konstanta snižována, tedy je zmenšován lokálně prohledávaný definiční obor kritériální funkce (konvergence k optimu). V opačném případě může být konstanta zvyšována, což vede na širší „globální“ prohledávání definičního oboru kritériální funkce (tedy i ke zvýšení pravděpodobnosti nalezení potenciálního globálního optima - nelze však garantovat). Nástin algoritmu je znázorněn na Obrázku 3.5.



Obrázek 3.5.: Grafické znázornění algoritmu Pattern search

Nelder-Mead algoritmus (NMA)

Algoritmus přímého prohledávání [54], který je opět založen na heuristickém prohledávání

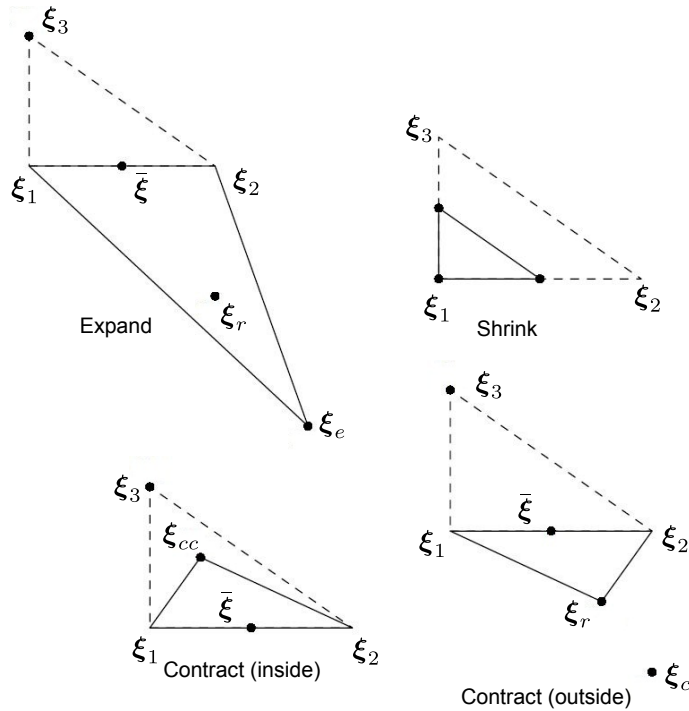
definičního oboru kriteriální funkce. V tomto případě se však nepoužívá generování mřížky prohledávaných bodů v okolí současného řešení, ale základní prvek algoritmu tvoří tzv. simplex. Simplexem rozumíme m -rozměrné zobecnění trojúhelníku v euklidovském prostoru (v našem případě v definičním oboru kriteriální funkce) dimenze m , přesněji řečeno se jedná o konvexní obal tvořený $m + 1$ afinně nezávislými body (vrcholy simplexu)⁶. Pro $m = 0$ je simplexem bod, pro $m = 1$ je simplexem přímka, pro $m = 2$ je simplexem trojúhelník v rovině, pro $m = 3$ je simplexem čtyřstěn v prostoru atd.)

V každém kroku algoritmu je generován nový bod (vrchol) uvnitř či vně simplexu, hodnota kriteriální funkce je v tomto bodě porovnána s hodnotou kriteriální funkce ve vrcholech simplexu a některý vrchol (typicky s nejhorší hodnotou kriteriální funkce) je nahrazen generovaným bodem. Algoritmus je opakován až do chvíle, kdy je velikost simplexu (délka, obsah, objem, ...) menší než požadovaná tolerance.

Mezi základní možnosti generování nového vrcholu simplexu patří operace: *expand* (zvětšení simplexu), *contract (inside/outside)* (zkrácení simplexu na jednu či druhou stranu) a *shrink* (zmenšení simplexu). Velmi stručně jsou tyto operace znázorněny na Obrázku 3.6 pro simplex v rovině ($m = 2$, tzn. pro 2 kinematické návrhové parametry).

Uvažujme uspořádání 3 vrcholů (vektoru návrhových kinematických parametrů) $\xi_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$ simplexu s ohledem na hodnotu kriteriální funkce, tedy ξ_1 je nejlepší vektor (vrchol) a ξ_3 nejhorší vektor kinematických návrhových parametrů.

⁶Afinně nezávislými body v prostoru dimenze m rozumíme body $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{m+1}$, pro které jsou vektory $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m+1} - \mathbf{v}_1$ lineárně nezávislé. Tedy např. 3 body v rovině ($m = 2$) neleží na jedné přímce, 4 body v prostoru ($m = 3$) neleží v jedné rovině atd.



Obrázek 3.6.: Simplexový algoritmus, původní simplex (čárkovaně) a nově vzniklý simplex, $\bar{\xi} = (\xi_1 + \xi_2)/2$ (těžiště - centroid nejlepších vrcholů), nově vznikající vrcholy $\xi_{\{e,c,cc\}}$, (dle způsobu generování: *expand*, *contract outside*, *contract inside*) a ukázka zmenšení simplexu (*shrink*) v případě, že předchozí generované vrcholy nezlepšují hodnotu krit. funkce. ξ_r je reflektovaná hodnota zobrazená na přímce (obecně varietě) ze směru z nejhoršího vrcholu ξ_3 do centroidu $\bar{\xi}$. Právě podle vyhodnocení krit. funkce v bodě ξ_r a porovnání s hodnotou krit. funkce v ostatních vrcholech simplexu se vyhodnocuje způsob generování nového bodu (vrcholu).

Controlled random search (CRS)

CRS algoritmus [43, 86] je zajímavou alternativou k algoritmům přímého prohledávání. Jedná se o robustní negradientní algoritmus určený pro optimalizační úlohy s komplikovanou nelineární kritériální funkcí a původně vychází z prostého náhodného generování pokusů na volbu kinematických návrhových parametrů (*Pure random search*) s určitým pravděpodobnostním rozdělením, který je dále rozšířen o deterministickou složku (*Generalized random search*), tedy cílenou změnu střední hodnoty uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení na základě poslední známé nejlepší hodnoty hledaných parametrů. Princip algoritmu je následující: Generuj vektor optimalizovaných parametrů z daného intervalu $\xi \in \langle \xi_{\text{best}} - \frac{r}{2}, \xi_{\text{best}} + \frac{r}{2} \rangle$, kde r je vektor udávající velikost prohledávané oblasti a ξ_{best} je poslední nejlepší známá hodnota parametrů, a vyčíslí hodnotu kritériální funkce $J(\xi)$. Pokud dojde během daného počtu pokusů ke zlepšení, zvětší velikost r , nahradí ξ_{best} a pokračuj, pokud ke zlepšení nedojde (na daném intervalu pravděpodobně již neexistuje potenciálně lepší řešení), zmenší r a pokračuj (lokální prohledávání blíže ke známému optimu). CRS algoritmus byl použit např. v [59] pro nalezení intervalů kinematických parametrů paralelního manipulátoru typu Stewartova platforma, kdy je kritériem optimalizace maximalizace pracovního prostoru regulárního tvaru (translační pracovní prostor manipulátoru s konstantní orientací) s předepsanou hodnotou podmíněnosti (dexterity index).

Metody typu Monte Carlo

Monte Carlo je třída metod, viz [89, 51], které jsou využívány opět v optimalizaci s kom-

plikovanou nelineární kritériální funkcí (v některých případech doplněnou o stochastické chování) a případnými složitými omezeními. Jedná se o metodu, která je založena na náhodném generování hodnot optimalizovaných parametrů a následném vyhodnocování kritériální funkce a omezení. Monte Carlo metoda byla využita např. při optimalizaci dvojice paralelních manipulátorů typu 3-CCR resp. 3-RCC (3 kinematické řetězce typu **CCR** resp. **RCC**) s uvažováním kritéria optimality jako suma objemu pracovního prostoru (diskrétní integrace), velikost koncového efektoru a indexu pohyblivosti (dexterity index), viz [15].

2. Heuristické metody

Heuristické metody jsou speciálním případem algoritmů, které zpravidla nevyužívají (ale můžou) gradientu či vyšších parciálních derivací kritériální funkce a někdy mohou využívat prvky algoritmů přímého prohledávání. Podstatným přínosem heuristických algoritmů je však integrace empirických znalostí, poznatků a pozorování s řešením optimalizačních úloh tak, jak jsou tyto úlohy často nativně řešeny v přírodních a sociálních systémech bez cílené umělé interakce člověka. V přírodě jsou často řešeny komplexní a složité optimalizační problémy přesto, že jejich vyčerpávající matematický model (např. kritériální funkce) není znám nebo je neuchopitelně komplikovaný. Entity (lidé, zvířata, rostliny, prostředí atd.), které takové komplexní optimalizační úlohy řeší jsou odkázány právě na dosažené zkušenosti, poznatky, pozorování a analogie mezi řešenými optimalizačními úlohami. Přesto, že obecně nelze matematicky exaktně dokázat platnost, konvergenci a efektivitu heuristických algoritmů, jsou tyto velmi často využívány napříč všemi vědními obory a to zejména z následujících důvodů, viz [20]:

- Heuristické metody poskytují často uspokojivé výsledky velmi komplikovaných optimalizačních úloh v rozumném výpočetním čase
- Lze přirozeně zahrnout různé typy omezení (často zavedením penalizací)
- Heuristické metody často vykazují systematické prohledávání stavového prostoru na základě dvoufázového algoritmu: Prohledávání s velkou množinou/rádiusem působnosti (*exploration*) - zamezení „stažení“ algoritmu do lokálního extrému a prohledávání s malou množinou/rádiusem působnosti (*exploitation*) - nalezení optima v oblasti předpokládaného výskytu globálního optima
- Častou jsou heuristické metody kombinovány s metodami exaktními (gradientní metody, metody přímého prohledávání) \Rightarrow tzv. *hybridní metody*
- Určitou obecnou nevýhodou heuristických metod je nutnost tyto metody vhodně konfigurovat ve smyslu nastavení jejich parametrů, které může zásadním způsobem ovlivnit jejich činnost (nalezení globálního/lokálního řešení, rychlost, konvergence, stabilita, nastavení počátečních podmínek atd.)

Jmenujme dále některé známé heuristické metody společně s jejich základními rysy (s ohledem na možný zavádějící český překlad jim ponechme původní názvy):

- *Genetic algorithms (GA)*
Genetické algoritmy jsou asi jedním z nejčastějších heuristických algoritmů. Optimalizované parametry (v našem případě kinematické návrhové parametry) jsou kódovány (např. do binárního kódu) a generují daného jedince, kterých je na začátku algoritmu generována určitá množina. Pro každého jedince je vyčíslena hodnota kritériální funkce a dle daných genetických pravidel (analogie k Darwinově teorii) jsou z těchto jedinců (rodiče) generovány další jedinci (potomci). Vybraní jedinci s nejlepší hodnotou kritériální funkce se pak stávají rodiči v dalším kroku algoritmu, jedinci s nejhorší hodnotou kritériální funkce zanikají. Výběr rodičů je často dán některým z pravděpodobnostních přístupů (na základě známé hodnoty kritériální funkce)

známé jako algoritmy *roulette wheel selection*, *tournament selection* atd. Generování potomků na základě genetických pravidel se nazývá *křížení* - proces spadá do fáze algoritmu prohledávání s velkou množinou působnosti (*exploration*) a existuje zde celá řada algoritmů křížení (*one point*, *multiple point*, *uniform* atd.) a *mutace* - proces spadá do fáze algoritmu prohledávání s malou množinou působnosti (*exploitation*).

- *Simulated annealing (SA)*

Metoda kombinující prvky lokálního prohledávání s tzv. *Metropolis algorithm* (algoritmus akceptování horšího řešení - kandidáta s určitou pravděpodobností a jeho ponechání v optimalizačním procesu). Princip algoritmu spočívá v generování kandidátů na řešení z dosavadní známé nejlepší hodnoty. V případě, že generovaný kandidát ξ_{cand} vykazuje lepší hodnotu kritériální funkce $J(\xi)$, nahrazuje původní řešení ξ_{curr} . V opačném případě je původní řešení nahrazeno generovaným (horším) kandidátem jen s určitou pravděpodobností p , která je dána vztahem:

$$p = e^{-\frac{\|J(\xi_{\text{cand}}) - J(\xi_{\text{curr}})\|}{T}} \quad (3.31)$$

kde proměnná T řízeně klesá v průběhu času algoritmu.

Pro velké T je zřejmě tak pravděpodobnost akceptování horšího řešení velká (*exploration*), s rostoucím časem se naopak zmenšuje (*exploitation*). Název metody *annealing*, tedy žihání (ve smyslu tepelné úpravy materiálu v metalurgii) je odvozeno od rovnice výpočtu pravděpodobnosti p , která odpovídá průběhu řízeného chladnutí materiálu při žihání. Často je tato jednoduchá metoda označována jako vysoce efektivní. Metoda *SA* byla využita při optimalizaci kinematických parametrů sériového manipulátoru pro pohyb po parametricky zadané trajektorii koncového efektoru, viz [29].

- *Particle swarm optimization (PSO)*

Jedná se o obecně jednodušší metodu než *GA*. Metoda využívá analogii k chování hejna jedinců, kde každý jedinec představuje určitou hodnotu vektoru optimalizovaných parametrů. Takových jedinců je obvykle generováno velké množství. Cílem metody je snaha najít kompromis mezi prospěchem jedince - osobní chování (dané hodnotou kritériální funkce $J(\xi)$ vyčíslenou nad vektorem optimalizovaných parametrů ξ) a prospěchem celého hejna - sociální chování (dané hodnotami kritériálních funkcí všech jedinců). Princip algoritmu je následující. Na počátku algoritmu jsou generovány polohové vektory ξ_i (jedinci) dimenze N (dimenze prostoru optimalizovaných parametrů). Algoritmus začíná náhodnou polohou a rychlostí těchto vektorů (rychlost odpovídá rychlosti vývoje optimalizovaných parametrů). Každý jedinec se pohybuje v prostoru na základě jeho současné polohy a rychlosti. Rychlost každého jedince je dána kombinací osobního (dáno pouze jedincem) a sociálního (dáno celým hejnem) chování, tzn. doposud nejlepší hodnotou kritériální funkce daného jedince a celého hejna, tím je zajištěn kompromis mezi chováním jedince a hejna. Pravidlo aktualizace polohy ξ_i a rychlosti v_i i -tého jedince za jednotku času lze potom vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} \xi_i^{k+1} &= \xi_i^k + v_i^{k+1} \\ v_i^{k+1} &= K \left(v_i^k + \underbrace{\phi_1 \cdot \text{rand} \cdot (p_{\text{best}_i}^k - \xi_i^k)}_{\text{osobní chování jedince}} + \underbrace{\phi_2 \cdot \text{rand} \cdot (g_{\text{best}}^k - \xi_i^k)}_{\text{sociální chování hejna}} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$K = \frac{2}{\|2 - \phi - \sqrt{\phi^2 - 4\phi}\|}, \quad \phi = \phi_1 + \phi_2, \phi > 4$$

kde k je krok algoritmu, K je tlumící faktor (tlumení oscilací jedinců), ϕ_1 resp. ϕ_2 je koeficient osobního resp. sociálního chování jedince, rand je náhodné číslo s rovnoměrným rozdělením, $\mathbf{p}_{best_i}^k$ je hodnota polohového vektoru i -tého jedince s doposud nejlepší hodnotou kritériální funkce v k -tém kroku algoritmu, \mathbf{g}_{best}^k je globální poloha (např. těžiště) všech jedinců s nejlepší hodnotou (např. průměrem) kritériálních funkcí v k -tém kroku algoritmu.

- *Gravitational search algorithm (GSA)*

Metoda je inspirována vzájemným chováním hmotných částic dle známého Newtonova zákona gravitačního působení, kdy gravitační síla F (potažmo zrychlení a) mezi dvěma hmotnými částicemi s hmotnostmi M_1, M_2 ve vzájemné vzdálenosti R je dána jako:

$$F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{R^2}, \quad a = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

kde G je gravitační konstanta.

Poloha i -té hmotné částice je opět reprezentována vektorem optimalizovaných parametrů $\boldsymbol{\xi}_i = [\xi_i^1 \dots \xi_i^d \dots \xi_i^N]^T$ dimenze N , $i = 1 \dots n$. Princip algoritmu spočívá ve výpočtu gravitační síly \mathbf{F}_i^k působící na každou hmotnou částici v daném kroku algoritmu a její odpovídající posun do nové polohy (zrychlení \mathbf{a}_i^k za jednotku času). k -tý krok algoritmu GSA lze schématicky zapsat následovně (pro maximalizaci hodnoty kritériální funkce):

- Výpočet hmotnosti M_i i -té částice:

$$m_i^k = \frac{f(\boldsymbol{\xi}_i^k) - J_{\text{worst}}^k}{J_{\text{best}}^k - J_{\text{worst}}^k}, \quad M_i^k = \frac{m_i^k}{\sum_{j=1}^n m_j^k}$$

kde $J(\boldsymbol{\xi}_i^k)$ je daná kritériální funkce, J_{worst}^k resp. J_{best}^k je nejhorší resp. nejlepší hodnota kritériální funkce přes všechny částice.

- Úprava gravitační konstanty G :

Analogicky jako v případě algoritmu *SA* lze s odbíhajícím časem optimalizace dynamicky měnit gravitační konstantu G , např. jako:

$$G^k = G_0 e^{-\alpha \cdot \frac{k}{T}}$$

kde G_0 je počáteční hodnota konstanty a T je celkový počet iterací.

Snižování gravitační konstanty v průběhu algoritmu (dle konstanty α) opět odpovídá dvěma fázím prohledávání *exploration* (pro velké G^k) a *exploitation* (pro malé G^k).

- Výpočet působící gravitační síly na částici:

Pro sílu působící na d -tou složku vektoru polohy $\boldsymbol{\xi}_i^k$ i -té částice dle gravitačního zákona platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ij}^k[d] &= G^k \frac{M_i^k M_j^k}{R_{ij}^2 + \epsilon} (\boldsymbol{\xi}_j[d] - \boldsymbol{\xi}_i[d]) \\ \mathbf{F}_i^k[d] &= \sum_{j \in \mathbf{K}_{\text{best}}, j \neq i} \text{rand} \cdot \mathbf{F}_{ij}^k[d] \end{aligned} \quad (3.33)$$

kde $\mathbf{F}_{ij}^k[d]$ je gravitační síla resp. její d -tá složka, působící na částici $\boldsymbol{\xi}_i$ z částice $\boldsymbol{\xi}_j$, ϵ je konstanta, $R_{ij} = \|\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\xi}_j\|$ je Euklidovská vzdálenost částic, rand je náhodné číslo v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, \mathbf{K}_{best} je množina prvních K částic s největší hmotností (největší - nejlepší hodnotou kritériální funkce), tedy částice nejvíce ovlivňující vzájemné gravitační působení.

- Update polohy i -té částice:
Zrychlení \mathbf{a}_i^k , rychlost \mathbf{v}_i^k a poloha \mathbf{x}_i^k i -té částice jsou dány jako:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_i^k[d] &= \frac{\mathbf{F}_i^k[d]}{M_i^k} \\ \mathbf{v}_i^{k+1}[d] &= \text{rand} \cdot \mathbf{v}_i^k[d] + \mathbf{a}_i^k[d] \\ \boldsymbol{\xi}^{k+1}[d] &= \boldsymbol{\xi}^k[d] + \mathbf{v}_i^k[d]\end{aligned}$$

V podstatě všechny výše uvedené algoritmy pro řešení optimalizačních úloh (gradientní, n-gradientní) jsou implementovány v různých modifikacích ve výpočetních SW, např. Matlab [67], Maple, Mathematica. Poznamenejme, že cílem předložené práce není vývoj nových či rozšiřování obecných algoritmů optimalizace (ve smyslu řešení obecné nelineární optimalizační úlohy), byť lze předpokládat jejich dílčí využití, viz algoritmy statické optimalizace v Kapitole 3.3. V literatuře lze nalézt některé zajímavé alternativní metody optimalizace, které, přestože mohou s výše uvedenými obecnými metodami souviset a řeší opět optimalizační problém definovaný vztahy (3.17), integrují specifické oblasti odlišných principů a analogií (matematických, fyzikálních). Dále zde lze nalézt některé optimalizační metody, které dále rozšiřují či zpřesňují samotnou definici optimalizační úlohy (většinou v důsledku reálných požadavků návrhu robotických architektur). Stručný přehled vlastností a rozdělení přístupů k řešení optimalizace kinematiky manipulátorů lze nalézt v [16, 83, 97], kde jsou předloženy některé stávající metody kinematických návrhů manipulátorů s odkazem na alternativní přístupy popisu kinematiky manipulátorů prostřednictvím aplikace *Screw Theory*, *Lie algebra*, *Quaternions*, *Grassmann Geometry* umožňující definovat optimalizační úlohy např. s ohledem na perturbace kinematických parametrů atd. V [84, 85] je proces optimalizace manipulátoru soustředěn především na technicko-ekonomické požadavky založené na optimální návrh převodovky manipulátoru z dané série za účelem dosažení kompromisu mezi cenou, životností a výkonem (čas cyklu) manipulátoru, využívány jsou především algoritmy přímého prohledávání. Zajímavý přístup k optimálnímu návrhu jak kinematických parametrů tak k optimálnímu pohybu kloubových souřadnic je představen v [80], jedná se o tzv. *Distributed Solving Method (DSM)*. Požadavkem úlohy je průjezd koncového efektoru co nejbližše zadaným diskretním bodům v pracovním prostoru. *DSM* metoda předpokládá, že v každém kroku algoritmu je proměnnou pouze jediná kloubová souřadnice, ostatní jsou uvažovány jako konstantní. V takovém případě je (často) možné analyticky vypočítat optimální řešení pro tuto proměnnou kloubovou souřadnici (kriteriální funkce je uvažována jako vzdálenost koncového efektoru v závislosti na uvažované proměnné kloubové souřadnici od požadované polohy v pracovním prostoru). Iteračně je tento postup opakován postupně pro všechny kloubové souřadnice - je nalezeno určité pseudooptimální řešení (ovšem analyticky). Obdobný postup lze aplikovat i pro optimalizaci kinematických parametrů manipulátoru, v takovém případě je však kriteriální funkce daná součtem dílčích vzdáleností přes celý pracovní prostor (parametry manipulátoru musí být přes uvažovanou trajektorii pohybu konstantní).

Dosud jsme předpokládali pracovní prostor manipulátoru pro optimalizaci jako určitou množinu (diskretní, spojitou) poloh (případně dalších časových derivací) \mathbf{X}_{opt} koncového efektoru a kriteriální funkce $J(\boldsymbol{\xi})$ byla vyčíslena pro aktuální hodnotu optimalizovaných parametrů $\boldsymbol{\xi}$ nad tímto uvažovaným prostorem (integrací či sumou). Takový přístup má svá opodstatnění zejména v případech optimálního návrhu vysoce specializovaných robotických zařízení, u kterých se předpokládá, že mají být určeny apriori k vykonávání pohybů nad konkrétně zadaným pracovním prostorem (trajektorií). V případě, že je cílem optimalizace nalezení kinematických parametrů manipulátoru určeného pro obecné použití, je často vhodné zvolit odlišný přístup, a to nalezení kinematických parametrů manipulátoru maximalizující velikost pracovního prostoru (např. typicky jeho objem), který

vykazuje danou kvalitu (např. garantuje minimální hodnotu podmíněnosti - *dexterity index*). Navíc lze předpokládat, že (zejména pro paralelní architektury manipulátorů) je pracovní prostor manipulátoru často reprezentován nekonvexním útvarem (prohlubně, výdutě atd.), který není vhodný přesto, že může vykazovat uspokojivý objem. Často je tak uvažovaná úloha definována jako nalezení takových kinematických parametrů manipulátoru, které maximalizují velikost předepsaného *regulárního* pracovního prostoru při splnění dané kvality. Regulárním pracovním prostorem se rozumí prakticky vyhovující konvexní tvary, např. obdélník, kvádr, válec atd. Nalezením pracovního prostoru manipulátoru (hranice 2 DoF paralelního planárního manipulátoru), který se co nejlépe blíží předepsanému pracovnímu prostoru (s možnými přesahy) a pracovního prostoru, který je kompletně zapouzdřen v předepsaném pracovním prostoru (bez přesahů a zaujímající maximální část) je diskutováno v [32] s pomocí *Dynamic Q-method*, viz výše. Nalezení kinematických parametrů manipulátoru maximalizující předepsaný regulární tvar pracovního prostoru s danou mírou kvality (*dexterity index*) a předpokládanými omezeními (např. na vysunutí lineárních aktuátorů) jsou demonstrovány v [59, 140, 114]. Optimalizační algoritmy jsou založeny na principech přímého vyhledávání (*CRS, PSA*). Metodě nalezení optimálních kinematických parametrů paralelního sférického zápěstí pro sério-paralelní manipulátor AGEBOT, viz Kapitola 1.3, založený na maximalizaci regulárního pracovního prostoru (válec) se 3 rotačními DoF (s podmínkou minimální přípustné hodnoty *dexterity index*), který lze vepsat do reálného pracovního prostoru manipulátoru, jsou věnovány práce [121, 124, 116]. Algoritmus optimalizace je založen na metodě *PSA*. Numerické algoritmy nalezení maximálního vepsaného pracovního prostoru regulárního tvaru a jeho integrace do optimalizačního algoritmu jsou inspirovány pracemi [147, 146, 151, 141, 41, 149, 148, 59].

Dalším zajímavým přístupem k parametrické optimalizaci kinematiky manipulátorů je tzv. *intervalová analýza*, viz [74]. *Intervalová analýza* zavádí množinový přístup k vyčíslení dané funkce, tzn. argumenty a funkčními hodnotami funkce není numerická hodnota, ale interval (uvažujme nejprve skalární funkci f skalárního argumentu):

$$\langle \underline{y}, \bar{y} \rangle = f(\langle \underline{x}, \bar{x} \rangle) \quad (3.34)$$

kde \underline{x} resp. \bar{x} je dolní resp. horní mez argumentu funkce a \underline{y} resp. \bar{y} je dolní resp. horní mez funkční hodnoty (intervalové vyčíslení).

Protože uvažovaná kritériální funkce $J(\boldsymbol{\xi})$ je zpravidla skalární funkcí vektorového argumentu $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ (optimalizované kinematické návrhové parametry), bude její intervalová podoba definována následovně:

$$\langle \underline{J}, \bar{J} \rangle = J(\boldsymbol{\xi}^B), \quad \boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \quad (3.35)$$

kde $\boldsymbol{\xi}^B = [\langle \underline{\xi}_1, \bar{\xi}_1 \rangle, \langle \underline{\xi}_2, \bar{\xi}_2 \rangle, \dots, \langle \underline{\xi}_n, \bar{\xi}_n \rangle]$ je intervalový box (hypercube) dimenze n .

Hlavní výhodou vyčíslení funkce prostřednictvím intervalové analýzy je garance existence funkční hodnoty uvnitř daného intervalu. Tento fakt hraje významnou roli pro bezpečnost numerických algoritmů zejména s ohledem na numerické zaokrouhlovací chyby či uvažované (garantované) přesnosti argumentů funkce. Budeme-li např. předpokládat, že přesnost argumentů funkce lze vyjádřit intervalem $\xi_i = \langle \xi_i - \epsilon, \xi_i + \epsilon \rangle$, intervalová analýza vrací výsledek opět ve tvaru intervalu, jehož velikost může být v určitých (singulárních) případech mnohem větší než je velikost nepřesnosti ϵ , viz [74], nepřesnost v zadaných argumentech tak může vést ke kritickým důsledkům. Bohužel v intervalovém přístupu však zůstává zásadní otázkou, jakým způsobem stanovit intervalovou funkční hodnotu funkce. V obecném náhledu by se zjevně jednalo o problém nalezení globálního minima a maxima takové funkce (intervalový výstup by tak byl přesně určený) a intervalová analýza by se tak stala prakticky nepoužitelnou (hledání globálních extrémů obecných nelineárních funkcí).

Právě proto dochází k jistému uvolnění takto striktních omezení a je obecně uvažováno, že interval funkční hodnoty je do jisté míry přeurčen, tzn.

$$\underline{J} \leq \min_{\xi \in \xi^B} J(\xi), \quad \bar{J} \geq \max_{\xi \in \xi^B} J(\xi)$$

Míra přeurčenosti intervalu funkční hodnoty je dána algoritmem intervalové analýzy a není předmětem předložené práce. Existují však efektivní algoritmy pro intervalovou analýzu, např. knihovny do C++ *PROFIL* (*Programmer's Runtime Optimized Fast Interval Library*) založený na *BIAS* (*Basic Interval Arithmetic Subroutines*), viz [49, 92], či toolbox do Matlabu a Octave *INTLAB* (*INTerval LABoratory*), viz [93, 91].

Základní algoritmus intervalové analýzy:

Pro box ξ^B definujme bisekci (dle i -té složky) jako:

$$\begin{aligned} \xi^B &\rightarrow \xi_L^B, \xi_R^B \\ \xi_L^B &= \left[\langle \xi_1, \bar{\xi}_1 \rangle, \langle \xi_2, \bar{\xi}_2 \rangle, \dots, \langle \xi_i, \frac{\bar{\xi}_i - \xi_i}{2} \rangle, \dots, \langle \xi_n, \bar{\xi}_n \rangle \right] \\ \xi_R^B &= \left[\langle \xi_1, \bar{\xi}_1 \rangle, \langle \xi_2, \bar{\xi}_2 \rangle, \dots, \langle \frac{\bar{\xi}_i - \xi_i}{2}, \bar{\xi}_i \rangle, \dots, \langle \xi_n, \bar{\xi}_n \rangle \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Příslušné boxy ξ_i^B (původní box i další vzniklé bisekcí) jsou postupně ukládány do seznamu všech boxů $\mathbf{L} = [\xi_1^B, \xi_2^B, \dots, \xi_M^B]$.

Dále zavedme tzv. operátor $F(\xi^B)$ (*decision operator*), který hodnotí přípustnost/nepřípustnost daného boxu optimalizovaných parametrů ξ^B (s ohledem na dané kritérium) následovně:

$$F(\xi^B) = \begin{cases} 1 & \text{box } \xi^B \text{ vyhovuje} \\ -1 & \text{box } \xi^B \text{ nevyhovuje} \\ 0 & \text{pro box } \xi^B \text{ nelze rozhodnout} \end{cases} \quad (3.37)$$

Základní algoritmus intervalové analýzy je tak následující:

1. Pokud $i > M$, potom alg. končí
2. Pokud $F(\xi_i^B) = -1$, potom $i = i + 1$ a jdi na 1.
3. Pokud $F(\xi_i^B) = 1$, potom ulož ξ_i^B do **FSB**
4. Pokud $F(\xi_i^B) = 0$, potom proved' bisekci boxu ξ_i^B dle (3.36) na dva boxy, které jsou přidány na konec seznamu \mathbf{L} , $M = M + 2$, $i = i + 1$ a jdi na 1.

kde **FSB** (*Feasible Parameter Box*) je množina boxů, která vyhovují kritériu v $F(\xi^B)$ a tyto boxy jsou tak řešením optimalizační úlohy.

Poznamenejme, že efektivita algoritmu může být výrazně vylepšena přidáním procem filtrace, který umožňuje apriori rozhodnout, zda-li daný box ξ_i^B vyhovuje danému kritériu, bez nutnosti rozhodnout na základě intervalové analýzy (filtrace bývá většinou založena na nějaké hlubší znalosti konkrétního problému, viz např. v [73]).

Klasické řešení optimalizační úlohy, tak jak bylo definováno výše, je založeno na vyčíslení hodnot kritériální funkce $J(\xi)$ na základě optimalizovaných parametrů. V případě tzv. multikritériální optimalizace (tedy např. i využití principu penalizací k integraci daných omezení, viz (3.18, 3.19) je výsledná kritériální funkce dána váženou sumou odlišných kritérií $J_i(\xi)$:

$$J(\xi) = \sum_i k_i \cdot J_i(\xi)$$

kde k_i jsou příslušné váhy dílčích kritérií.

Takový přístup k řešení optimalizační úlohy má však řadu nevýhod, viz [70, 31]:

- Výpočet kritériální funkce může být velmi náročný (komplexní nelineární funkce či diskrétní numerické výpočty (např. objem regulárního tvaru vepsaného pracovního prostoru), stability numerických algoritmů, velký počet iterací, přesnost výpočtu vlivem numerických zaokrouhlovacích chyb atd.)
- Konvergence k lokálnímu optimu (může být velmi vzdálené od globálního optima)
- Nastavení příslušných váhových konstant k_i , které nejen určují „prioritu“ dílčích kritérií, ale musí být voleny s ohledem na případné fyzikální jednotky kritérií (normování kritérií, např. vzdálenosti, úhly, výkony, síly atd.)
- Dílčí kritéria J_i mohou být ve vzájemném rozporu (např. *dexterity index* s objemem pracovního prostoru)
- Přístup zpravidla nalezne pouze jedno optimální řešení

Naopak, intervalová analýza v případě optimalizace kinematiky manipulátorů přináší následující výhody:

- Nalezené optimální řešení je dáno množinou (boxem) kinematických návrhových parametrů, nikoliv pouze jediným řešením
- Optimalizace může probíhat pro různá kritéria J_i odděleně, je tak nalezeno více boxů parametrů odpovídající daným kritériím, ze kterých lze pak vybírat na základě dalších uvážení či zkušenosti návrháře (např. pro splnění všech kritérií lze vybírat na základě průniku nalezených boxů, boxy mohou být diskretizovány a diskretizované hodnoty parametrů seřazeny dle dalších přídatných kritérií, např. hmotnost, cena, velikost robotu atd., poté je možné vybírat nějaké kompromisní řešení)
- Nativně lze pracovat např. s výrobními tolerancemi, tzn. boxy parametrů s velikostí menší než daný limit jsou považovány za technicky nerealizovatelné a vyřazeny
- Apriori jsou uvažovány zaokrouhlovací chyby
- Výsledné nalezené boxy parametrů jsou tvořeny kontinui, tzn. jsou apriori vyloučeny chyby vzniklé diskretizací prostoru kinematických návrhových parametrů
- Metody optimalizace na základě intervalové analýzy lze přirozeně paralelizovat (např. paralelní hledání boxů parametrů pro různá kritéria J_i)

Přes všechny uvedené výhody algoritmů intervalové analýzy je zde však stále několik zásadních komplikací:

- Intervalové výpočty nejsou triviální, pokud uvažujeme rozumnou míru přeurčenosti intervalu funkčních hodnot
- Používaná metoda bisekce prodlužuje výpočetní čas (exponenciální složitost), volba bisekce (přes jaké parametry)
- Volba algoritmů filtrace (silně závislé na formulované optimalizační úloze)

V Příkladu 3.2 uveďme dále nástin algoritmu optimalizace kinematických návrhových parametrů manipulátoru pro uvažovaný pracovní prostor:

★ Příklad 3.2 (Optimalizace prostřednictvím intervalové analýzy)

Algoritmus vychází z výše uvedeného základního algoritmu intervalové analýzy. Předpokládejme, že známe vstupní box n kinematických návrhových parametrů :

$$\xi_i^B = [\langle \underline{\xi}_1, \overline{\xi}_1 \rangle, \langle \underline{\xi}_2, \overline{\xi}_2 \rangle, \dots, \langle \underline{\xi}_n, \overline{\xi}_n \rangle]_i, \quad i = 1$$

Dále uvažujme, že optimalizace bude probíhat na pracovním prostoru definovaným opět boxem tentokrát zobecněných souřadnic manipulátoru, např.:

$$\mathbf{X}_j^B = \left[\langle \underline{\mathbf{O}}[1], \overline{\mathbf{O}}[1] \rangle, \langle \underline{\mathbf{O}}[2], \overline{\mathbf{O}}[2] \rangle, \langle \underline{\mathbf{O}}[3], \overline{\mathbf{O}}[3] \rangle, \langle \underline{\alpha}, \overline{\alpha} \rangle, \langle \underline{\beta}, \overline{\beta} \rangle, \langle \underline{\gamma}, \overline{\gamma} \rangle \right]_j, \quad j = 1$$

kde \mathbf{O} je translační poloha koncového efektoru manipulátoru a α, β, γ jsou Eulerovy úhly jeho orientace.

Předpokládejme, že kritériem optimality je kritériální funkce $J(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, jejíž hodnotu chceme udržet v intervalu $\langle J_{\min}, J_{\max} \rangle$ (např. omezení na natočení/vysunutí aktuátorů atd.). Ope-
rátor $F(\boldsymbol{\xi}^B, \mathbf{X}^B)$ tak lze definovat následovně:

$$F(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \underline{J}(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) \geq J_{\min} \text{ a zároveň } \overline{J}(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) \leq J_{\max} \\ -1 & \text{pokud } \overline{J}(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) < J_{\min} \text{ nebo } \underline{J}(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) > J_{\max} \\ 0 & \text{pokud } \underline{J}(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) < J_{\min} \text{ nebo } \overline{J}(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) > J_{\max} \end{cases} \quad (3.38)$$

kde $\langle \underline{J}(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B), \overline{J}(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) \rangle = J(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B)$ je intervalové vyčíslení kritériální funkce na daném boxu kinematických návrhových parametrů a zobecněných souřadnic.

Skalární funkce $w(\boldsymbol{\xi}^B)$ resp. $w(\mathbf{X}^B)$ definují velikost daného boxu kinematických návrhových parametrů resp. zobecněných souřadnic (dané např. minimálním objemem hypercube).

Algoritmus optimalizace lze formulovat následovně:

1. Cyklus 1 (výběr boxů kinematických návrhových parametrů)
 - a) Pokud $i > M_p$ potom ukonči algoritmus, řešení je v **FSB**
 - b) Pokud $F(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_1^B) = -1$ potom $i = i + 1$, a jdi na **1.a)**
 - c) Pokud $F(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_1^B) = -1$ potom ulož box $\boldsymbol{\xi}_i^B$ do **FSB**, $i = i + 1$, a jdi na 1. a)
 - d) Pokud $w(\boldsymbol{\xi}^B) < \epsilon_p$, ulož box $\boldsymbol{\xi}_i^B$ jako „vyřazený“, $i = i + 1$ a jdi na **1.a)**, jinak pokračuj na **2.a)**
2. Cyklus 2 (bisekce parametrů, bisekce pracovního prostoru při nerozhodnutelnosti)

Přiřaď $\mathbf{L}_w = [\mathbf{X}_1^B]$, $j = M_w = 1$

 - a) Pokud $j > M_w$, ulož box $\boldsymbol{\xi}_i^B$ do **FSB**, $i = i + 1$, a jdi na **1.a)**
 - b) Pokud $w(\mathbf{X}_j^B) < \epsilon_w$, proved' bisekci $\boldsymbol{\xi}_i^B$ (a ulož vzniklé boxy na konec seznamu \mathbf{L}_p), $M_p = M_p + 2$, $i = i + 1$, a jdi na **1.a)**
 - c) Pokud $F(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) = -1$ potom box $\boldsymbol{\xi}_i^B$ nepatří do **FSB**, $i = i + 1$, a jdi na **1.a)**
 - d) Pokud $F(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B) = 1$, potom $j = j + 1$ a jdi na **2.a)**
 - e) Proved' bisekci \mathbf{X}_j^B (a ulož vzniklé boxy na konec seznamu \mathbf{L}_w), $M_w = M_w + 2$, $j = j + 1$, a jdi na **2.a)**

kde $\mathbf{L}_p = [\boldsymbol{\xi}_1^B, \boldsymbol{\xi}_2^B, \dots, \boldsymbol{\xi}_{M_p}^B]$ resp. $\mathbf{L}_w = [\mathbf{X}_1^B, \mathbf{X}_2^B, \dots, \mathbf{X}_{M_w}^B]$ je seznam boxů kinematických návrhových parametrů resp. zobecněných souřadnic, **FSB** je množina boxů kinematických návrhových parametrů (řešení optimalizační úlohy), ϵ_p resp. ϵ_w je minimální přípustná velikost boxů.

Poznamenejme, že Cyklus 2 resp. bisekce boxů zobecněných souřadnic je realizována z důvodu přeurčenosti intervalového vyčíslení kritériální funkce $J(\boldsymbol{\xi}_i^B, \mathbf{X}_j^B)$. Míra přeurčenosti (horní, dolní mez intervalu) je závislá striktně na velikosti boxu, je tak možné, že celý

box zobecněných souřadnic \mathbf{X}_1^B nevyhoví, nicméně jeho zřejmě menší podmnožiny vzniklé bisekcí ano (a vyhoví tak celý box - pracovní prostor).

Výsledkem algoritmu je tak seznam **FSB** boxů kinematických návrhových parametrů (množiny parametrů), který vyhovuje omezení na horní a dolní mez kriteriální funkce na celém pracovním prostoru. Konkrétní příklad optimalizace je pro paralelní manipulátor typu Stewartova platforma a kritérium formulované jako minimální/maximální výsuv lineárních aktuátorů analyzován v [31]. ★

Poznamenejme, že metody intervalové analýzy lze aplikovat i na odlišné problémy. Typicky se jedná např. o numerické řešení kinematických úloh (DGM, IGM) s ohledem na výpočetní bezpečnost (konvergence numerických algoritmů ke správnému řešení, existence řešení na okolí aktuální polohy manipulátoru), přesnost polohování manipulátoru, existence singulárních poloh atd., viz [73, 72, 70].

3.2.4. Alternativní přístupy k řešení

V Kapitole 3.2.3 jsme se zabývali některými standardními přístupy k parametrické optimalizaci (s ohledem na optimalizaci kinematiky manipulátorů). Vedle standardních algoritmů lze v literatuře nalézt různé podoby specifických algoritmů a postupů, které se buď původní problém definované optimalizační úlohy snaží vyřešit jeho transformací na ekvivalentní problém, či je optimalizační úloha nativně formulována specificky k uvažovanému druhu optimalizace. Věnujme se proto stručně dále třem zajímavým oblastem, a to:

- *Dynamická metoda optimalizace (minimalizace)* - převedení klasické optimalizační úlohy s obecně definovanou kriteriální funkcí na ekvivalentní problém pohybu hmotné částice v konzervativním silovém poli
- *Metoda rozvolnění kinematických parametrů manipulátoru* - rozvolnění kinematických parametrů manipulátoru a jejich optimalizace, kinematická redundance manipulátoru
- *Vyvažování sil/silových momentů manipulátoru* - specifický problém minimalizace sil/silových momentů v aktuátorech manipulátoru prostřednictvím vyvažování

Dynamická metoda optimalizace

Minimalizace kriteriální funkce $J(\boldsymbol{\xi})$ je v tomto přístupu dána do souvislosti s pohybem hmotného bodu v konzervativním silovém poli, kde potenciální energie částice je reprezentována právě skalární kriteriální funkcí $J(\boldsymbol{\xi})$ definovanou nad prostorem kinematických návrhových parametrů $\boldsymbol{\xi}$. Předložená metoda je svou koncepcí odlišná od standardních gradientních metod, pro svoji činnost nevyžaduje výpočet Hessiánu kriteriální funkce. Původní verze metody je popsána v [101, 104]. Základní princip dynamické metody je následující:

Předpokládejme, že kriteriální funkce $J(\boldsymbol{\xi})$ reprezentuje potenciální energii hmotné částice (jednotkové hmotnosti), na kterou působí síla $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})$ v prostoru reprezentovaným kinematickými návrhovými parametry $\boldsymbol{\xi}$:

$$J(\boldsymbol{\xi}) = - \int_{\boldsymbol{\xi}^*}^{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\xi} + J(\boldsymbol{\xi}^*) \quad (3.39)$$

kde $\boldsymbol{\xi}^*$ je lokální minimum potenciální energie (potažmo kriteriální funkce).

Vzhledem k tomu, že kinetická energie hmotné částice je $T(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\|\dot{\boldsymbol{\xi}}\|^2$, lze s pomocí Euler-Lagrangeových rovnic odvodit pohybovou rovnici hmotného bodu jako:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = -\nabla J(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.40)$$

kde $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$ je zrychlení hmotné částice a $\nabla J(\boldsymbol{\xi})$ je gradient funkce $J(\boldsymbol{\xi})$.

Pro pohyb hmotné částice v konzervativním silovém poli platí, že její celková energie je konstantní:

$$T(\boldsymbol{\xi}) + J(\boldsymbol{\xi}) = T(\boldsymbol{\xi}_0) + J(\boldsymbol{\xi}_0) = E_0 \quad (3.41)$$

kde E_0 je počáteční energie tělesa.

Zavedeme-li časovou diskretizaci $t = k \cdot \Delta T$, $\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}(k \cdot \Delta T) = \boldsymbol{\xi}_k$, pro přírůstky kinetické a potenciální energie platí:

$$\Delta J(\boldsymbol{\xi}_k) = -\Delta T(\boldsymbol{\xi}_k) \quad (3.42)$$

kde $\Delta J(\boldsymbol{\xi}_k) = J(\boldsymbol{\xi}_{k+1}) - J(\boldsymbol{\xi}_k)$, $\Delta T(\boldsymbol{\xi}_k) = T(\boldsymbol{\xi}_{k+1}) - T(\boldsymbol{\xi}_k)$.

Tedy, roste-li kinetická energie částice, úměrně klesá její potenciální energie - tzn. hodnota kriteriální funkce se blíží svému minimu. Diferenční rovnice pohybu částice vyplývají z rovnice (3.40):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{k+1} &= \boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{v}_k \cdot \Delta t \\ \mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{v}_k + \mathbf{a}_{k+1} \end{aligned}, \quad \mathbf{a}_k = -\nabla J(\boldsymbol{\xi}(k \cdot \Delta t)) \quad (3.43)$$

kde $\dot{\boldsymbol{\xi}}_k = \boldsymbol{\xi}(k \cdot \Delta t)$, $\mathbf{a}_k = \ddot{\boldsymbol{\xi}}(k \cdot \Delta t)$. Lze ukázat, že uvedený způsob integrace (řešení) je konzervativní vzhledem k energii, viz [101].

Princip optimalizace prostřednictvím dynamické metody tedy spočívá v cíleném řízení pohybu hmotné částice tak, aby byla její potenciální energie systematicky minimalizována (tedy řešení se systematicky blížilo minimu kriteriální funkce). To lze v nejjednodušším případě zajistit následujícím algoritmem:

1. V každém $k + 1$ kroku algoritmu vyhodnot' velikost rychlostí $\|\mathbf{v}_{k+1}\|$ částice
2. Pokud $\|\mathbf{v}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{v}_k\|$, vynuluj rychlost $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ a opakuj výpočet kroku $k \rightarrow k + 1$

Uvedený algoritmus zajistí systematické snižování potenciální energie (tedy konvergence k optimu). Pokud $\|\mathbf{v}_{k+1}\| > \|\mathbf{v}_k\|$, potom $\Delta T(\boldsymbol{\xi}_k) > 0$ a dle (3.42) je $\Delta J(\boldsymbol{\xi}_k) < 0$, tedy potenciální energie se snižuje (konvergence kriteriální funkce směrem k minimu), pokud ovšem $\|\mathbf{v}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{v}_k\|$, potom $\Delta J(\boldsymbol{\xi}_k) \geq 0$, tedy potenciální energie se zvyšuje (konvergence směrem od minima). V takovém případě volba $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ zajistí $T(\boldsymbol{\xi}_k) = 0$ a v kroku $k + 1$ potom platí $T(\boldsymbol{\xi}_k) \geq 0$ a tedy, dle (3.42), opět $\Delta J(\boldsymbol{\xi}_k) \leq 0$.

Jinými slovy, optimalizační algoritmus si lze představit pro $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, jako pohyb částice po virtuálním (nerovném) povrchu daným kriteriální funkcí $J(\boldsymbol{\xi})$ při působení gravitace (konzervativní silové pole). Částice je přitahována do minima (nejnižšího místa) a dochází k „přelévání“ její energie mezi kinetickou a potenciální. Dochází-li k navyšování rychlosti částice, zřejmě se přibližuje do minima, v opačném případě se od minima vzdaluje (setrvačnost), v takovém případě je částice zastavena (nulování rychlosti) a následně uvolněna, její pohyb je tak přirozeně obnoven ve směru do minima.

Základní algoritmus lze dále rozšiřovat o různé heuristické postupy, např. rychlost není nulována, ale pouze určitým způsobem redukována (omezení konvergence do lokálních extrémů), časová diference je dynamicky měněna, složky vektoru zrychlení \mathbf{a}_k jsou normovány či je redukován maximální krok $\boldsymbol{\xi}_k \rightarrow \boldsymbol{\xi}_{k+1}$, viz [102]. V [101] je zároveň uvedeno porovnání nové metody se známými numerickými metodami (Qasi Newtonova metoda atd.) na souboru testovacích kriteriálních funkcí. Mezi klíčové vlastnosti předložené metody (označována jako *LFOP - Leap Frog OPTimizer*) lze řadit následující:

- Relativně spolehlivá a robustní metoda (konvergence do minima u všech testovacích funkcí, menší závislost na volbě počátečního bodu)
- Není nutné počítat Hessián kriteriální funkce
- Obecně pomalejší konvergence pro „ploché“ kriteriální funkce a v blízkosti minima (řešena např. kombinací *LFOP* s metodou konjungovaných gradientů, viz [111])
- Lineární nárůst výpočetního času pro navyšování dimenze parametrů ξ

V [109, 103] je dále původní metoda *LFOP* dále rozšířena o možnosti integrování omezení typu rovností a nerovností (*LFOPC - Leap Frog Optimizer for Constrained optimization*). Integrace omezení je docílena již dříve zmíněnou metodou zavedení penalizací (parametrizované váhovými penalizačními konstantami), které jsou aditivně přičítány k účelové funkci, viz (3.19). Klíčovým problémem v takovém přístupu je volba právě penalizačních konstant, která může zapříčinit (v případě porušení omezení) zásadní navýšení hodnoty kriteriální funkce, což odpovídá v uvažované analogii s pohybem hmotné částice neúměrně velkému zvýšení potenciální energie - „odrážení“ hmotné částice od „bariér“ způsobené omezeními \Rightarrow pomalá konvergence či dokonce destabilizace algoritmu. Řešení spočívá v dynamické změně penalizačních konstant během průběhu optimalizačního algoritmu. Dále je nutné počítat gradient funkcí definující omezení (což může být ve specifických případech složité a časově náročné), tento problém je řešen kvadratickou aproximací funkcí omezení a účelové funkce, viz *Dynamic Q-method* v Kapitole 3.2.3.

Ve [108] byl *LFOP* algoritmus použit k řešení kvadratických subproblémů (aproximace kriteriální funkce sférickou kvadratickou funkcí - *Dynamic Q-method*) v algoritmu *SQP*, viz Kapitola 3.2.3. V [106, 110] jsou uvedeny příklady aplikace *LFOPC* algoritmu na optimalizaci parametrů 3 DoF **RRR** manipulátoru při uvažování pohybu koncového efektoru po předepsané trajektorii s různými typy účelové funkce (průměrný moment v kloubech, spotřeba elektrické energie) a omezení (maximální přípustný moment na aktuátorech, omezení na natočení kloubů, délku ramen atd.). Optimalizace parametrů jednoduchých paralelních manipulátorů je, pro uvažování předepsaných tvarů pracovních prostorů, analyzována a porovnána v [32].

Metoda rozvolnění kinematických parametrů manipulátoru

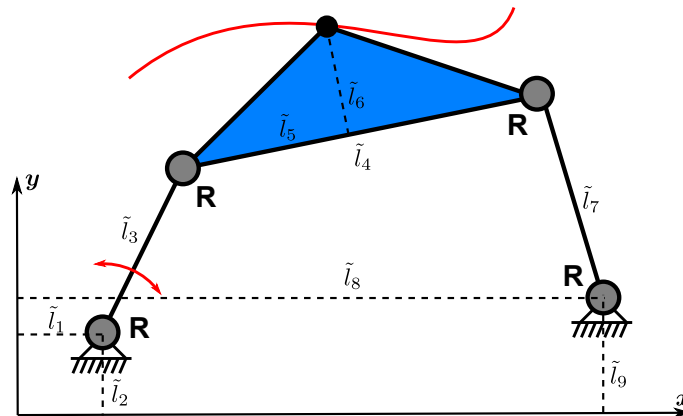
Metoda rozvolnění kinematických parametrů manipulátoru byla klíčovou inspirací pro předloženou práci zejména s ohledem na kinematickou redundanci manipulátorů a využití optimalizace pohybu redundantních manipulátorů, viz Kapitola 3.4, pro řešení optimálních úloh parametrické syntézy robotických architektur, viz Kapitola 4. Původní idea metody, tak jak je popsána v [17, 39, 5], spočívá v nalezení umístění a délek ramen (\tilde{l}_k) 4-ramenného planárního paralelního mechanismu, viz Obrázek 3.7, známého jako *planar four-bar mechanism - FBM*. *FBM* je specifickou 1 DoF planární architekturou (funkcí analogickou k vačkovému mechanismu), která nativně převádí jednoduchý rotační pohyb kloubu umístěného na základně na komplexní rovinný pohyb bodu umístěného na koncovém efektoru⁷.

Kinematický popis manipulátoru pouze prostřednictvím délkových charakteristik jednotlivých ramen je znám jako reprezentace tzv. *přirozenými souřadnicemi*, viz [42], kdy je každé rameno manipulátoru jednoznačně reprezentováno svým počátečním a koncovým

⁷Výpočtem generování trajektorie koncového efektoru *FBM* se za účelem řešení PKÚ 3 DoF planárního paralelního manipulátoru (3 kinematické řetězce typu **RRR**), který ve své architektuře *FBM* obsahuje, podrobně zabývá práce [125].

bodem. Tyto body lze dále uvažovat jako tzv: *floating points* - body, pohybující se během pohybu manipulátoru (např. koncové body umístěné v kloubech pohybujících se ramen), *static points* - body, které během pohybu manipulátoru nemění svou pozici (např. fixace na základnu) a *tracking points* - body, jejichž vývoj polohy je předepsán uvažovaným pohybem manipulátoru (např. definovaný bod/body koncového efektoru). Vlastnosti (výhody a nevýhody) popisu kinematiky manipulátoru *přirozenými souřadnicemi* oproti standardnímu přístupu kinematického popisu prostřednictvím *relativních souřadnic* (D-H parametry) jsou následující:

- + Přímočarý popis kinematiky manipulátoru bodovým modelem
- + Nelimitují možná řešení kinematiky manipulátoru (složení)
- + Kinematický popis přirozeně neobsahuje goniometrické funkce (nebo jsou přinejmenším velmi redukovány oproti např. D-H úmluvě)
- + Kinematická struktura manipulátoru (plynoucí z uspořádání a typu kloubů spojující ramena) je přirozeně dána relacemi mezi soustavou tuhých těles, tzn. relacemi vzdáleností mezi body (kvadratické funkce), kolmost, rovnoběžnost (skalární, vektorové součiny), koincidence bodů a přímek atd.
- + Mnohdy jednoduchá definice kriteriální funkce, zejména v případě možných geometrických omezení (lineární, kvadratické funkce)
- + Kinematické návrhové parametry manipulátoru jsou nativně uvažovány
 - Popis kinematiky vyžaduje přidání rovnic kinematického omezení (ekvivalence ke kinematickým návrhovým parametrům v D-H úmluvě, kde jsou omezení uvažovány z definice úmluvy) - jak určit?
 - Nativně existuje (musí) závislost mezi souřadnicemi
 - Nalezení transformace do *relativních souřadnic* (volba aktuátorů)



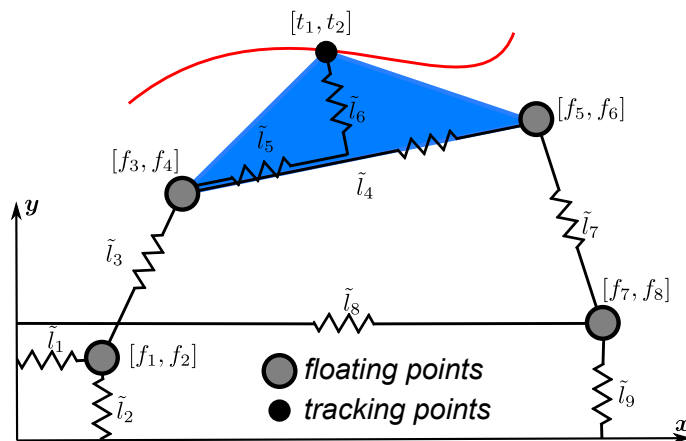
Obrázek 3.7.: FBM s vyznačenými délkami ramen a délkami specifikující umístění v s.s. základny

Princip metody spočívá v zavedení elastických vazeb mezi *floating points* a mezi *floating points* a *static points*. *Tracking points* jsou jednoznačně zadány v každém diskretizovaném kroku uvažovaného pohybu manipulátoru (požadovaný generovaný pohyb manipulátorem). Budeme-li nyní uvažovat, že rozvolníme nejen délky dílčích ramen manipulátoru, ale zároveň i jeho umístění vzhledem k pevné základně, lze situaci znázornit Obrázkem 3.8 (množina *static points* je v uvedeném případě prázdná). Přirozené souřadnice manipulátoru jsou tedy dány souřadnicemi dílčích *floating points* $\mathbf{f} = [f_j]$, $j = 1, 2, \dots, 8$ (příslušné body

v rovině definující pohyb manipulátoru). Elasticita mezi *floating points* je definována jako lineární pružina s koeficientem tlumení $k_k > 0$ a přirozenou délkou \tilde{l}_k , $k = 1, 2, \dots, 9$ (délka, při které pružina generuje nulovou reakční sílu), síla lineární pružiny je tak dána zřejmě vztahem $F_k = k_k \cdot (d_k(\mathbf{t}, \mathbf{f}) - \tilde{l}_k)$, kde $d_k(\mathbf{t}, \mathbf{f})$ je funkce určující příslušnou Euklidovskou vzdálenost mezi počátečním a koncovým bodem pružiny. $\mathbf{t} = [t_l]$, $l = 1, 2$ jsou dané souřadnice *tracking point*. Potenciální energii, která je uložena v pružině pro její definované prodloužení je tedy dána jako $E_k = \frac{1}{2} \cdot k_k \cdot (d_k(\mathbf{t}, \mathbf{f}) - \tilde{l}_k)^2$ a výslednou potenciální energii všech pružin lze napsat souhrnně jako:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{\mathbf{l}})^T \cdot \mathbf{k} \cdot (\mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{\mathbf{l}}) \quad (3.44)$$

kde \mathbf{t}_i resp. \mathbf{f}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ jsou souřadnice *tracking points* resp. *floating points* pro N požadovaných diskretizovaných bodů (požadovaných poloh koncového efektoru), $\mathbf{k} = \text{diag}([k_1, k_2, \dots, k_9])$ je diagonální matice tuhostí pružin, $\tilde{\mathbf{l}} = [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_9]$ je vektor přirozených délek pružin a $\mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) = [d_1(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i), d_2(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i), \dots, d_9(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i)]$ je vektorová funkce udávající aktuální délku pružin.



Obrázek 3.8.: FBM s uvolněnými vazbami (elasticita přidána lineárními pružinami)

Cílem optimalizace je tedy nalézt takové přirozené souřadnice \mathbf{f}_i *floating points* (pro každý koincidenční bod) a hodnoty přirozených délek $\tilde{\mathbf{l}}$ (konstantní přes všechny koincidenční body), které minimalizují celkovou potenciální energii E akumulovanou v pružinách pro všechny požadované zadané koincidenční body - *tracking points* \mathbf{t}_i , $i = 1 \dots N$. Přirozené souřadnice \mathbf{f}_i tak reprezentují pohyb manipulátoru generující požadovanou trajektorii (případnou požadovanou rotaci jednoho z kloubů na základně manipulátoru - relativní souřadnice 1 DoF manipulátoru, kterou by bylo možné vypočítat právě z přirozených souřadnic) a vektor přirozených délek představuje kinematické návrhové parametry manipulátoru (tedy v našem případě délky ramen a umístění manipulátoru). V případě, že výsledná potenciální energie je rovna nule $E = 0$, zřejmě platí, že ve všech koincidenčních bodech jsou přirozené délky pružin rovny vypočítané vzdálenosti příslušných *floating points* a jsou podél celé trajektorie manipulátoru neměnné, tzn. požadovaný pohyb manipulátoru lze realizovat ideálně tuhými rameny (jinými slovy pohyb manipulátoru je realizován pouze rotačními klouby - nikoliv změnou jejich vzdáleností). V případě, že výsledná energie nelze úplně nulovat, znamená to, že nelze předepsanou trajektorii koncového efektoru dosáhnout s ideálně tuhými rameny přesně. Základní algoritmus lze popsat následovně (jeden iterační krok algoritmu):

1. Definuj nějakou počáteční hodnotu přirozených délek $\tilde{\mathbf{l}}$.

2. Řešení optimalizačního problému nalezení přirozených souřadnic \mathbf{f}_i pro konstantní hodnotu přirozených délek $\tilde{\mathbf{l}}$:

Vzhledem ke tvaru funkce (3.44) je zřejmé, že minimalizace celkové energie (přes všechny koincidenční body) je ekvivalentní minimalizaci energie v každém dílčím koincidenčním bodu, tzn. hodnotu přirozených kloubových souřadnic \mathbf{f}_i lze nalézt řešením rovnice:

$$\mathbf{f}_i^* = \underset{\mathbf{f}_i}{\operatorname{argmin}} \left[\left(\mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{\mathbf{l}} \right)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{\mathbf{l}} \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.45)$$

Z nalezených hodnot \mathbf{f}_i^* lze vypočítat odpovídající vzdálenosti mezi *floating points* v každém koincidenčním bodě:

$$\mathbf{d}_i^* = \mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i^*) \quad (3.46)$$

3. Vyhodnocení celkové potenciální energie:

Vypočti výslednou hodnotu potenciální energie pružin přes všechny koincidenční body:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i^*) - \tilde{\mathbf{l}} \right)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i^*) - \tilde{\mathbf{l}} \right)$$

- Pokud $E \leq \epsilon$, kde ϵ je zvolená hodnota, zastav algoritmus: Výsledné hodnoty kinematických návrhových parametrů jsou dány přirozenými délkami $\tilde{\mathbf{l}}$, přirozené souřadnice jsou dány \mathbf{f}_i (\Rightarrow je možné dopočítat kloubové souřadnice - 1 aktivní, 3 pasivní).
- Pokud $E > \epsilon$, proveď aktualizaci $\tilde{\mathbf{l}}$ a pokračuj v algoritmu bodem 2.

Aktualizace přirozených délek $\tilde{\mathbf{l}}$:

Z vypočítaných hodnot \mathbf{d}_i^* je vypočtena střední hodnota (průměr) přes všechny koincidenční body a je tak získána nová hodnota $\tilde{\mathbf{l}}$:

$$\tilde{\mathbf{l}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_i^* \quad (3.47)$$

Poznamenejme, že aktualizace $\tilde{\mathbf{l}}$ jako střední hodnota ze vzájemných vypočtených vzdáleností \mathbf{d}_i^* *floating points* odpovídá nutné podmínce existence extrému celkové potenciální energie pružin pro konstantní $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^*$, viz (3.44) neboť platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \tilde{\mathbf{l}}} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i^*) - \tilde{\mathbf{l}} \right) \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow - \mathbf{k} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i^*) + N \cdot \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{l}} \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow \tilde{\mathbf{l}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{d}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i^*) \end{aligned}$$

Přesto, že předložená metoda je prezentována jako univerzální nástroj parametrické optimalizace, vyvstává zde několik zásadních otázek. Metoda je založená na rozvolnění původně konstantních parametrů tuhých ramen (přirozené délky pružin) a hledání takového řešení, kdy je minimalizována potenciální energie v pružinách podél celé předepsané trajektorie koncového efektoru manipulátoru. Úloha lze tak ekvivalentně převést (s klasickou interpretací popisu kinematiky kinematickými návrhovými parametry a kloubovými souřadnicemi (relativními souřadnicemi) - viz např. D-H úmluva) na rozvolnění kinematických návrhových parametrů (což vede na uvažování kinematické redundance, kdy jsou některé

návrhové parametry uvažovány jako přídavné aktivní klouby) a hledání takového řešení (pro dané koincidenční body), kdy je pohyb (variance) těchto přídavných kloubů minimalizován (optimálně zastaven) - lze tak předpokládat, že pro zafixování přídavných kloubů je předepsaný pohyb koncového efektoru splněn buď zcela (nulová variance) či s danou odchylkou (nenulová dostatečně malá variance). Ve druhém případě tedy nemusí jít zajistit předepsaný pohyb koncového efektoru takový, aby byly zcela splněny podmínky kinetického omezení manipulátoru (tedy podmínky určené DGM resp. IGM - tzv. podmínky na „složení“ mechanismu). Tento fakt souvisí s určením DoF manipulátoru, viz Kapitola 2, a je zásadní zejména pro paralelní manipulátory. V případě, že nelze zcela splnit podmínky kinematického omezení manipulátoru, lze zřejmě předpokládat, že architektura manipulátoru nevykazuje dostatečný počet DoF (v požadovaném složení - translační/rotační DoF). Např. v uvažovaném případě 4 ramenného mechanismu se jedná o paralelní manipulátor s 1 DoF, nicméně plánované koincidenční body leží v rovině (jsou tak požadovány 2 nezávislé DoF) - toto v obecném případě není možné splnit přesně, ale s minimální odchylkou, kterou se snaží nalézt uvažovaná metoda. Stejnými problémy, tedy nalezení parametrů manipulátoru pro co nejlepší projetí koincidenčními body, nicméně s využitím standardního popisu s pomocí relativních souřadnic, se zabývají práce [30] (minimalizace variance kinematických návrhových parametrů pro přesné projetí koincidenčních bodů) a [75] (opačný přístup - tedy apriori předpokládané rozvolnění požadavků na projetí koincidenčních bodů). Mezi další otázky ohledně předložené metody patří zejména: konvergence algoritmu a vhodné robustní metody pro řešení optimalizačního problému (3.45).

Alternativní možností je, že počet DoF manipulátoru je shodný (počtem i typem) s požadovanou trajektorií koncového efektoru, a zadaná trajektorie může být splněna přesně. S rozvolněním některých dalších původně konstantních parametrů (zavedením kinematické redundance) pak můžeme optimalizovat nějaké kritérium (rychlosti, síly/silové momenty v kloubech manipulátoru atd.) a nalézt tak proměnné parametry podél trajektorie, viz Kapitola 3.4. Otázkou však zůstává, jakým způsobem takto variantní (ale optimální) kinematické parametry využít ke stanovení jejich konstantních (optimálních) hodnot. Společně s možností zahrnutí některých problémů strukturální optimalizace je tato otázka diskutována v Kapitole 4.

Vyvažování sil/silových momentů manipulátoru

Vzhledem k tomu, že silové či momentové působení v aktuátorech manipulátoru, které je vyžadováno k zajištění požadovaného pohybu koncového efektoru je zásadním faktorem, který musí být brán v úvahu při syntéze robotických architektur, zabývejme se nyní tématem, který je nazýván jako *statické a dynamické vyvažování manipulátorů*. Vyvažování manipulátorů tvoří určitou alternativu k obecnému problému parametrické optimalizace manipulátoru, neboť se snaží specifickými strukturálními změnami (např. přidáním protizávaží či pružných elementů) pasivně docílit eliminace silového/momentového působení vyvozované pohybem hmotných ramen manipulátoru. Základní myšlenka vyvažování manipulátorů je popsána v [76, 142, 143] a lze z principu rozdělit na dvě hlavní kategorie:

Statické vyvažování:

Manipulátor je považován za staticky vyvážený, pokud pro každou polohu v pracovním prostoru manipulátoru nejsou zapotřebí žádné síly/silové momenty k jeho udržení v této poloze. Jinými slovy, všechna silové působení vlivem gravitace jsou zcela kompenzována. Z matematického pohledu si lze situaci představit následovně. Uvažujme ramena manipulátoru (a nehmotné klouby) jako obecný vícěhmotový systém, který je *v klidu* umístěn v gravitačním poli. Každé rameno je reprezentováno svým těžištěm o dané hmotnosti (a momentem setrvačnosti, který však hraje roli pouze při pohybu). Celková energie E takového systému je dána pouze jeho energií potenciální, tedy součtem potenciálních energií

všech jeho ramen:

$$E = - \sum_{i=1}^N (m_i \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{r}_i) = -\mathbf{g}^T \cdot \sum_{i=1}^N (m_i \cdot \mathbf{r}_i) \quad (3.48)$$

kde N je počet ramen, \mathbf{g} je vektor gravitačního zrychlení, m_i je hmotnost a \mathbf{r}_i je vektor umístění těžiště i -tého ramene.

Vztah pro výpočet polohy výsledného těžiště \mathbf{r} všech ramen (o hmotnosti M) je dán jako:

$$M \cdot \mathbf{r} = \sum_{i=1}^N (m_i \cdot \mathbf{r}_i), \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (3.49)$$

Kombinací (3.48) a (3.49) dostáváme výsledný vztah pro potenciální energii:

$$E = -M \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{r} \quad (3.50)$$

Potenciální energie manipulátoru je tak jednoznačně dána potenciální energií jeho výsledného těžiště. Za staticky vyvážený manipulátor lze považovat takový manipulátor, jehož celková potenciální energie zůstává konstantní pro všechny polohy v uvažovaném pracovním prostoru. Jelikož důkaz tvrzení není uveden v citované literatuře, je pro úplnost nastíněn v Poznámce 3.1.

■ **Poznámka 3.1 (Staticky vyvážený manipulátor)**

Pro potenciální $E(\mathbf{Q})$ a kinetickou $E_k(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ energii hmotného tělesa (tedy i soustavy ramen manipulátoru reprezentovaných celkovým těžištěm, hmotnostmi a momentem setrvačnosti) pohybujícího se v konzervativním potenciálovém poli (gravitační pole) platí následující bilance:

$$E(\mathbf{Q}) + E_k(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = K = konst. \quad (3.51)$$

kde \mathbf{Q} resp. $\dot{\mathbf{Q}}$ jsou polohy resp. rychlosti kloubových souřadnic manipulátoru jednoznačně určující polohu resp. rychlost (translační a úhlovou) výsledného těžiště.

Předpokládejme, že je robot umístěn v klidu $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ v poloze dané jeho kloubovými souřadnicemi \mathbf{Q} , potom platí:

$$E(\mathbf{Q}) + \underbrace{E_k(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})}_{=0 \leftarrow \dot{\mathbf{Q}}=0} = K \quad \Rightarrow K = E(\mathbf{Q}) \quad (3.52)$$

Pro libovolný posun $\Delta\mathbf{Q}$ musí opět platit (bilance energií):

$$E(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) + E_k(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}, \Delta\dot{\mathbf{Q}}) = K \quad (3.53)$$

Z rovnic (3.52, 3.53) tedy zřejmě vyplývá, že pokud platí rovnost potenciální energie na celém pracovním prostoru manipulátoru

$$E(\mathbf{Q}) = E(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) = K, \quad \forall \Delta\mathbf{Q}$$

musí být nutně kinetická energie $E_k(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}, \Delta\dot{\mathbf{Q}}) = 0 \Rightarrow \Delta\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, a tedy manipulátor zůstává opět v klidu.

Zbývá dokázat, že pro konstantní potenciální energii manipulátoru přes celý pracovní prostor je výsledná síla/silový moment \mathbf{M} na aktuátorech nulový. K odvození využijeme dynamický popis manipulátoru prostřednictvím Euler-Lagrangeových rovnic [95]:

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = E_k(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) - E(\mathbf{Q}) \quad (\text{Lagrangián})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})}{\partial \mathbf{Q}} \quad (3.54)$$

Pro manipulátor v klidu platí $E_k(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = 0$ a tedy:

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = -E(\mathbf{Q}) = -K = konst. \quad \forall \mathbf{Q} \Rightarrow \frac{\partial L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (3.55)$$

■

Konstantní hodnota potenciální energie manipulátoru přes celý uvažovaný pracovní prostor může být docílena dvěma přístupy:

- **Metodou přidaných hmotností**

Vzhledem k faktu, že M a \mathbf{g} jsou nenulové konstanty, podmínkou statické rovnováhy manipulátoru je konstantní poloha výsledného těžiště $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{Q})$ jako funkce kloubových souřadnic \mathbf{Q} manipulátoru, tedy:

$$\mathbf{r}(\mathbf{Q}) = konst. \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{Q} \quad (3.56)$$

Konstantní polohu výsledného těžiště lze docílit vhodným přidáním hmotností (statických či dokonce konfigurovaných s pohybem manipulátoru). Jednoduchý příklad je demonstrován na Obrázku 3.9(a). Zásadní nevýhodu takového přístupu je zvýšení celkové hmotnosti manipulátoru, což může zásadním způsobem zhoršit jeho dynamické vlastnosti.

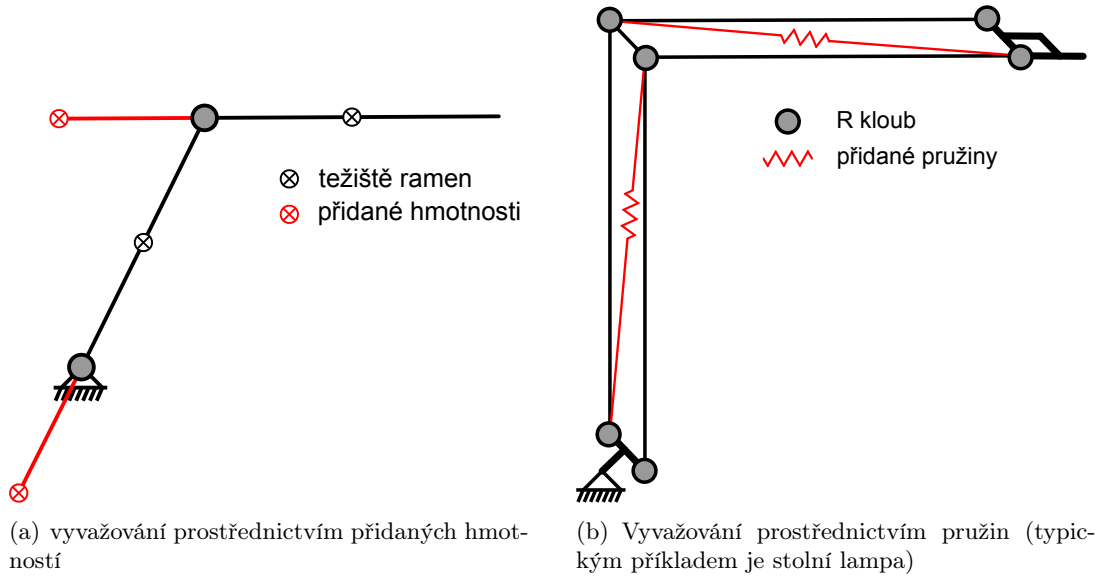
- **Přidáním silovým elementem**

Silovým elementem rozumíme např. pružinu, která umožňuje měnit potenciální energii manipulátoru v závislosti na jeho aktuální poloze. Potenciální energie těžiště manipulátoru je pak kompenzována potenciální energií pružiny (více pružin) tak, že jejich výsledný součet zůstává konstantní pro všechny polohy manipulátoru. Pro celkovou potenciální energii manipulátoru tedy platí:

$$E = -M \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{r}(\mathbf{Q}) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m (k_j \cdot e_j^2(\mathbf{Q})) = konst. \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{Q} \quad (3.57)$$

kde m je výsledná počet připojených pružin, k_j resp. $e_j(\mathbf{Q})$ je tuhost resp. prodloužení pružiny (od přirozené délky).

Jednoduchý příklad je demonstrován na Obrázku 3.9(b). Zásadním problémem je výpočet umístění pružin a jejich technická realizace s ohledem na jejich zástavbu do struktury manipulátoru.



Obrázek 3.9.: Jednoduché příklady staticky vyvážených manipulátorů

Dynamické vyvažování:

Dynamické vyvažování manipulátorů je zobecněným případem statického vyvažování a je primárně formulováno podmínkou, kdy pro libovolný pohyb manipulátoru platí, že všechny síly a silové momenty (někdy nazývány jako *shaking forces and moments*) působící na základnu manipulátoru jsou vždy nulové. Tyto síly a silové momenty hrají významnou roli především ve dvou případech:

- *Vybuzování vibrací do základny manipulátoru*
Jev, který je zásadní zejména s ohledem na možné vybudování reziduálních vibrací či silového/momentového namáhání nosných konstrukcí manipulátorů.
- *Silové/momentové namáhání aktuátorů*
Vlivem reakčního silového/momentového působení základny manipulátoru na jeho mechanickou konstrukci musí být tyto reakce kompenzovány vlastními aktuátory manipulátoru, což vede na významné navýšení požadovaných sil/momentů v aktuátorech. Problém je zcela klíčový pro velmi rychle se pohybující manipulátory, kdy dynamické projevy dominují.

Výpočet reakčních sil/silových momentů působících na základnu je uveden v Poznámce 3.2.

■ Poznámka 3.2 (Reakční působení základny manipulátoru)

Předpokládejme N ramen manipulátoru definovaných svými hmotnostmi m_i , umístěním těžišť \mathbf{r}_i a příslušným tensorem setrvačnosti \mathbf{I}_i v těžišti (vzhledem k s.s. daného ramene \Rightarrow konstantní matice).

Hybnost \mathbf{l}_i jednoho ramene lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{l}_i = m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{l}}_i = m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{g_i} \quad (3.58)$$

kde \mathbf{F}_i resp. $\mathbf{F}_{g_i} = m_i \cdot \mathbf{g}$ jsou externí resp. gravitační síly působící na rameno, \mathbf{g} je vektor gravitačního zrychlení.

Síla potřebná k urychlení jednoho ramene je tak dána jako:

$$\mathbf{F}_i = m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_{g_i} \quad (3.59)$$

Celková síla \mathbf{F} od všech ramen manipulátoru působící na jeho základnu ve smyslu translace jejich těžišť (dle složkové podmínky dynamické rovnováhy) s uvažováním celkového těžiště, viz (3.49), bude dána jako:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i - m_i \cdot \mathbf{g}) = M \cdot \ddot{\mathbf{r}} - M \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{F} &= M \cdot \ddot{\mathbf{r}} - M \cdot \mathbf{g}, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i\end{aligned}\tag{3.60}$$

kde \mathbf{r} je umístění celkového těžiště manipulátoru.

Zřejmě tak reakční síla základny (podložky) manipulátoru bude dána jako $\mathbf{F}_{\text{reac}} = -\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}_{\text{reac}} = -M \cdot \ddot{\mathbf{r}} + M \cdot \mathbf{g}\tag{3.61}$$

Moment hybnosti \mathbf{k}_i jednoho ramene k počátku s.s. základny lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{k}}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{M}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{g_i}\tag{3.62}$$

kde \mathbf{M}_i resp. $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{g_i}$ je externí silový moment resp. silový moment způsobený gravitačním působením na těžiště ramene. $\boldsymbol{\omega}_i$ je úhlová rychlost ramene. $\mathbf{F}_{g_i} = m_i \cdot \mathbf{g}$.

Silový moment potřebný k urychlení jednoho ramene je tak dána jako:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{g_i}\tag{3.63}$$

Celkový moment \mathbf{M} od všech ramen manipulátoru působící na jeho základnu s uvažováním celkového těžiště, viz (3.49), bude dán jako:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) - \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \cdot \mathbf{g}) \\ \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) - \sum_{i=1}^N (m_i \cdot \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g} \\ \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^N \underbrace{(\mathbf{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i)}_{\mathbf{k}_i} - \mathbf{r} \times M \cdot \mathbf{g}\end{aligned}\tag{3.64}$$

Zřejmě tak reakční moment základny (podložky) manipulátoru bude dán jako $\mathbf{M}_{\text{reac}} = -\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}_{\text{reac}} = -\dot{\mathbf{k}} + \mathbf{r} \times M \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{k} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i)\tag{3.65}$$

■

Reakční síla/silový moment základny manipulátoru (tedy, opačné hodnoty sil/silových momentů působící na základnu) jsou dány vztahy (3.61, 3.65):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{reac}} &= -M \cdot \ddot{\mathbf{r}} + M \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{M}_{\text{reac}} &= -\dot{\mathbf{k}} + \mathbf{r} \times M \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{k} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i)\end{aligned}\tag{3.66}$$

kde M je výsledná hmotnost manipulátoru, \mathbf{r} je umístění celkového těžiště a \mathbf{k} je celkový moment hybnosti.

Podmínku dynamické rovnováhy lze matematicky formulovat následovně. Manipulátor je dynamicky vyvážen, pokud je vyvážen staticky, tzn. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{Q}) = konst.$, a zároveň zůstává konstantní moment hybnosti $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = konst.$ pro libovolný pohyb manipulátoru. Poté platí, viz (3.66):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{reac}} &= M \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{M}_{\text{reac}} &= -\mathbf{r} \times M \cdot \mathbf{g}, \quad \forall \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (3.67)$$

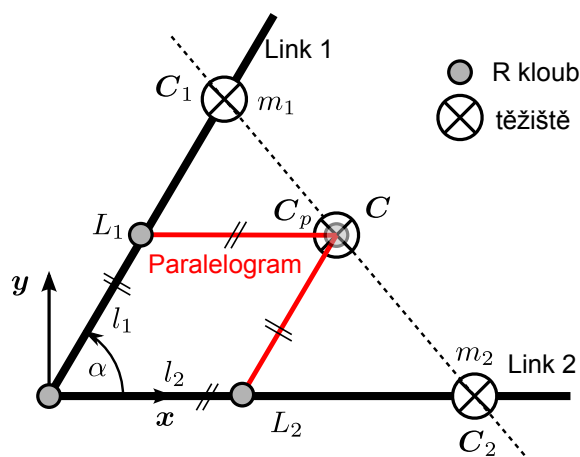
A reakční síla/silový moment působící na podložku zůstává konstantní pro libovolný pohyb manipulátoru (negeneruje vibrace, negeneruje vysoké síly/silové momenty v aktuátorech). Poznamenejme, že statické vyvážení manipulátoru odpovídá vzhledem k dynamickému vyvážení pouze eliminaci reakčních sil (*shaking forces*).

Metoda statického vyvažování sériových manipulátorů na základě přidaných pružin je popsána v [4], kde je ukázáno, že sériový manipulátor lze staticky vyvážit připojením pružiny mezi bod \mathbf{O} ležící na přímce ve směru vektoru gravitačního zrychlení procházející počátkem s.s. základny manipulátoru a bodem \mathbf{C} celkového těžiště manipulátoru získaného prostřednictvím přidaných paralelogramů, viz Poznámka 3.3. Vhodnou volbou tuhosti pružiny k a vzdáleností přípojného bodu ve směru gravitačního zrychlení lze zajistit, že celková potenciální energie manipulátoru je dána pouze potenciální energií pružiny $E = \frac{1}{2}k(\mathbf{OC})^T \cdot \mathbf{OC}$ (proměnnou pro různé polohy manipulátoru v pracovním prostoru). Dále je ukázáno, že vhodným připojením přídavných pružin mezi odpovídající ramena lze získat konstantní hodnotu celkové potenciální energie E . Metoda je demonstrována na 2 DoF resp. 3 DoF sériovém manipulátoru přidáním 2 resp. 4 přídavných pružin. V [22] je metoda dále aplikována na některé průmyslové architektury manipulátorů. V [58] je dále prezentována metoda, která odstraňuje nutnost připojení pružiny k bodu \mathbf{O} (pevně k základně manipulátoru). Pružiny jsou připojovány „podél“ ramen manipulátoru a je tak výrazně omezena možnost jejich vzájemného křížení. Statické a dynamické vyvážení *FBM* na základě přidaných hmotností je formulováno jako nalezení příslušných kinematických a dynamických parametrů včetně citlivostní analýzy v [37, 6, 7]. Přidáním protizávaží na ramena a speciálního paralelogramu do konstrukce Stewartovy platformy je docíleno statické vyvážení manipulátoru v [94]. Odlišný přístup k statickému vyvažování manipulátorů předkládá [81, 82]. Přístup nevyužívá přidávání hmotností ani připojování pružin, ale snaží se změnit kinematické návrhové parametry manipulátoru (v tomto případě umístění kloubů na ramenu manipulátoru) takovým způsobem, aby byla splněna podmínka statického vyvážení. Nevýhodou uvedeného přístupu může být změna pracovního prostoru vlivem změny kinematických parametrů (kritické např. u 1 DoF mechanismů, např. *FBM*, kde je generované trajektorie koncového efektoru zcela závislá na kinematických parametrech a jejich změnu nelze kompenzovat aktuátorem).

Nalezení staticky vyvážených paralelních 3 DoF a 4 DoF paralelních manipulátorů prostřednictvím vhodně přidaných kinematických řetězců a připojených pružin je analyzována v [142, 143]. V [76] jsou ukázány nutné a postačující podmínky (s ohledem na parametry) pro dynamicky vyvážený *FBM* v různém kinematickém uspořádání.

■ Poznámka 3.3 (Přídavný paralelogram - nalezení těžiště)

Demonstrujeme využití přidaného paralelogramu (nehmotného) k nalezení umístění těžiště \mathbf{C} dvou ramen *Link 1*, *Link 2* spojených kloubem typu \mathbf{R} , viz Obrázek 3.10. Vzdálenosti těžišť \mathbf{C}_1 resp. \mathbf{C}_2 od osy rotace kloubu jsou označeny L_1 resp. L_2 s uvažovanými hmotnostmi m_1 resp. m_2 . Přídavný paralelogram je realizován připojením k uvažovaným ramenům *Link 1*, *Link 2* \mathbf{R} klouby a parametrizován délkami svých ramen l_1 , l_2 .



Obrázek 3.10.: Přidaný paralelogram

Hledaný bod těžiště C leží nutně na spojnici těžišť ramen a lze tak vyjádřit jako:

$$C = C_1 + k \cdot (C_2 - C_1), \quad C_1 = \begin{bmatrix} L_1 \cos(\alpha) \\ L_1 \sin(\alpha) \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Parametr k určuje posun hledaného těžiště C po přímce spojující těžiště ramen C_1, C_2 a je tak zřejmě dáno výhradně poměrem hmotností m_1, m_2 jako:

$$k = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

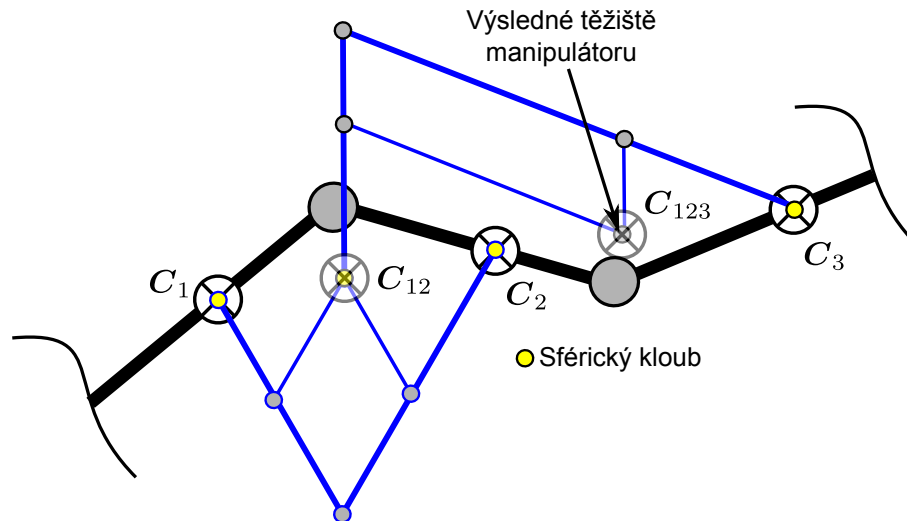
Koncový bod paralelogramu C_p je dán v závislosti na parametrech l_1, l_2 jako:

$$C_p = \begin{bmatrix} l_2 + l_1 \cos(\alpha) \\ l_1 \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Ztotožněním $C = C_p$, tedy porovnáním (3.68) do (3.69), dostáváme hledané parametry paralelogramu:

$$l_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot L_1, \quad l_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot L_2 \quad (3.70)$$

Uvedený přístup lze dále zobecňovat. Uvažujme nyní celý mechanismus znázorněný na Obrázku 3.10 (jako nehmotný) a v bodech C_1, C_2 uvažujme nehmotné sférické klouby (namísto původních těžišť). V takovém případě připojením mechanismu mezi libovolná dvě těžiště ramen manipulátoru těmito sférickými klouby získáváme výsledné těžiště těchto ramen. Připojením dalšího mechanismu mezi nalezené těžiště a těžiště dalšího ramene atd. pak může být nalezeno celkové těžiště sériového manipulátoru, viz Obrázek 3.11. Limitujícím faktorem je však relativně složitá mechanická konstrukce přídavných paralelogramů.



Obrázek 3.11.: Zobecnění pro sériový manipulátor

■

3.3. Statická optimalizace (optimalizace konstantních kinematických parametrů manipulátoru)

V uvedené kapitole se budeme zabývat podrobně tématu již dříve zmíněné *statické optimalizace*. Uvažujme sériový neredundantní manipulátor s n nezávislými aktuátory, jejich poloha je dána kloubovými souřadnicemi $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ a polohu koncového efektoru manipulátoru můžeme vyjádřit m nezávislými zobecněnými souřadnicemi $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$, kde $m = n$. Uvažujme dále, že kinematická architektura manipulátoru lze popsat pomocí D-H úmluvy, viz Kapitola A.2. Všechny D-H parametry nepříslušející kloubovým souřadnicím (včetně parametrů případných konstantních kompenzací polohy základny a koncového efektoru, viz Poznámka A.3) lze zahrnout do vektoru konstantních návrhových kinematických parametrů ξ . Formulace statické optimalizace kinematické architektury manipulátoru je poté dána následovně:

Najdi takové konstantních kinematické návrhové parametry ξ , které minimalizují danou hodnotu skalární kriteriální funkce $J(\xi)$ přes uvažovaný pracovní prostor robotu či přes danou trajektorii jeho koncového efektoru.

Řešení takto definovaného optimalizačního problému se tak rozpadá na následující klíčové body:

3.3.1. Definice pracovního prostoru robotu či jeho restrikce (požadovaná trajektorie koncového efektoru):

Vždy je nutné stanovit prostor (spojitý či diskrétní), přes který bude daná optimalizace probíhat. Tzn. pro danou hodnotu kinematických návrhových parametrů ξ lze vyčíslit hodnotu kriteriální funkce $J(\xi)$ ve všech bodech stanoveného prostoru. Takovým prostorem můžeme rozumět např. spojitou/diskrétní množinu požadovaných poloh koncového efektoru manipulátoru včetně některých specifických požadovaných vlastností v těchto polohách. Speciálním případem potom může být množina uspořádaných vektorů polohy, rychlosti a zrychlení koncového efektoru manipulátoru definující jeho konkrétní trajektorii v pracovním prostoru. Bez újmy na obecnosti označme takovou množinu vektorem \mathbf{X}_{opt} .

★ **Příklad 3.3 (Definice pracovního prostoru robotu pro optimalizaci)**

- Nechť pracovním prostorem robotu pro optimalizaci \mathbf{X}_{opt} rozumíme diskrétní množinu poloh koncového efektoru $\{\mathbf{X}_i = [\mathbf{O}_i \ \mathbf{R}_i]\}$ definovanou jeho pozicí $\mathbf{O}_i \in \mathbb{R}^3$ a orientací (matice rotace) $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ v prostoru, $i = 1 \dots M$.
- Nechť pracovním prostorem robotu pro optimalizaci \mathbf{X}_{opt} rozumíme konkrétní trajektorii koncového efektoru v pracovním prostoru robotu v čase $t = \langle 0, t_f \rangle$. Předpokládáme-li, že takovou trajektorii diskretizujeme s časovým přírůstkem Δt , dostáváme polohy, rychlosti a zrychlení koncového efektoru

$$\{\mathbf{X}_i = [\mathbf{O}_i \ \mathbf{R}_i \ \dot{\mathbf{O}}_i \ \boldsymbol{\omega}_i \ \ddot{\mathbf{O}}_i \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i]\}$$

v každém diskretizovaném čase $t_i = (i - 1) \cdot \Delta t$, $i = 1 \dots M$, $t_f = (M - 1) \cdot \Delta t$, kde $\boldsymbol{\omega}_i$ je vektor úhlové rychlosti koncového efektoru.

Pracovní prostor robotu pro optimalizaci je poté definován jako⁸:

$$\mathbf{X}_{\text{opt}} = \{\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2 \ \dots \ \mathbf{X}_M\}, \quad \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{\text{opt}}\{i\}$$

★

Předpokládejme dále, že pracovní prostor robotu pro optimalizaci bude vždy diskretizován, tzn. nejedná se o spojitou množinu.

3.3.2. Definice kriteriální funkce:

Předpokládejme, že hodnota kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ je pro dané parametry $\boldsymbol{\xi}$ definována ve všech bodech pracovního prostoru $\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}$. V reálných optimalizačních úlohách navíc velmi často vyžadujeme nutnost vložit do vlastní optimalizace některá klíčová omezení, např.: bod \mathbf{X} musí ležet v pracovním prostoru manipulátoru, požadované natočení/vysunutí aktuátorů musí ležet v daném intervalu, vzdálenost určitého bodu manipulátoru od překážky musí být menší/větší než daná konstanta atd. Přesto, že existuje řada metod a algoritmů zabývajících se problematikou optimálních úloh s omezením, použijeme v našem případě metodu penalizací (penalizační funkce), která umožňuje definovaná omezení penalizovat a řešit tak úlohu jako optimalizační úlohu bez omezení, viz Kapitola 3.2.3.

Nechť je kriteriální funkce J pro dané kinematické návrhové parametry $\boldsymbol{\xi}$ v daném bodě pracovního prostoru \mathbf{X} definována následovně:

$$J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{J_{\text{pen}} + J_{\text{obj}}} \in \langle 0, 1 \rangle \quad (3.71)$$

kde

- J je výsledná kriteriální funkce daná jako suma *penalizační funkce* J_{pen} a *účelové funkce* J_{obj} . Za účelem korektní optimalizace je hodnota kriteriální funkce normována na hodnotu v omezeném rozsahu, typicky na interval $\langle 0, 1 \rangle$, kdy hodnota 0 představuje nejhorší případ a hodnota 1 případ optimální.
- J_{pen} je tzv. *penalizační funkce* penalizující daná omezení na optimalizaci parametrů manipulátoru. Užití penalizační

⁸Označení $\mathbf{X}\{i\}$ vyjadřuje výběr i -tého vektoru/matice z příslušné množiny vektorů/matic.

funkce je jednou z možných přístupů k optimálnímu návrhu parametrů s daným omezením, kdy tato daná omezení jsou reprezentována zvolenou penalizací a přičítána k výsledné hodnotě účelové funkce J_{obj} . $J_{\text{pen}} \rightarrow 0$ odpovídá splnění všech předepsaných kritérií, $J_{\text{pen}} \rightarrow +\infty$ odpovídá úplnému porušení všech kritérií. Poznamenejme, že dílčí sčítaná omezení optimalizace mohou být různě vážena (dle nastavených podmínek a potřeb optimalizační úlohy, tzn. vážení nízkými hodnotami koeficientů odpovídá tzv. „měkkým“ omezením, vážení vysokými hodnotami koeficientů odpovídá „tvrdým“ omezením optimalizace).

★ **Příklad 3.4 (Omezení pomocí penalizační funkce)**

Omezení na maximální výsuv lineárních aktuátorů robotu může být dáno vztahem:

$$J_{\text{pen}} = K_1 \cdot P_1 + K_2 \cdot P_2 \quad (3.72)$$

kde

$$P_i = \begin{cases} 0 & \text{pro: } (\|d_i\| - d_i^{\text{max}}) < 0 \\ (\|d_i\| - d_i^{\text{max}}) & \text{pro: } (\|d_i\| - d_i^{\text{max}}) \geq 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2$$

a d_i jsou aktuální hodnoty kloubových souřadnic výsuvů lineárních aktuátorů pro dané umístění koncového efektoru do bodu \mathbf{X} v pracovním prostoru, d_i^{max} jsou maximální povolená vysunutí aktuátorů a $K_i > 0$ jsou příslušné penalizační konstanty. ★

- J_{obj} je tzv. *účelová funkce* zohledňující požadované vlastnosti manipulátoru, které mají být optimalizovány. J_{obj} vyjadřuje míru optimality dle zvoleného hlediska, $J_{\text{obj}} \rightarrow 0$ odpovídá optimálnímu případu (hodnota účelové funkce je minimální možná), $J_{\text{obj}} \rightarrow +\infty$ odpovídá nejvíce vzdálenému případu od optimálního.

★ **Příklad 3.5 (Účelová funkce)**

Předpokládejme, že kritériem optimality manipulátoru bude minimalizovat výsledné síly/silové momenty v aktuátorech, účelová funkce může být volena následovně:

$$J_{\text{obj}} = \tau_1^2 + \tau_2^2 \quad (3.73)$$

kde τ_i představují hodnoty sil/silových momentů v aktivních kloubech manipulátoru pro dané umístění koncového efektoru do bodu \mathbf{X} v pracovním prostoru. ★

3.3.3. Definice přípustné množiny kinematických návrhových parametrů:

Vždy je vhodné definovat přípustnou množinu kinematických návrhových parametrů Ξ , kde $\xi \in \Xi$. Přípustná množina parametrů může být opět definována ve spojitě či diskrétní podobě a může být neomezená a omezená.

3.3.4. Definice optimalizační úlohy

Nyní je třeba definovat samotnou optimalizační úlohu. V našem případě předpokládejme, že požadujeme maximalizovat minimální hodnotu kritériální funkce $J(\mathbf{X}, \xi)$ podél celého pracovního prostoru pro optimalizaci $\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}$, tedy úlohu lze chápat jako *maxmin* problém:

$$J^* = \max_{\xi \in \Xi} \left(\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} J(\mathbf{X}, \xi) \right) \quad (3.74)$$

$$\xi^* = \operatorname{argmax}_{\xi \in \Xi} \left(\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} J(\mathbf{X}, \xi) \right) \quad (3.75)$$

kde Ξ je přípustná množina kinematických návrhových parametrů manipulátoru, J^* je optimální hodnota kritériální funkce pro nalezenou optimální sadu parametrů ξ^* .

Tedy hledáme takové parametry ξ pro které platí, že minimální hodnota kritériální funkce $J(\mathbf{X}, \xi)$ podél celého uvažovaného prostoru \mathbf{X}_{opt} je maximalizována. Jinými slovy, maximální hodnota součtu penalizační a účelové funkce podél celého uvažovaného prostoru \mathbf{X}_{opt} je minimalizována, a tedy je nejlépe eliminován nejhorší případ (ve smyslu kritéria optimality) přes celý pracovní prostor.

Poznamenejme, že lze volit i jiná kritéria než minimum pro ohodnocení prostoru \mathbf{X}_{opt} , např. průměrnou hodnotu atd. Často však požadujeme optimalizovat (maximalizovat) právě nejhorší možný případ (nejnižší hodnotu kritériální funkce) podél prostoru \mathbf{X}_{opt} .

3.3.5. Metody řešení optimalizační úlohy

Vzhledem k faktu, že kritériální funkcí optimalizační úlohy je často velmi komplikovaná nelineární transcendentní funkce, připadají v úvahu aproximační gradientních algoritmy či negradientních algoritmy (metody přímého prohledávání, heuristické metody), viz Kapitola 3.2.2. Vzhledem ke zkušenostem s reálnými problémy při návrhu a optimalizaci robotických architektur, viz Kapitola 1.3, (především s ohledem na rychlost a robustnost řešení optimalizační úlohy) je rozumné problém rozdělit na dva základní případy, a to **globální optimalizaci** a **lokální optimalizaci**.

3.3.5.1. Globální optimalizace

V případě globální optimalizace se snažíme (většinou v omezeném prostoru hledaných řešení - množina přípustných hodnot kinematických návrhových parametrů Ξ) najít globální optimum. Bohužel nalezení globálního optima kritériální funkce je v obecném případě velmi komplikované. Omezme se proto, obdobně jako v případě množiny \mathbf{X}_{opt} , na diskretizaci prohledávaného prostoru přípustných řešení Ξ :

$$\Xi = \{\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_N\}, \quad \xi_i = \Xi\{i\} \quad (3.76)$$

Cílem globálního optimalizačního algoritmu je tedy nalézt takovou příslušnou sadu diskretizovaných kinematických návrhových parametrů $\xi^* = \Xi\{i^*\}$, $i^* \in \{1, 2, \dots, N\}$, respektive příslušný index i^* , pro který platí, že minimum hodnoty kritériální funkce J přes všechny diskrétní hodnoty pracovního prostoru $\mathbf{X}_{\text{opt}}\{j\}$, $j = 1 \dots M$, je maximální, viz rovnice (3.74, 3.75). Takto definovanou úlohu lze řešit vždy samozřejmě hrubou silou, tedy následovně:

♦ Algoritmus 3.1 (Algoritmus řešení globální optimalizační úlohy hrubou silou)

- Definuj předpis pro výpočet kritériální funkce $J(\mathbf{X}, \xi)$ závislé na optimalizovaných kinematických návrhových parametrech ξ a zobecněných souřadnicích \mathbf{X} koncového efektoru manipulátoru.
- Definuj diskretizaci pracovního prostoru manipulátoru ve smyslu množiny \mathbf{X}_{opt} jako M diskrétních hodnot zobecněných souřadnic $\mathbf{X}_i \in \mathbf{X}_{\text{opt}}$, $i = 1 \dots M$.

- Definuj diskretizaci přípustných hodnot dílčích kinematických návrhových parametrů ve smyslu množiny Ξ jako N diskrétních hodnot přípustných kinematických návrhových parametrů manipulátoru $\xi_i \in \Xi, i = 1 \dots N$.
- Pro každou sadu parametrů $\xi = \Xi\{i\}, i = 1 \dots N$ vyčíslí hodnotu kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \xi)$ pro všechny diskretizované polohy koncového efektoru $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{opt}}\{j\}, j = 1 \dots M$, dostáváme tedy množinu hodnot vyčíslené kriteriální funkce, kterou lze reprezentovat maticí:

$$\mathbf{J}_{\text{val}} = \begin{bmatrix} J(\mathbf{X}\{1\}, \xi\{1\}) & J(\mathbf{X}\{1\}, \xi\{2\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{1\}, \xi\{i\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{1\}, \xi\{N\}) \\ J(\mathbf{X}\{2\}, \xi\{1\}) & J(\mathbf{X}\{2\}, \xi\{2\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{2\}, \xi\{i\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{2\}, \xi\{N\}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ J(\mathbf{X}\{j\}, \xi\{1\}) & J(\mathbf{X}\{j\}, \xi\{2\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{j\}, \xi\{i\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{j\}, \xi\{N\}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ J(\mathbf{X}\{M\}, \xi\{1\}) & J(\mathbf{X}\{M\}, \xi\{2\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{M\}, \xi\{i\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{M\}, \xi\{N\}) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

A optimalizační úlohu lze potom uvažovat ve tvaru:

$$\mathbf{J}^*(\mathbf{X}, \xi^*) = \max_{i=1 \dots N} \left(\min_{j=1 \dots M} \mathbf{J}_{\text{val}}(j, i) \right) \quad (3.78)$$

$$i^* = \operatorname{argmax}_{i=1 \dots N} \left(\min_{j=1 \dots M} \mathbf{J}_{\text{val}}(j, i) \right) \quad (3.79)$$

$$\xi^* = \Xi\{i^*\} \quad (3.80)$$

◆

Výpočet řešení globální optimalizační úlohy hrubou silou sice přináší nalezení globálního řešení (v rámci použité diskretizace pracovního prostoru a prostoru přípustných kinematických návrhových parametrů), nicméně výpočetní náročnost algoritmu je velmi vysoká, viz Příklad 3.6, neboť celkový počet $N_{\text{critFunEval}}$ vyčíslení hodnot kriteriální funkce a odpovídající potřebný čas $T_{\text{critFunEval}}$ je dán jako:

$$\begin{aligned} N_{\text{critFunEval}} &= N \cdot M \\ T_{\text{critFunEval}} &= N_{\text{critFunEval}} \cdot t_{\text{critFunEval}} \end{aligned} \quad (3.81)$$

kde $t_{\text{critFunEval}}$ je průměrná doba potřebná k vyčíslení hodnoty kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \xi)$.

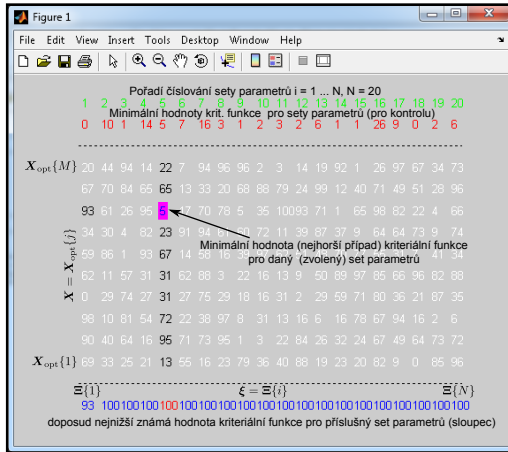
Právě výpočetní náročnost je zásadním problémem diskrétních globálních optimalizačních algoritmů. Pro zefektivnění prohledávání stavového prostoru při řešení úlohy *maxmin* (či ekvivalentně *minmax*) lze s výhodou použít metody prořezávání, kdy jednoznačně apriori neoptimální podmnožiny prohledávaného prostoru přípustných kinematických návrhových parametrů jsou z algoritmu explicitně vyřazeny. Takovým prořezáváním nedochází ke ztrátě globálního optima, ale výpočetní náročnost (ve smyslu potřebného počtu vyčíslení hodnot kriteriální funkce) může být výrazně snížena. Jedním takových algoritmů prořezávání je na př. tzv. **Culling algorithm**, inspirovaný prací [2, 112].

◆ **Algoritmus 3.2 (Culling algoritmus pro globální prohledávání - úloha *maxmin*)**

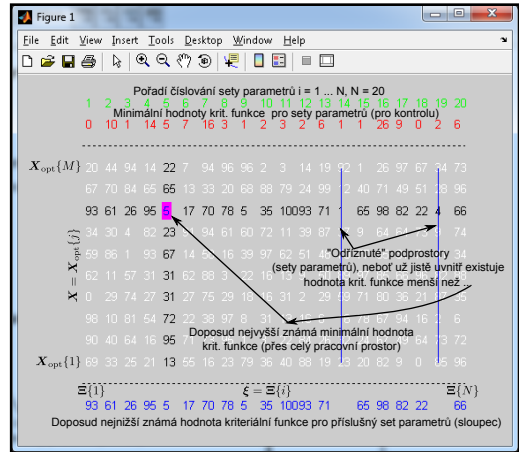
Pro grafické znázornění algoritmu uvažujme, že ve všech dále uvedených souvisejících obrázcích zobrazujeme matici \mathbf{J}_{val} s některými zavedenými přídatnými identifikátory. Předpokládejme v tomto případě, že hodnota kriteriální funkce nabývá celočíselné hodnoty od 0 do $+\infty$. Počet sad přípustných návrhových kinematických parametrů je $N = 20$ a počet prohledávaných diskretizovaných bodů pracovního prostoru $M = 10$.

1. Algoritmus začíná výběrem libovolné sady (sloupce) parametrů ξ (ideálním výběrem je taková sada, která je nejbližší optimu - má maximální hodnotu minima kriteriální funkce přes všechny body v pracovním prostoru). Dále je vyčíslena hodnota kriteriální funkce pro všechny odpovídající body pracovního prostoru (řádky), viz Obrázek 3.12(a) a nalezena minimální hodnota kriteriální funkce odpovídající nejhoršímu bodu v pracovním prostoru pro vybranou sadu parametrů (fialově zvýrazněná hodnota).
2. V odpovídajícím bodě pracovního prostoru (řádku) je vyčíslena hodnota kriteriální funkce pro všechny ostatní sady parametrů (sloupce) a aktualizovány hodnoty doposud nejhoršího (nejnižšího) známého případu hodnoty kriteriální funkce pro sady prohledávaných parametrů (spodní modrý řádek hodnot, je-li vypočtená hodnota kriteriální funkce v příslušném řádku nižší - aktualizuj hodnotu v modrém řádku). Nastane-li situace, že je hodnota kriteriální funkce v aktuálně počítaném řádku (resp. v modrém řádku doposud nejhoršího známého případu) nižší (horší) než aktuální minimální hodnota nalezená pro vybranou sadu parametrů přes všechny body v pracovním prostoru (vyznačená fialová hodnota), je celý příslušný sloupec (sada parametrů) vyřazen (odříznut) (neboť již zcela jistě existuje sloupec (sada parametrů), kde je minimální hodnota kriteriální funkce větší), viz Obrázek 3.12(b).
3. Z řádku hodnot doposud nejhoršího známého případu hodnoty kriteriální funkce je vybrán sloupec s největší hodnotou (potenciální kandidát na optimální sadu parametrů - minimální hodnota kriteriální funkce přes pracovní prostor je maximalizována). Opět je vyčíslena hodnota kriteriální funkce pro všechny odpovídající body pracovního prostoru (řádky) a vybrána minimální hodnota, pokud je tato hodnota větší než doposud nejvyšší známá hodnota (fialově vyznačená), dojde k nahrazení této původní hodnoty hodnotou novou (přeznačení fialového zvýraznění) a algoritmus pokračuje řádkem 2, viz Obrázek 3.12(d).
4. Algoritmus pokračuje až do chvíle nalezení optimální sady parametrů (s maximální možným minimem hodnoty kriteriální funkce přes celý pracovní prostor), viz Obrázek 3.12(e). Černě vyznačené hodnoty v matici \mathbf{J}_{val} jsou hodnoty kriteriální funkce $\mathbf{J}(\mathbf{X}, \xi)$, které musely být během algoritmu vyčísleny.

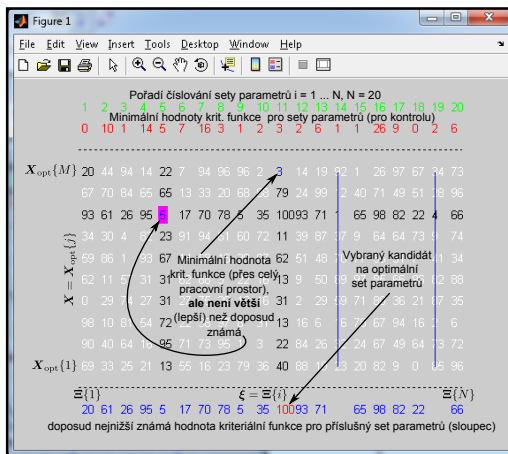
V uvedeném příkladu musela být vyčíslena kriteriální funkce ve 97 případech z celkově možných 200 ($N_{\text{critFunEval}} = N \cdot M = 200$, pokud bychom úlohu řešili algoritmem hrubé síly, viz (3.81)), což odpovídá přibližně dvojnásobku úspory výpočetního času (při zvážení pouze operací vyčíslování kriteriální funkce - což bývá v úlohách optimalizace kritické i s ohledem na předpoklad, že může být někdy vyčíslení kriteriální funkce realizováno spuštěním komplexní simulace např. v SimMechanics) oproti řešení algoritmem hrubé síly, viz Algoritmus 3.1.



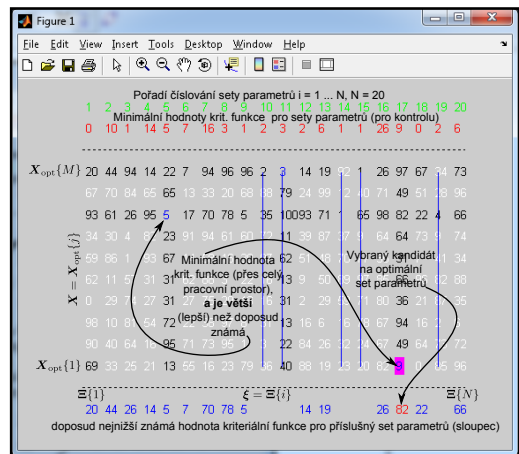
(a) 1. krok algoritmu



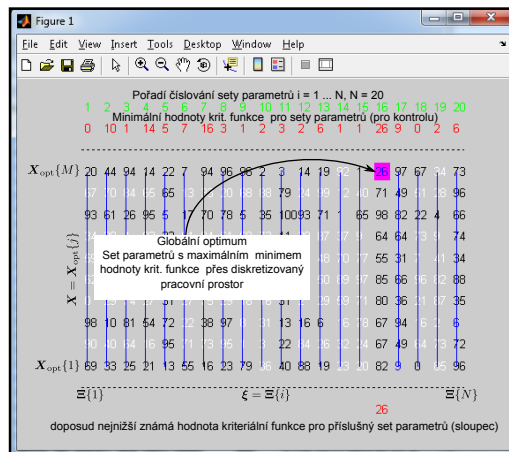
(b) 2. krok algoritmu



(c) 3. krok algoritmu



(d) 4. krok algoritmu (zlepšení doposud známého optima)



(e) x. krok algoritmu

Obrázek 3.12.: Culling algoritmus globální optimalizace (sada = set)

Uvažovaný algoritmus může být matematicky zapsán následovně:

Formulace optimalizační úlohy:

$$\begin{aligned} \xi^* &= \operatorname{argmax}_{\xi \in \Xi} \left(\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} J(\mathbf{X}, \xi) \right) \\ \xi^* &= \operatorname{argmax}_{\xi \in \Xi} \Psi(\xi), \quad \Psi(\xi) = \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} J(\mathbf{X}, \xi), \quad J(\mathbf{X}, \xi) \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned} \quad (3.82)$$

Inicializace:

- $i = 0$
- $\mathbf{P}_0 = \Xi$ počáteční množina sad přípustných parametrů, viz (3.76)
- $\mathbf{S}_0(\xi) = 1$, $\xi = \Xi\{i\}$, $i = 1 \dots N \Rightarrow \mathbf{S}_0 = [1, 1, \dots, 1]$, kde \mathbf{S}_0 reprezentuje dosud nejnižší známou hodnotu kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \xi)$ pro všechny přípustné sady parametrů.
- $\xi^0 = \hat{\xi}^0 = \Xi\{i\}$, pro libovolné zvolené $i \in [1, 2, \dots, N]$, kde ξ^0 je počáteční vybraná sada parametrů a $\hat{\xi}^0$ je poslední, doposud nejlepší, známý kandidát na optimální sadu parametrů ξ^* . Poznamenejme, že volbou počáteční sady parametrů můžeme výrazně ovlivnit rychlost konvergence algoritmu.

Cyklus:

1. Nalezení bodu $\mathbf{X}_i \in \mathbf{X}_{\text{opt}}$ s minimální hodnotou kriteriální funkce pro danou sadu parametrů:

$$\mathbf{X}_i = \operatorname{argmin}_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi^i))$$

2. Aktualizace kandidáta $\hat{\xi}^{i+1}$ na optimální sadu parametrů:

$$\hat{\xi}^{i+1} = \begin{cases} \xi^i & \text{pokud } \Psi(\xi^i) > \Psi(\hat{\xi}^i) \\ \hat{\xi}^i & \text{jinak} \end{cases}$$

3. Aktualizace (nalezení) nejnižší doposud známé hodnoty kriteriální funkce J pro sady parametrů (v poloze \mathbf{X}_i - opt. poloha pro aktuální sadu parametrů ξ^i):

$$\mathbf{S}_{i+1} = \left[\min_{\xi \in \mathbf{P}_i\{1\}} \{\mathbf{S}_i(\xi), J(\mathbf{X}_i, \xi)\}, \min_{\xi \in \mathbf{P}_i\{2\}} \{\mathbf{S}_i(\xi), J(\mathbf{X}_i, \xi)\}, \dots \right]$$

4. „Uřezání“ apriori neoptimálních sad parametrů:

$$\mathbf{P}_{i+1} = \{\xi \in \mathbf{P}_i, \mathbf{S}_{i+1}(\xi) \geq \Psi(\hat{\xi}^{i+1})\}$$

Neboli jsou odříznuty (vypuštěny) z množiny \mathbf{P} všechny sady parametrů, jejichž dosud známá minimální hodnota kriteriální funkce (uložená v \mathbf{S}) je menší než hodnota kriteriální funkce pro současného kandidáta na optimální sadu parametrů.

5. Výběr potenciálně nejvhodnější sady parametrů z doposud známých:

$$\xi^{i+1} = \operatorname{argmax}_{\xi \in \mathbf{P}_{i+1}} (\mathbf{S}_{i+1}(\xi))$$

6. $i = i + 1$ a pokračuj bodem 1.

7. Po konečně krocích iterací zbývá v \mathbf{P} pouze globální optimální sada parametrů $\boldsymbol{\xi}^*$.

Při řešení praktických optimalizačních úloh je někdy výhodné znát ještě následující, tzn. v pořadí 2., 3. atd. „globální optimum“ (optimální sadu parametrů). Hlavním důvodem je možnost spuštění některých lokálních optimalizačních algoritmů, viz Kapitola 3.3.5.2, právě z počátečních podmínek odpovídající „globálnímu optimu“ (a analyzovat konvergenci s ohledem na použitou diskretizaci přípustné množiny kinematických návrhových parametrů globálního algoritmu). Základní popsany algoritmus byl proto dále v rámci předložené práce rozšířen pro nalezení 2., 3. atd. „globálního optima“. Principiálně lze takovou modifikaci popsat následovně:

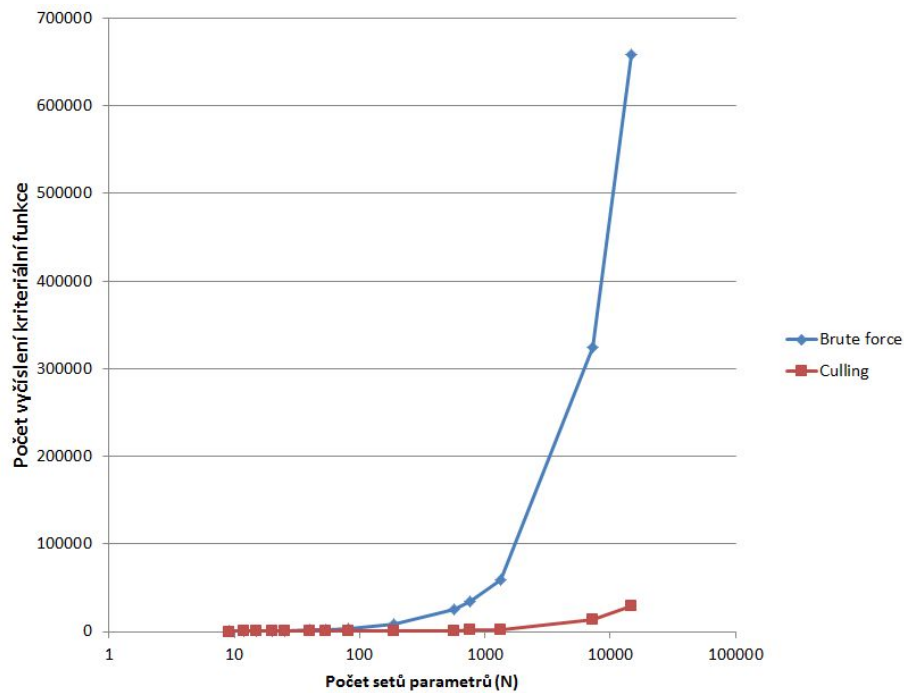
- Globálně se uchovává stav horního odhadu \mathbf{S} hodnoty kriteriální funkce pro dané sady parametrů (viz bod 3 základního algoritmu).
- Proveďte se jeden cyklus základního algoritmu \Rightarrow nalezena (1.) globální optimální sada parametrů.
- Nalezne se okamžik (viz bod 4 základního algoritmu), kdy začalo „vyřezávat“ 1. globální optimum, tzn. v \mathbf{P} určitě zůstalo 2. globální optimum (nemělo ho co vyříznot).
- Spuštění základního algoritmu s takovým zapamatovaným \mathbf{S} a \mathbf{P} (s vysokou pravděpodobností už částečně prořezáno) \Rightarrow nalezena 2. globální optimální sada parametrů.
- Analogicky lze pokračovat pro další hledaná optima.



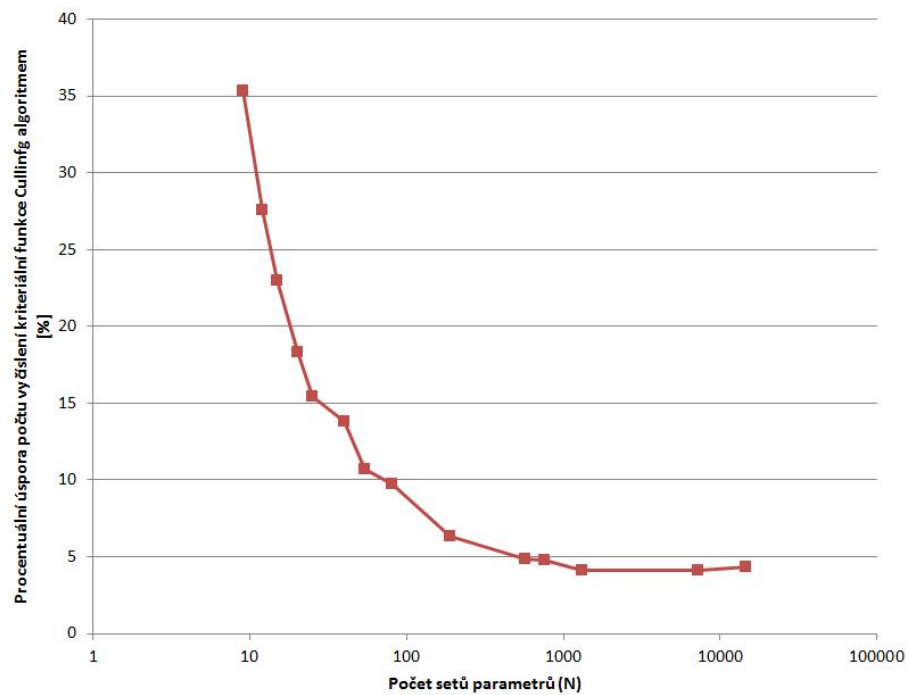
Demonstrační příklad k implementaci Culling algoritmu a jeho rozšíření lze nalézt v knihovně **robotLib** [137].

Výpočetní náročnost Culling algoritmu

V porovnání s Algoritmem 3.1 hrubé síly je Culling Algoritmus 3.2 ve smyslu počtu potřebných vyčíslení hodnoty kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ výrazně méně výpočetně náročný. Tento fakt je bezpochyby dán systémem prořezávání, kdy velká část sad kinematických návrhových parametrů je vyřezána (vypuštěna) dříve, než je hodnota kriteriální funkce vyčíslena pro tuto sadu ve všech bodech uvažovaného prostoru \mathbf{X}_{opt} pro optimalizaci. Culling algoritmus je samozřejmě závislý na počáteční volbě sady parametrů $\boldsymbol{\xi}^0$. Jeho vhodná volba (ve smyslu co možná nejlepší - největší hodnoty kriteriální funkce přes uvažovaný prostor optimalizace) může dramaticky zvýšit efektivnost algoritmu z důvodu velkého vypuštění (prořezání) apriori neoptimálních sad parametrů již při prvních průchodech algoritmu. Na Obrázku 3.13 je znázorněno porovnání vzhledem k potřebnému vyčíslení kriteriální funkce J mezi algoritmem hrubé síly a Culling algoritmem (data jsou čerpána z optimalizace uvedené v Příkladu 3.6).



(a) Porovnání počtu potřebného vyčíslení kritériální funkce



(b) Procentuální vyjádření potřebných vyčíslení kritériální funkce $\left(\frac{N_{critFunEval}^{Culling}}{N_{critFunEval}^{BruteForce}} \cdot 100 \right)$

Obrázek 3.13.: Porovnání výpočetní náročnosti globální optimalizace hrubou silou a Culling algoritmem (počet diskretizovaných bodů v prostoru pro optimalizaci $M = 45$)

Vlastnosti Culling algoritmu globální optimalizace

Shrňme zásadní výhody a nevýhody předloženého algoritmu globální optimalizace:

- + Globální prohledávání diskretizovaného přípustného prostoru kinematických parametrů (nalezení **globálního** optima)
- + Markantní úspora výpočetního času daného zejména dobou výpočtu hodnoty kriteriální funkce (ve srovnání s algoritmem hrubé síly, viz Obrázek 3.13)
- + Nativně jsou vložena omezení na přípustné sady kinematických návrhových parametrů (horní/dolní omezení rozsahu prohledávaných návrhových parametrů)
- + Algoritmus lze rozšířit pro nalezení 2., 3., ... „globálního optima“ (možnost spuštění následné lokální optimalizace z „optimálních“ počátečních podmínek)
- + Diskretizace množiny přípustných kinematických návrhových parametrů, resp. příslušné uvažované diference, můžou nativně reprezentovat minimální akceptovatelné rozlišení parametrů s ohledem na konstrukční/výrobní limitace (např. diskretizace délkových rozměrů ramen může být volena s ohledem na jejich maximální možnou přesnost výroby)
- I přes efektivnost algoritmu v porovnání s algoritmem hrubé síly pro rostoucí zjemňování diskretizace přípustné množiny optimalizovaných kinematických parametrů a pracovního prostoru velmi rychle roste počet potřebných vyčíslení kriteriální funkce (a tedy i potřebný výpočetní čas)

3.3.5.2. Lokální optimalizace

Lokální optimalizace navazuje na optimalizaci globální ve smyslu jejího dalšího zpřesnění. Obecně můžeme předpokládat, že výše uvedená globální optimalizace nalezne globální optimum s následujícími omezeními:

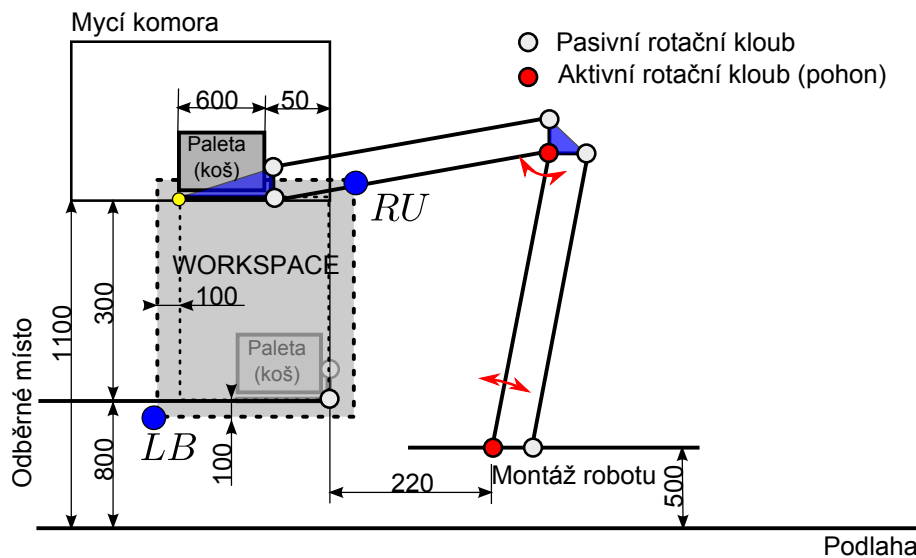
- Hodnoty kriteriální funkce jsou vyčísleny pouze v izolovaných (diskretizovaných) bodech pracovního prostoru, tzn.: není garantováno chování manipulátoru v kontinuu uvažovaného pracovního prostoru. Poznamenejme, že tento fakt nebude dále řešen ani algoritmy lokální optimalizace.
- Přípustné prohledávané sady (prostor) kinematických návrhových parametrů jsou dány opět množinou izolovaných (diskretizovaných) vektorů, tzn. mezi dvěma diskretizovanými hodnotami může existovat lepší řešení. Právě tento problém lze efektivně řešit právě nasazením algoritmů lokální optimalizace (vzhledem k uvažované hledané sadě kinematických návrhových parametrů).

Důležitou vlastností lokální optimalizace je však fakt, že v podstatě žádný standardní algoritmus negarantuje nalezení globálního optima. V drtivé většině případů se jedná o algoritmy založené na principech, které jsou stručně shrnuty v Kapitole 3.2.2 (uvažujme v našem případě výhradně algoritmy bez omezení, omezení jsou vložena prostřednictvím penalizací). V případě statické optimalizace kinematických parametrů manipulátoru je lokální optimalizace spuštěna z počátečních podmínek odpovídajícím optimálnímu nalezenému řešení získané algoritmem globální optimalizace z Kapitoly 3.3.5.1. Předpokládáme, že globální nalezené optimum je tak dále zpřesněno lokální optimalizací.

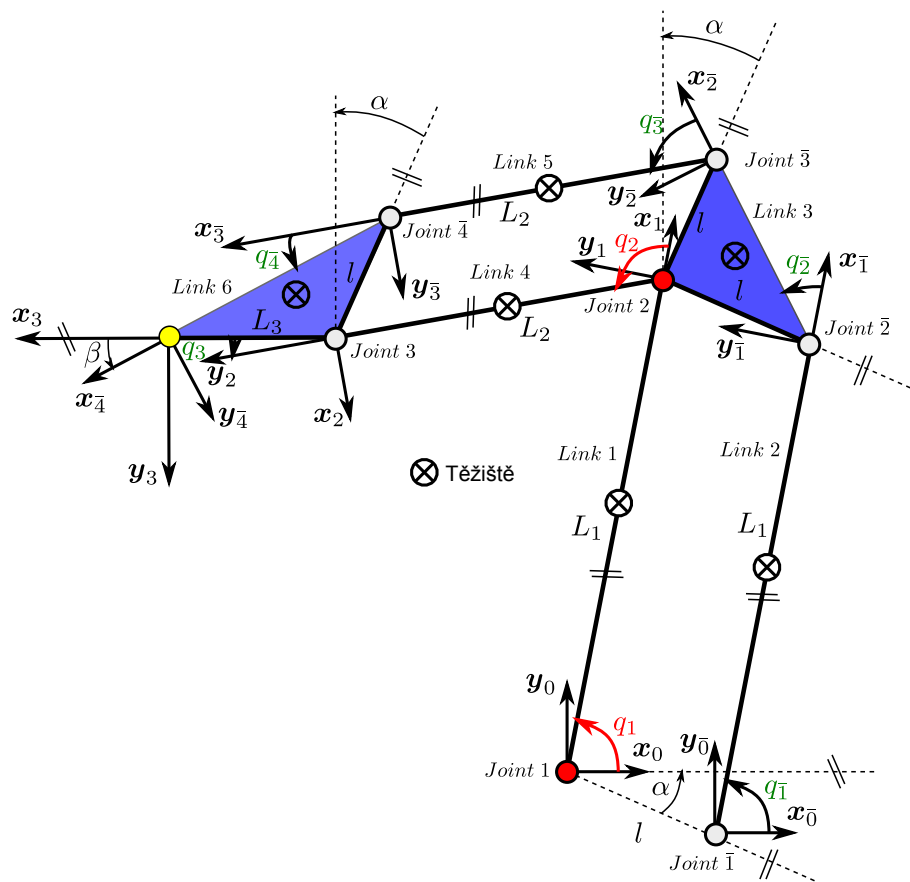
★ Příklad 3.6 (Optimální návrh kin. parametrů zakladače)

Předložený algoritmus statické optimalizace je demonstrován na vlastním příkladu optimalizace rozměrů vyvíjeného paralelního manipulátoru použitého pro zakládání palet (košů) s technologickými díly do mycích komor průmyslových odmašťovacích/odlakovacích linek, jehož kinematická architektura byla autorem vyvinuta v rámci řešených projektů, viz Kapitola 1.3. Jedná se o planární paralelní manipulátor se dvěma DoF koncového efektoru a

se dvěma nezávislými rotačními aktuátory. Paralelní struktura manipulátoru je formulována paralelogramem, který zajišťuje konstantní rotaci koncového efektoru manipulátoru ve vodorovné poloze. Schématické znázornění manipulátoru je patrné z Obrázku 3.14.



Obrázek 3.14.: Schématické uspořádání manipulátoru (definice pracovního prostoru pro optimalizaci)



Obrázek 3.15.: Kinematické uspořádání manipulátoru včetně zavedení odpovídajících s.s. ramen

Kinematická struktura manipulátoru je tvořena uzavřeným kinematickým řetězcem. Za účelem kinematické a dynamické analýzy manipulátoru je vhodné tento paralelní kinematický řetězec dekomponovat na dva sériové kinematické řetězce vhodným fiktivním rozpojením. Zároveň využijeme D-H úmluvu, viz Kapitola A.2, pro definici s.s. jednotlivých ramen manipulátoru, viz Obrázek 3.15. Kinematickou strukturu manipulátoru lze tak vyjádřit ve smyslu otevřených kinematických řetězců jako:

- Kinematický řetězec: *Chain 1*

Tvořené rameny: *Link 1*, *Link 4*, *Link 6* s aktivními klouby (pohony) *Joint 1*, *2* (kloubové souřadnice q_1 , q_2) a pasivním kloubem *Joint 3* (kloubová souřadnice q_3)

D-H parametry kinematického řetězce *Chain 1* jsou dány v Tabulce 3.1.

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	L_1	0
2	0	q_2	L_2	0
3	0	q_3	L_3	0

Tabulka 3.1.: D-H parametry sériové řetězce *Chain 1*

- Kinematický řetězec: *Chain 2*

Tvořené rameny: *Link 2*, *Link 3*, *Link 5* s pasivními klouby *Joint 1*, *2*, *3*, *4* (kloubové souřadnice q_1 , q_2 , q_3 , q_4)

D-H parametry kinematického řetězce *Chain 2* jsou dány v Tabulce 3.2.

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	L_1	0
2	0	q_2	$l\sqrt{2}$	0
3	0	q_3	L_2	0
4	0	q_4	L	0

Tabulka 3.2.: D-H parametry sériové řetězce *Chain 2*

kde L lze z geometrie *Link 6* psát jako (kosínová věta): $L = \sqrt{L_3^2 + l^2 - 2L_3l \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$.

Každé rameno manipulátoru má nyní přiřazen pevný (nepohyblivý, s ramenem pevně spojený) s.s. následovně:

Link 1 s.s. F_1
Link 2 s.s. F_1
Link 3 s.s. F_2
Link 4 s.s. F_2
Link 5 s.s. F_3
Link 6 s.s. F_3

Uzavřením kinematických řetězců *Chain 1* a *Chain 2* (v s.s. koncového efektoru F_3 a v s.s. F_1 ramene *Link 1*) vzniká uzavřený kinematický řetězec, který reprezentuje modelovaný manipulátor. Pro korektní uzavření sériových kinematických řetězců je však nutné ztožnit s.s. základny (F_0) a koncového efektoru (F_3) těchto dílčích kinematických řetězců. V případě kinematického řetězce *Chain 1* tedy nebudeme uvažovat žádné transformace polohy základny a koncového efektoru, zatímco v případě kinematického řetězce *Chain 2* uvažujeme kompenzaci polohy základny $F_0 \rightarrow F_0$ a koncového efektoru $F_4 \rightarrow F_3$.

Vyjádříme-li tedy transformace mezi jednotlivými s.s. v dílčích sériových kinematických řetězcích prostřednictvím homogenních transformačních matic \mathbf{T}_i^{i-1} , dostáváme:

- Pro *Chain 1*:

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_1^0(q_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(q_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(q_3) \quad (3.83)$$

Kloubové souřadnice *Chain 1*:

$$\mathbf{Q}_{\text{Chain1}} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (3.84)$$

- Pro *Chain 2*:

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_0^0 \cdot \mathbf{T}_{\bar{1}}^0(q_{\bar{1}}) \cdot \mathbf{T}_{\bar{2}}^1(q_{\bar{2}}) \cdot \mathbf{T}_{\bar{3}}^2(q_{\bar{3}}) \cdot \mathbf{T}_{\bar{4}}^3(q_{\bar{4}}) \cdot \mathbf{T}_{\bar{3}}^{\bar{4}} \quad (3.85)$$

kde homogenní transformační matice kompenzace polohy základny \mathbf{T}_0^0 a koncového efektoru $\mathbf{T}_{\bar{3}}^{\bar{4}}$ jsou dány jako:

$$\mathbf{T}_0^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & l \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{\bar{3}}^{\bar{4}} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & \sin(-\beta) & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

kde $\beta = \arcsin\left(\frac{l \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{L}\right)$.

Kloubové souřadnice *Chain 2*:

$$\mathbf{Q}_{\text{Chain2}} = [q_{\bar{1}} \quad q_{\bar{2}} \quad q_{\bar{3}} \quad q_{\bar{4}}]^T \quad (3.87)$$

Homogenní transformace \mathbf{T}_i^{i-1} pro $i = \{1, 2, 3, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ mezi s.s. jsou dány z D-H parametrů, viz Tabulky 3.1, 3.2 dle obecného předpisu definovaného D-H úmluvou:

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{q_i} & -s_{q_i} c_{\alpha_i} & s_{q_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{q_i} \\ s_{q_i} & c_{q_i} c_{\alpha_i} & -c_{q_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{q_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

kde $s_{\star} = \sin(\star)$, $c_{\star} = \cos(\star)$.

Pasivní \mathbf{Q}_p , aktivní \mathbf{Q}_a a celkové \mathbf{Q} kloubové souřadnice manipulátoru jsou dány jako:

$$\mathbf{Q}_p = [q_3 \quad q_{\bar{1}} \quad q_{\bar{2}} \quad q_{\bar{3}} \quad q_{\bar{4}}]^T, \quad \mathbf{Q}_a = [q_1 \quad q_2]^T, \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_a^T \quad \mathbf{Q}_p^T]^T \quad (3.89)$$

Zobecněné souřadnice manipulátoru (řízené souřadnice v pracovním prostoru manipulátoru) jsou dány jako:

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}_3^0[1:2] = [x \quad y]^T \quad (3.90)$$

Návrhové kinematické parametry manipulátoru jsou dány jako:

$$\boldsymbol{\xi} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad l \quad \alpha]^T \quad (3.91)$$

Dynamické parametry manipulátoru:

Dynamickými parametry manipulátoru rozumíme takové parametry, která ovlivňují dynamické chování manipulátoru, typicky jsou jimi hmotnosti, umístění těžiště a tensor setrvačnosti vzhledem k s.s. těžiště jednotlivých ramen. V uvažovaném modelovém případě

manipulátoru je zřejmé, že jsou tyto parametry přímo závislé na parametrech kinematických ξ . Závislosti mezi dynamickými μ a kinematickými ξ parametry jsou plně určeny zvolenou geometrií ramen případně dalšími materiálovými vlastnostmi. Uvažujme, že ramena manipulátoru jsou realizována jako plné tyče o poloměru r_1 pro *Link* 1, 4 a poloměru r_2 pro ramena *Link* 2, 5. Ramena *Link* 3 resp. *Link* 6 jsou realizována jako příslušné trojúhelníky tloušťky r_2 resp. r_1 . Hustota materiálu všech ramen je dána hodnotou ρ . Vektor gravitačního zrychlení je neměnný ve tvaru $[0 \ -9.81 \ 0]^T$ vzhledem k s.s. F_0 . Dále uvažujme, že v těžišti posledního ramene (koncového efektoru) *Link* 6 je umístěna přidaná hmotnost (břemeno) daná hmotným bodem o hmotnosti M . Hmotnost prvního pohonu *Joint* 1 je bezvýznamná (pohon umístěn nepohyblivě na základně manipulátoru), zatímco hmotnost druhého pohonu *Joint* 2 je dána hodnotou M_{mot} . Výsledná dynamická parametry jsou tedy dány jako:

$$\boldsymbol{\mu} = [r_1 \ r_2 \ \rho \ M \ M_{\text{mot}}]^T \quad (3.92)$$

Hmotnosti ramen:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{1_{\text{link}}} + M_{\text{mot}}, \quad m_{1_{\text{link}}} = \pi r_1^2 L_1 \rho \\ m_2 &= \pi r_2^2 L_1 \rho \\ m_3 &= 0.5l^2 r_2 \rho \\ m_4 &= \pi r_1^2 L_2 \rho \\ m_5 &= \pi r_2^2 L_2 \rho \\ m_6 &= 0.5L_3 l \cos(\alpha) r_1 \rho + M \end{aligned} \quad (3.93)$$

Umístění těžišť ramen (vzhledem k s.s. příslušného ramena, viz předchozí přiřazený vztahů s.s.):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \frac{m_{1_{\text{link}}}}{m_1} \mathbf{T}_{1_{\text{link}}}, \quad \mathbf{T}_{1_{\text{link}}} = [-0.5L_1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{T}_2 &= [-0.5L_1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{T}_3 &= \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}l \ \frac{\sqrt{2}}{6}l \ 0 \right]^T \\ \mathbf{T}_4 &= [-0.5L_2 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{T}_5 &= [-0.5L_2 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{T}_6 &= \frac{1}{3} [-2L_3 - l \sin(-\alpha) \ -l \cos(-\alpha) \ 0]^T \end{aligned} \quad (3.94)$$

Hlavní momenty setrvačnosti (vzhledem k s.s. příslušného ramena, viz předchozí přiřazený vztahů s.s., deviační momenty jsou rovny nule):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_{1_{\text{link}}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{T}_{1_{\text{link}}}[1] - \mathbf{T}_1[1])^2 m_{1_{\text{link}}} + \mathbf{T}_1[1]^2 M_{\text{mot}} \\ \mathbf{I}_{1_{\text{link}}} &= [0.5m_1 r_1^2 \ 0.5m_1(r_1^2 + \frac{1}{3}L_1) \ 0.5m_1(r_1^2 + \frac{1}{3}L_1)]^T \\ \mathbf{I}_2 &= [0.5m_2 r_2^2 \ 0.5m_2(r_2^2 + \frac{1}{3}L_1) \ 0.5m_2(r_2^2 + \frac{1}{3}L_1)]^T \\ \mathbf{I}_3 &= \dots \text{Irelevantní, neboť } \textit{Link} \ 3 \text{ (trojúhelník) nerotuje} \\ \mathbf{I}_4 &= [0.5m_4 r_1^2 \ 0.5m_4(r_1^2 + \frac{1}{3}L_2) \ 0.5m_4(r_1^2 + \frac{1}{3}L_2)]^T \\ \mathbf{I}_5 &= [0.5m_5 r_2^2 \ 0.5m_5(r_2^2 + \frac{1}{3}L_2) \ 0.5m_5(r_2^2 + \frac{1}{3}L_2)]^T \\ \mathbf{I}_6 &= \dots \text{Irelevantní, neboť } \textit{Link} \ 6 \text{ (trojúhelník) nerotuje} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Výpočet kinematických úloh (DGM, IGM, DIK, IIK) pro uvažovaný paralelní manipulátor lze odvodit na základě zavedeného kinematického popisu, dekompozice manipulátoru na sériové kinematické řetězce a stanovení vztahu mezi polohou, rychlostí a zrychlením aktivních a pasivních kloubových souřadnic (klíčová úloha pro paralelní manipulátory). Obecný přístup výpočtu DGM, IGM, DIK, IIK je naznačen v Kapitolách A.3.3, A.5.3, konkrétní odvození pro uvažovaný paralelní manipulátor je detailně popsáno v [136]. Předpokládejme dále, že takové úlohy lze definovat formálně jako:

$$\begin{aligned}
 \text{Přímý geometrický model (DGM):} & \dots\dots\dots \mathbf{X} = \mathbf{DGM}(\mathbf{Q}_a, \xi) \\
 \text{Inverzní geometrický model (IGM):} & \dots\dots\dots \mathbf{Q}_a = \mathbf{IGM}(\mathbf{X}, \xi) \\
 \text{Přímá ok. kin. úloha (DIK):} & \dots\dots\dots \{\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}\} = \mathbf{DIK}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a, \xi) \\
 \text{Inverzní ok. kin. úloha (IIK):} & \dots\dots\dots \{\mathbf{Q}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a\} = \mathbf{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \xi) \\
 \text{Vztah mezi polohami akt. a pas. kl. souřadnic:} & \dots\dots \mathbf{Q}_p = \mathbf{A2P}(\mathbf{Q}_a, \xi) \\
 \text{Vztah mezi rych./zrych. akt. a pas. kl. souřadnic:} & \dots\dots \{\mathbf{Q}_p, \ddot{\mathbf{Q}}_p\} = \mathbf{IKA2P}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a, \xi)
 \end{aligned}$$

kde ξ jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru.

Stejně tak i výpočet dynamických úloh IDM, DDM je založen na kinematické dekompozici paralelního manipulátoru na sériové kinematické řetězce, nástin takového postupu je naznačen v Kapitole A.6.1, detaily lze nalézt opět v [136]. Formálně lze dynamickou rovnici paralelního manipulátoru (v prostoru aktivních kloubových souřadnic) zapsat jako:

$$\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) = \boldsymbol{\tau} \tag{3.96}$$

kde

$$\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) = \mathbf{C}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{F}$$

kde $\mathbf{C}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a)$ je matice vlivu zdánlivých sil (odstředivá, Coriolisova), $\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)$ je matice vlivu gravitační síly, \mathbf{J} je kinematický jakobián paralelního manipulátoru, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$ je vektor momentů rotačních aktuátorů (aktivní kloubové souřadnice \mathbf{Q}_a) a \mathbf{F} je vektor externího silového/momentového působení na koncový efektor. Členy $\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a)$ a $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a)$ lze vypočítat dle algoritmu nastíněného v Kapitole A.6.1.

Pracovní prostor určený pro optimalizaci, viz Kapitola 3.3.1,

bude stanoven jako množina diskretních bodů uvnitř obdélníku daného dvěma body jeho protilehlých rohů \mathbf{LB} , \mathbf{RU} , viz Obrázek 3.14. Množinu \mathbf{X}_{opt} lze tak psát následovně:

$$\mathbf{X}_{\text{opt}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{LB}[1] \\ \mathbf{LB}[1] + \Delta x \\ \mathbf{LB}[1] + 2\Delta x \\ \vdots \\ \mathbf{RU}[1] - \Delta x \\ \mathbf{RU}[1] \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \mathbf{LB}[2] \\ \mathbf{LB}[2] + \Delta y \\ \mathbf{LB}[2] + 2\Delta y \\ \vdots \\ \mathbf{RU}[2] - \Delta y \\ \mathbf{RU}[2] \end{array} \right] \tag{3.97}$$

kde Δx , Δy jsou zvolené diskretizace v dílčích souřadných osách pracovního prostoru a \times značí kartézský součin vektorů. Množina všech kombinací bodů diskretizovaného pracovního prostoru je tedy dána jako: $\mathbf{X}_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^M$, $M = M_1 \cdot M_2$ a M_1 resp. M_2 značí počet diskretizovaných hodnot ve směru souřadnicových os \mathbf{x} resp. \mathbf{y} pracovního prostoru.

Kriteriální funkce J , viz Kapitola 3.3.2

je určena svými dvěma složkami, a to penalizační funkcí J_{pen} a účelovou funkcí J_{obj} ve tvaru daném rovnicí (3.71).

Věnujme se nejprve definici penalizační funkce J_{pen} , která bude postihovat následující uvažovaná omezení na optimalizaci parametrů manipulátoru:

- Koncový efektor manipulátoru lze umístit do všech diskretizovaných bodů pracovního prostoru \mathbf{X}_{opt} , tzn. existuje řešení IGM.
- Paralelogramy tvořící ramena délek L_1 a L_2 budou svírat úhel větší než γ_{\min} , tzn., viz Obrázek 3.16(a), platí (jinak dochází k přiblížení manipulátoru kinematické singularitě):

$$\begin{aligned} \|\sin(q_1 - \alpha)\| &\geq \|\sin(\gamma_{\min})\| \\ \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| &\geq \|\sin(\gamma_{\min})\| \end{aligned} \quad (3.98)$$

kde q_1, q_2 jsou polohy aktivních kloubových souřadnic a α je kinematický návrhový parametr manipulátoru.

Výsledná hodnota penalizační funkce bude tedy dána jako:

$$J_{\text{pen}}(\mathbf{X}) = K_1 \cdot P_1 + K_2 \cdot P_2 + K_3 \cdot P_3 \quad (3.99)$$

kde

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \mathbf{X} \exists \text{ řešení IGM} \\ 1 & \text{pokud pro } \mathbf{X} \nexists \text{ řešení IGM} \end{cases} \\ P_2 &= \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \mathbf{X} \text{ platí: } \|\sin(q_1 - \alpha)\| \geq \|\sin(\gamma_{\min})\| \\ \|\sin(\gamma_{\min})\| - \|\sin(q_1 - \alpha)\| & \text{pokud pro } \mathbf{X} \text{ platí: } \|\sin(q_1 - \alpha)\| < \|\sin(\gamma_{\min})\| \end{cases} \\ P_3 &= \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \mathbf{X} \text{ platí: } \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| \geq \|\sin(\gamma_{\min})\| \\ \|\sin(\gamma_{\min})\| - \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| & \text{pokud pro } \mathbf{X} \text{ platí: } \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| < \|\sin(\gamma_{\min})\| \end{cases} \end{aligned}$$

a K_i jsou zvolené penalizační konstanty.

Poznamenejme, že v uvedené případě omezení optimalizační úlohy je penalizace P_1 prioritní (kritická), neboť vyjadřuje dostupnost bodu \mathbf{X} uvažovaným manipulátorem (existence řešení IGM, resp. požadavek, že \mathbf{X} leží v požadovaném pracovním prostoru manipulátoru). Často se tedy uvažuje $K_1 = +\infty$ a toto omezení se vyhodnocuje nejdříve (před všemi ostatními: P_2, P_3) a v případě, že je omezení porušeno, ($P_1 \neq 0$) je další výpočet omezení zastaven (úspora výpočetního času) a výsledná hodnota penalizační funkce prohlášena jako nevyhovující, tzn. $J_{\text{pen}}(\mathbf{X}) = +\infty$, tzn. výsledná kritériální funkce $J(\mathbf{X}) = 0$.

Dále se zabýváme definicí účelové funkce J_{obj} reprezentující optimalizované kritérium. V případě uvažovaného manipulátoru požadujeme, aby byl minimalizovaný silový moment $\boldsymbol{\tau}$, v aktuátorech manipulátoru. Toto lze zajistit minimalizací normy vektoru kloubových silových momentů $\|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$.

Kdybychom nyní předpokládali, že známe konkrétní požadovanou trajektorii koncového efektoru manipulátoru ve smyslu požadovaných poloh \mathbf{X} , rychlostí $\dot{\mathbf{X}}$ a zrychleních $\ddot{\mathbf{X}}$, lze vypočítat hodnotu účelové funkce $J_{\text{obj}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}) = \|\boldsymbol{\tau}\|$ v každém příslušném bodě požadované trajektorie na základě řešení IGM, IIK ($\{\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}\} \Rightarrow \{\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a\}$) a IDM ($\{\mathbf{F}, \mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a\} \rightarrow \boldsymbol{\tau}$).

Bohužel, v uvažované optimalizační úloze neznáme konkrétní hodnotu trajektorie koncového efektoru manipulátoru, ale pouze pracovní prostor ve smyslu určených diskretizovaných poloh koncového efektoru \mathbf{X}_{opt} (tak, jak byly definovány zadavatelem). Neznáme tedy žádné požadované rychlosti ani zrychlení koncového efektoru resp. kloubových souřadnic manipulátoru. Vzhledem k tvaru dynamické rovnice manipulátoru

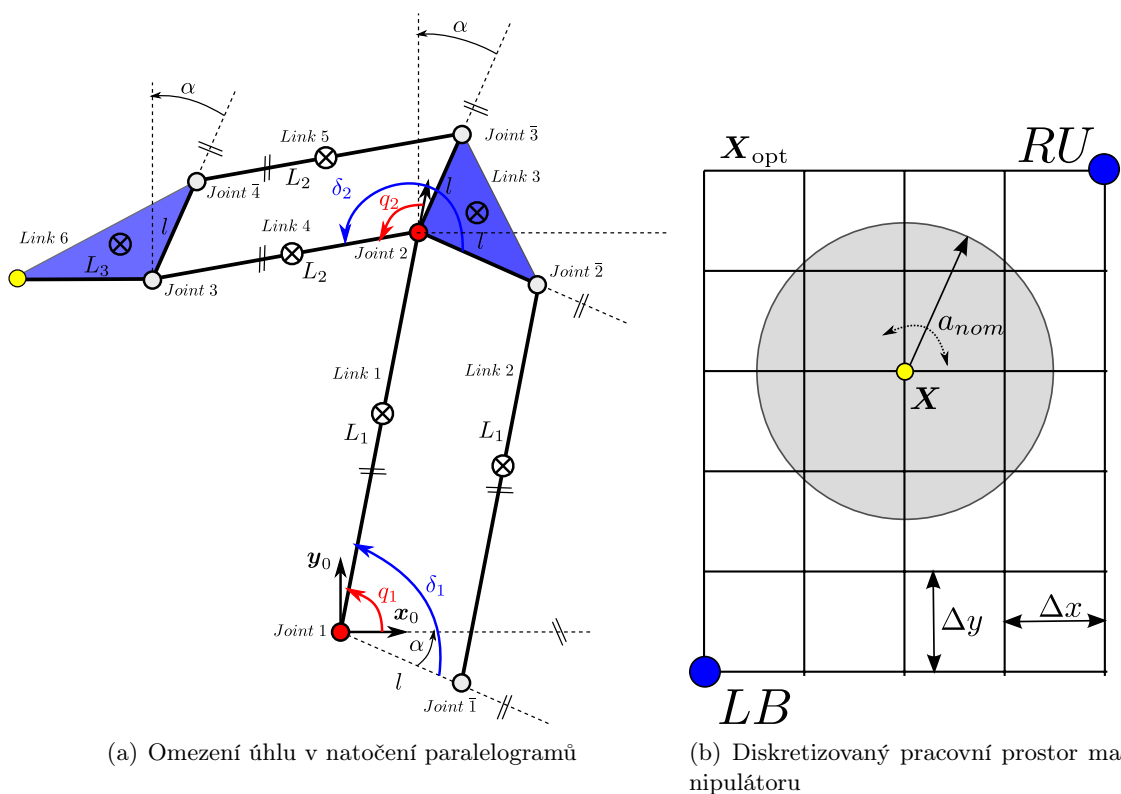
$$\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{C}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{F}$$

by v takovém případě bylo možné optimalizovat pouze *statické silové momenty* kompenzující gravitační působení na manipulátor $\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)$ případně vnější sílu/moment \mathbf{F} působící na koncový efektor, které závisí pouze na polohách koncového efektoru resp. kloubových souřadnic, tzn.:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{F} \quad (3.100)$$

V případě, že však chceme zahrnout do optimalizace silových momentů v aktuátorech také *dynamické projevy manipulátoru*, byl v rámci práce formulován nový přístup k definici účelové funkce zohledňující minimální požadované zrychlení koncového efektoru manipulátoru do libovolného směru.

Uvažujme, že kromě minimalizace silových momentů v aktuátorech způsobené statickými projevy (vlivem gravitace a externí síly/momentu na koncový efektor) požadujeme ještě navíc, že manipulátor dokáže z nulové rychlosti $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ zrychlit (ve smyslu $\ddot{\mathbf{X}}$) v každém bodu pracovního prostoru \mathbf{X}_{opt} do libovolného směru s minimálním nominálním zrychlením o velikosti a_{nom} , viz Obrázek 3.16(b). V každém bodu pracovního prostoru tedy definujeme konstantní normu zrychlení $\|\ddot{\mathbf{X}}\| = a_{\text{nom}} = \text{konst.}$



Obrázek 3.16.: Omezení a diskretizace pracovního prostoru

Z předpokladu nulové rychlosti $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ lze z dynamické rovnice manipulátoru vyjádřit:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{C}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{F} &= \boldsymbol{\tau} \\ \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{Q}}_a = \mathbf{0} : \mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{F} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Z DIK/IIK pro paralelní manipulátory (formálně shodné jako pro sériové manipulátory A.50, A.51) zřejmě pro $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ platí:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{\text{man}}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a \quad \ddot{\mathbf{Q}}_a = \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}} \quad (3.102)$$

kde $J_{\text{man}}(\mathbf{Q}_a)$ je jakobián uvažovaného manipulátoru.

Dosazením (3.102) do (3.101) a za předpokladu $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (žádné externí síly/momenty působící na koncový efektor) dostáváme:

$$\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) = \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \|\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| = \|\boldsymbol{\tau}\| \quad (3.103)$$

Pro $\|\star\|$ (2-norma signálu) platí, viz (3.103):

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \|\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}}\| + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (3.104)$$

Z lineární algebry po indukované normy matic (v našem případě 2-normou signálu $\|\star\|$), viz [35]:

$$\|\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}}\| \leq \sigma_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot \underbrace{\|\ddot{\mathbf{X}}\|}_{a_{\text{nom}}} \quad (3.105)$$

kde $\sigma_{\max}(\star)$ označuje maximální singulární číslo matice \star .

Dosazením nerovnosti (3.104) do nerovnosti (3.105) dostáváme:

$$\|\boldsymbol{\tau}\| \leq \sigma_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot a_{\text{nom}} + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (3.106)$$

Horní omezením normy kloubových silových momentů manipulátoru v poloze \mathbf{X} koncového efektoru za předpokladu jeho nulové rychlosti $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ a nominální hodnoty $a_{\text{nom}} = \|\ddot{\mathbf{X}}\|$ zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}$ do libovolného směru je tedy hodnota:

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\max} = \sigma_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot a_{\text{nom}} + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (3.107)$$

kde $\mathbf{Q}_a = \text{IGM}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ a členy $\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a)$ a $\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) = \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a)$ (viz rovnice (A.115) za předpokladu $\dot{\mathbf{Q}}_a = \mathbf{0}$, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$) lze získat z algoritmu řešení DDM pro paralelní manipulátory.

Poznamenejme, že hodnota nominálního zrychlení koncového efektoru a_{nom} reprezentuje v podstatě váhovou konstantu, která nastavuje kompromis optimalizace mezi minimalizací silových momentů v aktuátorech odpovídající statickému chování manipulátoru ($a_{\text{nom}} = 0$), tedy kompenzací statického působení vlivem gravitace, a dynamickému chování ($a_{\text{nom}} \gg 0$), tedy kompenzací dynamického působení vlivem urychlení pohybu koncového efektoru, v obou případech v daném bodu \mathbf{X} pracovního prostoru manipulátoru.

Hodnota účelové funkce je tedy stanovena jako:

$$J_{\text{obj}}(\mathbf{X}) = \|\boldsymbol{\tau}\|_{\max} = \sigma_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot a_{\text{nom}} + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (3.108)$$

kde $\mathbf{Q}_a = \text{IGM}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$.

Hodnota účelové funkce vyjadřuje maximální normu silových momentů v aktuátorech manipulátoru v bodě \mathbf{X} pracovního prostoru manipulátoru potřebný pro zrychlení a_{nom} .

Přípustná množina kinematických návrhových parametrů, viz Kapitola 3.3.3, je analogicky jako pracovní prostor určený k optimalizaci (3.97) dána kartézským součinem

vektorů diskretizovaných hodnot m kinematických návrhových parametrů $\xi \in \mathbb{R}^m$.

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_{\mathbb{C}[1]} + \Delta\xi[1] \cdot \begin{bmatrix} -n_{1\min} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_{1\max} \end{bmatrix} \times \xi_{\mathbb{C}[2]} + \Delta\xi[2] \cdot \begin{bmatrix} -n_{2\min} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_{2\max} \end{bmatrix} \times \dots \\ \dots \times \xi_{\mathbb{C}[m-1]} + \Delta\xi[m-1] \cdot \begin{bmatrix} -n_{m-1\min} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n_{m-1\max} \end{bmatrix} \times \xi_{\mathbb{C}[m]} + \Delta\xi[m] \cdot \begin{bmatrix} -n_{m\min} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n_{m\max} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

kde $\xi_{\mathbb{C}[i]}$ jsou středy intervalů (intervaly mohou být i nesymetrické, tzn. $n_{i\min} \neq n_{i\max}$) diskrétní množiny $N_i = n_{i\min} + n_{i\max} + 1$ prvků přípustných kinematických návrhových parametrů s požadovanou diferencí $\Delta\xi[i]$ pro $i = 1 \dots m$. Množina všech kombinací diskretizovaných přípustných kinematických návrhových parametrů je tak dána jako: $\Xi \in \mathbb{R}^N$, $N = N_1 \cdot N_2 \dots N_{m-1} \cdot N_m$.

Zdánlivě komplikované definování intervalů kinematických návrhových parametrů vstupujících do kartézského součinu pro definici množiny Ξ mají důležitý význam. Jsou totiž centrovány (byť nesymetricky) okolo nominální hodnoty parametrů $\xi_{\mathbb{C}}$. Vzhledem k závislosti globální optimalizačního Culling algoritmu na počáteční volbě (odhadu) kinematických návrhových parametrů lze tak v konečné implementaci algoritmu snadno zajistit, že doposud známé (a alespoň suboptimálně vyhovující) počáteční návrhové parametry $\xi = \xi_{\mathbb{C}}$ budou obsaženy v přípustné množině Ξ a Culling algoritmus bude spuštěn s právě takovou počáteční podmínkou. Culling algoritmus tedy začne prohledávat ze známé suboptimální hodnoty parametrů a bude hledat globální optimum v jejich definovaném okolí, zároveň bude garantována „rozumná“ počáteční hodnota kritériální funkce, což může vést na zásadní urychlení algoritmu.

Konkrétní podoba optimalizační úlohy, viz Kapitola 3.3.4 daná vztahy (3.74, 3.75)

tedy nalezení takové sady optimálních parametrů $\xi_{\text{opt}} \in \Xi$, který maximalizuje minimální hodnotu kritériální funkce $J(\mathbf{X}, \xi)$ (ekvivalentně minimalizace maximální hodnoty normy momentů v aktuátorech) přes všechny body uvažovaného pracovního prostoru pro optimalizaci $\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}$ je následující:

Uvažovaný pracovní prostor manipulátoru včetně rozlišení, viz Obrázek 3.14:

$$\begin{aligned} \mathbf{LB} &= \begin{bmatrix} -0.97 & 0.2 \end{bmatrix}^T, & \mathbf{LU} &= \begin{bmatrix} -0.12 & 0.7 \end{bmatrix}^T \\ \Delta x &= 0.10625, & \Delta y &= 0.125 & \Rightarrow & M_1 = 9, M_2 = 5, & \Rightarrow & M = 45 \end{aligned} \quad (3.110)$$

Dynamické parametry jsou dány jako:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \rho & M & M_{\text{mot}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.03 & 7800 & 50 & 30 \end{bmatrix}^T \quad (3.111)$$

Výběrem z kinematických parametrů manipulátoru ξ získáváme takové parametry $\xi_{\text{opt}} \in \xi$, které budeme skutečně optimalizovat (nemusí být vždy vybrány všechny, např. parametr l se neoptimalizuje), ekvivalentně pro $\xi_{\text{C opt}}$:

$$\xi_{\text{opt}} = \xi[1, 2, 3, 5] = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad \alpha]^T \Rightarrow \xi_{\text{C opt}} = [0.6 \quad 0.5 \quad 0.2 \quad 0]^T \quad (3.112)$$

Parametry penalizační funkce J_{pen} :

Minimální povolený úhel v paralelogramech manipulátoru, viz Obrázek 3.16(a):

$$\gamma_{\text{min}} = 15 \text{ deg}$$

Penalizační konstanty, striktně nepovoleno nalezení parametrů ξ , kde neexistuje řešení IGM.

$$K_1 = +\infty, K_2 = K_3 = 10^8$$

Parametry účelové funkce J_{obj} :

Hodnota nominálního zrychlení koncového efektoru:

$$a_{\text{nom}} = 1$$

Diskretizace přípustných návrhových kinematických parametrů (které mají být optimalizovány):

$$\Delta \xi_{\text{opt}} = [0.02 \quad 0.02 \quad 0.02 \quad 0.02]^T, \xi_{\text{C opt}} = [0.6 \quad 0.5 \quad 0.2 \quad 0]^T$$

$$n_{i_{\text{min}}} = n_{i_{\text{max}}} = 5 \text{ (symetrické intervaly)}, N_i = 11, i = 1 \dots 4$$

Kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \xi, \mu)$ je vypočtena dle (3.71) s konkrétní podobou penalizační (3.99) a účelové (3.108) funkce.

Modrá plocha na Obrázku 3.17 vyjadřuje hodnotu kriteriální funkce v bodech uvažovaného pracovního prostoru pro nominální hodnotu optimalizovaných parametrů $\xi_{\text{opt}} = \xi_{\text{C opt}}$. Minimální hodnota kriteriální funkce je:

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{C opt}})) = 1.335 \cdot 10^{-3}$$

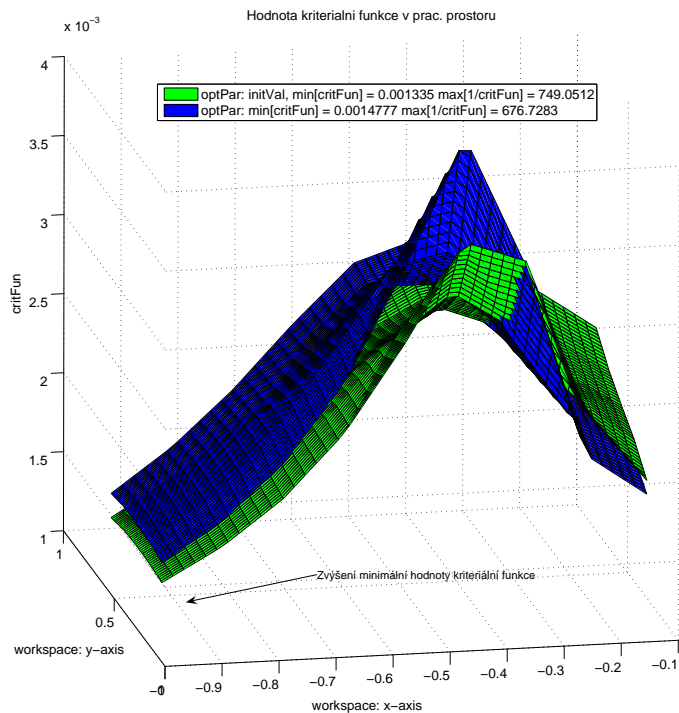
Vzhledem k nastaveným hodnotám penalizačních konstant je zřejmé, že v pracovním prostoru manipulátoru s nominální hodnotou kinematických parametrů nedochází k porušení nastavených omezení (včetně existence řešení IGM), tedy $J_{\text{pen}} = 0$, a převrácená hodnota kriteriální funkce je tak přímo rovna hodnotě účelové funkce $J_{\text{obj}} = \|\tau_{\text{max}}\|$ a odpovídá maximálnímu normě požadovaných momentů v aktuátorech manipulátoru.

$$\frac{1}{\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{C opt}}))} = (J_{\text{obj}} = \|\tau_{\text{max}}\|) = 749.1$$

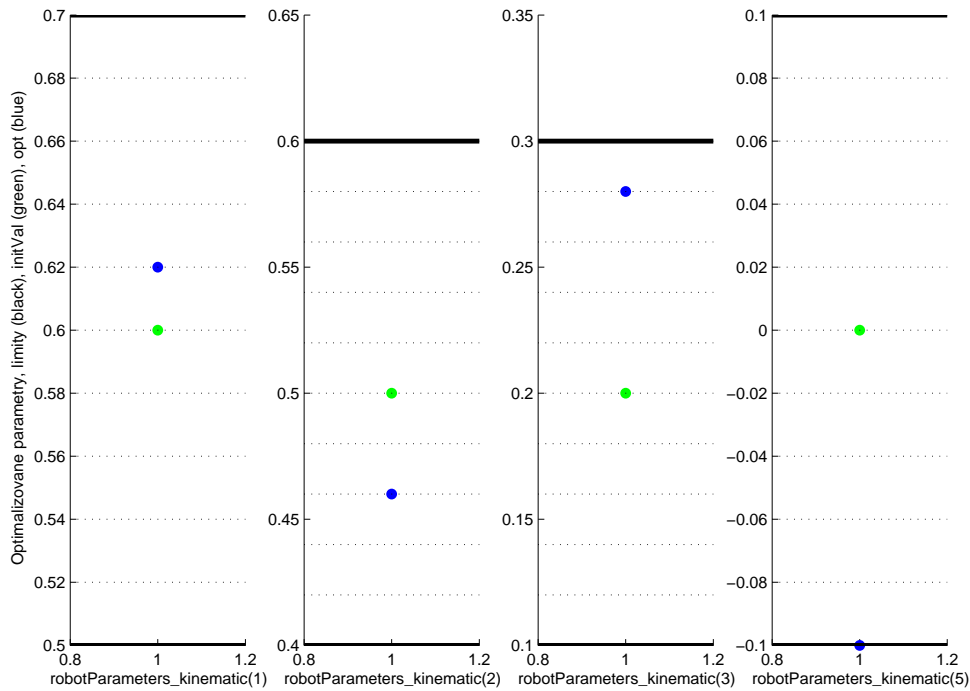
Následně provedeme **globální optimalizaci** pomocí Algoritmu 3.2 a dostáváme globálně optimální kinematické parametry manipulátoru ξ_{global}^* z množiny diskretizovaných přípustných hodnot Ξ .

$$\xi_{\text{global}}^* = [0.62 \quad 0.46 \quad 0.28 \quad -0.1]^T \quad (3.113)$$

Graficky je výsledek globální optimalizace znázorněn na Obrázcích 3.17, 3.18.



Obrázek 3.17.: Průběh hodnot kritériální funkce J podél diskretizovaného pracovního prostoru (v rovině \mathbf{xy}): Porovnání mezi počáteční volbou parametrů $\xi_{C \text{ opt}}$ (zeleně) a parametry po globální optimalizaci ξ_{global}^* (modře).



Obrázek 3.18.: Znázornění změny hodnot počátečních parametrů $\xi_{C \text{ opt}}$ (zeleně) a hodnot po globální optimalizaci ξ_{global}^* (modře). Černě jsou zvýrazněny uvažované limity množin diskretizovaných přípustných návrhových kinematických parametrů $\xi_C[i] + \Delta\xi[i] \cdot [-n_{i \text{ min}}, n_{i \text{ max}}]$, $i = 1, 2, 3, 4$.

V konkrétním uvažovaném příkladu globální optimalizace bylo ukázáno, že Culling algoritmus je v porovnání s algoritmem prohledávání uvažovaných sad parametrů hrubou silou velmi efektivní. Počet potřebných vyčíslení kritériální funkce v případě použití algoritmu hrubé síly je dán, viz (3.81), jako $N_{\text{critFunEval}} = N \cdot M = 14641 \cdot 45 = 658845$, což při průměrné době potřebné k vyčíslení kritériální funkce $t_{\text{critFunEval}} = 5 \text{ ms}$ odpovídá potřebnému času pro optimalizaci 54.9 min . V případě použití Culling algoritmu je počet vyčíslení kritériální funkce snížen na 4.2% původního počtu, $N_{\text{critFunEval}} = 27754$, což odpovídá potřebnému času pro optimalizaci 138 s .

Minimální hodnota kritériální funkce po globální optimalizaci je:

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{global}}^*)) = 1.478 \cdot 10^{-3}$$

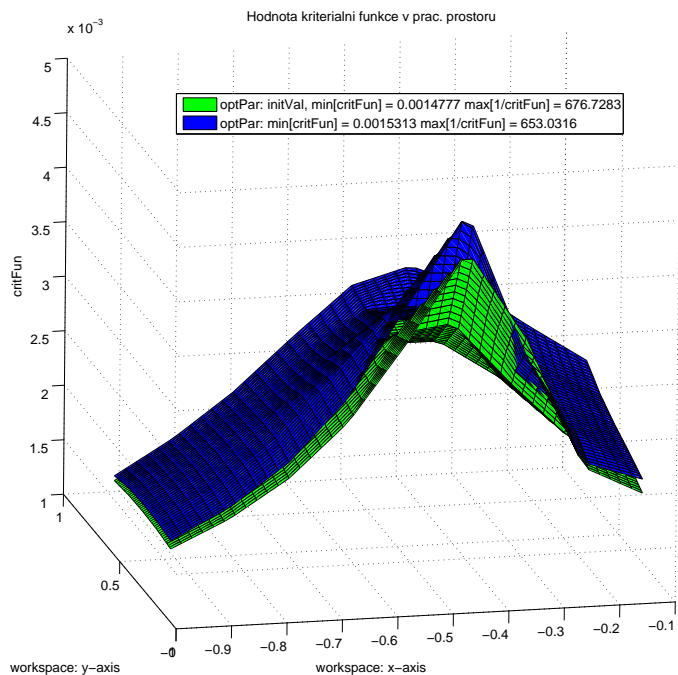
Převrácená hodnota kritériální funkce po globální optimalizaci je:

$$\frac{1}{\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{global}}^*))} = (J_{\text{obj}} = \|\tau_{\text{max}}\|) = 676.7$$

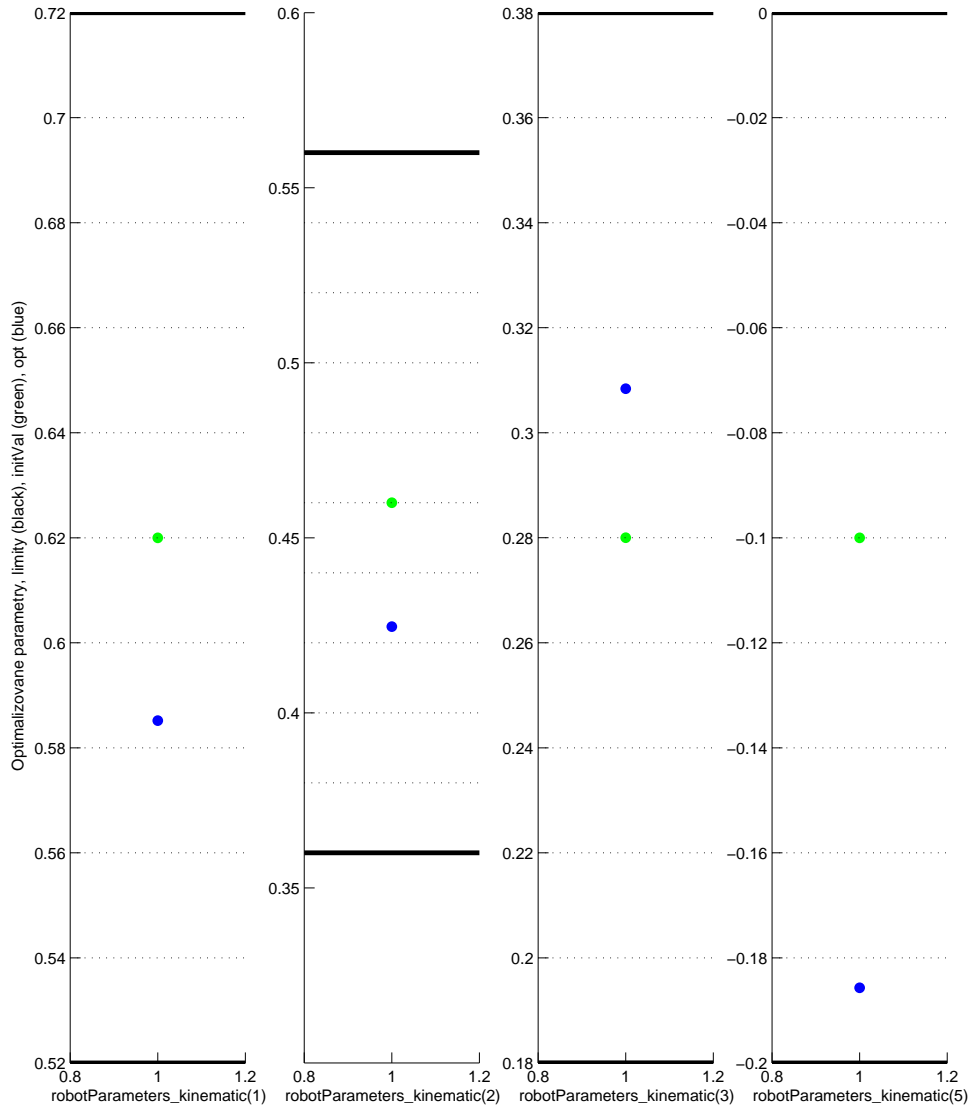
Následně byla dále provedena **lokální optimalizace** prostřednictvím simplexového algoritmu (Nelder-Mead, viz Kapitola 3.2.2, algoritmus implementován v Matlabu pod funkcí `fminsearch`). Počáteční podmínky optimalizovaných parametrů pro lokální optimalizaci byly voleny jako hodnoty parametrů ξ_{global}^* nalezené předchozím algoritmem globální optimalizace. Výsledné parametry po lokální optimalizaci jsou:

$$\xi_{\text{local}}^* = [0.5852 \quad 0.4246 \quad 0.3084 \quad -0.1857]^T \quad (3.114)$$

Grafické znázornění výsledků lokální optimalizace je znázorněno na Obrázcích 3.19, 3.20.



Obrázek 3.19.: Průběh hodnot kriteriální funkce podél diskretizovaného pracovního prostoru (v rovině \mathbf{xy}): Porovnání mezi počáteční hodnotou (výsledkem globální optimalizace) ξ_{global}^* (zeleně) a parametry po lokální optimalizaci ξ_{local}^* (modře).



Obrázek 3.20.: Znázornění změny hodnot počátečních parametrů (výsledkem globální optimalizace) ξ_{global}^* (zeleně) a hodnot po lokální optimalizaci ξ_{local}^* (modře). Černě jsou zvýrazněny uvažované limity množin diskretizovaných přípustných návrhových kinematických parametrů $\xi_C[i] + \Delta\xi[i] \cdot [-n_{i_{\min}}, n_{i_{\max}}]$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Minimální hodnota kriteriální funkce po lokální optimalizaci je:

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{local}}^*)) = 1.531 \cdot 10^{-3}$$

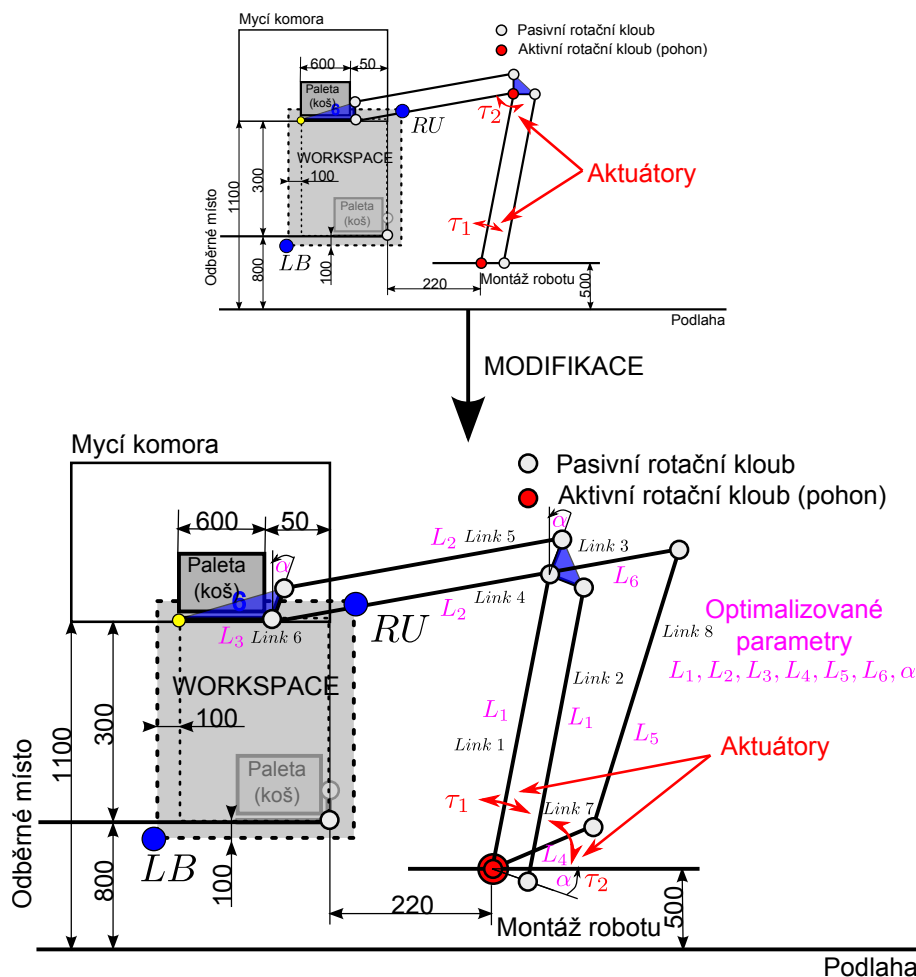
Převrácená hodnota kriteriální funkce po lokální optimalizaci je:

$$\frac{1}{\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{local}}^*))} = (J_{\text{obj}} = \|\tau_{\text{max}}\|) = 653.0$$

★

★ Příklad 3.7 (Strukturální návrh zakladače na základě param. optimalizace)

Analogický přístup k optimalizaci kinematických parametrů (globální, lokální optimalizace) jako v Příkladu 3.6 byl použit za účelem analýzy strukturálního uspořádání pohonů paralelního manipulátoru zakladače. Nabízí se totiž otázka, kdy a za jakých podmínek je vhodné nahradit v pořadí druhý aktuátor umístěný na pohybujícím se prvním ramenu manipulátoru aktuátorem staticky umístěným na základně manipulátoru a doplnit manipulátor o přídatnou paralelní konstrukci. Uvažovaná modifikace je znázorněna na Obrázku 3.21. Poznamenejme, že podobná architektura paralelního manipulátoru lze dnes nalézt především v případě průmyslových paletizačních manipulátorů.



Obrázek 3.21.: Původní (PM) a modifikovaná (MM) varianta manipulátoru (zakladače) z Příkladu 3.6

Pro porovnání uvažujme, že pracovní prostor pro optimalizaci \mathbf{X}_{opt} (včetně diskretizace), výpočet kritériální J (penalizační J_{pen} a účelové J_{obj}) funkce je shodný jako v Příkladu 3.6. U obou variant předpokládáme ramena z pevných tuhých kulatin o průměru $r_1 = 0.05 \text{ m}$ (ramena *Link 1, 4, 7, 8*) resp. $r_2 = 0.03 \text{ m}$ (ramena *Link 2, 5*). Ramena *Link 3* resp. *Link 6* jsou realizována trojúhelníky tloušťky r_2 resp. r_1 . Materiál ramen má hustotu ρ . V těžišti *Link 3* (koncový efektor) je umístěno břemeno (hmotný bod) o hmotnosti $M = 50 \text{ kg}$. V případě PM hraje roli hmotnost M_{mot} neseného aktuátoru druhého ramene. Dynamické parametry jsou opět dány jako:

$$\boldsymbol{\mu} = [r_1 \ r_2 \ \rho \ M \ M_{\text{mot}}]^T = [0.05 \ 0.03 \ \rho \ 50 \ M_{\text{mot}}]^T \quad (3.115)$$

Předpokládejme dále tři uvažované hodnoty $M_{\text{mot}} = \{0 \text{ kg}, 30 \text{ kg}, 60 \text{ kg}\}$ hmotnosti

neseného aktuátoru (relevantní pro **PM**), dva typy materiálů, ze kterých jsou ramena manipulatorů vyrobena, a to železo ($\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$) a výrazně lehčí slitinu hliníku známou pod označením EN AW-2024⁹ ($\rho = 2800 \frac{kg}{m^3}$), a dvě hodnoty požadovaného zrychlení $a_{nom} = \{1 \frac{m}{s^2}, 5 \frac{m}{s^2}\}$ koncového efektoru manipulatoru (v libovolném směru, z nulové rychlosti).

V případě, že chceme provést relevantní porovnání mezi původní architekturou manipulatoru (**PM**) a modifikovanou úpravou manipulatoru (**MM**), je nutné pro všechny uvažované kombinace uvažovaných hodnot (váha neseného aktuátoru, materiál ramen a požadované zrychlení) provést vždy optimalizaci kinematických parametrů manipulatoru, pro modifikovaný manipulator se jedná o parametry $\xi_{opt} = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4 \ L_5 \ L_6 \ \alpha]^T$ (v případě původního manipulatoru stejně jako v Příkladu 3.6).

Minimální hodnotu kritériální funkce přes uvažovaný pracovní prostor pro optimalizaci označme jako J_{OW} , tedy optimalizační úloha (3.74, 3.75) přejde na tvar:

$$\begin{aligned} J^* &= \max_{\xi \in \Xi} (J_{OW}(\xi)) \\ \xi^* &= \operatorname{argmax}_{\xi \in \Xi} (J_{OW}(\xi)) \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\text{kde: } J_{OW}(\xi) = \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{opt}} J(\mathbf{X}, \xi)$$

Tabulka 3.4 shrnuje optimalizované hodnoty kinematických návrhových parametrů ξ_{opt} , Tabulka 3.3 potom odpovídající hodnoty kritériální funkce J_{OW} podél pracovního prostoru pro všechny možné kombinace.

Shrňme, že význam hodnoty kritéria optimality J_{OW} je následující:

- Horší (ve smyslu maximální požadované normy momentu na aktuátorech) vlastnosti manipulatoru:

$$J_{OW} \rightarrow 0 \Rightarrow J_{OW}^{-1} = |\text{pro neporušení omezení, } J_{pen} = 0| = \max_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{opt}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} \rightarrow +\infty$$

- Lepší (ve smyslu maximální požadované normy momentu na aktuátorech) vlastnosti manipulatoru:

$$J_{OW} \rightarrow +\infty \Rightarrow J_{OW}^{-1} = |\text{pro neporušení omezení, } J_{pen} = 0| = \max_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{opt}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} \rightarrow 0$$

Grafické znázornění výsledků je reprezentováno grafy na Obrázcích 3.22, 3.23. V grafech jsou znázorněna kritéria optimality J_{OW} resp. J_{OW}^{-1} v závislosti na hmotnosti M_{mot} neseného pohonu druhého ramene pro těžkou variantu manipulatoru (konstrukční materiál je železo), lehkou variantu manipulatoru (konstrukčním materiálem je slitina hliníku) a zároveň variantu s nízkými a vysokými požadavky na zrychlení koncového efektoru.

⁹Slitina se obvykle využívá pro výrobu dopravních prostředků, zvláště pak v leteckém průmyslu, a také na výrobu šroubovaných produktů. Dále se využívá pro výrobu vědeckých nástrojů, veterinárních a ortopedických výtuh, a také pro nýtování, viz <http://www.begroup.com/>.

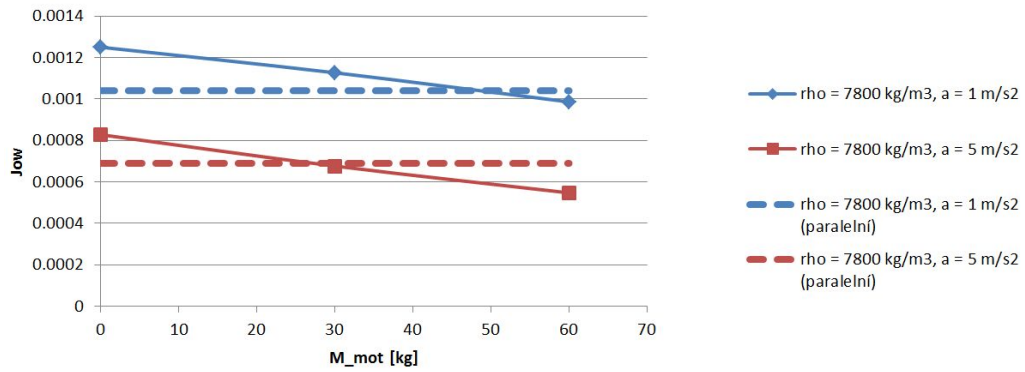
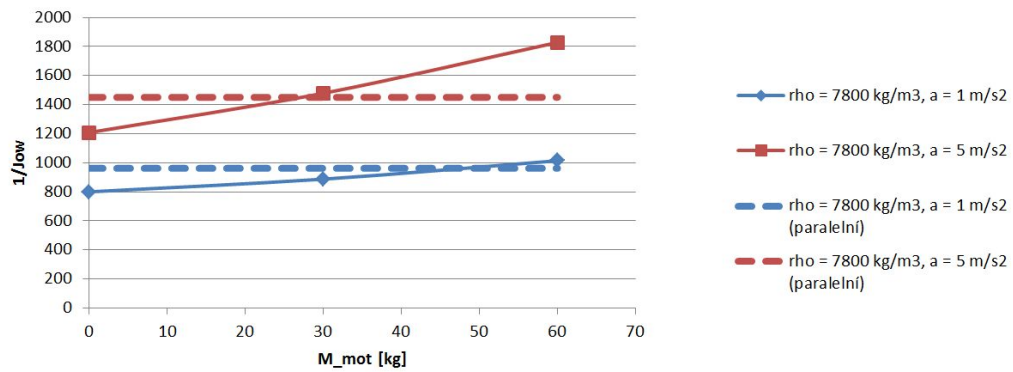
Kapitola 3. Parametrická syntéza robotického zařízení - parametrická optimalizace

		a_nom = 1 (zrychlení v libovolném směru)				a_nom = 5 (zrychlení v libovolném směru)			
		rho = 7800 (ocel)		rho = 2800 (EN AW-2024-slitina hliníku)		rho = 7800 (ocel)		rho = 2800 (EN AW-2024-slitina hliníku)	
		rho = 7800 kg/m3, a = 1 m/s2		rho = 2800 kg/m3, a = 1 m/s2		rho = 7800 kg/m3, a = 5 m/s2		rho = 2800 kg/m3, a = 5 m/s2	
M_mot	J_ow	1/J_ow	J_ow	1/J_ow	J_ow	1/J_ow	J_ow	1/J_ow	
	0	0.0012496	800.2560819	0.0018148	551.0249063	0.00082755	1208.3862	0.0011938	837.6612498
	30	0.00112643	887.7604467	0.0015313	653.0399007	0.00067636	1478.502573	0.00095862	1043.166218
60	0.000985804	1014.400326	0.0013115	762.4857034	0.00054687	1828.588147	0.00072493	1379.443532	
MM	rho = 7800 kg/m3, a = 1 m/s2 (paralelní)		rho = 2800 kg/m3, a = 1 m/s2 (paralelní)		rho = 7800 kg/m3, a = 5 m/s2 (paralelní)		rho = 2800 kg/m3, a = 5 m/s2 (paralelní)		
	0.00103975	961.7696562	0.0019239	519.7775352	0.00068947	1450.38943	0.0013451	743.4391495	

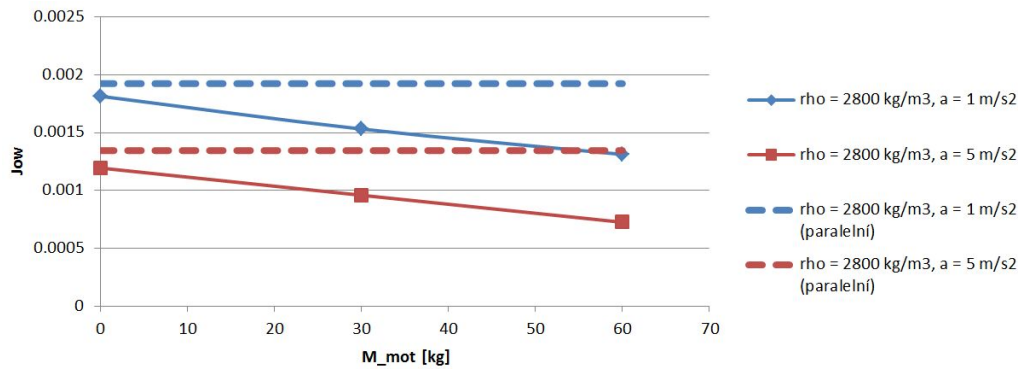
Tabulka 3.3.: Výsledky optimalizací uvažovaných architektur manipulatorů - hodnoty kritériální funkce J_{OW} resp. $J_{OW}^{-1} = \max_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{opt}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$

		a_nom = 1 (zrychlení v libovolném směru)				a_nom = 5 (zrychlení v libovolném směru)			
		rho = 7800 (ocel)		rho = 2800 (EN AW-2024-slitina hliníku)		rho = 7800 (ocel)		rho = 2800 (EN AW-2024-slitina hliníku)	
		rho = 7800 kg/m3, a = 1 m/s2		rho = 2800 kg/m3, a = 1 m/s2		rho = 7800 kg/m3, a = 5 m/s2		rho = 2800 kg/m3, a = 5 m/s2	
PM	0	L1 [m]	0,5945	0,5769	0,5962	0,5908			
		L2 [m]	0,4127	0,4042	0,4241	0,4084			
		L3 [m]	0,293	0,3016	0,2981	0,2933			
		alpha [rad]	-0,0398	-0,1079	-0,1035	-0,0371			
	30	L1 [m]	0,5872	0,5852	0,5927	0,6004			
		L2 [m]	0,4318	0,4246	0,4579	0,4406			
		L3 [m]	0,3066	0,3084	0,2613	0,2851			
		alpha [rad]	-0,2055	-0,1857	-0,1092	-0,1034			
	60	L1 [m]	0,5833	0,5889	0,5796	0,5652			
		L2 [m]	0,4302	0,4288	0,4731	0,5624			
		L3 [m]	0,2994	0,3066	0,235	0,1677			
		alpha [rad]	-0,2189	-0,186	-0,1179	-0,3006			
MM	L1 [m]	0,5818	0,5564	0,5577	0,5595				
	L2 [m]	0,4902	0,4975	0,532	0,5018				
	L3 [m]	0,1707	0,2081	0,1733	0,2061				
	L4 [m]	0,3396	0,2036	0,2411	0,2048				
	L5 [m]	0,5806	0,5613	0,5309	0,5633				
	L6 [m]	0,3516	0,219	0,2259	0,219				
alpha [rad]	-0,4208	-0,2084	-0,2108	-0,206					

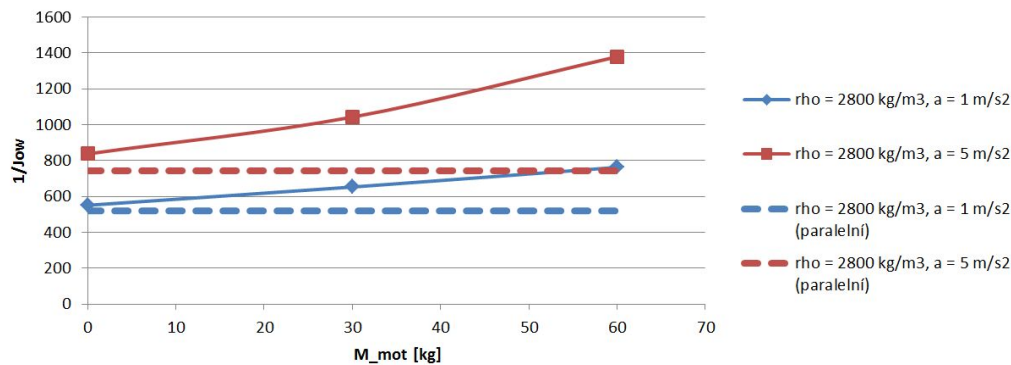
Tabulka 3.4.: Výsledky optimalizací uvažovaných architektur manipulatorů - nalezené optimální kinematické návrhové parametry ξ_{opt}

(a) Hodnota kritéria optimality J_{OW} pro optimální parametry.(b) Převrácená hodnota kritéria optimality J_{OW}^{-1} pro optimální parametry.

Obrázek 3.22.: Výsledky pro „těžkou“ variantu manipulátoru, $\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, plná čára odpovídá PM, čárkovaná MM (stejná pro všechny hmotnosti M_{mot} - MM má aktuátor fixovaný na základně).



(a) Hodnota kritéria optimality J_{OW} pro optimální parametry.



(b) Převrácená hodnota kritéria optimality J_{OW}^{-1} pro optimální parametry.

Obrázek 3.23.: Výsledky pro „lehkou“ variantu manipulátoru, $\rho = 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, plná čára odpovídá PM, čárkovaná MM (stejná pro všechny hmotnosti M_{mot} - MM má aktuátor fixovaný na základně).

Nalezené výsledky lze shrnout následovně:

- V případě „těžké varianty manipulátoru“, kdy uvažujeme výrobu ramen manipulátoru ze železa je z Obrázku 3.22 zřejmé, že použít MM místo PM je výhodné až pro hmotnost použitého neseného pohonu M_{mot} převyšující hodnotu 50 kg (pro malé požadavky na zrychlení koncového efektoru) a hodnotu 30 kg (pro velké požadavky na zrychlení koncového efektoru).
- V případě „lehké varianty manipulátoru“, kdy uvažujeme výrobu ramen manipulátoru ze slitiny hliníku je z Obrázku 3.23 zřejmé, že **použít MM místo PM je výhodné vždy**, a to i za předpokladu, že nesený pohon by nic nevážil! ($M_{mot} = 0 \text{ kg}$).

Je tedy zřejmé, že využití paralelních struktur umožňující fixní umístění pohonů na základnu manipulátoru má praktický význam při konstrukci průmyslových manipulátorů. Podrobnosti k uvažované optimalizační úloze lze nalézt v [134]. ★

3.4. Optimální řízení redundantních manipulátorů

V Kapitole 3.3 jsme se zabývali návrhem kinematických parametrů pro manipulátor dané architektury (strukturálně určený manipulátor, kde typ, počet a uspořádání kloubů a ramen bylo předem dané). Cílem bylo nalézt hodnoty daných kinematických parametrů,

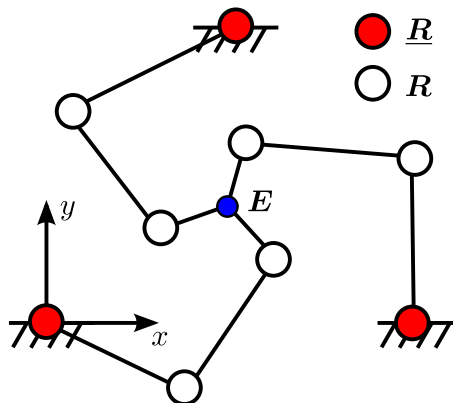
ať už D-H parametrů, či některých dalších parametrů parametrizující manipulátor vzhledem k dané úloze. Hledání dílčích kinematických parametrů bylo motivováno vždy nějakým zvoleným požadavkem. Jinými slovy, nalezené parametry manipulátoru maximalizovaly/minimalizovaly zvolené kritérium optimality. Ve všech případech jsme se však zabývali nalezením *konstantních* hodnot zvolených kinematických parametrů podél celé prozkoumávané trajektorie koncového efektoru manipulátoru. Takový přístup je zcela přirozený pro optimální návrh manipulátorů, u kterých apriori předpokládáme, že jejich kinematické parametry, a tedy všechny konstrukcí zpřažené kinematické závislosti, nelze během pohybu manipulátoru jakkoliv měnit. Pohyb manipulátoru je dán pouze jeho pevnou mechanickou konstrukcí a požadovaným pohybem jeho pevně definovaných aktuátorů. Současně nutně platí, že počet nezávislých DoF koncového efektoru manipulátoru je roven počtu jeho nezávislých aktuátorů. Z hlediska strukturální syntézy, viz Kapitola 2, se jedná o manipulátory s plně určenou kinematickou strukturou neboli manipulátory *neredundantní*.

V současnosti se nejen na akademické sféře, ale i v průmyslové praxi, stále více objevují tzv. manipulátory *redundantní*. Věnujme se dále právě redundantním architektuám manipulátorů, neboť právě redundantní manipulátory budou dále využity pro definici vlastního přístupu k optimalizaci robotických architektur.

Redundantní manipulátory se vyznačují tím, že počet nezávislých aktuátorů manipulátoru převyšuje počet DoF jeho koncového efektoru. Na takto vzniklou situaci lze nahlížet dvěma principiálně odlišnými způsoby, které však vedou na identické projevy kinematické redundance u manipulátorů.

Počet nezávislých aktuátorů manipulátoru převyšuje počet DoF pracovního prostoru

Taková situace nastává v případě, kdy pracovní prostor manipulátoru má menší počet DoF než je počet nezávislých aktuátorů. Typickým příkladem je planární paralelní manipulátor, který polohuje bod E v rovině xy , tedy vykazuje 2 translační DoF koncového efektoru. Manipulátor obsahuje trojici kinematických řetězců typu \underline{RRR} s třemi rotačními aktuátory připevněnými na základně robotu. Schématické znázornění manipulátoru je na Obrázku 3.24. Je zřejmé, že manipulátor vykazuje redundanci stupně $n_{red} = (\# \text{ nezávislých aktuátorů} - \# \text{ DoF konc. efektoru}) = 3 - 2 = 1$ (1 DoF), tzn. existuje (vyjma singulárních poloh) nekonečně mnoho řešení IGM, které je parametrisováno parametrem dimenze 1. Parametrem můžeme rozumět např. hodnotu natočení v jednom z trojice aktuátorů, ostatní polohy aktuátorů lze dopočítat ze znalosti polohy bodu E .



Obrázek 3.24.: Planární paralelní redundantní manipulátor

V průmyslové praxi se také velmi často objevuje konfigurace 6 DoF průmyslového robotu v kombinaci s lineárním pojezdem, který přesouvá celý manipulátor v jednom či více daných směrech (typicky manipulátor umístěný na jednoosém pojezdu podél výrobní linky umožňující úplné polohování a orientování koncového efektoru v prostoru \Rightarrow 6 DoF), viz Obrázek 3.25. V takovém případě dostáváme redundantní manipulátor s celkem 7 nezávislými aktuátory a 6 DoF koncového efektoru, tedy se stupněm redundance $n_{red} = 7 - 1 = 1$. Pro jednoznačné řešení IGM tak lze opět jeden z aktuátorů (typicky polohu lineárního pojezdu) označit jako parametr (dimenze 1).



Obrázek 3.25.: Průmyslový manipulátor firmy KUKA, www.kuka-robotics.com, umístěný na lineárním jednoosém pojezdu.

Jako další zástupce redundantních manipulátorů spadající do zmíněné kategorie jsou multiredundantní manipulátory, často označované jako „snake robots“. Jedná se o sériové či sérioparalelní konstrukci manipulátorů, které umožňují libovolný pohyb v prostoru (tzn. 6 DoF koncového efektoru), avšak počet n_{akt} jejich nezávislých aktuátorů je výrazně vyšší než nutných 6 aktuátorů pro splnění požadovaného pohybu koncového efektoru. V takovém případě existuje opět nekonečně mnoho řešení IGM a manipulátor potom vykazuje vysoký stupeň redundance, který je dán opět jako $n_{red} = (\# \text{ nezávislých aktuátorů} - \# \text{ DoF konc. efektoru}) = n_{akt} - 6$. Jinými slovy řešení IGM lze parametrizovat parametrem dimenze n_{red} . Příkladem takových manipulátorů mohou být např. manipulátory firmy *OC robotics*, viz Obrázek 3.26.

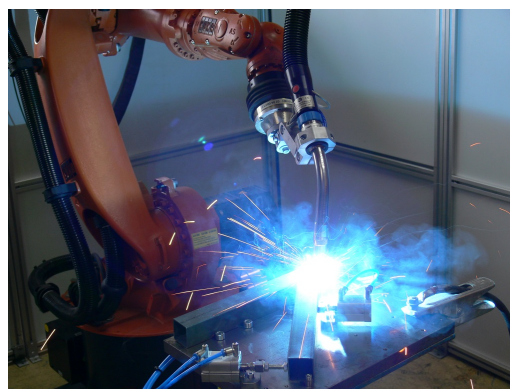
Obrázek 3.26.: Snake robot od firmy OC robotics, <http://www.ocrobotics.com/>

Počet nezávislých aktuátorů převyšuje požadovaný počet DoF vykonávané úlohy

V tomto případě se jedná o odlišný náhled, neboť manipulátor je vzhledem k počtu DoF pracovního prostoru neredundantní (6-ti osý průmyslový manipulátor se 6 nezávislými aktuátory), ale počet DoF potřebných k vykonání dané úlohy je nižší. Typickým příkladem může být 5-ti osé CNC obrábění či obloukové svařování drátovou elektrodou vykonávané 6-ti osým průmyslovým robotem, viz Obrázek 3.27. V obou uvedených případech je zřejmé, že počet DoF, které jsou danou úlohou vyžadovány je 5, neboť často nevyžadujeme aktivně řídit DoF odpovídající orientaci pracovního nástroje manipulátoru podél své podélné osy (v případě CNC obrábění se jedná o orientaci kolem osy rotujícího obráběcího nástroje, v případě obloukového svařování o orientaci kolem osy drátové elektrody). Jinými slovy obě zmíněné úlohy vyžadují řídit polohu pracovního nástroje v prostoru (3 translační DoF) a směr jeho osy (2 rotační DoF), což vede na 5 DoF úlohy. Stupeň redundance v případě vykonávání takové úlohy průmyslovým 6-ti osým manipulátorem je $n_{red} = 6 - 5 = 1$.



(a) 5-ti osé CNC obrábění



(b) Obloukové svařování drátovou elektrodou

Obrázek 3.27.: Redundance v případě využití 6-ti osých průmyslových robotů k úlohám vyžadujícím pouze 5 DoF

Z výše uvedeného vyplývá, že ve všech případech dostáváme určitou volnost v plánování pohybu redundantních manipulátorů, a to ať už je redundance dána libovolným výše zmíněným aspektem. Zjednodušeně řečeno, v případě redundantního manipulátoru vždy obecně (s výjimkou singulárních poloh) existuje nekonečně mnoho řešení IGM a potažmo tak IJK, které lze parametrizovat parametrem dimenze n_{red} , tzv. stupněm redundance. V nejjednodušším případě si lze představit, že jako parametr můžeme považovat libovolných

n_{red} aktuátorů manipulátoru. Pro danou polohu (rychlost, zrychlení) těchto n_{red} parametrů (aktuátorů) a danou polohu (rychlost, zrychlení) koncového efektoru manipulátoru poté dokážeme již jednoznačně¹⁰ vypočítat požadovanou polohu (rychlost, zrychlení) všech aktuátorů zbývajících. Je intuitivně zřejmé, že stupeň redundance n_{red} nám kvantifikuje volnost ve výběru konkrétního řešení. Z hlediska mechaniky manipulátoru parametrizace řešení IGM parametrem dimenze n_{red} určuje tzv. *vnitřní uspořádání manipulátoru* nebo *vnitřní konfiguraci manipulátoru* při zachování požadované polohy (pozice a orientace) koncového efektoru. Změnou parametru při zachování požadované polohy koncového efektoru manipulátoru lze tak vnitřně „překonfigurovat“ ramena a klouby manipulátoru. Pro názornost uveďme jednoduchý příklad redundantního planárního sériového manipulátoru v Příkladu 3.8.

★ Příklad 3.8 (Redundance v případě planárního sériového manipulátoru)

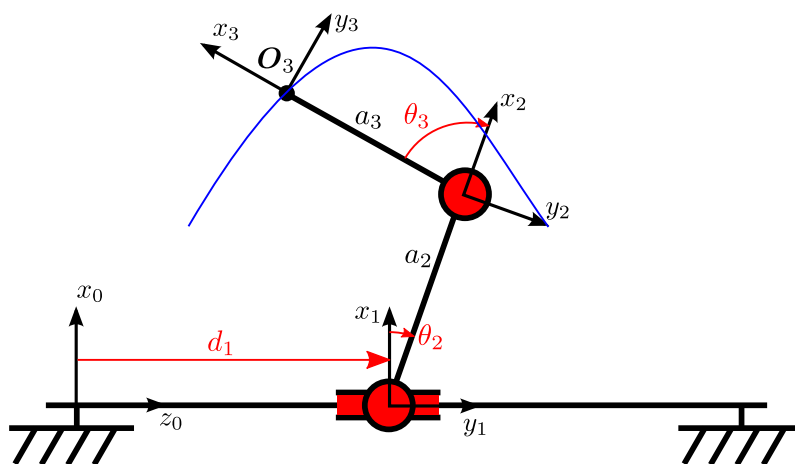
Předpokládejme, že standardní dvouramenný planární sériový manipulátor vybavíme lineárním pojezdem (umístíme celý manipulátor na jednoosý pojezd). Vzniklý manipulátor lze popsat pomocí D-H úmluvy, viz Tabulka 3.5, jeho schématické uspořádání je znázorněno na Obrázku 3.28.

Joint i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	d_1	0	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	θ_2	a_2	0
3	0	θ_3	a_3	0

Tabulka 3.5.: D-H parametry dvouramenného planárního sériového manipulátoru

kde kloubové souřadnice \mathbf{Q} , zobecněné souřadnice \mathbf{X} definující polohu koncového efektoru a kinematické návrhové parametry ξ jsou dány jako:

$$\mathbf{Q} = [d_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T, \quad \mathbf{X} = [\mathbf{O}_3[1] \quad \mathbf{O}_3[3]]^T, \quad \xi = [a_2 \quad a_3]^T$$

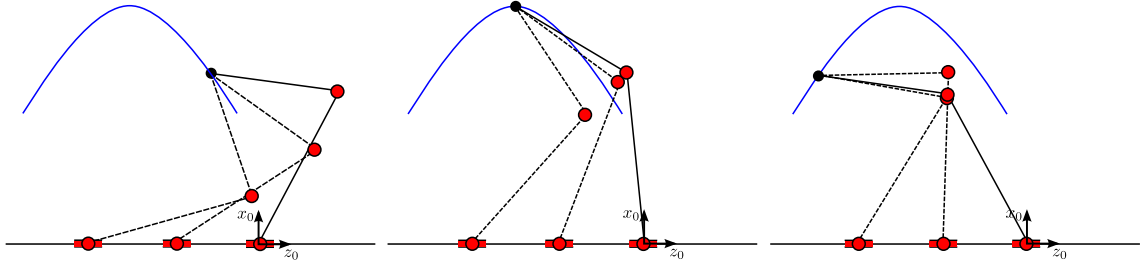


Obrázek 3.28.: Dvouramenný planární sériový manipulátor s vyznačenou trajektorií požadovaného pohybu (modře)

Takový manipulátor je zcela určitě manipulátorem redundantním, neboť pro polohování koncového efektoru ve svém 2 DoF pracovním prostoru (pohybu v ose x a z) využívám tři

¹⁰Jednoznačně rozumíme ve smyslu nalezení konečného počtu vzájemně izolovaných řešení IGM.

nezávislé aktuátory tvořící kinematický řetězec typu **PRR**. Stupeň redundance manipulátoru je tedy $n_{red} = 3 - 2 = 1$ a lze tedy parametrizovat nekonečně mnoho řešení jednou z kloubových souřadnic, např. kloubovou souřadnicí d_1 . Na Obrázku 3.29 je znázorněn simulační model v prostředí SimMechanics pro manipulátor pohybující se podél znázorněné trajektorie za současné změny polohy lineárního pojezdu (parametrizované kloubové souřadnice d_1).



Obrázek 3.29.: Pohyb manipulátoru znázorněný ve třech vybraných bodech podél trajektorie pro parametrizaci řešení IGM kloubovou souřadnicí $d_1 = \{0m, -0.2m, -0.3m\}$

★

Nyní je intuitivně zřejmé, že pro redundantní manipulátory v obecném případě vždy existuje nekonečně mnoho řešení IGM (IIK). Z matematického hlediska tento fakt vyplývá ze samotného řešení rovnic kinematického omezení manipulátoru, pro DGM nutně platí:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}, \xi) = \mathbf{X} \quad (3.117)$$

kde \mathbf{F} je nelineární funkce DGM, \mathbf{Q} jsou kloubové souřadnice a \mathbf{X} je poloha koncového efektoru.

Budeme-li nyní uvažovat, že počet DoF koncového efektoru manipulátoru je roven m , obsahuje vektor \mathbf{X} právě m nezávislých zobecněných souřadnic definující polohu koncového efektoru¹¹. Redundantní manipulátor obsahuje n ($n > m$) nezávislých kloubových souřadnic, které jsou dány vektorem \mathbf{Q} . Z rovnice (3.117) dostáváme tedy celkem m nezávislých rovnic pro n neznámých, pro $n > m$, a tedy lze předpokládat, že existuje nekonečně mnoho řešení IGM. Zatímco v prostoru poloh kloubových a zobecněných souřadnic, viz (3.117), by provedení korektního důkazu existence nekonečně mnoha řešení bylo komplikované, v prostoru rychlostí kloubových a zobecněných souřadnic je situace již zcela zřejmá, neboť pro danou polohu manipulátoru dostáváme soustavu lineárních rovnic kinematického omezení:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (3.118)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ je kinematický jakobián.

Lineární soustava rovnic (3.118) obsahuje tedy celkem m nezávislých rovnic pro n neznámých $\dot{\mathbf{Q}}$ a zcela jistě tak existuje nekonečně mnoho řešení pro rychlosti kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$. V dané konkrétní poloze koncového efektoru manipulátoru lze tak vybrat nekonečně mnoho kloubových rychlostí vedoucí k pohybu koncového efektoru manipulátoru požadovaným směrem.

¹¹Obecně lze předpokládat, že pokud soustava nelineárních rovnic $\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{X}$ obsahuje na pravé straně nezávislé souřadnice polohy koncového efektoru, např. translaci v osách \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} , jsou také dílčí rovnice na levé straně nezávislé. Analýza nelineárních rovnic a jejich řešení s ohledem na počet řešení byla využita např. v [14].

Nabízí se tedy otázka, z jakého důvodu bychom vůbec redundantní manipulátory vyvíjeli, pokud připustíme, že řešení inverzních kinematických úloh (IGM, IIK) se značně komplikuje? Odpověď se skrývá právě v hledání *optimálního* pohybu redundantních manipulátorů. Prioritním požadavkem při návrhu řízení jakéhokoliv manipulátoru je v drtivé většině případů dodržení pohybu koncového efektoru manipulátoru podél dané trajektorie. V případě neredundantních manipulátorů tento požadavek jednoznačně definuje pohyb všech kloubů. V případě manipulátorů redundantních je tato situace mnohem zajímavější, neboť vedle požadavku na dodržení požadované trajektorie lze stále polohovat jednotlivé klouby nekonečně mnoha způsoby (parametrizace pohybu kloubů parametrem s dimenzí n_{red}). Vedle primárního požadavku tak lze dále diktovat nějaké sekundární kritérium, které zajistí, že se bude manipulátor podél definované trajektorie pohybovat v jistém ohledu optimálně, viz motivační Příklad 3.9. Jmenujme některé požadavky na optimální pohyb manipulátoru, na které lze v případě řešení dané úlohy manipulátorem narazit. Mezi nejčastější případy lze zmínit plánování pohybu manipulátoru za účelem:

- Maximalizace vzdálenosti od singulárních poloh
- Maximalizace polohy aktuátorů od svých krajních poloh (dorazů)
- Maximalizace vzdálenosti jednotlivých ramen manipulátoru a koncového efektoru od překážek
- Minimalizace vzdálenosti ramen robotu od předepsané trajektorie (multiredundantní manipulátory)
- Minimalizace sil/momentů působících na aktuátory manipulátoru
- Minimalizace rychlostí/zrychlení, které je třeba vyvinout aktuátory

★ Příklad 3.9 (Optimalizace pohybu manipulátoru - motivační příklad)

Předpokládejme stejný manipulátor jako v Příkladu 3.8 a uvažujme, že ramena manipulátoru s délkami $a_2 = 0.4m$, $a_3 = 0.3m$ jsou vyrobena jako železné tyče s průměrem $0.01m$, vozík lineárního pojezdu má hmotnost $0.3kg$ a vektor gravitačního zrychlení míří v záporném směru osy \mathbf{x}_0 . Plánované trajektorie pohybu koncového efektoru manipulátoru je dána trojicí bodů \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} vzájemně propojené kubickým splinem a profil ujeté dráhy podél trajektorie, tečná rychlost a zrychlení, odpovídají časově optimálnímu profilu s omezením na maximální rychlost $v_{max} = 0.3 \frac{m}{s}$ a zrychlení $a_{max} = 0.3 \frac{m}{s^2}$, viz Kapitola A.11. Předpokládejme, že chceme využít redundance manipulátoru stupně $n_{red} = 1$ k optimalizaci pohybu za účelem minimalizace funkce:

$$J = \int_0^{t_f} (\tau_1^2(t) + \tau_2^2(t) + \tau_3^2(t)) dt \quad (3.119)$$

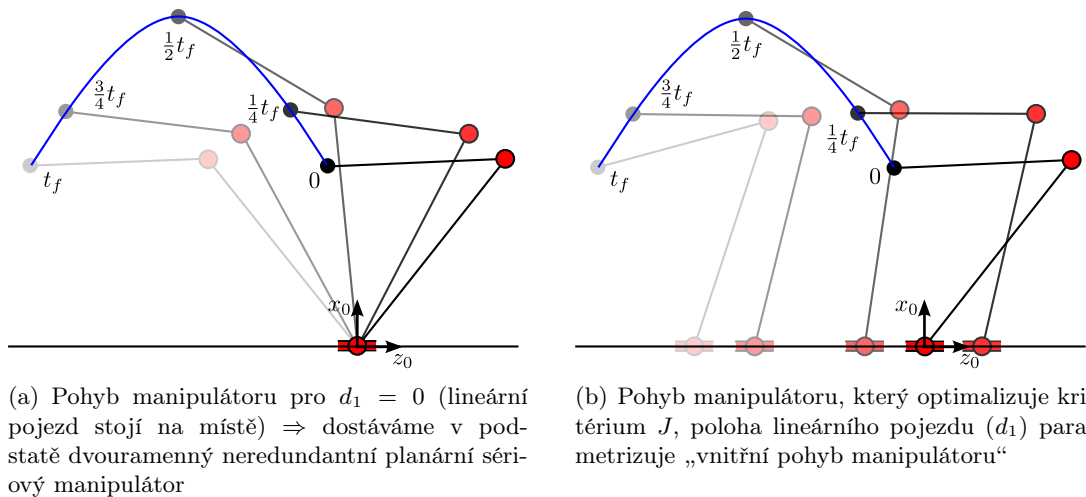
kde $\tau_i(t)$, $i = 1 \dots 3$ jsou silové momenty působící v kloubech manipulátoru a t_f je čas potřebný pro ujetí plánované trajektorie.

Nejprve předpokládejme, že vozík lineárního pojezdu stojí, tzn. $d_1 = 0$. Výsledný pohyb manipulátoru je znázorněn na Obrázku 3.30(a). Výsledný pohyb kloubových souřadnic je znázorněn plnou čarou na Obrázku 3.31. Síly/silové momenty v jednotlivých aktuátorech a hodnota integrandu $\tau_1^2(t) + \tau_2^2(t) + \tau_3^2(t)$ z definice kritéria (3.119) je znázorněna plnou čarou na Obrázku 3.32. Poznamenejme, že integrand odpovídá kvadrátu normy vektoru kloubových sil/momentů $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$. Hodnota kritéria J je potom dána plochou pod křivkou integrandu pro čas $0 \dots t_f$. Hodnota kritéria pro uvedený případ bez optimalizace pohybu lineárního pojezdu je $J = 26.52$.

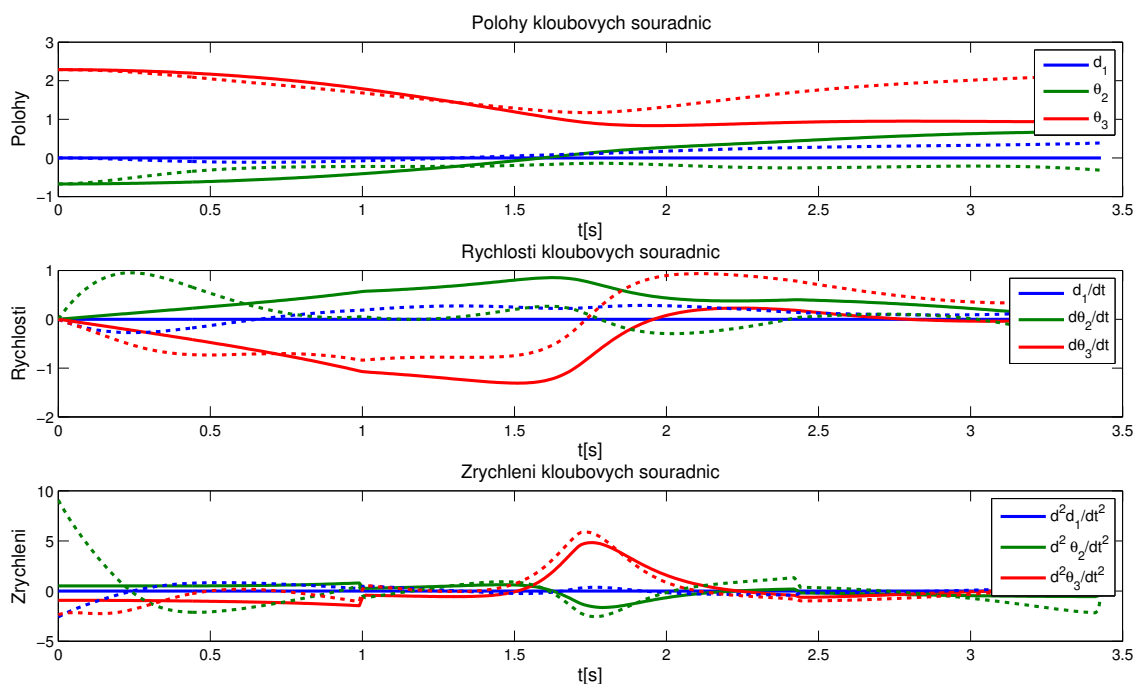
Uvažujme nyní, že je možné spočítat takový pohyb lineárního pojezdu, tedy 1-dimenziální parametrizaci pohybu redundantního manipulátoru, která optimalizuje kritérium J (zatím ponechme stranou strategii výpočtu takového řízení pohybu), pohyb redundantního

manipulátoru je znázorněn na Obrázku 3.30(b). Výsledný pohyb kloubových souřadnic je znázorněn čárkovanou čarou na Obrázku 3.31. Síly/silové momenty v jednotlivých aktuátorech a současně hodnota integrandu $\tau_1^2(t) + \tau_2^2(t) + \tau_3^2(t)$ je pro porovnání znázorněna čárkovanou čarou na Obrázku 3.32. Z uvedených průběhů je zřejmé, že optimalizovaný pohyb redundantního manipulátoru vede na výrazné snížení sil/silových momentů v jednotlivých aktuátorech výsledná hodnota kritéria $J = 5.66$ je téměř 5-ti násobně menší než v případě, kdy se lineární pojezd nepohybuje a je fixován v počátku.

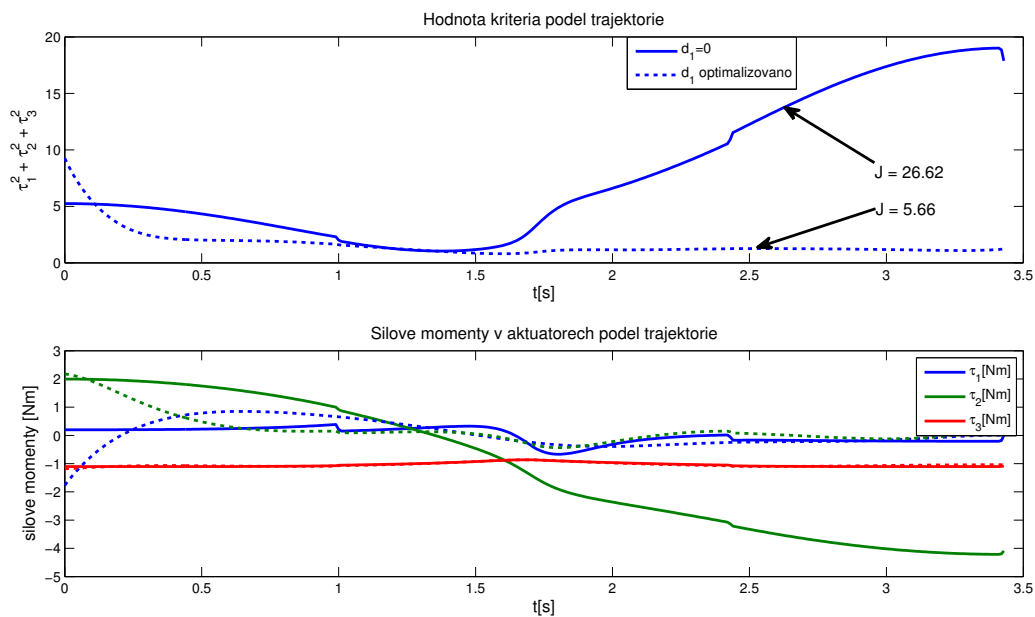
V případě uvedeného redundantního robotu je tedy prioritně dodržen požadavek na pohyb koncového efektoru podél zadané trajektorie a v důsledku redundance následně optimalizováno sekundární kritérium (3.119). Poznamenejme, že uvedené kritérium optimality je ekvivalentní s požadavkem na minimalizaci celkové energie potřebné k projetí zadané trajektorie koncovým efektem manipulátoru, viz Kapitola A.8. Tento fakt hraje významnou roli v případě robotických systémů, kde právě energetická úspora hraje klíčovou roli, např. manipulátory poháněné z baterií napájených solárními články (manipulace ve vesmíru), robotická ramena jako součásti autonomních mobilních robotů, velká robotická pracoviště, atd.



Obrázek 3.30.: Porovnání pohybu redundantního manipulátoru pro parametrizaci polohou lineárního pojezdu d_1



Obrázek 3.31.: Pohyb kloubových souřadnic manipulátoru bez optimalizace pohybu lineárního pojezdu a s optimalizací (čárkovaně)



Obrázek 3.32.: Integrand kritéria J z rovnice (3.119) $\tau_1^2(t) + \tau_2^2(t) + \tau_3^2(t)$ a průběhy jednotlivých kloubových sil/momentů τ_1, τ_2, τ_3 pro pohyb manipulátoru bez optimalizace a s optimalizací (čárkovaně).



Optimální řízení redundantních manipulátorů - nový směr k optimalizaci robotických architektur?

Právě optimální řízení redundantních manipulátorů bylo inspirací pro nový přístup k optimalizaci robotických architektur. Základní idea spočívá v možnosti náhledu do „vnitřního chování“ redundantních manipulátorů během (nalezeného) optimálního pohybu jeho kloubových souřadnic při plnění konkrétního úkolu (sledování požadované trajektorie koncovým efektozem). Budeme-li předpokládat, že kloubové souřadnice manipulátoru můžou být voleny jako libovolný výběr z parametrů popisující jeho kinematickou architekturu (typicky např. D-H parametry), lze na základě jejich optimálního pohybu hledat takové kloubové souřadnice, které:

- By měly být voleny jako fixní na určité hodnotě, neboť vykazují např. malou varianci během pohybu manipulátoru) - vede na úlohy *statické parametrické optimalizace*
- By měly být voleny jako aktuátory, neboť vykazují největší varianci během pohybu manipulátoru - vede na dílčí úlohu *strukturální optimalizace*

Podrobně jsou předložené myšlenky diskutovány a demonstrovány na příkladech v Kapitole 4.

Za účelem zhodnocení možností k optimálnímu řízení pohybu redundantních manipulátorů jsou proto v Kapitole 3.4.1 analyzovány současné standardní přístupy k optimalizaci pohybu redundantních manipulátoru a na vlastních demonstračních příkladech identifikovány základní nedostatky (plynoucí především z lokální přístupu k optimalizaci). V navazující Kapitole 3.4.2 je uveden nový přístup k optimalizaci pohybu redundantních manipulátorů založený na principech optimálního řízení (s uvažováním globálního kritéria optimality).

3.4.1. Standardní přístupy k řízení redundantních manipulátorů

Zabývejme se nyní některými standardními přístupy k řešení IGM (IJK) pro redundantní manipulátory, které jsou citovány v literatuře a pokusme se identifikovat jejich klíčové vlastnosti a demonstrovat je na vlastních příkladech. Vzhledem k tomu, že se jedná výhradně o zobecnění numerických algoritmů řešení IGM v případě *plně určených (neredundantních)* manipulátorů, za účelem uceleného náhledu na uvažovanou problematiku se nejprve zabývejme právě takovými algoritmy. Je dobře známo, že problém inverzní kinematiky pro sériové *neredundantní* manipulátory je v obecném případě úloha relativně komplikovaná, a to především z následujících důvodů:

- V obecném případě lze ukázat, že *neexistuje analytické řešení IGM*. Např. je ukázáno, viz [87], [44], [125], že pro 6 DoF sériový manipulátor s libovolně uspořádanými osami dílčích kloubů typu **R** (sériový kinematický řetězec **RRRRRR**) lze řešení IGM převést na řešení polynomiální rovnice jedné proměnné (někdy nazývána jako *charakteristický polynom* manipulátoru). Nalezená polynomiální rovnice je 16-tého řádu, je minimální a existuje pro ni až 16 různých reálných kořenů¹². Lze dokázat, že v případě polynomu s obecnými koeficienty a řádem větším než čtyři, neexistuje analytické řešení (řešení v uzavřeném tvaru, řešení v radikálech, tzn. neexistuje vztah s konečným počtem členů¹³).

¹²Princip nalezení charakteristického polynomu lze stručně popsat následovně: Součin homogenních transformačních matic formulující řešení DGM je vhodně přeuspořádán a některé neznámé lze tak přímo eliminovat. Nahrazením členů $\sin(\theta_i)$, $\cos(\theta_i)$ známou substitucí $x_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$ a následnou dialytickou eliminací [90] lze získat právě charakteristický polynom manipulátoru jako polynom 16 stupně v jedné proměnné x_i . Zpětnou substitucí lze pak dopočítat zbývající členy x_i a následně θ_i .

¹³Toto tvrzení je známo jako *Abel-Ruffini theorem* či *Abel's impossibility theorem*, viz např. [150].

- Metody založené na řešení IGM prostřednictvím nalezení charakteristického polynomu (např. již zmíněná dialytická eliminace, Gröbnerovy báze [14]) přinášejí zásadní problémy vzhledem ke stabilitě a přesnosti řešení (numerické algoritmy hledání kořenů polynomů vysokých řádů).
- Výpočetní náročnosti takových algoritmů jsou vysoké (vícenásobné substituce do složitých vztahů, numerické hledání kořenů polynomu, atd.) a jejich implementace do systémů řízení manipulátorů v reálném čase je v podstatě nemožná.
- Existence vícenásobného řešení IGM vyžaduje implementovat vhodné nástroje k výběru korektního řešení v daném okamžiku výpočtu (blízkost po sobě jdoucích řešení atd.). Je známo, že v drtivé většině případů jsou jednotlivá řešení umístěna v uzavřených podprostorech kloubových souřadnic, které jsou od sebe odděleny existencí singulární polohy manipulátoru.

Právě z uvedených důvodů se často přistupuje k numerickým metodám řešení IGM. Numerická řešení výpočtu IGM pro sériové neredundantní manipulátory jsou založena na lineárním vztahu mezi rychlostmi kloubových $\dot{\mathbf{Q}}$ a zobecněných $\dot{\mathbf{X}}$ souřadnic, poznamenejme, že lineární vztah mezi rychlostmi je relevantní pro danou konstantní okamžitou polohu kloubových souřadnic \mathbf{Q} :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (3.120)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ je jakobián manipulátoru s n aktuátory (kloubovými souřadnicemi), $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ a m zobecněnými souřadnicemi, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$. Poznamenejme, že pro neredundantní manipulátor zřejmě platí $n = m$.

Předpokládejme nyní, že jakobián $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ je regulární maticí pro danou polohu \mathbf{Q} , tzn. manipulátor se nenachází v singulární poloze, hodnost r jakobiánu je tedy:

$$r = \text{Rank}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) = \min(m, n) = m = n \quad (3.121)$$

Inverzí rovnice (3.120), zavedením diskretních časových okamžiků $t_k, t_{k+1} \dots$, časového přírůstku $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ a následnou aproximací derivace $\dot{\mathbf{Q}}$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \frac{\mathbf{Q}(t_{k+1}) - \mathbf{Q}(t_k)}{\Delta t} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}(t_k)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t_k) \\ \mathbf{Q}(t_{k+1}) &= \mathbf{Q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}(t_k)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t_k) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (3.122)$$

Bohužel, výpočet IGM daný rovnicí (3.122), využívající přístup klasické numerické integrace rychlosti koncového efektoru, v praktických aplikacích nelze použít, neboť vlivem numerických nepřesností dochází k nasčítávání numerických chyb v čase (tzv. drift).

Alternativním přístupem k výpočtu je zavedení chyby \mathbf{e} mezi požadovanou \mathbf{X}_d a aktuální \mathbf{X} polohou zobecněných souřadnic získanou z dostupných hodnot měření polohy kloubových souřadnic \mathbf{Q} prostřednictvím DGM. Odpovídající časové derivace lze získat dosazením (3.120):

$$\mathbf{e} = \mathbf{X}_d - \mathbf{X} = \mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}) \quad (3.123)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{X}}_d - \dot{\mathbf{X}}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{X}}_d - \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (3.124)$$

kde $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ označuje řešení DGM (pro sériové manipulátory vždy známé a analyticky řešitelné).

Rovnice (3.124) reprezentuje vývoj chyby výpočtu zobecněných souřadnic \mathbf{X} v čase. Vhodnou volbou závislosti mezi $\dot{\mathbf{e}}$ a \mathbf{e} dostáváme diferenciální rovnici popisující vývoj chyby \mathbf{e} . Položme proto $\dot{\mathbf{e}}$ rovno \mathbf{K} -maticovému násobku záporně vzaté odchylky \mathbf{e} :

$$\dot{\mathbf{e}} \stackrel{!}{=} -\mathbf{K} \cdot \mathbf{e} \quad (3.125)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_d - \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q})] \quad (3.126)$$

Pokud je matice \mathbf{K} volena jako pozitivně stabilní¹⁴ (a většinou diagonální se stejnými kladnými reálnými prvky na diagonále), lineární diferenciální rovnice systému chyby \mathbf{e} je asymptoticky stabilní, chyba $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{G}(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{X}_d$ a tedy \mathbf{Q} konverguje ke skutečným hodnotám kloubových souřadnic odpovídajícím aktuální poloze koncového efektoru.

Rovnice (3.126) lze přepsat do tvaru:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}) \left(\dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q})] \right) \quad (3.127)$$

Aproximací derivace $\dot{\mathbf{Q}}$ v (3.127) dostáváme předpis pro korektní numerické řešení IGM neredundantních sériových manipulátorů (někdy je algoritmus nazýván jako *algoritmus dynamické inverze*):

$$\mathbf{Q}(t_{k+1}) = \mathbf{Q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}(t_k)) \left(\dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_k))] \right) \Delta t \quad (3.128)$$

■ Poznámka 3.4 (Newton-Raphsonův algoritmus řešení IGM)

Poznamenejme, že vztah (3.128) pro $\dot{\mathbf{X}}_d = \mathbf{0}$ (hledáme řešení pro manipulátor v klidu) je ekvivalentní s Newton-Raphsonovým algoritmem numerického hledání řešení \mathbf{Q} rovnice kinematického omezení (DGM):

$$\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (3.129)$$

Toto tvrzení lze dokázat následovně. Taylorovým rozvojem funkce DGM $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ v čase t_k dostáváme aproximaci v čase t_{k+1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_{k+1})) &\approx \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_k)) + \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t))}{\partial \mathbf{Q}(t)} \right|_{\mathbf{Q}(t)=\mathbf{Q}(t_k)} \cdot (\mathbf{Q}(t_{k+1}) - \mathbf{Q}(t_k)) \\ \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_{k+1})) &\approx \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_k)) + \mathbf{J}(\mathbf{Q}(t_k)) \cdot (\mathbf{Q}(t_{k+1}) - \mathbf{Q}(t_k)) \end{aligned} \quad (3.130)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t))}{\partial \mathbf{Q}(t)}$ je z definice jakobián manipulátoru a časový diferenciál $\Delta t = t_{k+1} - t_k$.

Dosazením rovnic (3.129, 3.130) a vhodným přeuspořádáním dostáváme:

$$\mathbf{Q}(t_{k+1}) = \mathbf{Q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}(t_k)) (\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_k))) \quad (3.131)$$

Porovnáme-li algoritmus dynamické inverze (3.128) s Newton-Raphsonovým algoritmem (3.131) pro $\dot{\mathbf{X}}_d = \mathbf{0}$ je patrné, že se od sebe liší pouze konstantním (positivně definitním) zesílením $\mathbf{K} \cdot \Delta t$, které určuje délku kroku numerického algoritmu (může tak ovlivnit nejen rychlost, ale i existenci samotné konvergence algoritmu). ■

Zabývejme se nyní numerickými algoritmy řešení IGM pro manipulátory redundantní. Z analýzy vlastností jakobiánu manipulátoru v Kapitole A.4 lze vyzorovat následující vlastnosti závislostí mezi rychlostmi kloubových a zobecněných souřadnic. Pro redundantní

¹⁴Všechna vlastní čísla *pozitivně stabilní matice* mají kladnou reálnou část.

manipulátory platí, že počet nezávislých kloubových souřadnic $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ převyšuje počet nezávislých zobecněných souřadnic $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$, kde $m < n$. Pro vykonávání úlohy vyžadující m DoF koncového efektoru manipulátoru máme k dispozici tedy n nezávislých aktuátorů. Hodnota matice jakobiánu r pro manipulátor nenacházející se v singulární poloze tedy bude dána jako:

$$r = \text{Rank}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) = \min(m, n) = m \quad (3.132)$$

Vzhledem k tomu, že výsledný počet DoF koncového efektoru je dán hodnotou jakobiánu, manipulátor umožňuje realizovat všech požadovaných m DoF svého koncového efektoru. Zřejmě však existuje nulový prostor $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ nenulové dimenze

$$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = n - r = n - m \quad (3.133)$$

dané rozdílem mezi počtem nezávislých aktuátorů a nezávislých zobecněných souřadnic. V tomto prostoru leží potom takové nenulové kloubové rychlosti $\dot{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{0}$, které generují nulový pohyb koncového efektoru $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$. Lze tedy říci, že pokud nějaké kloubové rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}^*$ jsou řešením rovnice (3.120), tzn. získáváme zobecněné rychlosti $\dot{\mathbf{X}}^*$:

$$\dot{\mathbf{X}}^* = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}^* \quad (3.134)$$

Potom dostáváme shodné zobecněné rychlosti $\dot{\mathbf{X}}^*$ i pro kloubové rychlosti:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}^* + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0 \quad (3.135)$$

kde matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$, respektive její sloupce generují nulový prostor jakobiánu $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$, tzn. $\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{N}(\mathbf{J})$ a $\dot{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor.

Toto tvrzení lze dokázat dosazením řešení (3.135) do vztahu pro závislost rychlostí (3.120):

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J} \cdot (\dot{\mathbf{Q}}^* + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0) = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^* + \underbrace{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0}_{\substack{=0 \\ \in \mathcal{N}(\mathbf{J})}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^* = \dot{\mathbf{X}}^* \quad (3.136)$$

Jinými slovy můžeme říci, že pro redundantní manipulátory lze nalézt takové rychlosti kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0$, které **negenerují** rychlost (tedy ani změnu polohy) koncového efektoru manipulátoru $\dot{\mathbf{X}}$ a způsobují pouze „vnitřní pohyb“ mechanické konstrukce manipulátoru. Toho lze využít pro překonfigurování manipulátoru při konstantní poloze koncového efektoru za účelem splnění či optimalizování nějakého přídavného kritéria, např. udržování manipulátoru co nejdál od možných singulárních poloh, od limitních poloh aktuátorů či od překážek v pracovním prostoru.

Předpokládejme, že chceme docílit zadaného pohybu $\dot{\mathbf{X}}$ koncového efektoru redundantního manipulátoru, tedy splnění podmínky $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}$ (primární kritérium - vazební podmínka, která musí být vždy splněna) a zároveň budeme požadovat, aby se rychlosti kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ co nejvíce blížily požadované hodnotě $\dot{\mathbf{Q}}_0$ (dané sekundárním, přídavným kritériem).

Definujme tedy kritériální funkci:

$$Q(\dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}}_0)^T \cdot (\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}}_0) \quad (3.137)$$

Prostřednictvím Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ zavedeme rozšířenou kritériální funkci zohledňující vazební podmínku:

$$Q(\dot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}}_0)^T \cdot (\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}}_0) + \boldsymbol{\lambda}^T (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) \quad (3.138)$$

Z nutné podmínky existence extrému dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\dot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} &= \dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}}_0 - \mathbf{J}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \dot{\mathbf{Q}}_0 + \mathbf{J}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (3.139)$$

Vynásobením rovnice (3.139) zleva \mathbf{J} a vyjádřením multiplikátoru $\boldsymbol{\lambda}$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}}_{\dot{\mathbf{X}}} &= \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda} &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Dosazením rovnice (3.140) zpět do (3.139) dostáváme výsledné rychlosti kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ splňující primární a minimalizující sekundární kritérium.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \dot{\mathbf{Q}}_0 + \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0) \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0 \end{aligned} \quad (3.141)$$

kde $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}$ je pravá zobecněná inverze jakobiánu \mathbf{J} .

Pro $\dot{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{0}$ rovnice (3.141) přejde na tvar standardní zobecněné inverze $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{X}}$ a sekundární kritérium tak minimalizuje velikosti rychlostí $\|\dot{\mathbf{Q}}\|$ kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$, viz kritérium dané rovnicí (3.137). Z porovnání výsledku (3.141) s rovnicí (3.135) je zřejmé, že člen $\mathbf{J}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{X}}$ představuje řešení $\dot{\mathbf{Q}}^*$ a člen $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})$ matici \mathbf{P} generující nulový prostor jakobiánu \mathbf{J} prostřednictvím souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}_0$.

Nechť je vektor $\dot{\mathbf{Q}}_0$ dán gradientem sekundární kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$ jako¹⁵:

$$\dot{\mathbf{Q}}_0 = k_0 \cdot \left(\frac{\partial w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T \quad (3.142)$$

kde $k_0 \in \mathbb{R}$ je konstanta zesílení.

Minimalizováním vzdálenosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a $\dot{\mathbf{Q}}_0$ z kritéria (3.137) se tedy optimálně blížíme ke gradientu sekundární kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$, tedy manipulátor se pohybuje takovým způsobem, že kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$ je maximalizována při současném dodržení požadované trajektorie pohybu koncového efektoru (primární kritérium).

Mezi nejčastější volby kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$ patří následující:

- Vzdálenost od singulárních poloh:

$$w(\mathbf{Q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)} \quad (3.143)$$

kde kritériální funkce představuje odmocninu ze součinu singulárních čísel σ_i jakobiánu \mathbf{J} . Maximalizováním kritériální funkce tedy rekonfigurujeme mechaniku manipulátoru takovým způsobem, aby se nacházel co nejdále od svých singulárních poloh ($\sigma_i = 0$).

- Vzdálenost od limitních poloh n aktuátorů:

$$w(\mathbf{Q}) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_i^{max} - q_i^{min}} \right)^2 \quad (3.144)$$

kde $\bar{q}_i = q_i^{min} + \frac{q_i^{max} - q_i^{min}}{2}$ a q_i^{max} resp. q_i^{min} označuje maximální resp. minimální polohu aktuátoru. Maximalizací kritériální funkce rekonfigurujeme mechaniku manipulátoru takovým způsobem, aby se aktuátory manipulátoru udržovaly co nejdále od svých limitních poloh.

¹⁵Metoda je někdy nazývána jako *gradient projection method*

Nahradíme-li nyní inverzi \mathbf{J}^{-1} v algoritmu výpočtu IGM (3.126) pro neredundantní manipulátory zobecněnou inverzí se zahrnutým sekundárním kritériem (3.141) dostáváme:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}) \left(\dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q})] \right) + \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \right) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0 \quad (3.145)$$

Vynásobením nalezeného vztahu (3.145) pro výpočet optimálních kloubových rychlostí zleva jakobiánem \mathbf{J} dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}} &= \underbrace{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^\dagger}_{=\mathbf{I}} \left(\dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q})] \right) + \overbrace{\left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}}_{=\mathbf{I}} \right)}^{=0} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0 \\ \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}} &= \dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q})] \end{aligned} \quad (3.146)$$

neboť $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}$.

Výsledný vztah odpovídá přímo rovnici (3.126) a opět platí, že pokud je matice \mathbf{K} volena jako pozitivně stabilní, lineární diferenciální rovnice systému chyby $\mathbf{e} = \mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q})$ je asymptoticky stabilní, chyba $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{G}(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{X}_d$ a tedy \mathbf{Q} konverguje ke skutečným hodnotám kloubových souřadnic odpovídajícím aktuální poloze koncového efektoru (tentokrát navíc s optimalizací sekundárního kritéria).

Opět aproximací derivace $\dot{\mathbf{Q}}$ v (3.145) dostáváme předpis pro korektní numerické řešení IGM redundantních sériových manipulátorů se sekundárním kritériem definovaným funkcí $w(\mathbf{Q})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t_{k+1}) &= \mathbf{Q}(t_k) + \left[\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}(t_k)) \left(\dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_k))] \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}(t_k)) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}(t_k)) \right) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_0(t_k) \right] \Delta t \end{aligned} \quad (3.147)$$

Navíc, po dosazení z rovnice (3.142) dostáváme kompletní numerický algoritmus:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t_{k+1}) &= \mathbf{Q}(t_k) + \left[\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}(t_k)) \left(\dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_k))] \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}(t_k)) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}(t_k)) \right) \cdot \mathbf{k}_0 \cdot \left(\frac{\partial w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T \Big|_{t=t_k} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (3.148)$$

■ Poznámka 3.5 (Numerické algoritmy IGM v blízkosti singularit)

Dosud jsme se zabývali problémem nalezení numerického algoritmu výpočtu IGM pro neredundantní i redundantní sériové manipulátory pouze v případě, že se manipulátor nenalézá v singulární poloze. Tzn. jakobián \mathbf{J} má plnou hodnotu $r = \text{Rank}(\mathbf{J}) = \min(m, n)$. Není-li tento předpoklad splněn (manipulátor se nachází v singulární poloze), tedy hodnota jakobiánu $r = \text{Rank}(\mathbf{J}) < \min(m, n)$, nastávají pro numerické algoritmy jisté komplikace.

- Pro neredundantní manipulátory ($m = n$):
Jakobián \mathbf{J} je singulární maticí, neexistuje tedy jeho inverze \mathbf{J}^{-1} . V blízkosti singulární polohy je pak operace inverze špatně podmíněná a numerický algoritmus IGM může vést na velké hodnoty rychlostí kloubových souřadnic.
- Redundantní manipulátory ($m < n$):
Matice $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T$ vystupující v pseudoinverzi \mathbf{J}^\dagger je singulární, neexistuje tedy její inverze $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}$ a zobecněnou inverzi \mathbf{J}^\dagger tak není možné získat v uvažovaném výpočetním tvaru $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}$. V blízkosti singulárních poloh nastává stejný problém jako v předchozím bodě.

Řešení přináší využití metody tlumených nejmenších čtverců (neredundantní manipulátory) či tlumené pseudoinverze (redundantní manipulátory). Obě metody vycházejí z předpokladu, že v singulární poloze manipulátoru není možné, z výše uvedených důvodů, přesně splnit vztah mezi zobecněnými a kloubovými rychlostmi $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}$ a zároveň udržet rychlosti kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ v přijatelných mezích. Jako kompromisní řešení budeme při hledání numerického algoritmu tedy minimalizovat smíšené kritérium typu:

$$Q(\dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2} \cdot (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}})^T \cdot (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) + \alpha^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (3.149)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je váhový koeficient. Větší hodnoty α vedou na nižší hodnoty rychlostí kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ na úkor nepřesnosti sledování požadované trajektorie koncovým efektem a naopak.

Neredundantní manipulátory

Z nutné podmínky existence extrému kritéria (3.149) dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\dot{\mathbf{Q}})}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} &= \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \alpha^2 \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{J}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0 \\ \dot{\mathbf{Q}} &= (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (3.150)$$

Inverze jakobiánu \mathbf{J}^{-1} v numerickém algoritmu výpočtu IGM (3.128) je tedy nahrazena v blízkosti singularit tlumenou verzí s koeficientem tlumení $\alpha > 0$:

$$\mathbf{J}^{-1} \Rightarrow (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \quad (3.151)$$

Tedy:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} \Rightarrow \dot{\mathbf{Q}} = (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (3.152)$$

Redundantní manipulátory

Analogicky lze získat tlumenou verzí pseudoinverze \mathbf{J}^\dagger , viz [61]. Pseudoinverze jakobiánu \mathbf{J}^\dagger v numerickém algoritmu výpočtu IGM (3.148) je tedy nahrazena v blízkosti singularit tlumenou verzí s koeficientem tlumení $\alpha > 0$:

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \Rightarrow \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \quad (3.153)$$

Provedeme-li nyní singulární dekompozici jakobiánu \mathbf{J} , viz (A.62), v tlumené verzí inverze (3.151), dostáváme:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T &= (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T \\ (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T &= (\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^2 + \alpha^2 \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{V}^T)^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T \\ (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T &= (\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^2 + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T) \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T \\ (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T &= \underbrace{\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^2 + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T}_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \end{aligned} \quad (3.154)$$

kde

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2 + \alpha^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_r}{\sigma_r^2 + \alpha^2} \end{bmatrix}$$

Rozepsáním rovnice (3.152) pomocí (3.154) dostáváme důkaz, že singulární jakobián \mathbf{J} (alespoň jedno jeho singulární číslo $\sigma_i = 0$) nevede na nekonečně velké rychlosti kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \cdot \mathbf{V}[:, i] \cdot \mathbf{U}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \xrightarrow{\sigma_i \rightarrow 0} \infty \quad (3.155)$$

Chyba $e_{\dot{\mathbf{Q}}}$ ve výpočtu rychlostí kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ způsobená tlumením lze vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} e_{\dot{\mathbf{Q}}} &= \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \cdot \mathbf{V}[:, i] \cdot \mathbf{U}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{X}} - \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} \cdot \mathbf{V}[:, i] \cdot \mathbf{U}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{X}} = \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{-\alpha^2}{(\sigma_i^2 + \alpha^2)\sigma_i} \cdot \mathbf{V}[:, i] \cdot \mathbf{U}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (3.156)$$

Poznamenejme, že stejný výsledek lze získat analogicky i pro tlumenou pseudoinverzi z rovnice (3.153). V praktických aplikacích řízení se koeficient tlumení α často mění dynamicky, podle míry vzdálenosti koncového efektoru manipulátoru k singulární poloze.

Více o numerických přístupech řešení kinematiky manipulátorů lze nalézt v [38, 79, 100, 28]. ■

■ Poznámka 3.6 (Alternativní způsob nalezení numerického řešení IGM)

Pro nalezení numerického algoritmu řešení IGM pro redundantní manipulátory jsme vycházeli z diferenciálního modelu, tedy z lineární soustavy rovnic (3.134) reprezentující vzájemné závislosti mezi kloubovými a zobecněnými rychlostmi pro danou konkrétní polohu manipulátoru. Optimalizace sekundárního kritéria byla potom docílena použitím gradientu tohoto kritéria (vzhledem ke kloubovým souřadnicím) jako hodnoty kloubových rychlostí, viz rovnice (3.142), které mají být sledovány ve smyslu nejmenších čtverců, viz rovnice (3.138). Vypočtené (optimální) kloubové rychlosti tedy splňují diferenciální vazební podmínku a zároveň „směřují“ ve směru gradientu funkce sekundárního kritéria. Vzniklý numerický algoritmus byl nazýván jako algoritmus dynamické inverze.

Alternativní variantou nalezení optimálního řízení redundantního manipulátoru se sekundárním kriteriem optimality je definovat problém v polohové oblasti následovně:

Nalezni takové kloubové souřadnice redundantního manipulátoru $\mathbf{Q}^ \in \mathbb{R}^n$, které maximalizují hodnotu kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ za současného splnění vazebních podmínek $\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{X}_d \in \mathbb{R}^m$ je požadovaná poloha koncového efektoru a $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ je definující DGM (přesné sledování požadované polohy koncového efektoru).*

Matematicky lze problém formulovat jako optimalizační úlohu s vazebními podmínkami:

$$\mathbf{Q}^* = \underset{\mathbf{Q}}{\operatorname{argmin}}(w(\mathbf{Q})), \quad w(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R} \quad (3.157)$$

$$\text{vzhledem k omezení: } \mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$$

Poznamenejme, že vazební podmínka $\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ má izolovaný konečný počet řešení pro neredundantní manipulátor $m = n$ a v takovém případě formulovaný optimalizační problém postrádá smysl, řešení je určeno pouze vazební podmínkou. V případě redundantního manipulátoru $m < n$ má vazební podmínka nekonečně mnoho řešení a optimalizace kritéria $w(\mathbf{Q})$ je opodstatněná. Formulovaná optimalizační úloha je v uvedeném tvaru komplikovaná a vzhledem k složitosti funkce geometrického omezení \mathbf{G} a funkce kritéria w velmi obtížně řešitelná (například přímým řešením metodou Lagrangeových multiplikátorů). Využijme proto následující aproximace a řešme úlohu iteračně.

Aproximujme nejprve kriteriální funkci $w(\mathbf{Q})$ a funkci kinematického omezení $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ pomocí rozvoje v Taylorovu řadu:

Aproximace kriteriální funkci $w(\mathbf{Q})$ kvadratickou funkcí v bodě \mathbf{Q}_0 je dána jako:

$$w(\mathbf{Q}) \approx w(\mathbf{Q}_0) + \mathbf{W}\Delta\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{Q}^T d\mathbf{W}\Delta\mathbf{Q} \quad (3.158)$$

kde

$$\mathbf{W} = \frac{\partial w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} \in \mathbb{R}^{1,n}, \quad d\mathbf{W} = \frac{\partial^2 w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}^2} \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0$$

Aproximace funkce kinematického omezení $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ lineární funkcí v bodě \mathbf{Q}_0 je dána jako:

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}) \approx \mathbf{G}(\mathbf{Q}_0) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{Q} \quad (3.159)$$

kde

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ (jakobián),} \quad \Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0$$

Optimalizační problém definovanými nelineárními obecnými funkcemi se nám tedy redukuje na optimalizaci kvadratické funkce s lineárním omezením rovnostmi (vazební podmínkou) na okolí bodu \mathbf{Q}_0 :

$$\Delta\mathbf{Q}^* = \underset{\Delta\mathbf{Q}}{\operatorname{argmin}} \left(w(\mathbf{Q}_0) + \mathbf{W}\Delta\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{Q}^T d\mathbf{W}\Delta\mathbf{Q} \right) \quad (3.160)$$

$$\text{vzhledem k omezení: } \mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}_0) - \mathbf{J}\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

K řešení problému (3.160) lze využít metodu Lagrangeových multiplikátorů, definujme proto Lagrangián $L(\Delta\mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}$ (pro zjednodušení vypustíme argument \mathbf{Q}_0):

$$L(\Delta\mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda}) = w + \mathbf{W}\Delta\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{Q}^T d\mathbf{W}\Delta\mathbf{Q} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{X}_d - \mathbf{G} - \mathbf{J}\Delta\mathbf{Q}) \quad (3.161)$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů.

Z nutné podmínky existence extrému $L(\Delta\mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda})$

$$\frac{\partial L(\Delta\mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \Delta\mathbf{Q}} = \mathbf{W} + \Delta\mathbf{Q}^T d\mathbf{W} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{W}^T + d\mathbf{W}^T \Delta\mathbf{Q} - \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (3.162)$$

$$\frac{\partial L(\Delta\mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} = \mathbf{X}_d - \mathbf{G} - \mathbf{J}\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.163)$$

Vzhledem k tomu, že $d\mathbf{W}$ je čtvercová regulární matice, lze provést její inverzi, vyjádřit tak člen $\Delta\mathbf{Q}$ z rovnice (3.162), dosadit do rovnice (3.163) a vyjádřit $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{Q} &= d\mathbf{W}^{-T} (\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{W}^T) \\ \boldsymbol{\lambda} &= (\mathbf{J}d\mathbf{W}^{-T} \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot (\mathbf{X}_d - \mathbf{G} + \mathbf{J}d\mathbf{W}^{-T} \mathbf{W}^T) \end{aligned} \quad (3.164)$$

Dosazením za $\boldsymbol{\lambda}$ z rovnice (3.164) zpět do rovnice (3.162) dostáváme řešení optimalizační úlohy:

$$\Delta\mathbf{Q}^* = -d\mathbf{W}^{-T} \cdot \left[\mathbf{W}^T - \mathbf{J}^T (\mathbf{J}d\mathbf{W}^{-T} \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot (\mathbf{X}_d - \mathbf{G} + \mathbf{J}d\mathbf{W}^{-T} \mathbf{W}^T) \right] \quad (3.165)$$

Zohledníme-li postačující podmínku optimalizační úlohy:

$$\frac{\partial^2 L(\Delta \mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \Delta \mathbf{Q}^2} = d\mathbf{W}^T \quad (3.166)$$

$$\frac{\partial^2 L(\Delta \mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial (\boldsymbol{\lambda}^T)^2} = \mathbf{0} \quad (3.167)$$

Je zřejmé, že pokud $\Delta \mathbf{Q}^*$ má maximalizovat kritériální funkci, musí být $d\mathbf{W}^T < 0$ (negativně definitní).

Vzhledem k faktu, že dříve uvedený dynamický numerický algoritmu (3.148) nevyužíval informace o druhé parciální derivaci (Hessiánu) $d\mathbf{W}$ kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$ předpokládejme, že jej nyní můžeme aproximovat jednoduše jako:

$$d\mathbf{W} = -I$$

Což splňuje postačující podmínku na existenci maxima funkce¹⁶ $w(\mathbf{Q})$. Dosazením do řešení optimalizační úlohy (3.165) dostáváme:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}^* &= \underbrace{\mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}}_{\mathbf{J}^\dagger} \cdot (\mathbf{X}_d - \mathbf{G}) + \left(\mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J}}_{\mathbf{J}^\dagger} \right) \cdot \underbrace{\mathbf{W}}_{\left(\frac{\partial w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} \right)^T} \\ \Delta \mathbf{Q}^* &= \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}_0) \cdot (\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}_0)) + \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}_0) \mathbf{J}(\mathbf{Q}_0) \right) \cdot \left(\frac{\partial w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} \right)^T \end{aligned} \quad (3.168)$$

Porovnáme-li nyní řešení $\Delta \mathbf{Q}^*$, viz (3.168), s přírůstkem $\Delta \mathbf{Q}$ z dynamického numerického algoritmu (3.148), $\mathbf{Q}(t_k) = \mathbf{Q}_0$:

$$\Delta \mathbf{Q} = \left[\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}_0) \left(\dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\mathbf{Q}_0)] \right) + \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}_0) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}_0) \right) \cdot k_0 \cdot \left(\frac{\partial w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} \right)^T \right] \Delta t \quad (3.169)$$

Je patrná formální shoda algoritmů pro $\dot{\mathbf{X}}_d = \mathbf{0}$, $k_0 = 1$, $\Delta t = 1$. ■

★ Příklad 3.10 (Optimalizace pohybu - polohově závislé kritérium)

V následujícím příkladu demonstřujeme standardní principy řízení redundantních manipulátorů na 3 DoF redundantním planárním sériovém dvouramenném manipulátoru s lineárním pojezdem, viz Příklad 3.8, a uvažujeme stejnou požadovanou trajektorii (v rovině $\mathbf{x}z$) koncového bodu manipulátoru jako v Příkladu 3.9. Kloubové a zobecněné souřadnice takového redundantního manipulátoru uvažujeme, viz Kapitola A.3.2, A.4.2, jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [d_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T, \text{ zvoleno: } \mathbf{Q}_{\text{orig}} = [\theta_2 \quad \theta_3]^T, \mathbf{Q}_{\text{par}} = d_1 \\ \mathbf{X} &= [x \quad z]^T \text{ (translace konc. efektoru v rovine } \mathbf{x}z) \end{aligned} \quad (3.170)$$

kde poloha d_1 lineárního pojezdu je zvolena jako souřadnice parametrizující řešení IGM $\mathbf{Q}_{\text{orig}} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}})$, viz Kapitola A.3.2.

Předpokládejme, že chceme pohyb manipulátoru řídit takovým způsobem, že budou optimalizována dvě kritéria a to:

¹⁶V numerických algoritmech hledání optima se využívá často aproximace nelineární kritériální funkce funkcí kvadratickou. V případě, že nelze analyticky stanovit hodnotu Hessiánu, je tento odhadován různými algoritmy (Davidon-Fletcher-Powell formula, Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno algorithm). Jedním z požadavků je, aby Hessián zůstal pozitivně resp. negativně definitní maticí a algoritmus konvergoval k minimu resp. maximu původní nelineární funkce, nikoliv do inflexního bodu.

- **Vzdálenost od singulární polohy**

Manipulátor bude řízen tak, že v každém bodě trajektorie bude maximalizována vzdálenost od singulární polohy manipulátoru, tzn. manipulátor se bude pohybovat co nejdále od nežádoucích singularit.

- **Polohy kloubových souřadnic budou co nejlíže definovaným polohám**

Problém analogický k minimalizaci vzdálenosti poloh aktuátorů od svých krajních limitů. V uvedeném případě požadujeme, aby se polohy vybraných aktuátorů co možná nejvíce přibližovaly polohám zadaným. Důvodem k takové optimalizaci pohybu může být např. nutnost udržet vnitřní uspořádání manipulátoru co nejvíce podobající se zadanému (např. z důvodu umístění technologie) a předcházet tak případným kolizím.

Maximalizace vzdálenosti od singulární polohy

Vzdálenost od singulární polohy sériového redundantního manipulátoru lze definovat, viz Kapitola A.7.1, jako:

$$w(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{Q})), \text{ kde } \begin{cases} w(\mathbf{Q}) > 0 \text{ pro manipulátor mimo singulární polohu} \\ w(\mathbf{Q}) = 0 \text{ pro manipulátor v singulární poloze} \end{cases} \quad (3.171)$$

kde $w(\mathbf{Q})$ je maximalizované kritérium.

■ Poznámka 3.7

Poznamenejme, že, s ohledem na (A.136), je kritérium $w(\mathbf{Q})$ dáno jako druhá mocnina součinu singulárních čísel jakobiánu $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m = 2$, $n = 3$:

$$w(\mathbf{Q}) = \left(\prod_{i=1}^2 \sigma_i \right)^2, \quad 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \quad (3.172)$$

Tzn. vzdálenost od singulární polohy není zcela korektně vyčíslena vzhledem k jejímu normování, neboť platí, že v případě $\sigma_1 = 100$ a $\sigma_2 = 0.01 \Rightarrow w(\mathbf{Q}) = 1$ a manipulátor je zřejmě mnohem blíže singulární poloze, než v případě $\sigma_1 = 1$ a $\sigma_2 = 1 \Rightarrow w(\mathbf{Q}) = 1$, vhodnějším hodnocením by tedy bylo číslo podmíněnosti, jako podíl mezi maximálním a minimálním singulárním číslem:

$$w(\mathbf{Q}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \in \langle 0, 1 \rangle \quad (3.173)$$

Vzhledem ke komplikaci ve výpočtu singulárních čísel a tedy čísla podmíněnosti je však často uvažováno původně zvolené kritérium k hodnocení vzdálenosti od singulárních poloh manipulátoru. ■

Z jakobiánu manipulátoru ve tvaru (zřejmě nezávisí na souřadnic lineárního pojezdu d_1):

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - \sin(\theta_2) a_2 & -a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ 1 & a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos(\theta_2) a_2 & a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

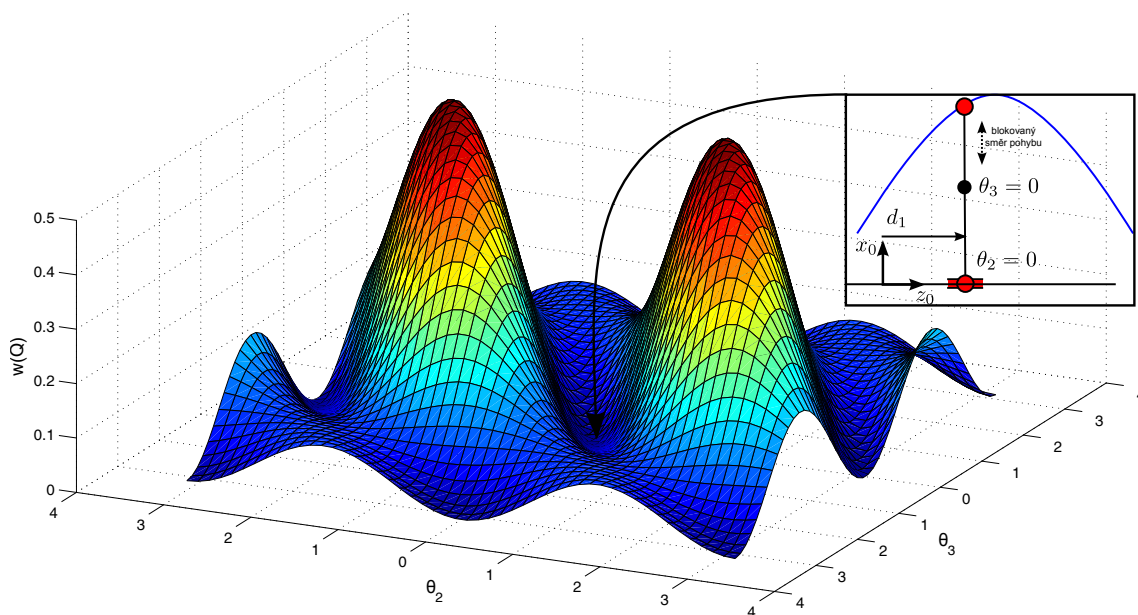
lze vypočítat kritérium:

$$w(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T) = a_3^2 - a_3^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_3) + 1/2 a_3^2 a_2^2 - 1/2 a_3^2 a_2^2 \cos(2\theta_3) + \\ + \cos(\theta_3) a_3 a_2 - a_3 a_2 \cos(\theta_3 + 2\theta_2) + 1/2 a_2^2 - 1/2 a_2^2 \cos(2\theta_2) \quad (3.175)$$

Hodnota kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ je znázorněna na Obrázku 3.33. Vyšetřením podmínky¹⁷ $w(\mathbf{Q}) = 0$ lze získat podmínku pro manipulátor nacházející se v singulární poloze (uvažujme $\theta_2 \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\theta_3 \in \langle -\pi, \pi \rangle$):

$$w(\mathbf{Q}) = 0 \Rightarrow [\theta_2 \ \theta_3]^T = \{-\pi, 0, \pi\} \times \{-\pi, 0, \pi\} \text{ (celkem 9 řešení)} \quad (3.176)$$

Vyšetřením lokálních maxim (bodů podezřelých z extrému z podmínky $\frac{\partial w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0}$) lze získat optimální konfigurace kloubových souřadnic $\theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ a $\theta_3 = 0$, kde kritérium nabývá maximálních hodnot.



Obrázek 3.33.: Hodnota kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ a ukázka jedné konfigurace manipulátoru v singulární poloze

Numerický algoritmus výpočtu, založený na (3.148) je potom:

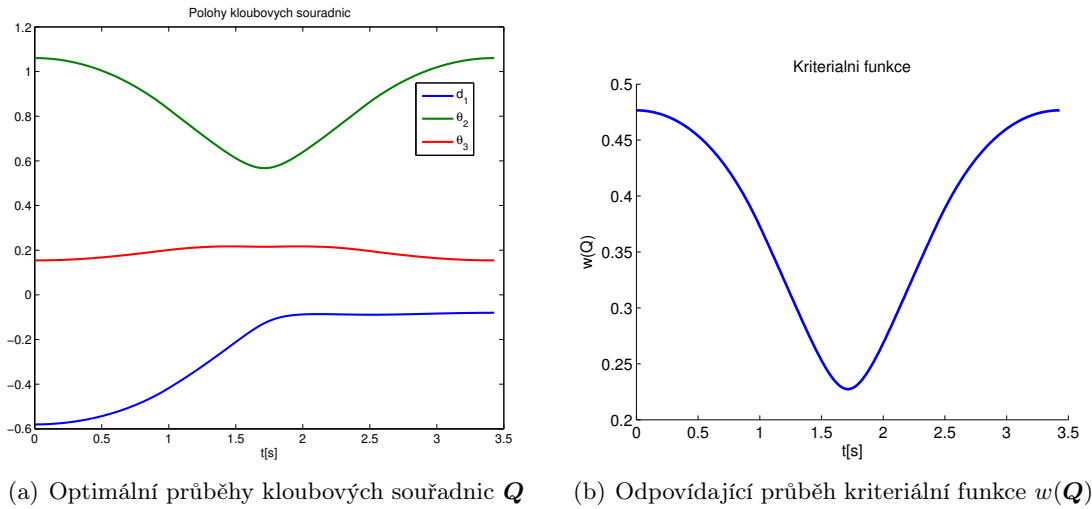
1. Zvol konstanty Δt , \mathbf{K} , k_0 .
2. Zvol počáteční podmínku \mathbf{Q}_{par} :
Ideálně volit jen hodnotu parametrizující kloubové souřadnice $\mathbf{Q}_{\text{par}} = d_1$. Zbylé kloubové souřadnice $\mathbf{Q}_{\text{orig}} = [\theta_2 \ \theta_3]^T$ lze dopočítat při znalosti \mathbf{X} dle IGM, viz Kapitola A.3.2. Dostáváme tak počáteční hodnotu kloubových souřadnic $\mathbf{Q}(t_k)$, $k = 0$.
3. Dokud $\Delta \mathbf{Q} = \|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}\| >$ daná konstanta
Vypočti hodnotu kloubových souřadnic v následujícím kroku $\mathbf{Q}(t_{k+1})$ dle (3.148).
4. Opakuj celý iterační numerický algoritmus pro každý bod diskretizované požadované trajektorie koncového efektoru $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t_1) \dots \mathbf{X}(t_f)\}$. Jako počáteční polohu pro výpočet kloubových souřadnic \mathbf{Q}_{par} zvol hodnotu vypočtenou v předchozím bodě trajektorie.

Průběhy kloubových souřadnic \mathbf{Q} a hodnoty kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ jsou znázorněny na Obrázku 3.34, vizualizace odpovídajícího pohybu manipulátoru v SimMechanicsu potom na Obrázku 3.35(a). Obrázek 3.36 ukazuje hodnotu kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ pro perturbované hodnoty optimální kloubové souřadnice \mathbf{Q}_{par} parametrizující řešení IGM:

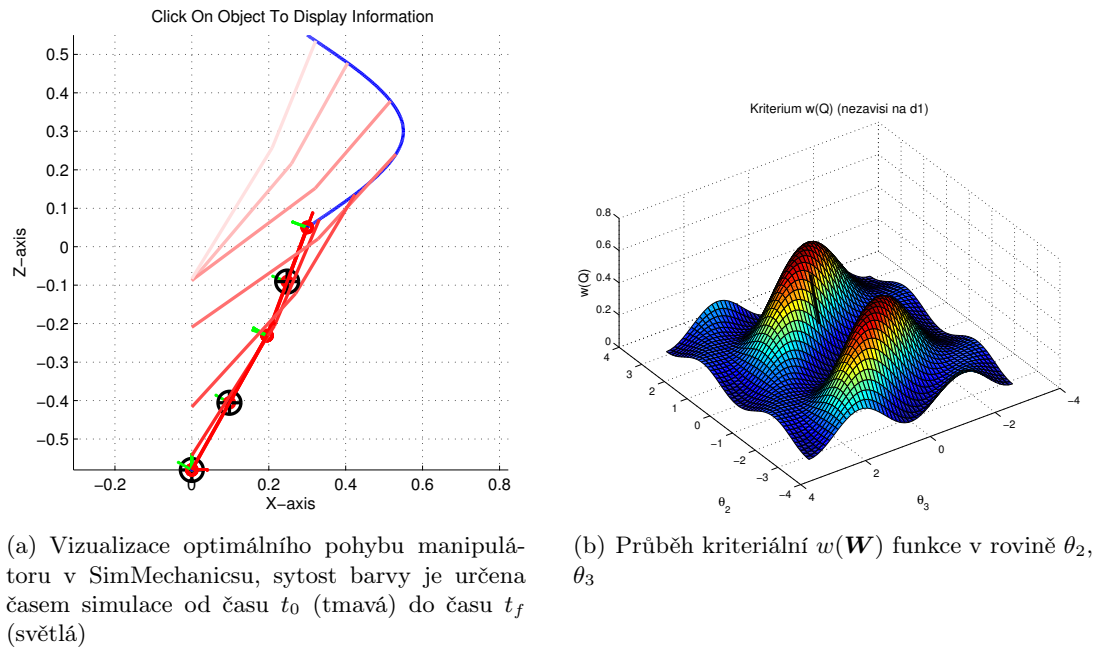
$$\mathbf{Q}_{\text{par}}^{\text{pert}} = \mathbf{Q}_{\text{par}} + 0.1 \cdot (\text{Rand}(1, 1) - 0.5) \Rightarrow \mathbf{Q}_{\text{orig}}^{\text{pert}} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}}^{\text{pert}}) \Rightarrow w(\mathbf{Q}^{\text{pert}}) \quad (3.177)$$

¹⁷Symbolicky řešeno v Maple v oboru reálných čísel.

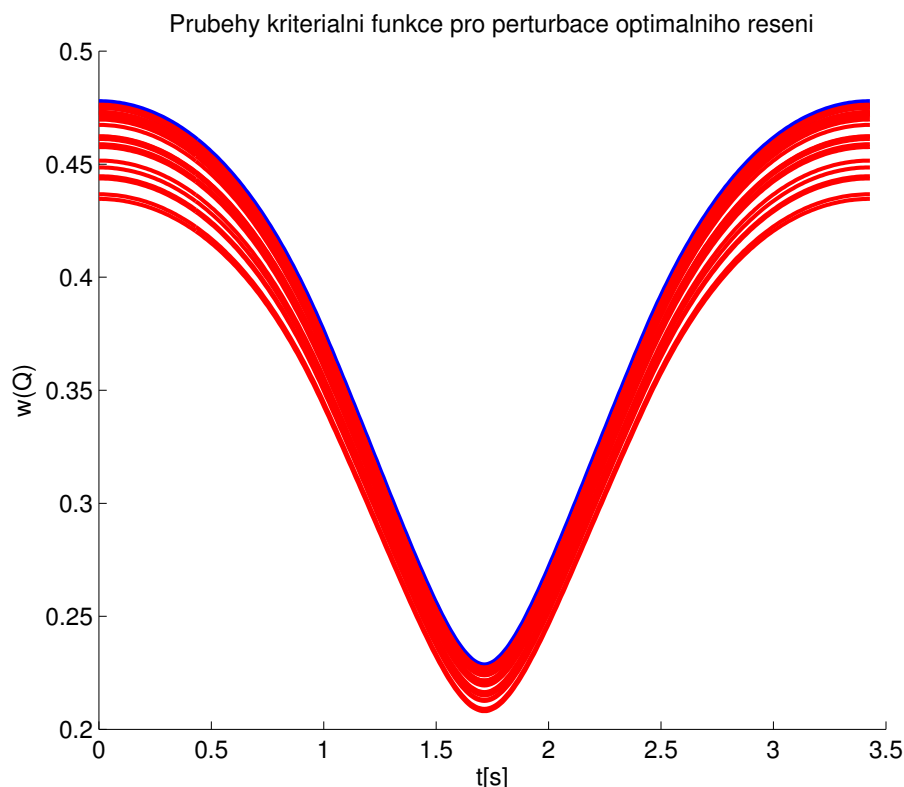
3.4. Optimální řízení redundantních manipulátorů



Obrázek 3.34.: Optimální průběh kloubových souřadnic a kriteriální funkce



Obrázek 3.35.: Vizualizace optimálního pohybu manipulátoru včetně znázornění průběhu kriteriální funkce $w(Q)$ v rovině θ_2, θ_3 (černě)



Obrázek 3.36.: Průběhy kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ pro optimální průběh kloubových souřadnic \mathbf{Q} (modře) a hodnota téže funkce $w(\mathbf{Q}^{\text{pert}})$ pro perturbované souřadnice \mathbf{Q}^{pert} (červeně).

Z uvedených výsledků lze vidět, že nalezený optimální pohyb manipulátoru maximalizuje hodnotu kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ v každém bodě \mathbf{X} podél celé požadované trajektorie koncového efektoru. Toto tvrzení je demonstrováno perturbací optimálního pohybu a porovnáním kriteriální funkce s pohybem optimálním. Optimální pohyb kloubových souřadnic manipulátoru (kritérium nezáleží na souřadnici d_1) lze znázornit jako hodnotu kriteriální funkce v rovině θ_2, θ_3 , viz Obrázek 3.35(b). Z takového zobrazení a z vizualizace pohybu je patrné, že manipulátor je podél trajektorie rekonfigurován takovým způsobem, aby se nacházel co nejdále od singularit, tzn. co nejbližší maximum kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$, tedy polohám $\theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = 0$.

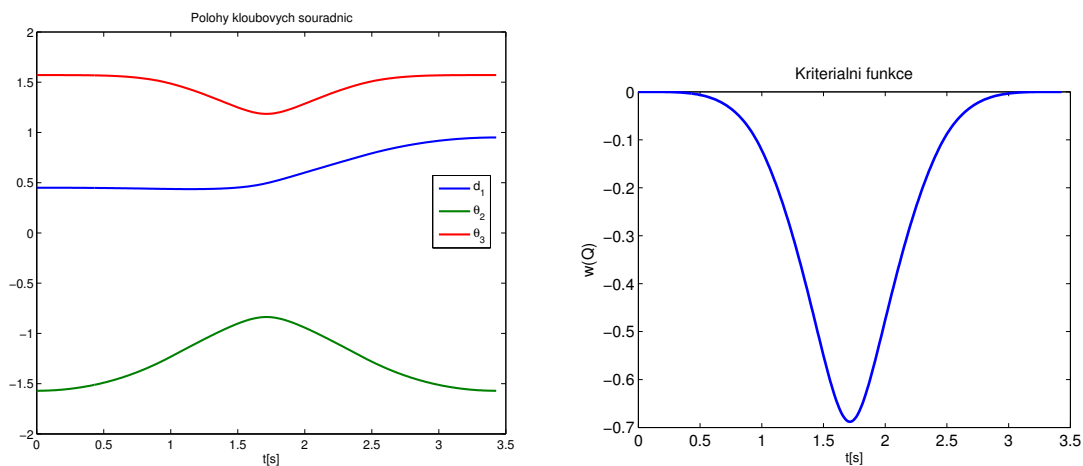
Maximální přiblížení kloubových souřadnic k definovaným polohám

Předpokládejme, že požadujeme takový pohyb manipulátoru, aby se jeho rotační aktuatory (θ_2, θ_3) pohybovaly co nejbližší definovaným konstantním hodnotám $\theta_2^{\text{konst.}} = -\frac{\pi}{2}, \theta_3^{\text{konst.}} = \frac{\pi}{2}$. Tzn. první rameno manipulátoru má zůstat co nejbližší ve směru lineárního pojezdu a druhé rameno má zůstat co nejvíce kolmo k ramenu prvnímu. Definujme tedy odpovídající kritérium:

$$w(\mathbf{Q}) = - \left[\left(\theta_2 - \theta_2^{\text{konst.}} \right)^2 + \left(\theta_3 - \theta_3^{\text{konst.}} \right)^2 \right] \quad (3.178)$$

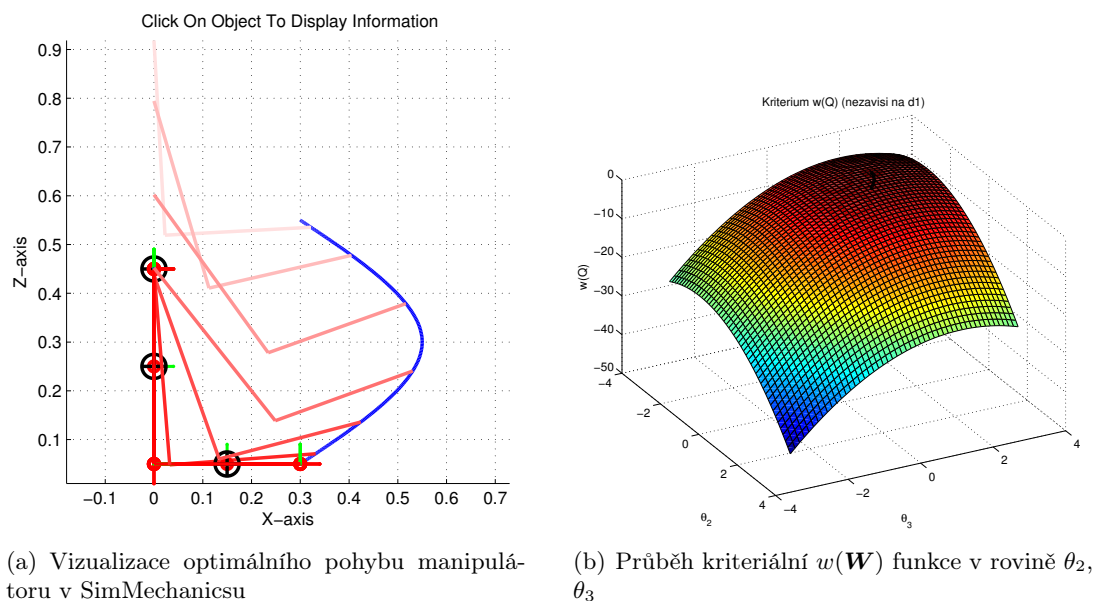
Postup optimalizace pohybu je analogický jako v předchozím případě. Průběhy kloubových souřadnic \mathbf{Q} a hodnoty kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ jsou znázorněny na Obrázku 3.37, vizualizace odpovídajícího pohybu manipulátoru v SimMechanicsu potom na Obrázku 3.38(a).

Obrázek 3.39 ukazuje hodnotu kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ pro perturbované hodnoty optimální kloubové souřadnice \mathbf{Q}_{par} parametrizující řešení IGM.



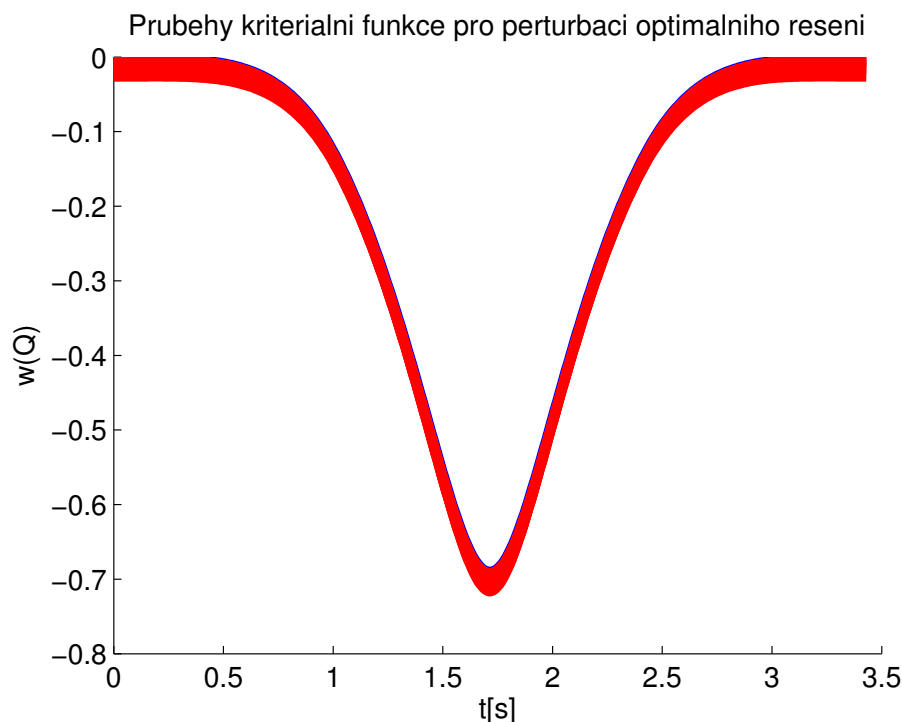
(a) Optimální průběhy kloubových souřadnic \mathbf{Q} (b) Odpovídající průběh kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$

Obrázek 3.37.: Optimální průběh kloubových souřadnic a kriteriální funkce



(a) Vizualizace optimálního pohybu manipulátoru v SimMechanicsu (b) Průběh kriteriální $w(\mathbf{W})$ funkce v rovině θ_2, θ_3 (černě)

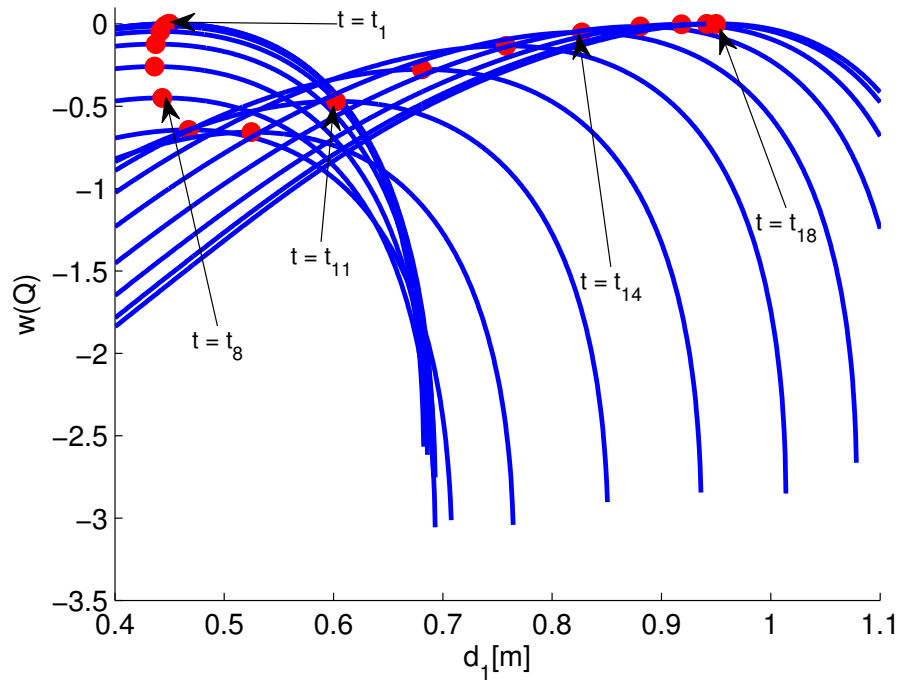
Obrázek 3.38.: Vizualizace optimálního pohybu manipulátoru včetně znázornění průběhu kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ v rovině θ_2, θ_3 (černě)



Obrázek 3.39.: Průběhy kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ pro optimální průběh kloubových souřadnic \mathbf{Q} (modře) a hodnota těže funkce $w(\mathbf{Q}^{\text{pert}})$ pro perturbované souřadnice \mathbf{Q}^{pert} (červeně).

★

Doposud jsme se zabývali optimalizací pohybu redundantního manipulátoru, kde kriteriální funkcí, která má být maximalizována, byla skalární funkce $w(\mathbf{Q})$ závisující pouze na poloze kloubových souřadnic manipulátoru. Cílem řešení IGM bylo nalezení takových kloubových souřadnic \mathbf{Q} , které pro danou konkrétní polohu koncového efektoru manipulátoru optimalizují (maximalizují $w(\mathbf{Q})$) vnitřní uspořádání manipulátoru (tedy hledají optimální řešení IGM z nekonečného množství existujících řešení). Dynamický algoritmus (3.148) i jeho ekvivalentní odvození, viz Poznámka 3.6, vychází vždy z vazební podmínky, která je kladena při výpočtu přírůstku zobecněných souřadnic \mathbf{Q} v jednotlivých iteracích numerického algoritmu. Vazební podmínkou je splnění rovnic kinematického omezení $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Q})$. V případě konvergence numerického algoritmu je tedy zajištěno, že kloubové souřadnice budou vyhovovat IGM (ve smyslu splnění požadované polohy koncového efektoru \mathbf{X}) a zároveň minimalizovat kriteriální funkci $w(\mathbf{Q})$. Jinými slovy lze říci, že v každém bodě požadované trajektorie koncového efektoru tedy hledáme vázané optimum kloubových souřadnic, kde vazební podmínku formují rovnice kinematického omezení (IGM) $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Q})$. Vrátime-li se zpět k Příkladu 3.10 (pro variantu optimalizace maximálního přiblížení kloubových souřadnic k definovaným polohám), můžeme v každém diskretizovaném kroku podél celé požadované trajektorie koncového efektoru zobrazit průběh kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ v závislosti na zvoleném $\mathbf{Q}_{\text{par}} = d_1$ (kloubová souřadnice lineárního pojezdu parametrizující řešení IGM). Současně zobrazíme optimum $\mathbf{Q}_{\text{par}}^*$ nalezené po konečném počtu iterací numerického algoritmu (3.148), který byl v příkladu použit. Výsledek je znázorněn na Obrázku 3.40.



Obrázek 3.40.: Průběh kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$ (modře) a znázorněné optimální řešení pro $\mathbf{Q}_{\text{par}} = d_1$ (červeně), $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_{18} = t_f$, kde t_i jsou diskrétní časové okamžiky podél požadované trajektorie koncového efektoru a t_f je celkový čas pro ujetí celé trajektorie.

V případě použitého numerického algoritmu (3.148) je využito projekce gradientu kritériální funkce $w(\mathbf{Q})$ do nulového prostoru $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ jakobiánu \mathbf{J} a v dílčích krocích numerického algoritmu (pro jednu danou požadovanou polohu koncového efektoru) tak dochází k přibližování kloubových souřadnic k extrému kritériální funkce za současného splnění rychlostních závislostí mezi kloubovými a zobecněnými souřadnicemi. Numerický algoritmus je vykonán v každém dílčím diskretizovaném kroku požadované trajektorie koncového efektoru izolovaně. Je tedy zřejmé, že výsledkem numerického algoritmu v uvedené podobě jsou optimalizované polohy kloubových souřadnic v dílčích izolovaných bodech požadované trajektorie koncového efektoru. Není tak brán žádný ohled na dynamický vývoj kloubových souřadnic s ohledem na jejich rychlosti a zrychlení, a tedy na dynamický model celého manipulátoru. V krajních případech může docházet k nalezení takových optimálních kloubových souřadnic \mathbf{Q} v po sobě jdoucích krocích podél požadované trajektorie koncového efektoru, které povedou k nerealizovatelnému pohybu manipulátoru, neboť tato řešení jsou na sobě s ohledem na rychlosti a zrychlení nezávislá (jedná se především o nalezení výrazně odlišných hodnot optimálních kloubových souřadnic ve dvou po sobě jdoucích krocích podél požadované trajektorie koncového efektoru manipulátoru). Ve většině případů se předpokládá, že pro dostatečně jemnou diskretizaci požadované trajektorie koncového efektoru manipulátoru budou optimalizované kloubové souřadnice v po sobě jdoucích krocích „dostatečně“ blízké. Navíc je uvedený numerický algoritmus realizovatelný pro kritériální funkce závislé pouze na poloze kloubových souřadnic.

Často však při optimalizaci pohybu redundantních manipulátorů vyžadujeme optimalizovat kritériální funkci, která závisí nejen na poloze, ale obecně také na rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic. Takovým případem může být např. minimalizace momentů v kloubech manipulátoru, kdy kritériální funkce závisí na polohách, rychlostech a zrychleních

kloubových souřadnic. Zabývejme se dále tedy metodami, které za účelem optimalizace pohybu redundantních manipulátorů využívají odpovídajícího dynamického modelu. Původní formulaci lze nalézt v [47], [9].

Ukažme nejprve, že v případě redundantních manipulátorů platí analogický vztah pro zrychlení kloubových souřadnic, jako bylo ukázáno v případě rychlostí, viz (3.141), tedy, že opět lze nalézt takové zrychlení kloubových souřadnic, pro které je splněna nutná vazební podmínka a zároveň optimalizováno dané sekundární kritérium. Z IIK pro zrychlení, viz Kapitola A.4, vyplývá vztah mezi rychlostmi a zrychleními kloubových a zobecněných souřadnic a zřejmě opět existuje nekonečně mnoho řešení IIK:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \quad (3.179)$$

Zaveďme opět sekundární kritérium $Q(\ddot{\mathbf{Q}})$ a jeho rozšířenou podobu prostřednictvím Lagran-geových multiplikátorů zahrnující vazební podmínku (závislosti mezi zrychleními):

$$Q(\ddot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{Q}} - \ddot{\mathbf{Q}}_0)^T \cdot (\ddot{\mathbf{Q}} - \ddot{\mathbf{Q}}_0) \quad (3.180)$$

$$Q(\ddot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{Q}} - \ddot{\mathbf{Q}}_0)^T \cdot (\ddot{\mathbf{Q}} - \ddot{\mathbf{Q}}_0) + \boldsymbol{\lambda}^T (\ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) \quad (3.181)$$

Z nutné podmínky existence extrému lze analogicky jako v (3.140) vypočítat vektor Lagran-geových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\frac{\partial Q(\ddot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}} = \mathbf{0} \Rightarrow \ddot{\mathbf{Q}} - \ddot{\mathbf{Q}}_0 - \mathbf{J}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot (\ddot{\mathbf{Q}} - \ddot{\mathbf{Q}}_0) \quad (3.182)$$

Zpětným dosazením za vypočtený vektor $\boldsymbol{\lambda}$ lze získat:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}} &= \ddot{\mathbf{Q}}_0 + \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot (\ddot{\mathbf{Q}} - \ddot{\mathbf{Q}}_0) \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \ddot{\mathbf{Q}}_0 + \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot (\underbrace{\mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}}_{\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}} - \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_0) \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_0 \end{aligned} \quad (3.183)$$

kde $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}$ je zobecněná inverze jakobiánu \mathbf{J} .

Rovnice (3.183) představuje hledaný vztah, tedy nalezení optimálních hodnot zrychlení kloubových souřadnic vyhovující vazební podmínce (3.179) a minimalizující vzdálenost kloubových zrychlení (ve smyslu nejmenších čtverců) od zvoleného vektoru $\ddot{\mathbf{Q}}_0$. Snadno lze opět dokázat, že matice $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})$ generuje nulový prostor $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ jakobiánu \mathbf{J} .

Za účelem integrace dynamického modelu do výpočtu optimálního pohybu redundantního manipulátoru uvažujme dynamický model ve tvaru, viz Kapitola A.6:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G} \quad (3.184)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ jsou externí síly působící v kloubech manipulátoru, $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{Q})$ je matice setrvačnosti, $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ je matice reprezentující vliv odstředivých a Coriolisových sil a $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{Q})$ je matice reprezentující vliv gravitačních sil.

Dosazením nalezeného optimálního řešení (3.183) zrychlení kloubových souřadnic $\ddot{\mathbf{Q}}$ do dynamického modelu (3.184) dostáváme předpis pro požadované hodnoty sil/momentů $\boldsymbol{\tau}$ v kloubech manipulátoru pro manipulátor nacházející se ve stavu \mathbf{Q} , $\dot{\mathbf{Q}}$ a optimálního přiblížení (ve smyslu nejmenších čtverců) požadovanému kloubovému zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}_0$:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_0 \quad (3.185)$$

kde

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}$$

nezávisí na požadovaném zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}_0$.

Rovnice (3.185) tedy představuje obecný předpis pro inverzní dynamický model redundantního manipulátoru s požadavkem na průběh kloubových zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}_0$. Otázkou zůstává, jak volit právě tento volný parametr.

Předpokládejme dále, že cílem optimalizace pohybu bude přirozený požadavek na minimalizaci sil/momentů v jednotlivých kloubech manipulátoru. Definujme tedy kritérium:

$$J(\ddot{\mathbf{Q}}_0) = \|\boldsymbol{\tau}'\|^2 = \boldsymbol{\tau}'^T \cdot \boldsymbol{\tau}' \quad (3.186)$$

Dosazením inverzního dynamického modelu (3.185) do kritéria dostáváme:

$$J(\ddot{\mathbf{Q}}_0) = \underbrace{\|\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_0\|}_{\text{funkce: } \mathbf{Q}} + \underbrace{\|\boldsymbol{\tau}'\|}_{\text{funkce: } \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{X}}}^2 \quad (3.187)$$

Je zřejmé, že kritérium $J(\ddot{\mathbf{Q}}_0)$ tedy závisí na daném stavu manipulátoru (poloze a rychlosti kloubových souřadnic) a navíc je časově variantní, neboť vektor zrychlení zobecněných souřadnic $\ddot{\mathbf{X}}$ je známý a definovaný podél celé trajektorie požadovaného pohybu koncového efektoru manipulátoru, tedy $\ddot{\mathbf{X}} = \ddot{\mathbf{X}}(t)$.

Budeme-li tedy předpokládat, že se manipulátor v čase t nachází ve stavu \mathbf{Q} , $\dot{\mathbf{Q}}$, jedinou neznámou zůstává kloubové zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}_0$ a hledané řešení je tedy:

$$\ddot{\mathbf{Q}}_0 = \underset{\ddot{\mathbf{Q}}_0}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_0 + \boldsymbol{\tau}'\|^2 \quad (3.188)$$

Což je z definice řešení metodou nejmenších čtverců rovnice tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbf{x} = \ddot{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} = -\boldsymbol{\tau}' \in \mathbb{R}^n$. Vzhledem k tomu, že dimenze nulového prostoru jakobiánu \mathbf{J} je dána jako $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = n - m$, viz (3.133), generátory $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ reprezentované sloupci matice $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou lineárně závislé, hodnota matice je tedy $\operatorname{Rank}(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) = n - m$ a matice $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})$ má $n - (n - m) = m$ nulových singulárních čísel (je singulární, nemá plnou hodnotu). Z Kapitoly A.9 je zřejmé, že $\ddot{\mathbf{Q}}_0$ lze nalézt zobecněnou Moore-Penrose inverzí, která zajistí platnost kritéria (3.188):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}}_0^* &= \underset{\ddot{\mathbf{Q}}_0}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_0 + \boldsymbol{\tau}'\|^2 \\ \ddot{\mathbf{Q}}_0^* &= - \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau}' \end{aligned} \quad (3.189)$$

kde $[\star]^\dagger$ je Moore Penrose zobecněná inverze počítaná prostřednictvím SVD rozkladu invertované matice, viz výpočetní tvar inverze pro singulární matici (A.155)¹⁸.

Dosazením řešení (3.189) do (3.183) resp. (3.185) dostáváme optimální řízení pohybu redundantního manipulátoru, které minimalizuje momenty v jednotlivých kloubech v následujících formálně odlišných tvarech:

¹⁸V Matlabu je výpočetní tvar pseudoinverze realizován příkazem `pinv`.

- Optimální zrychlení kloubových souřadnic, viz rovnice (3.190), (v závislosti na aktuální poloze \mathbf{Q} , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a čase t definující zrychlení zobecněných souřadnic $\ddot{\mathbf{X}}(t)$):

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) - (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau}' \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) - \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau}' \quad (\text{viz Poznámka 3.8}) \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) - \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger \cdot \left[\mathbf{M} \cdot \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G} \right]\end{aligned}\quad (3.190)$$

- Optimální síly/momenty v aktuátorech, viz rovnice (3.191), (IDM, v závislosti na aktuální poloze \mathbf{Q} , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a čase t definující zrychlení zobecněných souřadnic $\ddot{\mathbf{X}}(t)$):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}' - \mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau}' \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}' - \mathbf{M} \cdot \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau}' \quad (\text{viz Poznámka 3.8}) \\ \boldsymbol{\tau} &= \left[\mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger \right] \cdot \left[\mathbf{M} \cdot \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G} \right]\end{aligned}\quad (3.191)$$

■ **Poznámka 3.8 (Zobecněná inverze a báze nulového prostoru)**

Lze ukázat, viz [60], že pro matici $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})$ generující $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ a libovolnou matici \mathbf{M} platí:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger = \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger \quad (3.192)$$

pokud matice $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})$ je idempotentní a hermitovská¹⁹.

Matice $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})$ je idempotentní:

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) &= \mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} = \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} - \mathbf{J}^\dagger \cdot (\underbrace{\mathbf{J} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^\dagger}_{\mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}}) \cdot \mathbf{J} = \mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}\end{aligned}$$

Matice $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})$ je hermitovská:

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})^T &= \mathbf{I} - \mathbf{J}^T \cdot (\underbrace{\mathbf{J}^\dagger}_{\mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}})^T = \mathbf{I} - \mathbf{J}^T \cdot \left(\underbrace{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}}_{\text{symetrická}} \right)^T \cdot \mathbf{J} = \\ &= \mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \mathbf{J}}_{\mathbf{J}^\dagger} = \mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}\end{aligned}$$

Důkaz tvrzení je založen na ověření, že pro matice daných vlastností

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \left[\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \right]^\dagger\end{aligned}$$

platí podmínky (A.152) definující pseudoinverzi matic, tedy $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger$. Kompletní důkaz lze nalézt v [60]. ■

¹⁹Pro idempotentní matici \mathbf{A} platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$. Pro hermitovskou matici \mathbf{A} s reálnými čísly platí: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ (matice \mathbf{A} je symetrická).

★ **Příklad 3.11 (Optimalizace pohybu - integrace dynamického modelu)**

Ilustrujme algoritmus optimalizace sil/momentů opět na identickém manipulátoru, jako v Příkladu 3.8, 3.9, 3.10. Výsledkem optimalizačního procesu jsou optimální okamžité hodnoty kloubových zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$ (3.190) respektive síly/momenty $\boldsymbol{\tau}$ (3.191). Je zřejmé, viz Kapitola A.6, že vztah mezi pohybem manipulátoru daným kloubovým zrychlením (rychlostí a polohou) a silami/momenty působící v jednotlivých kloubech je plně určena dynamickým modelem manipulátoru $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}$.

Pro nalezení optimální trajektorie manipulátoru v prostoru kloubových souřadnic tak musíme řešit vektorovou diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru daném (3.190), kterou lze přepsat na diferenciální rovnici 1. řádu se stavem a dále řešit standardními numerickými algoritmy²⁰:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) - [\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})]^\dagger \cdot [\mathbf{M} \cdot \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}] \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) - [\mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})]^\dagger \cdot [\mathbf{M} \cdot \mathbf{J}^\dagger \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}] \end{bmatrix}}_{\text{funkce: } \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t} \end{aligned} \quad (3.193)$$

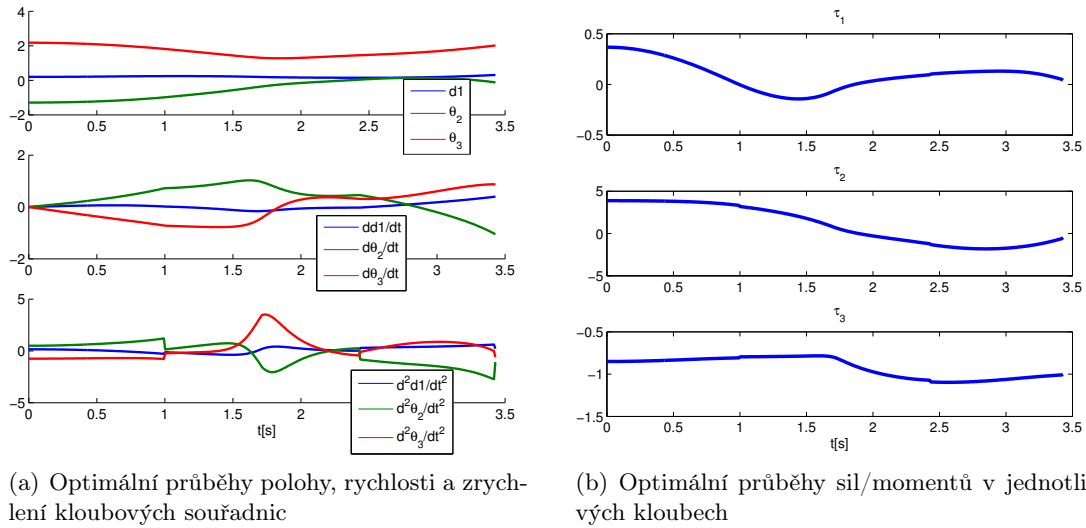
Diferenciální rovnice (3.193) byly řešena v Matlabu prostřednictvím příkazu `ode45`. Výsledné optimální průběhy polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic jsou znázorněny na Obrázku 3.41(a), optimální průběhy síly v lineárním pojezdu a momentů v rotačních kloubech jsou znázorněny na Obrázku 3.41(b). Na Obrázku 3.42(a) je znázorněn optimální průběh kritéria. Obrázek 3.42(b) znázorňuje vizualizaci pohybu manipulátoru v SimMechanicsu. Na Obrázku 3.43 je znázorněn optimální průběh kritéria společně s průběhem kritéria pro perturbované optimální kloubové zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} = \ddot{d}_1$. Perturované polohy $\mathbf{Q}_{\text{par}}^{\text{pert}}$ a rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^{\text{pert}}$ kloubových souřadnic parametrizující řešení IGM jsou dány řešením diferenciální rovnice:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{par}}^{\text{pert}} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^{\text{pert}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^{\text{pert}} \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^{\text{pert}} \end{bmatrix} \quad \text{kde: } \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^{\text{pert}} = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} + 0.2 \cdot (\text{Rand}(1, 1) - 0.5)$$

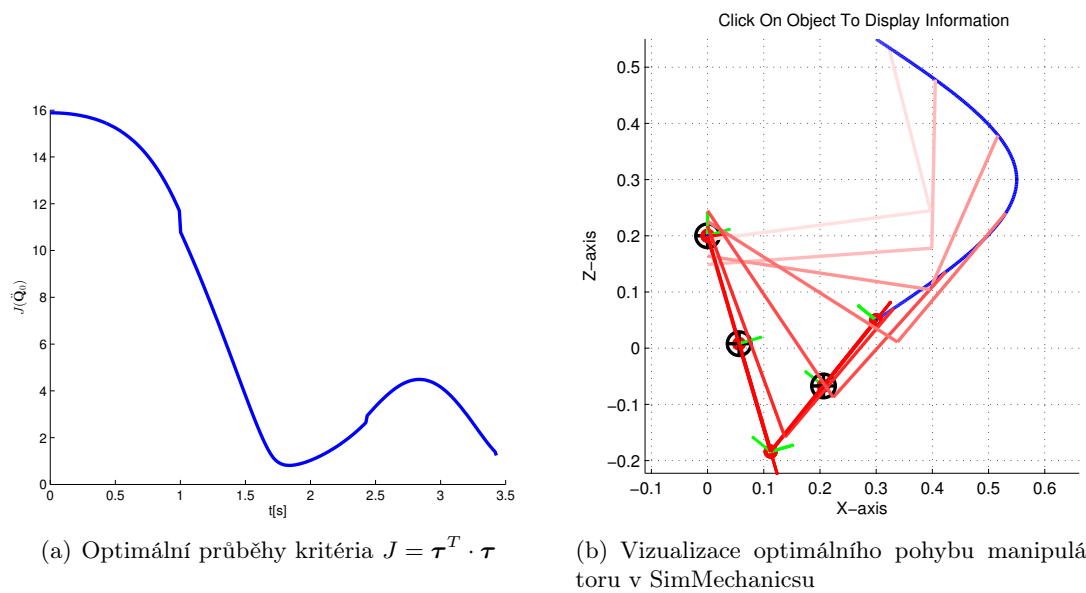
Polohy, rychlosti a zrychlení perturbovaných originálních kloubových souřadnic $\mathbf{Q}_{\text{orig}}^{\text{pert}} = [\theta_2 \ \theta_3]^T$ je dáno řešením IGM a IIK pro redundantní manipulátory:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{orig}}^{\text{pert}} &= \text{IGM}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}}^{\text{pert}}), \quad \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}^{\text{pert}} = \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}^{\text{pert}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^{\text{pert}}), \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}^{\text{pert}} &= \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}^{\text{pert}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^{\text{pert}}, \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^{\text{pert}}) \end{aligned}$$

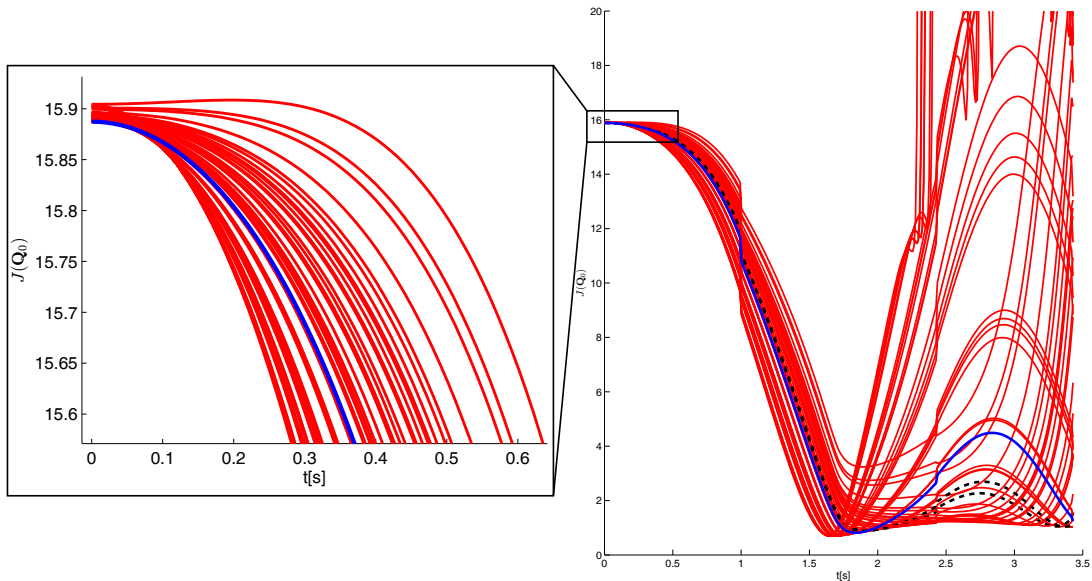
²⁰V Matlabu solvery diferenciálních rovnic: `ode45`, `ode23`, atd.



Obrázek 3.41.: Optimální průběhy polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic, optimální průběhy sil/momentů v aktuátorech



Obrázek 3.42.: Optimální průběh kritéria a vizualizace optimálního pohybu manipulátoru



Obrázek 3.43.: Optimální průběh kritéria $J(\dot{Q}_0)$ (modře) a průběh kritéria pro perturbované hodnoty optimálního kloubového zrychlení (červeně)

★

Z Obrázku 3.43 je patrný jev, který nutně musí nastávat pro uvedený typ optimalizace pohybu redundantního manipulátoru při uvažování kompletního dynamického modelu, tedy při zohlednění korektního vztahu mezi polohami, rychlostmi a zrychleními kloubových souřadnic podél celé plánované trajektorie pohybu koncového efektoru. Vzhledem k faktu, že optimalizační algoritmus (3.190) resp. (3.191) hledá v daném časovém okamžiku taková kloubová zrychlení resp. momenty, které optimalizují v tomto konkrétním časovém okamžiku hodnotu kritéria (norma sil/momentů) jedná se o *lokální algoritmus*. Tzn. výsledky optimalizace nemají globální platnost a nelze zajistit, že podél uvažované trajektorie koncového efektoru neexistuje v globálním měřítku (např. ve smyslu obsahu plochy pod průběhem kritéria - tzn. integrální kritérium) „vhodnější“ řešení. Z Obrázku 3.43 je patrné, že zřejmě existují taková řešení, která zajišťují globálně nižší hodnotu kritéria podél trajektorie a nejsou přitom z lokálního hlediska optimálními řešeními (černé čárkované průběhy kritéria pro jednotlivé perturbace). Pro lokální optimální řešení zároveň nutně platí, že kritériální funkce bude na počátku pohybu manipulátoru vždy nabývat optimálních (minimálních) hodnot (viz detail počátku vývoje kritéria v Obrázku 3.43), neboť optimalizací je nalezeno v čase $t = 0$ takové řešení, pro které je hodnota kritéria minimální a zároveň hodnotu kritéria neovlivňuje žádný předchozí vývoj stavu manipulátoru. Taková vlastnost může být velmi nepříjemná v případě, kdy optimalizace je prováděna podél dlouhých trajektorií, kdy lokální optimalizace může s rostoucím časem snadno vést do stavu, který je z hlediska hledaného minima v globálním měřítku nevhodný. Jinými slovy, lokální optimální průběh stavu manipulátoru negarantuje žádná omezení či podmínky na vývoj tohoto stavu, snadno se může stát, že (byť lokálně optimální) průběh pohybu manipulátoru povede s rostoucím časem na vysoké požadavky na síly/silové momenty v některých aktuátorech, které zajistí udržení polohy koncového efektoru na požadované trajektorii. Vystává tedy otázka, jak pohyb redundantního manipulátoru plánovat takovým způsobem, aby bylo splněno nějaké globálně platné kritérium.

3.4.2. Nový přístup k optimálnímu řízení redundantních manipulátorů (aplikace principů optimálního řízení)

V předchozí Kapitole 3.4.1 jsme se zabývali některými standardními metodami optimalizace pohybu redundantních manipulátorů. Shrňme nyní některé zásadní vlastnosti zmíněných algoritmů:

- **Hledání optimálního řešení IGM metodami dynamické inverze minimalizující hodnotu kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$:**
 - Optimalizace je prováděna izolovaně pro každou požadovanou polohu koncového efektoru manipulátoru.
 - Přesto, že je nalezeno v každém takovém bodě optimum kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ s vazební podmínkou $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Q})$, dynamický vývoj stavu (polohy a rychlosti kloubových souřadnic manipulátoru) není nikterak v korelaci se skutečným dynamickým modelem manipulátoru (může docházet k nalezení nekonzistentního (nerealizovatelného) řešení podél požadované trajektorie koncového efektoru, vývoj rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic není v průběhu optimalizace jakkoliv zohledňován).
 - Lze optimalizovat pohyb redundantního manipulátoru pouze na základě kriteriální funkce, která závisí výhradně na poloze kloubových souřadnic.
 - Algoritmus optimalizace má lokální charakter a nikterak nevypovídá o globálních chování manipulátoru podél celé požadované trajektorie pohybu.
- **Hledání optimálního řešení IGM, IIK s ohledem na dynamický model manipulátoru a minimalizaci požadovaných sil/momentů v aktuátorech:**
 - Optimalizace zohledňuje dynamický model manipulátoru.
 - Nalezená optimální trajektorie pohybu je konzistentní (optimalizace přirozeně zohledňuje průběhy rychlostí a zrychlení aktuátorů, neboť je uvažován dynamický model manipulátoru).
 - Kriteriální funkce $\mathbf{J}(\dot{\mathbf{Q}}_0)$ závisí přirozeně na poloze, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic manipulátoru, tzn. lze definovat obecné kritérium optimality (nejen polohově závislé).
 - Přesto, že je uvažován dynamický model manipulátoru, a tím vývoj stavu manipulátoru v čase (podél požadované trajektorie pohybu koncového efektoru), má algoritmus optimalizace opět lokální charakter. Přesto, že v daných bodech trajektorie je z aktuálního stavu manipulátoru (polohy a rychlosti kloubových souřadnic) vždy nalezeno optimální řešení, v globálním měřítku může toto řešení vést k neuspokojivým výsledkům (zejména pro časově dlouhé trajektorie, kdy lokální optimalizace na svém počátku způsobí díky vývoji stavu manipulátoru sice optimální, ale vysoké požadavky na síly/momenty v aktuátorech na konci požadovaného pohybu).

Zejména lokální charakter optimalizace přináší problémy při řízení pohybu redundantních manipulátorů. Globální optimalita hraje majoritní význam, neboť v drtivé většině případů požadujeme optimální pohyb manipulátoru podél celé požadované trajektorie, tzn. od času $t_0 = 0$ do nějakého času t_f . Lokální charakter optimalizace, který sice podmínky optimality splňuje, ale negarantuje „rozumný“ průběh sledovaného kritéria v celém časovém horizontu, je nežádoucí.

Zabývejme se proto problémem optimalizace pohybu redundantního manipulátoru s ohledem na globální optimalizaci podél celé uvažované trajektorie pohybu odlišným způsobem a formulujme jej nově jako úlohu optimálního řízení následovně:

Formulace problému:

Uvažujme redundantní manipulátor se stupněm redundance $r = n - m$ s kloubovými souřadnicemi $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}, \mathbf{Q}_{\text{orig}}\}$, kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Q}_{\text{orig}} \in \mathbb{R}^{n-r}$ jsou původní kloubové souřadnice a $\mathbf{Q}_{\text{par}} \in \mathbb{R}^r$ jsou kloubové souřadnice parametrizující řešení IGM (IIK), viz Kapitola A.3.2, A.4.2. Kinematická omezení manipulátoru jsou definována pro známou trajektorii koncového efektoru $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^m$, $t = \langle t_0 = 0, t_f \rangle$ jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{orig}} &= \text{IGM}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}}) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} &= \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}) \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} &= \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}, \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}) \end{aligned} \quad (3.194)$$

Předpokládejme globální tvar kritéria optimalizace jako:

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (3.195)$$

kde $\mathbf{u}(t)$ je, zatím blíže nespecifikované, řízení pohybu redundantního manipulátoru, které ovlivňuje, zatím blíže nespecifikovaný, stav manipulátoru $\mathbf{q}(t)$, kde $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ je počáteční stav manipulátoru, $\mathbf{u}_{t_0}^{t_f}$ je strategie řízení na časovém horizontu $t \in \langle t_0, t_f \rangle$ a $g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ je časově variantní (potažmo závislá na okamžitém bodu trajektorie koncového efektoru, neboť $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$) váhová funkce. Kritérium tak zřejmě vyjadřuje plochu pod křivkou $g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ pro čas $t = t_0 \dots t_f$.

Optimalizační úlohu lze formulovat potom následovně:

$$\mathbf{u}_{t_0}^{t_f} = \underset{\mathbf{u}_{t_0}^{t_f}}{\text{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) \right) \quad (3.196)$$

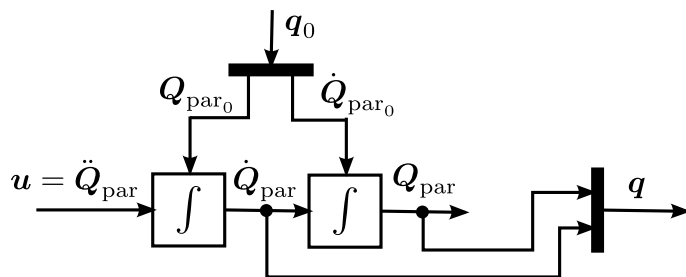
S ohledem na vazební podmínku stavu manipulátoru:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.197)$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t))$ je stavová rovnice.

V případě uvažování redundantního manipulátoru, kdy existuje nekonečně mnoho řešení IGM, IIK, lze stavem manipulátoru označit právě takové kloubové souřadnice a jejich rychlosti, které parametrizují řešení IGM, IIK (parametrizují vnitřní pohyb manipulátoru pro daný pohyb koncového efektoru). Tedy:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{par}}[1](t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}[1](t) \\ \mathbf{Q}_{\text{par}}[2](t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}[2](t) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{\text{par}}[r](t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}[r](t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \quad (3.198)$$



Obrázek 3.44.: Schéma lin. dynamického modelu vývoje stavu redundantního manipulátoru

Vazební podmínky na stav manipulátoru formulují vztah mezi polohou, rychlostí a zrychlením (řízením) parametrizujících kloubových souřadnic, viz Obrázek 3.44. Poznamenejme, že takový dynamický model vývoje kloubových souřadnic parametrizující řešení IGM, IIK je nejjednodušším a zároveň prvním fyzikálně realizovatelným případem, kdy řízení $\mathbf{u}(t)$ reprezentuje zrychlení kloubových souřadnic, tedy odpovídá síle/momentu který je vyvíjen aktuátorem příslušného kloubu manipulátoru. Vývoj stavu manipulátoru je tedy dán lineárním spojitým modelem jako:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t)}_{\mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t))}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2r, 2r}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2r, r} \quad (3.199)$$

kde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Diskretizovaný dynamický model stavu s periodou vzorkování $T_s = t_{k+1} - t_k$ je dán (s uvažováním tvarovače nultého řádu):

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}(t_k)}_{\mathbf{f}(\mathbf{q}(t_k), \mathbf{u}(t_k))}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2r, 2r}, \quad \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2r, r} \quad (3.200)$$

kde:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T_s^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_s & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2}T_s^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_s \end{bmatrix}$$

Výslednou optimalizační úlohu s vazební podmínkou danou lineárním dynamickým systémem vývoje stavu lze tedy psát:

Pro spojitý čas:

$$\mathbf{u}_{t_0}^{*t_f} = \underset{\mathbf{u}_{t_0}^{t_f}}{\operatorname{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) \right), \quad J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = h(\mathbf{q}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad t \in \langle t_0, t_f \rangle \quad (3.201)$$

kde $g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ je váhová funkce. $\mathbf{u}_{t_0}^{*t_f}$ je funkce optimálního řízení na intervalu $t \in \langle t_0, t_f \rangle$ a $h(\mathbf{q}(t_f), t_f)$ je funkce hodnocení koncového stavu v čase t_f .

S ohledem na vazební podmínku stavu manipulátoru:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2r, 2r}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2r, r} \quad (3.202)$$

kde dynamické matice \mathbf{A} , \mathbf{B} jsou dány viz (3.199), stav $\mathbf{q}(t)$ a řízení $\mathbf{u}(t)$ potom rovnicí (3.198).

Pro diskrétní čas $t_k = k \cdot T_s$, $k = 0, 1, \dots, N$, $t_f = N \cdot T_s$:

$$\mathbf{u}_0^{*N-1} = \underset{\mathbf{u}_0^{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) \right), \quad J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) = \Phi(\mathbf{q}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \quad (3.203)$$

kde $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$, $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}(t_k)$, $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$ je diskretizovaná váhová funkce v čase t_k a $\Phi(\mathbf{q}_N)$ je funkce hodnocení koncového stavu v čase t_f . \mathbf{u}_0^{*N-1} je diskrétní posloupnost optimálního řízení v diskretních časových okamžicích t_k .

S ohledem na vazební podmínku stavu manipulátoru:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2r, 2r}, \quad \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2r, r} \quad (3.204)$$

kde dynamické matice \mathbf{F} , \mathbf{G} jsou dány viz (3.200), stav \mathbf{q}_k a řízení \mathbf{u}_k potom rovnicí (3.198) (v diskretních časových okamžicích).

Dále budeme uvažovat dva typy optimalizace pohybu redundantního manipulátoru, a to *optimalizace rychlostí aktuátorů* a *optimalizace sil/momentů působících v aktuátorech*. Definujme tedy váhovou funkci g a optimalizované kritérium J následovně (uvažujme spojitý čas, v případě optimalizace v diskretním čase je využito odpovídající výše zmíněné definice kritéria a diskretizace časových okamžiků):

Minimalizace rychlostí:

Cíle optimalizace je nalezení takové funkce řízení $\mathbf{u}_{t_0}^{*t_f}$, které minimalizuje požadované rychlosti v aktuátorech manipulátoru (v globálním smyslu). Kritérium optimalizace je tedy definováno následovně:

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (3.205)$$

kde váhová funkce $g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ je dána jako:

$$g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) = \|\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}(t), t)\|^2 + \mathbf{u}^T(t) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{Q}}^T(\mathbf{q}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}(t), t) + \mathbf{u}^T(t) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (3.206)$$

kde $\dot{\mathbf{Q}}$ je vektor okamžitých kloubových rychlostí. Váhová matice \mathbf{R} penalizuje řízení $\mathbf{u}(t)$. Poznamenejme, že v případě, že nezavedeme penalizaci řízení, může optimalizace vést k nekontrolovatelně vysokým (a tedy nerealizovatelným) hodnotám řízení (zrychlení-požadované síle/momentu parametrizujících kloubových souřadnic).

Jelikož stav $\mathbf{q}(t)$ a řízení $\mathbf{u}(t)$ je zavedeno dle (3.198), tedy $\mathbf{q}(t) = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)\}$ a $\mathbf{u}(t) = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)$, kloubové rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ jsou zřejmě dány (z řešení IIK pro redundantní manipulátory, viz Kapitola A.4.2) jako funkce stavu a času:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \mathbf{IIK}(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}(\underbrace{\mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)}_{\mathbf{q}(t)}, t) = \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}(t), t) \quad (3.207)$$

kde časová závislost polohy $\mathbf{X}(t)$ a rychlosti $\dot{\mathbf{X}}(t)$ známé požadované trajektorie pohybu koncového efektoru udává časovou závislost váhové funkce (váhová funkce $g(\star)$ závisí na stavu, řízení a času). Poznamenejme, že zápis $\{\star\}$ označuje množinu kloubových rychlostí, která je uspořádána dle výběru parametrizujících a originálních kloubových souřadnic manipulátoru indexovaných celočíselnými vektory $\mathbf{i}_{\text{par}}, \mathbf{i}_{\text{orig}}$, viz Kapitola A.3.2:

$$\mathbf{Q}_{\text{orig}} = \mathbf{Q}[\mathbf{i}_{\text{orig}}], \quad \mathbf{Q}_{\text{par}} = \mathbf{Q}[\mathbf{i}_{\text{par}}]$$

Minimalizace momentů:

V tomto případě je cílem optimalizace je nalezení takové funkce řízení $\mathbf{u}^{\star}_{t_0}$, která minimalizuje požadované síly/momenty působící v jednotlivých aktuátorech manipulátoru. Kritérium optimality je tedy definována následovně:

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}^{\star}_{t_0}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (3.208)$$

kde váhová funkce $g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ je dána jako:

$$g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) = \|\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)\|^2 = \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (3.209)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je vektor okamžitých hodnot sil/momentů působících v jednotlivých aktuátorech.

Jelikož stav $\mathbf{q}(t)$ a řízení $\mathbf{u}(t)$ je zavedeno opět dle (3.198), tedy $\mathbf{q}(t) = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)\}$ a $\mathbf{u}(t) = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)$, síly/momenty $\boldsymbol{\tau}$ v aktuátorech jsou zřejmě dány (z řešení IIK, IDM pro redundantní manipulátory, viz Kapitoly A.4.2, A.6) jako funkce stavu, řízení a času:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \text{IDM}(\mathbf{Q}(t), \dot{\mathbf{Q}}(t), \ddot{\mathbf{Q}}(t), \mathbf{F}(t)) = \text{IDM}\left(\left\{\begin{array}{c} \mathbf{Q}_{\text{par}}(t) \\ \mathbf{Q}_{\text{orig}}(t) \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}(t) \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c} \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}(t) \end{array}\right\}, \mathbf{F}(t)\right) = \\ &= \text{IDM}\left(\left\{\begin{array}{c} \mathbf{Q}_{\text{par}}(t) \\ \text{IGM}(\dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{Q}_{\text{par}}(t)) \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \text{IIK}(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)) \end{array}\right\}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \left\{\begin{array}{c} \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \text{IIK}(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \ddot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t), \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)) \end{array}\right\}, \mathbf{F}(t)\right) \quad (3.210) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\underbrace{\mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)}_{\mathbf{q}(t)}, \underbrace{\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)}_{\mathbf{u}(t)}, t) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (3.211)$$

kde časová závislost polohy $\mathbf{X}(t)$, rychlosti $\dot{\mathbf{X}}(t)$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}(t)$ známé požadované trajektorie pohybu koncového efektoru společně se známou časovou závislostí externě působících sil/momentů $\mathbf{F}(t)$ udává časovou závislost váhové funkce (váhová funkce $g(\star)$ závisí na stavu, řízení a času). Poznamenejme, že dodatečně nezavádíme penalizaci řízení jako v případě optimalizace rychlostí kloubových souřadnic, neboť toto řízení (zrychlení parametrizujících kloubových souřadnic) přirozeně ovlivňuje optimalizované síly/momenty v jednotlivých aktuátorech.

■ Poznámka 3.9 (Praktický význam použitých kritérií optimality)

Zaměřme se na praktický význam použitých globálních kritérií. V případě optimalizace sil/momentů podél požadované trajektorie pohybu koncového efektoru manipulátoru lze ukázat, viz Kapitola A.8, že kritérium ve tvaru (3.208, 3.209):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\tau}^T \cdot \boldsymbol{\tau} dt$$

odpovídá množství spotřebované energie, která je zapotřebí pro požadovaný pohyb manipulátoru v čase $t \in \langle t_0, t_f \rangle$.

V případě minimalizace kloubových rychlostí podél požadované trajektorie pohybu koncového efektoru manipulátoru lze pozorovat, že kritérium ve tvaru (3.205, 3.206) pro $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (zanedbáme vážení řízení)

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \dot{\mathbf{Q}}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} dt = \int_{t_0}^{t_f} \|\dot{\mathbf{Q}}\|^2 dt$$

je přímo úměrné celkové dráze ujeté všemi aktuátory manipulátoru v čase $t \in \langle t_0, t_f \rangle$. Tvrzení lze dokázat, neboť v případě, že bychom neuvažovali mocninu v integrandu, platí ($dt \geq 0$):

$$\|\dot{\mathbf{Q}}\| dt = \left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(\sum_{i=1}^n (\dot{q}_i \cdot dt)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n (ds_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

kde $(ds_i)^2$ je kvadrát elementární ujeté dráhy i -tou kloubovou souřadnicí za časový element dt . Element $\|\dot{\mathbf{Q}}\| dt$ je tak úměrný celkové ujeté dráze všemi kloubovými souřadnicemi za časový element dt . V případě elementu $\|\dot{\mathbf{Q}}\|^2 dt$ platí obdobný vztah:

$$\|\dot{\mathbf{Q}}\|^2 dt = \left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \right) dt = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i^2 \cdot dt)$$

jelikož $dt \geq 0$, $(\dot{q}_i)^2 \geq 0$ a funkce kvadrátu je rostoucí je element $\dot{q}_i^2 \cdot dt$ opět úměrný ujeté dráze i -té kloubové souřadnice za časový element dt . Je-li tedy minimalizován integrál $\int_{t_0}^{t_f} \|\dot{\mathbf{Q}}\|^2 dt$ je nutně minimalizován i integrál $\int_{t_0}^{t_f} \|\dot{\mathbf{Q}}\| dt$.

V případě minimalizace kloubových rychlostí, tedy hodnoty integrálu $J = \int_{t_0}^{t_f} \|\dot{\mathbf{Q}}\|^2 dt$ podél požadované trajektorie koncového efektoru v čase $t \in \langle t_0, t_f \rangle$, je tedy výsledná hodnota kritéria úměrná celkové dráze najeté všemi kloubovými souřadnicemi, tedy v podstatě se jedná o hodnotu udávající celkové provozní opotřebení manipulátoru najetou vzdáleností všemi klouby (opotřebení motorů, převodovek, atd.). Minimalizací kritéria lze tedy dosahovat prodloužení životnosti manipulátoru. ■

Přístupy k řešení definovaných úloh optimálního řízení

Připomeňme, že optimalizační úloha nalezení pohybu redundantního manipulátoru s daným kritériem optimality (minimalizace rychlostí, sil/momentů aktuátorů) lze souhrnně zapsat, viz (3.201, 3.203), jako:

Pro spojitý čas:

$$\mathbf{u}_{t_0}^{*t_f} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}_{t_0}^{t_f}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) \right), \quad J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = h(\mathbf{q}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad t \in \langle t_0, t_f \rangle \quad (3.212)$$

S ohledem na vazební podmínku stavu manipulátoru:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2r, 2r}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2r, r}$$

Pro diskrétní čas:

$$\mathbf{u}_0^{*N-1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}_0^{N-1}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) \right), \quad J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) = \Phi(\mathbf{q}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \quad (3.213)$$

S ohledem na vazební podmínku stavu manipulátoru:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2r,2r}, \quad \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2r,r}$$

kde $\mathbf{u}_{t_0}^{*t_f}$ resp. \mathbf{u}_0^{*N-1} je hledané spojité resp. diskrétní řízení stavového modelu. Hledané řízení resp. stavy dynamického modelu reprezentují zrychlení resp. polohy a rychlosti kloubových souřadnic redundantního manipulátoru parametrizující řešení IGM, IIK, viz definice (3.198). Konkrétní podoby váhových funkcí $g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ (včetně jejich diskrétní podoby $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$) jsou určeny pro specifické problémy (minimalizace rychlostí a sil/silových momentů) rovnicemi (3.206, 3.209).

Je známo, že v případě řešení úloh optimálního řízení existují dva odlišné přístupy, viz Kapitole A.10: *Metody založené na Bellmanově optimalizační rekurzi (dynamické programování)* a *Metody založené na Hamiltonovu přístupu (variační počet)*. Zabývejme se dále těmito metodami vzhledem k úloze optimalizace pohybu redundantních manipulátorů (zejména na optimalizaci rychlostí a sil/silových momentů v aktuátorech). Za účelem obecného náhledu na řešení formulované optimalizační úlohy a vhodnosti použitých metod budou dále analyzovány zmíněné přístupy a výsledky použity k návrhu nového přístupu k řešení.

3.4.2.1. Bellmanova optimalizační rekurze

Dynamické programování je řešeno pro optimalizační problém formulovaný v diskrétním čase (3.213) prostřednictvím zpětné Bellmanovy optimalizační rekurze, viz Kapitola A.10.1, která vede na následující řešení problému:

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k) = \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmin}} [g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) + V_{k+1}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k)], \quad k = N-1, N-2, \dots, 0 \quad (3.214)$$

$$V_N(\mathbf{q}_N) = J_N(\mathbf{q}_N) = \Phi(\mathbf{q}_N)$$

kde $\mathbf{s}(\mathbf{q}_k)$ je strategie (funkce stavu) generující posloupnost diskrétního řízení $\mathbf{u}_k = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t_k)$ ovlivňující vývoj stavu redundantního manipulátoru $\mathbf{q}_k = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}(t_k), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t_k)\}$, $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$ je váhová funkce (dle zvoleného typu optimalizace), $V_k(\mathbf{q}_k)$ je Bellmanova funkce vyjadřující optimální (minimální) hodnotu kritéria $J(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k^{*N-1})$ pro stav \mathbf{q}_k v čase t_k , \mathbf{F} , \mathbf{G} jsou příslušné dynamické matice vývoje stavu manipulátoru, viz (3.200) a $\Phi(\mathbf{q}_N)$ je hodnocení koncového stavu \mathbf{q}_N .

Cílem dynamického programování je nalézt takovou strategii řízení $\mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$ která bude generovat optimální posloupnost řízení \mathbf{u}_k z libovolného stavu \mathbf{q}_k a v libovolném diskrétním čase t_k . V případě, že je možné takovou strategii nalézt získáváme obecný předpis (funkci $\mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$) pro optimální řízení, jinými slovy, optimalizační úlohu tak vyřešíme zcela obecně a nalezená strategie řízení má obecnou platnost na celém stavovém prostoru řízeného modelu (jako funkce času a stavu je tak vypočítána pouze jednou).

Bohužel, analytické řešení Bellmanovy optimalizační rekurze je možné nalézt pouze ve specifických a jednoduchých případech a pro formulovanou optimalizační úlohu se je třeba omezit (z důvodu složitosti váhové funkce) na aproximativní řešení, viz Kapitola A.10.1. Demonstrujme proto použití diskrétního rekurzivního numerického algoritmu, viz Algoritmus A.5, na dále uvedeném příkladu minimalizace sil/silových momentů manipulátoru.

★ Příklad 3.12 (Rek. alg. Bellmanova opt. rekurze: minimalizace sil/momentů)

Uvažujme opět shodný manipulátor a požadovanou trajektorii pohybu koncového efektoru jako v Příkladech 3.8, 3.9, 3.10. Vzhledem k tomu, že se jedná o manipulátor se stupněm

redundance $r = n - m = 1$ ($\mathbf{Q}_{\text{par}} = d_1$), bude dynamický vývoj stavu manipulátoru

$$\begin{aligned} \text{Stav: } \mathbf{q}_k &= [\mathbf{Q}_{\text{par}} \quad \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}]^T \\ \text{Řízení: } \mathbf{u}_k &= \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \end{aligned}$$

dán diskretním dynamickým modelem druhého řádu (3.200), periodu vzorkování uvažujme $T_s = 0.04s$.

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0.04 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.0008 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

Diskretizace stavu a řízení uvažujme následovně:

$$\begin{aligned} N_{q_i} = 40 &\Rightarrow N_q = 1600, \quad q_i^{\min} = -1, \quad q_i^{\max} = 1, \quad i = 1, 2 \\ N_{u_1} = 40 &\Rightarrow N_u = 40 \quad u_1^{\min} = -3, \quad u_1^{\max} = 3 \end{aligned}$$

Váhová funkce a hodnocení koncového stavu je dáno shodně jako ve formulaci optimalizační úlohy (3.208) v diskretním čase:

$$\begin{aligned} g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) &= \|\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)\|^2 = \boldsymbol{\tau}_k^T(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \\ \Phi(\mathbf{q}_N) &= g_N(\mathbf{q}_N, \mathbf{0}) \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$ je dána funkcí (3.211) pro $t = k \cdot T_s$, $k = 1, 2, \dots, N$, $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$ (externí silové/momentové působení na koncový efektor neuvažujeme).

Optimální řízení a kritérium optimalizace je opět dáno, viz (3.213) jako:

$$\mathbf{u}_0^{*N-1} = \underset{\mathbf{u}_0^{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) \right), \quad J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) = \Phi(\mathbf{q}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \quad (3.215)$$

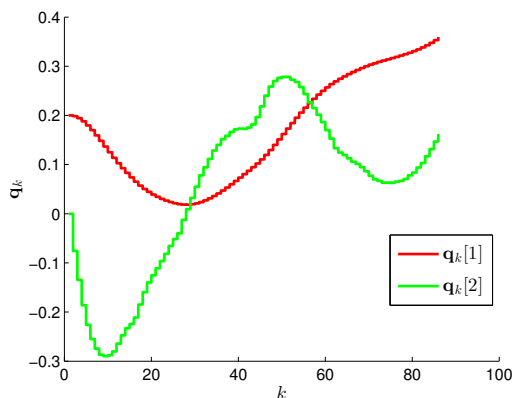
Vývoj stavu, tedy optimální polohy a rychlosti lineárního pojezdu manipulátoru d_1 , a odpovídající řízení (zrychlení d_1) je znázorněno na Obrázku 3.45. Vývoj Bellmanovy funkce je znázorněn na Obrázku 3.46(a) a vyjadřuje optimální hodnotu kritéria $J^*(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k^{*N-1})$ v čase a odpovídajícím stavu (zřejmě se jedná o nerostoucí funkci). Obrázek 3.46(b) znázorňuje vývoj váhové funkce (kvadrátu normy sil/momentů) podél trajektorie systému. Na Obrázku 3.47 je znázorněna hodnota kritéria $J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1})$ podél trajektorie systému pro optimální $\mathbf{u}_0^{N-1} = \mathbf{u}_0^{*N-1}$ a perturbovanou $\mathbf{u}_0^{N-1} = \text{pert} \mathbf{u}_0^{N-1}$ hodnotu řízení (pro 100 pokusů generování perturbovaného řízení):

$$\text{pert} \mathbf{u}_0^{N-1} = \mathbf{u}_0^{*N-1} + (\text{Rand}(1, 1) - 0.5)$$

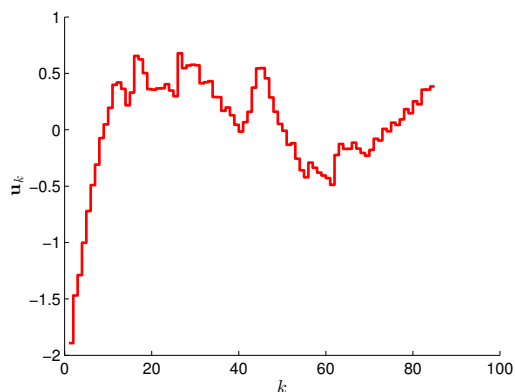
Lze tak pozorovat, že perturbovaná řízení (zrychlení) lineárního pojezdu manipulátoru vykazují větší hodnoty kritéria, než je hodnota optimální. Poznamenejme, že se jedná pouze o experimentální ověření algoritmu výpočtu optimálního řízení (korektní důkaz je založen na matematickém základě diskutovaném v Kapitole A.10.1).

Z výpočetní náročnosti rekurzivního numerického algoritmu uvedeného v Kapitole A.10.1 a jeho porovnání s algoritmem hrubé síly prohledávání úplného stavového prostoru lze ukázat, že celkový počet operací vyčíslení hodnoty kritériální funkce podél celé diskretizované trajektorie koncového efektoru v čase je dán jako: $N_{\text{alg}} = N_q \cdot N_u \cdot (N - 1) = (40 \cdot 40) \cdot 40 \cdot (86 - 1) = 5.44 \cdot 10^6$ operací ($N = 86$, celkový čas $t_f = T_s \cdot N = 3.44s$). V případě hledání řešení dopředným prohledáváním stavového prostoru (hrubou silou) by byl celkový počet operací dán jako: $N_{\text{alg}} = \sum_{k=1}^{N-1} N_q \cdot N_u^k = \sum_{k=1}^{(86-1)} (40 \cdot 40) \cdot 40^k = 3.67 \cdot 10^{275}$.

Je tedy zřejmé, že rekurzivní algoritmus řešení Bellmanovy optimalizační rekurze umožňuje, s ohledem na svou výpočetní náročnost, vůbec optimální úlohu reálně počítat. Přesto v uvedeném příkladu výpočet optimálního řízení trvá 266 minut (na procesoru: IntelCore i7, 3.6GHz), což odpovídá potřebné době k výpočtu jedné operace (výpočet nového stavu a vyčíslení kritéria) přibližně 3ms. Pro totožný čas pro výpočet jedné operace by však dopředný algoritmus hrubou silou trval přibližně $3.49 \cdot 10^{265}$ let.

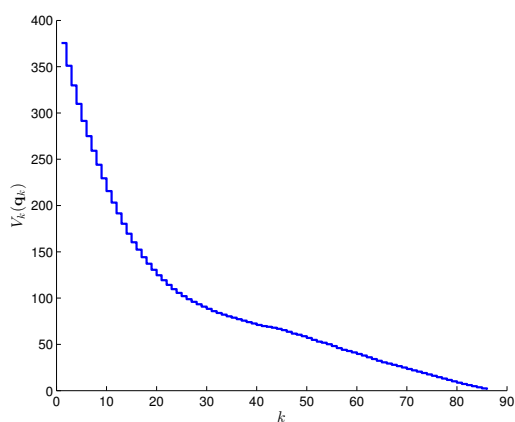


(a) Optimální průběh stavu \mathbf{q}_k (poloha a rychlost lineárního pojezdu).

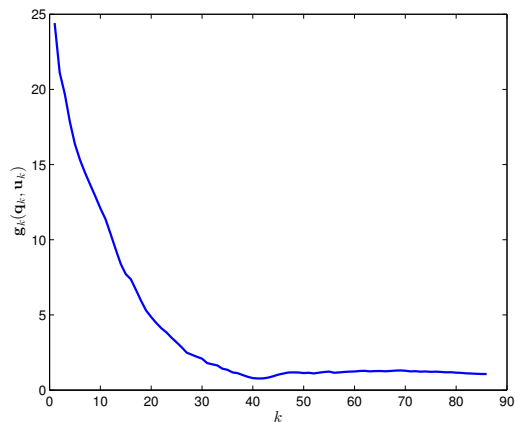


(b) Optimální řízení (zrychlení lineárního pojezdu).

Obrázek 3.45.: Optimální průběh stavu a řízení.

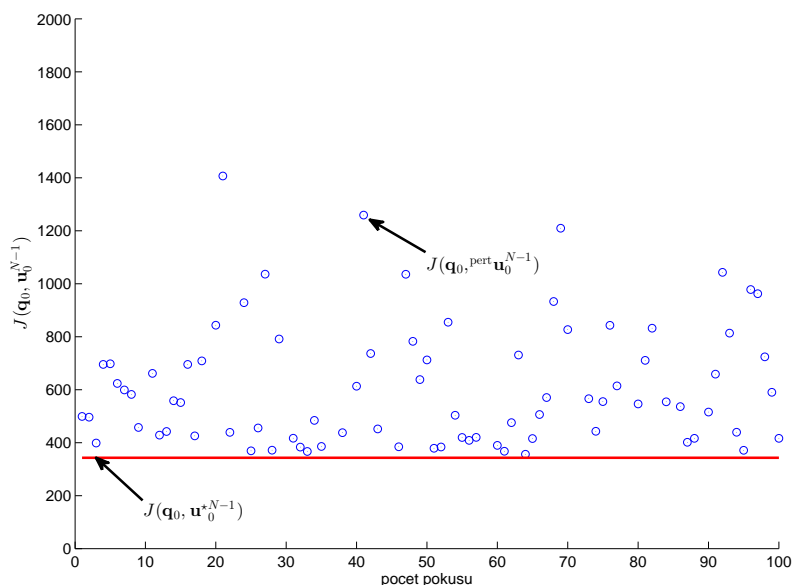


(a) Optimální průběh Bellmanovy funkce $V_k(\mathbf{q}_k)$



(b) Optimální průběh váhové funkce $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$

Obrázek 3.46.: Optimální průběh Bellmanovy funkce a váhové funkce.



Obrázek 3.47.: Porovnání optimální hodnoty kritéria s hodnotami kritéria pro perturbovanou řízení (zrychlení) lineárního pojezdu. Porovnání je provedeno pro 100 pokusů perturbace optimálního řízení.

★

3.4.2.2. Hamiltonův přístup

V Kapitole 3.4.2.1 bylo ukázáno řešení optimalizační úlohy pro pohyb redundantního manipulátoru za účelem optimalizace požadovaných rychlostí a sil/momentů podél plánované trajektorie koncového efektoru. Optimalizační úloha byla formulována pro redundantní manipulátor jako úloha dynamického programování. Přesto, že bylo ukázána existence rekurzivního algoritmu, viz Algoritmus A.5, založené na zpětné Bellmanově optimalizační rekurzi, je takový algoritmus jen stěží použitelný pro efektivní výpočet optimálního řízení redundantních manipulátorů, a to zejména z následujících důvodů:

- Diskretizací hodnot řízení a stavového prostoru manipulátoru a diskretizací času je výsledek algoritmu výrazně ovlivněn (jedná se o aproximativní řešení, neboť dynamické projevy manipulátoru jsou dány přirozeně spojitým dynamickým systémem).
- Zjemňování diskretizace vede na velký počet iterací algoritmu (i pro jednoduché manipulátory je optimální úloha počítána v řádu hodin).
- Přesto, že řešením optimalizační úlohy je tabulka hodnot diskretizovaného optimálního řízení pro všechny diskretizované stavy a časy a optimální řízení lze tak realizovat z libovolného stavu a času pouze prostřednictvím interpolace dat z (lookup) tabulky, tato tabulka pro jemnou diskretizaci v hodnotách a v čase bude velmi rozsáhlá (paměťově náročná) a přirozeně nevhodná pro generování hodnot optimálního řízení v systémech řízení pohybu v reálném čase.
- Z důvodu diskretizace a omezenosti stavového prostoru a prostoru řízení nemusí být možné nalézt přípustná řízení ze stavů na počátku trajektorie (důsledek řešení Bellmanovy optimalizační rekurze od konce)

- V případě plánování pohybu redundantního manipulátoru je většinou dostačující znát jedno konkrétní optimální trajektorii (řízení) z dané počáteční podmínky (počátečního stavu manipulátoru).

V této kapitole se budeme zabývat odlišným přístupem k řízení redundantního manipulátoru metodami založenými na principu variačního počtu, viz Kapitola A.10.2, kterým lze převést formulovaná úloha na řešení dvoubodového problému, konkrétně na řešení soustavy dvojice vektorových diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami. Z definice optimalizační úlohy dle metod variačního počtu (resp. z nutných podmínek na existenci extrému) je nutné k převedení úlohy na dvoubodový problém vyřešit rovnici definující algebraickou nutnou podmínky existence extrému (obecně nelineární vektorová rovnice). Zatímco tato úloha lze relativně snadno řešit v případě optimalizace rychlostí aktuátorů (algebraická nutná podmínka existence extrému je přirozeně analyticky řešitelná), v případě optimalizace sil/momentů se situace značně komplikuje. Klíčovým přínosem práce je nalezení mechanismu (důkaz), založeného na algoritmovatelných metodách řešení DIK, IIK, IDM, DDM, který dokazuje existenci analytického řešení algebraické nutné podmínky existence extrému v případě optimalizace sil/momentů v aktuátorech (potažmo optimalizace spotřebované energie pro pohyb redundantního manipulátoru). Tedy obdobně, jako v případě rekursivních metod výpočtu DIK, IIK, IDM, DDM, lze úloha optimalizace sil/momentů redundantního manipulátoru přeformulovat nalezeným rekursivním algoritmem na dvoubodový problém. Lze ukázat, že pro takto formulovaný problém již existují (s ohledem na výpočetní a paměťovou náročnost, rychlost, přesnost, stabilitu, atd.) efektivní numerické algoritmy, viz Kapitola A.10.2.

Uvažujme dále optimalizační úlohu definovanou ve spojitém čase, viz (3.212), tedy nalezení takové sekvence řízení

$$\mathbf{u}_{t_0}^{*t_f} = \underset{\mathbf{u}_{t_0}^{t_f}}{\operatorname{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) \right) \quad (3.216)$$

pro kterou je minimalizováno kritérium

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = h(\mathbf{q}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (3.217)$$

určené váhovou funkcí $g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ a $h(\mathbf{q}, t) = 0$, tzn. koncový stav není (explicitně) hodnocen.

Stav $\mathbf{q}(t) = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)\}$ a řízení $\mathbf{u}(t) = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)$ jsou opět dány jako polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic parametrizující řešení IGM (IIK) uvažovaného redundantního manipulátoru (se stupněm redundance r) vztažené lineární dynamickou rovnicí $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ (vztah mezi polohou/rychlostí/zrychlením). V platnosti tak zůstávají všechny doposud uvažované závislosti (3.194 - 3.199).

Pro nalezení **jediné optimální trajektorie** stavu $\mathbf{q}^*(t)$ a odpovídajícího řízení $\mathbf{u}^*(t)$ v čase $t \in \langle t_0, t_f \rangle$ z počátečního stavu $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ lze řešit odpovídající soustavu algebroidních rovnic, viz Kapitola A.10.2). Optimalizační úlohu lze tak psát následovně:

Zavedením Hamiltoniánu:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{p}^T \cdot (\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \quad (3.218)$$

Dostáváme soustavu algebro-diferenciálních rovnic:

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{q}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^* \quad (3.219)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^* = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{p}^* - \frac{g(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.220)$$

$$0 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = -\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p}^* - \frac{g(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.221)$$

Současně s okrajovými podmínkami:

$$\mathbf{q}^*(t_0) = \mathbf{q}_0 \quad (3.222)$$

$$\mathbf{p}^*(t_f) = \mathbf{0} \quad (3.223)$$

kde \mathbf{p} je vektor kostavu (stejné dimenze jako stav \mathbf{q}).

Zabývejme se nejprve řešením algebraické rovnice (3.221) a hledejme takové řízení

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (3.224)$$

které této rovnici vyhovuje (a je závislé na stavu \mathbf{q} , kostavu \mathbf{p} a času t). Nalezené řešení $\mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ lze poté dosadit do diferenciálních rovnic (3.219, 3.220) a získat tak soustavu diferenciálních rovnic (bez algebraické vazby):

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}(t), t) \quad (3.225)$$

s okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t_0)[1 : 2r] &= \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{S}(t_f)[2r + 1 : 4r] &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2r}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2r} \\ \mathbf{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{p} - \frac{g(\mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Řešení algebraické rovnice (3.221) je závislé na zvolené váhové funkci $g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$, analyzujme proto dva již dříve zmíněné případy optimalizace, a to *minimalizace kloubových rychlostí*, viz (3.206, 3.207), a *minimalizace kloubových sil/silových momentů*, viz rovnice (3.209, 3.211). Úloha (3.225) je obecně známá jako dvoubodový problém (Boundary Value Problem - BVP).

Algebraická podmínka (minimalizace rychlostí)

Váhovou funkci $g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$ lze pro známou trajektorii koncového efektoru manipulátoru \mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$ pro čas $t \in \langle t_0, t \rangle$ psát, viz (3.206, 3.207), jako:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) &= \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, t)^T \cdot \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, t) + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} \\ &\Rightarrow \frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} = 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.226)$$

Řešení algebraická rovnice (3.221) je tak jednoduché (a nezávislé na stavu \mathbf{q}):

$$0 = -\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p} - 2\mathbf{R}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p} \quad (3.227)$$

Pravá strana soustavy diferenciálních rovnic (3.225) tak přejde na tvar:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p} \\ -\mathbf{A}^T\mathbf{p} - \frac{g(\mathbf{q}, -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}, t)}{\partial\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (3.228)$$

Člen $\frac{g(\mathbf{q}, -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}, t)}{\partial\mathbf{q}}$ je možné vypočítat numerickým odhadem parciální derivace váhové funkce $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ podle stavu \mathbf{q} (pro testované algoritmy je dostačující jednostranný numerický odhad).

Algebraická podmínka (minimalizace sil/momentů)

Váhovou funkci $g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$ lze pro známou trajektorii koncového efektoru manipulátoru \mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$, $\ddot{\mathbf{X}}$ pro čas $t \in \langle t_0, t \rangle$ psát, viz (3.209, 3.211), jako:

$$g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) = \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \quad (3.229)$$

kde (zanedbejme externí silové/momentové působení na koncový efektor $\mathbf{F} = \mathbf{0}$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) &= \text{IDM}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}, \mathbf{0}) = \text{IDM}(\underbrace{\mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}}_{=\mathbf{q}}, \underbrace{\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}}_{=\mathbf{u}}, t) \\ &\Rightarrow \frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} = 2\boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.230)$$

Zabývejme se nejprve nalezením vztahu pro parciální derivaci $\frac{\partial \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}}$. Je zřejmé, že substitucí za řízení $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$ a stav $\mathbf{q} = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}\}$ do rovnice (3.210) dostáváme vztah pro IDM:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) = \text{IDM}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, t), \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t), \mathbf{0}) \quad (3.231)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) &= \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{par}}(t) \\ \mathbf{Q}_{\text{orig}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{par}}(t) \\ \text{IGM}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Q}_{\text{par}}(t)) \end{Bmatrix} \\ \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, t) &= \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \text{IIK}(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)) \end{Bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) &= \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t) \\ \text{IIK}(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \ddot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{Q}_{\text{par}}(t), \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t), \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t)) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Tedy nutně platí, pro $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \text{IDM}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, t), \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t), \mathbf{0}) = \frac{\partial \text{IDM}}{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{u}}}_{=\mathbf{0}} + \frac{\partial \text{IDM}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, t)} \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{u}}}_{=\mathbf{0}} + \\ &+ \frac{\partial \text{IDM}}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)} \frac{\partial \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \text{IDM}}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)} \frac{\partial \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.232)$$

- Člen $\frac{\partial \text{IDM}}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}$ lze vyjádřit přímo z dynamické rovnice robotu (A.98):

$$\frac{\partial \text{IDM}}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial \tau}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}} \left(\mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}) \right) = \underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{Q})}_{\text{fce. } \mathbf{Q} \Rightarrow \text{fce. } \mathbf{Q}_{\text{par}}, t} \quad (3.233)$$

- Člen $\frac{\partial \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}}$ lze vyjádřit pomocí známého vztahu mezi zrychlením všech kloubových souřadnic $\ddot{\mathbf{Q}}$ manipulátoru a zrychlením kloubových souřadnic $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$ parametrizující řešení IGM, viz vztah (A.72):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}} &= \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \\ \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{J}_{\text{par}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \right) \end{array} \right\} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{Q}}}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{I}_{r \times r} \\ -\mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\text{par}} \end{array} \right\}}_{\text{fce. } \mathbf{Q} \Rightarrow \text{fce. } \mathbf{Q}_{\text{par}}, t} \quad (\text{uspořádání řádků opět dle výběru } \mathbf{Q}_{\text{par}} \text{ z } \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (3.234)$$

Zpětným dosazením rovnic (3.233, 3.234) do (3.232) dostáváme vztah pro výpočet členu $\frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}}$ (který závisí pouze na aktuální poloze souřadnic \mathbf{Q}_{par} a čase t , nikoliv na řízení \mathbf{u}):

$$\frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \text{IDM}}{\partial \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}} = \mathbf{M} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{I}_{r \times r} \\ -\mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\text{par}} \end{array} \right\} \quad (3.235)$$

Vraťme se zpět k algebraické podmínce (3.221) a dosaďme do ní již známý vztah (3.230), dostáváme:

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p} - 2\tau^T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \cdot \frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p} &= \tau^T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \cdot \frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.236)$$

kde nyní jediný člen závislý na hledaném řízení $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ je člen $\tau^T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$.

Dosažením dynamické rovnice robotu (A.98) za $\tau^T(\mathbf{F} = \mathbf{0})$ do rovnice (3.236) a jednoduchými úpravami dostáváme hodnotu zrychlení všech kloubových souřadnic manipulátoru (obsahující jistě i hledané řízení $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p} &= \left[\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G} \right]^T \cdot \frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \\ \underbrace{\left[\frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T}_{\text{fce. } \mathbf{Q} \text{ (tedy: } \mathbf{q} \text{ a } t)} \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} &= - \underbrace{\left[\frac{1}{2}\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p} \right]^T}_{\text{fce. } \mathbf{p}} - \underbrace{\left[\frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T}_{\text{fce. } \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}} \text{ (tedy: } \mathbf{q} \text{ a } t)} \cdot \left[\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G} \right] \\ \mathbf{N}(\mathbf{q}, t) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned} \quad (3.237)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{q}, t) &= \left[\frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \cdot \mathbf{M} \\ \mathbf{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= - \left[\frac{1}{2}\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p} \right]^T - \left[\frac{\partial \tau(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \cdot \left[\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G} \right] \end{aligned}$$

Budeme-li dále uvažovat konkrétní rozdělení kloubových souřadnic \mathbf{Q} na \mathbf{Q}_{par} a \mathbf{Q}_{orig} , viz Kapitola A.3.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{orig}} &= \mathbf{Q}[\mathbf{i}_{\text{orig}}], & \mathbf{Q}_{\text{par}} &= \mathbf{Q}[\mathbf{i}_{\text{par}}] \\ \mathbf{i}_{\text{orig}} &\subset \{1, 2, \dots, n\}, & \mathbf{i}_{\text{par}} &\subset \{1, 2, \dots, n\}, & \mathbf{i}_{\text{orig}} \cap \mathbf{i}_{\text{par}} &= \emptyset \end{aligned} \quad (3.238)$$

lze rovnici (3.237) upravit následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{par}}] \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \cdot \underbrace{\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}}_{\text{viz (A.72)} \Rightarrow} \\ \mathbf{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{par}}] \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \cdot \underbrace{\left(\mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{J}_{\text{par}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \right) \right)}_{\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}} \\ \mathbf{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \left[\mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{par}}] - \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \cdot \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\text{par}} \right] \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} + \\ &\quad + \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \cdot \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right) \\ \left[\mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{par}}] - \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \cdot \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\text{par}} \right] \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} &= \\ &= \mathbf{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \cdot \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right) \\ \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} &= \left[\mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{par}}] - \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \cdot \underbrace{\mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\text{par}}}_{\text{fce. } \mathbf{Q} \text{ (tedy: } \mathbf{q} \text{ a } t)} \right]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\mathbf{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \mathbf{N}(\mathbf{q}, t)[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \cdot \underbrace{\mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right)}_{\text{fce. } \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}} \text{ (tedy: } \mathbf{q} \text{ a } t) \text{ a } t} \right] \end{aligned} \quad (3.239)$$

Rovnice (3.239) dává tak předpis pro výpočet řízení $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, které splňuje algebraickou podmínku (3.221). Poznamenejme, že výpočet řízení lze snadno algoritmizovat, neboť potřebné výpočty jsou dány jako:

- Stav \mathbf{q} přímo určuje \mathbf{Q}_{par} , $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$ - viz definice (3.198).
- Výpočet \mathbf{Q}_{orig} , $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}$, (tedy zároveň i \mathbf{Q} , $\dot{\mathbf{Q}}$) jako funkce \mathbf{Q}_{par} , $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$ a času (tedy známé zadané trajektorie pohybu koncového efektoru $\mathbf{X}(t)$, $\dot{\mathbf{X}}(t)$ - viz Kapitola A.3.2, A.4.2.
- Derivace jakobiánu $\dot{\mathbf{J}}$ - viz Kapitola A.5.2.
- Jakobiány $\mathbf{J}_{\text{orig}}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q})$ - viz Kapitola A.5.1, A.4.2
- Matice dynamiky $\mathbf{M}(\mathbf{Q})$ - viz Kapitola A.6
- Člen $\mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ - viz Kapitola A.6

Dosazením (3.239) do předpisu diferenciálních rovnic (3.225) dostáváme opět soustavu diferenciálních rovnic (bez algebraické podmínky).

Řešení optimalizační úlohy - soustavy diferenciálních rovnic

V obou případech uvažovaných optimalizací (minimalizace kloubových rychlostí a sil/silových momentů) lze tedy řešení definované optimalizační úlohy převést (**analytickým, algorit-mizovatelným** řešením algebraické podmínky (3.221) pro $\mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$) na řešení dvoubodového problému (BVP), tedy soustavy $4r$ nelineárních diferenciálních rovnic (3.225),

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}(t), t), \quad \mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{2r}, \quad \mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{2r} \quad (3.240)$$

s okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t_0)[1 : 2r] &= \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{S}(t_f)[2r + 1 : 4r] &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

kde $4r = 4(n - m)$ (r je stupeň redundance manipulátoru s n klouby a m DoF koncového efektoru).

Pro řešení BVP byl volen přístup prostřednictvím tzv. *collocation* metody, viz Kapitola A.10.2, implementované v Matlabu pod funkcí `bvp4c`, viz [98, 144], stručně lze podstatu algoritmu shrnout následovně:

- Hledaná optimální trajektorie $\mathbf{S}(t)$ je po částech (mezi časovými okamžiky t_i, t_{i+1} - segmenty) modelována kubickým polynomem (polynom je vázán okrajovými podmínkami v čase t_0 a t_f a vyhovuje diferenciální rovnici vždy v počátečním t_i , prostředním $t_i + \frac{t_{i+1} - t_i}{2}$ a koncovém t_{i+1} bodu daného segmentu).
- Získaná soustava algebraických rovnic je řešena numericky prostřednictvím lineari-zace (s využitím efektivních implementovaných solverů).
- Vzhledem k faktu, že nelineární BVP může mít více řešení a s ohledem na urychlení konvergence algoritmu je umožněno vložit počáteční odhad hledané trajektorie $\mathbf{S}(t)$ v definovaných časových okamžicích.
- Optimální trajektorie je tak hledána současně přes celý uvažovaný čas $t \in \langle t_0, t_f \rangle$ (numericky hledáním parametrů kubických polynomů vyhovující diferenciální rovnici), velikost časových intervalů může být adaptována za účelem dosažení dané přesnosti (navyšování počtu polynomů).
- Nedochozí k problémům z divergencí algoritmu jako v případě *Shooting methods*.

Bohužel bylo v rámci testování na demonstračních příkladech zjištěno, že velmi často je možné se setkat se situací, že i při nasazení relativně robustního algoritmu (`bvp4c`) nelze nalézt v rozumném čase řešení $\mathbf{S}(t)$ diferenciální rovnice z důvodu selhání numerických algoritmů řešení transformované soustavy nelineárních algebraických rovnic. Častým důvodem je právě volba počátečního odhadu řešení, tedy funkce $\mathbf{S}(t)$ v časových okamžicích t_i vstupující do algoritmu `bvp4c`. V našem případě se tedy jedná o odhad optimální trajektorie stavu $\mathbf{q}(t)$ a kostavu $\mathbf{p}(t)$. Právě proto byl v rámci předložené práce dále vyvinut postup nalezení polynomiální aproximace hledaného optimálního řešení jako rozšíření standardního BVP algoritmu.

Polynomiální odhad řešení optimalizační úlohy

Cílem odhadu řešení optimalizační úlohy je nalézt takovou aproximaci optimální trajektorie $\hat{\mathbf{S}}(t)$, která se blíží co nejvíce optimálnímu řešení $\mathbf{S}^*(t)$ a zároveň je odhad dostatečně výpočetně nenáročný a rychlý. Pro nalezení odhadu

$$\hat{\mathbf{S}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (3.241)$$

bylo využito polynomiální aproximace trajektorie reprezentující polohu parametrizujících kloubových souřadnic \mathbf{Q}_{par} polynomem 5. řádu na celém uvažovaném časovém intervalu $t \in \langle t_0, t_f \rangle$:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\text{par}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_5^1 & a_4^1 & a_3^1 & a_2^1 & a_1^1 & a_0^1 \\ a_5^2 & a_4^2 & a_3^2 & a_2^2 & a_1^2 & a_0^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_5^r & a_4^r & a_3^r & a_2^r & a_1^r & a_0^r \end{bmatrix}}_{\Theta} \cdot \begin{bmatrix} t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.242)$$

kde Θ jsou parametry hledaných polynomiálních funkcí.

Předpokládejme, že parametrizující kloubové souřadnice vždy začínají z klidu $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t_0) = \mathbf{0}$ z nějaké definované polohy $\mathbf{Q}_{\text{par}}(t_0) = \mathbf{Q}_{\text{par}0}$, potom lze redukovat počet hledaných parametrů Θ na počet $4r$ a polynomiální aproximace přejde na tvar (včetně odpovídajících časových derivací):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_{\text{par}} &= \begin{bmatrix} a_5^1 & a_4^1 & a_3^1 & a_2^1 \\ a_5^2 & a_4^2 & a_3^2 & a_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_5^r & a_4^r & a_3^r & a_2^r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_{\text{par}0}, \\ \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_{\text{par}} &= \begin{bmatrix} 5a_5^1 & 4a_4^1 & 3a_3^1 & 2a_2^1 \\ 5a_5^2 & 4a_4^2 & 3a_3^2 & 2a_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 5a_5^r & 4a_4^r & 3a_3^r & 2a_2^r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \end{bmatrix}, \quad \ddot{\hat{\mathbf{Q}}}_{\text{par}} = \begin{bmatrix} 20a_5^1 & 12a_4^1 & 6a_3^1 & 2 \\ 20a_5^2 & 12a_4^2 & 6a_3^2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20a_5^r & 12a_4^r & 6a_3^r & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.243)$$

Odhad stavu $\hat{\mathbf{q}}(\Theta, t) = \{\hat{\mathbf{Q}}_{\text{par}}, \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_{\text{par}}\}$ a řízení $\hat{\mathbf{u}}(\Theta, t) = \ddot{\hat{\mathbf{Q}}}_{\text{par}}$ je tedy dáno polynomiálními funkcemi (3.243) a jejich průběh závisí na hodnotě parametrů $\Theta = \{a_5^i, a_4^i, a_3^i, a_2^i \text{ pro: } i = 1, 2, \dots, r\}$.

Vzhledem ke tvaru kritéria J , viz rovnice (3.217), je zřejmé, že nalezením takových parametrů Θ (jednoznačně definujících průběh odhadu stavu $\hat{\mathbf{q}}$ a řízení $\hat{\mathbf{u}}$), které minimalizuje hodnotu kritéria, dostáváme nejlepší možný odhad optimální trajektorie stavu \mathbf{q}^* a řízení \mathbf{u}^* v rámci uvažovaného omezení na tvar trajektorií daný polynomiálními funkcemi 5. řádu, viz (3.243). Definuje tedy podružnou optimalizační úlohu ve tvaru:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\mathbf{Q}_{\text{par}0}, \Theta) &= \int_{t_0}^{t_f} g(\hat{\mathbf{q}}(\Theta, t), \hat{\mathbf{u}}(\Theta, t), t) dt \quad (\text{kritérium - aproximace}) \\ \hat{J}^*(\mathbf{Q}_{\text{par}0}, \Theta^*) &= \min_{\Theta} \left(\hat{J}(\mathbf{Q}_{\text{par}0}, \Theta) \right) \\ \Theta^* &= \underset{\Theta}{\text{argmin}} \left(\hat{J}(\mathbf{Q}_{\text{par}0}, \Theta) \right) \end{aligned} \quad (3.244)$$

Poznamenejme, že podružná optimalizační úloha (parametrická optimalizace) je redukována pouze na nalezení $4r$ neznámých parametrů (v porovnání s parametrizací polynomiálních segmentů v algoritmu `bvp4c` je taková úspora značná). Podružná optimalizační úloha byly řešena simplexovým Nealder-Mead algoritmem, viz Kapitola 3.2.2. K počátečnímu odhadu stavu $\hat{\mathbf{q}}$ a řízení $\hat{\mathbf{u}}$ je nyní třeba ještě dopočítat odpovídající odhad kostavu $\hat{\mathbf{p}}$. To lze provést numerickým řešením diferenciální rovnice vývoje kostavu (3.220) inverzí času (řešení z t_f do t_0), známé koncové podmínky $\mathbf{p}(t_f) = \mathbf{0}$ a nyní již známých odhadnutých průběhů stavu $\hat{\mathbf{q}}(\Theta, t)$ a řízení $\hat{\mathbf{u}}(\Theta, t)$. Řešení bylo implementováno prostřednictvím

funkce `ode45` v Matlabu. Výsledný počáteční odhad $\hat{\mathbf{S}}(\Theta, t)$ hledané funkce $\mathbf{S}(t)$ řešící uvažovanou optimalizační úlohu je tedy dán:

$$\hat{\mathbf{S}}(\Theta, t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}(\Theta, t) \\ \hat{\mathbf{p}}(\Theta, t) \end{bmatrix} \quad (3.245)$$

Odhad $\hat{\mathbf{S}}(\Theta, t)$ je dále použit jako počáteční odhad k řešení BVP, viz rovnice (3.240), pomocí funkce `bvp4c` v Matlabu.

Před demonstrací navrženého algoritmu, viz Příklad 3.13, založené na variačním počtu shrňme některé klíčové problémy, které zůstávají otevřené:

- **Aproximace řešení pro počáteční odhad řešení $\mathbf{S}(t)$ soustavy diferenciálních rovnic**

Polynomiální aproximace odhadu řešení nemusí být vyhovující s ohledem na limitovaný průběh takové funkce (nedostatečná přesnost odhadu). Klíčovou vlastností však musí zůstat co možná nejmenší počet hledaných (optimalizovaných) parametrů pro odhad řešení (v porovnání s algoritmy řešení BVP). Neexistuje principiálně vhodnější metoda odhadu optimálního řešení?

- **Odhad kostavu**

Odhad kostavu je založen na řešení diferenciální rovnice (3.220) v inverzním čase. Zde můžou nastávat problémy s konvergencí/časovou náročností pro dosažení požadované přesnosti.

- **Singularity v kinematice manipulátoru**

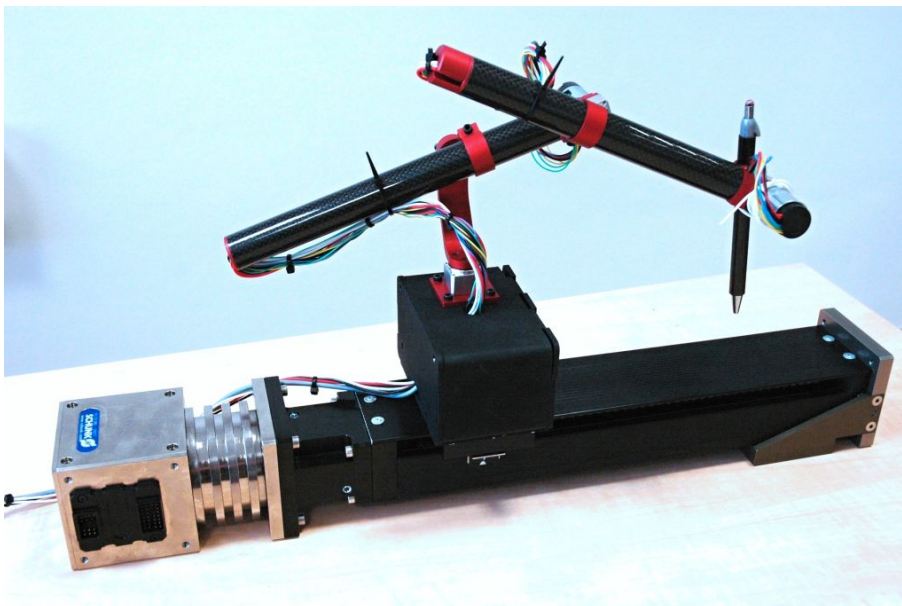
Zásadní kritický faktor při řešení optimalizační úlohy. Možnost dosažení singularity v kinematice manipulátoru v důsledku parametrizace IGM kloubovými souřadnicemi \mathbf{Q}_{par} . Víme, že parametrizující souřadnice \mathbf{Q}_{par} mohou být voleny v podstatě libovolným výběrem $r = n - m$ kloubových souřadnic. Konkrétní vztahy pro výpočet IGM/IIK jsou pak v tomto důsledku odlišné a mohou být náchylnější k výskytu singularit v kinematice manipulátoru během procesu optimalizace, kdy dochází k variaci právě těchto parametrizujících souřadnic. Optimalizační algoritmus může v blízkosti kinematických singularit manipulátoru vykazovat nestandardní (dokonce nestabilní) chování. Jak tedy optimálně volit parametrizující kloubové souřadnice?

- **Konvergence, stabilita a výpočetní náročnost algoritmu řešení BVP**

Obecný problém řešení BVP. Nabízí se otázka, zda-li není možné řešit BVP některou aproximační lokální iterační metodou, viz Kapitola 4.3.

★ **Příklad 3.13 (4 DoF redundantní manipulátor)**

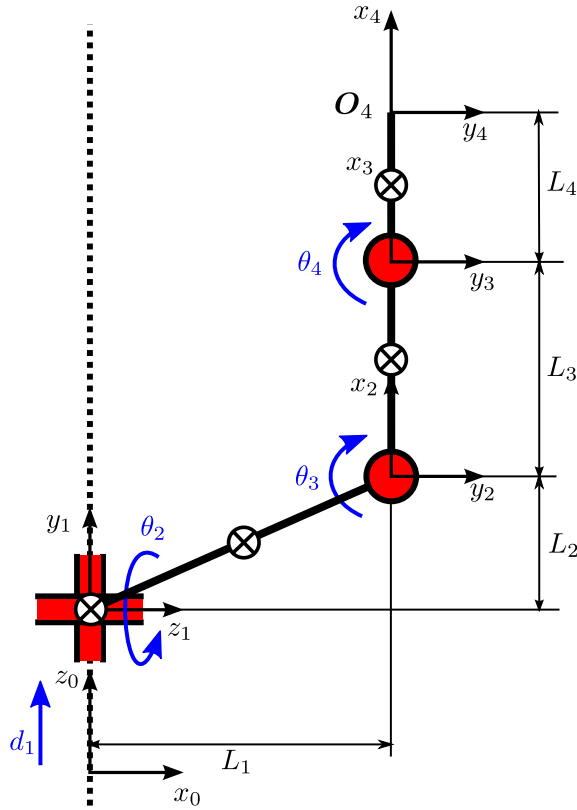
Jako demonstrační příklad optimalizace pohybu redundantního manipulátoru byl vybrán sériový manipulátor, který byl vyvinut na katedře kybernetiky FAV ZČU v Plzni jako modelový manipulátor pro výukové účely, viz Obrázek 3.48. Manipulátor je vybaven 4 nezávislými klouby typu **PRRR** a předpokládá se, že koncový efektor je polohován v prostoru ve smyslu translace (3 DoF). Schématické uspořádání kinematiky manipulátoru je znázorněno na Obrázku 3.49, D-H parametry jsou shrnuty v Tabulce 3.6.



Obrázek 3.48.: 4 DoF sériový redundantní manipulátor.

<i>Joint i</i>	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	d_1	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	L_1	θ_2	L_2	$\frac{\pi}{2}$
3	0	θ_3	L_3	0
4	0	θ_4	L_4	0

Tabulka 3.6.: D-H parametry 4 DoF sériového redundantního manipulátoru



Obrázek 3.49.: D-H úmluva pro 4 DoF sériový redundantní manipulátor (schéma odpovídá poloze kloubových souřadnic $\mathbf{Q} = [d_1 \frac{\pi}{2} 0 0]^T$)

Kloubové souřadnice manipulátoru (jako redundantní kloubová souřadnice parametrizující řešení IGM byla zvolena souřadnice d_1 pohybu lineárního pojezdu manipulátoru):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\text{par}} = [d_1], \quad \mathbf{Q}_{\text{orig}} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.246)$$

Zobecněné souřadnice manipulátoru:

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}_4^0 = [x \ y \ z]^T \quad (3.247)$$

Kinematické návrhové parametry:

$$\boldsymbol{\xi} = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4]^T \quad (3.248)$$

Dynamické parametry:

$$\boldsymbol{\mu} = [m_1 \ r \ \rho]^T \quad (3.249)$$

Předpokládáme vozík o hmotnosti m_1 , ramena manipulátoru vyrobená z plných tyčí hustoty ρ poloměru r a příslušných délek. Potom pro hmotnosti ramen, umístění těžišť a hlavní momenty setrvačnosti ramen (vztažené vždy k s.s. příslušného ramene) platí:

$$\begin{aligned} m_2 &= \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \pi r^2 \rho \\ m_3 &= L_3 \pi r^2 \rho \\ m_4 &= L_4 \pi r^2 \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{T}_2 &= \left[-\frac{L_2}{2} \quad -\frac{L_1}{2} \quad 0 \right]^T \\ \mathbf{T}_3 &= \left[-\frac{L_3}{2} \quad 0 \quad 0 \right]^T \\ \mathbf{T}_4 &= \left[-\frac{L_4}{2} \quad 0 \quad 0 \right]^T\end{aligned}$$

(Deviační momenty jsou rovny nule.)

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \dots \text{Irelevantní, nerotuje} \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{R}_2^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_2(3r^2 + L_2^2) \\ \frac{1}{2}m_2r^2 \\ \frac{1}{12}m_2(3r^2 + L_2^2) \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{R}_2^2)^T, \quad \mathbf{R}_2^2 = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \phi = -\text{atan}\left(\frac{L_2}{L_1}\right) \\ \mathbf{I}_3 &= \left[\frac{1}{2}m_3r^2 \quad \frac{1}{12}m_3(3r^2 + L_3^2) \quad \frac{1}{12}m_3(3r^2 + L_3^2) \right]^T \\ \mathbf{I}_4 &= \left[\frac{1}{2}m_4r^2 \quad \frac{1}{12}m_4(3r^2 + L_4^2) \quad \frac{1}{12}m_4(3r^2 + L_4^2) \right]^T\end{aligned}$$

Řešení DGM lze snadno odvodit přímo z D-H parametrů a postupného násobení homogenních transformačních matic, viz Kapitola A.3, bez dalšího odvození lze DGM zapsat následovně:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} (\cos(\theta_4)L_4 + L_3)\sin(\theta_3) + \cos(\theta_3)\sin(\theta_4)L_4 + L_1 \\ \cos(\theta_2)((\cos(\theta_4)L_4 + L_3)\cos(\theta_3) - \sin(\theta_3)\sin(\theta_4)L_4 + L_2) \\ ((\cos(\theta_4)L_4 + L_3)\cos(\theta_3) - \sin(\theta_3)\sin(\theta_4)L_4 + L_2)\sin(\theta_2) + d_1 \end{bmatrix} \quad (3.250)$$

Řešení IGM lze odvodit intuitivně přímo z geometrického uspořádání manipulátoru a je dáno následovně (vybráno 1 řešení z možných 4):

$$\mathbf{Q}_{\text{orig}} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}}) = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(s_2, c_2) \\ \text{atan2}(s_3, c_3) \\ \text{atan2}(s_4, c_4) \end{bmatrix} \quad (3.251)$$

kde

$$\begin{aligned}s_2 &= z - d_1, \quad c_2 = y \\ c_4 &= (\mathbf{O}_4^2[1]^2 + \mathbf{O}_4^2[2]^2 - L_3^2 - L_4^2)/(2L_3L_4), \quad s_4 = -\sqrt{1 - c_4^2} \\ \mathbf{O}_4^2[1:2] &= [s_2(z - d_1) - L_2 + yc_2 \quad x - L_1]^T \\ s_3 &= \frac{c_4L_4\mathbf{O}_4^2[2] + L_3\mathbf{O}_4^2[2] - \mathbf{O}_4^2[1]s_4L_4}{\mathbf{O}_4^2[1]^2 + \mathbf{O}_4^2[2]^2} \\ c_3 &= \frac{\mathbf{O}_4^2[2]s_4L_4 + \mathbf{O}_4^2[1]c_4L_4 + \mathbf{O}_4^2[1]L_3}{\mathbf{O}_4^2[1]^2 + \mathbf{O}_4^2[2]^2}\end{aligned}$$

Řešení zbývajících úloh DIK, IIK (viz Kapitola A.4, A.5), DDM, IDM (viz Kapitola A.6) je dána známými již výše několikrát citovanými algoritmy (analyticky řešitelné, algoritmi-zovatelné).

Cílem optimalizační úlohy je nalézt takové řízení $\mathbf{u}_{t_0}^{t_f}$ a potažmo stav manipulátoru \mathbf{q} (parametrizující/redundantní kloubová souřadnice \rightarrow pohyb lineárního pojezdu)

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}\} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} = \ddot{d}_1$$

která minimalizuje kritérium

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

kde váhová funkce g je dána v závislosti na optimalizaci rychlostí, viz (3.226), či momentů, viz (3.229).

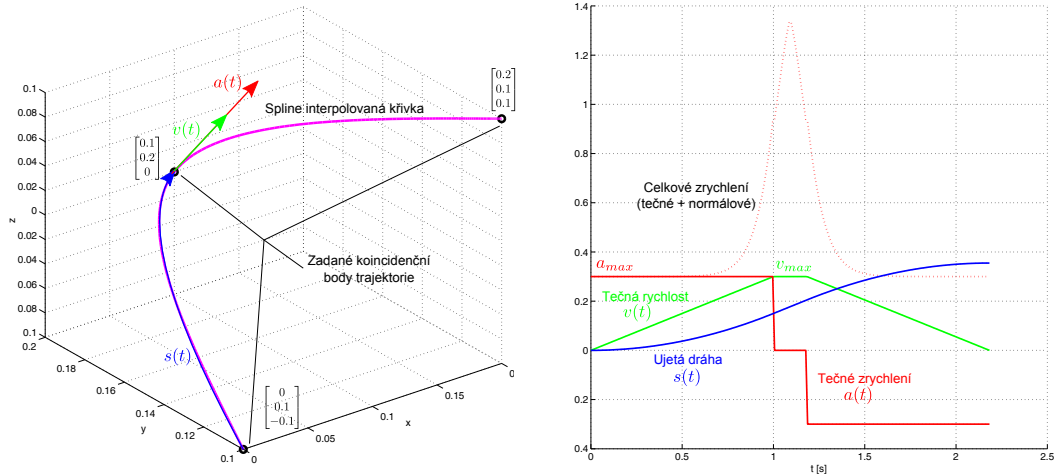
Konkrétní optimalizační úloha - výsledky optimalizace:

Uvažujme následující kinematické a dynamické parametry manipulátoru:

$$\boldsymbol{\xi} = [0.025 \quad 0.072 \quad 0.105 \quad 0.105]^T, \quad \boldsymbol{\mu} = [0.3 \quad 0.005 \quad 7800]^T$$

Vektor gravitačního zrychlení: $\mathbf{g} = [-9.81 \quad 0 \quad 0]^T$ (vzhledem k s.s. F_0).

Požadovaná trajektorie koncového efektoru $\mathbf{X}(t)$ byla generována jako po částech kubická spline funkce s korekcí feedrate za účelem dosažení požadovaného profilu ujeté dráhy, tečné rychlosti a tečného zrychlení podél křivky, viz Obrázek 3.50. Algoritmus generování požadované trajektorie je popsán v [115].



Obrázek 3.50.: Generovaná požadovaná trajektorie koncového efektoru $\mathbf{X}(t)$ v prostoru zadaná třemi koincidenčními body (vlevo), požadovaný profil pohybu po trajektorii ($v_{max} = 0.3 \frac{m}{s}$, $a_{max} = 0.3 \frac{m}{s^2}$)

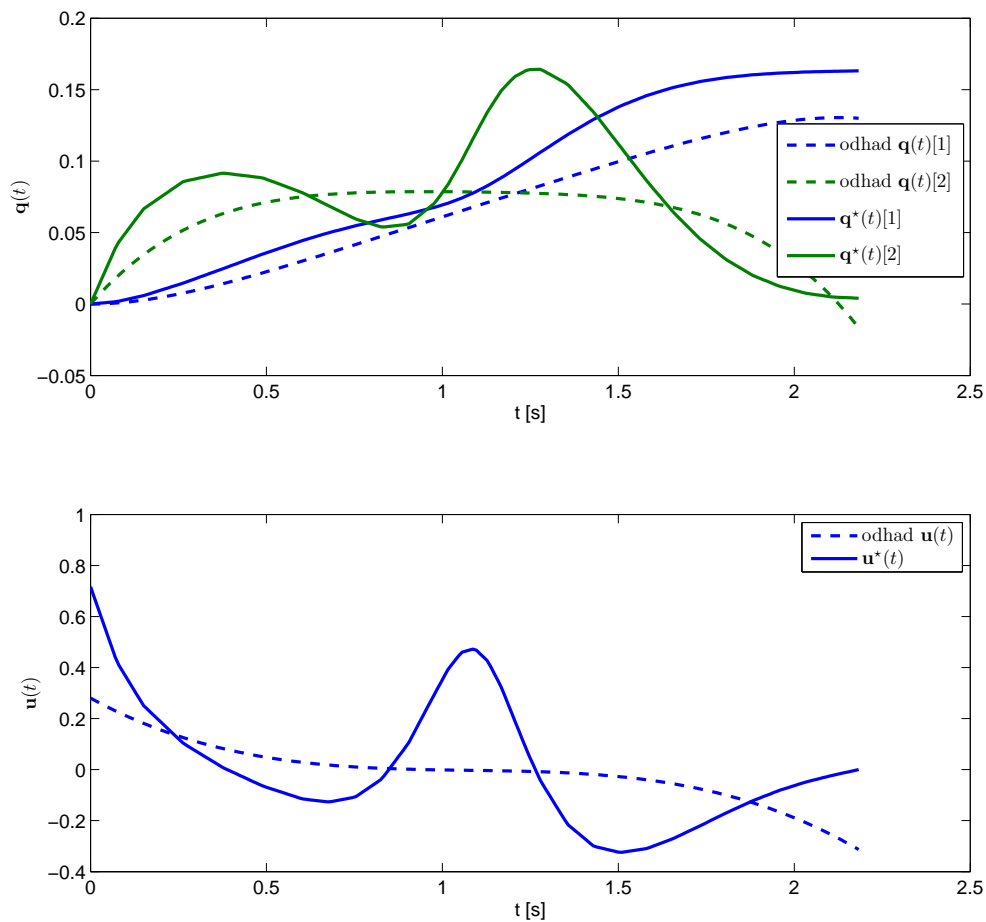
Minimalizace rychlostí:

Uvažujme nejprve optimalizaci pohybu manipulátoru s ohledem na minimalizaci rychlostí kloubových souřadnic, ve smyslu integrálního kritéria (3.217) s váhovou funkcí definovanou v (3.226). Váhová matice (konstantu penalizující řízení) $\mathbf{R} = 1$, počáteční podmínka (poloha parametrizující kloubové souřadnice) $\mathbf{Q}_{\text{par}0} = d_1(t_0) = 0$. Odhad prostřednictvím polynomiální aproximace a optimální trajektorie stavu \mathbf{q} , kostavu \mathbf{p} a řízení \mathbf{u} jsou

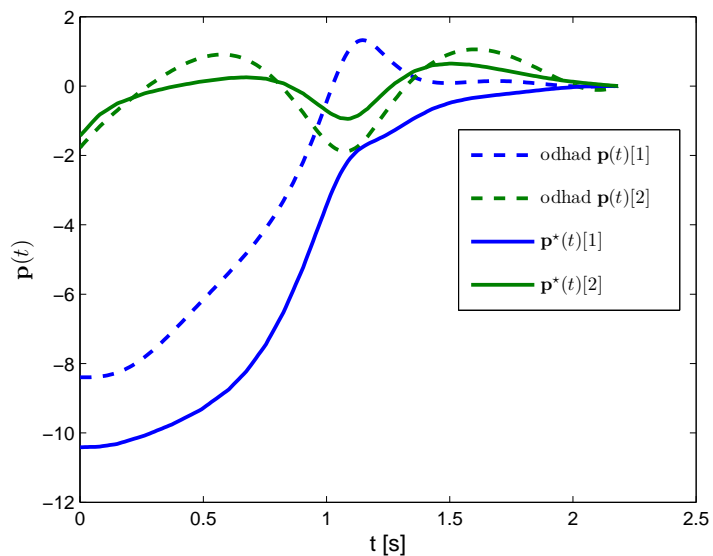
znázorněny na Obrázcích 3.51, 3.52. Za účelem simulačního ověření navrženého algoritmu optimalizace je opět definováno perturbované řízení, analogicky jako v Příkladu 3.10:

$$\mathbf{u}^{\text{pert}} = \mathbf{u}^* + 0.3 \cdot (\text{Rand}(1, 1) - 0.5) \quad (3.252)$$

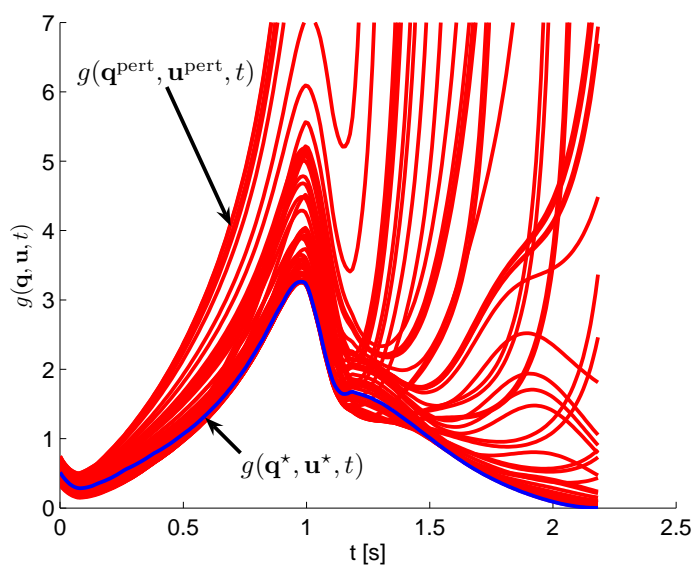
Porovnání průběhů váhové funkce $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$ a řízení \mathbf{u} v čase v čase $\langle t_0 = 0, t_f = 2.183s \rangle$ pro optimální a perturbovanou trajektorii je znázorněno na Obrázcích 3.53, 3.54. Hodnoty kritéria $J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f})$ pro optimální a perturbované trajektorie jsou znázorněny na Obrázku 3.55. Vizualizace pohybu manipulátoru je znázorněna časoběrným snímkem na Obrázku 3.56. Snímek byl vytvořen prostřednictvím propojení 3D CAD výkresu prototypu manipulátoru se simulačním prostředím Matlab/SimMechanics, viz [40].



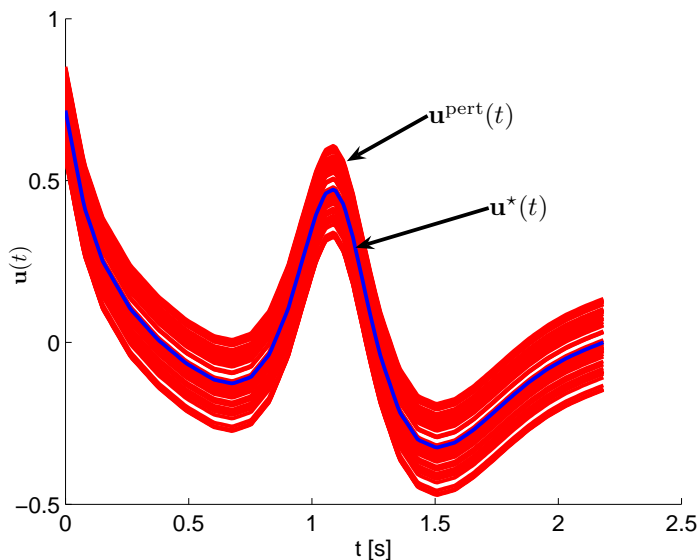
Obrázek 3.51.: Polynomiální odhad stavu a řízení (polynomiální aproximace polynomem 5. stupně) a jejich optimální trajektorie



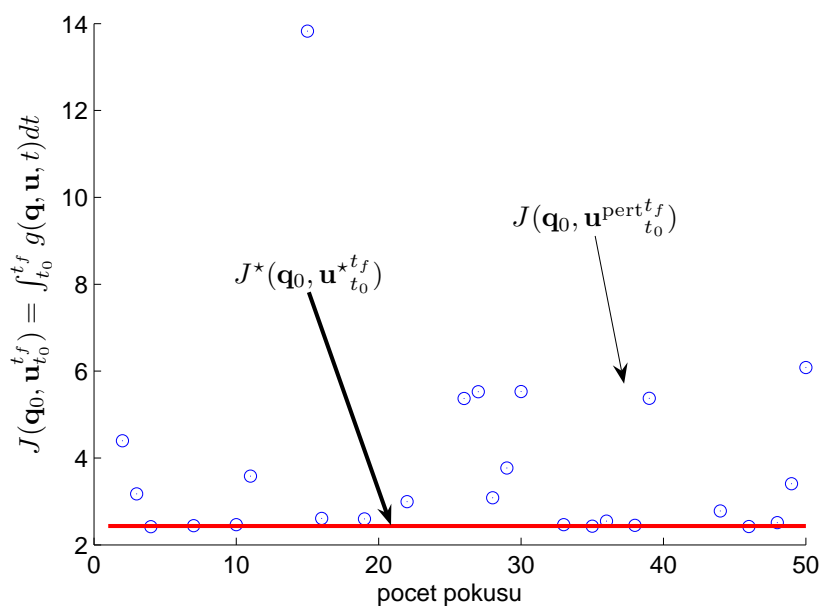
Obrázek 3.52.: Odhad kostavu (numerické řešení (v Matlabu ode45) diferenciální rovnice kostavu (3.220) pro polynomiální odhad stavu a řízení) a jeho optimální trajektorie



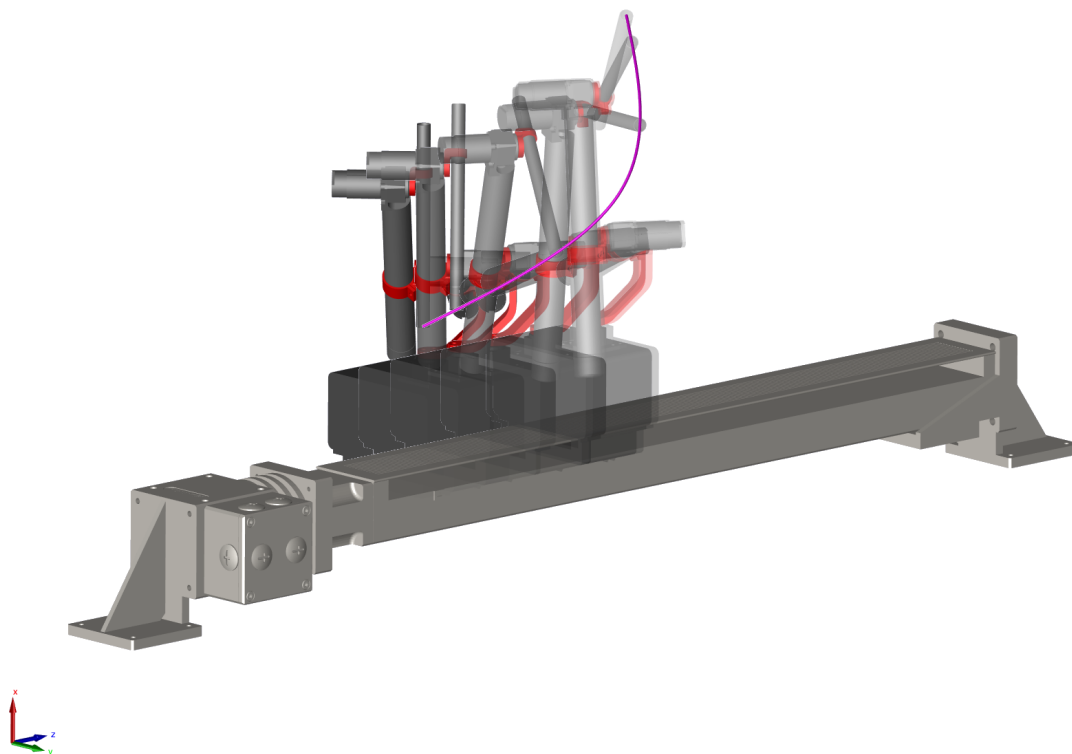
Obrázek 3.53.: Porovnání průběhu váhové funkce pro optimální a perturbovaná řízení (zrychlení) lineárního pojezdu. Porovnání je provedeno pro 50 pokusů perturbace optimálního řízení. Perturbovaný stav \mathbf{q}^{pert} je dán numerickým řešením (v Matlabu ode45) stavové rovnice (3.219) pro perturbované řízení \mathbf{u}^{pert} .



Obrázek 3.54.: Porovnání průběhu optimálního a perturbovaných řízení (zrychlení) lineárního pojezdu, viz perturbace daná rovnicí (3.252).



Obrázek 3.55.: Porovnání optimální hodnoty kritéria s hodnotami kritéria pro perturbovaná řízení (zrychlení) lineárního pojezdu. Poznamenejme, že některá perturbovaná řízení vedou koncový efektor manipulátoru mimo pracovní rozsah (tzn. neexistuje řešení IGM \Rightarrow váhová funkce $g(\star)$ v takovém bodě nemá řešení), takové hodnoty nejsou v grafu vyjádřeny.



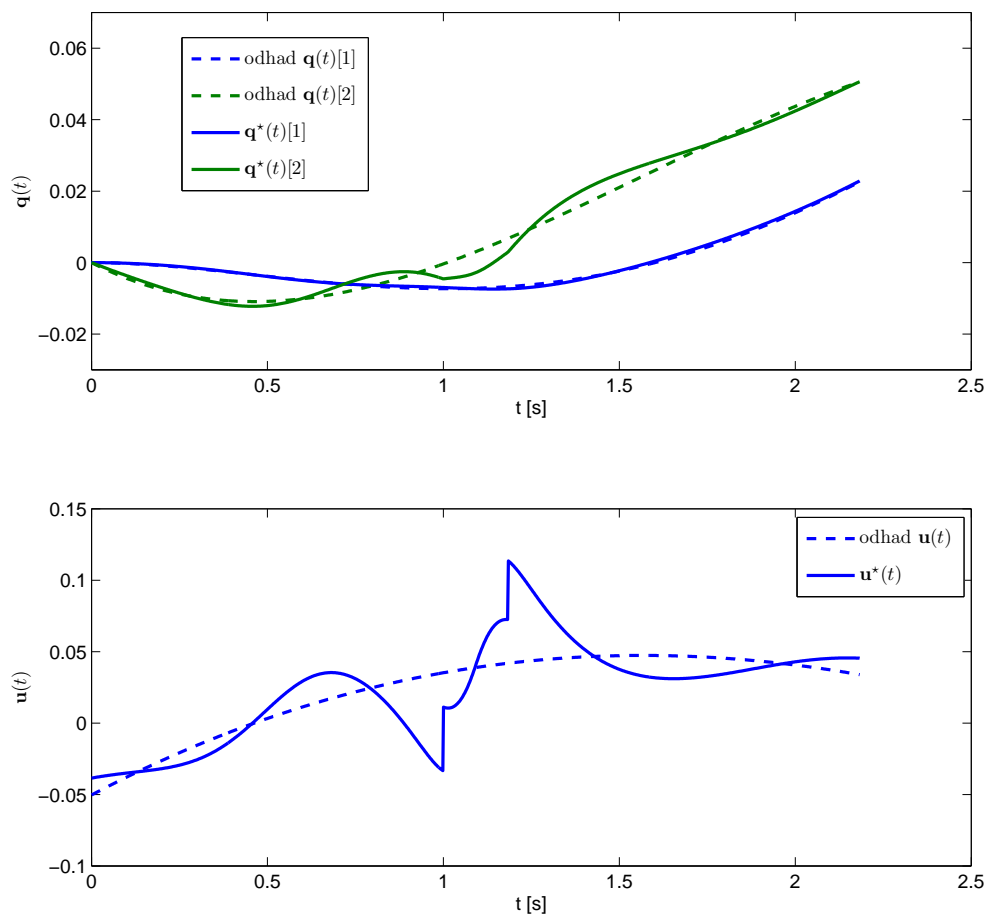
Obrázek 3.56.: Časoběrný snímek optimálního pohybu manipulátoru.

Minimalizace momentů:

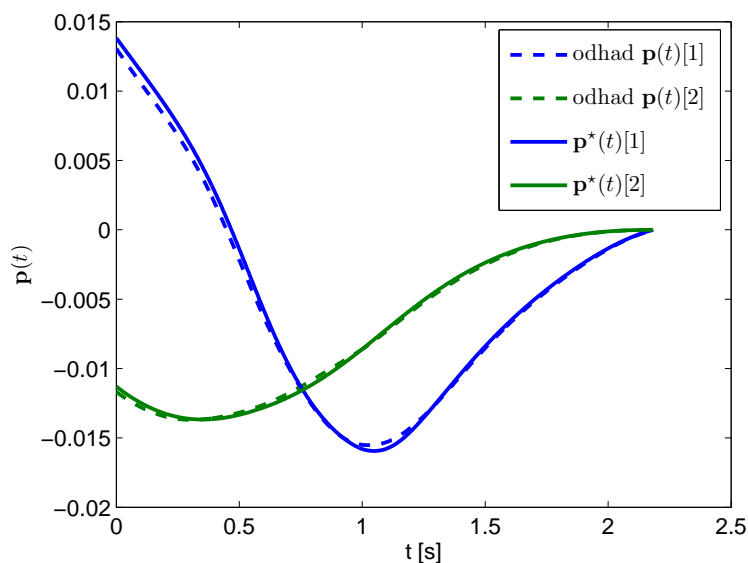
Dále uvažujme optimalizaci pohybu manipulátoru s ohledem na minimalizaci sil/silových momentů v aktuátorech manipulátoru, tedy ekvivalentně minimalizaci potřebné energie manipulátoru, viz Kapitola A.8, ve smyslu integrálního kritéria (3.217) s váhovou funkcí definovanou v (3.229). Počáteční podmínka je opět volena jako $\mathbf{Q}_{\text{par}0} = d_1(t_0) = 0$. Odhad prostřednictvím polynomiální aproximace a optimální trajektorie stavu \mathbf{q} , kostavu \mathbf{p} a řízení \mathbf{u} jsou znázorněny na Obrázcích 3.57, 3.58. Za účelem simulačního ověření navrženého algoritmu optimalizace je opět definováno perturbované řízení, analogicky jako v Příkladu 3.10:

$$\mathbf{u}^{\text{pert}} = \mathbf{u}^* + 0.05 \cdot (\text{Rand}(1, 1) - 0.5) \quad (3.253)$$

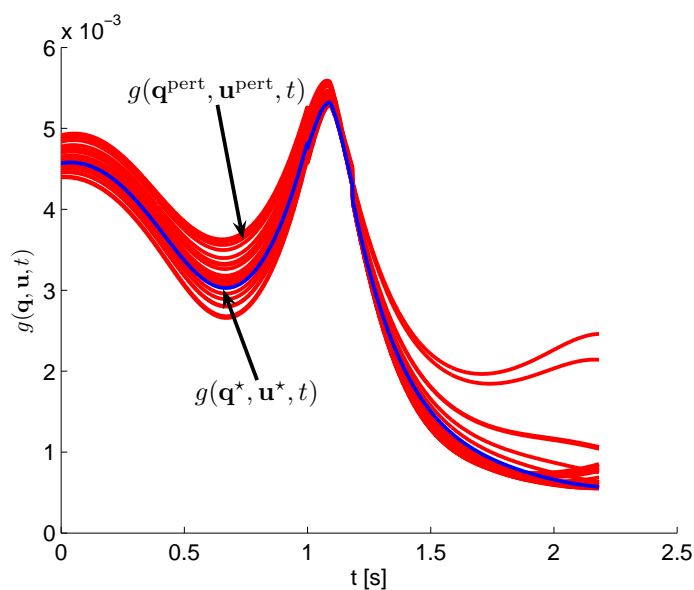
Porovnání průběhů váhové funkce $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$ a řízení \mathbf{u} v čase v čase ($t_0 = 0, t_f = 2.183s$) pro optimální a perturbovanou trajektorii je znázorněno na Obrázcích 3.59, 3.60. Hodnoty kritéria $J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f})$ pro optimální a perturbované trajektorie jsou znázorněny na Obrázku 3.61. Vizualizace pohybu manipulátoru je znázorněna časoběrným snímek na Obrázku 3.62. Snímek byl vytvořen prostřednictvím propojení 3D CAD výkresu prototypu manipulátoru se simulačním prostředím Matlab/SimMechanics.



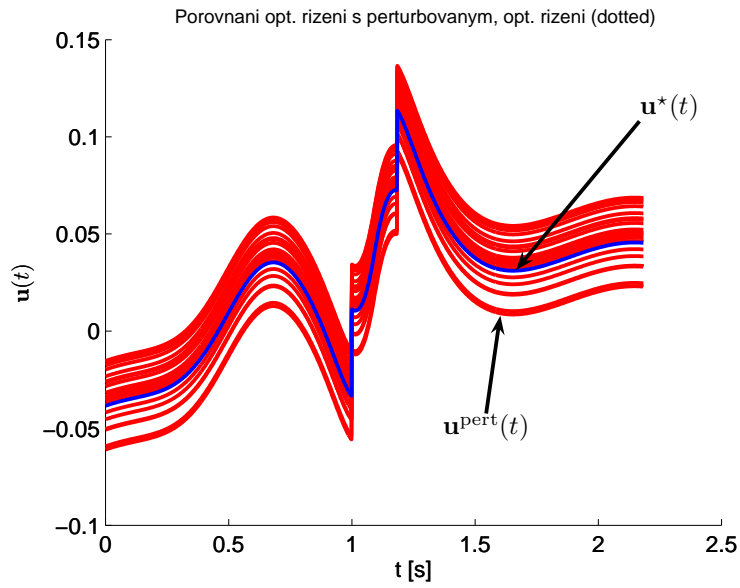
Obrázek 3.57.: Polynomiální odhad stavu a řízení (polynomiální aproximace polynomem 5. stupně) a jejich optimální trajektorie



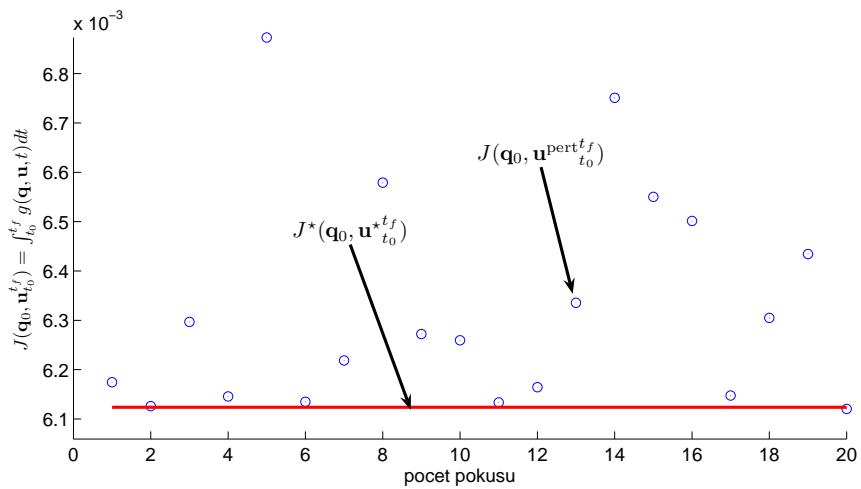
Obrázek 3.58.: Odhad kostavu (numerické řešení (v Matlabu ode45) diferenciální rovnice kostavu (3.220) pro polynomiální odhad stavu a řízení) a jeho optimální trajektorie



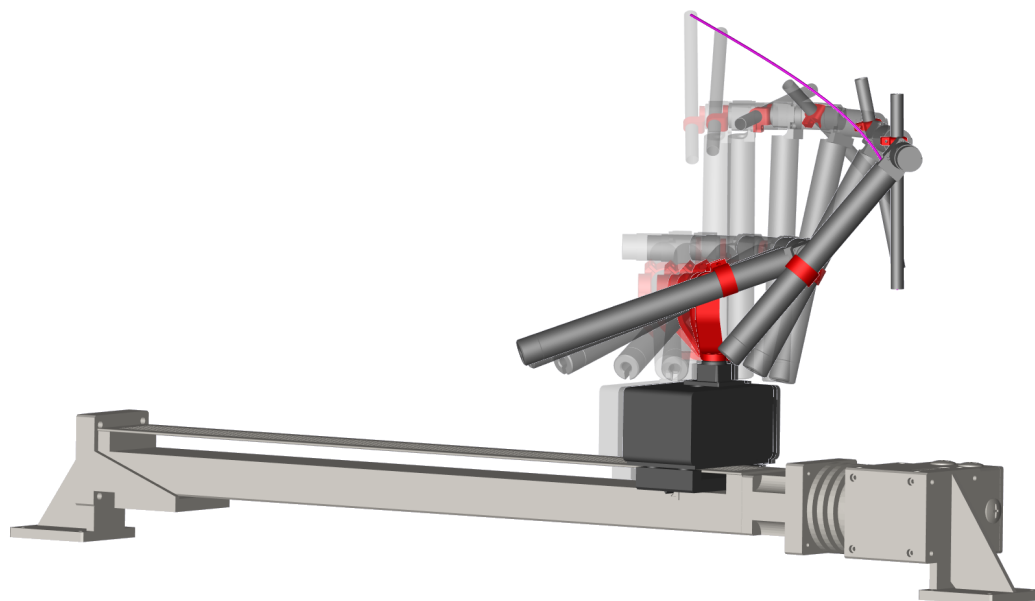
Obrázek 3.59.: Porovnání průběhu váhové funkce pro optimální a perturbovaná řízení (zrychlení) lineárního pojezdu. Porovnání je provedeno pro 20 pokusů perturbace optimálního řízení. Perturovaný stav \mathbf{q}^{pert} je dán numerickým řešením (v Matlabu ode45) stavové rovnice (3.219) pro perturbované řízení \mathbf{u}^{pert} .



Obrázek 3.60.: Porovnání průběhu optimálního a perturbovaných řízení (zrychlení) lineárního pojezdu, viz perturbace daná rovnicí (3.253).



Obrázek 3.61.: Porovnání optimální hodnoty kritéria s hodnotami kritéria pro perturbovaná řízení (zrychlení) lineárního pojezdu.



Obrázek 3.62.: Časoběrný snímek optimálního pohybu manipulátoru.



Kapitola 4.

Využití optimálního řízení redundantních manipulátorů s ohledem na parametrickou a strukturální syntézu (předpoklad pro další výzkumné aktivity)

Obsah kapitoly:

- Optimalizace pohybu redundantních manipulátorů jako nástroj parametrické a strukturální optimalizace
- Kinematický a dynamický model zobecněného (redundantního) sériového manipulátoru
- Zhodnocení a předpokládané přínosy práce, směry dalšího výzkumu

V předložené práci jsme se zabývali optimální syntézou robotických manipulátorů a to především s ohledem na parametrickou optimalizaci. Zopakujme, že standardním úkolem parametrické optimalizace je nalezení konstantních kinematických návrhových parametrů manipulátoru dané (pevně určené) struktury (statická optimalizace). Takový přístup byl zohledněn, analyzován a následně využit v Kapitole 3.3. Je zřejmé, že vztah mezi statickou optimalizací a optimalizací pohybu redundantních manipulátorů, která byla podrobně diskutována v Kapitole 3.4, je v podstatě jen formální záležitostí v okamžiku, kdy začneme uvažovat, že jsou některé jinak konstantní kinematické návrhové parametry uvolněny a předpokládá se jejich fluktuace podél požadované trajektorie pohybu koncového efektoru manipulátoru. Nabízí se tak otázka, zda-li není možné využít právě přístup optimalizace pohybu redundantních manipulátorů k syntéze robotických architektur v obecném pojetí, a to zejména ve dvou rovinách:

- **Jako nástroj statické parametrické optimalizace**

Základní myšlenka je taková, že je kinematická struktura manipulátoru teoreticky rozvolněna (ve smyslu uvažování (některých) kinematických návrhových parametrů jako kloubových souřadnic), dostáváme tak redundantní manipulátor pro který bude řešena příslušná optimalizační úloha a vhodnými iteračními algoritmy bude následně dosaženo minimální možné fluktuace (ideálně nulové) těch kinematických parametrů, které nereprezentují skutečné kloubové souřadnice (jsou z konstrukční podstaty dány jako konstantní návrhové parametry robotu). Tuto novou ideu je možné v obecném rámci nastínit v následujících bodech:

- Z původně n DoF neredundantního sériového manipulátoru, tzn. D-H úmluva definuje 1 kloubovou souřadnici pro každou kinematickou dvojici (parametr d_i pro \mathbf{P} kloub nebo parametr θ_i pro \mathbf{R} kloub), se rozvolní r ze zbývajících D-H parametrů (teoreticky např. všechny) \Rightarrow dostáváme tak redundantní manipulátor se stupněm redundance r .
- Pro takto vzniklý redundantní manipulátor je provedena optimalizace pohybu (redundantních) kloubových souřadnic za účelem optimalizace zvoleného kritéria (např. minimalizace rychlostí či sil/momentů kloubových souřadnic podél uvažované trajektorie pohybu koncového efektoru).
- Výsledný průběh redundantních kloubových souřadnic je analyzován s následujícími možnostmi volby:
 - * Konstantní hodnota původních (rozvolněných) kinematických parametrů je fixována na hodnotě odpovídající např. průměrné hodnotě fluktuace redundantních souřadnic podél trajektorie koncového efektoru.
 - * Tento proces může být vykonán v různých postupných kombinacích, např. tak, že je vybrána vždy jedna redundantní souřadnice s nejmenší fluktuací a fixována na své průměrné hodnotě, znovu je proveden proces optimalizace s redundancí $r - 1$ a je proveden další výběr redundantní souřadnice s nejmenší fluktuací a její fixace na průměrné hodnotě. Proces se iteračně opakuje. Celý výsledný proces může být dále iterován pro různé kombinace postupných výběrů redundantních kloubových souřadnic.
 - * Další možnosti analýzy...

- **Jako nástroj strukturální optimalizace**

Připomeňme, že strukturální optimalizace, stručně zmíněná v Kapitole 2, se zabývá nejen návrhem či výpočtem počtu DoF mechanických architektur, ale její nedílnou součástí je i návrh vhodného umístění a typů dílčích aktuátorů manipulátoru. Ponecháme-li stranou technologické aspekty jednotlivých typů aktuátorů s ohledem

na jejich konstrukční realizaci a možnosti nasazení, vzniká v takovém případě přirozená otázka.

Jaké typy aktuátorů (prizmatický, rotační či některý ze složených typů) a na jakém místě v kinematickém řetězci manipulátoru je vhodné osadit, aby byly tyto aktuátory co možná nejefektivněji využívány a přispívaly tak k dosažení požadovaného optimálního pohybu manipulátoru?

Takový úkol může být intuitivně zřejmý u jednoduchých architektur manipulátorů (případně jednoduchých formulací kritérií optimality), nicméně v obecném případě v podstatě není možné tento úkol uspokojivě intuitivně řešit. Zároveň lze předpokládat, že nahrazením některých aktuátorů jiným typem či jejich vhodné přeuspořádání může mít zásadní vliv na kvalitu vykonávání dané úlohy manipulátorem. Idea vedoucí na strukturální optimalizaci s využitím optimalizace pohybu redundantních manipulátorů lze nastínit následovně:

- Analogicky jako v předchozím případě je vytvořen z původního manipulátoru manipulátor redundantní vhodným rozvolněním kinematických návrhových parametrů a provedena optimalizace jeho pohybu dle zvoleného kritéria optimality.
- Z fluktuace redundantních kloubových souřadnic a jejich porovnání s fluktuací uvažovaných skutečných kloubových souřadnic (původně zvolených aktuátorů) lze usuzovat na vhodnost umístění zvolených aktuátorů. Např. ukáže-li se, že některá z redundantních kloubových souřadnic (původně konstantních a následně rozvolněných kinematických parametrů) fluktuuje více než některá z původních kloubových souřadnic (aktuátorů), lze usuzovat na to, že příslušný aktuátor manipulátoru by měl být přemístěn, resp. původní aktuátor je vzhledem k požadované optimalitě pohybu neefektivně využíván.

Jako motivaci k využití optimalizace pohybu redundantních manipulátorů ke statické parametrické a strukturální syntéze uvažujme následující příklad.

★ **Příklad 4.1 (Využití optimalizace red. manip. (motivační příklad))**

Předpokládejme, manipulátor z Příkladu 3.13. Z obecného náhledu se jedná o sériový 4-ramenný manipulátor, který je popsán příslušnou tabulkou D-H parametrů, viz Tabulka 3.6.

Joint i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	d_1	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	L_1	θ_2	L_2	$\frac{\pi}{2}$
3	0	θ_3	L_3	0
4	0	θ_4	L_4	0

Tabulka 4.1.: D-H parametry 4-ramenného sériového robotu

Předpokládejme, že stále požadujeme 3 DoF koncového efektoru manipulátoru, tedy polohování koncového bodu efektoru v prostoru $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$. V takovém případě jsou (pro neredundantní manipulátory) dostatečné 3 nezávislé aktuátory, nechť to jsou právě polohy 3 rotačních kloubů $\theta_2, \theta_3, \theta_4$. Pro jednoduchost dále uvažujme, že kinematická architektura manipulátoru je značně omezená (fixované D-H parametry: $d_2, d_3, d_4, \theta_1, a_i$ a α_i pro $i = 1 \dots 4$) a jako jediný potenciálně rozvolněný kinematický návrhový parametr předpokládejme polohu umístění základny manipulátoru ve směru osy \mathbf{z}_0 , tedy D-H parametr (kloubovou souřadnici) d_1 . Rozvolněním parametru d_1 tak zřejmě dostáváme redundantní manipulátor a vzhledem k možnosti libovolné parametrizace řešení IGM, můžeme také

předpokládat parametrizaci kloubových souřadnic $\mathbf{Q}_{\text{orig}} = [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_3]^T$, $\mathbf{Q}_{\text{par}} = d_1$. Řešení optimálního pohybu takového manipulátoru za účelem minimalizace integrálního kritéria zahrnující kvadrát normy kloubových rychlostí (přes celý čas trvání trajektorie koncového efektoru $t \in \langle t_0, t_f \rangle$) je poté shodná úloha optimalizace jako v Příkladu 3.13 (v případě minimalizace rychlostí).

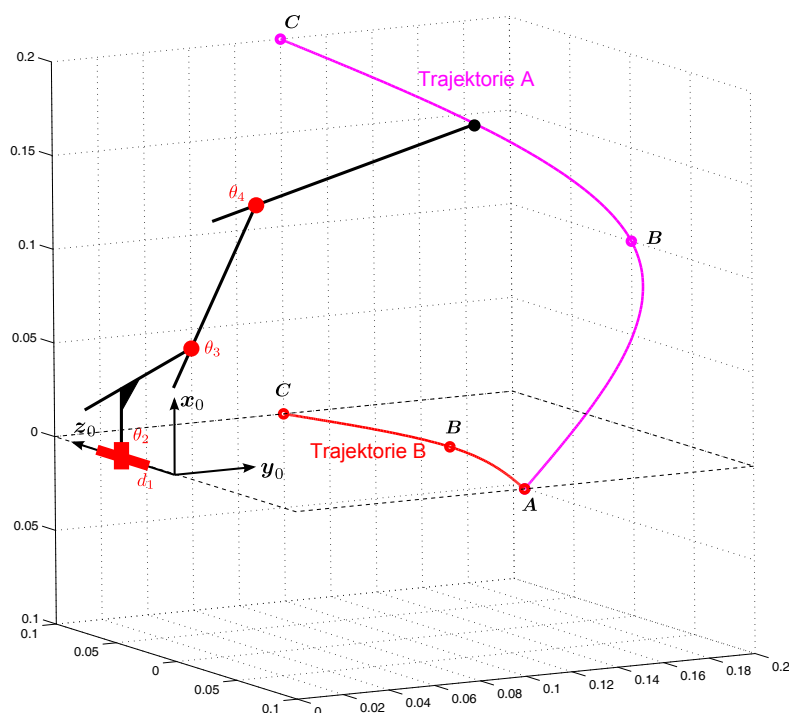
Předpokládejme dvě varianty trajektorií v prostoru, které mají být vykonávány koncovým efektem manipulátoru (typicky např. dvě periodicky opakující se úlohy vykonávané manipulátorem). Typ a generování trajektorie koncového efektoru jako shodný jako v Příkladu 3.13, tzn. po částech polynomiální (kubická) funkce procházející body \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} s definovaným časově optimálním profilem tečné rychlosti a zrychlení s omezením maximálních hodnot $v_{\text{max}} = 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a_{\text{max}} = 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, viz Obrázek 4.1:

Trajektorie A:

$$\mathbf{A} = [0 \ 0.1 \ -0.1]^T, \quad \mathbf{B} = [0.1 \ 0.2 \ 0]^T, \quad \mathbf{C} = [0.2 \ 0.1 \ 0.1]^T$$

Trajektorie B:

$$\mathbf{A} = [0 \ 0.1 \ -0.1]^T, \quad \mathbf{B} = [0 \ 0.12 \ 0]^T, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0.1 \ 0.1]^T$$



Obrázek 4.1.: Dvě varianty trajektorie koncového efektoru manipulátoru

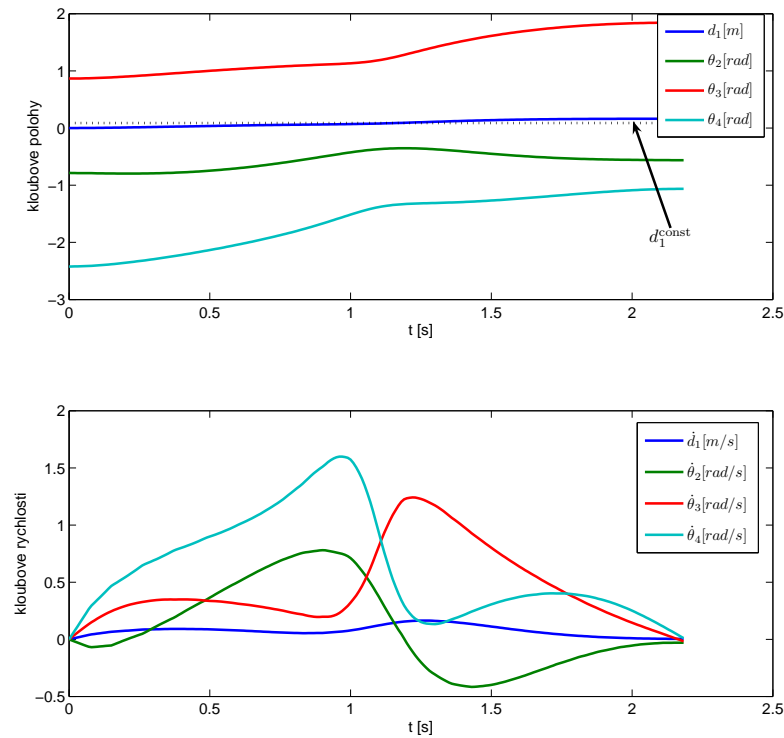
Předpokládejme nejprve **Trajektorii A** a provedme optimalizaci pohybu redundantního manipulátoru. Obrázek 4.2 znázorňuje optimální průběh kloubových souřadnic $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}_{\text{orig}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}\}$ a příslušných kloubových rychlostí. Z fluktuace (ekvivalentně z rychlostí) kloubových souřadnic je zřejmé, že kloubová souřadnice d_1 je nejvhodnějším kandidátem na zafixování

$d_1(t) \rightarrow d_1^{\text{const}}$, neboť se v čase mění nejméně (relativně k ostatním kloubovým souřadnicím). Uvažujme, že zafixování kloubové souřadnice provedeme na její „průměrné“ hodnotě polohy, tedy:

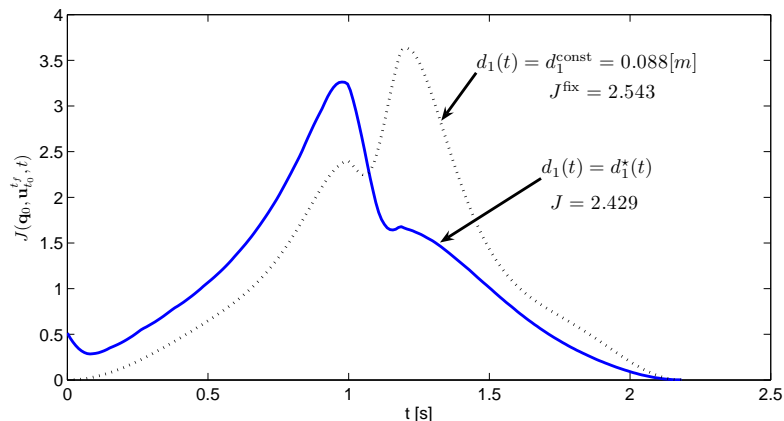
$$d_1^{\text{const}} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N d_1(i \cdot T_s) = 0.088[m], \quad i = 0 \dots N, \quad t_0 = 0, \quad t_f = N \cdot T_s \quad (4.1)$$

kde T_s je příslušná perioda vzorkování.

Z redundantního manipulátoru se tak stává zpět manipulátor neredundantní s kloubovými souřadnicemi $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ a původními D-H parametry za předpokladu $d_1 = d_1^{\text{const}}$. Prostřednictvím optimalizace pohybu redundantního manipulátoru byla tak vyřešena úloha statické optimalizace s nalezeným optimalizovaným kinematickým návrhovým parametrem d_1 . Zafixování parametru d_1 na konstantní průměrné hodnotě samozřejmě ztrácíme původní optimalitu ($J^{\text{fix}} > J$), kterou je možné získat s redundantním manipulátorem, nicméně se zafixováním parametru s nejmenší fluktuací snažíme tuto ztrátu zmírnit. Obrázek 4.3 znázorňuje průběh váhové funkce g , viz (3.226), a výslednou hodnotu integrálního kritéria (3.217) pro redundantní manipulátor a neredundantní manipulátor (s fixovaným d_1).



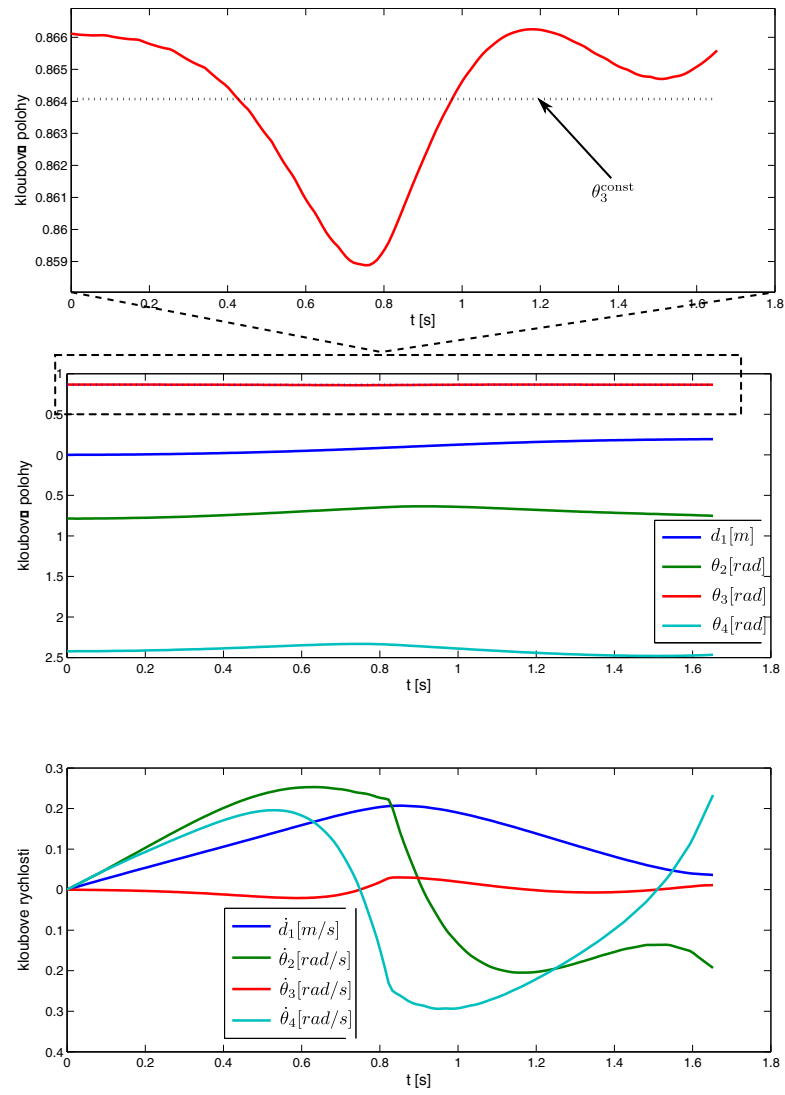
Obrázek 4.2.: Optimální průběhy polohy a rychlosti kloubových souřadnic



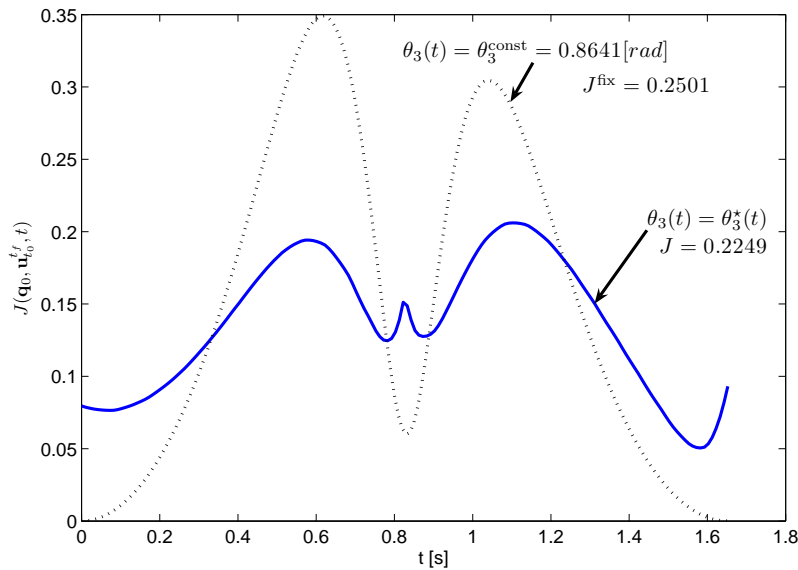
Obrázek 4.3.: Průběhy váhové funkce g podél plánované trajektorie, výsledné hodnoty kritéria J .

Z pohledu strukturální optimalizace se tedy zdají původně navržené aktuátory (kloubové souřadnice $\theta_2, \theta_3, \theta_4$) jako optimální volba a s ohledem na statickou optimalizaci je volena hodnota D-H parametru $d_1 = 0.088m$ (poloha umístění základny manipulátoru).

V případě požadované **Trajektorie B** opět provedme optimalizaci pohybu redundantního manipulátoru (s původními zvolenými rotačními aktuátory $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ a rozvolněným parametrem d_1). V tomto případě dostáváme výsledky odlišné. Z Obrázku 4.4 je zřejmé, že kloubovou souřadnicí vykazující nejmenší fluktuaci (rychlost) je θ_3 , a je tedy nejvhodnějším kandidátem na zafixování $\theta_3 \rightarrow \theta_3^{const}$. Průměrováním hodnoty polohy θ_3 analogicky jako v (4.1) dostáváme hodnotu $\theta_3^{const} = 0.8641[rad]$. Z redundantního manipulátoru se tak stává zpět neredundantní, tentokrát s kloubovými souřadnicemi d_1, θ_2, θ_4 a původními D-H parametry za předpokladu $\theta_3 = \theta_3^{const}$. Obrázek 4.5 znázorňuje průběh váhové funkce g , viz (3.226) a výslednou hodnotu integrálního kritéria (3.217) pro redundantní manipulátor a neredundantní manipulátor (s fixovaným θ_3).



Obrázek 4.4.: Optimální průběhy polohy a rychlosti kloubových souřadnic



Obrázek 4.5.: Průběhy váhové funkce g podél plánované trajektorie, výsledné hodnoty kritéria J .

Z pohledu strukturální optimalizace se nyní zdá rozumné vypustit původní rotační aktuátor θ_3 (fixováním hodnoty $\theta_3 = \theta_3^{\text{const}}$) a místo toho použít prizmatický aktuátor d_1 . Tím jsme jednoznačně definovali strukturu manipulátoru s ohledem na optimální typ a umístění aktuátorů (vzhledem k definované trajektorie koncového efektoru a kritériu optimality).

★

4.1. Zobecnění standardního kinematického popisu manipulátorů

Pokusme se nyní na kinematickou syntézu manipulátoru nahlížet obecně a hledat odpověď na otázku:

Jak nalézt vhodný (sériový) neredundantní manipulátor s daným počtem (typem) DoF koncového efektoru, s pevně určeným počtem ramen a s libovolným typem a umístěním kloubů tak, aby byl tento manipulátor optimální vzhledem k definované vykonávané úloze (požadovaná trajektorie koncového efektoru v prostoru) a danému kritériu optimality?

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že kinematické uspořádání jednoho ramena manipulátoru lze popsat vyčerpávajícím způsobem právě 4 D-H parametry (2 transformacemi rotace a 2 transformacemi translace).

■ Poznámka 4.1 (Zahrnutí kompenzace polohy základny a koncového efektoru)

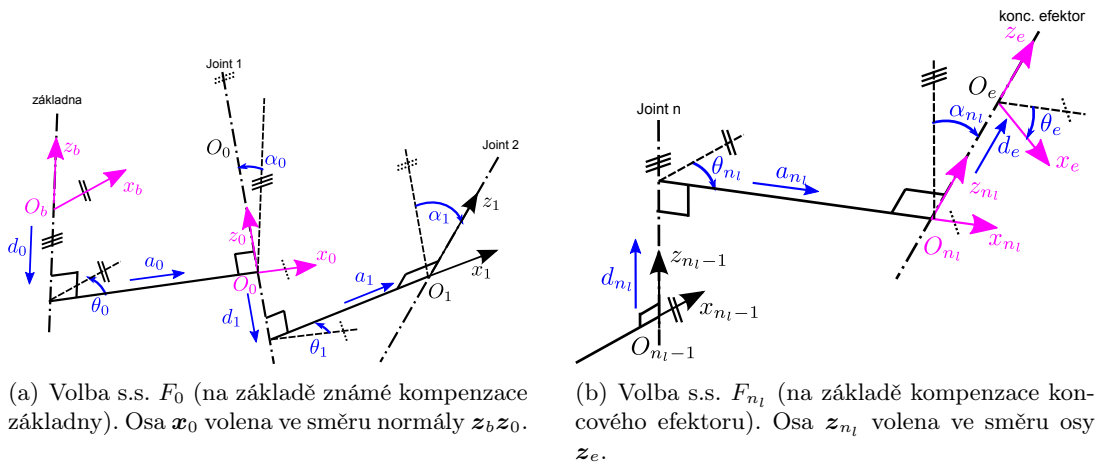
Předpokládejme standardní kinematický popis sériového manipulátoru s n_l rameny, který je dán jako:

- Kompenzace polohy základny, vyjádřena konstantní homogenní transformační maticí \mathbf{T}_0^b , viz Kapitola A.3, tedy max. 6 nezávislými parametry (3 pro translaci, 3 pro rotaci).
- Transformace souřadných systémů ramen manipulátorů dle D-H úmluvy a parametrizovanou $4 \cdot n_l$ nezávislými D-H parametry $d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i, i = 1 \dots n_l$, viz Kapitola A.2.

4.1. Zobecnění standardního kinematického popisu manipulátorů

- Kompenzace polohy koncového efektoru, vyjádřena konstantní homogenní transformační maticí $T_e^{n_l}$, viz Kapitola A.3, tedy opět max. 6 nezávislými parametry (3 pro translaci, 3 pro rotaci).

Z podstaty D-H úmluvy je dáno, že umístění prvního s.s. F_0 a posledního s.s. F_{n_l} není jednoznačné a může být v omezené míře voleno. Pro s.s. F_0 je jednoznačně určena pouze osa z_0 (směr osy x_0 a počátek lze volit libovolně \Leftarrow předchozí kloub neexistuje), pro s.s. F_{n_l} lze naopak libovolně volit směr osy z_{n_l} (směr osy x_{n_l} a počátek je poté již určen \Leftarrow existuje předchozí kloub). Vhodnou volbou s.s. F_0 , viz Obrázek 4.6(a), a F_{n_l} , viz Obrázek 4.6(b), lze tak celý kinematický popis manipulátoru (včetně kompenzací polohy základny a koncového efektoru) zapsat ve formě nezávislých D-H parametrů, viz Tabulka 4.2. Takový princip je zvláště výhodný k unifikovanému popisu kinematiky manipulátorů např. pro účely kinematické kalibrace, viz [127].



Obrázek 4.6.: Volba neúplně určených s.s. v popisu kinematiky manipulátorů prostřednictvím D-H úmluvy.

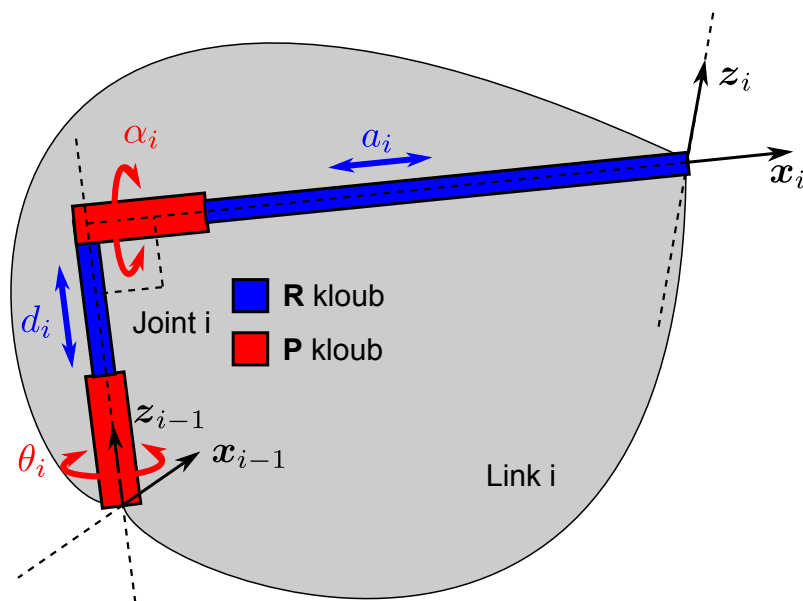
Joint i	d_i	θ_i	a_i	α_i	
0	d_0	θ_0	a_0	α_0	kompenzace základny
1	d_1	θ_1	a_1	α_1	
2	d_2	θ_2	a_2	α_2	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
n_l	d_{n_l}	θ_{n_l}	a_{n_l}	α_{n_l}	
$e = (n_l + 1)$	$d_{e=(n_l+1)}$	$\theta_{e=(n_l+1)}$	0	0	kompenzace konc. efektoru

Tabulka 4.2.: D-H parametry obecného n_l ramenného robotu s kompenzacemi polohy základny a koncového efektoru. Pro zjednodušení lze označit s.s. $F_b \rightarrow F_{-1}$ a s.s. $F_e \rightarrow F_{n_l+1}$.

■

Je tedy zřejmé, že za účelem syntézy manipulátoru je možné využít obecný popis dle D-H úmluvy a získáváme tak kinematický model obecného n_l ramenného manipulátoru včetně příslušných kompenzací, s celkovým počtem parametrů (kloubové souřadnice a kinematické návrhové parametry) rovno $4 \cdot n_l + 6$. Připomeňme, že u standardního přístupu k modelování kinematiky manipulátorů se předpokládá, že každé rameno manipulátoru je aktuováno

právě jedním aktuátorem, a to 1 DoF prismatickým aktuátorem (**P** aktuátor reprezentovaný kloubovou souřadnicí d_i) či 1 DoF rotačním aktuátorem (**R** aktuátor reprezentovaný kloubovou souřadnicí θ_i). Nová idea optimalizace obecného manipulátoru vychází již z dříve prezentované myšlenky rozvolnění některých (či dokonce všech) kinematických návrhových parametrů, tzn. předpokládá se, že každé rameno může obsahovat najednou až 4 aktuátory (včetně ramena reprezentující kompenzaci základny a koncového efektoru - zde pouze dva aktuátory, viz Tabulka 4.2), a to: dva **P** aktuátory reprezentované kloubovými souřadnicemi d_i , a_i a dva **R** aktuátory reprezentované kloubovými souřadnicemi θ_i , α_i . Schématicky je takové redundantní rameno manipulátoru znázorněno na Obrázku 4.7.



Obrázek 4.7.: Zobecněné redundantní rameno manipulátoru s aktuátorem se 4 DoF

DGM manipulátoru lze poté zapsat standardně jako násobení příslušných homogenních transformačních matic, viz Kapitola A.3, kde pro každou příslušnou homogenní transformační matici může být voleno více aktivních kloubových souřadnic (zbývající D-H parametry jsou uvažovány jako konstantní kinematické návrhové parametry). Poznamenejme, že kompenzace polohy základny a koncového efektoru můžeme formálně vypustit (nahradit standardním ramenem) a uvažovat pouze $n_l + 2$ ramenný manipulátor (kompenzace jsou formálně shodné se standardním popisem dle D-H parametrů):

$$T_{n_l+1}^{-1}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=0}^{n_l+1} T_i^{-1}(\mathbf{Q}_i, \boldsymbol{\xi}_i) \quad (4.2)$$

kde

$$\mathbf{Q}_i \in \{d_i, \theta_i, q_i, \alpha_i\} \quad (\text{dle výběru aktuátorů příslušného } i\text{-tého ramene})$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \{d_i, \theta_i, q_i, \alpha_i\} \setminus \mathbf{Q}_i \quad (\text{zbývající D-H parametry } i\text{-tého ramene})$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{n_l+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad n \leq 4 \cdot n_l + 6 \quad (\text{dle výběru aktuátorů})$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{n_l+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad p = 4 \cdot n_l + 6 - n$$

Řešení IGM je jako ve standardním případě inverzním řešením vztahu (4.2) a je třeba jej řešit individuálně (poznamenejme, že často nemusí existovat analytické řešení a je třeba přistoupit k numerickým metodám, viz Kapitola 3.4.1).

Co se týče výpočtů DIK a IIK ukažme, že v případě uvažovaného zobecněného sériového redundantního manipulátoru je možné algoritmy z Kapitoly A.5 zobecnit a DIK a IIK pro uvažovaný zobecněný manipulátor počítat opět analyticky a efektivně.

Uvažujme opět translační a rotační rychlosti s.s. příslušného ramene, které lze s pomocí kinematického jakobiánu manipulátoru psát jako (ponechme původní používané označení s.s. ramen manipulátoru včetně případných kompenzací jako F_0, F_1, \dots, F_n):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_i(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}[1:i] = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_i^0 \\ \boldsymbol{\omega}_i^0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{j}_1^p & \mathbf{j}_2^p & \cdots & \mathbf{j}_j^p & \cdots & \mathbf{j}_i^p \\ \mathbf{j}_1^o & \mathbf{j}_2^o & \cdots & \mathbf{j}_j^o & \cdots & \mathbf{j}_i^o \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_i(\mathbf{Q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{O}}_i^0 &= \mathbf{j}_1^p \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{j}_2^p \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{j}_j^p \cdot \dot{q}_j + \cdots + \mathbf{j}_i^p \cdot \dot{q}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i^0 &= \mathbf{j}_1^o \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{j}_2^o \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{j}_j^o \cdot \dot{q}_j + \cdots + \mathbf{j}_i^o \cdot \dot{q}_i \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde $j = 1 \dots i$ a sloupcové subvektory $\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix}$, $\mathbf{j}_j^p \in \mathbb{R}^3$ respektive $\mathbf{j}_j^o \in \mathbb{R}^3$ kinematického jakobiánu $\mathbf{J}_i(\mathbf{Q})$, zprostředkovávají příspěvek j -tého kloubu q_j do celkové translační respektive úhlové rychlosti s.s. F_i vzhledem k s.s. F_0 .

Z uspořádání s.s. ramen dle D-H úmluvy lze opět ukázat, že sloupcové subvektory kinematického jakobiánu lze získat z prvků homogenních transformačních matic definujících DGM. Pro standardně uvažované klouby \mathbf{P} resp. \mathbf{R} reprezentované kloubovými souřadnicemi d_i resp. θ_i jsou subvektory dána shodně jako v (A.75, A.76). Analogicky můžeme z Obrázku 4.7 odvodit odpovídající příspěvky od nově uvažovaných kloubů \mathbf{P} resp. \mathbf{R} reprezentované kloubovými souřadnicemi a_i resp. α_i (obdobně jako v případě tvorby kalibračního modelu manipulátoru v [127]). Výsledný kinematický jakobián je dán tedy jako:

- \mathbf{P} kloub reprezentovaný D-H parametrem $d_i \Rightarrow \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T, d_i]^T$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

- \mathbf{R} kloub reprezentovaný D-H parametrem $\theta_i \Rightarrow \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T, \theta_i]^T$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0 \\ \mathbf{z}_{j-1}^0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

- \mathbf{P} kloub reprezentovaný D-H parametrem $a_i \Rightarrow \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T, a_i]^T$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

- \mathbf{R} kloub reprezentovaný D-H parametrem $\alpha_i \Rightarrow \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T, \alpha_i]^T$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j^0 \times \mathbf{r}_{j,i}^0 \\ \mathbf{x}_j^0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

kde

$$\mathbf{z}_j^0 = \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 3], \quad \mathbf{r}_{j,i}^0 = \mathbf{T}_i^0[1 : 3, 4] - \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 4], \quad \mathbf{x}_j^0 = \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 1]$$

Zabývejme se dále odvozením rekurzivních algoritmů, analogických k algoritmům v Kapitole A.5, pro výpočet rychlostí jednotlivých s.s. ramen zobecněného sériového manipulátoru.

Pro úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}_j^0$ s.s. F_j vyjádřenou v s.s. F_0 můžeme postupně psát s využitím vztahů (4.3 - 4.8), uvažujme nyní, že všechny D-H parametry $(d_j, \theta_j, a_j, \alpha_j)$ příslušného ramene reprezentují aktuátory¹:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= \mathbf{z}_0\dot{\theta}_1 + \mathbf{x}_1\dot{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \underbrace{\mathbf{z}_0\dot{\theta}_1 + \mathbf{x}_1\dot{\alpha}_1}_{\boldsymbol{\omega}_1} + \mathbf{z}_1\dot{\theta}_2 + \mathbf{x}_2\dot{\alpha}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{z}_1\dot{\theta}_2 + \mathbf{x}_2\dot{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 &= \underbrace{\mathbf{z}_0\dot{\theta}_1 + \mathbf{x}_1\dot{\alpha}_1 + \mathbf{z}_1\dot{\theta}_2 + \mathbf{x}_2\dot{\alpha}_2}_{\boldsymbol{\omega}_2} + \mathbf{z}_2\dot{\theta}_3 + \mathbf{x}_3\dot{\alpha}_3 = \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{z}_2\dot{\theta}_3 + \mathbf{x}_3\dot{\alpha}_3 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\omega}_j &= \boldsymbol{\omega}_{j-1} + \mathbf{z}_{j-1}\dot{\theta}_j + \mathbf{x}_j\dot{\alpha}_j \end{aligned} \tag{4.9}$$

¹U vektorů je pro zjednodušení vypuštěn horní index \star^0 , neboť předpokládáme jejich vyjádření vždy vzhledem k s.s. F_0 .

Pro translační rychlost $\dot{\mathbf{O}}_j$ s.s. F_j vyjádřenou v s.s. F_0 můžeme psát:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{O}}_1 &= (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_{0,1})\dot{\theta}_1 + \mathbf{z}_0\dot{d}_1 + \mathbf{x}_1\dot{a}_1 + \underbrace{(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{r}_{1,1})}_{\mathbf{0}}\dot{\alpha}_1 = \underline{(\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_{0,1})\dot{\theta}_1 + \mathbf{z}_0\dot{d}_1 + \mathbf{x}_1\dot{a}_1} \\
 \dot{\mathbf{O}}_2 &= (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_{0,2})\dot{\theta}_1 + \mathbf{z}_0\dot{d}_1 + \mathbf{x}_1\dot{a}_1 + \underbrace{(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{r}_{1,2})}_{\mathbf{0}}\dot{\alpha}_1 + \\
 &\quad + (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{r}_{1,2})\dot{\theta}_2 + \mathbf{z}_1\dot{d}_2 + \mathbf{x}_2\dot{a}_2 + \underbrace{(\mathbf{x}_2 \times \mathbf{r}_{2,2})}_{\mathbf{0}}\dot{\alpha}_2 = \\
 &= \underbrace{(\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_{0,1})\dot{\theta}_1 + \mathbf{z}_0\dot{d}_1 + \mathbf{x}_1\dot{a}_1}_{\dot{\mathbf{O}}_1} + (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_{1,2})\dot{\theta}_1 + (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{r}_{1,2})\dot{\alpha}_1 + \\
 &\quad + (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{r}_{1,2})\dot{\theta}_2 + \mathbf{z}_1\dot{d}_2 + \mathbf{x}_2\dot{a}_2 = \\
 &= \dot{\mathbf{O}}_1 + \underbrace{(\mathbf{z}_0\dot{\theta}_1 + \mathbf{x}_1\dot{\alpha}_1 + \mathbf{z}_1\dot{\theta}_2)}_{\boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{x}_2\dot{\alpha}_2} \times \mathbf{r}_{1,2} + \mathbf{z}_1\dot{d}_2 + \mathbf{x}_2\dot{a}_2 = \\
 &= \underline{\dot{\mathbf{O}}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{1,2} - (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{r}_{1,2})\dot{\alpha}_2 + \mathbf{z}_1\dot{d}_2 + \mathbf{x}_2\dot{a}_2} \\
 \dot{\mathbf{O}}_3 &= (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_{0,3})\dot{\theta}_1 + \mathbf{z}_0\dot{d}_1 + \mathbf{x}_1\dot{a}_1 + \underbrace{(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{r}_{1,3})}_{\mathbf{0}}\dot{\alpha}_1 + \\
 &\quad + (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{r}_{1,3})\dot{\theta}_2 + \mathbf{z}_1\dot{d}_2 + \mathbf{x}_2\dot{a}_2 + \underbrace{(\mathbf{x}_2 \times \mathbf{r}_{2,3})}_{\mathbf{0}}\dot{\alpha}_2 + \\
 &\quad + (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{r}_{2,3})\dot{\theta}_3 + \mathbf{z}_2\dot{d}_3 + \mathbf{x}_3\dot{a}_3 + \underbrace{(\mathbf{x}_3 \times \mathbf{r}_{3,3})}_{\mathbf{0}}\dot{\alpha}_3 = \\
 &= (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_{0,2})\dot{\theta}_1 + \mathbf{z}_0\dot{d}_1 + \mathbf{x}_1\dot{a}_1 + \underbrace{(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{r}_{1,2})}_{\mathbf{0}}\dot{\alpha}_1 + (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_{2,3})\dot{\theta}_1 + (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{r}_{2,3})\dot{\alpha}_1 + \\
 &\quad + (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{r}_{1,2})\dot{\theta}_2 + \mathbf{z}_1\dot{d}_2 + \mathbf{x}_2\dot{a}_2 + (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{r}_{2,3})\dot{\theta}_2 + (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{r}_{2,3})\dot{\alpha}_2 + \\
 &\quad + (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{r}_{2,3})\dot{\theta}_3 + \mathbf{z}_2\dot{d}_3 + \mathbf{x}_3\dot{a}_3 = \\
 &= \dot{\mathbf{O}}_2 + \underbrace{(\mathbf{z}_0\dot{\theta}_1 + \mathbf{x}_1\dot{\alpha}_1 + \mathbf{z}_1\dot{\theta}_2 + \mathbf{x}_2\dot{\alpha}_2 + \mathbf{z}_2\dot{\theta}_3)}_{\boldsymbol{\omega}_3 - \mathbf{x}_3\dot{\alpha}_3} \times \mathbf{r}_{2,3} + \mathbf{z}_2\dot{d}_3 + \mathbf{x}_3\dot{a}_3 = \\
 &= \underline{\dot{\mathbf{O}}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{2,3} - (\mathbf{x}_3 \times \mathbf{r}_{2,3})\dot{\alpha}_3 + \mathbf{z}_2\dot{d}_3 + \mathbf{x}_3\dot{a}_3} \\
 &\quad \vdots \\
 \dot{\mathbf{O}}_j &= \dot{\mathbf{O}}_{j-1} + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{j-1,j} - (\mathbf{x}_j \times \mathbf{r}_{j-1,j})\dot{\alpha}_j + \mathbf{z}_{j-1}\dot{d}_j + \mathbf{x}_j\dot{a}_j
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

kde $j = 1 \dots i$, $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{O}}_0 = \mathbf{0}$ (poloha s.s. F_0 je pevná)

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{T}_j[1 : 3, 3], \quad \mathbf{r}_{j,i} = \mathbf{T}_i[1 : 3, 4] - \mathbf{T}_j[1 : 3, 4], \quad \mathbf{x}_j = \mathbf{T}_j[1 : 3, 1]$$

Kinematický jakobián (4.3) a rekurzivní vztahy (4.9, 4.10) tak udávají kompletní popis okamžitých kinematických úloh po rychlosti zobecněného manipulátoru, kde předpokládáme:

$\dot{d}_i = 0$ pokud *Link i* nemá **P** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem d_i , jinak $d_i \in \mathcal{Q}$
 $\dot{\theta}_i = 0$ pokud *Link i* nemá **R** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem θ_i , jinak $\theta_i \in \mathcal{Q}$
 $\dot{a}_i = 0$ pokud *Link i* nemá **P** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem a_i , jinak $a_i \in \mathcal{Q}$
 $\dot{\alpha}_i = 0$ pokud *Link i* nemá **R** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem α_i , jinak $\alpha_i \in \mathcal{Q}$

V případě uvažování zrychlení, analogicky, jako v Kapitole A.5 platí:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_i^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{Q}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \mathbf{J}_i(\mathbf{Q}) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_j \\ \vdots \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Tedy:

$$\ddot{\mathbf{O}}_i^0 = \dot{\mathbf{j}}_1^p \cdot \dot{q}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^p \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^p \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^p \cdot \dot{q}_i + \dot{\mathbf{j}}_1^p \cdot \dot{q}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^p \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^p \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^p \cdot \dot{q}_i \quad (4.12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 = \dot{\mathbf{j}}_1^o \cdot \dot{q}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^o \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^o \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^o \cdot \dot{q}_i + \dot{\mathbf{j}}_1^o \cdot \dot{q}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^o \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^o \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^o \cdot \dot{q}_i$$

Časová derivace kinematického jakobiánu $\dot{\mathbf{J}}_i(\boldsymbol{\Theta})$ je dána časovými derivacemi jeho dílčích prvků, tedy jeho sloupců, viz rovnice (4.5 - 4.8):

- **P** kloub reprezentovaný D-H parametrem $d_i \Rightarrow \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T, d_i]^T$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_j^p \\ \dot{\mathbf{j}}_j^b \\ \dot{\mathbf{j}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

- **R** kloub reprezentovaný D-H parametrem $\theta_i \Rightarrow \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T, \theta_i]^T$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_j^p \\ \dot{\mathbf{j}}_j^b \\ \dot{\mathbf{j}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,i}^0 \\ \dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

- **P** kloub reprezentovaný D-H parametrem $a_i \Rightarrow \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T, a_i]^T$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_j^p \\ \dot{\mathbf{j}}_j^b \\ \dot{\mathbf{j}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_j^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

- **R** kloub reprezentovaný D-H parametrem $\alpha_i \Rightarrow \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T, \alpha_i]^T$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_j^p \\ \dot{\mathbf{j}}_j^b \\ \dot{\mathbf{j}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_j^0 \times \mathbf{r}_{j,i}^0 + \mathbf{x}_j^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j,i}^0 \\ \dot{\mathbf{x}}_j^0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

kde

$$\dot{\mathbf{r}}_{j,i}^0 = \dot{\mathbf{O}}_i^0 - \dot{\mathbf{O}}_j^0, \quad \dot{\mathbf{z}}_i^0 = \boldsymbol{\omega}_i^0 \times \mathbf{z}_i^0, \quad \dot{\mathbf{x}}_i^0 = \boldsymbol{\omega}_i^0 \times \mathbf{x}_i^0$$

Analogicky, rekurzivní vztahy pro výpočet zrychlení lze získat formální derivací vztahů (4.9, 4.10)¹:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} + \dot{\mathbf{z}}_{j-1} \dot{\theta}_j + \mathbf{z}_{j-1} \ddot{\theta}_j + \dot{\mathbf{x}}_j \dot{\alpha}_j + \mathbf{x}_j \ddot{\alpha}_j \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{O}}_j = & \ddot{\mathbf{O}}_{j-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times \mathbf{r}_{j-1,j} + \boldsymbol{\omega}_j \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,j} - (\dot{\mathbf{x}}_j \times \mathbf{r}_{j-1,j} + \mathbf{x}_j \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,j}) \dot{\alpha}_j - \\ & - (\mathbf{x}_j \times \mathbf{r}_{j-1,j}) \ddot{\alpha}_j + \dot{\mathbf{z}}_{j-1} \dot{d}_j + \mathbf{z}_{j-1} \ddot{d}_j + \dot{\mathbf{x}}_j \dot{\alpha}_j + \mathbf{x}_j \ddot{\alpha}_j \end{aligned} \quad (4.18)$$

kde

$$\dot{\mathbf{r}}_{j,i} = \dot{\mathbf{O}}_i - \dot{\mathbf{O}}_j, \quad \dot{\mathbf{z}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{z}_i, \quad \dot{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{x}_i$$

Kinematický jakobián (4.3) včetně jeho časové derivace (4.11) a rekurzivní vztahy (4.17, 4.18) tak udávají kompletní popis okamžitých kinematických úloh po zrychlení zobecněného manipulátoru, kde předpokládáme analogicky:

$\ddot{d}_i = 0$ pokud *Link i* nemá **P** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem d_i , jinak $d_i \in \mathcal{Q}$
 $\ddot{\theta}_i = 0$ pokud *Link i* nemá **R** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem θ_i , jinak $\theta_i \in \mathcal{Q}$
 $\ddot{a}_i = 0$ pokud *Link i* nemá **P** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem a_i , jinak $a_i \in \mathcal{Q}$
 $\ddot{\alpha}_i = 0$ pokud *Link i* nemá **R** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem α_i , jinak $\alpha_i \in \mathcal{Q}$

4.2. Zobecnění standardního dynamického popisu manipulátorů

Dynamický model zobecněného redundantního sériového manipulátoru je založen na stejném principu, jako dynamický model standardního sériového manipulátoru v Kapitole A.6. Z předchozí Kapitoly 4.1 víme, že lze nalézt **dopředný rekurzivní algoritmus** výpočtu rychlostí od základny směrem ke koncovému efektoru, viz (4.10, 4.9), a zrychleních, viz (4.18, 4.17) všech s.s. ramen manipulátoru, tzn. známe pohyb všech hmotných ramen manipulátoru. Z podmínek dynamické rovnováhy sil a momentů působících na jednotlivá ramena manipulátoru lze odvodit **zpětný rekurzivní algoritmus** distribuce sil/momentů z koncového efektoru směrem k základně manipulátoru, viz (A.108). Společně se známou translační rychlostí těžiště ramen, viz (A.110) psát (analogicky jako pro standardní manipulátory):

- Dopředný rekurzivní algoritmus (vstup: $\mathcal{Q}, \dot{\mathcal{Q}}, \ddot{\mathcal{Q}}$)

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_{i-1}\dot{\theta}_i + \mathbf{x}_i\dot{\alpha}_i \\
 \dot{\boldsymbol{\omega}}_i &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \dot{\mathbf{z}}_{i-1}\dot{\theta}_i + \mathbf{z}_{i-1}\ddot{\theta}_i + \dot{\mathbf{x}}_i\dot{\alpha}_i + \mathbf{x}_i\ddot{\alpha}_i \\
 \ddot{\mathbf{O}}_i &= \ddot{\mathbf{O}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i} - (\dot{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i})\dot{\alpha}_i - \\
 &\quad - (\mathbf{x}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i})\ddot{\alpha}_i + \dot{\mathbf{z}}_{i-1}\dot{d}_i + \mathbf{z}_{i-1}\ddot{d}_i + \dot{\mathbf{x}}_i\dot{\alpha}_i + \mathbf{x}_i\ddot{\alpha}_i \\
 \ddot{\mathbf{p}}_{Ci} &= \ddot{\mathbf{O}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i,Ci} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,Ci})
 \end{aligned}$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$, počáteční podmínky $\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \ddot{\mathbf{O}}_0 = \mathbf{0}$.

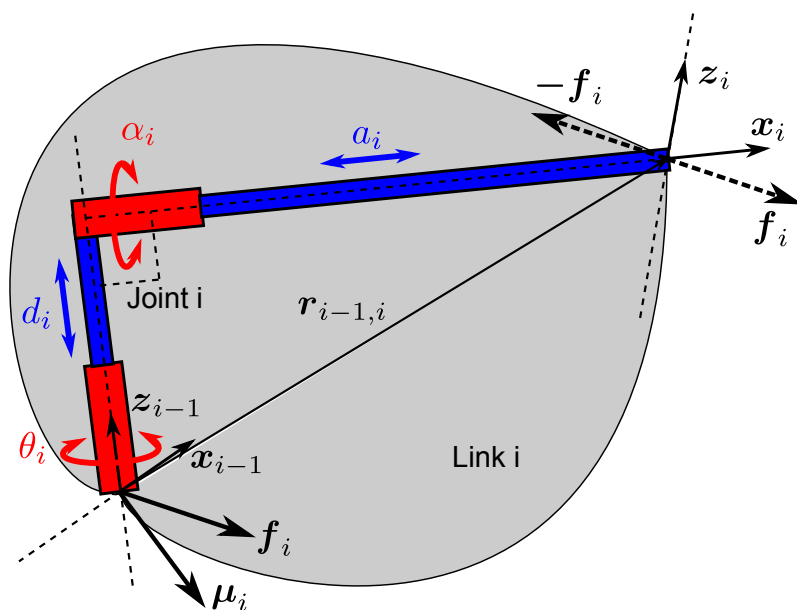
- Zpětný rekurzivní algoritmus:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_i &= \mathbf{f}_{i+1} + m_i(\ddot{\mathbf{p}}_{Ci} - \mathbf{g}_0) \\
 \boldsymbol{\mu}_i &= \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1,Ci} + \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,Ci} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \\
 \mathbf{I}_i &= \mathbf{R}_i^0 \mathbf{I}_i^i (\mathbf{R}_i^0)^T, \quad \mathbf{r}_{i-1,Ci} = \mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,Ci}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

kde $i = n, n-1, \dots, 1$ a externí síly \mathbf{f}_{n+1} resp. momenty $\boldsymbol{\mu}_{n+1}$ působící na poslední rameno *Link n* formují okrajové podmínky. \mathbf{I}_i^i je příslušný tensor setrvačnosti ramene *Link i* vzhledem k jeho s.s. F_i , m_i je hmotnost ramene a $\mathbf{r}_{i,Ci}$ je umístění těžiště ramene vzhledem k s.s. F_i .

Příslušné kloubové síly/momenty pro zobecněný redundantní manipulátor jsou definovány jako průměty sil/momentů působících na příslušná ramena analogicky jako v případě (A.109), doplněné o síly/momenty v aktuátorech příslušející D-H parametrům a_i, α_i , viz Obrázek 4.8:

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{z}_{i-1} & \text{pokud Link } i \text{ má } \mathbf{P} \text{ aktuátor odpovídající D-H parametru } d_i \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \cdot \mathbf{z}_{i-1} & \text{pokud Link } i \text{ má } \mathbf{R} \text{ aktuátor odpovídající D-H parametru } \theta_i \\ \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{x}_i & \text{pokud Link } i \text{ má } \mathbf{P} \text{ aktuátor odpovídající D-H parametru } a_i \\ [\boldsymbol{\mu}_i^T + (-\mathbf{r}_{i-1,i} \times \mathbf{f}_i)]^T \cdot \mathbf{x}_i & \text{pokud Link } i \text{ má } \mathbf{R} \text{ aktuátor odpovídající D-H parametru } \alpha_i \end{cases} \tag{4.20}$$


 Obrázek 4.8.: Znáznornění síly f_i a momentu μ_i působící na rameno *Link i*

4.3. Zhodnocení a předpokládané přínosy

Kinematická optimalizace manipulátorů je komplexním problémem a nalezení efektivních algoritmů řešení je striktně závislé na definici samotné optimalizační úlohy. Navrhovaný přístup řešení optimalizačních úloh s využitím algoritmů optimálního řízení redundantních manipulátorů je možnou inovativní cestou, které se vymyká standardním přístupům a umožňuje definovat a řešit optimalizační úlohy s jistým nadhledem a dokonce přesahem nad parametrickou syntézu. Nastíněný přístup nalezení optimálního řízení redundantního manipulátoru, jako manipulátoru fiktivně vytvořeného rozvolněním některých apriori předpokládaných konstantních návrhových parametrů, může zprostředkovávat intuitivní náhled na „vnitřní chování“ manipulátoru s ohledem na vykonávanou úlohu. Na základě takových informací je možné usuzovat, ať už intuitivně či vybraným měřítkem, na vhodnost strukturálního uspořádání manipulátoru s ohledem na typ a umístění aktuátorů. Postupným fixování málo využívaných aktuátorů pak lze iteračně získat optimalizovaný manipulátor vzhledem k definované úloze. Tento fakt hraje významnou roli v optimálním řízení manipulátorů neboť umožňuje, byť částečně, využívat předností strukturální rekonfigurace manipulátoru. Právě nemožnost strukturální rekonfigurace manipulátoru je hlavním limitujícím faktorem standardních přístupů parametrické optimalizace manipulátorů, kdy je celý optimalizační proces využit výhradně k hledání jednoznačně definované množiny konstantních kinematických návrhových parametrů. Schématické znázornění optimálního návrhu manipulátorů je demonstrováno na Obrázku 4.9.

Předpokládané výhody, nevýhody a potenciální problémy při řešení optimalizační úlohy na základě optimálního řízení redundantních manipulátorů jsou obsaženy v následujícím souhrnu:

Výhody:

- Možnost libovolně volit komplexnost optimalizačního problému (rozvolněním D-H parametrů).
- Náhled do vnitřního „optimálního“ pohybu manipulátoru.
- Možnost přehodnotit umístění a typ aktuátorů.
- Iterační algoritmus vedoucí k fixaci vybraných rozvolněných D-H parametrů.
- Přesah do strukturální syntézy.
- Vhodné pro návrhy vysoce specializovaných manipulátorů.

Nevýhody:

- Formulace opt. úlohy (někdy zásadní problém formulovat opt. kritérium, ukázáno na opt. rychlostí, sil/momentů).
- Problém v řešení algebraické podmínky optimalizace na základě variačního přístupu (ukázáno nalezení analytického řešení pro optimalizaci rychlostí a sil/momentů, obecně může nastávat problém).
- Zahrnutí omezení (ukázána možnost zavedení penalizací - penalizace řízení při optimalizaci rychlostí, obecně může být problém).
- Numerické algoritmy řešení BVP - numerická stabilita, přesnost, singularita v kinematice atd.
- Výpočetní náročnost (zejména v případě iteračních algoritmů při volbě/fixaci D-H parametrů).

Další potenciální výzkumné aktivity, které lze předpokládat jako významné za účelem realizace algoritmů optimálního návrhu kinematické architektury manipulátoru na základě využití optimalizace pohybu redundantních manipulátorů lze shrnout následovně:

- **Efektivní (rychlé, stabilní) algoritmy řešení BVP:**

Zásadní faktor při řešení optimalizačního problému s integrálním kritériem optimality (zahrnující globální vlastnosti optimalizovaného manipulátoru přes celou uvažovanou trajektorii pohybu). Doposud nalezené metody (které jsou autorovi známy) často nevyhovují (zejména s ohledem na výpočetní náročnost, nutnost přesného odhadu počátečních podmínek, atd.). Vzhledem k propracované metodologii návrhu optimálního řízení lineárního systému s kvadratickým kritériem optimality (LQR řízení) lze uvažovat o aproximaci původního optimálního problému právě LQR úlohou a rychlé nalezení suboptimálního řešení (např. iteračním přístupem). V této souvislosti lze v literatuře nalézt některé často diskutované metody založené na následujících přístupech:

- *Iterated LQR (iLQR)*: Založeno na aproximaci stavové rovnice, funkce $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u})$ (v našem případě lineární) a váhové funkce $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$ daným modelem (lineární v případě stavové rovnice a kvadratickou, pozitivně definitní funkcí v případě váhové funkce) a aplikace standardního přístupu LQR optimálního řízení v každé iteraci algoritmu. Metody iLQR jsou diskutovány např. v [56, 11, 12, 118, 13, 3] zejména s ohledem na nalezení vhodného iteračního algoritmu. Aplikace iLQR na úlohy LQG lze nalézt např. v [117, 119, 57, 56]. Součástí řešení BVP prostřednictvím iLQR je taktéž vhodná (positivně definitní) aproximace váhové funkce v integrálním kritériu optimality. Metody takové aproximace (zejména pak nalezení pozitivně definitní aproximace Hessiánu váhové funkce) jsou diskutovány např. v [33, 34].
- *Differential Dynamic Programming*: Založeno na aproximaci obecně nelineární

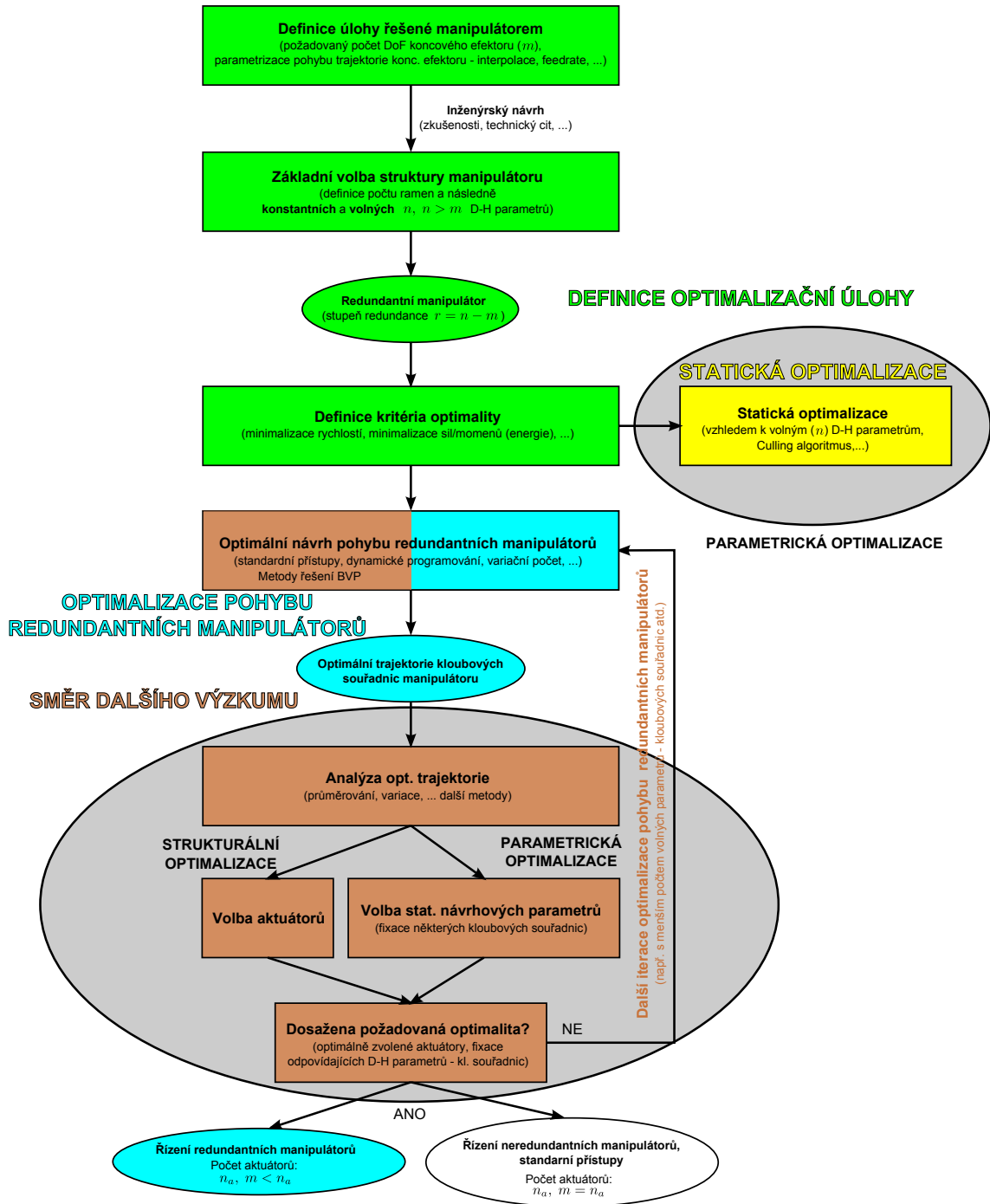
Bellmanovy funkce funkcí kvadratickou a nalezení optimálního stavového regulátoru obdobně jako v případě návrhu LQ regulátoru, viz [120, 77].

- **Metody vyhodnocení pohybu redundantních kloubových souřadnic, analýza a rozhodování, volba aktuátorů, fixace volných parametrů:**
Vstupem algoritmů pro vyhodnocení pohybu redundantních kloubových souřadnic jsou časově závislé optimální trajektorie kloubových souřadnic manipulátoru, které byly získány v daném kroku iterace prostřednictvím řešení optimalizační úlohy pro optimální pohyb redundantních manipulátorů (řešení BVP). Výstupem uvažovaných algoritmů budou za prvé strategie optimálního výběru aktuátorů, za druhé potom metody fixace specifických (rozvolněných) kinematických návrhových parametrů na určité vypočítané hodnotě (např. průměrných hodnotách atd.). Vývoj takových metod umožní syntetizovat optimální kinematické architektury manipulátorů (vzhledem k jejich požadovanému pohybu) na základě parametrické, strukturální optimalizace a využití všech výhod redundantních architektur.
- **Efektivní metody tvorby virtuálních simulačních modelů optimalizovaných manipulátorů (včetně uvažovaného zobecněného kinematického/dynamického modelu):**

Tato část potenciálních výzkumných aktivit se zdánlivě vymyká tématu optimalizace robotických architektur, nicméně přesto vše hraje významnou roli. Syntéza a návrh kinematických architektur je v konečném důsledku vždy iteračním procesem a zejména při hledání vhodné nestandardní kinematické architektury manipulátoru je velmi přínosné, pokud lze virtuální simulační modely generovat rychle a efektivně s minimálním vynaloženým úsilím k jejich případné rekonfiguraci, rozšíření či modifikaci. Přesto, že efektivním nástrojem pro modelování tzv. vícehmotových (*multi-body*) systémů je např. prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics, viz [68], pro symbolické výpočty pak např. software Maple, viz [65], v obou případech se však stále jedná o příliš obecný nástroj. Za účelem zefektivnění práce při syntéze kinematických architektur manipulátorů se zdá být rozumné vytvořit knihovnu funkčních bloků a předimplementovaných funkcí, které mohou být následně snadno využívány při tvorbě virtuálních simulačních modelů, případně při definici kriteriálních funkcí optimalizačních algoritmů. Za tímto účelem byla v rámci řešení tématu práce implementována knihovna s názvem **robotLib** zahrnující některé základní stavební prvky pro tvorbu simulačních modelů, viz následující výčet. Podrobnější popis funkčních bloků a před implementovaných funkcí lze nalézt v Kapitole A.11.

1. **Standardní funkce a funkční bloky pro modelování sériových manipulátorů**
2. **Funkce a funkční bloky pro modelování zobecněných (redundantních) sériových manipulátorů, viz Kapitoly 4.1, 4.2**
3. **Funkce pro plánování trajektorie koncového efektoru**

Předpokládá se, že knihovna předimplementovaných funkcí a funkčních bloků bude dále rozšiřována, zejména o možnosti modelování paralelních architektur manipulátorů.



Obrázek 4.9.: Schématické znázornění optimalizace manipulátoru (včetně znázorněné oblasti dalšího předpokládaného výzkumu).

Kapitola 5.

Závěr

Přesto, že robotika je bezpochyby vědním oborem, kterému je věnována intenzivní pozornost již řadu let a mnohé problémy jsou dnes prezentovány jako vyřešené a uzavřené, stále lze nalézt zcela zásadní a dosud obecně a systematicky nevyřešené otázky. Jednou z takových otázek je právě návrh a optimalizace robotických architektur, které je věnována předložená práce. Navzdory tomu, že je často tato oblast odsouvána do pozadí před dnes aktuálními, moderními a technickou veřejností upřednostňovanými tématy jako např. autonomní a kognitivní funkce pro řízení robotů, kolaborativní, kooperativní a asistenční roboty, systémy strojového vnímání a porozumění, humanoidní roboty atd., jedná se o zcela zásadní problém, jehož řešení v konečném důsledku velkou měrou ovlivní kvalitu komplexního navrženého robotického zařízení a míru jeho efektivního využití pro danou uvažovanou úlohu. Opodstatněnost problému návrhu a optimalizace robotických architektur lze sice částečně zmírnit faktem, že dnešní moderní HW a SW prostředky umožňují realizovat pokročilé, sofistikované a vysoce efektivní algoritmy přímovazebního a zpětnovazebního řízení, které do jisté míry mohou kompenzovat strukturálně či parametricky nevhodný kinematický návrh manipulátoru, nicméně takový přístup bude s vysokou pravděpodobností nejen neefektivní, složitý a finančně náročný, ale bude zejména zbytečně čerpat možný potenciál řídicího systému, který může být mnohem efektivněji využit za účelem vložení určitého „inteligentního“ chování do robotického zařízení. Typickým příkladem může být aktivní kompenzace reziduálních vibrací nevhodně navržené mechanické konstrukce manipulátoru, která musí být řešena řídicím systémem s velmi rychlou periodou vzorkování. Existuje však celá řada situací, kdy nevhodný návrh robotického zařízení již nelze aktivně kompenzovat a navždy se tak stává jeho nedílnou součástí. Typicky se jedná např. o následující situace:

- *Nutnost předimenzování pohonů (ať už s hlediska maximálních možných rychlostí či sil / silových momentů)* - tento fakt hraje extrémní roli zejména v případě sériových manipulátorů, kdy se z důvodu nepříznivého poměru mezi hmotností a výkonem pohonů snadno stává celý problém neřešitelný.
- *Nadměrná energetická spotřeba robotického systému, neúměrně dlouhý čas cyklu* - problém lze efektivně řešit zejména pro robotické zařízení vykonávající jednoúčelovou činnost (typicky např. svařovací roboty na velkých výrobních linkách), např. reálným problémem časové optimalizace pracovního cyklu 6 DoF průmyslového manipulátoru IRB 140 od firmy ABB pro výrobu pantů umístěného na lineárním pojezdu je řešen v [52].
- *Nutnost přeplánování pohybů manipulátoru z důvodů singularit* - problém nastává v případě koordinovaného pohybu manipulátoru, kdy z důvodu pohybu v blízkosti singularitních poloh není možné realizovat předepsanou trajektorii koncového efektoru.
- *Prostorová omezení* - kolize manipulátoru s překážkami či vzájemné kolize ramen mohou být zdrojem zásadních problémů zejména v případě pohybu manipulátoru v silně prostorově omezeném prostředí.

- *atd.*

Poznamenejme, že význam návrhu a optimalizace robotických architektur je markantní zejména v případech, kdy budeme uvažovat apriori vývojovou činnost (rapid prototyping) nových nestandardních robotických architektur, které jsou určeny k řešení konkrétních specializovaných úloh a jejich případné nahrazení komerčními systémy se ukazuje jako buď zcela či částečně nevyhovující. Právě tento fakt byl hlavní motivací předložené práce, neboť odpověď na otázku, „Jak navrhnout a parametrizovat vhodný manipulátor pro polohování konkrétní nesené technologie specifickým způsobem (komplexní pohyb koncového efektoru), ve specifických podmínkách (technologické umístění robotu, omezený prostor atd.)?“, byla potřeba nalézt ve všech doposud řešených projektech, viz Kapitola 1.3.

Přesto, že z obecného hlediska lze v souvislosti s optimalizací robotických architektur vymezit dvě zásadní oblasti, a to *strukturální* a *parametrickou* optimalizaci, byla předložená práce věnována zejména tématu *parametrické* optimalizace, a to z následujících důvodů:

- Strukturální optimalizace (syntéza) zahrnující topologickou syntézu manipulátoru ve smyslu volby počtu a typu kloubů či ramen a jejich vzájemného propojení do podoby otevřených či uzavřených kinematických řetězců je velmi komplexní a složitý problém (především z důvodu vlastní definice vhodného kritéria optimality a samotného řešení). Do jisté míry lze problém redukovat na návržení topologické struktury manipulátoru s ohledem na požadovaný typ a počet DoF koncového efektoru. Některé metody vyšetřování počtu DoF (jednoduché formulace na základě kvantitativní informace o topologických parametrech - počet ramen, kloubů atd. či korektní metody vyšetřování počtu DoF z rovnic kinematického omezení) jsou pro demonstraci diskutovány v Kapitole 2. Důraz je kladen zejména na paralelní architektury manipulátorů, kde zmíněný problém formuluje zásadní otázku, zda-li je navržená robotická architektura schopna vykonávat požadovaný typ pohybu.
- Strukturální syntéza je často řešena intuitivně na základě zkušeností a „inženýrského“ citu návrháře pečlivě seznámeného s technickou oblastí nasazení manipulátoru.
- Vlastnosti i ne zcela optimálně zvolené kinematické struktury manipulátoru mohou být z velké části vylepšeny vhodnými přístupy parametrické optimalizace.

Problém (*statické*) parametrické optimalizace, tedy standardně problém nalezení (*konstantních*) kinematických návrhových parametrů manipulátoru (typicky např. D-H parametrů), je možné definovat v obecné rovině jako nelineární optimalizační úlohu s nelineárními omezeními typu rovností a/nebo nerovností. Takový obecný problém lze řešit s pomocí celé řady standardních optimalizačních algoritmů. Za účelem vyčlenění vlastního předloženého přístupu k parametrické optimalizaci byly tyto metody diskutovány a shrnuty v Kapitole 3.2.3. Současně byly v Kapitole 3.2.4 podrobně prozkoumány alternativní možnosti přístupu k parametrické optimalizaci, které, na rozdíl od obecných přístupů, nahlížejí na proces parametrické optimalizace prostřednictvím určitých analogií s ohledem na konkrétní zaměření k danému druhu optimalizace.

Na tomto základě byl v Kapitole 3.3 dále vypsifikován vlastní přístup k problému zmíněné statické parametrické optimalizace založený na modifikaci a rozšíření tzv. Culling algoritmu (diskrétní algoritmus přímého prohledávání diskrétní množiny přípustných řešení) umožňující nalézt v uspokojivém čase globální optimum (případně optima následující). Efektivita algoritmu s ohledem na požadovaný počet vyčíslení uvažované kritériální funkce byla zhodnocena v porovnání s algoritmem hrubé síly. V uvažovaných demonstračních příkladech byla prokázána více jak 95% úspora v počtu vyčíslení kritériální funkce (pro 10000 předpokládaných sad kinematických návrhových parametrů a 45 diskrétních bodů reprezentující hodnocený pracovní prostor manipulátoru). Poznamenejme, že efektivita algoritmu je do značné míry ovlivněna volbou počáteční podmínky (vybraná počáteční

sada parametrů), která by měla být vybrána s ohledem na jistou apriorní znalost úlohy (např. na základě známých kinematických návrhových parametrů, pro které úloha vykazuje uspokojivé (byť neoptimální) výsledky).

Výsledky globálního optimalizačního algoritmu byly využity jako počáteční podmínky následné lokální optimalizace (pomocí již standardních přístupů).

Zatímco algoritmy statické optimalizace, tak jak byly definovány v Kapitole 3.3, umožňují získat finální optimální konstantní kinematické návrhové parametry vedoucí k nalezení extrému dané kritériální funkce přes uvažovaný pracovní prostor, z obecného pohledu na parametrickou optimalizaci lze identifikovat systematická omezení takového přístupu následovně:

- Výsledky statické optimalizace dávají jednoznačný výsledek jako hodnotu optimálních konstantních kinematických návrhových parametrů vzhledem k danému kritériu optimality podél celé uvažované trajektorie pohybu koncového efektoru (či na dané restrikcii pracovního prostoru).
- Principiálně tak není znám intuitivní náhled do optimálního chování manipulátoru během pohybu s ohledem na potenciální změnu optimalizovaných parametrů podél takové uvažované trajektorie.
- V drtivé většině případů je množina kinematických návrhových parametrů striktně zadána a současně nepokrývá veškeré eventuální konstrukční možnosti (tzn. kinematickými parametry nutně nejsou všechny D-H parametry obecně popisující kinematiku manipulátoru).
- Statická optimalizace neposkytuje žádnou informaci o vhodnosti strukturálního uspořádání manipulátorů (s ohledem na jejich typ a umístění), pozice a typy aktuátorů jsou pevně zvoleny.

Vzhledem k výše uvedeným skutečnostem byl v práci představen nový přístup k algoritmům parametrické optimalizace založený na přístupu rozvolnění daných původně konstantních kinematických návrhových parametrů. Přirozeně lze tak formulovat optimalizační úlohu pro takto vzniklý redundantní manipulátor a nalézt optimální trajektorie odpovídajících kloubových souřadnic, tedy originálních kloubových souřadnic a nově vzniklých kloubových souřadnic (redundantních kloubových souřadnic parametrizující řešení IGM/IIK), optimalizující dané kritérium optimality. Za účelem relevantního zhodnocení známých přístupů k optimalizaci pohybu redundantních manipulátorů byly v Kapitole 3.4.1 detailně analyzovány některé lokální metody optimalizace, konkrétně metody optimalizace na základě kinetostatických ukazatelů (optimalizace vzdálenosti od singulárních poloh, optimalizace pohybu aktuátorů co nejbližší předepsané poloze) či metody optimalizace zajišťující minimalizaci požadovaných sil/silových momentů v aktuátorech (integrací dynamického modelu manipulátoru). Na demonstračních příkladech byly ukázány následující limitující faktory takového přístupu:

- Metody jsou založeny výhradně na okamžitých kinematických úlohách IIK (pro rychlosti a zrychlení).
- Optimálním řešením metod jsou požadované rychlosti či zrychlení (ekvivalentně síly/silové momenty) na aktuátorech (originální i parametrizující kloubové souřadnice), které jsou nezávisle vypočítány v každém diskretizovaném časovém okamžiku plánované trajektorie koncového efektoru manipulátoru.
- Není tak brán jakýkoliv zřetel na dynamické chování manipulátoru podél trajektorie (vypočítané optimální hodnoty rychlostí/zrychlení kloubových souřadnic mohou být nekonzistentní a nerealizovatelné).

- Přesto, že nalezené trajektorie kloubových souřadnice jsou vzhledem k definovanému kritériu optimální v každém diskretizovaném bodu trajektorie koncového efektoru, z globálního pohledu mohou být tyto průběhy nežádoucí - kritérium nehodnotí celý pohyb manipulátoru jako celek (globálně). Důsledkem mohou být vysoké (byť optimální) požadavky na rychlosti či síly silové momenty zejména v případě časově dlouhých trajektorií (únik v čase do nepřipustných hodnot).

S ohledem na identifikované limitující faktory byla v Kapitole 3.4.2 definována nová optimalizační úloha založená na principech optimálního řízení s integrálním kritériem optimality (integrál váhové funkce podél celé uvažované trajektorie pohybu koncového efektoru). Cílem optimalizace byla minimalizace hodnoty integrálního kritéria uvažovaného jako integrál kvadrátu normy rychlostí aktuátorů resp. integrál kvadrátu normy požadovaných sil/silových momentů aktuátorů. Bylo ukázáno, že tato minimalizace odpovídá minimalizaci celkové ujeté vzdálenosti všemi aktuátory manipulátoru (relevantní ukazatel např. v případě opotřebení kloubů, převodovek, ložisek manipulátoru atd.) resp. celkové elektrické energii potřebné k realizaci plánovaného pohybu koncového efektoru. Parametrizující (redundantní) kloubové souřadnice manipulátoru byly modelovány fyzikálně realizovatelným stavovým dynamickým modelem (se stavem odpovídajícím polohám a rychlostem a řízením odpovídajícím zrychlení redundantních kloubových souřadnic). Výsledkem optimalizačního algoritmu byl tak optimální průběh řízení (zrychlení) redundantních kloubových souřadnic - tedy fyzikálně realizovatelný akční zásah parametrizující řešení IGM, IIK (zohlednění integrálních závislostí mezi polohou, rychlostí a zrychlením kloubových souřadnic).

Za účelem efektivního řešení úlohy optimálního řízení byly prozkoumány dva principiálně odlišné přístupy, a to *Bellmanova optimalizační rekurze* a *Hamiltonův přístup*. Výsledná optimalizační úloha byla nakonec formulována dle variačního přístupu prostřednictvím soustavy *Hamiltonových kanonických rovnic - algebro-diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami* z následujících důvodů:

- Nalezení jedné realizace optimální trajektorie ze známého počátečního stavu (polohy a rychlosti redundantních kloubových souřadnic) je dostačující.
- V konečné podobě optimalizačního algoritmu není nutné řešit soustavu algebro-diferenciálních rovnic, neboť bylo v předložené práci dokázáno, viz Kapitola 3.4.2.2, že algebraická podmínka může být řešena explicitně (a algoritmicky vzhledem k obecným implementovaným metodám) v analytickém tvaru, a to nejen pro minimalizaci rychlostí (triviální), ale zejména pro minimalizaci sil/silových momentů.
- Získaná soustava samotných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami (Boundary Value Problem - BVP) (získaná dosazením vyřešené algebraické podmínky) lze již řešit standardními efektivními numerickými metodami.
- Za účelem získání odhadu optimální trajektorie parametrizujících kloubových souřadnic jako počáteční podmínky inicializující numerický algoritmus řešící BVP byla v práci definována metoda odhadu založená na polynomiální aproximaci optimálního řešení. Hledané parametry polynomiální aproximace byly nalezeny podružným výpočetně nenáročným optimalizačním procesem (simplexový algoritmus).
- Přesto, že přístup k řešení optimálního pohybu redundantního manipulátoru založený na principech automatického řízení lze považovat za obecně komplikovanější úlohu než standardní metody citované v Kapitole 3.4.1, je tento přístup výhodný s ohledem na *globální charakter optimalizace s výsledky vedoucí na fyzikálně realizovatelné akční zásahy* (požadované zrychlení redundantních kloubových souřadnic a potažmo všech zbývajících kloubových souřadnic manipulátoru).

Navržená metoda optimalizace byla demonstrována a ověřena na vlastních příkladech.

Nalezením optimální trajektorie kloubových souřadnic pro redundantní manipulátory, kde redundantní kloubové souřadnice reprezentují původní konstantní uvažované D-H parametry, lze získat určitý intuitivní náhled do optimálního chování *rozvolněného* manipulátoru. Právě tento fakt byl inspirací pro další potenciální výzkumné aktivity prezentované v Kapitole 4. Nová předložená myšlenka spočívala v zobecnění standardního kinematického a dynamického modelu sériového manipulátoru takovým způsobem, že každý D-H parametr může být uvažován jako aktuátor. V obecném případě lze tak získat pro n_l ramenný manipulátor (včetně uvažování kompenzační polohy základny a koncového efektoru) celkem až $4 \cdot n_l + 6$ aktivních kloubů. Pro m uvažovaných DoF koncového efektoru tak získáváme redundantní manipulátor stupně $r = 4 \cdot n_l + 6 - m$. Nový kinematický a dynamický model takto zobecněného manipulátoru byl odvozen a parametrizován příslušným výběrem aktivních kloubů. S využitím definované optimalizační úlohy pro pohyb redundantních manipulátorů v Kapitole 3.4.2 lze poté získat optimální průběhy kloubových souřadnic zobecněného manipulátoru, a tedy i náhled na optimální chování definovaného redundantního manipulátoru. Takový přístup otevírá řadu možností v souvislosti s optimalizací robotických architektur (nejen parametrické, ale i strukturální), jmenujme proto některé z možností, které se zdají být zajímavé:

- *S ohledem na statickou parametrickou optimalizaci* - z optimálních průběhů kloubových souřadnic lze usuzovat, jaké kloubové souřadnice (D-H parametry) by bylo možné fixovat na konstantních hodnotách, v Kapitole 4 jsou nastíněny některé potenciálně možné algoritmy pro postupné zafixování hodnot.
- *S ohledem na strukturální optimalizaci* - z optimálních průběhů kloubových souřadnic lze usuzovat na vhodnost osazených aktuátorů manipulátoru, jinými slovy, zda-li není výhodné některé aktuátory nahradit jinými typy (\mathbf{P} , \mathbf{R}) či aktuátory přesunout na jiné pozice v kinematickém řetězci (na místo D-H parametrů d_i , θ_i , a_i , α_i).

Obě zmíněné možnosti (relace k parametrické a strukturální optimalizaci) jsou demonstrovány na ilustračním příkladu 3 DoF sériového redundantního manipulátoru, viz Příklad 4.1.

- *Z pohledu řízení řízení (ne)redundantních manipulátorů* - uvažovaný přístup dává současně odpověď na otázku, zda-li není výhodné některé vybrané redundantní kloubové souřadnice ponechat (z původně neredundantního manipulátoru získat přidáním příslušných pohonů manipulátor redundantní) právě z důvodu významného vylepšení uvažovaného kritéria optimality, kterým může být taková modifikace opodstatněna (úspora energie, prodloužení životnosti atd.).

V konečné důsledku lze však téměř vždy předpokládat, že pro optimalizaci robotických architektur pro reálné aplikace bude proces optimalizace vždy do jisté míry iteračním procesem a jen stěží si lze představit zcela univerzální optimalizační algoritmus. Navržený inovativní přístup lze v takovém ohledu prezentovat jako určitý „poradní“ systém pro návrh nových robotických architektur (ve smyslu hledání odpovědi na otázky typu: neredundantní/redundantní manipulátor, umístění a typ aktuátorů, nalezení konstantních hodnot parametrů atd.), který bude však například i několikrát iterován (např. z důvodu změny optimalizačního kritéria - zásadní vliv na výsledky optimalizace, osazení/přemístění aktuátorů - změna dynamického modelu, navýšení/snížení počtu ramen či apriori rozvolněných D-H parametrů atd.).

Součástí předložené práce je vlastní implementace nové knihovny **robotLib**, viz Kapitola A.11. Jedná se o knihovnu předimplementovaných funkcí v prostředí Matlab a funkčních bloků v jeho nadstavbě Simulink/SimMechanics, které byly vyvinuty za účelem konzistentního a systematického vytváření virtuálních simulačních modelů optimalizovaných

manipulátorů (obecných sériových manipulátorů). Knihovna obsahuje nejen bloky pro standardní kinematické a dynamické modely sériových manipulátorů, ale je rozšířena i pro uvažované zobecnění sériových manipulátorů. Knihovna **robotLib** tak poskytuje relativně komplexní SW nástroj pro účely kinematické optimalizace robotických architektur a byla intenzivně využívána v předložené práci.

V Kapitole 4 jsou podrobně specifikovány další navazující výzkumné aktivity, které by umožnily efektivní využití a nasazení předložené myšlenky optimalizace, jedná se zejména o nalezení efektivních metod řešení BVP, algoritmy zpracování a vyhodnocení výsledků optimalizačního algoritmu (tzn. optimálních průběhů kloubových souřadnic) či další rozšíření uvažovaných postupů a algoritmů (knihovny **robotLib**) pro paralelní manipulátory.

Příloha A.

Matematika v robotice

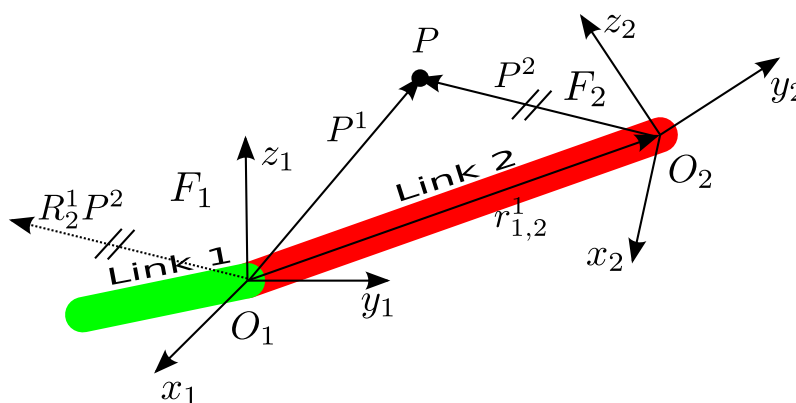
V uvedené kapitole je stručný souhrn použitých matematických základů. Přesto, že téměř všechny tyto základy lze nalézt v uvedené literatuře, mnohdy je v kontextu daného dokumentu obtížné čerpat z různých zdrojů a kompaktní shrnutí zachovávající syntaktické matematické značení hraje klíčovou roli pro zdárné porozumění předkládané problematice.

A.1. Reprezentace obecného pohybu v robotice

Pro popis pohybu manipulátorů jako systému složeného s pevných hmotných ramen a nehmotných kloubů byla zavedena celá řada metodik (jinými slovy úmluv), jedna z nejpoužívanějších bude detailně zmíněna v Kapitole A.2. Všechny úmluvy však vychází ze stejné myšlenky, a to ze vzájemné transformace polohy souřadných systémů pevně umístěných v jednotlivých ramenech manipulátoru. Zabýváme se proto nejprve reprezentací polohy, rychlosti a zrychlení obecného tělesa představující jedno rameno manipulátoru.

A.1.1. Reprezentace polohy

Předpokládejme dvojici souřadných systémů (dále jen s.s.), z nichž první s.s. $F_1 = \{O_1 - x_1 y_1 z_1\}$ je pevně spojen s ramenem *Link 1* a druhý s.s. $F_2 = \{O_2 - x_2 y_2 z_2\}$ s ramenem *Link 2*, viz Obrázek A.1.



Obrázek A.1.: Transformace souřadných systémů

Vzájemné translace s.s. F_1 a F_2 je zřejmě dána vektorem translace $r_{1,2}^1 = O_2^1 - O_1^1 = O_2^1$.

Jejich vzájemná rotace může být vyjádřena maticí rotace \mathbf{R}_2^1 , pro kterou platí následující¹:

- $\mathbf{R}_2^1 \in \mathbb{R}^{3,3}$ je reálná matice rozměru $[3 \times 3]$, jejíž sloupce reprezentují souřadnice jednotkových směrových vektorů s.s. F_2 v s.s. (či vzhledem k s.s.) F_1 .

$$\mathbf{R}_2^1 = [\mathbf{x}_2^1 \quad \mathbf{y}_2^1 \quad \mathbf{z}_2^1]$$

- \mathbf{R}_2^1 je ortogonální maticí (její sloupce jsou vzájemně ortogonální-kolmé, zároveň sloupcové vektory mají jednotkovou velikost). Tedy nutně platí:

$$(\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{R}_2^1 = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{R}_2^1)^{-1} = (\mathbf{R}_2^1)^T = \mathbf{R}_1^2 \quad (\text{A.1})$$

kde \mathbf{R}_1^2 je matice rotace, jejíž sloupce reprezentují souřadnice jednotkových směrových vektorů s.s. F_1 v s.s. F_2 .

$$\mathbf{R}_1^2 = [\mathbf{x}_1^2 \quad \mathbf{y}_1^2 \quad \mathbf{z}_1^2]$$

- Determinant matice rotace vyjadřující orientaci pravotočivého² s.s. je roven +1:

$$\det(\mathbf{R}_2^1) = 1 \quad (\text{A.2})$$

- Matice rotace je neminimální reprezentací orientace, neboť prvky takové matice jsou vzájemně závislé. Lze snadno nalézt 6 skalárních nezávislých vazebních rovnic, např. pro rotaci $\mathbf{R}_2^1 = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3]$, kde \mathbf{c}_i jsou sloupce matice, zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{c}_j &= 0, \quad i \neq j \quad (3 \text{ skalární rovnice - kolmost vektorů}) \\ \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{c}_i &= 1, \quad i = j \quad (3 \text{ skalární rovnice - normované vektory}) \end{aligned}$$

Minimální počet parametrů pro popis obecné rotace je tedy tři (viz např. Eulerovy úhly).

- Inverzní transformace polohy lze odvodit následovně:
Nechť \mathbf{P}^1 označuje souřadnice bodu \mathbf{P} v s.s. F_1 a \mathbf{P}^2 souřadnice stejného bodu v s.s. F_2 , potom dopřednou a inverzní transformaci lze s využitím inverze matice rotace (A.1) psát jako:

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \quad (\text{dopředná transformace}) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{P}^2 = -\mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{P}^1 \quad (\text{inverzní transformace}) \quad (\text{A.4})$$

- Rozlišujeme tři základní elementární rotace dvou s.s.
 - Rotace kolem osy \mathbf{x}_1 s.s. F_1 o úhel α
Tedy s.s. F_2 vznikne natočením souřadného systému F_1 kolem osy \mathbf{x}_1 o úhel α .

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

¹Dolní index označuje konkrétní vektor (bod), zatímco horní index vyjadřuje, v souřadnicích kterého souřadného systému je tento vektor (bod) vyjádřen. Např.: $\mathbf{r}_{1,2}^1$ a $\mathbf{r}_{1,2}^2$ označuje ten samý vektor, ale jeho souřadnice jsou jednou uvažovány vzhledem k s.s. F_1 a podruhé k s.s. F_2 .

²Pro pořadí souřadnicových os platí pravidlo pravé ruky. Vždy budeme uvažovat pravotočivé s.s.

- Rotace kolem osy \mathbf{y}_1 s.s. F_1 o úhel β
Tedy s.s. F_2 vznikne natočením souřadného systému F_1 kolem osy \mathbf{y}_1 o úhel β .

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

- Rotace kolem osy \mathbf{z}_1 s.s. F_1 o úhel γ
Tedy s.s. F_2 vznikne natočením souřadného systému F_1 kolem osy \mathbf{z}_1 o úhel γ .

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

- Úhly α, β, γ se nazývají *Eulerovské úhly* a tvoří jeden ze známých možností popisů rotace těles v prostoru.
- Obecnou rotaci můžeme vyjádřit skládáním rotací elementárních, a to dvěma základními postupy:

1. Postupná rotace kolem os souřadných systémů

Například podle schématu XYZ³:

- Odrotuj s.s. F_1 okolo osy \mathbf{x}_1 o úhel $\alpha \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F'_1 (matice rotace $\mathbf{R}_x(\alpha)$).
- Odrotuj s.s. F'_1 okolo osy \mathbf{y}'_1 o úhel $\beta \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F''_1 (matice rotace $\mathbf{R}_y(\beta)$).
- Odrotuj s.s. F''_1 okolo osy \mathbf{z}''_1 o úhel $\gamma \Rightarrow$ vzniká výsledný souřadný systém F_2 (matice rotace $\mathbf{R}_z(\gamma)$).

Výslednou matici rotace můžeme tak psát jako:

$$\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_x(\alpha) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_z(\gamma) \quad (\text{A.8})$$

2. Rotace kolem os souřadného systému F_1 (fixované osy rotace)

Opět podle schématu XYZ:

- Odrotuj s.s. F_1 okolo osy \mathbf{x}_1 o úhel $\alpha \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F'_1 (matice rotace $\mathbf{R}_x(\alpha)$).
- Odrotuj s.s. F'_1 okolo osy \mathbf{y}_1 o úhel $\beta \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F''_1 (matice rotace $\mathbf{R}_y(\beta)$).
- Odrotuj s.s. F''_1 okolo osy \mathbf{z}_1 o úhel $\gamma \Rightarrow$ vzniká výsledný souřadný systém F_2 (matice rotace $\mathbf{R}_z(\gamma)$).

Lze ukázat, že výslednou matici rotace můžeme tak psát jako:

$$\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \quad (\text{A.9})$$

■ Poznámka A.1 (Singularity v transformaci: matice rotace - Eulerovy úhly)

Je zřejmé, že ze známých Eulerových úhlů α, β, γ lze bez jakýchkoliv potíží vždy vypočítat matici rotace $\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma)$, viz vztah (A.8, A.9), mluvíme o tzv. *dopředné transformaci*.

³Schéma XYZ označuje posloupnost rotací kolem jednotlivých os, často používané schéma je např. ZYZ.

Zpětnou transformací pak rozumíme stanovení Eulerovských úhlů α, β, γ ze známé matice rotace

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Budeme-li uvažovat schéma XYZ s postupnou rotací kolem os souřadných systémů, matice rotace je dána podle (A.8):

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\gamma) & -\cos(\beta) \sin(\gamma) & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \sin(\gamma) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\gamma) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) & \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \sin(\alpha) \cos(\gamma) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Porovnáním rovnice (A.11) a (A.10) lze určit Eulerovy úhly následovně⁴:

Pro $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\cos \beta \geq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(-r_{23}, r_{33}) \\ \beta &= \text{atan2}(r_{13}, \sqrt{(r_{23}^2 + r_{33}^2)}) \\ \gamma &= \text{atan2}(-r_{12}, r_{11}) \end{aligned}$$

Pro $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$, $\cos \beta < 0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(r_{23}, -r_{33}) \\ \beta &= \text{atan2}(r_{13}, -\sqrt{(r_{23}^2 + r_{33}^2)}) \\ \gamma &= \text{atan2}(r_{12}, -r_{11}) \end{aligned}$$

Pro $\beta = -\frac{\pi}{2}$ matice rotace degeneruje na matici:

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\alpha - \gamma) & \cos(\alpha - \gamma) & 0 \\ \cos(\alpha - \gamma) & \sin(\alpha - \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Lze určit jen úhel $\phi = \alpha - \gamma$.

Pro $\beta = \frac{\pi}{2}$ matice rotace degeneruje na matici:

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Lze určit jen úhel $\phi = \alpha + \gamma$.

Jinými slovy, úhel $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ představuje singularitu v reprezentaci rotace pomocí Eulerových úhlů, neboť osa \mathbf{x}_1 a \mathbf{z}_1'' jsou rovnoběžné (opačné či shodné) a nelze tak jednoznačně určit úhly α, γ . Jednoznačně lze určit jen jejich rozdíl, či součet ϕ . ■

⁴Funkce $\phi = \text{atan2}(x, y)$ zohledňuje znaménka argumentů x a y a vrací korektní řešení ve všech kvadrantech $\phi \in < 0, 2\pi >$

Pro popis rotace dvou souřadných systémů se ještě využívají kromě matice rotace další způsoby reprezentace. Mezi nejznámější patří zejména (indexace matice rotace je vypuštěna):

1. Repräsentace orientace pomocí obecné osy rotace

Každou obecnou rotaci lze převést na rotaci okolo obecné osy $\mathbf{r} = [r_x \ r_y \ r_z]^T$ o úhel θ . Jedná se o přirozenou reprezentaci orientace. Dostáváme opět neminimální reprezentaci orientace určenou 4 parametry. Existuje jedna vazební rovnice (norma vektoru osy rotace) $\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r} = 1$.

Dopředná transformace $\{\mathbf{r}, \theta\} \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{r}, \theta)$ lze opět vypočítat vždy a jednoznačně:

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, \theta) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & r_x r_y(1 - c_\theta) - r_z s_\theta & r_x r_z(1 - c_\theta) + r_y s_\theta \\ r_x r_y(1 - c_\theta) + r_z s_\theta & r_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & r_y r_z(1 - c_\theta) - r_x s_\theta \\ r_x r_z(1 - c_\theta) - r_y s_\theta & r_y r_z(1 - c_\theta) - r_x s_\theta & r_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Inverzní transformace $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \theta) \mapsto \{\mathbf{r}, \theta\}$ je dána jako:

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right), \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2s_\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}, \quad \text{pro } s_\theta \neq 0 \quad (\text{A.13})$$

kde $r_{ij} = \mathbf{R}[i, j]$ jsou odpovídající prvky matice rotace.

Pro inverzní transformaci dochází k singulárnímu případu pro $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, kdy nelze jednoznačně určit směr vektoru \mathbf{r} .

2. Repräsentace orientace pomocí jednotkového kvaternionu

Je zřejmé, že s ohledem na inverzní transformaci, dochází u všech předešlých možností reprezentace orientace k singulárním polohám. Tyto singularity lze zcela odstranit reprezentací pomocí tzv. jednotkového kvaternionu. Jednotkový kvaternion \mathcal{Q} lze stanovit z úhlu θ a osy rotace \mathbf{r} pro $\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r} = 1$ jako:

$$\mathcal{Q} = [\eta \ \boldsymbol{\epsilon}^T]^T, \quad \text{kde } \eta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z]^T = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{r} \quad (\text{A.14})$$

Opět dostáváme neminimální reprezentaci orientace určenou 4 parametry a jednu vazební rovnici, neboť $\mathcal{Q}^T \cdot \mathcal{Q} = 1$ (jednotkový kvaternion).

Dopředná transformace $\mathcal{Q} \mapsto \mathbf{R}(\mathcal{Q})$ je dána jako:

$$\mathbf{R}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x \epsilon_y - \eta \epsilon_z) & 2(\epsilon_x \epsilon_z + \eta \epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_y + \eta \epsilon_z) & 2(\eta^2 + \epsilon_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y \epsilon_z - \eta \epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_z - \eta \epsilon_y) & 2(\epsilon_y \epsilon_z + \eta \epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Inverzní transformace $\mathbf{R}(\mathcal{Q}) \mapsto \mathcal{Q}$ je dána jako:

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{sgn}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sgn}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

kde $r_{ij} = \mathbf{R}[i, j]$ jsou odpovídající prvky matice rotace.

Lze ukázat, že členy pod odmocninou nikdy nebudou v případě uvažování pravotočivého s.s. ($\det(\mathbf{R}) = 1$) nabývat záporných hodnot. V inverzní transformaci tedy nikdy nedochází k singulární poloze a vždy existuje jednoznačné řešení.

Všechny výše uvedené singularity vznikající díky dané reprezentaci orientace koncového efektoru manipulátoru souhrnně nazýváme *reprezentačními singularitami* či *singularitami reprezentace*. Detailní popis přímé a inverzní transformace pro výše uvedené reprezentace rotace lze nalézt např. v [95], [44] a uvedených odkazech na další literaturu.

Homogenní transformační matice

K celkovému popisu polohy (rotace a translace) s.s. lze s výhodou využít tzv. *homogenních souřadnic*. Zavedení homogenních souřadnic úzce souvisí s problematikou geometrické projekce (jedná se v podstatě o projektivní transformaci) a podrobné vysvětlení včetně řady názorných animací lze nalézt např. v [1].

Polohu s.s. F_2 vzhledem k s.s. F_1 lze pomocí homogenní transformační matice \mathbf{T}_2^1 psát jako, viz Obr. A.1:

$$\mathbf{T}_2^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & \mathbf{R}_2^1 & & \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.17})$$

Je zřejmé, že pomocí homogenní transformační matice \mathbf{T}_2^1 lze homogenní souřadnice bodu \mathbf{P} v s.s. F_1 vyjádřit pomocí jeho homogenních souřadnic v s.s. F_2 jako, viz (A.3):

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{P}^1 \\ \hline 1 \end{array} \right] = \mathbf{T}_2^1 \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.18})$$

Homogenní transformační matice nám tak zahrnuje informaci o obecné poloze tělesa v prostoru, a to jeho rotaci $\mathbf{T}_2^1[1:3, 1:3] = \mathbf{R}_2^1$ a translaci $\mathbf{T}_2^1[1:3, 4] = \mathbf{r}_{1,2}^1$ najednou.

Vyjádríme-li nyní z rovnice (A.18) souřadnice \mathbf{P}^2 v závislosti na souřadnicích \mathbf{P}^1 , s ohledem na platnost (A.1), dostáváme inverzní transformační vztah:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} (\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{P}^1 - (\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ \hline 1 \end{array} \right] = \underbrace{(\mathbf{T}_2^1)^{-1}}_{\mathbf{T}_1^2} \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}^1 \\ \hline 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.19})$$

kde

$$(\mathbf{T}_2^1)^{-1} = \mathbf{T}_1^2 = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & (\mathbf{R}_2^1)^T & & -(\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.20})$$

je inverze homogenní transformační matice \mathbf{T}_2^1 . Poznamenejme, že pro homogenní transformační matici již neplatí, že její inverze lze nahradit její transpozicí (nesplňuje podmínky ortogonality!) $(\mathbf{T}_2^1)^{-1} \neq (\mathbf{T}_2^1)^T$.

Skládání transformací s.s.

Uvažujme trojici s.s. F_1, F_2, F_3 a odpovídající homogenní transformační matice mezi s.s. F_1, F_2 : \mathbf{T}_2^1 a F_2, F_3 : \mathbf{T}_3^2 . Potom výsledná homogenní transformační matice mezi s.s. F_1, F_3

lze psát:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_3^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3^1 & \mathbf{r}_{2,3}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^1 & \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3^2 & \mathbf{r}_{2,3}^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2 & \mathbf{R}_2^1 \mathbf{r}_{2,3}^2 + \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Tedy pro skládání rotací s.s. platí:

$$\mathbf{R}_3^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2$$

A pro skládání translací s.s.:

$$\mathbf{r}_{1,3}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{r}_{2,3}^2$$

■ Poznámka A.2 (Transformace souřadnice bod versus vektor mezi s.s.)

Často je velmi výhodné transformovat souřadnice bodu či vektoru z jednoho s.s. do jiného. Přesto, že po formální stránce je bod a vektor velmi podobný, v případě jejich transformací mezi s.s. se tato dvojice geometrických objektů chová diametrálně odlišně. Předpokládejme opět dva s.s. F_1 a F_2 se vzájemnou homogenní transformační maticí \mathbf{T}_2^1 a dva libovolné body \mathbf{P} a \mathbf{Q} jednoznačně definující vektor $\mathbf{v} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$.

- Transformace souřadnic bodu \mathbf{P} ze s.s. F_2 do s.s. F_1

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad \text{viz (A.18)}$$

Tedy:

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2$$

- Transformace souřadnic vektoru \mathbf{v} ze s.s. F_2 do s.s. F_1

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{Q}^1 - \mathbf{P}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{Q}^2 - \mathbf{r}_{1,2}^1 - \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 = \mathbf{R}_2^1 \cdot (\mathbf{Q}^2 - \mathbf{P}^2)$$

Tedy:

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{v}^2$$

■

A.1.2. Repräsentace rychlosti a zrychlení

Rychlost respektive zrychlení bodu \mathbf{P} v s.s. F_1 lze, v závislosti na jeho rychlosti respektive zrychlení v s.s. F_2 , snadno získat časovou derivací vztahu (A.18):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{T}}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^2 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \tag{A.22}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{P}}^1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \ddot{\mathbf{T}}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} + 2\dot{\mathbf{T}}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^2 \\ \hline 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{P}}^2 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \tag{A.23}$$

kde

$$\dot{\mathbf{T}}_2^1 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_2^1 & \dot{r}_{1,2}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{T}}_2^1 = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_2^1 & \ddot{r}_{1,2}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Časová derivace translačního vektoru $r_{1,2}^1$ je zřejmá a vyjadřuje translační rychlost respektive zrychlení s.s. F_2 v s.s. F_1 . Je intuitivně jasné, že časová derivace matice rotace \mathbf{R}_2^1 bezpochyby souvisí s vektorem úhlové rychlosti ω_2^1 .

Z ortogonality matice rotace (A.1) plyne

$$\mathbf{R}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T = \mathbf{I} \quad \rightarrow \text{derivací podle času} \rightarrow \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T + \mathbf{R}_2^1 \cdot (\dot{\mathbf{R}}_2^1)^T = 0$$

Zavedením matice $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T$ dostáváme $\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = \mathbf{0}$ (tedy \mathbf{S} je antisymetrická matice). Časovou derivaci matice rotace \mathbf{R}_2^1 lze tedy pomocí zatím nespécifikované antisymetrické matice \mathbf{S} vyjádřit jako:

$$\dot{\mathbf{R}}_2^1 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_2^1 \quad (\text{A.24})$$

Uvažujme nyní *konstantní* vektor \mathbf{P}^2 (bod \mathbf{P} je pevně spojen se s.s. F_2) a předpokládejme, že se s.s. F_2 vzhledem k s.s. F_1 pouze otáčí úhlovou rychlostí $\omega_2^1 = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ (neposouvá se $r_{1,2}^1 = \text{konst.}$) a jejich okamžitou orientaci popisuje matice rotace \mathbf{R}_2^1 . Tedy časovou derivaci vektoru \mathbf{P}^1 v s.s. F_1 lze psát jako, viz (A.22):

$$\dot{\mathbf{P}}^1 = \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \quad (\text{A.25})$$

Ze zákonitostí kinematiky plyne, že rychlost *konstantního* vektoru \mathbf{P}^2 lze v s.s. F_1 psát také jako:

$$\dot{\mathbf{P}}^1 = \omega_2^1 \times \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}^1 = \omega_2^1 \times \mathbf{P}^1 \quad (\text{A.26})$$

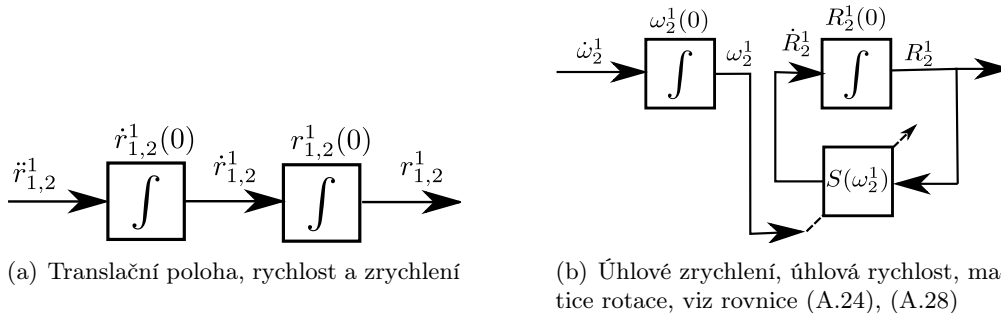
Dosadíme-li vztah (A.24) pro časovou derivaci matice rotace do rovnice (A.25) a následně porovnáme s rovnicí (A.26)

$$\dot{\mathbf{P}}^1 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}^1 \quad \longleftrightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}^1 = \omega_2^1 \times \mathbf{P}^1 \quad (\text{A.27})$$

je zřejmé, že násobení vektoru \mathbf{P}^1 maticí \mathbf{S} je ekvivalentní vektorovému součinu vektoru úhlové rychlosti ω_2^1 a vektoru \mathbf{P}^1 . Z definice vektorového násobení tedy plyne tvar matice \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\omega_2^1) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Závislosti mezi polohou, rychlostí a zrychlením s.s. F_2 vzhledem k s.s. F_1 lze pak znázornit pomocí následujících simulačních schémat:



Obrázek A.2.: Simulační schémata generování polohy s.s. F_2 vzhledem k s.s. F_1 (parametr (0) označuje počáteční podmínky integrátorů)

Někdy bývá vhodné úhlovou rychlost s.s. F_2 v s.s. F_1 vyjádřit místo vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_2^1$ časovou derivací Eulerových úhlů $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$ (dle daného schématu rotace, např. XYZ). Tuto transformaci řeší tzv. *Eulerovy kinematické rovnice*. Přímoú časovou derivací matice \mathbf{R}_2^1 , viz (A.11), z definice matice $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T$ lze ukázat, že pro schéma rotace XYZ platí⁵:

$$\boldsymbol{\omega}_2^1 = \mathbf{H}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (\text{A.29})$$

kde

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

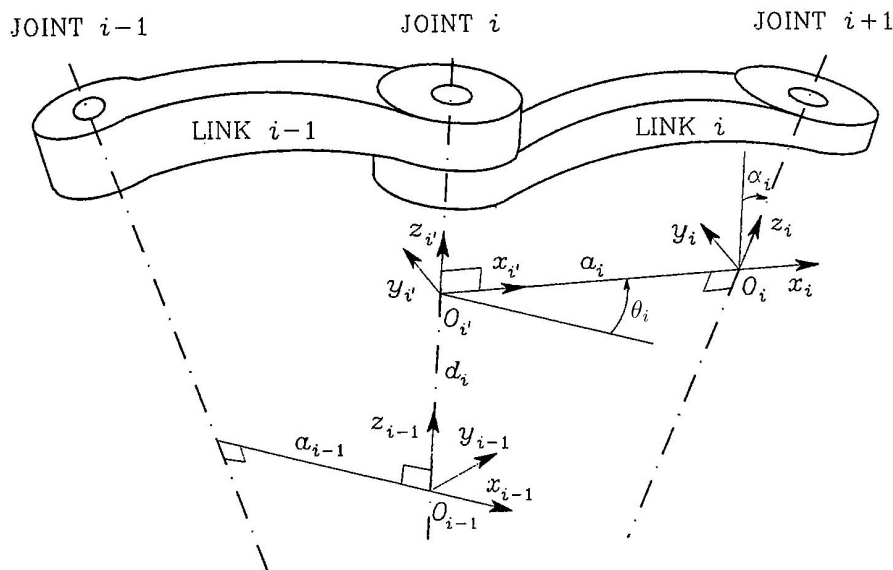
Pozor na inverzi matice \mathbf{H} při převodu z vektoru úhlové rychlosti na čas. derivace Eulerových úhlů. Matice \mathbf{H} je singulární pro *singularity v reprezentaci*, tzn. v našem případě $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$.

A.2. Denavit-Hartenbergova úmluva

Pro popis geometrického uspořádání ramen a kloubů manipulátoru bylo zavedeno mnoho metod. Ty se pokouší jednoduchou a systematickou cestou rekurzivně definovat souřadné systémy reprezentující jednotlivá ramena manipulátoru a jejich vzájemnou polohovou transformaci. Polohová transformace dvou po sobě jdoucích s.s. závisí na daných konstantních geometrických parametrech $\boldsymbol{\xi}$ (zahrnují geometrický tvar ramen, kloubu a jejich vzájemnou konfiguraci) a kloubových souřadnicích \mathbf{Q} (zahrnují aktuální polohu kloubu manipulátoru). Mezi nejznámější takové úmluvy patří tzv. Denavit-Hartenbergova (D-H) úmluva [18] a Khalil-Kleinfingerova úmluva (K-K) [46]. Výhody a nevýhody jednotlivých metod lze nalézt podrobně např. v [125]. V předloženém dokumentu je využita právě D-H úmluva a to z důvodů, že v celosvětové literatuře se vyskytuje v drtivé většině případů i přes to, že neumožňuje jednoznačně popisovat komplexní rozvětvené kinematické řetězce.

Předpokládejme dvě ramena manipulátoru *Link* $i-1$ a *Link* i , která jsou spojena kloubem *Joint* i s jedním stupněm volnosti, viz Obr. A.3.

⁵Analogicky lze transformační matici \mathbf{H} odvodit pro všechny ostatní schéma transformace (XZX, ZXZ, ...).



Obrázek A.3.: D-H úmluva

Definice s.s. $F_i = \{O_i - x_i y_i z_i\}$ za předpokladu znalosti s.s. $F_{i-1} = \{O_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}\}$ dle D-H úmluvy je vyjádřena následovně:

- Zvol osu z_i podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint i + 1* a osu z_i' podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint i*
- Umístí počátek O_i s.s. F_i do průsečíku osy z_i a normály⁶ os z_{i-1} a z_i . Umístí počátek O_i' s.s. $F_i' = \{O_i' - x_i' y_i' z_i'\}$ do průsečíku osy z_{i-1} a téže normály.
- Zvol osu x_i a x_i' podél normály ve směru od kloubu *Joint i* do kloubu *Joint i + 1*.
- Zvol osu y_i a y_i' tak, aby výsledné s.s. byly pravotočivé.

Lze snadno ukázat, že D-H úmluva nedefinuje jednoznačně umístění s.s. v následujících případech.

- Pro s.s. $F_0 = \{O_0 - x_0 y_0 z_0\}$ je určena jednoznačně pouze osa z_0 (podle osy rotace, resp. translace prvního kloubu manipulátoru *Joint 1*). Osu x_0 a počátek O_0 lze proto volit libovolně. Osa y_0 je pak určena tak, aby výsledný systém byl opět pravotočivým.
- Pro s.s. $F_n = \{O_n - x_n y_n z_n\}$, kde n je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru, není jednoznačně určena osa z_n , neboť kloub *Joint n + 1* již neexistuje. Osa x_n však musí zůstat kolmá k ose z_{n-1} .
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů (z_{i-1} a z_i) paralelní, jejich normála není jednoznačně definována (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů).
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů (z_{i-1} a z_i) protínají (normála je nulové délky), osa x_i bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami z_{i-1} a z_i .

Nyní může být vzájemná poloha s.s. F_{i-1} a F_i popsána pouze pomocí čtyř D-H parametrů:

$a_i \dots$ vzdálenost mezi počátky O_i a O_i'

$d_i \dots$ vzdálenost mezi počátky O_{i-1} a O_i'

$\alpha_i \dots$ úhel mezi osami z_{i-1} a z_i daný pootočením s.s. F_i' podél osy x_i'

⁶normála os x a y je spojnice těchto os s minimální vzdáleností svírající s osami pravý úhel

$\theta_i \dots$ úhel mezi osami \mathbf{x}_{i-1} a \mathbf{x}_i daný pootočením s.s. F_{i-1} podél osy \mathbf{z}_{i-1}

Je zřejmé, že pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti platí:

kloub *Joint i* je typu **P** proměnná definující pohyb kloubu je d_i , proměnné a_i , α_i , θ_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link i*

kloub *Joint i* je typu **R** proměnná definující pohyb kloubu je θ_i , proměnné a_i , d_i , α_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link i*

Transformační vztah, v našem případě homogenní transformační matice mezi s.s. F_{i-1} a F_i , je dán následujícím způsobem.

- Vyber s.s. F_{i-1}
- Posuň tento systém podél osy \mathbf{z}_{i-1} o vzdálenost d_i a otoč jej okolo osy \mathbf{z}_{i-1} o úhel $\theta_i \Rightarrow$ dostáváme s.s. F'_i . Homogenní transformační matice má následující tvar:

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

- Posuň s.s. F'_i podél osy \mathbf{x}'_i o vzdálenost a_i a otoč jej okolo osy \mathbf{x}'_i o úhel $\alpha_i \Rightarrow$ dostáváme s.s. F_i . Homogenní transformační matice má následující tvar:

$$\mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

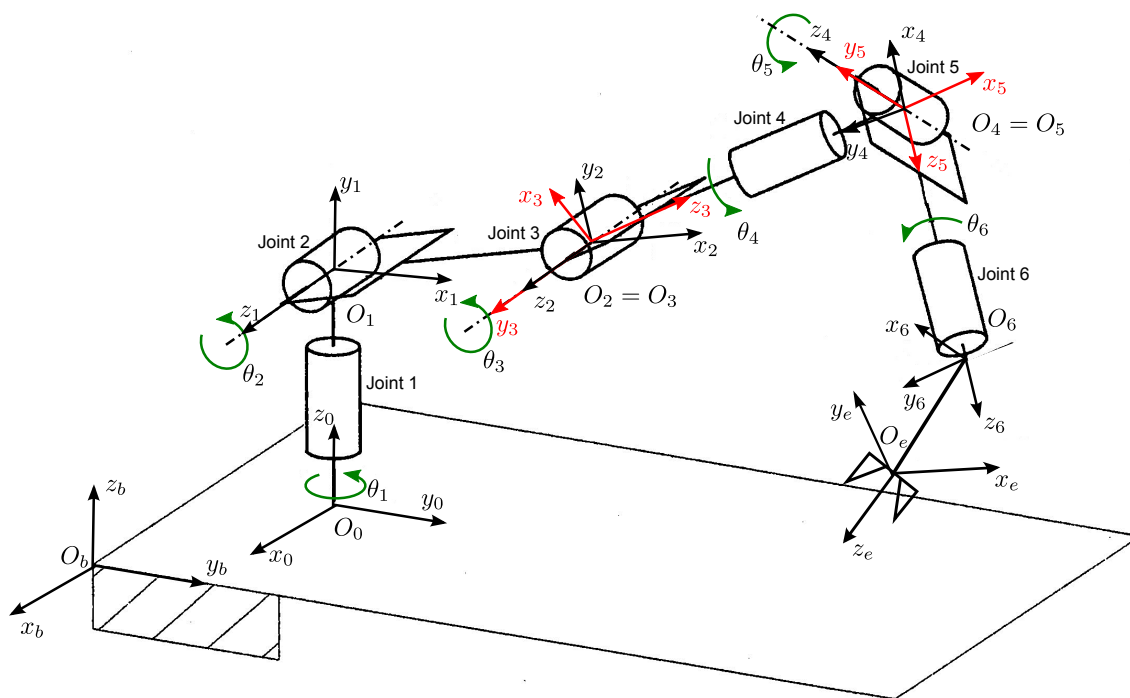
- Výsledná homogenní transformační matice ze s.s. F_{i-1} do s.s. F_i je dána:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \mathbf{T}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_ic_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_is_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32}) \end{aligned}$$

Připomeňme, že matice (A.32) je funkcí pouze kloubových souřadnic θ_i (pro rotační klouby **R**) a d_i (pro translační klouby **P**).

★ Příklad A.1 (D-H úmluva 6 DoF sériový manipulátor)

Obrázek A.4 znázorňuje zavedení souřadných systémů pro jednotlivá ramena antropomorfního manipulátoru se sférickým zápěstím.



Obrázek A.4.: Zavedení souřadných systémů pro dle D-H úmluvy

Geometrické parametry manipulátoru (tzv. D-H parametry), jsou pak dány následující tabulkou:

Joint i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	l_1	θ_1	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	θ_2	l_2	0
3	0	θ_3	0	$\frac{\pi}{2}$
4	l_3	θ_4	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	θ_5	0	$\frac{\pi}{2}$
6	l_4	θ_6	0	0

Tabulka A.1.: D-H parametry manipulátoru



A.3. Přímý a inverzní geometrický model (DGM, IGM)

V následujícím textu se zaměříme na výpočet dvou základních úloh v robotice, a to přímého geometrického modelu (**D**irect **G**eometric **M**odel) a inverzního geometrického modelu (**I**nverse **G**eometric **M**odel). Obecně lze obě úlohy udávající závislosti mezi polohou koncového efektoru (zobecněnými souřadnicemi \mathbf{X}) a polohou jednotlivých kloubů manipulátoru (kloubovými souřadnicemi \mathbf{Q}) definovat následovně:

- **Přímý geometrický model (DGM)**

Nalezení závislosti zobecněných souřadnic \mathbf{X} na kloubových souřadnicích \mathbf{Q} . V cizojazyčné literatuře často nazývaný jako *direct/forward kinematics problem* [95], *direct geometric model* [44].

- **Inverzní geometrický model (IGM)**

Nalezení závislosti kloubových souřadnic \mathbf{Q} na zobecněných souřadnicích \mathbf{X} . V cizojazyčné literatuře často nazývaný jako *inverse kinematic problem* [95], *inverse geometric problem* [44].

Často je vhodné označit kloubové souřadnice souhrnně jako:

$$\mathbf{Q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \quad (\text{A.33})$$

kde s ohledem na D-H úmluvu:

$$q_i = \theta_i \text{ (Joint } i \text{ je typu } \mathbf{R}) \quad \text{a} \quad q_i = d_i \text{ (Joint } i \text{ je typu } \mathbf{P})$$

Vektor zobecněných \mathbf{X} souřadnic lze vyjádřit více způsoby, některé z nich jsou dále zmíněny, s ohledem na reprezentaci orientace, v Kapitole A.4. Obecně je vektor zobecněných souřadnic reprezentován pozicí (translací) a orientací (rotací) koncového efektoru. Zatímco pozici lze snadno vyjádřit jako posun v jednotlivých souřadnicových osách, orientace může být vyjádřena více způsoby (Eulerovy úhly dle daného schématu rotace, osa rotace a úhel, jednotkový kvaternion, atd., viz Kapitola A.1.1).

Příímý geometrický model pro sériové manipulátory nepředstavuje vážné komplikace a pro jeho řešení lze s výhodou využít D-H úmluvu pro popis manipulátorů z Kapitoly A.2, neboť každá transformační matice \mathbf{T}_i^{i-1} závisí přímo na aktivní kloubové souřadnici q_i .

Příímý geometrický model pro n aktivních kloubů sériového manipulátoru lze tak formulovat ve tvaru:

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{Q}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i) \quad (\text{A.34})$$

kde transformační matice $\mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)$ jsou dány dle D-H úmluvy přímo rovnicí (A.32).

Je tedy zřejmé, že příímý geometrický model pro sériové manipulátory má **vždy analytické řešení**.

■ **Poznámka A.3 (Kompenzace polohy základny a koncového efektoru)**

Z praktického hlediska je výhodné definovat ještě dva další s.s., a to s.s. základny (rámu) manipulátoru $F_b = \{\mathbf{O}_b - \mathbf{x}_b \mathbf{y}_b \mathbf{z}_b\}$ a s.s. koncového efektoru $F_e = \{\mathbf{O}_e - \mathbf{x}_e \mathbf{y}_e \mathbf{z}_e\}$. Je zřejmé, že tyto s.s. jsou nezávislé na poloze kloubů manipulátoru a lze je tedy vyjádřit vzhledem k poloze s.s. prvního F_0 a posledního F_n kloubu *konstantními* maticemi přechodu \mathbf{T}_0^b a \mathbf{T}_e^n , viz Obr. A.5:

$$\mathbf{T}_0^b = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^b & \mathbf{r}_{b,0}^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_e^n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^n & \mathbf{r}_{n,e}^n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

V technické praxi tyto matice představují většinou kompenzaci umístění konkrétního manipulátoru na výrobní lince (\mathbf{T}_0^b), či kompenzaci polohy pracovního nástroje na koncovém efektoru manipulátoru (\mathbf{T}_e^n).

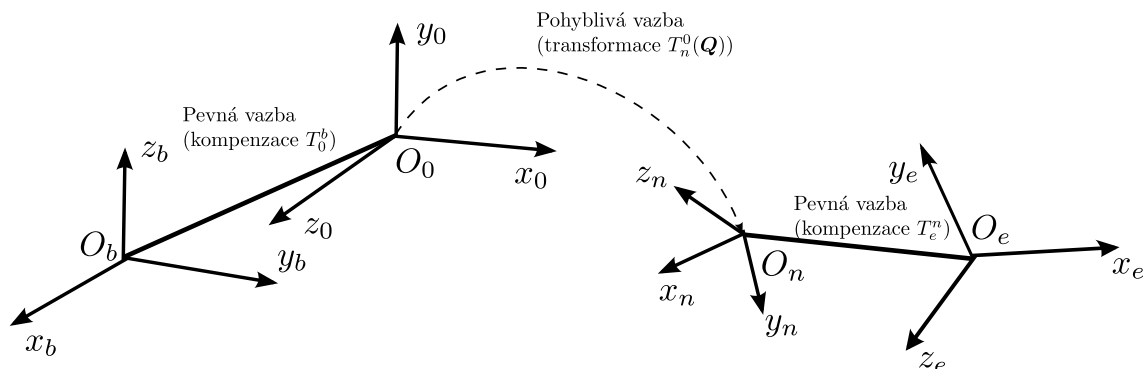
Výsledná matice přechodu $\mathbf{T}_e^b(\mathbf{Q})$ závisející na poloze kloubových souřadnic \mathbf{Q} respektující i výše uvedené kompenzace polohy bude mít tak následující tvar:

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{Q}) = \mathbf{T}_0^b \cdot \mathbf{T}_n^0 \cdot \mathbf{T}_e^n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^b & \mathbf{r}_{b,e}^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

kde

$$\mathbf{R}_e^b = [\ x_e^b \ y_e^b \ z_e^b] \quad (\text{A.37})$$

je matice rotace a $\mathbf{r}_{b,e}^b = \mathbf{O}_e^b - \mathbf{O}_b^b = \mathbf{O}_e^b$ je translační vektor s.s. F_e vzhledem k s.s. F_b .



Obrázek A.5.: Princip kompenzací polohy základny a koncového efektoru manipulátoru

■

Poznamenejme, že vektor zobecněných souřadnic manipulátoru \mathbf{X} lze získat také přímo z transformační matice \mathbf{T}_e^b např. jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\mathbf{O}_e^b \ \mathbf{R}_e^b] \quad \text{translační vektor} + \text{matice rotace} \\ \mathbf{X} &= [(\mathbf{O}_e^b)^T \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T \quad \text{translační vektor} + \text{Eulerovy úhly (z } \mathbf{R}_e^b) \quad (\text{A.38}) \\ &\dots \text{ atd.} \end{aligned}$$

Přímý kinematický problém lze tak s využitím rovnice (A.34) interpretovat jako nelineární vektorovou transformační funkci parametrizovanou návrhovými parametry manipulátoru ξ (v literatuře často označována jako *geometrická omezení manipulátoru*):

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Q}), \quad \text{kde} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(\xi) \quad (\text{A.39})$$

Inverzní geometrický model nyní rozdělme na řešení pro neredundantní a redundantní manipulátory.

A.3.1. Neredundantní manipulátory

Formulace inverzního geometrického modelu plyne přímo z rovnice (A.39). Polohu kloubových souřadnic $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ lze pro danou polohu koncového efektoru $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$, pro $m = n$, stanovit jako:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}) \quad (\text{A.40})$$

Nalezení inverze nelineární vektorové transformační funkce \mathbf{G}^{-1} je v obecném případě velmi složité, neboť ve funkci \mathbf{G} se, díky transformační matici \mathbf{T}_e^b , vyskytují součty násobků a mocnin členů $\sin q_i, \cos q_i$.

Uvažujme obecný neredundantní sériový prostorový manipulátor se všemi 6 stupni volnosti koncového efektoru ($m = 6$), a tedy právě 6 kloubovými souřadnicemi $\mathbf{Q} = [q_1 \ \dots \ q_6]^T$, $n = 6$. Jelikož zobecněný vektor souřadnic \mathbf{X} má v prostoru maximálně 6 nezávislých proměnných (např. 3 Eulerovy úhly a vektor translace koncového efektoru) je zřejmé, že řešení

inverzní kinematické úlohy pro obecný neredundantní manipulátor vede na soustavu 6 nelineárních rovnic pro 6 neznámých.

Metody pro nalezení řešení inverzního geometrického modelu pro neredundantní sériové manipulátory lze rozdělit v podstatě do následujících skupin, další informace včetně ilustrativních příkladů lze nalézt v [125].

- **Přímé analytické řešení jednoduchých architektur manipulátorů**
Jedná se o případy, kdy nelineární funkce geometrického omezení je relativně jednoduchá, a lze ji tak s využitím analytického a geometrického náhledu na architekturu manipulátoru vyřešit.
- **Specializované metody pro řešení konkrétních variant architektur manipulátorů (omezené uspořádání kloubů daných typů)**
Metoda je vhodná pro manipulátory s daným strukturálním omezením na svoji kinematickou architekturu. Vhodnými kinematickými dekompozicemi lze rozdělit řešení nelineárních rovnic geometrického omezení na více nezávislých soustav rovnic s menším počtem neznámých. Typicky se jedná např. o manipulátory s právě třemi rotačními a třemi translačními aktuátory, manipulátory se sférickým zápěstím (3 rotační klouby se vzájemně se protínajícími osami) umístěným v libovolné části kinematického řetězce (klouby mimo sférické zápěstí mohou být libovolného typu).
- **Metody pro řešení obecných architektur manipulátorů**
Jedná se o metody, které se pokoušejí řešit rovnice geometrického omezení v případě zcela obecných architektur manipulátorů. Většinou je soustava nelineárních rovnic převedena vhodnou substitucí na soustavu polynomiálních rovnic a následně řešena (eliminační metody, algoritmy založené na Gröbnerových bázích, atd.)
- **Numerické metody**
Dnes velmi populární metody pro řešení nelineárních rovnic geometrického omezení, zvláště v případech, kdy analytické řešení neexistuje, či je takové řešení nalézt velmi náročné (výpočetní čas, přesnost výsledků a stabilita hledání kořenů polynomiálních rovnic). Numerické algoritmy jsou s ohledem na metody parametrické optimalizace zmíněny podrobně v Kapitole 3.4.1.

A.3.2. Redundantní manipulátory

V případě redundantních manipulátorů převyšuje počet n nezávislých aktivních kloubů $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ počet m nezávislých DoF koncového efektoru manipulátoru, zobecněných souřadnic $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$. Jinými slovy, funkce $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ kinematického omezení tvoří soustavu m nezávislých obecně nelineárních rovnic pro n nezávislých proměnných. Zatímco, v případě DGM se situace nikterak nekomplikuje a úlohu lze řešit přímo z rovnice

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Q}) \quad (\text{A.41})$$

kde geometrické omezení funkcí \mathbf{G} je vždy známé (z postupného násobení homogenních transformačních matic, viz Kapitola A.3),

v případě IGM je zřejmé, že zde existuje nekonečně mnoho řešení, neboť právě rozdíl $r = n - m$ určuje stupeň redundance r a tedy i dimenzi nějakého parametru, kterým je takové řešení parametrizováno. Existence nekonečně mnoha řešení v prostoru zobecněných a kloubových rychlostí je patrná z tvaru odpovídajícího jakobiánu $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n}$ vystupující v lineárním vztahu

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (\text{A.42})$$

který v případě řešení IIK vede na řešení soustavy m lineárních rovnic pro n neznámých, kde $m < n$, zřejmě tedy existuje nekonečně mnoho řešení.

Pro parametrizaci řešení IGM pro redundantní manipulátory daný parametrem dimenze $n - m$ může být tento parametr přímo volen jako $n - m$ nezávislých kloubových souřadnic manipulátoru (např. hodnota kloubové souřadnice d_1 lineárního pojezdu v Příkladu 3.8). Takové kloubové souřadnice označme jako \mathbf{Q}_{par} , kloubové souřadnice parametrizující řešení IGM, pro které platí:

$$\mathbf{Q}_{\text{par}} \subset \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}_{\text{par}} \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (\text{A.43})$$

Zbývající původní (originální) kloubové souřadnice označme jako⁷ \mathbf{Q}_{orig} :

$$\mathbf{Q}_{\text{orig}} \subset \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}_{\text{orig}} \in \mathbb{R}^m, \quad \text{kde všechny kloubové souřadnice } \mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}_{\text{orig}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}\} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.44})$$

Zavedme nyní konstantní vektory $\mathbf{i}_{\text{orig}} \in \mathbb{N}^m$ resp. $\mathbf{i}_{\text{par}} \in \mathbb{N}^{n-m}$ určující indexy kloubových souřadnic \mathbf{Q} umístěných ve vektoru \mathbf{Q}_{orig} resp. \mathbf{Q}_{par} :

$$\mathbf{i}_{\text{orig}} \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad \mathbf{i}_{\text{par}} \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad \mathbf{i}_{\text{orig}} \cap \mathbf{i}_{\text{par}} = \emptyset, \quad (\text{A.45})$$

Tedy příslušné originální a parametrizující kloubové souřadnice jsou dány jako:

$$\mathbf{Q}_{\text{orig}} = \mathbf{Q}[\mathbf{i}_{\text{orig}}], \quad \mathbf{Q}_{\text{par}} = \mathbf{Q}[\mathbf{i}_{\text{par}}] \quad (\text{A.46})$$

Obecný vztah pro řešení IGM redundantních manipulátorů tedy přejde na tvar:

$$\mathbf{Q}_{\text{orig}} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}}) \quad (\text{A.47})$$

kde \mathbf{X} jsou známé zobecněné souřadnice, \mathbf{Q}_{orig} jsou hledané kloubové souřadnice a \mathbf{Q}_{par} jsou kloubové souřadnice parametrizující řešení.

Další podrobnosti týkající se řízení redundantních manipulátorů včetně řešení IGM numerickými algoritmy je podrobně diskutováno v Kapitole 3.4.1.

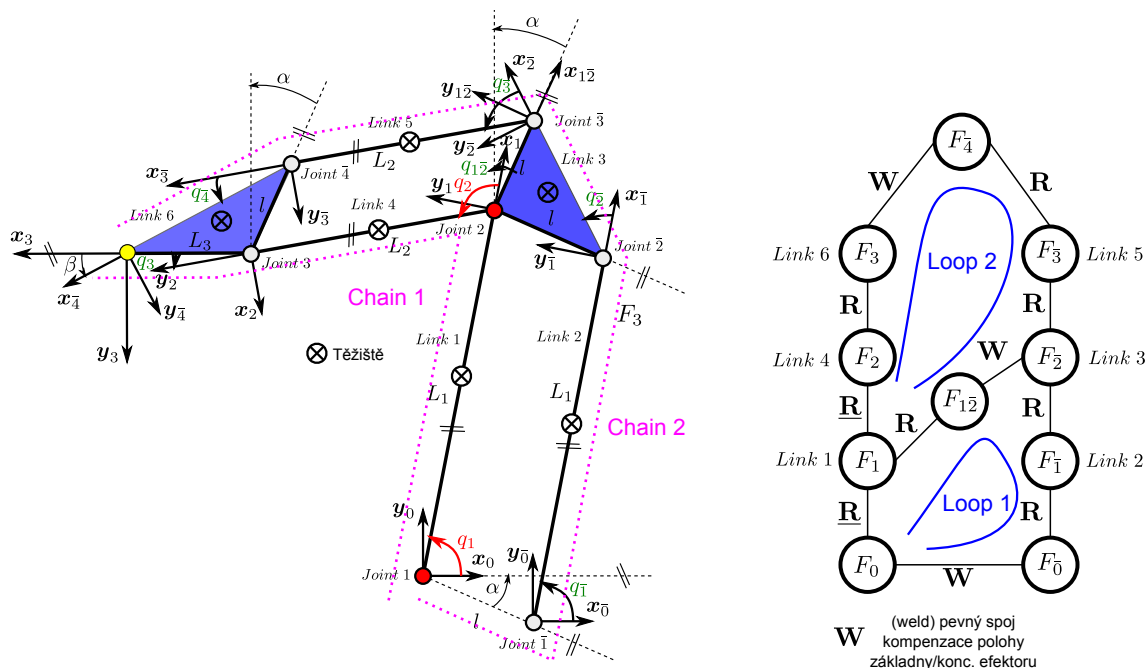
A.3.3. Nástin řešení DGM/IGM pro paralelní manipulátory

V případě řešení DGM/IGM pro paralelní manipulátory navíc vzniká potřeba vyřešit vztah mezi pasivními a aktivními klouby manipulátoru, tzn. vztah:

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{A2P}(\mathbf{Q}_a) \quad (\text{A.48})$$

Obecným přístupem k řešení je dekompozice původního paralelního manipulátoru na nezávislé geometricky smyčky, viz grafová reprezentace manipulátoru z Příkladu 3.6 na Obrázku A.6. Poznamenejme, že uzly grafu reprezentují všechna ramena manipulátoru (ve smyslu zavedených s.s. F_i , tedy i ramena nehmotná, nulové délky) a hrany grafu reprezentují odpovídající klouby (podtržením je znázorněn aktivní kloub).

⁷Množinové závorky $\{\star\}$ označují množinu bez ohledu na konkrétní pořadí (uspořádání) prvků, tedy nutně neplatí, že pořadí kloubových souřadnic ve vektoru \mathbf{Q} odpovídá $[\mathbf{Q}_{\text{orig}}^T \quad \mathbf{Q}_{\text{par}}^T]^T$.



Obrázek A.6.: Grafová reprezentace manipulátoru včetně vyznačených geometricky nezávislých smyček

Závislost (A.48) lze získat vyřešením soustavy nelineárních rovnic pro neznámé \mathbf{Q}_p popisující omezení na polohu kloubových souřadnic (pasivních \mathbf{Q}_p i aktivních \mathbf{Q}_a) danou následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2^1(q_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(q_3) &= \mathbf{T}_{12}^1(q_{12}) \cdot \mathbf{T}_2^{12}(q_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(q_3) \cdot \mathbf{T}_4^3(q_4) \cdot \mathbf{T}_3^4 \\ \mathbf{T}_1^0(q_1) \cdot \mathbf{T}_{12}^1(q_{12}) \cdot \mathbf{T}_2^{12}(q_2) &= \mathbf{T}_0^1(q_1) \cdot \mathbf{T}_1^0(q_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(q_2) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

kde

$$\mathbf{Q}_p = [q_3 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_{12}]^T, \quad \mathbf{Q}_a = [q_1 \quad q_2]^T$$

Poznamenejme, že řešení (A.49) není obecně jednoduché a jeho náročnost je ekvivalentní s řešením IGM pro sériové manipulátory⁸. V případě známého vztahu (A.48) je již možné DGM a IGM počítat z libovolného sériového kinematického řetězce spojující základnu (s.s. F_0) s koncovým efektem (s.s. F_3) (princip řešení IGM vybraného sériového řetězce je analogický jako výpočet IGM pro sériové manipulátory).

A.4. Přímá a inverzní okamžitá kinematická úloha manipulátoru (DIK, IIK), vlastnosti jakobiánu

V následujícím textu se zaměříme na (přímé, inverzní) okamžité kinematické úlohy (**D**irect **I**ntermediate **K**inematics, **I**nverse **I**ntermediate **K**inematics) pro sériové manipulátory.

Obdobně jako v případě polohových závislostí (DGM, IGM) lze definovat okamžité kinematické úlohy jako relace mezi rychlostí/zrychlením kloubových a zobecněných souřadnic, a to následovně:

⁸V konkrétním uvedeném příkladu lze však závislost (A.48) řešit intuitivně (jednoduchý planární manipulátor), viz [136].

- **Přímá okamžitá kinematická úloha (DIK)**

Nalezení závislosti rychlosti/zrychlení zobecněných souřadnic \mathbf{X} na rychlosti/zrychlení kloubových souřadnic \mathbf{Q} , v cizojazyčné literatuře často nazývané jako *direct/forward instantaneous kinematics*.

- **Inverzní okamžitá kinematická úloha (IIK)**

Nalezení závislosti rychlosti/zrychlení kloubových souřadnic \mathbf{Q} na rychlosti/zrychlení zobecněných souřadnic \mathbf{X} , v cizojazyčné literatuře často nazývané jako *inverse instantaneous kinematics*.

Formálně lze okamžitou kinematickou úlohu zapsat následovně:

- **Přímá okamžitá kinematická úloha (DIK):**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \\ \ddot{\mathbf{X}} &= \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}\end{aligned}\tag{A.50}$$

- **Inverzní okamžitá kinematická úloha (IIK):**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right)\end{aligned}\tag{A.51}$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ resp. $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ je jakobián resp. časová derivace jakobiánu (konkrétní tvar jakobiánu může být dán přímo parciálními derivacemi funkce geometrického omezení $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ podle kloubových souřadnic \mathbf{Q} , viz dále).

A.4.1. Neredundantní manipulátory

Předpokládejme polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ a zobecněných souřadnic⁹ $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$, $m = n$:

$$\mathbf{Q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T, \quad \mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\tag{A.52}$$

Známý lineární vztah mezi rychlostmi aktivních kloubových a zobecněných souřadnic pro konstantní polohu koncového efektoru lze formálně snadno získat přímo časovou derivací polohových rovnic kinematického omezení $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Q})$:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}\tag{A.53}$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ nazýváme jakobiánem zobrazení.

V případě pozice koncového efektoru je situace přímočará a první trojice zobecněných souřadnic tak bude rovnou reprezentována polohami x , y , z počátku s.s. koncového efektoru v osách \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} . Translační rychlost pak bude zřejmě dána příslušnými časovými derivacemi. V případě reprezentace orientace koncového efektoru není situace jednoznačná (existuje více reprezentací orientace, viz Kapitola A.1.1). Rychlosti zobecněných souřadnic lze vyjádřit, s ohledem na reprezentaci rychlosti orientace, např. následujícími několika způsoby:

⁹Vzhledem k různým možnostem reprezentace orientace, viz Kapitola A.1.1, lze obtížně zcela obecně stanovit zobecněné souřadnice \mathbf{X} . Orientace koncového efektoru může být dokonce reprezentována v neminimální formě (matice rotace, vektor a úhel, jednotkový kvaternion). V minimální formě je možné reprezentovat orientaci např. Eulerovými úhly. V takovém případě společně s reprezentací translace (posun ve směru jednotlivých souřadnicových os) dostáváme pro neredundantní manipulátor celkem $m = n$ nezávislých zobecněných souřadnic.

- Časovou derivací matice rotace (nemin. reprezentace):

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix}^T \dot{\mathbf{R}} \quad (\text{A.54})$$

- Časovou derivací Eulerových úhlů (dle daného schématu rotace \mathbf{XYZ} , atd., min. reprezentace):

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T \quad (\text{A.55})$$

- Vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ (min. reprezentace):

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad (\text{A.56})$$

V mechanice je rychlost orientace vyjádřena často právě *vektorem úhlové rychlosti* $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ jehož směr udává okamžitou osu rotace a jeho velikost potom okamžitou úhlovou rychlost otáčení kolem této osy. Poznamenejme, že vektor úhlové rychlosti nemá přímočarou paralelu v prostoru polohy (orientace), jako je tomu např. u Eulerových úhlů a jejich odpovídajících časových derivací. Vztah mezi vektorem úhlové rychlosti, maticí rotace, Eulerovými úhly a jejich časovými derivacemi je zmíněn v Kapitole A.1.2.

■ **Poznámka A.4 (Jakobián vs. kinematický jakobián vs. analytický jakobián)**

V literatuře se často můžeme setkat s pojmy *kinematický jakobián*, *analytický jakobián* či pouze *jakobián*. Mnohdy jsou uvedené pojmy zaměňovány, nicméně zde existují určité odlišnosti. Z definičního vztahu jakobiánu (A.53) je zřejmé, že matice jakobiánu vznikne jako parciální derivace vektorové funkce $\mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ podle vektoru kloubových souřadnic $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$. V takovém případě hovoříme o tzv. *analytickém jakobiánu*:

Pro účely demonstrace uvažujme nyní 6 DoF manipulátor s šesti nezávislými aktuátory a šesti zobecněnými souřadnicemi $m = n = 6$. Zobecněné souřadnice jsou tedy dány šesti *nezávislými* prvky (3 pro pozici, 3 pro orientaci). Nechť jsou zobecněné souřadnice odpovídající orientaci realizovány Eulerovými úhly α, β, γ .

$$\mathbf{X} = [x \quad y \quad z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$$

Závislost mezi rychlostmi a zrychleními je potom dána přímo parciálními derivacemi funkce $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$, tedy:

$$\dot{\mathbf{X}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}}_{\mathbf{J}_A(\mathbf{Q})} \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T \quad (\text{A.57})$$

kde $\mathbf{J}_A(\mathbf{Q})$ je analytický jakobián.

O *kinematicém jakobiánu* mluvíme v případě, že rychlost orientace koncového efektoru je realizována prostřednictvím vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$, tedy:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad (\text{A.58})$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ je kinematický jakobián.

Vzhledem k faktu, že vektor úhlové rychlosti nemá svůj přímý ekvivalent v prostoru poloh koncového efektoru, nelze kinematický jakobián získat přímou časovou derivací DGM. Kinematický jakobián je často odvozen prostřednictvím vhodných rekursivních algoritmů,

viz Kapitola A.5. Vztah mezi kinematickým a analytickým jakobiánem (získaným z reprezentace orientace prostřednictvím Eulerových úhlů α, β, γ dle schématu **XYZ**) lze snadno získat díky Eulerovým kinematickým rovnicím (A.29):

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{Eulerovy kinematické rovnice}) \quad (\text{A.59})$$

Tedy:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}(\alpha, \beta, \gamma) \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}} \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}(\alpha, \beta, \gamma) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) \quad (\text{A.60})$$

Inverzí vztahu (A.60) získáváme:

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \quad (\text{A.61})$$

Což znamená, že singularity obsažené v kinematickém jakobiánu jsou nutně obsaženy v jakobiánu analytickém¹⁰. Dále je patrné, že v případě existence reprezentačních singularit je matice \mathbf{H} singulární, její inverze neexistuje a nelze tedy vyčíslit analytický jakobián z jakobiánu kinematického. ■

Zabývejme se dále některými vlastnostmi jakobiánu¹¹ $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Provedeme-li singulární dekompozici matice \mathbf{J} jejíž hodnota je rovna $\text{Rank}(\mathbf{J}) = r$, dostáváme:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad (\text{A.62})$$

kde matice $\mathbf{U}_{m \times m}$ respektive $\mathbf{V}_{n \times n}$ jsou unitární¹² matice jejichž sloupce vyjadřují levý respektive pravý singulární vektor matice \mathbf{J} .

Matice $\boldsymbol{\Sigma}_{m \times n}$ je ve tvaru:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

kde \mathbf{S} je diagonální matice s reálnými diagonálními prvky $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, pro které platí

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$$

reprezentující singulární čísla matice \mathbf{J} .

¹⁰Tvrzení lze snadno dokázat ze dvou elementárních tvrzení: 1) Determinant součinu matic je roven součinu determinantů těchto matic, 2) Matice je singulární právě a jen tehdy, když je její determinant roven nule.

¹¹Předpokládejme, že rychlost zobecněných souřadnic je vyjádřena minimální reprezentací, tzn. vektorem úhlové rychlosti, či např. časovými derivacemi Eulerových úhlů.

¹²Pro unitární matici \mathbf{U} s reálnými koeficienty platí: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}$

Rozepsáním rovnice (A.62) s pomocí (A.63) pro vztah mezi kloubovými a zobecněnými rychlostmi $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}$ dostaneme ($\dot{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^m$, $\dot{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \sum_{i=1}^r \sigma_i \cdot \mathbf{U}[:, i] \cdot \mathbf{V}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \sigma_1 \cdot \mathbf{U}[:, 1] \cdot \mathbf{V}[:, 1]^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \sigma_2 \cdot \mathbf{U}[:, 2] \cdot \mathbf{V}[:, 2]^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \dots + \sigma_r \cdot \mathbf{U}[:, r] \cdot \mathbf{V}[:, r]^T \cdot \dot{\mathbf{Q}}\end{aligned}\tag{A.64}$$

Nutně tedy platí následující tvrzení, grafické znázornění viz Obrázek A.7:

- Označíme-li $\mathbf{V}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{a}$, kde $\mathbf{a} = [a_1 \dots a_i \dots a_n]^T$ a $a_i \in \mathbb{R}$, platí $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}$, tedy sloupce $\mathbf{V}[:, 1]$ až $\mathbf{V}[:, r]$ matice \mathbf{V} generují prostor kloubových rychlostí $\dot{\mathbf{Q}}$, tzv. doplněk *nulového prostoru* $\mathcal{N}(\mathbf{J})$, označený jako $\mathcal{N}^\perp(\mathbf{J})$, viz následující bod.

$$\dim(\mathcal{N}^\perp(\mathbf{J})) = r$$

- Zřejmě platí, že zbývající sloupce $\mathbf{V}[:, r+1]$ až $\mathbf{V}[:, n]$ generují prostor takových rychlostí kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$, pro který je rychlost koncového efektoru **vždy** nulová $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$, označme jej jako tzv. *nulový prostor* $\mathcal{N}(\mathbf{J})$.

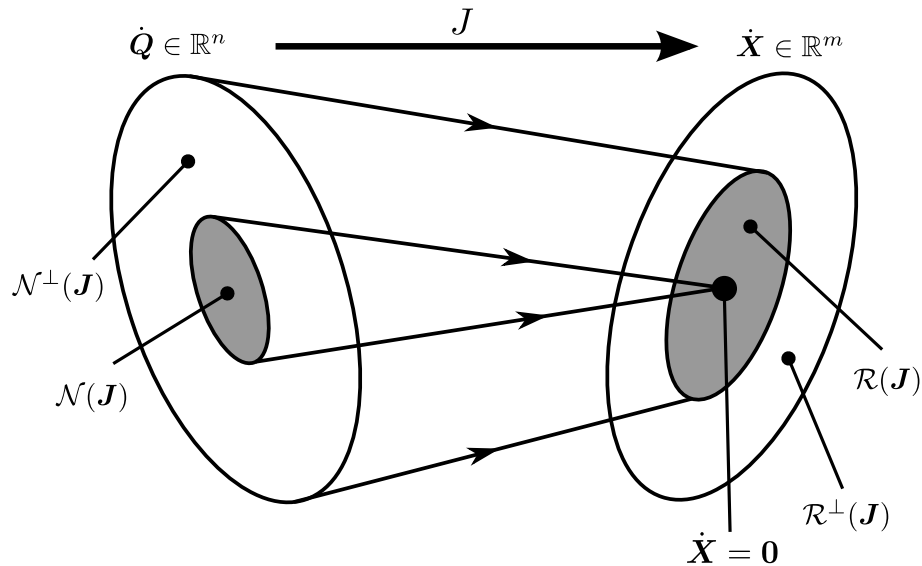
$$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = n - r$$

- Sloupce $\mathbf{U}[:, 1]$ až $\mathbf{U}[:, r]$ matice \mathbf{U} potom generují prostor **dosazitelných** rychlostí koncového efektoru $\dot{\mathbf{X}}$, označme jej jako tzv. *obor hodnot* $\mathcal{R}(\mathbf{J})$.

$$\dim(\mathcal{R}(\mathbf{J})) = r$$

- Zřejmě platí, že zbývající sloupce $\mathbf{U}[:, r+1]$ až $\mathbf{U}[:, m]$ generují prostor **nedosažitelných** rychlostí koncového efektoru $\dot{\mathbf{X}}$, tzv. doplněk *oboru hodnot* $\mathcal{R}(\mathbf{J})$, označený jako $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{J})$.

$$\dim(\mathcal{R}^\perp(\mathbf{J})) = m - r$$



Obrázek A.7.: Prostory generované singulárními vektory jakobiánu \mathbf{J}

A.4.2. Redundantní manipulátory

Analogicky jako při řešení polohových závislostí (DGM, IGM) pro redundantní manipulátory, DIK lze řešit přímo z rovnice:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (\text{A.65})$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \quad (\text{A.66})$$

kde jakobián $\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ resp. jeho časová derivace $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $n > m$, jsou známé matice.

S ohledem na (A.45, A.46) lze opět provést dekompozici kloubových souřadnic $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ na originální kloubové souřadnice $\mathbf{Q}_{\text{orig}} \in \mathbb{R}^m$ a kloubové souřadnice $\mathbf{Q}_{\text{par}} \in \mathbb{R}^{n-m}$ parametrizující řešení IGM (se stupněm redundance $r = n - m$). Přirozeně, stejným způsobem lze dekomponovat i odpovídající kloubové rychlosti a zrychlení:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \{\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}\}, \quad \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} = \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{i}_{\text{orig}}] \in \mathbb{R}^m, \quad \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} = \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{i}_{\text{par}}] \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (\text{A.67})$$

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \{\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}, \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}\}, \quad \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} = \ddot{\mathbf{Q}}[\mathbf{i}_{\text{orig}}] \in \mathbb{R}^m, \quad \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} = \ddot{\mathbf{Q}}[\mathbf{i}_{\text{par}}] \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (\text{A.68})$$

IIK pro redundantní manipulátory udávající závislosti rychlostí lze tak formulovat následovně:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}_{\text{orig}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} + \mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} &= \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot (\mathbf{Q}) \left(\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

kde $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}$ je neznámá hledaná rychlost kloubových souřadnic, $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$ je známá rychlost souřadnic parametrizující řešení IIK, \mathbf{Q} je známá poloha kloubových souřadnic a \mathbf{J}_{orig} resp. \mathbf{J}_{par} je jakobián odpovídající příspěvkům do $\dot{\mathbf{X}}$ od $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}$ resp. $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$, pro který platí:

$$\mathbf{J}_{\text{orig}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q})[:, \mathbf{i}_{\text{orig}}] \quad (\text{A.70})$$

$$\mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q})[:, \mathbf{i}_{\text{par}}] \quad (\text{A.71})$$

Časovou derivací lze dále odvodit (A.69) IIK pro redundantní manipulátory udávající závislosti zrychlení:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}} &= \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}_{\text{orig}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} + \mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} &= \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

kde $\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}$ je neznámé hledané zrychlení kloubových souřadnic, $\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$ je známé zrychlení souřadnic parametrizující řešení IIK, \mathbf{Q} a $\dot{\mathbf{Q}}$ je známá poloha a rychlost kloubových souřadnic, jakobiány se shodují s případem řešením IIK pro rychlosti.

A.5. Automatické generování závislostí rychlostí a zrychlení (DIK, IIK)

V případě sériových manipulátorů lze nalézt metody, které výrazně zjednoduší proces výpočtu kinematického jakobiánu manipulátoru, potažmo rychlostí a zrychlení libovolného ramene/kloubu manipulátoru ze znalosti rychlostí a zrychlení jednotlivých kloubů. Tyto metody jsou založené na přístupu modelování kinematiky manipulátoru prostřednictvím D-H úmluvy, viz Kapitola A.2, kdy každému ramenu manipulátoru je pevně přiřazen daný s.s. F_j . V následujícím textu stručně shrňme některé základní algoritmy používané k výpočtu. Úplné detailní odvození lze v kompaktní podobě nalézt v [125].

A.5.1. Závislosti rychlostí

Předpokládejme známý vztah nejprve mezi rychlostmi zobecněných $\dot{\mathbf{X}}$ a kloubových $\dot{\mathbf{Q}}$ souřadnic (vzhledem k s.s. F_0):

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_i^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_n]$$

jedná-li se o zobecněné souřadnice koncového efektoru $i = n$, obecně lze uvažovat jakékoliv zobecněné souřadnice libovolného ramena manipulátoru.

Z definice kinematického jakobiánu $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$, lze DIK psát jako:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_i(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}[1 : i] = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_i^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{j}_1^p & \mathbf{j}_2^p & \dots & \mathbf{j}_j^p & \dots & \mathbf{j}_i^p \\ \mathbf{j}_1^o & \mathbf{j}_2^o & \dots & \mathbf{j}_j^o & \dots & \mathbf{j}_i^o \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_i(\mathbf{Q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{O}}_i^0 &= \mathbf{j}_1^p \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{j}_2^p \cdot \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{j}_j^p \cdot \dot{q}_j + \dots + \mathbf{j}_i^p \cdot \dot{q}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 &= \mathbf{j}_1^o \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{j}_2^o \cdot \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{j}_j^o \cdot \dot{q}_j + \dots + \mathbf{j}_i^o \cdot \dot{q}_i \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

kde $j = 1 \dots i$ a sloupcové subvektory $\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix}$, $\mathbf{j}_j^p \in \mathbb{R}^3$ respektive $\mathbf{j}_j^o \in \mathbb{R}^3$ kinematického jakobiánu $\mathbf{J}_i(\mathbf{Q})$, zprostředkovávají příspěvek j -tého kloubu q_j do celkové translační respektive úhlové rychlosti s.s. F_i vzhledem k s.s. F_0 .

Z uspořádání s.s. dle D-H úmluvy lze ukázat, že subvektory kinematického jakobiánu \mathbf{j}_j^p , \mathbf{j}_j^o lze získat přímo z prvků homogenních transformačních matic \mathbf{T}_i^{i-1} definující DGM, viz Kapitola A.3.

- *Joint* j je typu **P** ($q_j = d_j$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.75})$$

- *Joint* j je typu **R** ($q_j = \theta_j$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0 \\ \mathbf{z}_{j-1}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

kde

$$\mathbf{z}_j^0 = \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 3] \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_{j,i}^0 = \mathbf{T}_i^0[1 : 3, 4] - \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 4]$$

Pro efektivní výpočet translační rychlosti $\dot{\mathbf{O}}_i$ a úhlové rychlosti $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ (tedy DIK pro libovolný s.s. v kinematickém řetězci manipulátoru) lze nastíněný postup modifikovat na následující zobecněný rekurzivní algoritmus pro libovolný typ kloubů.

Definujme pomocnou proměnnou σ_i , pro kterou platí:

$$\begin{aligned} \sigma_j &= 0 \quad \text{pokud} \quad \textit{Joint } j \quad \text{je typu } \mathbf{R} \quad (q_j = \theta_j) \\ \sigma_j &= 1 \quad \text{pokud} \quad \textit{Joint } j \quad \text{je typu } \mathbf{P} \quad (q_j = d_j) \\ \bar{\sigma}_j &= 1 - \sigma_j \end{aligned}$$

◆ **Algoritmus A.1 (Rekurzivní alg. výpočtu rychlostí)**

Z rovnic (A.74), (A.75) a (A.76) lze postupným dosazováním a úpravami odvodit následující rekurzivní schéma:

Rekurzivní algoritmus vzhledem k s.s. F_0 :

$$\boldsymbol{\omega}_j^0 = \boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \quad (\text{A.77})$$

$$\dot{\mathbf{O}}_j^0 = \dot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \boldsymbol{\omega}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \dot{q}_j \quad (\text{A.78})$$

kde $j = 1 \dots i$, $\boldsymbol{\omega}_0^0 = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{O}}_0^0 = \mathbf{0}$ (poloha s.s. F_0 je pevná)

$$\mathbf{z}_j^0 = \mathbf{T}_j^0[1:3,3] \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_{j,i}^0 = \mathbf{T}_i^0[1:3,4] - \mathbf{T}_j^0[1:3,4]$$

Rekurzivní algoritmus vzhledem k s.s. F_j (aktuálnímu s.s.):

$$\boldsymbol{\omega}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j (\boldsymbol{\omega}_{j-1}^{j-1} + [0 \ 0 \ 1]^T \bar{\sigma}_j \dot{q}_j) \quad (\text{A.79})$$

$$\dot{\mathbf{O}}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j (\dot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + [0 \ 0 \ 1]^T \sigma_j \dot{q}_j) + \boldsymbol{\omega}_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j \quad (\text{A.80})$$

kde $j = 1 \dots i$, $\boldsymbol{\omega}_0^0 = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{O}}_0^0 = \mathbf{0}$ (poloha s.s. F_0 je pevná)

$$\mathbf{r}_{j-1,j}^j = \mathbf{O}_j^j - \mathbf{O}_{j-1}^j = -\mathbf{O}_{j-1}^j = \mathbf{R}_{j-1}^j \cdot \mathbf{T}_j^{j-1}[1:3,4]$$

$$\mathbf{R}_{j-1}^j = (\mathbf{T}_j^{j-1})^T[1:3,1:3]$$

Kompenzace polohy základny a koncového efektoru

V případě, že je kompenzována poloha základny (\mathbf{T}_0^b) a/nebo poloha koncového efektoru (\mathbf{T}_e^n) pro manipulátor s n klouby, viz Poznámka A.3, lze ukázat, že ($i = n$):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{\text{comp}}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (\text{A.81})$$

kde

$$\mathbf{J}_{\text{comp}}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^b & -\mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{R}_n^0 \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) \cdot (\mathbf{R}_n^0)^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_0^b \end{bmatrix}$$

a zároveň

$$\mathbf{R}_0^b = \mathbf{T}_0^b[1:3,1:3], \quad \mathbf{R}_n^0 = \mathbf{T}_n^0[1:3,1:3] \text{ (z řešení DGM, viz Kapitola A.3)}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{r}_{n,e}^n[3,1] & \mathbf{r}_{n,e}^n[2,1] \\ \mathbf{r}_{n,e}^n[3,1] & 0 & -\mathbf{r}_{n,e}^n[1,1] \\ -\mathbf{r}_{n,e}^n[2,1] & \mathbf{r}_{n,e}^n[1,1] & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{n,e}^n = \mathbf{T}_e^n[1:3,4]$$

◆

A.5.2. Závislosti zrychlení

V případě závislostí mezi zrychleními zobecněných a kloubových souřadnic lze přímou časovou derivací rychlostních závislostí snadno ukázat, že platí:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_i^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \mathbf{J}_i(\mathbf{Q}) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_j \\ \vdots \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.82})$$

Tedy:

$$\ddot{\mathbf{O}}_i^0 = \dot{\mathbf{j}}_1^p \cdot \ddot{q}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^p \cdot \ddot{q}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^p \cdot \ddot{q}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^p \cdot \ddot{q}_i + \dot{\mathbf{j}}_1^p \cdot \dot{q}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^p \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^p \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^p \cdot \dot{q}_i \quad (\text{A.83})$$

$$\dot{\omega}_i^0 = \dot{\mathbf{j}}_1^o \cdot \dot{q}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^o \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^o \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^o \cdot \dot{q}_i + \dot{\mathbf{j}}_1^o \cdot \dot{q}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^o \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^o \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^o \cdot \dot{q}_i$$

Časová derivace kinematického jakobiánu $\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ je dána časovými derivacemi jeho dílčích prvků, tedy jeho sloupců, viz rovnice (A.75 - A.76):

- *Joint j* je typu **P** ($q_j = d_j$):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_j^p \\ \dot{\mathbf{j}}_j^o \\ \dot{\mathbf{j}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.84})$$

- *Joint j* je typu **R** ($q_j = \theta_j$):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_j^p \\ \dot{\mathbf{j}}_j^o \\ \dot{\mathbf{j}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,i}^0 \\ \dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.85})$$

kde

$$\dot{\mathbf{r}}_{j,i}^0 = \dot{\mathbf{O}}_i^0 - \dot{\mathbf{O}}_j^0, \quad \mathbf{z}_i^0 = \mathbf{T}_i^0[1 : 3, 4], \quad \dot{\mathbf{z}}_i^0 = \omega_i^0 \times \mathbf{z}_i^0$$

Poznamenejme, že translační rychlosti $\dot{\mathbf{O}}_i^0$ a úhlovou rychlost ω_i^0 lze vypočítat jako v rovnici (A.73) či pomocí rekurzivního Algoritmu A.1.

◆ Algoritmus A.2 (Rekurzivní alg. výpočtu zrychlení)

Opět je možné odvodit rekurzivní algoritmus přímou časovou derivací a vhodnými úpravami vztahů rekurzivního Algoritmu A.1 pro rychlosti:

Rekurzivní algoritmus vzhledem k s.s. F_0 :

$$\dot{\omega}_j^0 = \dot{\omega}_{j-1}^0 + \omega_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \times \mathbf{z}_{j-1}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \ddot{q}_j \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{O}}_j^0 &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \dot{\omega}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \omega_j^0 \times (\omega_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0) + \\ &+ \omega_j^0 \times \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \dot{q}_j + (\omega_{j-1}^0 \times \mathbf{z}_{j-1}^0) \sigma_j \dot{q}_j + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \ddot{q}_j \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

kde $j = 1 \dots i$, $\dot{\omega}_0^0 = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{O}}_0^0 = \mathbf{0}$ (poloha s.s. F_0 je pevná)

$$\mathbf{z}_j^0 = \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 3] \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_{j,i}^0 = \mathbf{T}_i^0[1 : 3, 4] - \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 4]$$

a úhlové rychlosti ω_i^0 jsou známé, viz Kapitola A.5.1.

Rekurzivní algoritmus vzhledem k s.s. F_j (aktuálnímu s.s.):

$$\dot{\omega}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j (\dot{\omega}_{j-1}^{j-1} + \bar{\sigma}_j (\omega_{j-1}^{j-1} \dot{q}_j \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_j)) \quad (\text{A.88})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{O}}_j^j &= \mathbf{R}_{j-1}^j (\ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + \sigma_j (\omega_{j-1}^{j-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_j + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_j)) + \dot{\omega}_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j + \omega_j^j \times (\omega_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j) + \\ &+ \omega_j^j \times \mathbf{R}_{j-1}^j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_j \dot{q}_j \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

kde $j = 1 \dots i$, $\dot{\omega}_0^0 = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{O}}_0^0 = \mathbf{0}$ (poloha s.s. F_0 je pevná)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{j-1,j}^j &= \mathbf{O}_j^j - \mathbf{O}_{j-1}^j = -\mathbf{O}_{j-1}^j = \mathbf{R}_{j-1}^j \cdot \mathbf{T}_j^{j-1}[1:3,4] \\ \mathbf{R}_{j-1}^j &= (\mathbf{T}_j^{j-1})^T[1:3,1:3] \end{aligned}$$

a úhlové rychlosti ω_j^j jsou známé, viz Kapitola A.5.1.

Kompensace polohy základny a koncového efektoru

V případě, že je kompenzována polohy základny (\mathbf{T}_0^b) a/nebo poloha koncového efektoru (\mathbf{T}_e^n) pro manipulátor s n klouby, viz Poznámka A.3, lze ukázat, že ($i = n$):

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{\text{comp}}(\mathbf{Q}) \cdot (\dot{\mathbf{J}}_n(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}_n(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}) + \mathbf{J}_{\text{add}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \quad (\text{A.90})$$

kde $\mathbf{J}_{\text{comp}}(\mathbf{Q})$ je shodný jako v Kapitole A.5.1 a

$$\mathbf{J}_{\text{add}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{R}_n^0 \cdot \mathbf{S}^2(\omega_n^n) \cdot \mathbf{r}_{n,e}^n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{n,e}^n = \mathbf{T}_e^n[1:3,4]$$

kde

$$\mathbf{S}(\omega_n^n) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n^n[3,1] & \omega_n^n[2,1] \\ \omega_n^n[3,1] & 0 & -\omega_n^n[1,1] \\ -\omega_n^n[2,1] & \omega_n^n[1,1] & 0 \end{bmatrix}$$

a úhlová rychlost ω_n^n je známá, viz Kapitola A.5.1. ◆

A.5.3. Nástin řešení DIK/IIK pro paralelní manipulátory

V případě paralelních manipulátorů lze opět vyjít z definice nezávislých geometrických smyček a nejprve odvodit závislost mezi rychlostmi a zrychleními aktivních a pasivních kloubových souřadnic manipulátoru:

$$\dot{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a \quad (\text{A.91})$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{J}}_{PA}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a \quad (\text{A.92})$$

kde \mathbf{J}_{PA} resp. $\dot{\mathbf{J}}_{PA}$ je jakobián resp. jeho časová derivace příslušného zobrazení.

Souhrnně lze vztahy (A.91, A.92) psát jako:

$$\{\dot{\mathbf{Q}}_p, \ddot{\mathbf{Q}}_p\} = \text{IKA2P}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a) \quad (\text{A.93})$$

Uvažujme opět manipulátor z Příkladu 3.6. Pro rychlostní závislosti lze rovnici (A.49) předefinovat ve smyslu rychlostí (translačních a úhlových) prostřednictvím kinematických jakobiánů dílčích sériových řetězců:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{J}_2 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{1\bar{2}} \\ \dot{q}_{\bar{3}} \\ \dot{q}_{\bar{4}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_3 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_{1\bar{2}} \end{bmatrix} &= \mathbf{J}_4 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{\bar{1}} \\ \dot{q}_{\bar{2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

Analogicky pro zrychlení platí:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{J}_1 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} &= \dot{\mathbf{J}}_2 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{1\bar{2}} \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + \mathbf{J}_2 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_{1\bar{2}} \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{J}}_3 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_{1\bar{2}} \end{bmatrix} + \mathbf{J}_3 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_{1\bar{2}} \end{bmatrix} &= \dot{\mathbf{J}}_4 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_{\bar{2}} \end{bmatrix} + \mathbf{J}_4 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_{\bar{2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

kde \mathbf{J}_i a $\dot{\mathbf{J}}_i$ pro $i = \{1, 2, 3, 4\}$ jsou příslušné jakobiány dílčích kinematických řetězců a jejich časové derivace (včetně kompenzací $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}^{12}$, \mathbf{T}_3^4 , \mathbf{T}_0^0) sériových kinematických řetězců.

Vzhledem k faktu, že lze nalézt efektivní algoritmy výpočtu jakobiánů \mathbf{J}_i a jejich časových derivací $\dot{\mathbf{J}}_i$ pro sériové kinematické řetězce, viz Kapitola A.5, je možné vztahy (A.91, A.92) získat algoritmizovatelným postupem prostřednictvím přeuspořádání sloupců/řádků příslušných kinematických jakobiánů \mathbf{J}_i a řešení lineárních soustav rovnic (A.94, A.95) vzhledem k hledaným rychlostem resp. zrychlením pasivních kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}_p$, $\ddot{\mathbf{Q}}_p$. DIK a IIK paralelního manipulátoru jeho možné získat dosazením vztahu (A.93) do popisu DIK a IIK libovolného sériového kinematického řetězce (obsahující pasivní klouby) ze základny (s.s. F_0) do koncového efektoru (s.s. F_3) uvažovaného paralelního manipulátoru.

A.6. Automatické generování dynamických modelů (DDM, IDM)

Dynamiku manipulátorů můžeme opět rozdělit na dvě základní úlohy:

- **Inverzní dynamický model (IDM):** $\{\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}\} \rightarrow \boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \text{IDM}(\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \quad (\text{A.96})$$

Tedy výpočet sil/silových momentů $\boldsymbol{\tau}$ v kloubech (aktuátorech) manipulátoru ze známého pohybu (polohy \mathbf{Q} , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$) manipulátoru a požadovaných sil/momentů působících na koncový efektor \mathbf{F} .

- **Přímý dynamický model (DDM):** $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}\} \rightarrow \ddot{\mathbf{Q}}$

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \text{DDM}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \quad (\text{A.97})$$

Tedy výpočet zrychlení kloubových souřadnic manipulátoru na základně známé polohy \mathbf{Q} a rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ manipulátoru, sil/momentů působících na koncový efektor a sil/momentů působících v kloubech (aktuátorech) manipulátoru. Prostřednictvím DDM lze sestavit dynamické rovnice manipulátoru formulované soustavou nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

kde $\boldsymbol{\xi}$ jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru a $\boldsymbol{\mu}$ jsou dynamické návrhové parametry manipulátoru (typicky umístění těžišť ramen, hmotností a moment setrvačnosti ramen, vektor gravitačního zrychlení).

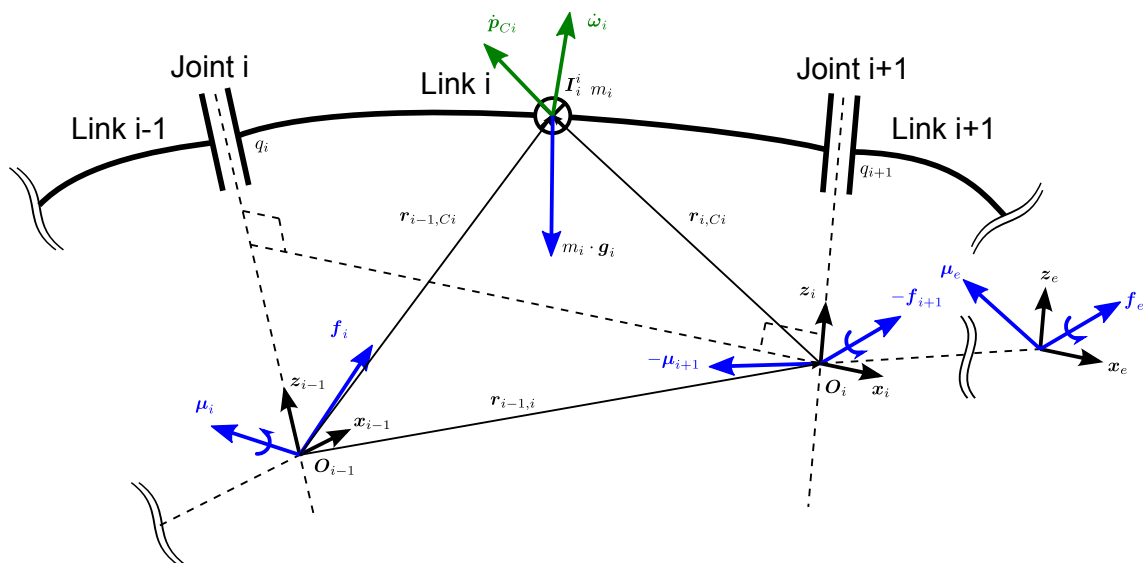
Je zřejmé, že jednotlivá ramena manipulátoru reprezentují reálná hmotná tělesa, která jsou vyčerpávajícím způsobem určena svým těžištěm, hmotností a momentem setrvačnosti. Vzhledem k tomu, že model manipulátoru je tvořen jednotlivými rameny (hmotnými tělesy), jejichž pohyb je plně určen polohami, rychlostmi a zrychleními kloubových souřadnic manipulátoru, lze dynamický model manipulátoru reprezentovat dynamickým modelem n vzájemně interagujících hmotných těles. Tato vzájemná interakce ramen je zřejmě způsobena příslušnými kloubovými vazbami. Z matematického hlediska lze dynamický model

manipulátoru vyjádřit vektorovou nelineární diferenciální rovnicí ve tvaru [95], [44], [66] (dynamické rovnice):

$$\mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.98})$$

kde \mathbf{Q} , $\dot{\mathbf{Q}}$, $\ddot{\mathbf{Q}}$ jsou polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic, $\mathbf{F} = [\mathbf{f}^T \ \boldsymbol{\mu}^T]^T$ jsou externí síly \mathbf{f} a momenty $\boldsymbol{\mu}$ působící na koncový efektor¹³, $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ je kinematický jako-bián manipulátoru a $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \dots \ \tau_n]$ jsou síly/momenty působící v jednotlivých kloubech manipulátoru. Matice $\mathbf{M}(\mathbf{Q})$ představuje matici setrvačnosti, matice $\mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ zohledňuje působení odstředivých a Coriolisových sil a matice $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ představuje vliv gravitačního zrychlení.

Využijeme opět D-H úmluvy, která každému i -tému ramenu manipulátoru pevně přiřazuje s.s. F_i . Vzájemnou interakci mezi rameny znázorňuje Obrázek A.8.



Obrázek A.8.: Vzájemná interakce ramen manipulátoru

Kde m_i je hmotnost ramene, \mathbf{I}_i^i je matice momentu setrvačnosti v těžišti ramena vyjádřená v s.s. ramena F_i (souřadný systém je pevně spojen s ramenem $\Rightarrow \mathbf{I}_i^i$ je konstantní matice nezávislá na pohybu ramene), $\dot{\mathbf{p}}_{Ci}$ je translační rychlost těžiště ramene, $\boldsymbol{\omega}_i$ je vektor úhlové rychlosti ramene, $\mathbf{r}_{i-1,Ci}$ resp. $\mathbf{r}_{i,Ci}$ jsou vektory umístění těžiště vzhledem k počátkům s.s. F_{i-1} resp. F_i , $\mathbf{r}_{i-1,i}$ je vektor vzájemné polohy počátků s.s. F_{i-1} a F_i . \mathbf{f}_i resp. $\boldsymbol{\mu}_i$ je síla resp. moment, kterým bezprostředně předcházející rameno (*Link i - 1*) působí na rameno *Link i* a $-\mathbf{f}_{i+1}$ resp. $-\boldsymbol{\mu}_{i+1}$ je síla resp. moment, kterým rameno *Link i* působí na rameno *Link i + 1* (tyto vzájemné síly resp. momenty jsou přirozeně s opačným znaménkem dle Newtonova zákona akce a reakce a reflektují vzájemné silové/momentové působení mezi rameny v kinematickém řetězci). Je zřejmé, že síly \mathbf{f}_1 resp. $\boldsymbol{\mu}_1$ jsou kompenzovány reakčním působením pevné základny manipulátoru, zatímco síly $-\mathbf{f}_{n+1}$ resp. momenty $-\boldsymbol{\mu}_{n+1}$ formují reakční síly resp. momenty působící z okolního prostředí manipulátoru na jeho poslední rameno *Link n* (v s.s. F_n)¹⁴.

¹³Je známo že, k závislosti mezi rychlostmi kloubových a zobecněných souřadnic $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}$ existuje duální vztah (kinetostatická dualita) mezi silami/momenty působících v kloubech manipulátoru a silami/momenty působící na koncový efektor pro manipulátor v ustáleném stavu $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F}$. Toto tvrzení lze snadno dokázat použitím *principu virtuální práce*.

¹⁴Poznamenejme, že dynamický model manipulátoru bývá v literatuře často ještě rozšířen o model aktuátoru (motoru) respektive jeho rotujícího statoru. Bez ztráty na obecnosti, je model aktuátoru v uvedeném textu vypuštěn.

Budeme-li předpokládat kompenzace polohy základny a koncového efektoru manipulátoru, externí síly \mathbf{f}_e^b resp. momenty $\boldsymbol{\mu}_e^b$ působící na koncový efektor (tzn. v s.s. F_e vzhledem k s.s. F_b) lze externí síly \mathbf{f}_{n+1}^0 resp. momenty $\boldsymbol{\mu}_{n+1}^0$ působící na poslední rameno (vzhledem k s.s. základny F_0) vypočítat následující transformací:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{n+1}^0 &= -(\mathbf{R}_0^b)^T \cdot \mathbf{f}_e^b \quad (\text{platí: } \mathbf{f}_e^0 = \mathbf{f}_{n+1}^0) \\ \boldsymbol{\mu}_{n+1}^0 &= -(\mathbf{R}_0^b)^T \cdot (\boldsymbol{\mu}_e^b + \mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{R}_n^0 \cdot \mathbf{r}_{n,e}^n \times \mathbf{f}_e^b)\end{aligned}\tag{A.99}$$

kde \mathbf{R}_0^b je konstantní známá matice rotace, $\mathbf{r}_{n,e}^n$ je konstantní známý vektor posunutí daný kompenzacemi základny a koncového efektoru, viz Poznámka A.3, a \mathbf{R}_n^0 je matice vypočtená z aktuální polohy kloubů manipulátoru \mathbf{Q} .

Existují dva základní přístupy k vytváření dynamických modelů manipulátoru. Poznamenejme, že oba přístupy formulují dynamické rovnice manipulátoru v prostoru kloubových souřadnic.

Přístup s využitím Euler-Lagrangeových rovnic

Metoda založena na vyjádření Lagrangiánu ve tvaru:

$$L = T(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) - U(\mathbf{Q})\tag{A.100}$$

kde T resp. U je kinetická resp. potenciální energie všech ramen manipulátoru.

Pohybové rovnice pro manipulátor s n rameny lze poté získat ve tvaru:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1 \dots n\tag{A.101}$$

kde $q_i = \mathbf{Q}[i]$ jsou kloubové souřadnice manipulátoru a τ_i je síla/moment působící na i -tý kloub manipulátoru (síla aktuátorů).

Rovnici (A.101) lze přepsat do známého tvaru pohybové rovnice:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{Q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}(\mathbf{Q}) \dot{q}_k \dot{q}_j + g_i(\mathbf{Q}) = \tau_i\tag{A.102}$$

kde $b_{ij}(\mathbf{Q})$, $h_{ijk}(\mathbf{Q})$, $g_i(\mathbf{Q})$ jsou koeficienty závislé na poloze manipulátoru. Opět lze ukázat, [95], [44], že tyto koeficienty lze odvodit přímo z prvků homogenních transformačních matic a hmotnostních parametrů (umístění a hmotnosti těžišť ramen a momenty setrvačnosti ramen vzhledem k těžišti).

Přesto, že přístup prostřednictvím Euler-Lagrangeových rovnic je často používán především pro možnosti jednoduše modelovat různé externí silové projevy (třecí síly, síly pružin, tlumící síly, atd.), není příliš vhodný pro vytváření dynamických modelů manipulátorů za účelem jejich využití v aplikacích v reálném čase a v algoritmech, kde je nutno počítat velké množství vyčíslení dynamických rovnic (typicky právě v optimalizačních algoritmech). Výpočetní náročnost je dána především velkou výpočetní náročností při vyčíslování koeficientů pohybové rovnice).

Newton-Eulerův přístup

Newton-Eulerův přístup využívá právě odvození dynamického modelu prostřednictvím vzájemné silové interakce jednotlivých ramen manipulátoru. V teorii dynamiky soustavy těles,

je tato metoda známá pod pojmem *metoda uvolňování*, jejíž princip je následující: Těleso (rameno) uvolněné ze soustavy těles (ramena + základna manipulátoru), ve které je uvolněné těleso vázáno s ostatními tělesy kinematickými dvojicemi (klouby), se pohybuje jako těleso volné, na které působí vnější (akční) síly a vazební (reakční) síly od ostatních těles včetně rámu (základny manipulátoru).

Takto uvolněná ramena manipulátoru musí nutně splňovat podmínky dynamické rovnováhy, tedy podmínku silovou (složkovou) a momentovou, které lze formulovat následovně¹⁵:

- **Složková podmínka dynamické rovnováhy pro Link i :**

Součet všech sil (včetně setrvačných) působících na rameno je nulový.

$$\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} + m_i \mathbf{g}_0 = m_i \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{Ci} \quad (\text{A.103})$$

kde \mathbf{f}_i , $-\mathbf{f}_{i+1}$ jsou akční a reakční síly působící na rameno, $m_i \mathbf{g}_0$ je gravitační síla (\mathbf{g}_0 je vektor gravitačního zrychlení) a $\ddot{\mathbf{p}}_{Ci}$ je odpovídající zrychlení těžiště ramene o hmotnosti m_i .

- **Momentová podmínka dynamické rovnováhy pro Link i :**

$$\boldsymbol{\mu}_i + (-\boldsymbol{\mu}_{i+1}) + (-\mathbf{r}_{i-1,Ci}) \times \mathbf{f}_i + (-\mathbf{r}_{i,Ci}) \times (-\mathbf{f}_{i+1}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) \quad (\text{A.104})$$

kde \mathbf{f}_i , $-\mathbf{f}_{i+1}$ resp. $\boldsymbol{\mu}_i$, $-\boldsymbol{\mu}_{i+1}$ jsou akční a reakční síly resp. momenty působící na rameno, $\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i$ je hybnost ramene, $\boldsymbol{\omega}_i$ je úhlová rychlost ramene a \mathbf{I}_i je moment setrvačnosti ramene vzhledem k těžišti. Poznamenejme, že matice momentu setrvačnosti \mathbf{I}_i je obecně závislá na aktuální poloze ramene. Chceme-li však uvažovat moment setrvačnosti jako konstantní parametr ramene manipulátoru (analogicky jako hmotnost těžiště), viz Obrázek A.8, musí být tato matice vyjádřena vzhledem k s.s. daného ramene, který je s ramenem pevně spojen, tzn. vzhledem k s.s. F_i .

Vzájemný vztah mezi maticí momentu setrvačnosti ramene *Link i* vyjádřenou v obecném s.s. a v souřadném systému ramene je dán jako:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_i^i \cdot \mathbf{R}_i^T \quad (\text{A.105})$$

kde \mathbf{I}_i^i je *konstantní* matice momentu setrvačnosti v těžišti ramena vyjádřená v s.s. ramena F_i , \mathbf{I}_i je matice setrvačnosti vyjádřená k libovolnému jinému s.s.

Derivaci momentu hybnosti z rovnice (A.104) lze prostřednictvím rovnice (A.105) přepsat následovně:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) &= \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{I}_i^i \cdot \mathbf{R}_i^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_i^i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_i^i \cdot \mathbf{R}_i^T \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \\ &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_i^i \cdot \mathbf{R}_i^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_i^i \cdot \mathbf{R}_i^T \cdot \underbrace{\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_i}_{=-\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_i = -\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0}} + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{I}_i^i \cdot \mathbf{R}_i^T \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \\ &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (\text{A.106}) \end{aligned}$$

Dosažením za derivaci momentu hybnosti (A.106) zpět do (A.104) dostáváme výslednou momentovou podmínku. Dynamické rovnice ramene *Link i* manipulátoru (složková a momentová podmínka dynamické rovnováhy) lze tedy souhrnně zapsat jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} + m_i \mathbf{g}_0 &= m_i \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{Ci} \\ \boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \mathbf{r}_{i-1,Ci} \times \mathbf{f}_i + \mathbf{r}_{i,Ci} \times \mathbf{f}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

¹⁵Není-li uveden horní index označující vztažný s.s., je uvažován jako vztažný souřadný systém s.s. F_0 (základny).

Úpravou dynamických rovnic (A.107) lze získat **zpětný rekurzivní algoritmus**, který definuje distribuci sil/momentů od posledního ramene (koncového efektoru) směrem do základny manipulátoru:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mathbf{f}_{i+1} + m_i(\ddot{\mathbf{p}}_{Ci} - \mathbf{g}_0) \\ \boldsymbol{\mu}_i &= \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1,Ci} + \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,Ci} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

kde $i = n, n-1, \dots, 1$ a externí síly \mathbf{f}_{n+1} resp. momenty $\boldsymbol{\mu}_{n+1}$ působící na poslední rameno *Link* n formují okrajové podmínky a jsou vypočteny ze známých kompenzací polohy základny a koncového efektoru dle (A.99).

Síly \mathbf{f}_i resp. momenty $\boldsymbol{\mu}_i$ působící v počátcích s.s. F_{i-1} reprezentují reakční síly resp. momenty působící na rameno *Link* i v závěsu (kloubu) *Joint* i . Kloub *Joint* i je kloub s jedním volným DoF, který umožňuje translaci (**P** kloub) resp. rotaci (**R** kloub) ve směru resp. okolo osy \mathbf{z}_{i-1} (osa rotace resp. translace kloubu *Joint* i). Zřejmě síla resp. moment τ_i v kloubu (aktuátoru) *Joint* i bude tak dán průmětem reakční síly \mathbf{f}_i resp. momentu $\boldsymbol{\mu}_i$ právě do směru osy \mathbf{z}_{i-1} (síly a momenty v jiných průmětech budou zjevně kompenzovány reakčními silami v závěsech kloubů¹⁶). Síly resp. momenty τ_i v jednotlivých kloubech manipulátoru lze tak vyčíslit následovně:

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{z}_{i-1} & \text{pokud } \textit{Joint } i \text{ je typu } \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \cdot \mathbf{z}_{i-1} & \text{pokud } \textit{Joint } i \text{ je typu } \mathbf{R} \end{cases} \quad (\text{A.109})$$

Je zřejmé, že pro výpočet sil \mathbf{f}_i resp. momentů $\boldsymbol{\mu}_i$ ve zpětné rekurzi (A.108) je nutné znát úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}_i$, zrychlení $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ a translační zrychlení $\ddot{\mathbf{p}}_{Ci}$ těžiště jednotlivých ramen. Předpokládejme, že známe translační a úhlové rychlosti a zrychlení jednotlivých ramen, tedy s.s. k nim pevně připojených. Vektor úhlové rychlosti a zrychlení $\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ s.s. F_i (rameno *Link* i) bude jistě odpovídat úhlové rychlosti a zrychlení těžiště téhož ramene. Translační zrychlení $\ddot{\mathbf{p}}_{Ci}$ těžiště ramene lze vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{Ci} &= \mathbf{O}_i + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{r}_{i,Ci}^i \\ \dot{\mathbf{p}}_{Ci} &= \dot{\mathbf{O}}_i + \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{r}_{i,Ci}^i + \underbrace{\mathbf{R}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_{i,Ci}^i}_{=0} = \dot{\mathbf{O}}_i + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{r}_{i,Ci}^i \\ \ddot{\mathbf{p}}_{Ci} &= \ddot{\mathbf{O}}_i + \dot{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{r}_{i,Ci}^i + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{r}_{i,Ci}^i = \\ &= \ddot{\mathbf{O}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i,Ci} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,Ci}) \\ \ddot{\mathbf{p}}_{Ci}^i &= \ddot{\mathbf{O}}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i,Ci}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i,Ci}^i) \quad (\text{v s.s. aktuálního ramene } F_i) \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

$\mathbf{r}_{i,Ci}^i$ je zřejmě *konstantní* vektor polohy těžiště ramene *Link* i vzhledem k počátku s.s. F_i vyjádřený v s.s. F_i (společně s konstantním momentem setrvačnosti \mathbf{I}_i^i a hmotností m_i definuje dynamické parametry ramene).

Úhlové a translační rychlosti resp. zrychlení všech s.s. pevně připojených k jednotlivým ramenům lze snadno a efektivně vyjádřit rekurzivním Algoritmem A.1 resp. Algoritmem A.2 v s.s. aktuálního ramene. Algoritmy tedy formulují **dopředný rekurzivní algoritmus**, který definuje distribuci rychlostí a zrychlení směrem od základny ke koncovému efektoru manipulátoru. Společně se zpětným rekurzivním algoritmem distribuce sil/momentů (A.108), průmětem sil do jednotlivých pohybových os kloubů (A.109) a výpočtem translačního zrychlení těžiště (A.110) získáváme kompletní rekurzivní algoritmus výpočtu *inverzního dynamického modelu* (IDM):

¹⁶V Matlabu/Simulinku/SimMechanicsu jsou v režimu inverzní dynamiky při měření pomocí bloku **Joint Sensor** reakční síly \mathbf{f}_i resp. momenty $\boldsymbol{\mu}_i$ označeny jako *Reaction force* resp. *Reaction torque*. Síly resp. momenty τ_i promítající se do pohybových os jednotlivých kloubů jsou označeny jako *Computed force* resp. *Computed torque*.

◆ **Algoritmus A.3 (IDM pro sériové manipulátory - rekurzivní alg.)**

Algoritmus je definován následovně:

Vstupy:

- Polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic (např. z řešení IGM):

$$\mathbf{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T, \quad \dot{\mathbf{Q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T, \quad \ddot{\mathbf{Q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$$

- Kinematické parametry manipulátoru, např:
D-H parametry:

$$\begin{bmatrix} d_1 & \theta_1 & a_1 & \alpha_1 \\ d_2 & \theta_2 & a_2 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_n & \theta_n & a_n & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (\text{vyjma těch, reprezentující polohu aktuátorů})$$

Typy kloubů:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 0 \quad \text{pokud } Joint\ i \text{ je typu } \mathbf{R} \ (q_i = \theta_i) \\ \sigma_i &= 1 \quad \text{pokud } Joint\ i \text{ je typu } \mathbf{P} \ (q_i = d_i) \\ \bar{\sigma}_i &= 1 - \sigma_i \end{aligned}$$

Kompensace polohy základny a koncového efektoru:

$$\mathbf{T}_0^b = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^b & \mathbf{r}_{b,0}^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_e^n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^e & \mathbf{r}_{n,e}^n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dynamické parametry manipulátoru:
Hmotnosti m_i ramen *Link i* a umístění \mathbf{r}_{i,C_i}^i těžiště vzhledem k s.s. ramene F_i .
Matice momentu setrvačnosti \mathbf{I}_i^i ramen *Link i* v těžišti vyjádřené v s.s. ramene F_i .
Vektor gravitačního zrychlení \mathbf{g}_0 (vzhledem k s.s. F_0).
- Externí síly/momenty působící na koncový efektor:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e^b \\ \boldsymbol{\mu}_e^b \end{bmatrix}$$

Výstupy:

- Síly resp. momenty $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_n]^T$ v jednotlivých aktuátorech, které realizují požadovaný pohyb manipulátoru zadaný prostřednictvím kloubových poloh \mathbf{Q} , rychlostí $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychleních $\ddot{\mathbf{Q}}$ (potažmo požadovaným pohybem koncového efektoru) za současného působení externích sil/momentů \mathbf{F} na koncový efektor.
- Zkráceně označme IDM jako (s vynecháním závislosti na konstantních kinematických a dynamických parametrech):

$$\boldsymbol{\tau} = \text{IDM}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}, \mathbf{F}) \quad (\text{A.111})$$

Algoritmus:

1. Dopředná rekurze (výpočet distribuce rychlostí a zrychlení $\boldsymbol{\omega}_i^i$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i$, $\ddot{\boldsymbol{p}}_{Ci}^i$ těžiště ramen vzhledem k s.s. ramene):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_i^i &= \mathbf{R}_{i-1}^i(\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} + [0 \ 0 \ 1]^T \bar{\sigma}_i \dot{q}_i) \\
\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i &= \mathbf{R}_{i-1}^i(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} + \bar{\sigma}_i(\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \dot{q}_i \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_i)) \\
\ddot{\boldsymbol{O}}_i^i &= \mathbf{R}_{i-1}^i(\ddot{\boldsymbol{O}}_{i-1}^{i-1} + \sigma_i(\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_i)) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i) + \\
&\quad + \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{R}_{i-1}^i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_i \dot{q}_i \\
\ddot{\boldsymbol{p}}_{Ci}^i &= \ddot{\boldsymbol{O}}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i,Ci}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i,Ci}^i)
\end{aligned} \tag{A.112}$$

pro $i = 0, 1, \dots, n$, kde počáteční podmínky $\boldsymbol{\omega}_0^0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0 = \ddot{\boldsymbol{O}}_0^0 = \mathbf{0}$.

2. Zpětná rekurze (výpočet distribuce sil/momentů):

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i^i &= \mathbf{R}_{i+1}^i \cdot \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + m_i(\ddot{\boldsymbol{p}}_{Ci}^i - (\mathbf{R}_i^0)^T \mathbf{g}_0) \\
\boldsymbol{\mu}_i^i &= \mathbf{R}_{i+1}^i \cdot \boldsymbol{\mu}_{i+1}^{i+1} - \mathbf{f}_i^i \times \underbrace{\mathbf{r}_{i-1,Ci}^i}_{\mathbf{r}_{i-1,i}^i + \mathbf{r}_{i,Ci}^i} + \mathbf{R}_{i+1}^i \cdot \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{r}_{i,Ci}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{I}_i^i \cdot \boldsymbol{\omega}_i^i + \mathbf{I}_i^i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i
\end{aligned} \tag{A.113}$$

pro $i = n, n-1, \dots, 1$, kde koncové podmínky jsou dány viz (A.99):

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{n+1}^n \cdot \mathbf{f}_{n+1}^{n+1} &= \mathbf{f}_{n+1}^n = \mathbf{R}_0^n \cdot \mathbf{f}_{n+1}^0 = -\mathbf{R}_0^n \cdot (\mathbf{R}_0^b)^T \cdot \mathbf{f}_e^b \\
\mathbf{R}_{n+1}^n \cdot \boldsymbol{\mu}_{n+1}^{n+1} &= \boldsymbol{\mu}_{n+1}^n = \mathbf{R}_0^n \cdot \boldsymbol{\mu}_{n+1}^0 = -\mathbf{R}_0^n \cdot (\mathbf{R}_0^b)^T \cdot (\boldsymbol{\mu}_e^b + \mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{R}_n^0 \cdot \mathbf{r}_{n,e}^n \times \mathbf{f}_e^b)
\end{aligned}$$

3. Výsledné průměty τ_i (síly resp. momenty v aktuátorech) reakčních sil \mathbf{f}_i^i resp. momentů $\boldsymbol{\mu}_i^i$ do odpovídajících pohybových os kloubů jsou dány jako:

$$\tau_i = (\mathbf{f}_i^i)^T \cdot \mathbf{z}_{i-1}^i \cdot \sigma_i + (\boldsymbol{\mu}_i^i)^T \cdot \mathbf{z}_{i-1}^i \cdot \bar{\sigma}_i \tag{A.114}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde $\mathbf{z}_{i-1}^i = (\mathbf{R}_i^{i-1})^T [1 : 3, 3]$.

Vektor $\mathbf{r}_{i-1,i}^i$ a matice rotace \mathbf{R}_\star^i jsou známé proměnné pro známé hodnoty poloh kloubových souřadnic \mathbf{Q} (viz řešení dle D-H úmluvy, DGM, IGM). \blacklozenge

Výsledný rekurzivní Algoritmus A.3 výpočtu inverzní dynamické úlohy (IDM), tedy umožňuje vypočítat potřebné síly/momenty v aktuátorech manipulátoru na základě znalosti požadované trajektorie koncového efektoru ($\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}} \rightarrow$ IGM, IIK $\rightarrow \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}$), požadovaného silového/momentového působení na koncový efektor a daných kinematických a dynamických parametrů manipulátoru. Úloha IDM je vždy řešitelná analyticky (pro známý IGM) a vzhledem ke své rekurzivní podobě relativně snadno a efektivně implementovatelná. Výpočetní náročnost má lineární závislost na počtu kloubů manipulátoru, tedy $O(n)$ (n potřebných iterací pro dopřednou, zpětnou rekurzi a vyčíslení průmětu sil/momentů).

V případě, že chceme vytvořit dynamický model manipulátoru ve smyslu výpočtu pohybu manipulátoru generovaného vlivem silového/momentového působení v jednotlivých aktuátorech, mluvíme o tzv. *přímém (dopředném) dynamickém modelu* (DDM). Je zřejmé, že

DDM vyžaduje řešit soustavu nelineárních diferenciálních rovnic (A.98) ve tvaru:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} &= \left[-C(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} - G(\mathbf{Q}) - J^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\tau} \right] \\ M(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} &= \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

kde $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = C(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + G(\mathbf{Q}) + J^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F}$

Soustava diferenciálních rovnic 1. řádu bude mít následující tvar:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}} \\ \underbrace{M^{-1}(\mathbf{Q}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}))}_{\ddot{\mathbf{Q}}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.116})$$

Zatímco jakobián $J(\mathbf{Q})$ je známá matice z řešení DIK, viz Kapitola A.5, pro řešení soustavy diferenciálních rovnic (A.116) je nutné vypočítat zbývající matice dynamického modelu $M(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $C(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ a $G(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{n,1}$. Za tímto účelem lze s výhodou využít Algoritmu A.3, pro výpočet IDM. Analyzujme podrobně tvar soustavy diferenciálních rovnic (A.115).

V případě řešení IDM platí, že hledáme takové $\boldsymbol{\tau}$, které splňuje diferenciální rovnici dynamického modelu pro dané hodnoty polohy \mathbf{Q} , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$ kloubových souřadnic:

$$M(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = C(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + G(\mathbf{Q}) + J^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.117})$$

Se známým algoritmem výpočtu IDM lze tak stanovit hodnoty členů $M(\mathbf{Q})$ a $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ následovně:

- **Výpočet členu $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$:**

Budeme-li hledat síly/momenty $\boldsymbol{\tau}$ v aktuátorech manipulátoru IDM Algoritmem A.3 za předpokladu, že $\ddot{\mathbf{Q}} = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \dots \quad \ddot{q}_n]^T = \mathbf{0}$, dostáváme přímo člen:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \in \mathbb{R}^{n,1} \quad (\text{A.118})$$

Je tedy zapotřebí právě jedna iterace IDM algoritmu, abychom získali vektor $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$.

- **Výpočet členu $M(\mathbf{Q})$:**

Hledejme opět síly/momenty $\boldsymbol{\tau}$ v aktuátorech manipulátoru IDM Algoritmem A.3 za předpokladu, že platí $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow$ pro příspěvek od gravitace platí $G(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Potom rovnice (A.117) přejde na tvar:

$$M(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\tau}$$

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}$$

Tedy platí:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{cases} M(\mathbf{Q})[:, 1] & \text{pro } \ddot{q}_1 = 1 \wedge \ddot{q}_i = 0, \forall i \neq 1 \\ M(\mathbf{Q})[:, 2] & \text{pro } \ddot{q}_2 = 1 \wedge \ddot{q}_i = 0, \forall i \neq 2 \\ \vdots & \\ M(\mathbf{Q})[:, n] & \text{pro } \ddot{q}_n = 1 \wedge \ddot{q}_i = 0, \forall i \neq n \end{cases}$$

Je tedy zapotřebí n iterací IDM a v každé této iteraci dostáváme právě jeden sloupec matice $M(\mathbf{Q})$.

Výsledná složitost rekurzivního algoritmu pro výpočet DDM je tedy $O(n^2)$.

◆ **Algoritmus A.4 (DDM pro sériové manipulátory - rekurzivní alg.)**

Algoritmus je definován následovně:

Vstupy:

- Síly resp. momenty v aktuátorech manipulátoru $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_n]^T$
- Kinematické, dynamické parametry manipulátoru a externí síly/momenty působící na koncový efektor (shodně jako v Algoritmu A.3).

Výstupy:

- Polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic:

$$\boldsymbol{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T, \quad \dot{\boldsymbol{Q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T, \quad \ddot{\boldsymbol{Q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$$

- Zkráceně označme DDM jako (s vynecháním závislosti na konstantních kinematických a dynamických parametrech):

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = \text{DDM}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{F}) \quad (\text{A.119})$$

Poznamenejme, že rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}$ a polohy \boldsymbol{Q} jsou řešením soustavy diferenciálních rovnic (A.116).

Algoritmus:

1. Vypočti člen $\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}})$ řešením IDM pro:

$$\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) = \text{IDM}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, \underbrace{\mathbf{0}}_{=\dot{\boldsymbol{Q}}}, \boldsymbol{F}) \quad (\text{A.120})$$

2. Vypočti člen $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{Q})$ řešením IDM pro:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{Q})[:, i] = \text{IDM}(\boldsymbol{Q}, \underbrace{\mathbf{0}}_{=\dot{\boldsymbol{Q}}}, \ddot{\boldsymbol{Q}}, \underbrace{\mathbf{0}}_{=\boldsymbol{F}}), \quad \text{za podmínky: } \boldsymbol{g}_0 = \mathbf{0} \quad (\text{A.121})$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$ a zároveň:

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = \begin{cases} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]^T & \text{pro } i = 1 \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]^T & \text{pro } i = 2 \\ \vdots & \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]^T & \text{pro } i = n \end{cases}$$

3. Vypočti zrychlení kloubových souřadnic jako, viz rovnice (A.115):

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = \text{DDM}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{Q}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}})) \quad (\text{A.122})$$

4. Řeš soustavu diferenciálních rovnic (A.116)¹⁷:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} \\ \dot{\boldsymbol{Q}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{Q}} \\ \text{DDM}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{F}) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{Q}} \leftarrow \text{bod 1.-3. algoritmu}} \quad (\text{A.123})$$

◆

¹⁷V Matlabu např. prostřednictvím funkce `ode45`.

A.6.1. Nástin řešení IDM/DDM pro paralelní manipulátory

Dynamické úlohy (DDM, IDM) pro paralelní manipulátory lze opět odvodit s využitím dekompozice paralelního manipulátoru na dílčí sériové (otevřené) kinematické řetězce vhodnou kinematickou dekompozicí (dostáváme tak v podstatě množinu sériových manipulátorů).

Z Kapitoly A.6 (resp. Algoritmu A.3) známe, že v případě sériových kinematických řetězců lze nalézt efektivní algoritmus výpočtu IDM založený na dopředném rekurzivním výpočtu rychlostí a zrychlení navazujících ramen směrem od základny ke koncovému efektoru a zpětném rekurzivním výpočtu distribuce sil/momentů působících na navazující ramena směrem od koncového efektoru k základně.

V případě paralelních manipulátorů existuje celá řada metod nalezení dynamického modelu, např. [74], [45]. V našem případě je možné využít standardní přístup založený na principu virtuální práce. Z principu virtuální práce platí, že elementární přírůstek energie vykonaný v aktivních kloubech manipulátoru musí být roven přírůstku energie ve všech kloubech manipulátoru za předpokladu, že je paralelní struktura manipulátoru dekomponována na sériové (otevřené) kinematické řetězce. Dekompozice na sériové kinematické řetězce je docílena rozpojením uzavřených kinematických smyček v pasivních kloubech manipulátoru.

Pro ilustraci předpokládejme dekompozici paralelního manipulátoru z Příkladu 3.6 v pasivním kloubu *Joint 4* a v pasivním kloubu *Joint 2*¹⁸ - tedy na dva sériové kinematické řetězce *Chain 1*, *Chain 2*, viz Obrázek A.9. Z principu virtuální práce vyplývá:

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot d\mathbf{Q}_a = \boldsymbol{\tau}_{\text{chains}}^T \cdot d\mathbf{Q}_{\text{chains}} \quad (\text{A.124})$$

kde $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ jsou silové momenty v rotačních aktuátorech manipulátoru, $d\mathbf{Q}_a = [dq_1 \ dq_2]^T$ je diferenciální přírůstek polohy aktivních kloubových souřadnic ,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{chains}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\text{Chain1}} \\ \dots \\ \boldsymbol{\tau}_{\text{Chain2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \dots \\ \tau_{\bar{1}} \\ \tau_{\bar{2}} \\ \tau_{\bar{3}} \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{Q}_{\text{chains}} = \begin{bmatrix} d\mathbf{Q}_{\text{Chain1}} \\ \dots \\ d\mathbf{Q}_{\text{Chain2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ \dots \\ dq_{\bar{1}} \\ dq_{\bar{2}} \\ dq_{\bar{3}} \end{bmatrix}$$

jsou silové momenty v ekvivalentních dekomponovaných sériových kinematických řetězcích a odpovídající hodnoty diferenciálních přírůstků kloubových souřadnic.

Ze známých závislostí mezi pasivními a aktivními kloubovými rychlostmi (A.91) lze odvodit (vynásobením rovnice diferencí času dt):

$$\begin{bmatrix} dq_3 \\ dq_{\bar{1}} \\ dq_{\bar{2}} \\ dq_{\bar{3}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{PA}[:, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[:, 2] \cdot dq_2$$

$$\begin{aligned} dq_3 &= \mathbf{J}_{PA}[1, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[1, 2] \cdot dq_2 \\ dq_{\bar{1}} &= \mathbf{J}_{PA}[2, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[2, 2] \cdot dq_2 \\ dq_{\bar{2}} &= \mathbf{J}_{PA}[3, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[3, 2] \cdot dq_2 \\ dq_{\bar{3}} &= \mathbf{J}_{PA}[4, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[4, 2] \cdot dq_2 \end{aligned} \quad (\text{A.125})$$

¹⁸ *Joint 2* je aktivním kloubem kinematického řetězce *Chain 1* ale zároveň také pasivním kloubem kinematického řetězce *Chain 2*.

Vztah (A.124) lze dále formálně upravit na lineární zobrazení mezi silovým momentem všech kloubových souřadnic manipulátoru a silovým momentem aktivních kloubových souřadnic následovně:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \left(\frac{d\mathbf{Q}_{\text{chains}}}{d\mathbf{Q}_a} \right)^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{chains}} \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{H}^T(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{chains}}\end{aligned}\quad (\text{A.126})$$

kde $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ je dána následovně:

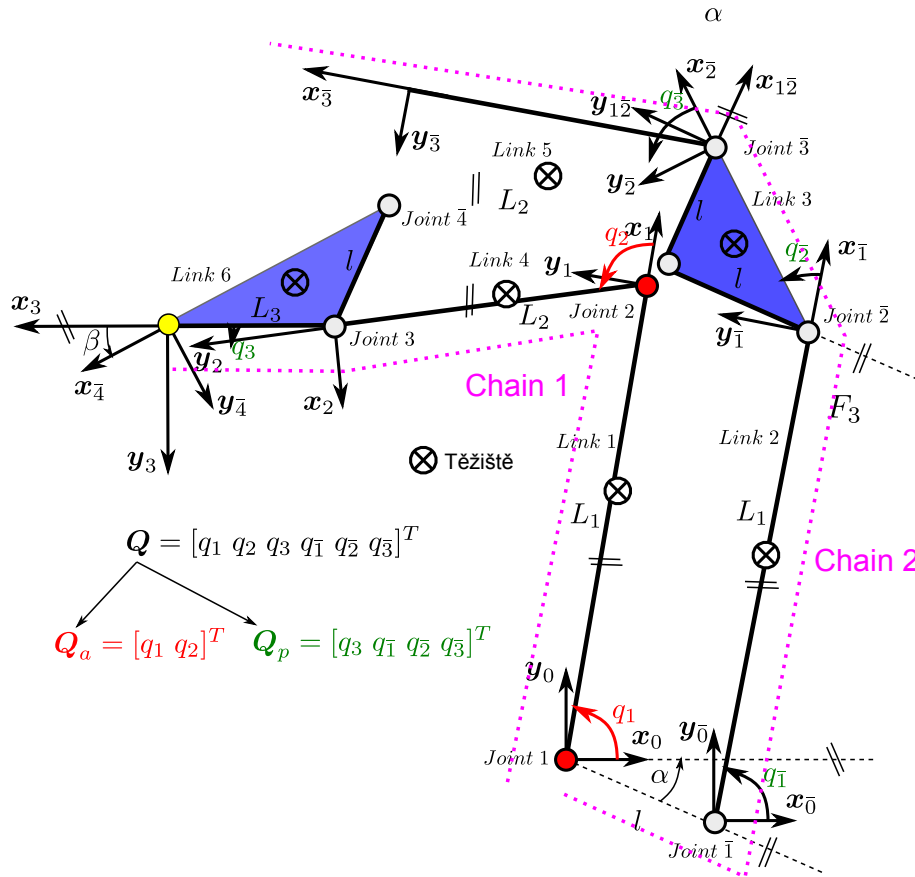
$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dq_1} & \frac{dq_1}{dq_2} \\ \frac{dq_2}{dq_1} & \frac{dq_2}{dq_2} \\ \frac{dq_1}{dq_3} & \frac{dq_2}{dq_3} \\ \frac{dq_1}{dq_{\bar{1}}} & \frac{dq_2}{dq_{\bar{1}}} \\ \frac{dq_1}{dq_{\bar{2}}} & \frac{dq_2}{dq_{\bar{2}}} \\ \frac{dq_1}{dq_{\bar{3}}} & \frac{dq_2}{dq_{\bar{3}}} \\ \frac{dq_1}{dq_1} & \frac{dq_2}{dq_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.127})$$

S pomocí (A.125) lze vyčíslit hodnoty prvků hledané matice $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ (aktivní kloubové souřadnice $\mathbf{Q}_a = [q_1 \ q_2]^T$ tedy i dq_1, dq_2 jsou **nezávislé** proměnné):

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dq_1} & \frac{dq_1}{dq_2} \\ \frac{dq_2}{dq_1} & \frac{dq_2}{dq_2} \\ \frac{dq_1}{dq_3} & \frac{dq_2}{dq_3} \\ \frac{dq_1}{dq_{\bar{1}}} & \frac{dq_2}{dq_{\bar{1}}} \\ \frac{dq_1}{dq_{\bar{2}}} & \frac{dq_2}{dq_{\bar{2}}} \\ \frac{dq_1}{dq_{\bar{3}}} & \frac{dq_2}{dq_{\bar{3}}} \\ \frac{dq_1}{dq_1} & \frac{dq_2}{dq_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \mathbf{J}_{PA}[1, 1] & \mathbf{J}_{PA}[1, 2] \\ \mathbf{J}_{PA}[2, 1] & \mathbf{J}_{PA}[2, 2] \\ \mathbf{J}_{PA}[3, 1] & \mathbf{J}_{PA}[3, 2] \\ \mathbf{J}_{PA}[4, 1] & \mathbf{J}_{PA}[4, 2] \end{bmatrix} \quad (\text{A.128})$$

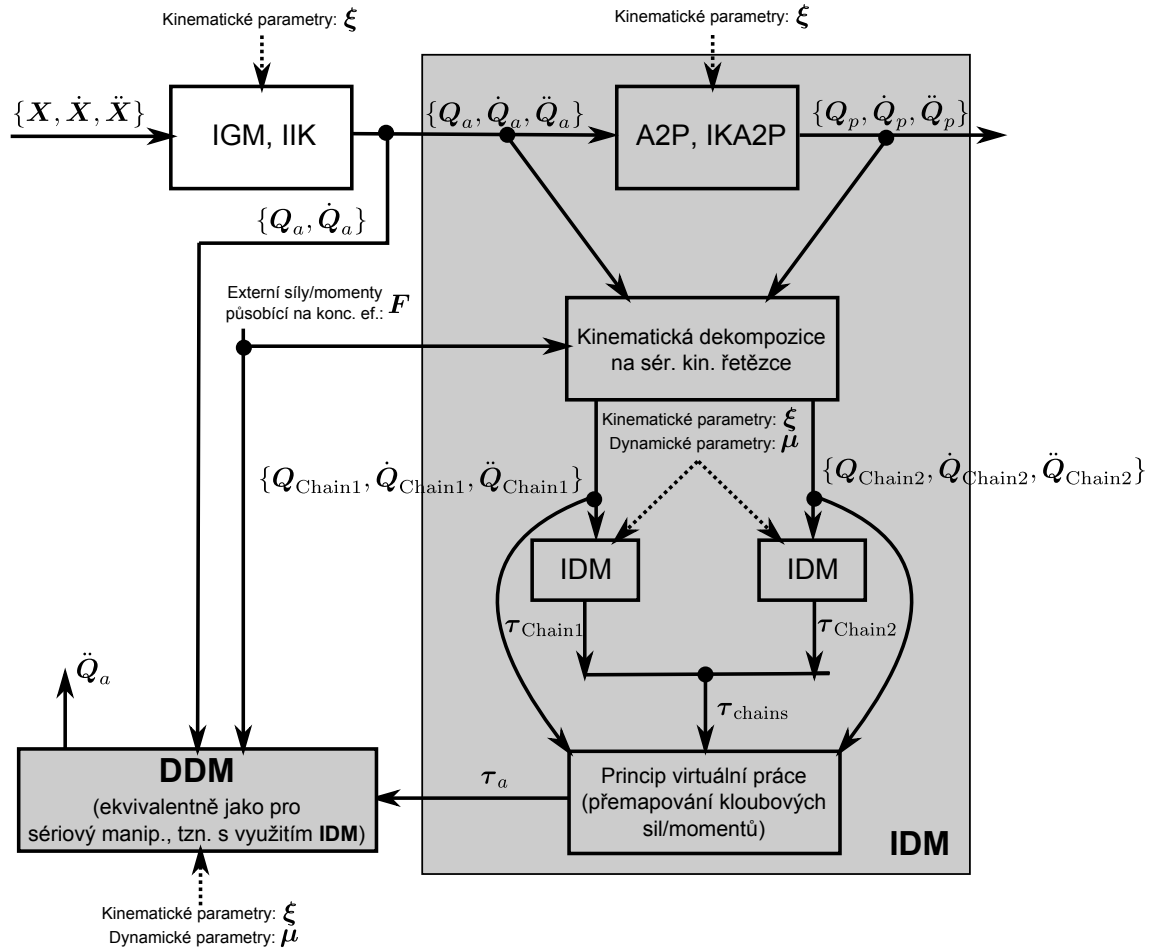
Vzhledem k jednoduché architektuře uvažovaného paralelního manipulátoru lze ukázat, že platí (matice $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ je nezávislá na kloubových souřadnicích):

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Obrázek A.9.: Dekompozice paralelního manipulátoru na dílčí kinematické řetězce

Tedy za předpokladu, že známe požadovaný pohyb paralelního manipulátoru, např. ve významu poloh \mathbf{X} , rychlostí $\dot{\mathbf{X}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}$ koncového efektoru, lze z IGM, IIK vypočítat požadované polohy Q_a , rychlosti \dot{Q}_a a zrychlení \ddot{Q}_a aktivních kloubových souřadnic a dále dle závislostí mezi aktivními a pasivními kloubovými souřadnicemi všechny pasivní kloubové polohy Q_p , rychlosti \dot{Q}_p a zrychlení \ddot{Q}_p , viz Kapitoly A.3.3, A.5.3. V takovém případě nyní může být spočítán IDM pro všechny dekomponované sériové kinematické řetězce (*Chain 1*, *2*). Získáváme tak požadované síly/silové momenty τ_{chains} ve všech (aktivních i pasivních) kloubech. Požadované síly/silové momenty v pasivních kloubech manipulátoru jsou poté promítnuty do sil/silových momentů τ aktivních kloubů manipulátoru, viz (A.126) (a kinematické řetězce jsou poté zpět uzavřeny v původně rozpojených pasivních kloubech). Poznamenejme, že externí síly/momenty působící na koncový efektor manipulátoru budou zahrnuty do příslušného odpovídajícího kinematického řetězce (resp. do silového/momentového působení na jeho koncový efektor).



Obrázek A.10.: Grafické znázornění výpočtu IDM (DDM) pro paralelní manipulátory

Obdobně, jako v případě po sériové manipulátory, je možné s pomocí IDM paralelního manipulátoru stanovit následně DDM paralelního manipulátoru (respektive příslušné členy $M(Q_a)$, $\tau'(Q_a, \dot{Q}_a)$ v rovnici (A.115)), viz Algoritmus A.4 (platný i pro výpočet DDM paralelních manipulátorů). Poznamenejme, že postup výpočtu IDM, DDM pro paralelní manipulátory lze zobecnit pro libovolné paralelní kinematické řetězce. Schématické znázornění výpočtu dynamických úloh pro paralelní manipulátory je ilustrováno na Obrázku A.10.

A.7. Singulární polohy v robotice

Singulární polohy manipulátorů jsou specifické polohy koncového efektoru, které významně ovlivňují jeho kinematické vlastnosti. Tuto skutečnost je třeba brát vždy v úvahu při syntéze, analýze i řízení manipulátorů.

A.7.1. Singulární polohy sériových manipulátorů

Připomeňme vztah mezi rychlostmi zobecněných a kloubových souřadnic:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (\text{A.129})$$

kde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ je vektor nezávislých zobecněných souřadnic a $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ je vektor kloubových souřadnic. Vzhledem k faktu, že uvažujeme neredundantní manipulátory, kde počet nezávislých aktuátorů n je roven počtu nezávislých zobecněných souřadnic m , platí $m = n$.

Singulární polohou sériového manipulátoru, tzv. *sériovou singulární polohou* rozumíme takovou polohu koncového efektoru, pro kterou jakobián $\mathbf{J}(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ ztrácí svou hodnotu, tedy $\text{Rank}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) = r < \min(m, n)$. Z principů lineární algebry, viz Kapitola A.4.1, lze tedy usuzovat, že dimenze prostoru $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = n - r$ je nenulová a existuje tedy nenulová rychlost kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{0}$, pro kterou se koncový efektor nemůže pohybovat $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$. Jinými slovy, manipulátor v této singulární poloze lokálně ztrácí právě $n - r$ DoF umožňující pohyb koncového efektoru. Počet DoF koncového efektoru manipulátoru v singulární poloze je tedy roven r , což je méně než požadovaných m DoF ($r < m$).

Další nepříjemnosti, které jsou standardně způsobeny pohybem manipulátoru v blízkosti singulárních poloh, lze pozorovat ze SVD rozkladu jakobiánu. Připomeňme, že platí následující rozklad (prvky matice \mathbf{J} jsou reálné):

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad (\text{A.130})$$

kde $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_i]$ resp. $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_i]$ jsou unitární matice¹⁹ po sloupcích složené z levých \mathbf{u}_i resp. pravých \mathbf{v}_i singulárních vektorů. Matice $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ je diagonální matice, na jejíž diagonále jsou seřazeny od největšího singulární čísla σ_i matice \mathbf{J} , $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$. Dále platí: $\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ resp. $\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$.

Soustředíme se nyní na problém IJK, tedy, jak vypočítat rychlost kloubových souřadnic ze známých rychlostí koncového efektoru. Inverzí vztahu (A.129) a využitím SVD rozkladu (A.130) dostáváme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{V} \cdot \text{diag}[\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}] \cdot \mathbf{U}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (\text{A.131})$$

Ze vztahu (A.131) je patrné, že v případě, že se robot pohybuje v blízkosti singulární polohy, platí $\sigma_n \rightarrow 0$ (pro singularity vyšších řádů navíc $\sigma_{n-1} \rightarrow 0$, $\sigma_{n-2} \rightarrow 0$, atd.), tedy $\sigma_n^{-1} \rightarrow +\infty$. Z uvedeného vyplývá, že rychlosti kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ mohou dosahovat vysokých hodnot (limitně nekonečna) pro velmi malé požadavky na rychlost koncového efektoru $\dot{\mathbf{X}}$. Tento problém v průmyslové praxi nastává poměrně často například u antropomorfního manipulátoru se sférickým zápěstím, kvůli singularitě právě ve sférickém zápěstí (zarovnání os prvního a třetího kloubu). Standardní řešení této situace je uskutečnění přeplánování požadovaného pohybu.

Analogický problém se projevuje pro přesnost polohování koncového efektoru manipulátoru, neboť platí:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \Delta \mathbf{Q} \quad (\text{A.132})$$

Tedy malé nepřesnosti v aktuátorech (nepřesnost regulace, vůle v zubech převodovek, atd.) vedou na vysoké polohové nepřesnosti aktuátoru.

Poznamenejme, že v případě neredundantních manipulátorů je jakobián $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ čtvercovou maticí a singulární polohy neredundantních manipulátorů lze vyšetřovat z podmínky $\det(\mathbf{J}) = 0$. Bohužel, ke stanovení relevantní vzdálenosti od singulární polohy, je výpočet determinantu jen stěží použitelný, neboť zde hrají významnou roli dílčí prvky jakobiánu, typicky první tři řádky mají rozměr m , zbývající tři potom rozměr *rad* (příspěvek rychlostí všech kloubových souřadnic do výsledné rotační/translační rychlosti koncového efektoru). Bez vhodného normování jakobiánu tedy nelze jednoznačně říci, jak moc jsme od singulární polohy vzdáleni. Z tohoto důvodu se často zavádí tzv. *index podmíněnosti* (*dexterity index*) jakobiánu μ , který je definován jako:

$$\mu = \frac{\sigma_n}{\sigma_1} \in \langle 0, 1 \rangle \quad (\text{A.133})$$

¹⁹Pro unitární matice platí: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$

kde σ_n resp. σ_1 je nejmenší resp. největší singulární číslo jakobiánu \mathbf{J} .

V případě redundantních sériových manipulátorů $m < n$ mluvíme o singulárních polohách opět v případě, kdy $\text{Rank}(\mathbf{J}) = r < \min(m, n)$, tedy $r < m$. Tzn. výsledný počet DoF koncového efektoru manipulátoru je opět roven r a koncový efektor tak ztrácí právě $m - r$ DoF. Jakobián $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n}$ redundantního manipulátoru nacházejícího se v singulární poloze má právě $m - r$ nulových singulárních čísel, viz SVD rozklad v Kapitole A.4.1.

Poznamenejme, že zatímco u neredundantních manipulátorů lze singulární poloha vyšetřovat z determinantu jakobiánu $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n}$ (jakobián je čtvercovou maticí $m = n$). Pro manipulátor v singulární poloze platí:

$$\det(\mathbf{J}) = 0 \quad (\text{A.134})$$

U redundantních manipulátorů, kde $m < n$ nelze determinant spočítat. Lze však s výhodou použít zákony lineární algebry, kde platí:

$$\sigma(\mathbf{J}) = \sqrt{\text{eig}(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (\text{A.135})$$

$$\prod_{i=1}^m \sigma_i = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (\text{A.136})$$

kde $\sigma(\star) = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_m]^T$ představují reálná nezáporná singulární čísla a $\text{eig}(\star) = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_m]^T$ vlastní čísla příslušné matice (komplexní).

V případě redundantních manipulátorů lze tak singulární polohu vyšetřovat ekvivalentně z rovnice:

$$\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = 0 \quad (\text{A.137})$$

A.7.2. Singulární polohy paralelních manipulátorů

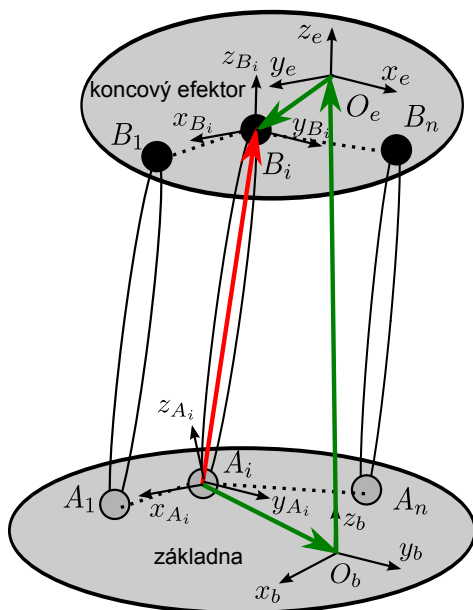
V případě singulárních poloh paralelních manipulátorů lze singularity dělit na dvě základní skupiny. *Paralelní singulární polohy* dané paralelní kinematickou strukturou manipulátoru a *sériové singulární polohy* dané sériovými kinematickými řetězci, které tvoří jednotlivá „ramena“ paralelního manipulátoru. Abychom mohli tyto singulární polohy jednoznačně definovat, zaměříme se nejprve na výpočet IGM právě pro paralelní manipulátory, zobecněním přístupu uvedeného v [125]. Předpokládejme paralelní manipulátor s n nezávislými sériovými kinematickými řetězci, viz Obrázek A.11. Poloha základny manipulátoru je jednoznačně určena s.s. F_b a poloha koncového efektoru pak s.s. F_e . Poloha a orientace i -tého kinematického řetězce $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$, tedy s.s. F_{B_i} vzhledem k s.s. F_{A_i} , je dána homogenní transformační maticí:

$$\mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X}) \triangleq \mathbf{T}_{B_i}^{A_i} = \left(\mathbf{T}_{A_i}^b\right)^{-1} \cdot \mathbf{T}_e^b \cdot \mathbf{T}_{B_i}^e, \quad \mathbf{T}_e^b = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_e^b & \mathbf{R}_e^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.138})$$

kde \mathbf{T}_e^b je daná poloha \mathbf{O}_e^b a orientace \mathbf{R}_e^b koncového efektoru vzhledem k s.s. základny F_b (známé zobecněné souřadnice \mathbf{X}), $\mathbf{T}_{A_i}^b$ je konstantní známá homogenní transformační matice definující polohu a orientaci základny, s.s. F_{A_i} , i -tého kinematického řetězce a $\mathbf{T}_{B_i}^e$ je konstantní známá homogenní transformační matice definující polohu a orientaci s.s. F_{B_i} , který určuje polohu a orientaci přípojného místa kinematického řetězce ke koncovému efektoru. Matice $\mathbf{T}_{B_i}^e$ a $\mathbf{T}_{A_i}^b$ jsou tedy jednoznačně určeny geometrií zkoumaného robotu a nezávislé na jeho kloubových/zobecněných souřadnicích.

DGM pro i -tý sériový kinematický řetězec s kloubovými souřadnicemi Q_i lze psát ve tvaru:

$$\mathbf{H}_2^{(i)}(Q_i) = \mathbf{T}_{B_i}^{A_i} \quad (\text{A.139})$$



Obrázek A.11.: Řešení IKÚ obecného paralelního manipulátoru (A_i resp B_i definují počátky s.s. přípojných bodů na základně resp. koncovém efektoru)

Zatímco struktura rovnice (A.138) je stejná pro všechny typy paralelních manipulátorů, struktura rovnice (A.139) závisí striktně na typu použitých sériových kinematických řetězců. IGM pro obecný paralelní manipulátor je pak dán řešením soustavy rovnic, porovnáním vztahu (A.138) a (A.139) dostáváme:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(1)}(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^{(n)}(\mathbf{X}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_1(\mathbf{X})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_2^{(1)}(Q_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_2^{(i)}(Q_i) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_2^{(n)}(Q_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_2(\mathbf{Q})} \quad (\text{A.140})$$

Poznamenejme, že funkce $\mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X})$ je v případě IGM paralelních manipulátorů známá (známe požadované zobecněné souřadnice \mathbf{X} a geometrické uspořádání přípojných bodů na základně a koncovém efektoru) a předpis funkce $\mathbf{H}_2^{(i)}(Q)$ může být stanoven analogicky jako v případě řešení DGM standardních sériových manipulátorů, tzn. prostým násobením homogenních transformačních matic plynoucích např. z popisu kinematiky sériových kinematických řetězců pomocí D-H úmluvy. Řešení IGM paralelních manipulátorů se tak v podstatě rozpadá na řešení IGM pro n sériových manipulátorů tvořící dílčí kinematické řetězce s hledanými kloubovými souřadnicemi Q_i (pasivními a aktivními).

Časovou derivací polohových vztahů (A.140) pak dostáváme vztah mezi rychlostmi kloubových a zobecněných souřadnic paralelního manipulátoru (IIK resp. DIK):

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}}_{\mathbf{J}^{-1}} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (\text{IIK}) \quad \text{resp.} \quad \dot{\mathbf{X}} = \underbrace{\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (\text{DIK}) \quad (\text{A.141})$$

kde \mathbf{B} resp. \mathbf{A} lze odvodit parciálními derivacemi funkcí $\mathbb{H}_1(\mathbf{X})$ dle složek \mathbf{X} resp. $\mathbb{H}_2(\mathbf{Q})$ dle složek \mathbf{Q} . Singulární polohy pro paralelní manipulátory lze tedy dělit na tři typy:

- Matice \mathbf{A} nemá plnou hodnost \Rightarrow *sériová singularita* (jakobián \mathbf{J} nemá plnou hodnost, $\text{Rank}(\mathbf{J}) < \min(m, n)$). Tento typ singularity koresponduje se sériovou singulární polohou sériových manipulátorů reprezentující nezávislé kinematické řetězce manipulátoru. Tedy v takovémto případě opět existuje nenulová rychlost kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{0}$ pro kterou se koncový efektor nemůže pohybovat $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ (manipulátor lokálně ztrácí své DoF). Tento typ singularity bývá často chybně zaměňován s hranicí pracovního prostoru manipulátoru, pro kterou platí to samé (obecně však sériová singularita na hranici pracovního prostoru nemusí nastávat).
- Matice \mathbf{B} nemá plnou hodnost \Rightarrow *paralelní singularita* (inverzní jakobián \mathbf{J}^{-1} nemá plnou hodnost, $\text{Rank}(\mathbf{J}^{-1}) < \min(m, n)$). V takovém případě existuje nenulová rychlost $\dot{\mathbf{X}} \neq \mathbf{0}$ koncového efektoru generující nulovou rychlost $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ aktivních kloubových souřadnic. Koncový efektor tedy získává tzv. neřiditelné stupně volnosti. V praxi je nezbytně nutné se okolí takových poloh vyvarovat, neboť manipulátor se v nich stává v podstatě neřiditelným. Navíc z kinetostatické duality vyplývá (odvozeno na základ principu virtuální práce, viz [95]), vztah mezi silami/momenty koncového efektoru a kloubových souřadnic:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.142})$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ reprezentuje síly/momenty aktuátorů a \mathbf{F} síly/momenty koncového efektoru.

V blízkosti singulární polohy tak (odvození pomocí SVD rozkladu analogické jako v Kapitole A.7.1) může docházet k vysokým požadavkům na síly/momenty $\boldsymbol{\tau}$ v aktuátorech (limitně nekonečné) pro malé požadavky na síly/momenty koncového efektoru.

- Matice \mathbf{A} ani \mathbf{B} nemá plnou hodnost. Nastávají oba typy singularit současně.

A.8. Energie manipulátoru

V optimalizačních algoritmech často usilujeme o návrhu takové konstrukce manipulátoru či jeho řízení, aby byla minimalizována celková energie potřebná k požadovanému pohybu koncového efektoru. Odpovídající formulaci kritéria můžeme odvodit následovně:

Diferenciální přírůstek dE mechanické energie lze definovat ze znalosti konstantního okamžitého výkonu P a diferenciálního přírůstku času dt jako:

$$dE = P \cdot dt \quad (\text{A.143})$$

Celkový okamžitý mechanický výkon n aktuátorů manipulátoru lze vypočítat ze znalosti sil/momentů τ_i působících v aktuátorech a rychlostí aktuátorů \dot{q}_i pro $i = 1 \dots n$ jako:

$$P = \tau_1 \cdot \dot{q}_1 + \tau_2 \cdot \dot{q}_2 + \dots + \tau_n \cdot \dot{q}_n = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (\text{A.144})$$

kde

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_n]^T, \quad \dot{\mathbf{Q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_n]^T$$

Výslednou mechanickou energii manipulátoru podél celé trajektorie pohybu v čase $t = t_0 \dots t_f$ lze tak stanovit z (A.143) a (A.144) jako:

$$E = \int_0^{t_f} dE = \int_0^{t_f} (\boldsymbol{\tau}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}}) dt = \int_0^{t_f} (\tau_1 \cdot \dot{q}_1 + \tau_2 \cdot \dot{q}_2 + \dots + \tau_n \cdot \dot{q}_n) dt \quad (\text{A.145})$$

Je zřejmé, že ve vztahu pro mechanickou energii (A.144) mohou jednotlivé prvky $\tau_i \cdot \dot{q}_i$ integrandu nabývat kladných i záporných hodnot, což je přirozený důsledek vlastností mechanické energie v mechanickém systému, kdy člen $\tau_i \cdot \dot{q}_i > 0$ odebírá výkon ze systému a naopak člen $\tau_i \cdot \dot{q}_i < 0$ dodává výkon do systému. Tato situace by však v technické praxi nastávala jen v případě, že by řídicí systém manipulátoru společně se svými akčními členy (aktuátory v jednotlivých kloubech) plně a bezztrátově využíval princip rekuperace, mohl tedy přijímat energii od pohybující se mechaniky manipulátoru a vracet ji zpět do napájení (např. do sítě). Přesto, že moderní servoměniče mohou částečně princip rekuperace využívat, nikdy tento proces nebude probíhat se stoprocentní účinností a vždy bude docházet k výkonovým ztrátám.

Vzhledem k tomu, že většina aktuátorů manipulátorů jsou realizovány elektrickými pohony, zaměříme se na *elektrickou* energii manipulátoru, která je potřebná k realizaci požadovaného pohybu koncového efektoru (možnost rekuperace neuvažujeme). Pro zjednodušení předpokládejme, že aktuátory manipulátoru jsou realizovány stejnosměrnými motory bez převodovek²⁰ s elektromechanickou konstantou k_i a moment τ_i na hřídeli motoru lze tedy určit přímo z hodnoty proudu I_i do vinutí rotoru.

$$\tau_i = k_i \cdot I_i, \quad k_i \geq 0 \quad (\text{A.146})$$

Celkový okamžitý zdánlivý²¹ elektrický výkon n aktuátorů manipulátoru lze tedy spočítat jako:

$$P = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + \dots + R_n \cdot I_n^2 = \frac{R_1}{k_1^2} \cdot \tau_1^2 + \frac{R_2}{k_2^2} \cdot \tau_2^2 + \dots + \frac{R_n}{k_n^2} \cdot \tau_n^2 \quad (\text{A.147})$$

kde R_i je odpor vinutí motoru.

Předpokládejme dále, že všechny aktuátory manipulátoru mají identické parametry, tzn. $R_i = R$, $k_i = k$. Výslednou elektrickou energii je tak možné stanovit pomocí (A.143) analogicky jako v předešlém případě s uvažování okamžitého zdánlivého elektrického výkonu (A.147):

$$E = \int_0^{t_f} dE = \frac{R}{k} \int_0^{t_f} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_n^2) dt = \frac{R}{k} \int_0^{t_f} (\boldsymbol{\tau}^T \cdot \boldsymbol{\tau}) dt, \quad \frac{R}{k} > 0 \quad (\text{A.148})$$

Ze vztahu (A.148) je tedy zřejmé, že optimalizací (minimalizací) kritéria

$$J = \int_0^{t_f} (\boldsymbol{\tau}^T \cdot \boldsymbol{\tau}) dt \quad (\text{A.149})$$

je optimalizována (minimalizována) celková (elektrická) energie potřebná k realizaci požadované trajektorie koncovým efektořem manipulátoru.

A.9. Zobecněná inverze matice

Zabývejme se nyní lineárním zobrazením a zdůrazněme některé jeho základní vlastnosti. Poznamenejme, že důkazy uvedených vlastností jsou jen nástin a jejich relevantní odvození lze nalézt v literatuře zabývající se lineární algebrou.

²⁰Poznamenejme že aktuátory typu \mathbf{P} jsou realizovány většinou rotačními motory s vhodným převodem. Případné převodovky svou účinností mohou pouze navyšovat potřebný výkon motoru, nicméně pro účely minimalizace celkové energie manipulátoru nehrají žádnou roli.

²¹Zdánlivý výkon nezohledňuje fázový posun mezi napětím a proudem na kotvě motoru, uvažujeme-li, že tento fázový posun je v pracovní oblasti motoru konstantní, lze předpokládat, že zdánlivý výkon bude přímo úměrný výkonu činnému.

Uvažujme soustavu lineárních rovnic ve tvaru:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.150})$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Cílem je nalézt řešení \mathbf{x} pro (obecné) známé \mathbf{y} a \mathbf{A} .

Hodnost r matice \mathbf{A} lze definovat jako dimenzi prostoru, který je generován řádky/sloupci matice \mathbf{A} (hodnost matice lze získat např. *Gaussovo eliminační metodou*):

$$r = \text{Rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n) \quad (\text{A.151})$$

Zavedme nyní tzv. zobecněnou inverzi \mathbf{A}^\dagger matice \mathbf{A} . Přesto, že lze nalézt více zobecněných inverzí [10], uvažujme dále nejrozšířenější případ, a to tzv. *Moore-Penrose pseudoinverzi*, která je definována následovně:

Moore-Penrose pseudoinverze matice \mathbf{A} je matice \mathbf{A}^\dagger , která vyhovuje řešení 4 maticových (nelineárních) rovnic:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\dagger &= \mathbf{A}^\dagger \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\dagger)^T &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\dagger \\ (\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A})^T &= \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A.152})$$

Jedním z možných algoritmů pro výpočet zobecněné inverze je využít singulární rozklad matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad (\text{A.153})$$

kde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m,m}$, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}_{m \times m}$ resp. $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{I}_{n \times n}$ jsou unitární matice jejichž sloupce tvoří levé resp. pravé singulární vektory a $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je matice singulárních čísel $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ ve tvaru:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.154})$$

kde $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{r,r} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ je diagonální matice se singulárními čísly na hlavní diagonále uspořádanými sestupně.

Formálním invertováním (A.153) získáváme *Moore-Penrose pseudoinverzi* ve výpočetním tvaru jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{U}[:, 1:r] \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}[:, 1:r]^T \\ \mathbf{A}^\dagger &= (\mathbf{U}[:, 1:r] \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}[:, 1:r]^T)^{-1} = \mathbf{V}[:, 1:r] \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{U}[:, 1:r]^T \end{aligned} \quad (\text{A.155})$$

Lze ověřit, že vztah (A.155) pro výpočet pseudoinverze vyhovuje soustavě rovnic (A.152).

Pro soustavu rovnic $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ obecně platí, že:

- Existuje právě 1 řešení, pokud: $\text{Rank}(\mathbf{A}) = \text{Rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = n$ (soustava je konzistentní)
Pro pseudoinverzi $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{y}$ platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{y}$
- Existuje nekonečně mnoho řešení, pokud: $\text{Rank}(\mathbf{A}) = \text{Rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) < n$ (soustava je konzistentní)
Pro pseudoinverzi $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{y}$ platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{y}$ a zároveň $\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}}{\text{argmin}} \|\mathbf{x}\|$

- Neexistuje žádné řešení, pokud: $\text{Rank}(\mathbf{A}) \neq \text{Rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$
(soustava není konzistentní)
Pro pseudoinverzi $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{y}$ platí: $\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}}{\text{argmin}} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

kde $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ je rozšířená matice soustavy.

Poznamenejme, že v případě, že má matice \mathbf{A} plnou hodnotu, tzn. $\text{Rank}(\mathbf{A}) = \min(m, n)$, výpočetní tvar pseudoinverze \mathbf{A}^\dagger odpovídá zápisům:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\dagger &= (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T & \text{pro: } m > n \\ \mathbf{A}^\dagger &= \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} & \text{pro: } m < n \end{aligned}$$

A.10. Možné principy řešení úlohy optimálního řízení

V této kapitole shrňme základní přístupy k problému optimálního řízení. Přesto, že se jedná o známé principy v literatuře často citované, jsou zde stručně uvedeny jejich základní vlastnosti a nástin důkazů, na kterých jsou založeny vlastní přínosy k řízení redundantních manipulátorů v Kapitole 3.4.2.

A.10.1. Dynamické programování (Bellmanova optimalizační rekurze)

Bellmanova optimalizační rekurze je jedním z nástrojů, kterými lze řešit úlohy dynamického programování. Bellmanovu optimalizační rekurzi můžeme formulovat následovně.

Uvažujme diskrétní²² obecně nelineární dynamický systém ve tvaru:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \quad (\text{A.156})$$

kde $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^n$ je stav, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ je řízení v diskrétním časovém okamžiku $t_k = k \cdot T_s$, kde T_s je perioda vzorkování, a $\mathbf{f}_k(\star)$ je časově variantní funkce vývoje stavu dynamického systému.

Kritérium J zohledňující hodnoty váhové funkce $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \geq 0$ v časovém okamžiku t_k podél celé trajektorie systému $k = 0, 1, \dots, N-1$, včetně hodnocení koncového stavu $\Phi(\mathbf{q}_N)$ (řízení \mathbf{u}_N již neexistuje), je dáno jako:

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) = \left[\Phi(\mathbf{q}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \right]_{\text{p.t.s.}} \quad (\text{A.157})$$

kde \mathbf{q}_0 označuje počáteční stav systému a $[\star]_{\text{p.t.s.}}$ (podél trajektorie systému) označuje zachování podmínky, že stav a řízení jsou vzájemně vázané stavovou rovnicí (A.156).

Cílem optimalizace je nalézt takovou optimální posloupnost strategií řízení \mathbf{s}_0^{N-1} , která generuje posloupnost řízení $\mathbf{u}_0^{N-1} = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}]$ splňující podmínku:

$$\mathbf{u}_0^{N-1} = \mathbf{s}_0^{N-1}(\mathbf{q}_k) = \underset{\mathbf{u}_0^{N-1}}{\text{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) \right) = \underset{\mathbf{u}_0^{N-1}}{\text{argmin}} \left[\Phi(\mathbf{q}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \right]_{\text{p.t.s.}} \quad (\text{A.158})$$

Poznamenejme, že cílem optimalizace není nalezení jedné konkrétní posloupnosti řízení \mathbf{u}_0^{N-1} , ale celé strategie řízení, kterou lze obecně použít v libovolném stavu systému a

²²Poznamenejme, že lze formulovat i alternativu Bellmanovy optimalizační rekurze ve spojitém čase - tzv. *Kontinualizace Bellmanovy optimalizační rekurze*.

simulačním čase. Takovou strategií můžeme rozumět například funkci, která pro každý daný stav z množiny přípustných stavů $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^n$ a čas t_k definuje optimální hodnotu řízení \mathbf{u}_k .

Princip optimality zde spočívá v definici koncového úseku trajektorie, pro čas $t = t_k, t_{k+1}, \dots, t_N$, pro nějž lze hodnotu kritériální funkce J lze vyjádřit jako:

$$J_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k^{N-1}) = \left[\Phi(\mathbf{q}_N) + \sum_{l=k}^{N-1} g_l(\mathbf{q}_l, \mathbf{u}_l) \right]_{\text{p.t.s.}} \quad (\text{A.159})$$

Je zřejmé, že koncovou část kritéria optimality (A.159) lze rekurzivně psát jako:

$$J_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k^{N-1}) = \left[g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1}(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}^{N-1}) \right]_{\text{p.t.s.}} \quad (\text{A.160})$$

Předpokládejme nyní, že známe optimální strategii \mathbf{s}_0^{*N-1} , která generuje optimální posloupnost řízení \mathbf{u}_0^{*N-1} a rozdělme uměle trajektorie v aktuálním čase t_k na dvě části reprezentující minulost a budoucnost, tedy kritérium (A.157) lze s využitím definice koncové části kritéria (A.159) psát jako:

$$\begin{aligned} J_0(\mathbf{q}_0^*, \mathbf{u}_0^{*N-1}) &= \left[\underbrace{\Phi(\mathbf{q}_N^*) + \sum_{l=k}^{N-1} g_l(\mathbf{q}_l^*, \mathbf{u}_l^*)}_{J_k(\mathbf{q}_k^*, \mathbf{u}_k^{*N-1})} + \sum_{l=0}^{k-1} g_l(\mathbf{q}_l^*, \mathbf{u}_l^*) \right]_{\text{p.t.s.}} = \\ &= \left[J_k(\mathbf{q}_k^*, \mathbf{u}_k^{*N-1}) + \sum_{l=0}^{k-1} g_l(\mathbf{q}_l^*, \mathbf{u}_l^*) \right]_{\text{p.t.s.}} \end{aligned} \quad (\text{A.161})$$

Tedy nutně platí, že každý koncový úsek optimální trajektorie je optimálním koncovým úsekem trajektorie. Nalezením optimálního koncového úseku trajektorie tedy získáváme koncový úsek výsledné optimální trajektorie. Bellmanova funkce $V(\mathbf{q}_k)$ je definována jako minimální hodnota kritéria koncového úseku trajektorie (tedy optimální koncový úsek trajektorie, který lze získat optimálním řízením \mathbf{u}_k^{*N-1} z daného stavu \mathbf{q}_k v čase t_k), tedy:

$$V_k(\mathbf{q}_k) = \min_{\mathbf{u}_k^{N-1}} \left(J_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k^{N-1}) \right) \quad (\text{A.162})$$

Dosazením rekurzivního vztahu (A.160) pro výpočet hodnoty kritéria na koncovém úseku trajektorie $J_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k^{N-1})$ do Bellmanovy funkce (A.162) dostáváme předpis pro Bellmanovu optimalizační rekuzi:

$$\begin{aligned} V_k(\mathbf{q}_k) &= \min_{\mathbf{u}_k^{N-1}} \left[g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1}(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}^{N-1}) \right]_{\text{p.t.s.}} = \\ &= \min_{\mathbf{u}_k} \left[g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) + \underbrace{\min_{\mathbf{u}_{k+1}^{N-1}} \left(J_{k+1}(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}^{N-1}) \right)}_{V_{k+1}(\mathbf{q}_{k+1}) = V_{k+1}(\mathbf{f}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k))} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.163})$$

Bellmanova optimalizační rekuzi je tedy zpětná rekuzi, která udává optimální hodnotu koncového úseku kritéria z daného stavu \mathbf{q}_k v čase t_k :

$$V_k(\mathbf{q}_k) = \min_{\mathbf{u}_k} [g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) + V_{k+1}(\mathbf{f}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k))], \quad k = N-1, N-2, \dots, 0 \quad (\text{A.164})$$

Hledáme-li tedy optimální řízení \mathbf{u}_k^* (respektive jeho předpis $\mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$) v čase t_k , hledáme takové řízení, \mathbf{u}_k jehož prostřednictvím se transformuje stav systému \mathbf{q}_k do stavu \mathbf{q}_{k+1} tak, aby byla nalezena minimální hodnota součtu váhové funkce $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$ (okamžitý důsledek současného stavu a řízení v čase t_k) a minimální hodnoty kritéria koncového úseku trajektorie $V_{k+1}(\mathbf{q}_{k+1})$ (hodnoty Bellmanovy funkce) z nového stavu \mathbf{q}_{k+1} . Získáváme tedy Bellmanovu funkci $V_k(\mathbf{q}_k)$ v čase t_k udávající minimální hodnotou kritéria koncového úseku trajektorie ze stavu \mathbf{q}_k .

Z uvedeného je zřejmé, že výsledná zpětná Bellmanova optimalizační rekurze je formulována pro známé funkce $g(\star)$ (váhová funkce), $\Phi(\star)$ (hodnocení koncového stavu), $f(\star)$ (stavová funkce dynamického modelu) následovně:

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k) = \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmin}} [g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) + V_{k+1}(\mathbf{f}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k))], \quad k = N - 1, N - 2, \dots, 0 \quad (\text{A.165})$$

kde koncová podmínka (hodnocení koncového stavu):

$$V_N(\mathbf{q}_N) = J_N(\mathbf{q}_N) = \Phi(\mathbf{q}_N)$$

Optimální (minimální) hodnota kritéria $J^*(\mathbf{q}_0)$ z počátečního stavu \mathbf{q}_0 (hodnota kritéria podél optimální trajektorie určené posloupností optimálního řízení \mathbf{u}_0^{*N-1} z počátečního stavu \mathbf{q}_0) je tedy zřejmě dána jako hodnota Bellmanovy funkce $V_0(\mathbf{q}_0)$:

$$J^*(\mathbf{q}_0) = J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{*N-1}) = V_0(\mathbf{q}_0) \quad (\text{A.166})$$

Metody řešení úlohy dynamického programování

Vzhledem k použití metody dynamického programování se za účelem optimalizace pohybu redundantních manipulátorů, viz Kapitola 3.4.2, omezme na případ lineárního diskrétního dynamického systému a obecně nelineární váhovou funkci, tedy úlohu optimálního řízení ve tvaru:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k \quad (\text{A.167})$$

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k) = \underset{\mathbf{u}_0^{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) \right) = \underset{\mathbf{u}_0^{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left[\Phi(\mathbf{q}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \right]_{\text{p.t.s.}} \quad (\text{A.168})$$

Bohužel, v případě optimalizace pohybu redundantního manipulátoru, viz Kapitola 3.4.2, se situace výrazně komplikuje, neboť váhová funkce $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$ a funkce hodnotící koncový stav $\Phi(\mathbf{q}_N)$ jsou v obou uvažovaných případech, tedy pro optimalizaci rychlostí (3.206) a sil/momentů aktuátorů manipulátoru (3.209), velmi komplikované nelineární funkce²³. Nalezení strategie optimálního řízení $\mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$ by spočívalo v postupném řešení rovnic Bellmanovy optimalizační rekurze (A.165) a výpočtu Bellmanovy funkce (A.164):

- Pro $k = N - 1 \Rightarrow \mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$:

$$\mathbf{u}_{N-1}^* = \mathbf{s}_{N-1}(\mathbf{q}_{N-1}) = \underset{\mathbf{u}_{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left[g_{N-1}(\mathbf{q}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + \overbrace{g_N(\underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-1}}_{\mathbf{q}_N}, \underbrace{\mathbf{0}}_{\mathbf{u}_N=0})}_{\Phi(\mathbf{q}_N)=V_N(\mathbf{q}_N)} \right]$$

$$V_{N-1}(\mathbf{q}_{N-1}) = g_{N-1}(\mathbf{q}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}^*) + g_N(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-1}^*, \mathbf{0}) \quad (\text{A.169})$$

²³Hodnocení koncového stavu $\Phi(\mathbf{q}_N)$ je v případě optimalizace rychlostí (3.206) i sil/momentů (3.209) dáno hodnotou váhové funkce $\Phi(\mathbf{q}_N) = g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$ pro $k = N$ a $\mathbf{u}_N = \mathbf{0}$.

- Pro $k = N - 2 \Rightarrow \mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$:

$$\mathbf{u}_{N-2}^* = \mathbf{s}_{N-2}(\mathbf{q}_{N-2}) = \underset{\mathbf{u}_{N-2}}{\operatorname{argmin}} \left[g_{N-2}(\mathbf{q}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2}) + V_{N-1}(\underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-2} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-2}}_{\mathbf{q}_{N-1}}) \right]$$

$$V_{N-2}(\mathbf{q}_{N-2}) = g_{N-2}(\mathbf{q}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2}^*) + V_{N-1}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-2} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-2}^*) \quad (\text{A.170})$$

- Pro $k = N - 3 \Rightarrow \mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$:

$$\mathbf{u}_{N-3}^* = \mathbf{s}_{N-3}(\mathbf{q}_{N-3}) = \underset{\mathbf{u}_{N-3}}{\operatorname{argmin}} \left[g_{N-3}(\mathbf{q}_{N-3}, \mathbf{u}_{N-3}) + V_{N-2}(\underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-3} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-3}}_{\mathbf{q}_{N-2}}) \right]$$

$$V_{N-3}(\mathbf{q}_{N-3}) = g_{N-3}(\mathbf{q}_{N-3}, \mathbf{u}_{N-3}^*) + V_{N-2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-3} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-3}^*) \quad (\text{A.171})$$

⋮

Z nastíněné zpětné rekurse je zřejmé, že pro výpočet optimální strategie $\mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$ v čase t_k je nutné řešit rovnici typu $\mathbf{u}_k^* = \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmin}}[\star]$, kde příslušný argument \star závisí na aktuálním řízení \mathbf{u}_k , stavu \mathbf{q}_k a předpisu Bellmanovy funkce $V_{k+1}, V_{k+2}, \dots, V_N$. Tedy, s ohledem na složité předpisy pro váhové funkce $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$, není dokonce reálně možné tyto rovnice ani formulovat v nějakém „rozumném“ kompaktním tvaru, přirozeně tak nelze ani nalézt jejich analytické řešení. V uvedené podobě tedy optimalizační úlohu založenou na Bellmanově rekursi nelze uspokojivě vyřešit. Poznamenejme, že úlohu dynamického programování založeného na Bellmanově optimalizační rekursi lze uspokojivě řešit pouze v případě, kdy lze odhadnout tvar Bellmanovy funkce, např. v případě standardní LQ úlohy, tak jak je nastíněno v Poznámce A.5.

Rekuzivní numerický výpočet optimálního řízení založené na zpětné Bellmanově optimalizační rekursi

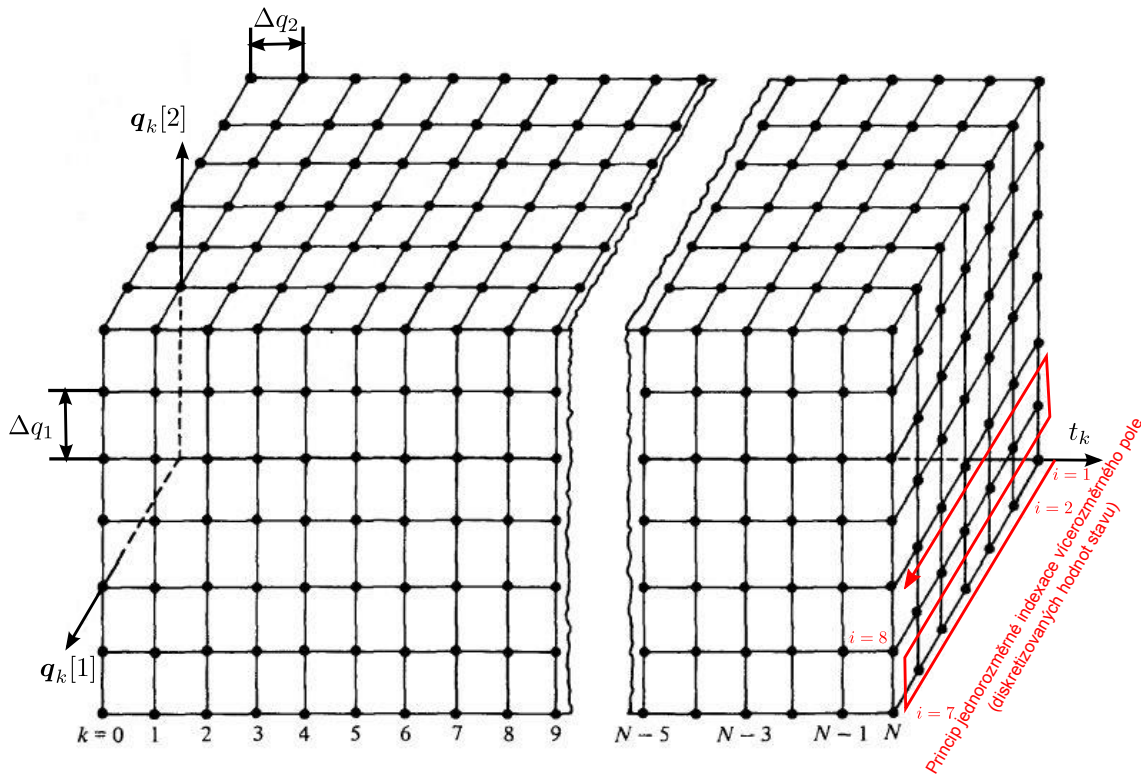
Komplikace, které vznikají při pokusech analyticky řešit výše definovanou optimalizační úlohu formulovanou prostřednictvím Bellmanovy optimalizační rekurse, lze částečně obejít nalezením zpětného rekuzivního numerického algoritmu, který je definován nad konečným diskretizovaným stavovým prostorem a prostorem přípustných akčních zásahů. Řešení optimalizační úlohy se v takovém případě redukuje na prohledávání diskretizovaného stavového prostoru $\mathbf{q}_k \in \mathbb{Q}$, kde přechody mezi dílčími stavy jsou realizovány omezeným diskretizovaným řízením $\mathbf{u}_k \in \mathbb{U}$:

$$\mathbf{q}_k[i] \in \mathbb{Q}_i = \{q_i : q_i = q_i^{\min} + \underbrace{\frac{q_i^{\max} - q_i^{\min}}{N_{q_i} - 1}}_{\Delta q_i} \cdot (n - 1), n = 1, \dots, N_{q_i}\}$$

$$\mathbf{u}_k[i] \in \mathbb{U}_i = \{u_i : u_i = u_i^{\min} + \underbrace{\frac{u_i^{\max} - u_i^{\min}}{N_{u_i} - 1}}_{\Delta u_i} \cdot (n - 1), n = 1, \dots, N_{u_i}\} \quad (\text{A.172})$$

kde i -tá složka vektoru stavu $\mathbf{q}_k[i]$ resp. řízení $\mathbf{u}_k[i]$ v čase t_k nabývá konečných hodnot z množiny $\mathbb{Q}_i \subset \mathbb{Q}$ resp. $\mathbb{U}_i \subset \mathbb{U}$, kde q_i^{\min}, q_i^{\max} resp. u_i^{\min}, u_i^{\max} jsou minimální a maximální

přípustné hodnoty složek stavu a řízení a N_{q_i} resp. N_{u_i} je počet diskretních hodnot i -tého stavu resp. řízení. Celkový počet přípustných diskretních hodnot stavového prostoru resp. prostoru řízení v každém časovém okamžiku je tedy $N_q = N_{q_1} \cdot N_{q_2} \cdot \dots \cdot N_{q_n}$ resp. $N_u = N_{u_1} \cdot N_{u_2} \cdot \dots \cdot N_{u_m}$. Stavový prostor pro $n = 2$ je znázorněn na Obrázku A.12 (prostor řízení bude analogický).



Obrázek A.12.: Diskretizovaný stavový prostor v diskretních časových okamžicích pro stav \mathbf{q}_k .

Diskretizované hodnoty stavu \mathbf{q}_k resp. \mathbf{u}_k v čase t_k lze tedy indexovat jednorozměrným indexem i resp. j jako²⁴:

$$\mathbf{q}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k[1] \in \mathbb{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_k[n] \in \mathbb{Q}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}, \quad i = 1, 2, \dots, N_q$$

$$\mathbf{u}_k^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k[1] \in \mathbb{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k[m] \in \mathbb{U}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{U}, \quad j = 1, 2, \dots, N_u$$
(A.173)

Algoritmus založený na prohledávání diskretizovaného stavového prostoru dle předpisu Belmanovy optimalizační rekurze umožňuje řešit dříve zmíněné rekurzivní rovnice (A.169 - A.171) následovně:

◆ **Algoritmus A.5 (Optimalizační rekurze - rekurzivní algoritmus)**

Algoritmus využívá zpětné rekurze v čase t_k , $k = N - 1, N - 2, \dots, 1$. Pro každý čas t_k a diskretizovaný stav $\mathbf{q}_k \in \mathbb{Q}$ algoritmus hledá takové řízení $\mathbf{u}_k \in \mathbb{U}$ z množiny diskretizova-

²⁴Jednorozměrně indexované vícerozměrné pole, viz Obrázek A.12, tedy transformace $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Např.: $[1, 1] \rightarrow 1, [1, 2] \rightarrow 2, [2, 2] \rightarrow 3, [2, 1] \rightarrow 4$.

vaných přípustných řešení, aby byla splněna podmínka optimality (A.165):

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k) = \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmin}} \left[\underbrace{g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) + V_{k+1}(\underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k}_{\mathbf{q}_{k+1}})}_{J_{k+1}^*(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}^{N-1})} \right] \quad (\text{A.174})$$

$$k = N - 1, N - 2, \dots, 0$$

$$V_N(\mathbf{q}_N) = J_N(\mathbf{q}_N) = \Phi(\mathbf{q}_N)$$

Podmínku optimality lze přeformulovat pro rostoucí hodnoty indexu k a diskretizované hodnoty stavu a řízení následovně:

$$\mathbf{u}_{N-k}^* = \underset{\mathbf{u}_{N-k}}{\operatorname{argmin}} \left[g_{N-k}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) + J_{N-k+1}^* \left(\underbrace{\mathbf{q}_{N-k+1}^{(i,j)}}_{=\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-k}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}}, \mathbf{u}_{N-k+1}^{*N-1} \right) \right], \quad (\text{A.175})$$

$$k = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$V_N(\mathbf{q}_N) = J_N(\mathbf{q}_N) = \Phi(\mathbf{q}_N)$$

Je zřejmé, že argument:

$$C_{N-k,N}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) = g_{N-k}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) + J_{N-k+1}^*(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-k}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}, \mathbf{u}_{N-k+1}^{*N-1}) \quad (\text{A.176})$$

je kandidátem na Bellmanovu funkci ve stavu $\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}$ (hledané řízení je $\mathbf{u}_{N-k}^{(j)}$). Člen $J_{N-k+1}^*(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-k}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}, \mathbf{u}_{N-k+1}^{*N-1})$ vyjadřující optimální hodnotu kritéria od času $N - k + 1$ do času $N - 1$ a je závislý na stavu a řízení v čase $N - k$ a známé optimální strategii řízení koncového úseku optimální trajektorie $\mathbf{u}_{N-k+1}^{*N-1}$, tedy lze formálně přeznačit jako:

$$J_{N-k+1}^*(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-k}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}, \mathbf{u}_{N-k+1}^{*N-1}) = J_{N-k+1,N}^*(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-k}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) \quad (\text{A.177})$$

Kandidát na Bellmanovu funkci v čase $N - k$ lze tedy výsledně psát jako:

$$C_{N-k,N}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) = g_{N-k}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) + J_{N-k+1,N}^*(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-k}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) \quad (\text{A.178})$$

kde pro $k = 1$ (koncový bod trajektorie) platí (hodnocení koncového stavu):

$$J_{N,N}^*(\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-1}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-1}^{(j)}) = J_{N,N}^*(\mathbf{q}_N^{(i,j)}) = \Phi(\mathbf{q}_N^{(i,j)})$$

Rekurzivní algoritmus hledání optimální strategie řízení lze tedy prostřednictvím kandidáta na Bellmanovu funkci (A.178) hledat následovně:

1. Ohodnocení všech přípustných diskretizovaných koncových stavů:

$$J_{N,N}^*(\mathbf{q}_N^{(i)}) = \Phi(\mathbf{q}_N^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, N_q$$

2. $k = 1$ (čas), $i = 1$ (diskretizovaný stav)

- V diskretizovaném stavu $\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}$ aplikuj všechna přípustná řízení $\mathbf{u}_{N-k}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N_u$ a vypočítej N_u kandidátů na Bellmanovu funkci v tomto stavu (pro $k = 1$: $J_{N,N}^*(\mathbf{q}_N^{(i)}) = \Phi(\mathbf{q}_N^{(i)})$):

$$C_{N-k,N}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) = g_{N-k}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) + J_{N-k+1,N}^*(\mathbf{q}_{N-k+1}^{(i,j)})$$

kde $\mathbf{q}_{N-k+1}^{(i,j)} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-k}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}$

- Poznamenejme, že hodnoty $J_{N-k+1,N}^*(\mathbf{q}_{N-k+1}^{(i,j)})$ jsou známé pouze v diskretizovaných bodech stavů (mřížce). Hodnota následujícího stavu $\mathbf{q}_{N-k+1}^{(i,j)} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{N-k}^{(i)} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}$ nemusí nutně spadnout (a obecně nespadne) přesně do těchto diskretizovaných hodnot. V takovém případě je nutné využít interpolaci (lineární) a hodnotu $J_{N-k+1,N}^*(\mathbf{q}_{N-k+1}^{(i,j)})$ v novém stavu získat aproximačně²⁵, viz Obrázek A.14.
- Z vypočtených hodnot kandidátů na Bellmanovu funkci $C_{N-k,N}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)})$ pro všechny přípustná řízení $\mathbf{u}_{N-k}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N_u$ najdeme minimum. Získáváme tedy hodnotu Bellmanovy funkce $V_{N-k}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)})$ ve stavu $\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}$ a hodnotu optimálního řízení \mathbf{u}_{N-k}^* :

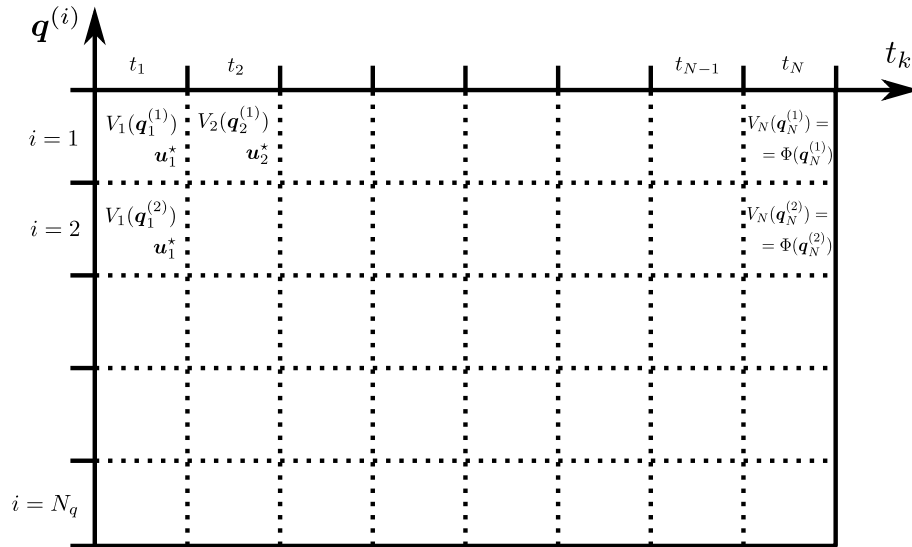
$$V_{N-k}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}) = \min_{\mathbf{u}_{N-k}^{(j)} \in \mathbb{U}} \left(C_{N-k,N}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) \right)$$

$$\mathbf{u}_{N-k}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}_{N-k}^{(j)} \in \mathbb{U}} \left(C_{N-k,N}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}, \mathbf{u}_{N-k}^{(j)}) \right)$$

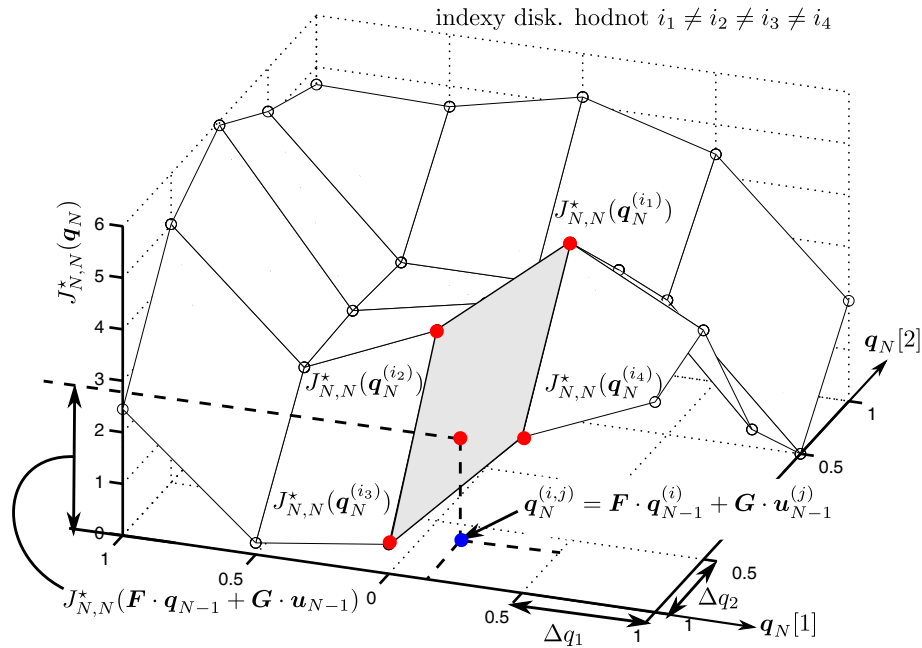
3. Analogicky vypočteme hodnotu Bellmanovy funkce $V_{N-k}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)})$ a hodnotu optimálního řízení $\mathbf{u}_{N-k}^{(j)}$ pro všechny ostatní diskretizované stavy $\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N_q$ v témže čase t_{N-k} .
4. Výpočet postupně opakujeme pro všechny diskrétní časové okamžiky t_{N-k} , $k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Jako výsledek rekurzivního algoritmu dostáváme hodnoty Bellmanovy funkce $V_{N-k}(\mathbf{q}_{N-k}^{(i)})$ a optimálního řízení \mathbf{u}_{N-k} jako **pole číselných hodnot (tabulku, „lookup table“)**, viz Obrázek A.13, pro všechny diskrétní časové okamžiky t_{N-k} , $k = 1, 2, \dots, N - 1$ a pro všechny přípustné diskretizované stavy $\mathbf{q}_{N-k}^{(i)}$.

²⁵V Matlabu např. pomocí příkazu `interp`.



Obrázek A.13.: Lookup table: Tabulka číselných hodnot optimální hodnoty kritéria (Bellmanovy funkce) a optimální řízení pro každý diskretizovaný stav a čas jako výsledek rekurzivního algoritmu Bellmanovy optimalizační rekurze.



Obrázek A.14.: Ukázka interpolace hodnoty kritéria $J_{N,N}^*(q_N^{(i,j)})$ v novém stavu $q_N^{(i,j)} = F \cdot q_{N-1}^{(i)} + G \cdot u_{N-1}^{(j)}$ z jeho známých hodnot $J_{N,N}^*(q_N^{(i)})$ v diskretizovaných stavech (v čase t_{N-k} , $k = 1$).

Vlastní výpočet optimálního řízení je s vypočtenou lookup tabulkou, viz Obrázek A.13, realizován následovně:

1. Zvol počáteční stav q_k , $k = 1$.
2. Z lookup tabulky odečti optimální hodnotu řízení u_k^* pro stav q_k . V případě že stav q_k neodpovídá přímo diskretizovaným hodnotám $q_k^{(i)}$, použij pro výpočet optimálního řízení interpolaci (analogicky, jako na Obrázku A.14).

3. Vypočti nový stav dle dynamických rovnic systému (matice \mathbf{F} , \mathbf{G})

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k^*$$

$k = k + 1$ a pokračuj na bod 2.



Vlastnosti rekurzivního algoritmu řešení Bellmanovy optimalizační rekurze:

Diskutujeme některé základní vlastnosti nalezeného Algoritmu A.5.

- Algoritmus nalezne řešení v omezeném stavovém prostoru, diskretizovaná přípustná řízení jsou omezená.
- Optimální trajektorie a řízení je exaktně platná pouze v bodech diskretizace, interpolace zanáší do algoritmu chybu.
- Přesto, že se nejedná o výpočet hrubou silou, pro vysokou dimenzi stavového prostoru vyžaduje algoritmus relativně velký výpočetní čas.
- Některé řízení je nepřípustné v daném stavu vzhledem k omezenosti stavového prostoru. V případě příliš hrubé diskretizace a přísného omezení stavů a řízení se zvyšuje pravděpodobnost, že nebude možné nalézt přípustné řízení z diskretizovaných stavů na počátku trajektorie (zřejmě způsobeno hledáním optimálního řešení od koncového času do počátku). Jinými slovy, pro stavy blízké počátečnímu času nebude existovat přípustné řízení, které by převedlo dynamický model do přípustných stavů (omezeného stavového prostoru) v následujících časových okamžicích. Řešením je rozšíření omezení stavového prostoru a prostoru přípustných řízení a zjemnění diskretizace, bohužel toto vede na výrazný nárůst výpočetní náročnosti (především pro dynamické modely vysokých dimenzí).
- + V porovnání s hrubou silou je počet operací pro vyčíslení lookup tabulky optimálního řešení výrazně redukován.

Předpokládejme dynamický systém s jedním stavem $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^1$, diskretizací stavu na 10 hodnot ($N_q = 10$) a diskretizací řízení na 4 hodnoty ($N_u = 4$). Uvažujme N diskretizovaných hodnot času t_k , $k = 1, 2, \dots, N$. V případě prohledávání trajektorie hrubou silou je v čase $k = 1$ aplikováno přípustné řízení na všechny stavy \Rightarrow dostáváme tedy $4 \cdot 10 = 40$ nových stavů v čase $k = 2$. Opět aplikujeme na všechny tyto stavy přípustné řízení a dostáváme $4 \cdot 40 = 160$ nových stavů v čase $k = 3$, celkem je tedy třeba $40 + 160 = 200$ výpočetních operací (výpočet stavu dle dynamického modelu (matice \mathbf{F} , \mathbf{G}) a vyčíslení váhové funkce $g(\star)$ - pro postupné vyčíslování hodnoty kritéria podél trajektorie $J(\star)$). Je zřejmé, že pro následující časy bude zapotřebí $k = 4$: 840, $k = 5$: 3400, ... operací. Celkem je tedy potřeba právě $\sum_{k=1}^{(N-1)} 10 \cdot 4^k$ operací (**exponenciální nárůst počtu operací**). Zpětně je pak rekonstruována optimální trajektorie a řízení (vykazující minimální hodnotu kritéria $J(\star)$ v koncovém čase).

V případě řešení úlohy rekurzivním algoritmem je optimální trajektorie hledána od konce k počátku času v každém čase t_{N-k} , $k = 1, 2, \dots, N-1$ a v každém diskretním čase je nutno aplikovat všechny přípustná řízení na všechny diskretizované stavy, tzn. pro každé k dostáváme $4 \cdot 10 = 40$ operací, celkem tedy $40 \cdot (N-1)$ operací (**lineární nárůst počtu operací**).

Obecně lze tak předpisy pro výsledný počet operací psát jako:

$$\text{Dopředný alg. (hrubá síla): } N_{\text{alg}} = \sum_{k=1}^{N-1} N_q \cdot N_u^k \quad (\text{A.179})$$

$$\text{Rekurzivní alg. (Bellman. opt. rek.): } N_{\text{alg}} = N_q \cdot N_u \cdot (N-1)$$

- + Stavový prostor a přípustné řízení je nativně algoritmem omezeno.
- + Algoritmus má globální platnost (s přihlédnutím na rozlišení diskretizace, omezení stavového prostoru a řízení).
- + Algoritmus je výpočetně (numericky) stabilní.
- + Implementace algoritmu je snadná, lze využít přístupy paralelizace výpočtu.
- + Často je algoritmus používán jako „etalon“ pro ověření jiných algoritmů řešící úlohu optimálního řízení.
- + Vypočtená lookup tabulka umožňuje nalézt optimální řízení z libovolného (v rámci daného omezení) počátečního stavu.

Za účelem ověření Algoritmu A.5 bylo v následujícím příkladu porovnáno nalezené optimální řešení se známým analytickým řešením LQ úlohy, viz Poznámka A.5.

★ **Příklad A.2 (Ověření rekurzivního alg. - LQ úloha)**

Optimalizační úlohu formulujeme analogicky jako v Poznámce A.5 pro dynamický systém druhého řádu s jedním vstupem a periodou $T_s = 0.02s$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

se zvolenou časově invariantní váhovou funkcí a hodnocením koncového stavu jako:

$$g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) = \mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{u}_k^T \cdot \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_k = [1]$$

$$\Phi_N(\mathbf{q}_N) = \mathbf{q}_N^T \cdot \mathbf{Q}_N \cdot \mathbf{q}_N$$

Omezení a rozlišení diskretizace přípustných hodnot stavů a řízení bylo zvoleno jako:

Diskretizace stavu a řízení s velkým rozlišením:

$$N_{q_i} = 50 \Rightarrow N_q = 2500, \quad q_i^{\min} = -2, \quad q_i^{\max} = 2, \quad i = 1, 2$$

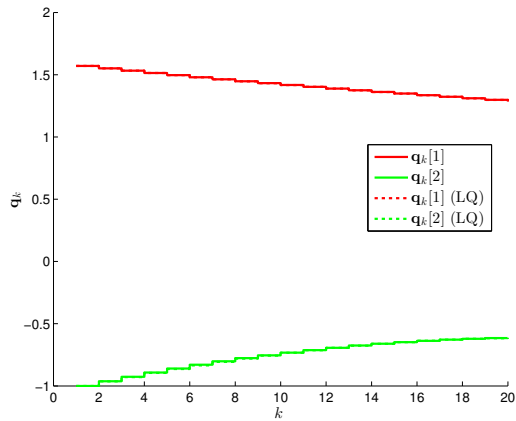
$$N_{u_1} = 50 \Rightarrow N_u = 50 \quad u_1^{\min} = -5, \quad u_1^{\max} = 5$$

Diskretizace stavu a řízení s malým rozlišením:

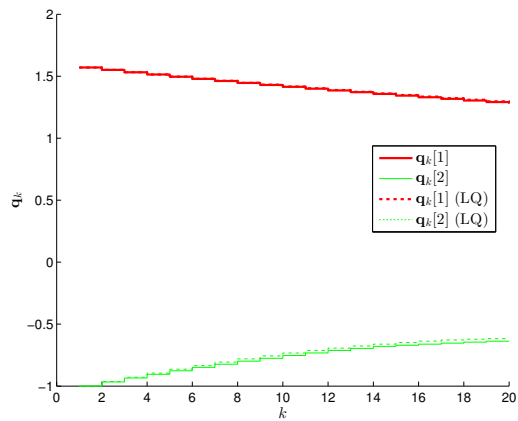
$$N_{q_i} = 20 \Rightarrow N_q = 400, \quad q_i^{\min} = -2, \quad q_i^{\max} = 2, \quad i = 1, 2$$

$$N_{u_1} = 20 \Rightarrow N_u = 20 \quad u_1^{\min} = -5, \quad u_1^{\max} = 5$$

Porovnání mezi exaktním výpočtem optimálního řízení (LQ úlohou) a výpočtem optimálního řízení rekurzivním Algoritmem A.5 je znázorněno na následujících obrázcích (s počáteční podmínkou $\mathbf{q}_1 = [\frac{\pi}{2}, -1]^T$). Poznamenejme, že rekurzivní algoritmus se přibližuje správným výsledkům získaným řešením LQ úlohy pro zjemňování diskretizace přípustných stavů a řízení ($N_q, N_u \rightarrow \infty$), což je zřejmě způsobeno především zmenšováním chyby vzniklé díky lineární interpolaci hodnot Bellmanovy funkce a optimálního řízení.

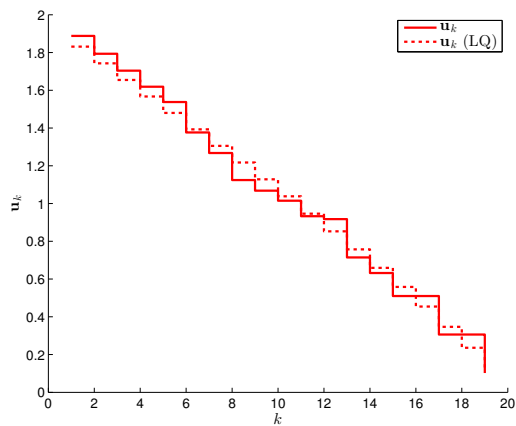


(a) Diskretizace s velkým rozlišením

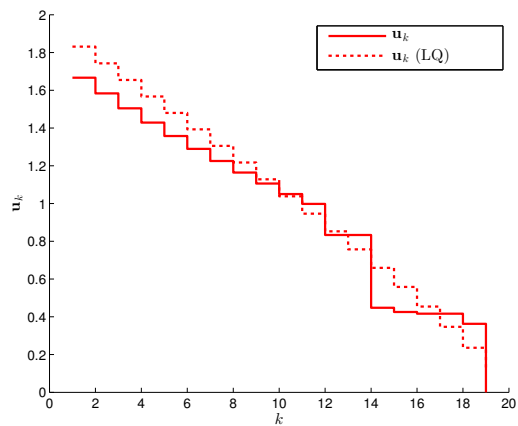


(b) Diskretizace s malým rozlišením

Obrázek A.15.: Vývoj stavu \mathbf{q}_k : Porovnání nalezeného optimálního řízení získaného rekurzivním algoritmem (diskretizace) a exaktním výpočtem - řešením LQ úlohy (LQ)

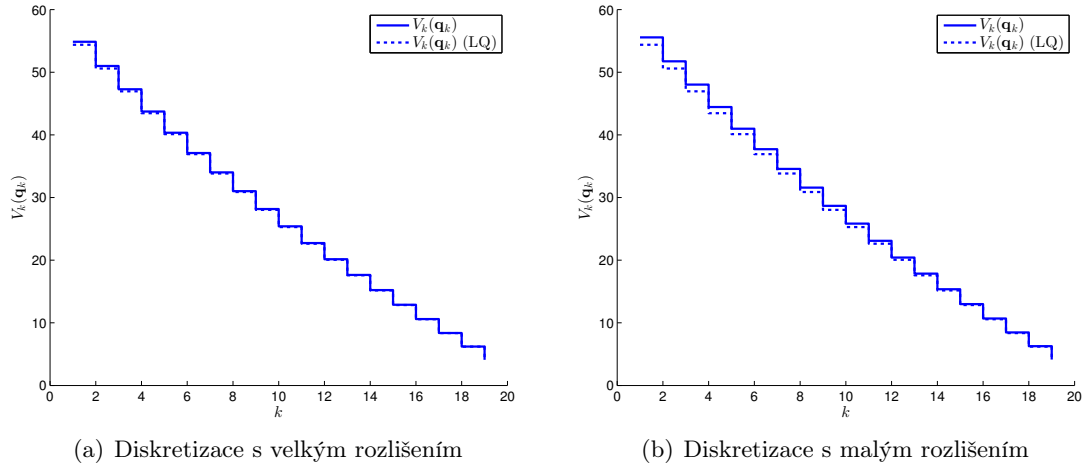


(a) Diskretizace s velkým rozlišením



(b) Diskretizace s malým rozlišením

Obrázek A.16.: Vývoj řízení \mathbf{u}_k : Porovnání nalezeného optimálního řízení získaného rekurzivním algoritmem (diskretizace) a exaktním výpočtem - řešením LQ úlohy (LQ)



Obrázek A.17.: Vývoj Bellmanovy funkce $V_k(\mathbf{q}_k)$: Porovnání nalezeného optimálního řízení získaného rekurzivním algoritmem (diskretizace) a exaktním výpočtem - řešením LQ úlohy (LQ)

★

■ Poznámka A.5 (LQ úloha)

Je dobře známo, že prostřednictvím Bellmanovy optimalizační rekurze lze nalézt, a to v analytickém tvaru, optimální strategii řízení lineárního diskrétního dynamického systému s kvadratickou váhovou funkcí a kvadratickým hodnocením koncového stavu (LQ úloha), tedy úlohy formulované jako:

$$\mathbf{u}_0^{*N-1} = \underset{\mathbf{u}_0^{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) \right), \quad J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) = \Phi(\mathbf{q}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k) \quad (\text{A.180})$$

kde váhová funkce $g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)$ a hodnocení koncového stavu $\Phi(\mathbf{q}_N)$ dáno kvadratickou normou, výsledné kritérium je uvažováno potom jako:

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{N-1}) = \underbrace{\mathbf{q}_N^T \cdot \mathbf{Q}_N \cdot \mathbf{q}_N}_{\Phi_N} + \sum_{k=1}^{N-1} \underbrace{\mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{u}_k^T \cdot \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{u}_k}_{g_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k)} \quad (\text{A.181})$$

kde $\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k$ jsou symetrické pozitivně definitní matice.

S ohledem na vazební podmínku stavu manipulátoru:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_k$$

Dosazením váhové funkce a hodnocení koncového stavu do Bellmanovy optimalizační rekurze (A.165) lze získat, viz [48], strategii řízení $\mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$ ve formě stavového regulátoru:

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k) = \underbrace{-\left(\mathbf{G}_k^T \cdot \mathbf{P}_{k+1} \cdot \mathbf{G}_k + \mathbf{R}_k\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{F}_k^T \cdot \mathbf{P}_{k+1} \cdot \mathbf{G}_k\right)^T}_{\mathbf{K}_k} \cdot \mathbf{q}_k \quad (\text{A.182})$$

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k) = \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{q}_k$$

kde \mathbf{P}_k je symetrická, pozitivně definitní matice daná řešením Riccatiho diferenční rovnice ve tvaru:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_k^T \cdot \mathbf{P}_{k+1} \cdot \mathbf{F}_k + \mathbf{Q}_k - \left(\mathbf{F}_k^T \cdot \mathbf{P}_{k+1} \cdot \mathbf{G}_k\right) \cdot \left(\mathbf{G}_k \cdot \mathbf{P}_{k+1} \cdot \mathbf{G}_k + \mathbf{R}_k\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{F}_k^T \cdot \mathbf{P}_{k+1} \cdot \mathbf{G}_k\right)^T \quad (\text{A.183})$$

pro okrajovou podmínku $\mathbf{P}_N = \mathbf{Q}_N$, $k = N - 1, N - 2, \dots, 0$.

Nalezená strategie řízení $\mathbf{s}_k(\mathbf{q}_k)$ je tedy dána t-variantní stavovým regulátorem generujícím posloupnost řízení $\mathbf{u}_k = \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{q}_k$ (tedy \mathbf{u}_0^{*N-1}). Odpovídající Bellmanova funkce bude ve tvaru pozitivně definitní kvadratické formy:

$$V_k(\mathbf{q}_k) = \mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{q}_k \quad \Rightarrow \quad V_0(\mathbf{q}_0) = J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0^{*N-1}) = J^*(\mathbf{q}_0) \quad (\text{A.184})$$

kde $J^*(\mathbf{q}_0)$ je optimální hodnota kritéria z počátečního stavu \mathbf{q}_0 . ■

A.10.2. Variační počet (Hamiltonův přístup)

Variační počet (známý též jako Hamiltonův přístup) je principiálně odlišným přístupem k řešení úlohy optimálního řízení a lze definovat následovně:

Uvažujme nelineární spojité dynamický systém (vazební podmínka):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \quad (\text{A.185})$$

kde $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ je stav, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ je řízení.

Kritérium optimality podél trajektorie systému (závislé na aplikovaném řízení):

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = h(\mathbf{q}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) dt \quad (\text{A.186})$$

kde $h(\mathbf{q}_f, t_f)$ je hodnocení koncového stavu $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(t_f)$ a $g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$ je hodnota váhové funkce závislá na stavu a řízení v příslušném čase, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ je počáteční stav.

Cílem optimalizační úlohy je nalézt takové řízení (funkci) $\mathbf{u}_{t_0}^{*t_f}$, které minimalizuje kritérium J . Poznamenejme, že uvažujeme úlohu s pevným časem t_f a volným koncem \mathbf{q}_f .

Lze ukázat, viz [55, 48], že řešení optimalizační úlohy lze formulovat jako soustavu algebro-diferenciálních rovnic v následujícím tvaru:

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t) \quad (\text{A.187})$$

$$\dot{\mathbf{p}}^* = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \cdot \mathbf{p}^* - \left[\frac{g(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \quad (\text{A.188})$$

$$0 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \cdot \mathbf{p}^* - \left[\frac{g(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \quad (\text{A.189})$$

Současně s okrajovými podmínkami:

$$\mathbf{q}^*(t_0) = \mathbf{q}_0 \quad (\text{A.190})$$

$$\mathbf{p}^*(t_f) = \left[\frac{\partial h(\mathbf{q}^*(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \quad (\text{A.191})$$

kde \mathbf{p} je tzv. vektor kostavu (stejně dimenze jako stav \mathbf{q}) a

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \quad (\text{A.192})$$

je tzv. Hamiltonián.

Nástin důkazu:

Nástin důkazu je založen na metodě variačního počtu a velmi stručně lze popsat následovně, detaily viz [55, 48].

Kritérium (A.186) lze přepsat substitucí za člen hodnotící koncový stav tak, aby celé kritérium bylo dáno jedním integrálem následovně:

$$h(\mathbf{q}_f, t_f) = \int_0^{t_f} \frac{d}{dt} h(\mathbf{q}, t) dt + h(\mathbf{q}_0, t_0) \quad (\text{A.193})$$

$$\Rightarrow J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = \int_0^{t_f} \left[g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \frac{d}{dt} h(\mathbf{q}, t) \right] dt + h(\mathbf{q}_0, t_0) \quad (\text{A.194})$$

Člen $h(\mathbf{q}_0, t_0)$ je konstantní a známý ze známého počátečního stavu \mathbf{q}_0 , neovlivní tedy výsledky optimalizace a můžeme jej z kritéria vypustit. Dále rozepsáním časové derivace členu $\frac{d}{dt} h(\mathbf{q}, t)$ dostáváme následující tvar kritéria:

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = \int_0^{t_f} \left[g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \right] dt \quad (\text{A.195})$$

Zavedením Lagrangeových multiplikátorů \mathbf{p} dostáváme z (A.195) s uvažováním vazební podmínky (A.185) rozšířené kritérium v následujícím tvaru:

$$J_a(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = \int_0^{t_f} g_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) dt \quad (\text{A.196})$$

$$g_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + \mathbf{p}^T \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{A.197})$$

kde $g_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t)$ je rozšířená váhová funkce.

Metoda variačního počtu je založena na principu vyčíslení variace δJ_a rozšířeného kritéria v závislosti na variaci jeho argumentů $\delta \mathbf{q}$, $\delta \dot{\mathbf{q}}$, $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{p}$ (uvažujeme pevný koncový čas t_f , tzn. t_f definující horní mez integrálu nevariuje). Variace rozšířeného kritéria lze vyjádřit následovně:

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} [g_a(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}, t) - g_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t)] dt \quad (\text{A.198})$$

Rozvojem členu $g_a(\star)$ integrandu v integrálu (A.198) v Taylorovu řadu v bodě $[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{p}]$ a uvažováním pouze prvního členu rozvoje dostáváme následující lineární aproximaci variace rozšířeného kritéria (vzhledem k uvažované nekonečně malé variaci $\delta \star$ je aproximace přesná a může tak nahradit původní vyčíslení variace rozšířeného kritéria):

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} \right] dt \quad (\text{A.199})$$

Vzhledem k faktu, že \mathbf{q} a $\dot{\mathbf{q}}$ ve vztahu (A.199) jsou závislými proměnnými, pokusme se nyní závislost na variaci $\delta \dot{\mathbf{q}}$ ze vztahu (A.199) vyloučit. Integrací členu $\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}}$ (per partes²⁶) dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} &= \underbrace{\left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right]_{t_0}^{t_f}}_{= \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q}_f, \text{ neboť: } \delta \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}} - \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right) dt \\ \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{t_f} \delta \mathbf{q}_f - \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{A.200})$$

²⁶Integrace per partes: $\int (u \cdot \dot{v}) dt = u \cdot v - \int (\dot{u} \cdot v) dt$, v uvedeném případě: $u = \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, $\dot{v} = \delta \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \dot{u} = \frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, $v = \delta \mathbf{q}$

Dosažením (A.200) zpět do (A.199) dostáváme variaci rozšířeného kritéria nezávislou na $\delta\dot{\mathbf{q}}$:

$$\delta J_a = \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\Big|_{t_f} \delta \mathbf{q}_f + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} + \frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} \right] dt \quad (\text{A.201})$$

Dosaďme nyní vztah pro rozšířenou váhovou funkci g_a (A.197) zpět do (A.201) a zabývejme se nejprve členem $\left(\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)$, poznamenejme, že členy byly přeuspořádány na členy závislé na funkci $h(\mathbf{q}, t)$ a ostatní (připomeňme: $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ je funkcí času, pořadí parciálních derivací skalární funkce je zaměnitelné, pokud jsou tyto derivace spojité - viz *Schwartz theorem*):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \\ & = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{p}^T \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{q}}) \right]}_{\text{členy nezávislé na } h(\mathbf{q}, t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{p}^T \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{q}}) \right] + \\ & \quad + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \right]}_{\text{členy závislé na } h(\mathbf{q}, t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \right] = \\ & = \underbrace{\frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{p}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \mathbf{p}^T}_{\text{členy nezávislé na } h(\mathbf{q}, t)} + \frac{\partial h^2(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}^2} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial t \partial \mathbf{q}} - \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}}_{= \frac{\partial h^2(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}^2} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q} \partial t}}_{=0, \text{ členy závislé na } h(\mathbf{q}, t)} = \\ & = \frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{p}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \mathbf{p}^T \quad (\text{A.202}) \end{aligned}$$

Zpětným dosažením vztahu (A.202) do variace rozšířeného kritéria (A.201) a vyčíslením zbývajících parciálních derivací rozšířené váhové funkce $\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, $\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{u}}$, $\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{p}}$, dostáváme jeho výsledný tvar závislý na variaci nezávislých argumentů $\delta \mathbf{q}$, $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \left(\frac{\partial h(\mathbf{q}_f, t_f)}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{p}^T \right) \delta \mathbf{q}_f + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{p}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \mathbf{p}^T \right) \delta \mathbf{q} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{p}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right) \delta \mathbf{u} + (\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{q}}) \delta \mathbf{p} \right] dt \quad (\text{A.203}) \end{aligned}$$

Je zřejmé, že optimum nastává v případě, že variace rozšířeného kritéria je nulová $\delta J_a = \delta J_a(\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}) = 0$ pro libovolné $\delta \mathbf{q}$, $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{p}$ (ekvivalentně jako v případě nutné podmínky existence extrému obecné funkce). Tedy musí platit:

$$\mathbf{p}(t_f) = \left[\frac{\partial h(\mathbf{q}_f, t_f)}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \quad (\text{A.204})$$

$$\dot{\mathbf{p}} = - \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \cdot \mathbf{p} - \left[\frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \quad (\text{A.205})$$

$$\mathbf{0} = - \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \cdot \mathbf{p} - \left[\frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \quad (\text{A.206})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \quad (\text{A.207})$$

kde (A.204) reprezentuje okrajovou podmínku (společně s počátečním stavem $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$), (A.205) reprezentuje kostavovou diferenciální rovnici, (A.206) reprezentuje algebraickou podmínku a (A.207) reprezentuje stavovou diferenciální rovnici.

Metody řešení úlohy variačního počtu

Řešením uvažované úlohy optimálního řízení je takové řízení $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, které splňuje výše uvedené nutné podmínky existence optima formulované soustavou algebro-diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami:

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t) \quad (\text{A.208})$$

$$\dot{\mathbf{p}}^* = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \cdot \mathbf{p}^* - \left[\frac{g(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \quad (\text{A.209})$$

$$0 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{u}}\right]^T \cdot \mathbf{p}^* - \left[\frac{g(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{u}}\right]^T \quad (\text{A.210})$$

Okrajové podmínky:

$$\mathbf{q}^*(t_0) = \mathbf{q}_0 \quad (\text{A.211})$$

$$\mathbf{p}^*(t_f) = \left[\frac{\partial h(\mathbf{q}^*(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \quad (\text{A.212})$$

Častým způsobem řešení soustavy algebro-diferenciálních rovnic je vyloučení algebraické závislosti (A.210) nalezením předpisu (funkce) řízení $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, které této závislosti vyhovuje. Takové nalezené řešení je poté možné zpětně dosadit do diferenciálních rovnic (A.208, A.209) a získat tak soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (bez algebraické vazby) ve tvaru:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}(t), t) \quad (\text{A.213})$$

s okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t_0)[1 : n] &= \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{S}(t_f)[n+1 : 2n] &= \left[\frac{\partial h(\mathbf{q}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) \\ -\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \cdot \mathbf{p} - \left[\frac{g(\mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Přesto, že existují efektivní numerické algoritmy řešení (numerické integrace) obyčejných diferenciálních rovnic, zásadním problémem, který znemožňuje řešit diferenciální rovnice standardním způsobem (jako počáteční úlohu či ekvivalentně koncovou úlohu s uvažováním inverze času), jsou okrajové podmínky (tzv. okrajová úloha), kde polovina složek hledané vektorové funkce \mathbf{S} (stavu, kostavu) má definovanou počáteční hodnotu (v čase t_0) a zbylá polovina má definovanou koncovou hodnotu (v čase t_f). Taková úloha je někdy nazývána jako *dvoubodový problém* (*Boundary Value Problem - BVP*). Základní metody řešení BVP lze kategorizovat následovně:

- Nejčastějšími metodami řešení jsou tzv. metody střelby (*shooting methods*), které spočívají v nalezení zbývajících (neznámých) složek počáteční podmínky (v našem případě tedy složek kostavu \mathbf{p} v čase t_0) tak, aby po integrování soustavy diferenciálních rovnic v čase t_0 až t_f bylo v čase t_f dosaženo požadované (zadané) hodnoty

složek koncové podmínky (v našem případě tedy složek kostavu v čase t_f). Existuje celá řada modifikací těchto metod, nicméně všechny trpí zásadním omezením, a tím je samotná integrace. Volbou volných složek počáteční podmínky lze (zejména v případě silně nelineární pravé strany soustavy) snadno docílit nestabilního chování (tedy nemožnost „dointegrovat“ do času t_f). Tento problém je klíčový, neboť i malá změna ve volbě počátečních podmínek může zásadním způsobem ovlivnit konvergenci a přesnost numerické integrace.

- Dalším přístupem je postupná aproximace řešení založená na přístupu, že je nejprve nalezeno řešení, tzn. funkce \mathbf{S} , která nevyhovuje jedné či více rovnic (A.208, A.209, A.210) či okrajovým podmínkám (A.211, A.212). Toto řešení je použito jako počáteční odhad pro numerický iterační algoritmus, který vede k jeho zpřesňování tak, aby těmto rovnicím nakonec vyhovělo a funkce \mathbf{S} je tak optimální nalezenou trajektorií (stavu a kostavu, potažmo řízení). Podrobný popis takových metod včetně příkladů lze nalézt např. v [48] pod označením: *Methods of Steepest Descent, Variation of extremals, Quasilinearization*.
- Metody založené na aproximaci řešení, které se pokoušejí nalézt řešení optimální úlohy, tedy funkci \mathbf{S} , jako její aproximaci, a to buď množinou bodů v čase (tzv. *Finnite Difference Methods*) či jako parametrizaci nějakého analytického funkčního předpisu (tzv. *Collocation Methods*). V prvním případě je časová derivace funkce \mathbf{S} v diferenciální rovnici nahrazena diferencí, v druhém případě lze časovou derivaci funkce \mathbf{S} počítat symbolicky ze zvoleného modelu funkce \mathbf{S} (např. po částech polynomiální funkce v čase). V obou případech je tak převeden problém nalezení optimální trajektorie \mathbf{S} na řešení soustavy **nelineárních algebraických** rovnic pro neznámé funkční hodnoty funkce \mathbf{S} v daných diskretizovaných časech či neznámé parametry parametrizující model funkce \mathbf{S} . Více informací o metodách lze nalézt např. v [96, 21].

A.11. Knihovna „robotLib“ (funkční bloky a předimplementované funkce pro robotiku)

Kapitola shrnuje implementace funkčních bloků a předimplementovaných funkcí vytvořených za účelem tvorby virtuálních simulačních modelů sériových manipulátorů. Poznamenejme, že některé uvedené funkce jsou závislé ještě na dalších vnořených funkcích v textu neuvedených. Všechny doposud aktuální implementace jsou volně ke stažení zde [137].

A.11.1. Standardní funkce a funkční bloky pro modelování sériových manipulátorů

Implementace funkčních bloků a funkcí vychází z metod a algoritmů popsaných v Kapitolách A.1, A.2 A.3, A.4, A.5, A.6. Každé rameno manipulátoru je aktuováno právě jedním aktuátorem typu **P** či **R**.

Předimplementované funkce - Matlab (m-files)

- **T = DH(DHpar)**:
Vytvoří homogenní transformační matici.

Vstupy:
 DHpar Vektor D-H parametrů, ve formátu: $[d, \theta, a, \alpha]$

Výstupy:
 T Odpovídající homogenní transformační matici $T(d, \theta, a, \alpha)$, dle D-H úmluvy.

- `[R, dR, ddR] = EulerAnglesZYX2rotMatrix([EA, dEA, ddEA])`²⁷:
 Přepočítání z Eulerových úhlů (v uspořádání postupných rotací ZYX) na matici rotace.

Vstupy:
 EA, dEA, ddEA Vektor Eulerových úhlů (polohy, rychlosti, zrychlení), ve formátu: $EA = [\gamma, \beta, \alpha]$, dEA resp. $ddEA$ odpovídají rychlostem resp. zrychlením.

Výstupy:
 R, dR, ddR Odpovídající matice rotace a její časové derivace.

- `[EA, dEA, ddEA] = rotMatrix2EulerAnglesZYX([R, dR, ddR])`²⁷:
 Přepočítání z matice rotace na Eulerovy úhly (v uspořádání postupných rotací ZYX). Vyřešena singularity v reprezentaci (fixováním hodnoty úhlu γ).

Vstupy:
 R, dR, ddR Matice rotace a její časové derivace.

Výstupy:
 EA, dEA, ddEA Vektor Eulerových úhlů (polohy, rychlosti, zrychlení), ve formátu: $EA = [\gamma, \beta, \alpha]$, dEA resp. $ddEA$ odpovídají rychlostem resp. zrychlením.

- `[omega, domega] = rotMatrix2angularVelAccel([R, dR])`:
 Přepočítání z matice rotace R a její časové derivace \dot{R} na vektor úhlové rychlosti ω a zrychlení $\dot{\omega}$.

Vstupy:
 R, dR Matice rotace a její časové derivace.

Výstupy:
 omega, domega Odpovídající vektor úhlové rychlosti a zrychlení.

- `[dR, ddR] = angularVelAccel2rotMatrix([R, omega, domega])`:
 Přepočítání z matice rotace R a vektoru úhlové rychlosti ω a úhlového zrychlení $\dot{\omega}$ na odpovídající první \dot{R} a druhou \ddot{R} časovou derivaci matice rotace.

Vstupy:
 R, omega, domega Matice rotace, vektor úhlové rychlosti a zrychlení.

Výstupy:
 dR, ddR Odpovídající první a druhá časová derivace matice rotace.

- `Links = robotSetup(kinPar, dynPar)`:
 Vytvoří strukturu kinematických a dynamických parametrů pro i -tý sériový kinematický řetězec - využíváno dalšími funkčními bloky.

²⁷ Analogicky implementované i funkce pro uspořádání postupných rotací XYZ: `EulerAnglesXYZ2rotMatrix`, `rotMatrix2EulerAnglesXYZ`

<u>Vstupy:</u>	
<code>kinPar{i}</code> .	Struktura kinematických parametrů manipulátoru (pro i -tý sériový kinematický řetězec)
<code>.DHpar</code>	Matice D-H parametrů: $[d_1, \theta_1, a_1, \alpha_1; d_2, \theta_2, a_2, \alpha_2; \dots; d_n, \theta_n, a_n, \alpha_n]$
<code>.jointType</code>	Typy příslušných kloubů (1 P či R kloub na 1 rameno - jeden řádek D-H parametrů): např.: $[\mathbf{P}; \mathbf{R}; \dots; \mathbf{R}]$
<code>.Qhome</code>	Počáteční (domovská) hodnota polohy kloubových souřadnic (příslušné D-H parametry jsou nahrazeny odpovídajícími hodnotami <code>Qhome</code>)
<code>.endEffComp</code>	Kompenzace polohy koncového efektoru, ve formátu: $[\mathbf{O}_e^n, \mathbf{R}_e^n]$
<code>.baseComp</code>	Kompenzace polohy základny, ve formátu: $[\mathbf{O}_0^b, \mathbf{R}_0^b]$
<code>dynPar{i}</code> .	Struktura dynamických parametrů manipulátoru (pro i -tý sériový kinematický řetězec)
<code>.mass</code>	Vektor hmotností ramen, ve formátu: $[m_1; m_2 \dots; m_n]$
<code>.inertiaTensor</code>	Vektor tensorů setrvačnosti ramen v těžišti vzhledem k s.s. příslušného ramene, ve formátu: $[\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n]$
<code>.gravityCenter</code>	Matice vektorů těžišť ramen vzhledem k příslušnému s.s. ramene, ve formátu: $[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_N]$
<code>.gravityVector</code>	Vektor gravitačního zrychlení vzhledem k s.s. F_b , ve formátu: $[g_x; g_y; g_z]$
<u>Výstupy:</u>	
<code>Links{i}{j+1}</code> .	Struktura obsahující informace o j -tém ramenu, i -tého kinematického řetězce ($j = 1, 2, \dots, n$). Struktura je dále používána funkčními bloky.
<code>.A</code>	Počátek j -tého ramene, tzn. počátek s.s. F_{j-1}
<code>.B</code>	Konec j -tého ramene, tzn. počátek s.s. j -tého ramene F_j
<code>.R</code>	Matice rotace s.s. j -tého ramene F_j , vzhledem k s.s. F_b
<code>.qhome</code>	Hodnota domovské polohy kloubové souřadnice j -tého ramene
<code>.mass</code>	Hmotnost j -tého ramene
<code>.inertiaTensor</code>	(Konstantní) tensor setrvačnosti j -tého ramene, vzhledem k s.s. ramene F_j
<code>.gravityCenter</code>	(Konstantní) umístění těžiště j -tého ramene, vzhledem k s.s. ramene F_j
<code>.jointAxis</code>	Směrový vektor osy rotace/translace j -tého kloubu, vzhledem k s.s. F_b
<code>.jointType_sigma</code>	Identifikátor typu j -tého kloubu, $\sigma = 0$ pro R kloub, $\sigma = 1$ pro P kloub
<code>.R0b</code>	(jen pro $j = 0$) Kompenzace polohy základny, matice rotace \mathbf{R}_0^b s.s. F_0 , vzhledem k s.s. F_b
<code>.O0b</code>	(jen pro $j = 0$) Kompenzace polohy základny, počátek \mathbf{O}_0^b s.s. F_0 , vzhledem k s.s. F_b
<code>.gravityVector</code>	(jen pro $j = 0$) Vektor gravitačního zrychlení vzhledem k s.s. F_b
<code>.numOfLinks</code>	(jen pro $j = 0$) Počet ramen manipulátoru n (bez kompenzace polohy základny a koncového efektoru)
<code>.Ren</code>	(jen pro $j = n + 1$) Kompenzace polohy konc. efektoru, matice rotace \mathbf{R}_e^n s.s. F_e , vzhledem k s.s. F_n
<code>.Oen</code>	(jen pro $j = n + 1$) Kompenzace polohy konc. efektoru, počátek \mathbf{O}_e^n s.s. F_e , vzhledem k s.s. F_n

- `[J,dJ,Jcomp,Jadd] = kinJacobian(jointCoords,DHparam,jointType,...
...baseComp,endEffComp):`

Výpočet kinematického jakobiánu \mathbf{J}_n a jeho časové derivace $\dot{\mathbf{J}}_n$, včetně kompenzace \mathbf{J}_{comp} a aditivní konstanty \mathbf{J}_{add} (kompenzace polohy základny a koncového efektoru).

Vstupy:

<code>jointCoords</code>	Hodnoty poloh kloubových souřadnic a odpovídající rychlosti, ve formátu: $[\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}]$
<code>DHparam</code>	Matice D-H parametrů, viz výše
<code>jointType</code>	Typy příslušných kloubů, viz výše
<code>endEffComp</code>	Kompenzace polohy koncového efektoru, viz výše
<code>baseComp</code>	Kompenzace polohy základny, viz výše

Výstupy:

<code>J</code>	Kinematický jakobián $\mathbf{J}_n \in \mathbb{R}^{6 \times n}$
<code>dJ</code>	Časová derivace kinematického jakobiánu $\dot{\mathbf{J}}_n \in \mathbb{R}^{6 \times n}$
<code>Jcomp</code>	Kompenzační matice $\mathbf{J}_{\text{comp}} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$
<code>Jadd</code>	Aditivní vektor (zrychlení) $\mathbf{J}_{\text{add}} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$

- `[genCoords] = forwardKinematics(jointCoords,kinPar,N):`²⁸

Výpočet DGM a DIK (rychlosti, zrychlení). Obecně platná pro sériové manipulátory.

Vstupy:

<code>jointCoords</code>	Hodnoty poloh kloubových souřadnic, odpovídajících rychlostí a zrychlení, ve formátu: $[\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}]$
<code>kinPar</code>	Kinematické parametry manipulátoru, viz funkce <code>robotSetup</code>
<code>N</code>	Pro $N = j + 1$ bude výstupem funkce poloha, rychlost a zrychlení j -tého ramena, tedy s.s. F_j , $j = 1, 2, \dots, n$, pro $N = 1$ resp. $N = n + 2$ bude výstupem poloha, rychlost, zrychlení 0-tého s.s. F_0 resp. s.s. konc. efektoru F_e . Pokud N nezadáno, vracena poloha, rychlost a zrychlení s.s. konc. efektoru F_e

Výstupy:

<code>genCoords</code>	Polohy, rychlosti a zrychlení zobecněných souřadnic (závisí na vstupu N) odpovídajícího s.s. vzhledem k s.s. F_b , např. pro N nezadáno je výstup ve formátu $[[\mathbf{O}_e^b, \mathbf{R}_e^b], [\dot{\mathbf{O}}_e^b, \boldsymbol{\omega}_e^b], [\ddot{\mathbf{O}}_e^b, \dot{\boldsymbol{\omega}}_e^b]]$
------------------------	---

- `[tau] = inverseDynamicModel(jointCoords,endEff_force_moment,kinPar,dynPar):`

Výpočet IDM pro sériový manipulátor, tzn. požadovaných sil/silových momentů kloubových souřadnic $\boldsymbol{\tau}$ potřebných k realizaci pohybu manipulátoru odpovídající poloze \mathbf{Q} , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$ kloubových souřadnic při uvažování externí síly a silového momentu \mathbf{F} působící na koncový efektor. Řešení odpovídá dynamické rovnici:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F}$$

²⁸Poznamenejme, že funkce `inverseKinematics` není předimplementována, neboť IGM nemá analytické (a algoritmicizovatelné) řešení pro obecný sériový manipulátor. Pro účely IIK lze využít funkce `kinJacobian`.

Vstupy:

<code>jointCoords</code>	Hodnoty poloh kloubových souřadnic, odpovídajících rychlostí a zrychlení, ve formátu: $[Q, \dot{Q}, \ddot{Q}]$
<code>endEff_force_moment</code>	Externí síla a silový moment F působící na koncový efektor, vzhledem k s.s. F_b , ve formátu: $[f; \mu]$
<code>kinPar</code>	Kinematické parametry manipulátoru, viz funkce <code>robotSetup</code>
<code>dynPar</code>	Dynamické parametry manipulátoru, viz funkce <code>robotSetup</code>

Výstupy:

<code>tau</code>	Vektor sil/silových momentů τ příslušných kloubových souřadnic, ve formátu: $[\tau_1; \tau_2; \dots \tau_n]$
------------------	---

- `[ddq] = forwardDynamicModel(jointCoords, joint_force_moment, ... endEff_force_moment, kinPar, dynPar):`

Výpočet DDM pro sériový manipulátor, tzn. kloubových zrychlení \ddot{Q} na základě známých poloh Q a rychlostí \dot{Q} kloubových souřadnic a externího silového/momentového působení F na koncový efektor. Řešení odpovídá dynamické rovnici:

$$\ddot{Q} = M^{-1}(Q) \cdot (\tau - C(Q, \dot{Q}) \cdot \dot{Q} - G(Q) - J^T(Q) \cdot F)$$

Vstupy:

<code>jointCoords</code>	Hodnoty poloh kloubových souřadnic a odpovídajících rychlostí, ve formátu: $[Q, \dot{Q}]$
<code>joint_force_moment</code>	Vektor sil/silových momentů τ příslušných kloubových souřadnic, ve formátu: $[\tau_1; \tau_2; \dots \tau_n]$
<code>endEff_force_moment</code>	Externí síla a silový moment F působící na koncový efektor, vzhledem k s.s. F_b , ve formátu: $[f; \mu]$
<code>kinPar</code>	Kinematické parametry manipulátoru, viz funkce <code>robotSetup</code>
<code>dynPar</code>	Dynamické parametry manipulátoru, viz funkce <code>robotSetup</code>

Výstupy:

<code>ddq</code>	Vektor zrychlení kloubových souřadnic \ddot{Q} , ve formátu $[\ddot{q}_1; \ddot{q}_2; \dots; \ddot{q}_n]$
------------------	---

Implementované funkční bloky - Matlab/Simulink/SimMechanics

Viz Obrázek A.18.

- **Manipulator Link:**

Blok reprezentující j -té rameno manipulátoru umístěné v i -tém kinematickém řetězci²⁹.

Vstupy/Výstupy:

<code>CS Fi-1, CS Fi</code>	Přípojně body ramena tvoří s.s. ramene F_j a s.s. ramene předcházejícího F_{j-1}
-----------------------------	--

Parametry:

<code>Chain order</code>	Pořadí kinematického řetězce, kde je rameno umístěno.
<code>Link order</code>	Pořadí umístění ramene v daném kinematickém řetězci.

²⁹Poznamenejme, že možnost realizovat různé kinematické řetězce vznikla s ohledem na možnosti realizace paralelních kinematických architektur.

- **Manipulator Joint (Actuation: Motion):**

Blok reprezentující j -tý kloub umístěný v i -tém kinematickém řetězci. Kloub je aktuován pohybem (tzn. příslušnou polohou, rychlostí a zrychlením své kloubové souřadnice)³⁰.

<u>Vstupy/Výstupy:</u>	
B,F	<i>Base, Follower</i> - standardní přípojně body kloubů v SimMechanicsu
[pos,vel,accel]	Poloha, rychlost a zrychlení kloubové souřadnice kloubu.
Com. force/torque	Požadované síla/silový moment (skalár) potřebný k definovanému pohybu kloubu (interní řešení IDM solverem v SimMechanicsu)
Reaction torque	Požadovaný silový moment (vektor) reprezentující rotační reakci kloubu do závěsu (odpovídá hodnotě reakčního silového momentu μ_i v distribuci sil/momentů v rovnici (A.108))
Reaction force	Požadovaná síla (vektor) reprezentující translační reakci kloubu do závěsu (odpovídá hodnotě reakční síly f_i v distribuci sil/momentů v rovnici (A.108))

Parametry:

Chain order	Pořadí kinematického řetězce, kde je kloub umístěn.
Joint order	Pořadí umístění kloubu v daném kinematickém řetězci.

- **joint home position:**

Blok vrací hodnotu domovské polohy kloubové souřadnice j -tého kloubu umístěného v i -tém kinematickém řetězci.

<u>Vstupy/Výstupy:</u>	
-	Výstupní hodnota domovské polohy kloubové souřadnice (nulová rychlost a zrychlení), ve formátu [<i>qhome</i> ; 0; 0]

Parametry:

Chain order	Pořadí kinematického řetězce, kde je kloub umístěn.
Joint order	Pořadí umístění kloubu v daném kinematickém řetězci.

- **Base Compensation:**

Blok reprezentující kompenzaci polohy základny (nehmotné rameno pevně připojeno k nultému s.s.).

<u>Vstupy/Výstupy:</u>	
CS Fb,CS F0	Přípojně body reprezentované s.s. základny F_b a s.s. F_0

Parametry:

Chain order	Pořadí kinematického řetězce, kde je kompenzace umístěna.
-------------	---

- **End Eff. Compensation:**

Blok reprezentující kompenzaci polohy koncového efektoru (nehmotné rameno pevně připojeno k poslednímu s.s. ramene).

³⁰V souvislosti s výstupem bloku Com. force/torque vyvstává otázka, zda-li je nutné řešit IDM (potenciálně DDM) externí funkcí (`inverseDynamicModel`, `forwardDynamicModel`). Odpověď jednoznačně spočívá v předpokládaném použití implementovaných funkcí k řešení optimalizačních úloh, neboť výpočetní čas potřebný k výpočtu IDM, DDM prostřednictvím implementovaných funkcí je ve srovnání s možným spouštěním simulace v prostředí SimMechanics (a využití získaných výsledků) nesrovnatelně kratší.

Vstupy/Výstupy:

`CS Fe,CS Fn` Přípojně body reprezentované s.s. koncového efektoru F_e a s.s. posledního ramene F_n

Parametry:

`Chain order` Pořadí kinematického řetězce, kde je kompenzace umístěna.

- **Manipulator P Joint (Actuation: Passive):**

Blok reprezentující j -tý kloub typu **P** umístěný v i -tém kinematickém řetězci. Kloub není aktuován (pasivní kloub). Pasivní kloub je používán při modelování paralelních robotických architektur.

Vstupy/Výstupy:

`B,F` *Base, Follower* - standardní přípojně body kloubů v SimMechanicsu

`[pos,vel,accel]` Poloha, rychlost a zrychlení kloubové souřadnice kloubu.

`Com. force/torque` Požadované síla/silový moment (skalár) potřebný k definovanému pohybu kloubu (interní řešení IDM solverem v SimMechanicsu)

`Reaction torque` Požadovaný silový moment (vektor) reprezentující rotační reakci kloubu do závěsu

`Reaction force` Požadovaná síla (vektor) reprezentující translační reakci kloubu do závěsu

Parametry:

`Chain order` Pořadí kinematického řetězce, kde je kloub umístěn.

`Joint order` Pořadí umístění kloubu v daném kinematickém řetězci.

- **Manipulator R Joint (Actuation: Passive):**

Blok reprezentující j -tý kloub typu **R** umístěný v i -tém kinematickém řetězci. Kloub není aktuován (pasivní kloub). Pasivní kloub je používán při modelování paralelních robotických architektur.

Vstupy/Výstupy:

`B,F` *Base, Follower* - standardní přípojně body kloubů v SimMechanicsu

`[pos,vel,accel]` Poloha, rychlost a zrychlení kloubové souřadnice kloubu.

`Com. force/torque` Požadované síla/silový moment (skalár) potřebný k definovanému pohybu kloubu (interní řešení IDM solverem v SimMechanicsu)

`Reaction torque` Požadovaný silový moment (vektor) reprezentující rotační reakci kloubu do závěsu

`Reaction force` Požadovaná síla (vektor) reprezentující translační reakci kloubu do závěsu

Parametry:

`Chain order` Pořadí kinematického řetězce, kde je kloub umístěn.

`Joint order` Pořadí umístění kloubu v daném kinematickém řetězci.

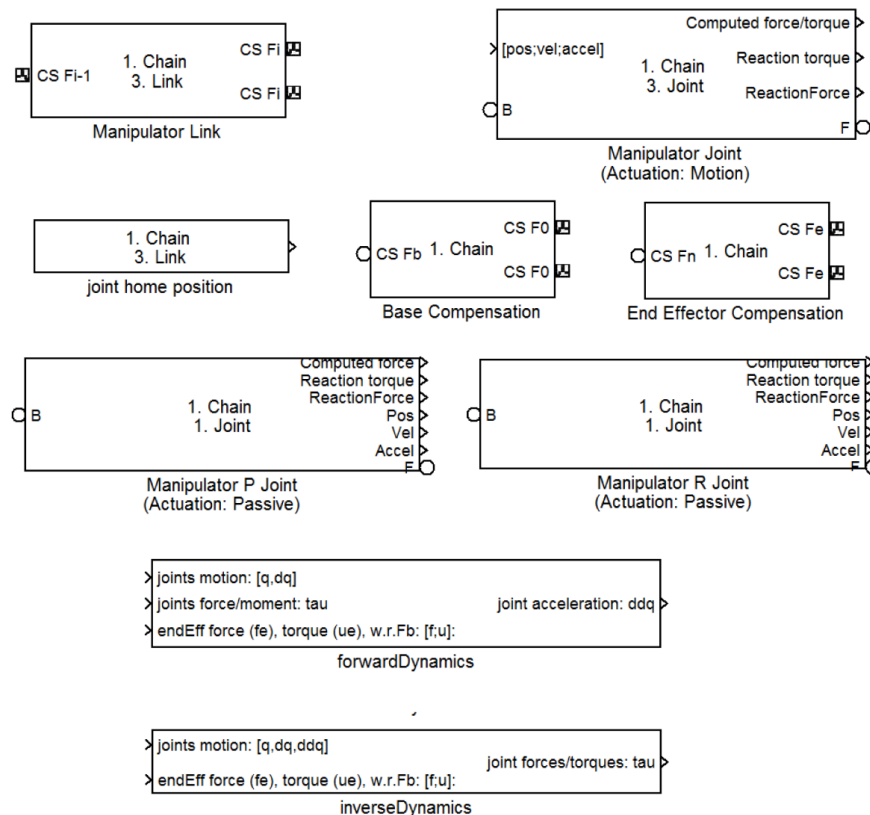
- **forwardDynamics:**

Blok reprezentující řešení DDM založený na funkci `forwardDynamicModel` s odpovídajícími vstupy/výstupy. Bez parametrů. Řešení DDM je implementováno **pouze pro sériové manipulátory**.

- **inverseDynamics:**

Blok reprezentující řešení IDM založený na funkci `inverseDynamicModel` s odpoví-

dajícími vstupy/výstupy. Bez parametrů. Řešení IDM je implementováno **pouze pro sériové manipulátory**.



Obrázek A.18.: Standardní bloky knihovny „robotLib“ do prostředí SimMechanics

A.11.2. Funkce a funkční bloky pro modelování zobecněných (redundantních) sériových manipulátorů

Implementované funkce a funkční bloky jsou motivovány novým přístupem k optimalizaci manipulátorů na základě využití výsledků optimálního pohybu redundantních manipulátorů. V kinematickém popisu manipulátoru se předpokládá, že pro každé rameno mohou existovat současně až 4 nezávislé aktuátory, 2 typu **P** (reprezentované D-H parametry d_i, a_i) a dva typu **R** (reprezentované D-H parametry θ_i, α_i). Za tímto účelem byly modifikovány předimplementované funkce a funkční bloky. Všechny použité algoritmy jsou motivovány odvozením kinematického a dynamického popisu zobecněných sériových manipulátorů, viz Kapitoly 4.1, 4.2.

- `[Links, Joints] = robotSetup_redundant(kinPar, dynPar):`

Vytvoří strukturu kinematických a dynamických parametrů pro sériový zobecněný kinematický řetězec - využíváno dalšími funkčními bloky. Uvažujeme tentokrát výhradně jediný kinematický řetězec (pouze sériové manipulátory). Kompenzace polohy základny a koncového efektoru jsou nativně zaintegrované do D-H parametrů.

Vstupy:

<code>kinPar</code>	Struktura kinematických parametrů manipulátoru
<code>.DHpar</code>	Matice D-H parametrů: $[d_1, \theta_1, a_1, \alpha_1; d_2, \theta_2, a_2, \alpha_2; \dots; d_n, \theta_n, a_n, \alpha_n]$
<code>.jointType</code>	Typy a umístění příslušných aktuátorů (až 4 DoF na jedno rameno), ve formátu:

$$[is^{d_1}, is^{\theta_1}, is^{a_1}, is^{\alpha_1}; is^{d_2}, is^{\theta_2}, is^{a_2}, is^{\alpha_2}; \dots; is^{d_n}, is^{\theta_n}, is^{a_n}, is^{\alpha_n}],$$

$is^{d_i} = 1$ pokud i -té zobecněné redundantní rameno obsahuje **P** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem d_i , jinak $is^{d_i} = 0$
 $is^{\theta_i} = 1$ pokud i -té zobecněné redundantní rameno obsahuje **R** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem θ_i , jinak $is^{\theta_i} = 0$
 $is^{a_i} = 1$ pokud i -té zobecněné redundantní rameno obsahuje **P** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem a_i , jinak $is^{a_i} = 0$
 $is^{\alpha_i} = 1$ pokud i -té zobecněné redundantní rameno obsahuje **R** aktuátor reprezentovaný D-H parametrem α_i , jinak $is^{\alpha_i} = 0$

<code>dynPar</code>	Struktura dynamických parametrů manipulátoru
<code>.mass</code>	Vektor hmotností ramen, ve formátu: $[m_1; m_2 \dots; m_n]$
<code>.inertiaTensor</code>	Vektor tensorů setrvačnosti ramen v těžišti vzhledem k s.s. příslušného ramene, ve formátu: $[\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n]$
<code>.gravityCenter</code>	Matice vektorů těžišť ramen vzhledem k příslušnému s.s. ramene, ve formátu: $[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_N]$
<code>.gravityVector</code>	Vektor gravitačního zrychlení vzhledem k s.s. F_0 , ve formátu: $[g_x; g_y; g_z]$

Výstupy:

<code>Links{j}</code>	Struktura obsahující informace o j -tém ramenu ($j = 1, 2 \dots, n$). Struktura je dále používána funkčními bloky.
<code>.base</code>	Počátek j -tého ramene, tzn. počátek s.s. F_{j-1}
<code>.mass</code>	Hmotnost j -tého ramene
<code>.inertiaTensor</code>	(Konstantní) tensor setrvačnosti j -tého ramene, vzhledem k s.s. ramene F_j
<code>.gravityCenter</code>	(Konstantní) umístěné těžiště j -tého ramene, vzhledem k s.s. ramene F_j
<code>Joints{j}</code>	Struktura obsahující informace o j -tém zobecněném kloubu ($j = 1, 2 \dots, n$). Struktura je dále používána funkčními bloky.
<code>.rangeOfJointCoords</code>	Index (pořadí) aktivních kl. souřadnic příslušející j -tému zobecněnému kloubu, ve tvaru dvojice $[n_1; n_2]$, $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dim(\mathbf{Q})$
<code>.jointCoordDim</code>	Celkový počet aktivních kloubů manipulátoru, $\dim(\mathbf{Q})$
<code>.DHpar</code>	D-H parametry j -tého ramene: $[d_j, \theta_j, a_j, \alpha_j]$
<code>.jointType</code>	Umístění aktuátorů j -tého zobecněného kloubu: $[is^{d_j}, is^{\theta_j}, is^{a_j}, is^{\alpha_j}]$

- `[J,dJ] = kinJacobian_redundant(jointCoords,DHpar,jointType):`
 Výpočet kinematického jakobiánu \mathbf{J}_n a jeho časové derivace $\dot{\mathbf{J}}_n$.

Vstupy:
jointCoords Hodnoty poloh kloubových souřadnic a odpovídající rychlosti, ve formátu: $[\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}]$ (více aktuátorů - kl. souřadnic na jedno rameno)
DHparam Matice D-H parametrů, viz výše
jointType Typy příslušných kloubů, viz výše

Výstupy:
J Kinematický jakobián $\mathbf{J}_n \in \mathbb{R}^{6 \times n}$
dJ Časová derivace kinematického jakobiánu $\dot{\mathbf{J}}_n \in \mathbb{R}^{6 \times n}$

- `[genCoords] = forwardKinematics_redundant(jointCoords, kinPar, N):`
Formálně shodná jako funkce `forwardKinematics`.
- `[tau] = inverseDynamicModel_redundant(jointCoords, endEff_force_moment, ... kinPar, dynPar):`
Formálně shodná jako funkce `inverseDynamicModel`.
- `[ddq] = forwardDynamicModel_redundant(jointCoords, joint_force_moment, ... endEff_force_moment, kinPar, dynPar):`
Formálně shodná jako funkce `forwardDynamicModel`.

Implementované funkční bloky - Matlab/Simulink/SimMechanics

Viz Obrázek A.19.

- **Manipulator Link:**
Blok reprezentující j -té rameno manipulátoru.

Vstupy/Výstupy:
CS Fi-1, CS Fi Přípojně body ramena tvoří s.s. ramene F_j a s.s. ramene předcházejícího F_{j-1}

Parametry:
Link order Pořadí umístění ramene v kinematickém řetězci.

- **Manipulator general Joint (up to 4 DoF - DH param) (Actuation: Motion):**
Blok reprezentující j -tý zobecněný kloub manipulátoru. Vzhledem k tomu, že uvažujeme obecné redundantní rameno - se zobecněným aktuátorem (až 4 nezávislé DoF: $d_j, \theta_j, a_j, \alpha_j$), parametry ramena (`Links{j}`) definují pouze počátek ramena (`Links{j}.base`), je koncový bod ramene vypočten přímo z příslušných D-H parametrů a to následovně: Dle určených aktuátorů ramena (viz j -tý řádek matice `kinPar.jointType`) jsou všechny příslušné D-H parametry (a jejich časové derivace) reprezentující aktuátory nahrazeny polohami (rychlostmi, zrychleními) kloubových souřadnic, zbývající (konstantní) D-H parametry reprezentující kinematické návrhové parametry jsou nahrazeny zadanými D-H parametry (viz `kinPar.DHpar`, odpovídající rychlosti a zrychlení jsou nulové). Dostáváme tak transformaci, která přesouvá a orientuje j -té rameno na základě kloubových souřadnic $\mathbf{Q}_j \in \{d_j, \theta_j, q_j, \alpha_j\}$ (dle výběru aktuátorů příslušného ramene) a konstantních kinematických návrhových parametrů manipulátoru $\boldsymbol{\xi}_j = \{d_j, \theta_j, q_j, \alpha_j\} \setminus \mathbf{Q}_j$ (zbývající D-H parametry).

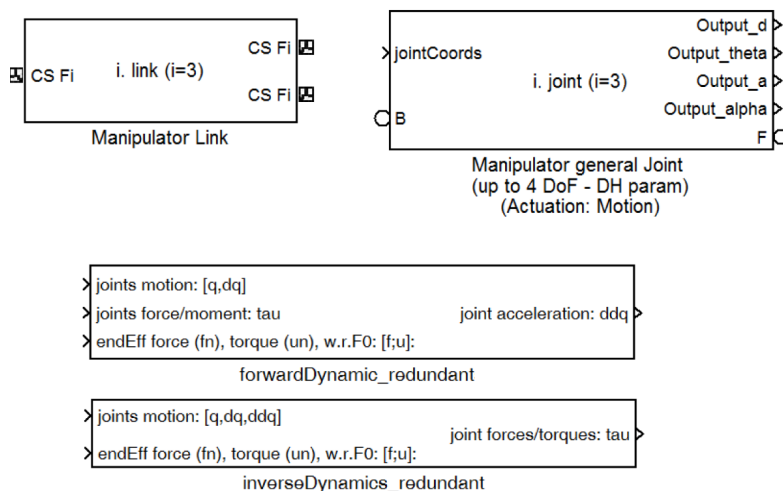
Vstupy/Výstupy:

B,F	<i>Base, Follower</i> - standardní přípojné body kloubů v SimMechanicsu
Output_d	= [Computed force; Reaction torque; Reaction force] pro P aktuátor odpovídající D-H parametru d_i
Output_theta	= [Computed torque; Reaction torque; Reaction force] pro R aktuátor odpovídající D-H parametru θ_i
Output_a	= [Computed force; Reaction torque; Reaction force] pro P aktuátor odpovídající D-H parametru a_i
Output_alpha	= [Computed torque; Reaction torque; Reaction force] pro R aktuátor odpovídající D-H parametru α_i

Parametry:

Joint order Pořadí umístění kloubu v kinematickém řetězci.

- **forwardDynamics_redundant:**
Blok reprezentující řešení DDM založený na funkci `forwardDynamicModel_redundant` s odpovídajícími vstupy/výstupy. Bez parametrů. Řešení DDM je implementováno **pouze pro sériové manipulátory**.
- **inverseDynamics_redundant:**
Blok reprezentující řešení IDM založený na funkci `inverseDynamicModel_redundant` s odpovídajícími vstupy/výstupy. Bez parametrů. Řešení IDM je implementováno **pouze pro sériové manipulátory**.



Obrázek A.19.: Bloky knihovny „robotLib“ do prostředí SimMechanics pro zobecněný redundantní manipulátor

A.11.3. Funkce pro plánování trajektorie koncového efektoru

Za účelem optimalizace kinematiky manipulátoru se v uvažované práci předpokládá (zejména v případě optimalizace pohybu redundantních manipulátorů), že manipulátor bude plnit dílčí konkrétní úlohu, respektive jeho koncový efektor se bude pohybovat po konkrétně zadané trajektorii. Lze intuitivně usuzovat, že právě plánování trajektorie manipulátoru může mít zásadní vliv na výsledky optimalizace, zejména v případech, kdy je trajektorie

zadána daným počtem koincidenčních bodů. Tento případ je v průmyslové praxi relativně častý, zejména z následujících důvodů:

- Zejména v případech operátorského plánování trajektorie je matematický model (parametrizace) požadované trajektorie neznámý - známe jen určitý počet zadaných koincidenčních bodů
- S rostoucími možnostmi využití CAD/CAM systémů lze snadno generovat koincidenční body komplexních trajektorií z 3D výkresů (v libovolném rozlišení)
- Dříve naplánovaná trajektorie (např. i z matematického modelu) je uchovávána s ohledem na její pozdější intuitivní interpretaci ve formě koincidenčních bodů

V případě zadané trajektorie koncového efektoru manipulátoru prostřednictvím koincidenčních bodů vznikají tak dvě zásadní otázky:

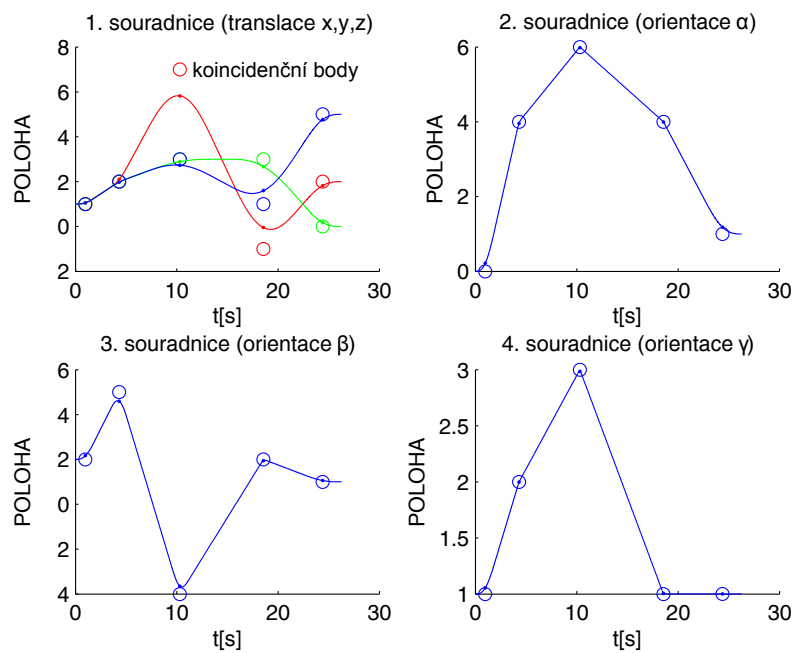
- Jak koincidenční body vhodně interpolovat (např. za účelem generování polohy koncového efektoru v jiném rozlišení).
- Jak docílit požadovaného pohybu po interpolované křivce ve smyslu požadovaného profilu ujeté dráhy, rychlosti a tečného (normálového) zrychlení.

Důsledkem nevhodného plánování trajektorie může být velmi snadno docíleno i zkrácených výsledků optimalizace. Např. bude-li nehladce plánovaná trajektorie zbytečně generovat silové/momentové požadavky na koncový efektor (např. v případě nevhodného napojování interpolovaných koincidenčních bodů), budou tyto požadavky zahrnuty do hodnoty kritériální funkce a optimalizační algoritmus (např. při optimalizaci sil/momentů aktuátorů) na ně může brát nezanedbatelný zřetel. Přitom stačí zvolit jiný (hladší) způsob plánování trajektorie a při stejných požadavcích na koincidenční body i pohyb podél trajektorie budou požadavky na síly/momenty v aktuátorech nesrovnatelně nižší.

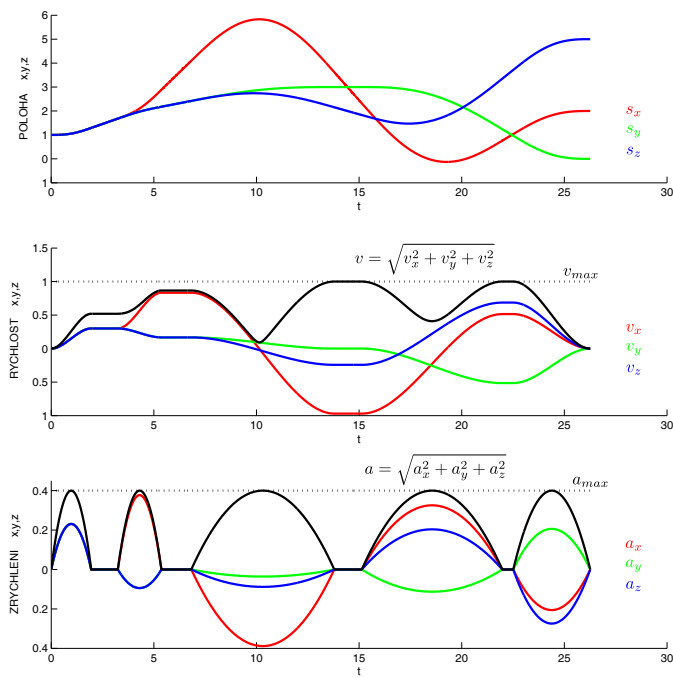
Přesto, že algoritmy plánování trajektorie nejsou prioritním cílem této práce a lze najít celou řadu literatury na toto téma, souhrnně a podrobně např. ve skriptech [27], dále pak např. v [95, 44], za účelem optimalizace kinematiky manipulátorů byly vyvinuty a implementovány některé algoritmy plánování trajektorie formou níže uvedených funkcí v Matlabu. Shrňme pouze jejich základní vlastnosti, detailní informace lze nalézt v [115].

- `[pos, alpha, beta, gamma]=lineInterpolationWithPolynomialBlending(points, ... axesConstraints, timeRes):`

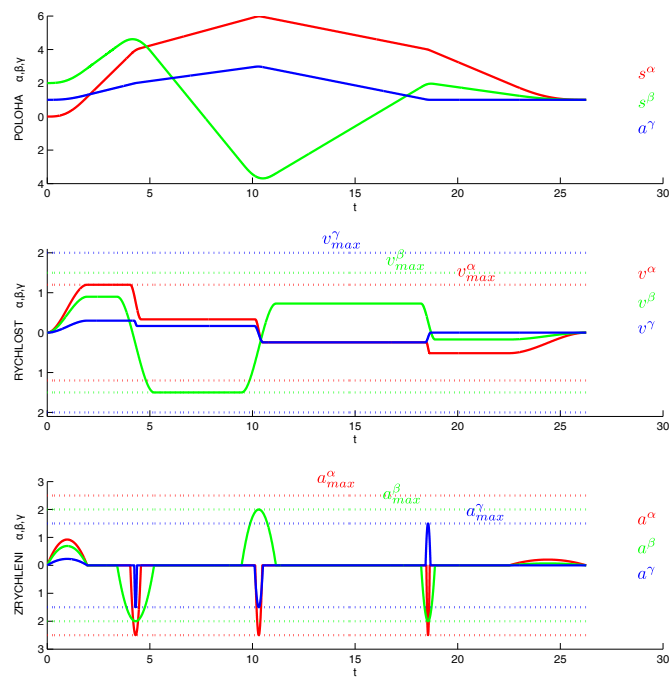
Jedná se o aproximační metodu. Zadané koincidenční body `points` zadané pozicí a orientací (Eulerovy úhly) jsou interpolovány přímkovými segmenty s polynomiálním napojováním, tzn. v definované vzdálenosti od interpolovaného bodu spojitě přechází přímkový segment v polynomiální (kubický), tedy interpolovaná trajektorie přesně prochází pouze prvním a posledním koincidenčním bodem. Omezení `axesConstraints` obsahují požadavky na maximální rychlost (tečnou) a zrychlení (obecné, tzn. tečné a normálové), které nesmí být porušeny. Právě omezení udávají tvar polynomiálního napojení. Omezení na maximální zrychlení lze interpretovat v aplikacích „pick and place“ jako omezení na zrychlení v zatáčkách trajektorie s ohledem na limity udržení neseného břemene uchopovačem na koncovém efektoru manipulátoru. Příklad trajektorie je znázorněn na Obrázku A.20, odpovídající průběhy rychlosti a zrychlení potom na Obrázku A.21. Poznamenejme, že z přirozeného důvodu je uvažována rychlost resp. zrychlení translace jako norma složek rychlosti resp. zrychlení (omezení v_{max} , a_{max}) zatímco u orientace je omezována každá složka (Eulerův úhel) zvlášť (v_{max}^* , a_{max}^* , $\star = \{\alpha, \beta, \gamma\}$).



Obrázek A.20.: Příklad aproximace zadaných koincidenčních bodů (přímková interpolace s polynomiálním napojováním)



(a) Pro translaci



(b) Pro orientaci

Obrázek A.21.: Průběh polohy, rychlosti a zrychlení podél uvažované trajektorie

Vstupy:

`points` Matice m koincidenčních bodů (translace \mathbf{O} , rotace α, β, γ), ve formátu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O}_1 & \mathbf{O}_2 & \dots & \mathbf{O}_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

`axesConstraints` Matice omezení pohybu, ve formátu:

$$\begin{bmatrix} v_{max} & v_{max}^\alpha & v_{max}^\beta & v_{max}^\gamma \\ a_{max} & a_{max}^\alpha & a_{max}^\beta & a_{max}^\gamma \end{bmatrix}$$

`timeRes` Časová diference, se kterou jsou generovány body výstupních vektorů

Výstupy:

`pos` Datová struktura s časem (*Structure with time* v interpretaci v prostředí Matlab), ve formátu:

$$\text{pos.signals.values} = \begin{bmatrix} t_0 : & x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ t_0 + \text{timeRes} : & x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \vdots & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

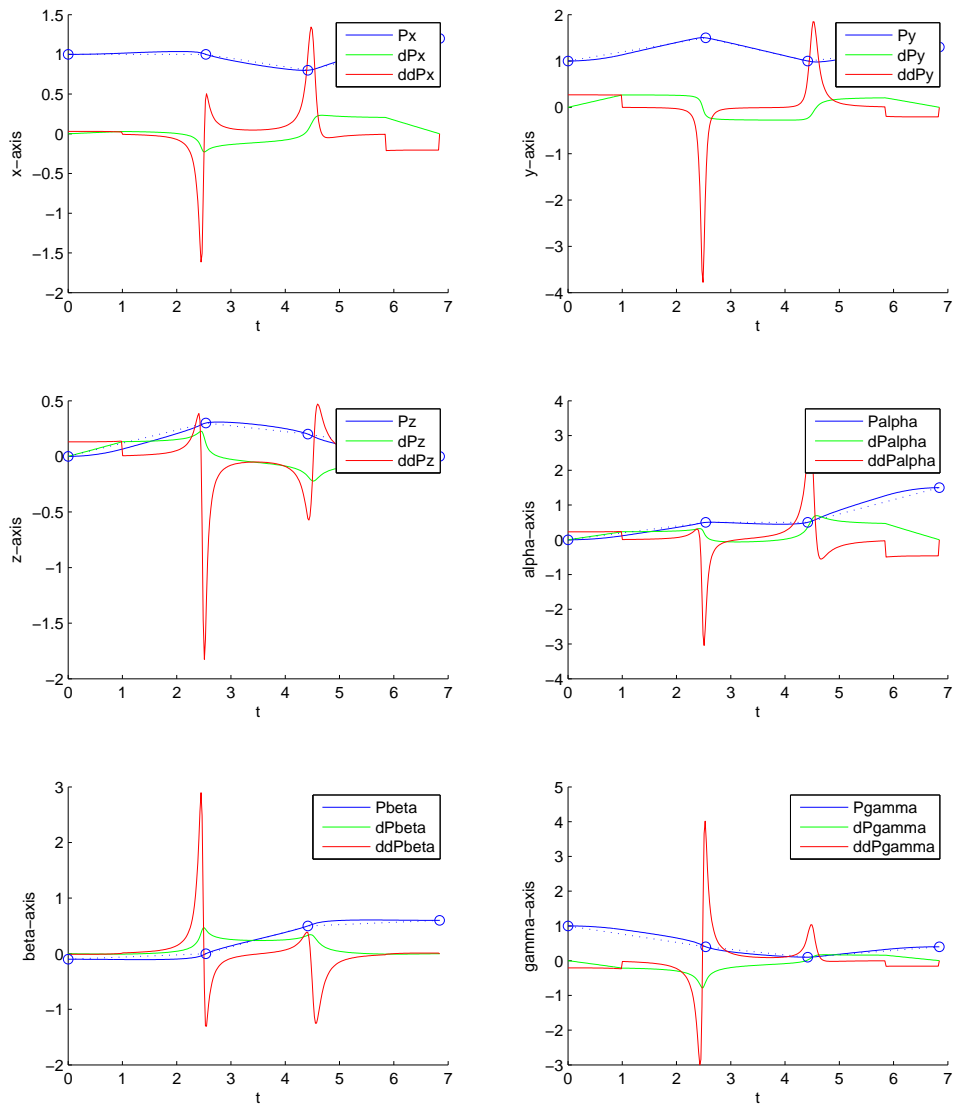
`alpha, beta, gamma` Datová struktura s časem (*Structure with time* v interpretaci v prostředí Matlab), ve formátu:

$$\star.\text{signals.values} = \begin{bmatrix} t_0 : & \star & \dot{\star} & \ddot{\star} \\ t_0 + \text{timeRes} : & \star & \dot{\star} & \ddot{\star} \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

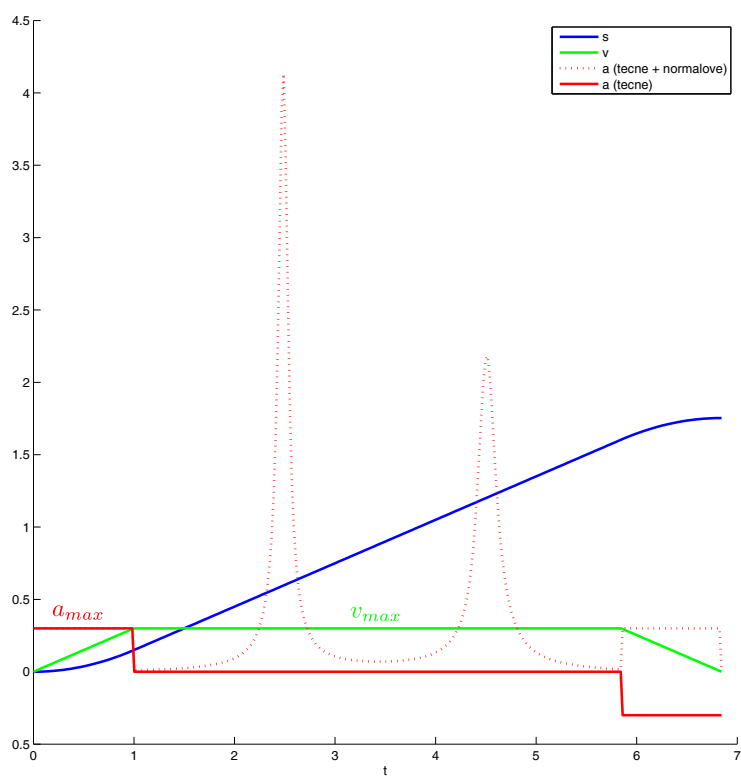
kde $\star = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

- `[trajectory]=interpolator_cubic_time(points,...
...axesConstraints,timeRes,feedType):`

Metoda generování trajektorie pohybu koncového efektoru, která je od předchozí odlišná zejména ve dvou zásadních aspektech. Za prvé se jedná o interpolační metodu, která prokládá (přesně) koincidenční body spline křivkou (po částech kubickým polynomem, který zajišťuje pouze nativní předpoklady na spojitost polohy, rychlosti a zrychlení v koincidenčních bodech). Druhou zásadní změnou je, že profil ujeté dráhy s , rychlosti v a tečného zrychlení a podél křivky je předepsán (tzv. korekce feedrate při generování výsledných interpolovaných dat) jako časově optimálním průběh s omezeními kladenými na maximální rychlost v_{max} a zrychlení a_{max} (typický lichoběžníkový profil rychlosti, viz např. [44, 14]). Příklad trajektorie je znázorněn na Obrázku A.22, odpovídající průběhy ujeté dráhy s , rychlosti v a zrychlení a jsou znázorněny na Obrázku A.23. Poznamenejme, že v uvedeném případě se jedná o omezení translačního pohybu (průběhy vektoru Eulerových úhlů jsou dopočítávány s ohledem na synchronizaci výsledného pohybu). V případě uvažovaných omezení v orientaci, tzn. ujetá dráha, rychlost a tečné zrychlení vektoru Eulerových úhlů, lze režim přepnout parametrem `feedType`. Uvedená inovativní metoda generování trajektorie včetně numerických algoritmů řešení byla vyvinuta v rámci řešení úloh optimalizace, viz [115].



Obrázek A.22.: Příklad interpolace zadaných koincidenčních bodů (kubický spline s korekcí feedrate)



Obrázek A.23.: Průběh polohy, rychlosti a zrychlení podél uvažované trajektorie (omezení v translaci)

Vstupy:

`points` Matice m koincidenčních bodů (translace \mathbf{O} , rotace α, β, γ), ve formátu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O}_1 & \mathbf{O}_2 & \dots & \mathbf{O}_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

`axesConstraints` Omezení translačního/rotačního pohybu, ve formátu $[v_{max}, a_{max}]$

`timeRes` Časová diference, se kterou jsou generovány body výstupních vektorů

`feedType` Omezení na max. rychlost a zrychlení pohybu podél interpolované křivky s ohledem na translaci (`feedType='pos'`) či orientaci (`feedType='orient'`)

Výstupy:

`trajectory` Datová struktura s časem (*Structure with time* v interpretaci v prostředí Matlab), ve formátu:

$$\text{trajectory.signals.values} = \begin{bmatrix} t_0 : & \mathbf{pos} & \mathbf{vel} & \mathbf{accel} \\ t_0 + \text{timeRes} : & \mathbf{pos} & \mathbf{vel} & \mathbf{accel} \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

kde $\mathbf{pos} = [x \ y \ z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$, $\mathbf{vel} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$, $\mathbf{accel} = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z} \ \ddot{\alpha} \ \ddot{\beta} \ \ddot{\gamma}]^T$.

Příloha B.

Seznam publikovaných i nepublikovaných prací autora

B.1. Publikace

- [1] Švejda, M.: Optimal Kinematic Design of Parallel Spherical Wrist Manipulator. In *International Carpathian Control Conference*, 2010.
- [2] Goubej, M.; Švejda, M.: Research and design of modular robotic manipulator for chemical aggressive environment. In *Carpathian Control Conference (ICCC), 2011 12th International*, May 2011, s. 374–378, doi: 10.1109/CarpathianCC.2011.5945883.
- [3] Svejda, M.; Goubej, M.: Innovative design and control of robotic manipulator for chemically aggressive environments. In *Carpathian Control Conference (ICCC), 2012 13th International*, May 2012, s. 715–720, doi: 10.1109/CarpathianCC.2012.6228739.
- [4] Goubej, M.; Svejda, M.: Dynamic analysis and control of robotic manipulator for chemically aggressive environments. In *Mechatronics (ICM), 2013 IEEE International Conference on*, Feb 2013, s. 273–278, doi: 10.1109/ICMECH.2013.6518548.
- [5] Švejda, M.: New Robotic Architecture for NDT Applications. In *World Congress IFAC*, ročník 19, 2014, s. 11761–11766, doi: 10.3182/20140824-6-ZA-1003.00989.
- [6] Svejda, M.; Cechura, T.: Interpolation method for robot trajectory planning. In *Process Control (PC), 2015 20th International Conference on*, June 2015, s. 406–411, doi: 10.1109/PC.2015.7169997.

B.2. Ostatní práce

- [1] Švejda, M.: Kinematic Analysis of Parallel Spherical Wrist Manipulator. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2009.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2009/1_PSWmanipulatorOptimal.pdf
- [2] Švejda, M.: Overview of parallel architectures for gearing robot. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2009.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2009/2_report_gearingRobot_kinematics.pdf
- [3] Švejda, M.: Analýza a optimalizace planárního paralelního robotu. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2010.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2010/2_optimalizaceATEGA_dualScara.docx

- [4] Švejda, M.: Kinematická a dynamická analýza robotických architektur pro potřeby moderních ultrazvukových kontrol. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2011.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/2_UJVkinematikaManipulatoru.pdf
- [5] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni, 2011.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf
- [6] Gouběj, M.; Švejda, M.; Schlegel, M.: Úvod do mechatroniky, robotiky a systémů řízení pohybu (skripta). Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
<http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/materialy/Uvod%20do%20mechatroniky.pdf>
- [7] Švejda, M.: Inverzní kinematická a statická úloha manipulátoru AGEBOT. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2012/1_agebot_kinematika_komplet.pdf
- [8] Švejda, M.: Kinematická kalibrace sériových a paralelních manipulátorů (Aplikace kalibračních metod na sério-paralelní manipulátor AGEBOT). Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2012/2_kalibraceAgebot.pdf
- [9] Švejda, M.: Úvod do robotiky a mechatroniky. Přednášky k předmětu, Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
<http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/>
- [10] Švejda, M.: Výběr architektury manipulátoru, plánování trajektorií. Technická zpráva, ZČU v Plzni, 2013.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/1_UJV_NDTrobot_vyberArchitektur.pdf
- [11] Švejda, M.: Přímá a inverzní kinematika manipulátoru pro NDT (implementační poznámky) (varianta 2: RRPR manipulátor). Technická zpráva, ZČU v Plzni, 2013.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/3_UJV_kinematikaNDTrobotRRPR.pdf
- [12] Švejda, M.: Řídicí systém směšovacího ventilu automatického kotle. *Studentská vědecká konference FAV ZČU v Plzni 2013*, květen 2013, s. 89–90,
http://svk.fav.zcu.cz/download/sbornik_svk_2013.pdf
- [13] Švejda, M.: Aplikace robotiky na katedře kybernetiky FAV ZČU v Plzni. *11. výjezdní zasedání Síťového centra robotiky a setkání členů Klubu robotiky, Technická univerzita v Liberci*, červen 2013.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/5_SitoveCentrumRobotiky2013.pdf
- [14] Švejda, M.: Manipulátor pro NDT (varianta 2: RRPR manipulátor), implementační poznámky. Technická zpráva, Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni, 2013.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/6_generatoryUJVrobot.pdf
- [15] Švejda, M.: Algoritmy řízení pro vybranou variantu manipulátoru pro NDT - návrh realizace. Technická zpráva, ZČU v Plzni, Katedra kybernetiky, 2013.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/7_UJV_ridiciSoftware.pdf
- [16] Švejda, M.: Případová studie navrhovaných architektur manipulátorů pro NDT svarů potrubí. Technická zpráva, ZČU v Plzni, Katedra kybernetiky, 2013.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/9_SkodaJS_pripStudie.pdf

- [17] Švejda, M.: Existing methods and tools for optimization of mechatronic systems in terms of structure, parameters and control (WP3-D3.17). Technická zpráva, University of West Bohemia, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/1_optimalizace.pdf
- [18] Švejda, M.: Paralell structures in robotics and possible applications for special robots operating in chemically aggressive environments (WP5 D5.11). Technická zpráva, University of West Bohemia, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/2_parallelManip.pdf
- [19] Švejda, M.: Algoritmy plánování pohybu manipulátoru Sáva. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/3_AlgPlanovaniPohybu.pdf
- [20] Švejda, M.: Kinematika a dynamika manipulátoru pro výukové účely. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/4_kinematika.pdf
- [21] Švejda, M.: Manuál (referenční příručka) k manipulátoru pro kontrolu potrubních svarů s omezeným přístupem (pro ŠJS). Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/7_Manual_Vendy.pdf
- [22] Švejda, M.: Kinematical, kinetostatical and dynamical analysis of 4DoF manipulator, parametric optimization of mechanical construction (WP5-DV026). Technická zpráva, NTIS, ZČU v Plzni, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/8_zakladace_navrh_optimalizace.pdf
- [23] Švejda, M.: Comparison of serial and parallel structures for 3-link manipulator arm, advanced parametric optimization of special construction. Technická zpráva, NTIS, ZČU v Plzni, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/9_zakladaceParalelni_navrh_optimalizace.pdf
- [24] Švejda, M.: Kinematical, kinetostatical and dynamical analysis of 7DoF manipulator, parametric optimization of mechanical construction (WP5-DV027). Technická zpráva, NTIS, ZČU v Plzni, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/10_vodnik_navrh_optimalizace.pdf
- [25] Švejda, M.; Čechura, T.; Jáger, A.: Výukový model pro robotiku (projekt ZČU: VS-14-019, příloha k závěrečné zprávě). Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2015.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/11_zaverecnaZpravaPriloha_VS_14_019.pdf
- [26] Švejda, M.; Čechura, T.; Jáger, A.: Výukový model pro robotiku - rozšíření, moderní algoritmy v robotice (projekt ZČU: VS-15-011, příloha k závěrečné zprávě). Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2016.
http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2016/1_zaverecnaZpravaPriloha_VS_15_011.pdf

Literatura

- [1] Centre of Computer Graphics and Data Visualisation, UWB Pilsen, Analytická geometrie pro počítačovou grafiku II.
URL <http://herakles.zcu.cz/education/ZPG/cviceni.php?no=5>
- [2] *Mechanism design for global isotropy with applications to haptic interfaces*, 1997, cited By (since 1996): 5.
URL www.scopus.com
- [3] Abbeel, P.: Optimal Control for Linear Dynamical Systems and Quadratic Cost (LQR) (Lecture notes). University of California at Berkeley, Dept of Electrical Engineering & Computer Sciences.
URL <http://www.cs.berkeley.edu/~pabbeel/cs287-fa12/slides/LQR.pdf>
- [4] Agrawal, S. K.; Fattah, A.: Gravity-balancing of spatial robotic manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 39, č. 12, 2004: s. 1331 – 1344, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2004.05.019>, <ce:title>11th National Conference on Machines and Mechanisms (NaCoMM-2003)</ce:title>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X0400151X>
- [5] Alba, J.; Doblaré, M.; Gracia, L.: A simple method for the synthesis of 2D and 3D mechanisms with kinematic constraints. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 35, č. 5, 2000: s. 645 – 674, ISSN 0094-114X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00035-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00035-X).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X9900035X>
- [6] Alici, G.; Shirinzadeh, B.: Optimum dynamic balancing of planar parallel manipulators. In *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*, ročník 5, 2004, ISSN 1050-4729, s. 4527–4532 Vol.5, doi:10.1109/ROBOT.2004.1302431.
- [7] Alici, G.; Shirinzadeh, B.: Optimum dynamic balancing of planar parallel manipulators based on sensitivity analysis. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 41, č. 12, 2006: s. 1520 – 1532, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2006.01.001>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X0600019X>
- [8] Alizade, R.; Bayram, C.: Structural synthesis of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 39, č. 8, 2004: s. 857 – 870, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2004.02.008>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X04000539>
- [9] Baillieul, J.; Hollerbach, J.; Brockett, R.: Programming and control of kinematically redundant manipulators. In *Decision and Control, 1984. The 23rd IEEE Conference on*, Dec 1984, s. 768–774, doi:10.1109/CDC.1984.272110.
- [10] Ben-Israel, A.; Greville, T.: *Generalized Inverses: Theory and Applications*. CMS Books in Mathematics, Springer, 2003, ISBN 9780387002934.
URL <https://books.google.cz/books?id=o3-97W8vCdIC>

- [11] van den Berg, J.: Extended LQR: Locally-Optimal Feedback Control for Systems with Non-Linear Dynamics and Non-Quadratic Cost. In *International Symposium on Robotics Research - ISRR*, 2013.
- [12] van den Berg, J.: Iterated LQR smoothing for locally-optimal feedback control of systems with non-linear dynamics and non-quadratic cost. In *American Control Conference (ACC), 2014*, June 2014, ISSN 0743-1619, s. 1912–1918, doi:10.1109/ACC.2014.6859404.
- [13] Bernstein, D. S.: Nonquadratic Cost and Nonlinear Feedback Control. In *American Control Conference, 1991*, June 1991, s. 533–538.
- [14] Bláha, L.: *Plánování pohybu podél specifikované cesty s uvažováním všech pohybových omezení*. Dizertační práce, Západočeská univerzita v Plzni, Katedra kybernetiky, 2014.
- [15] Callegari, M.; Palpacelli, M.-C.: Kinematics and optimization of the translating 3-CCR/3-RCC parallel mechanisms. In *Advances in Robot Kinematics*, editace J. Lenarčič; B. Roth, Springer Netherlands, 2006, ISBN 978-1-4020-4940-8, s. 423–432, doi:10.1007/978-1-4020-4941-5_46.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-4941-5_46
- [16] Ceccarelli, M.: Problems and procedures for kinematic design of manipulators. LARM: Laboratory of Robotics and Mechatronics, DiMSAT - University of Cassino, Via Di Biasio 43, 03043 Cassino (Fr), Italy, 2005.
- [17] Collard, J.-F.; Duysinx, P.; Fiset, P.: Optimal synthesis of planar mechanisms via an extensible-link approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, ročník 42, č. 3, 2010: s. 403–415, ISSN 1615-147X, doi:10.1007/s00158-010-0500-3.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-010-0500-3>
- [18] Denavit, J.; Hartenberg, R. S.: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, ročník 22, 1955: s. 215–221.
URL <http://ci.nii.ac.jp/naid/10008019314/en/>
- [19] Doty, K. L.; Melchiorri, C.; Schwartz, E.; aj.: Robot manipulability. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, ročník 11, č. 3, 1995: s. 462–468, ISSN 1042-296X, doi:10.1109/70.388791.
- [20] Erdogmus, P.; Toz, M.: *Serial and Parallel Robot Manipulators - Kinematics, Dynamics, Control and Optimization*, kapitola Heuristic Optimization Algorithms in Robotics. InTech, 2012, doi:10.5772/30110.
- [21] Fasshauer, G.: Boundary Value Problems: Collocation (Lecture notes). Illinois Institute of Technology, Department of Applied Mathematics, Chicago.
URL http://www.math.iit.edu/~fass/478578_Chapter_9.pdf
- [22] Fattah, A.; Agrawal, S.: Gravity-balancing of classes of industrial robots. In *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*, 2006, ISSN 1050-4729, s. 2872–2877, doi:10.1109/ROBOT.2006.1642137.
- [23] Gogu, G.: Chebychev Grubler Kutzbachs criterion for mobility calculation of multiloop mechanisms revisited via theory of linear transformations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, ročník 24, č. 3, Květen 2005: s. 427–441, ISSN 09977538, doi:10.1016/j.euromechsol.2004.12.003.
URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.003>

- [24] Gogu, G.: *Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 1: Methodology (Solid Mechanics and Its Applications)*. Springer; 2008 edition (December 10, 2007), 2007, ISBN 978-0313311901.
- [25] Goubej, M.; Svejda, M.: Dynamic analysis and control of robotic manipulator for chemically aggressive environments. In *Mechatronics (ICM), 2013 IEEE International Conference on*, Feb 2013, s. 273–278, doi:10.1109/ICMECH.2013.6518548.
- [26] Goubej, M.; Švejda, M.: Research and design of modular robotic manipulator for chemical aggressive environment. In *Carpathian Control Conference (ICCC), 2011 12th International*, May 2011, s. 374–378, doi:10.1109/CarpathianCC.2011.5945883.
- [27] Goubej, M.; Švejda, M.; Schlegel, M.: *Úvod do mechatroniky, robotiky a systémů řízení pohybu (skripta)*. Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
URL <http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/materialy/Uvod%20do%20mechatroniky.pdf>
- [28] Gracia, L.; Tornero, J.: Tracking trajectories with a robotic manipulator with singularities. In *Proceedings of the 2nd international conference on Advances in brain, vision and artificial intelligence*, BVAI'07, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007, ISBN 3-540-75554-3, 978-3-540-75554-8, s. 595–605.
URL <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1778694.1778763>
- [29] Guerry, S.; Regnier, S.; Ouezdou, F. B.: Kinematic Design of Manipulators. 1998.
- [30] Hansen, J.: Synthesis of Mechanisms Using Time-Varying Dimensions. *Multibody System Dynamics*, ročník 7, č. 1, 2002: s. 127–144, ISSN 1384-5640, doi:10.1023/A:1015247821899.
URL <http://dx.doi.org/10.1023/A%3A1015247821899>
- [31] Hao, F.; Merlet, J.-P.: Multi-criteria optimal design of parallel manipulators based on interval analysis. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 40, č. 2, 2005: s. 157 – 171, ISSN 0094-114X, doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2004.07.002.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X04001211>
- [32] Hay, A. M.; Snyman, J. A.: Methodologies for the optimal design of parallel manipulators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ročník 59, č. 1, 2004: s. 131–152, ISSN 1097-0207, doi:10.1002/nme.871.
URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.871>
- [33] Hayden, T.; Wells, J.: Approximation by matrices positive semidefinite on a subspace. *Linear Algebra and its Applications*, ročník 109, 1988: s. 115 – 130, ISSN 0024-3795, doi:http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(88)90202-9.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379588902029>
- [34] Higham, N. J.: Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix. *Linear Algebra and its Applications*, ročník 103, 1988: s. 103 – 118, ISSN 0024-3795, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(88\)90223-6](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(88)90223-6).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379588902236>
- [35] Hogben, L.: *Handbook of Linear Algebra*. Discrete Mathematics and Its Applications, CRC Press, 2006, ISBN 9781420010572.
URL <https://books.google.cz/books?id=n2g-x10IbvYC>
- [36] Ibarreche, J.; Altuzarra, O.; Petuya, V.; aj.: Structural Synthesis of the Families of Parallel Manipulators with 3 Degrees of Freedom. In *Romansy 19, Robot Design, Dynamics and Control, CISM International Centre for Mechanical Sciences*, ročník 544, editace V. Padois; P. Bidaud; O. Khatib, Springer Vienna, 2013, ISBN 978-3-7091-1378-3, s. 35–42, doi:10.1007/978-3-7091-1379-0_5.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-1379-0_5

- [37] Iliá, D.; Sinatrá, R.: A novel formulation of the dynamic balancing of five-bar linkages with applications to link optimization. *Multibody System Dynamics*, ročník 21, č. 2, 2009: s. 193–211, ISSN 1384-5640, doi:10.1007/s11044-008-9134-2.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-008-9134-2>
- [38] J. Böhm, M. V., K. Belda: The Direct Kinematics for Path Control of Redundant Parallel Robots. *Advances in Systems Science: Measurement, Circuits and Control*, 2001: s. 253–258.
- [39] J.-F. Collard, P. D., P. Fiset: Optimal synthesis of mechanisms using time-varying dimensions and natural coordinates. In *6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, Brazil, June 2005.
- [40] Jáger, A.: Využití 3D CAD dat pro simulace v systému Matlab/Simulink/SimMechanics. Technická zpráva, Západočeská univerzita, Katedra kybernetiky, 2016.
URL http://home.zcu.cz/~arnie87/PUBLICATIONS/2016/Vyuziti_3D_CAD_dat_pro_simulace_v_systemu_Matlab_Simulink_SimMechanics.pdf
- [41] Ji, S.; Wang, G.; Wang, Z.; aj.: Optimal design of a linear delta robot for the prescribed regular-shaped dexterous workspace. In *Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on*, June 2008, s. 2333–2338, doi:10.1109/WCICA.2008.4593287.
- [42] Jiménez, J.; Álvarez, G.; Cardenal, J.; aj.: A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 32, č. 3, 1997: s. 323 – 341, ISSN 0094-114X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(96\)00017-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(96)00017-1).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X96000171>
- [43] Karnopp, D. C.: Random search techniques for optimization problems. *Automatica*, ročník 1, č. 2-3, 1963: s. 111 – 121, ISSN 0005-1098, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(63\)90018-9](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(63)90018-9).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109863900189>
- [44] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.
URL <http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5k10C>
- [45] Khalil, W.; Ibrahim, O.: General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, ročník 49, č. 1, 2007: s. 19–37, ISSN 0921-0296, doi:10.1007/s10846-007-9137-x.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10846-007-9137-x>
- [46] Khalil, W.; Kleinfinger, J.: A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1986 IEEE International Conference on*, ročník 3, Apr 1986, s. 1174–1179, doi:10.1109/ROBOT.1986.1087552.
- [47] Khatib, O.: Redundant Manipulators and Kinematic Singularities The Operational Space Approach. In *RoManSy 6*, editace A. Morecki; G. Bianchi; K. Kedzior, Springer US, 1987, ISBN 978-1-4684-6917-2, s. 131–138, doi:10.1007/978-1-4684-6915-8_12.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-6915-8_12
- [48] Kirk, D. E.: *Optimal control theory; an introduction*. Prentice-Hall, Duben 1970, ISBN 0486434842.
URL <http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20&path=ASIN/0486434842>

- [49] Knüppel, O.: PROFIL/BIAS—A fast interval library. *Computing*, ročník 53, č. 3: s. 277–287, ISSN 1436-5057, doi:10.1007/BF02307379.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02307379>
- [50] Kolda, T. G.; Lewis, R. M.; Torczon, V.: Optimization by direct search: New perspectives on some classical and modern methods. *SIAM Review*, ročník 45, 2003: s. 385–482.
- [51] Kroese, D. P.; Rubinstein, R. Y.: Monte Carlo methods. *WIREs Comp Stat*, ročník 4, 2012, doi:10.1002/wics.194.
- [52] Krotký, T.: *Návrh optimalizace trajektorie vybraného manipulátoru výrobní linky na výrobu pantů*. Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, Katedra kabernetiky, 2014.
URL <https://portal.zcu.cz/StagPortletsJSR168/KvalifPraceDownloadServlet?typ=1&adipidno=59369>
- [53] Kucuk, S.; Bingul, Z.: Comparative study of performance indices for fundamental robot manipulators. *Robotics and Autonomous Systems*, ročník 54, č. 7, 2006: s. 567 – 573, ISSN 0921-8890, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2006.04.002>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889006000546>
- [54] Lagarias, J. C.; Reeds, J. A.; Wright, M. H.; aj.: Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, ročník 9, 1998: s. 112–147.
- [55] Lewis, F.; Vrabie, D.; Syrmos, V.: *Optimal Control*. EngineeringPro collection, Wiley, 2012, ISBN 9781118122723.
URL https://books.google.cz/books?id=U3Gtlot_hYEC
- [56] Li, W.; Todorov, E.: An Iterative Optimal Control and Estimation Design for Non-linear Stochastic System. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, Dec 2006, s. 3242–3247, doi:10.1109/CDC.2006.377485.
- [57] Li, W.; Todorov, E.: Iterative linearization methods for approximately optimal control and estimation of non-linear stochastic systems. In *International Journal of Control*, ročník 80, 2007, s. 1439–1453.
- [58] Lin, P. Y.; Shieh, W. B.; Chen, D. Z.: Design of a Gravity-Balanced General Spatial Serial-Type Manipulator. *Journal of Mechanisms and Robotics*, ročník 2, č. 3, 2010: s. 031003+, doi:10.1115/1.4001816.
URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.4001816>
- [59] Lou, Y.; Liu, G.; Chen, N.; aj.: Optimal design of parallel manipulators for maximum effective regular workspace. In *Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005). 2005 IEEE/RSJ International Conference on*, Aug 2005, s. 795–800, doi:10.1109/IROS.2005.1545.
- [60] Maciejewski, A. A.; Klein, C. A.: Obstacle Avoidance for Kinematically Redundant Manipulators in Dynamically Varying Environments. *The International Journal of Robotics Research*, ročník 4, č. 3, 1985: s. 109–117, doi:10.1177/027836498500400308, <http://ijr.sagepub.com/content/4/3/109.full.pdf+html>.
URL <http://ijr.sagepub.com/content/4/3/109.abstract>
- [61] Maciejewski, A. A.; Klein, C. A.: Numerical filtering for the operation of robotic manipulators through kinematically singular configurations. *Journal of Robotic Systems*, ročník 5, č. 6, 1988: s. 527–552, ISSN 1097-4563, doi:10.1002/rob.4620050603.
URL <http://dx.doi.org/10.1002/rob.4620050603>

- [62] Manocha, D.; Canny, J. F.: Efficient Inverse Kinematics for General 6R Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, ročník 10, 1994: s. 648–657.
- [63] Mansouri, I.; Ouali, M.: A new homogeneous manipulability measure of robot manipulators, based on power concept. *Mechatronics*, ročník 19, č. 6, 2009: s. 927 – 944, ISSN 0957-4158, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechatronics.2009.06.008>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957415809001202>
- [64] Mansouri, I.; Ouali, M.: The power manipulability ? A new homogeneous performance index of robot manipulators. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, ročník 27, č. 2, 2011: s. 434 – 449, ISSN 0736-5845, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.rcim.2010.09.004>, <ce:title>Translational Research ? Where Engineering Meets Medicine</ce:title>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736584510001225>
- [65] MapleSoft: Maple.
URL <http://www.maplesoft.com/>
- [66] Mark W. Spong, M. V., Seth Hutchinson: *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005.
- [67] Mathews, J. H.; Fink, K. D.: *Numerical Methods Using MATLAB*. Simon & Schuster, třetí vydání, 1998, ISBN 0132700425.
- [68] MathWorks, T.: *SimMechanics User's Guide*, www.mathworks.com.
- [69] Mayorga, R. V.; Carrera, J.; Oritz, M. M.: A kinematics performance index based on the rate of change of a standard isotropy condition for robot design optimization. *Robotics and Autonomous Systems*, ročník 53, č. 3?4, 2005: s. 153 – 163, ISSN 0921-8890, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2005.09.010>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889005001387>
- [70] p. Merlet, J.; Antipolis, I. S.: Optimal design of robots. In *in Robotics: Science and Systems*, 2005, s. 8–11.
- [71] Merlet, J. P.: Kinematics' not dead! In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, ročník 1, 2000, ISSN 1050-4729, s. 1–6 vol.1, doi:10.1109/ROBOT.2000.844031.
- [72] Merlet, J.-P.: Interval Analysis and Reliability in Robotics. Březen 2006.
URL <http://hal.inria.fr/inria-00001152>
- [73] Merlet, J.-P.: Interval analysis for Certified Numerical Solution of Problems in Robotics. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, ročník -, 2009: s. –.
URL <http://hal.inria.fr/inria-00362431>
- [74] Merlet, J. P.: *Parallel Robots*. Springer Publishing Company, Incorporated, druhé vydání, 2010, ISBN 9048170532, 9789048170531.
- [75] Minnaar, R.; Tortorelli, D.; Snyman, J.: On nonassembly in the optimal dimensional synthesis of planar mechanisms. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, ročník 21, č. 5, 2001: s. 345–354, ISSN 1615-147X, doi:10.1007/s001580100113.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s001580100113>
- [76] Moore, B.; Schicho, J.; Gosselin, C. M.: Determination of the complete set of shaking force and shaking moment balanced planar four-bar linkages. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 44, č. 7, 2009: s. 1338 – 1347, ISSN 0094-114X, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.10.004>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X08002139>

- [77] Murray, D. M.; Yakowitz, S. J.: Differential dynamic programming and Newton's method for discrete optimal control problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, ročník 43, č. 3: s. 395–414, ISSN 1573-2878, doi:10.1007/BF00934463. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00934463>
- [78] Nocedal, J.; Wright, S. J.: *Numerical Optimization*. Springer New York, 2006, ISBN 978-0-387-40065-5.
- [79] Oetomo, D.; Ang Jr, M. H.: Singularity robust algorithm in serial manipulators. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, ročník 25, February 2009: s. 122–134, ISSN 0736-5845, doi:10.1016/j.rcim.2007.09.007. URL <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1464524.1464977>
- [80] Ouezdou, F. B.; Regnier, S.: General Method for Kinematic Synthesis of Manipulators with Task Specifications. *Robotica*, ročník 15, 1997: s. –.
- [81] Ouyang, P.; Li, Q.; Zhang, W.: Integrated design of robotic mechanisms for force balancing and trajectory tracking. *Mechatronics*, ročník 13, č. 8-9, 2003: s. 887 – 905, ISSN 0957-4158, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0957-4158\(03\)00007-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0957-4158(03)00007-2), <ce:title>Computational Intelligence in Mechatronic Systems</ce:title>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957415803000072>
- [82] Ouyang, P. R.; Zhang, W. J.: Force Balancing of Robotic Mechanisms Based on Adjustment of Kinematic Parameters. *Journal of Mechanical Design*, ročník 127, č. 3, 2005: s. 433–440. URL <http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=JMDEDB000127000003000433000001&idtype=cvips&gifs=yes>
- [83] Park, F.; Bobrow, J.: Efficient geometric algorithms for robot kinematic design. In *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, ročník 2, 1995, ISSN 1050-4729, s. 2132–2137 vol.2, doi:10.1109/ROBOT.1995.525576.
- [84] Pettersson, M.: *Design Optimization in Industrial Robotics, Methods and Algorithms for Drive Train Design*. Dizertační práce, Department of Management and Engineering, Design, Linköpings universitet, 2008.
- [85] Pettersson, M.; Krus, P.; Andersson, J.: On optimal drive train design in industrial robots. In *Industrial Technology, 2005. ICIT 2005. IEEE International Conference on*, 2005, s. 254–259, doi:10.1109/ICIT.2005.1600645.
- [86] Price, W. L.: A controlled random search procedure for global optimisation. *The Computer Journal*, ročník 20, č. 4, 1977: s. 367–370, doi:10.1093/comjnl/20.4.367, <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/20/4/367.full.pdf+html>. URL <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/20/4/367.abstract>
- [87] Raghavan, M.; Roth, B.: Inverse Kinematics of the General 6R Manipulator and Related Linkages. *Journal of Mechanical Design*, ročník 115, 1993, doi:10.1115/1.2919218.
- [88] Reklaitis, G.; Ravindran, A.; Ragsdell, K.: *Engineering Optimization: Methods and Applications*. A Wiley-Interscience Publication, Wiley, 1983, ISBN 9780471055792. URL <https://books.google.cz/books?id=Tj6NjGvk7b4C>
- [89] Robert, C. P.; Casella, G.: *Introducing Monte Carlo Methods with R*, kapitola Monte Carlo Optimization. New York, NY: Springer New York, 2010, ISBN 978-1-4419-1576-4, s. 125–165, doi:10.1007/978-1-4419-1576-4_5. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-1576-4_5

- [90] Roth, B.: Computations in Kinematics. In *Computational Kinematics, Solid Mechanics and Its Applications*, ročník 28, editace J. Angeles; G. Hommel; P. Kováčics, Springer Netherlands, 1993, ISBN 978-90-481-4342-9, s. 3–14, doi:10.1007/978-94-015-8192-9_1.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-015-8192-9_1
- [91] Rump, S. M.: INTLAB - INTerval LABoratory.
URL <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>
- [92] Rump, S. M.: PROFIL/BIAS.
URL http://www.ti3.tuhh.de/keil/profil/index_e.html
- [93] Rump, S. M.: *Developments in Reliable Computing*, kapitola INTLAB — INTerval LABoratory. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999, ISBN 978-94-017-1247-7, s. 77–104, doi:10.1007/978-94-017-1247-7_7.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-1247-7_7
- [94] Russo, A.; Sinatra, R.; Xi, F.: Static balancing of parallel robots. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 40, č. 2, 2005: s. 191 – 202, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2004.06.011>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X0400120X>
- [95] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.
URL <http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC>
- [96] Sebestyén, G.: *Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems*. Diplomová práce, Department of Applied Analysis and Computational Mathematics, Eötvös Loránd University, Budapest, 2011.
- [97] Selig, J.: Lie Groups and Lie Algebras in Robotics. In *Computational Noncommutative Algebra and Applications, NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*, ročník 136, editace J. Byrnes, Springer Netherlands, 2005, ISBN 978-1-4020-1982-1, s. 101–125, doi:10.1007/1-4020-2307-3_5.
URL http://dx.doi.org/10.1007/1-4020-2307-3_5
- [98] Champine, L. F.; Kierzenka, J.; Reichelt, M. W.: Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c. October 2006.
URL http://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/che512/bvp_paper.pdf
- [99] Shewchuk, J. R.: An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain. Technická zpráva, Pittsburgh, PA, USA, 1994.
- [100] Siciliano, B.: Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, ročník 3, č. 3, 1990: s. 201–212, ISSN 0921-0296, doi:10.1007/BF00126069.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00126069>
- [101] Snyman, J.: A new and dynamic method for unconstrained minimization. *Applied Mathematical Modelling*, ročník 6, č. 6, 1982: s. 449 – 462, ISSN 0307-904X, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X\(82\)80007-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X(82)80007-3).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X82800073>
- [102] Snyman, J.: An improved version of the original leap-frog dynamic method for unconstrained minimization: LFOP1(b). *Applied Mathematical Modelling*, ročník 7, č. 3, 1983: s. 216 – 218, ISSN 0307-904X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X\(83\)90011-2](http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X(83)90011-2).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X83900112>

- [103] Snyman, J.: The {LFOPC} leap-frog algorithm for constrained optimization. *Computers & Mathematics with Applications*, ročník 40, č. 8-9, 2000: s. 1085 – 1096, ISSN 0898-1221, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(00\)85018-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(00)85018-X).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812210085018X>
- [104] Snyman, J.: *Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms*. Applied Optimization, Springer, 2005, ISBN 9780387243481.
URL http://books.google.cz/books?id=0tFmf_UK17oC
- [105] Snyman, J.: On non-assembly in the optimal synthesis of serial manipulators performing prescribed tasks. In *Advances in Robot Kinematics*, editace J. Lennarčič; B. Roth, Springer Netherlands, 2006, ISBN 978-1-4020-4940-8, s. 349–356, doi:10.1007/978-1-4020-4941-5_38.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-4941-5_38
- [106] Snyman, J.; Berner, D.: The design of a planar robotic manipulator for optimum performance of prescribed tasks. *Structural optimization*, ročník 18, č. 2-3, 1999: s. 95–106, ISSN 0934-4373, doi:10.1007/BF01195984.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01195984>
- [107] Snyman, J.; Hay, A.: The spherical quadratic steepest descent (SQSD) method for unconstrained minimization with no explicit line searches. *Computers & Mathematics with Applications*, ročník 42, č. 1-2, 2001: s. 169 – 178, ISSN 0898-1221, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00141-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00141-9).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122101001419>
- [108] Snyman, J.; Hay, A.: The Dynamic-Q optimization method: An alternative to SQP? *Computers & Mathematics with Applications*, ročník 44, č. 12, 2002: s. 1589 – 1598, ISSN 0898-1221, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(02\)00281-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00281-X).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812210200281X>
- [109] Snyman, J.; Stander, N.; Roux, W.: A dynamic penalty function method for the solution of structural optimization problems. *Applied Mathematical Modelling*, ročník 18, č. 8, 1994: s. 453 – 460, ISSN 0307-904X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X\(94\)90307-7](http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X(94)90307-7).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X94903077>
- [110] Snyman, J.; Tonder, F.: Optimum design of a three-dimensional serial robot manipulator. *Structural optimization*, ročník 17, č. 2-3, 1999: s. 172–185, ISSN 0934-4373, doi:10.1007/BF01195942.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01195942>
- [111] Snyman, J. A.: UNCONSTRAINED MINIMIZATION BY COMBINING THE DYNAMIC AND CONJUGATE GRADIENT METHODS. *Quaestiones Mathematicae*, ročník 8, č. 1, 1985: s. 33–42, doi:10.1080/16073606.1985.9631898, <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/16073606.1985.9631898>.
URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/16073606.1985.9631898>
- [112] Stocco, L.; Salcudean, S. E.; Sassani, F.: Fast Constrained Global Minimax Optimization of Robot Parameters. *Robotica*, ročník 16, č. 6, Listopad 1998: s. 595–605, ISSN 0263-5747, doi:10.1017/S0263574798000435.
URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0263574798000435>
- [113] Stocco, L.; Salcudean, S. E.; Sassani, F.: Matrix normalization for optimal robot design. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1998, s. 434–439.

- [114] Sun, L.; Ding, Q.; Liu, X.: Optimal kinematic design of a 2-DOF planar parallel robot. In *Robotics, Automation and Mechatronics, 2004 IEEE Conference on*, ročník 1, 2004, s. 225–230 vol.1, doi:10.1109/RAMECH.2004.1438921.
- [115] Svejda, M.; Cechura, T.: Interpolation method for robot trajectory planning. In *Process Control (PC), 2015 20th International Conference on*, June 2015, s. 406–411, doi:10.1109/PC.2015.7169997.
- [116] Svejda, M.; Goubelj, M.: Innovative design and control of robotic manipulator for chemically aggressive environments. In *Carpathian Control Conference (ICCC), 2012 13th International*, May 2012, s. 715–720, doi:10.1109/CarpathianCC.2012.6228739.
- [117] Todorov, E.; Li, W.: A generalized iterative LQG method for locally-optimal feedback control of constrained nonlinear stochastic systems. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2004.
- [118] Todorov, E.; Li, W.: Iterative linear-quadratic regulator design for nonlinear biological movement systems. In *1st International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, ročník 1, 2004.
- [119] Todorov, E.; Li, W.: A generalized iterative LQG method for locally-optimal feedback control of constrained nonlinear stochastic systems. In *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, June 2005, ISSN 0743-1619, s. 300–306 vol. 1, doi:10.1109/ACC.2005.1469949.
- [120] Todorov, E.; Tassa, Y.: Iterative local dynamic programming. In *Adaptive Dynamic Programming and Reinforcement Learning, 2009. ADPRL '09. IEEE Symposium on*, March 2009, s. 90–95, doi:10.1109/ADPRL.2009.4927530.
- [121] Švejda, M.: Kinematic Analysis of Parallel Spherical Wrist Manipulator. Technická zpráva, University of West Bohemia, 2009.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2009/1_PSWmanipulatorOptimal.pdf
- [122] Švejda, M.: Overview of parallel architectures for gearing robot. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2009.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2009/2_report_gearingRobot_kinematics.pdf
- [123] Švejda, M.: Analýza a optimalizace planárního paralelního robotu. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2010.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2010/2_optimalizaceATEGA_dualScara.docx
- [124] Švejda, M.: OPTIMAL KINEMATIC DESIGN OF PARALLEL SPHERICAL WRIST MANIPULATOR. In *International Carpathian Control Conference*, 2010.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2010/1_svejda_fullPaper.doc
- [125] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf), 2011.
- [126] Švejda, M.: Inverzní kinematická a statická úloha manipulátoru AGEBOT. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2012/1_agebot_kinematika_komplet.pdf
- [127] Švejda, M.: Kinematická kalibrace sériových a paralelních manipulátorů (Aplikace kalibračních metod na sério-paralelní manipulátor AGEBOT). Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2012.

- [128] Švejda, M.: Úvod do robotiky a mechatronicky. Přednášky k předmětu, 2012.
URL <http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/>
- [129] Švejda, M.: Algoritmy řízení pro vybranou variantu manipulátoru pro NDT - návrh realizace. Technická zpráva, ZČU v Plzni, Katedra kybernetiky, 2013.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/7_UJV_ridiciSoftware.pdf
- [130] Švejda, M.: Manipulátor pro NDT (varianta 2: RRPR manipulátor). Technická zpráva, Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/6_generatoryUJVrobot.pdf), 2013.
- [131] Švejda, M.: Výběr architektury manipulátoru, plánování trajektorií. Technická zpráva, ZČU v Plzni, 2013.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2013/1_UJV_NDTrobot_vyberArchitektur.pdf
- [132] Švejda, M.: New Robotic Architecture for NDT Applications. In *World Congress IFAC*, ročník 19, 2014, s. 11761–11766, doi:10.3182/20140824-6-ZA-1003.00989.
- [133] Švejda, M.: Algoritmy plánování pohybu manipulátoru Sáva. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2015.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/3_AlgPlanovaniPohybu.pdf
- [134] Švejda, M.: Comparison of serial and parallel structures for 3-link manipulator arm, advanced parametric optimization of special construction. Technická zpráva, NTIS, ZČU v Plzni, 2015.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/9_zakladaceParalelni_navrh_optimalizace.pdf
- [135] Švejda, M.: Existing methods and tools for optimization of mechatronic systems in terms of structure, parameters and control. Technická zpráva, University of West Bohemia, 2015.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/1_optimalizace.pdf
- [136] Švejda, M.: Kinematical, kinetostatical and dynamical analysis of 4DoF manipulator, parametric optimization of mechanical construction (WP5-DV026). Technická zpráva, NTIS, ZČU v Plzni, 2015.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/8_zakladace_navrh_optimalizace.pdf
- [137] Švejda, M.: „robotLib“ (knihovna předimplementovaných funkcí a funkčních bloků). 2016.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/PhD_disertace/Algoritmy/robotLib/
- [138] Švejda, M.; Čechura, T.; Jáger, A.: Výukový model pro robotiku (projekt ZČU: VS-14-019, příloha k závěrečné zprávě). Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2015.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2015/11_zaverecnaZpravaPriloha_VS_14_019.pdf
- [139] Švejda, M.; Čechura, T.; Jáger, A.: Výukový model pro robotiku - rozšíření, moderní algoritmy v robotice (projekt ZČU: VS-15-011, příloha k závěrečné zprávě). Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2016.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2016/1_zaverecnaZpravaPriloha_VS_15_011.pdf

- [140] Wan, Y.; Wang, G.; Ji, S.; aj.: A Survey on the Parallel Robot Optimization. In *Intelligent Information Technology Application, 2008. IITA '08. Second International Symposium on*, ročník 2, Dec 2008, s. 655–659, doi:10.1109/IITA.2008.277.
- [141] Wan, Y.; Wang, G.; Ji, S.; aj.: A Y-Star Robot: Optimal Design for the Specified Workspace. In *Computer Science and Software Engineering, 2008 International Conference on*, ročník 1, Dec 2008, s. 1089–1093, doi:10.1109/CSSE.2008.1075.
- [142] Wang, J.; Gosselin, C. M.: Static balancing of spatial three-degree-of-freedom parallel mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 34, č. 3, 1999: s. 437 – 452, ISSN 0094-114X, doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(98)00031-7.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X98000317>
- [143] Wang, J.; Gosselin, C. M.: Static balancing of spatial four-degree-of-freedom parallel mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 35, č. 4, 2000: s. 563 – 592, ISSN 0094-114X, doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00029-4.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X99000294>
- [144] Wang, X.: Solving optimal control problems with MATLAB - Indirect methods.
URL <http://www4.ncsu.edu/~xwang10/document/Solving%20optimal%20control%20problems%20with%20MATLAB.pdf>
- [145] Wang, X.; Baron, L.; Cloutier, G.: Topology of serial and parallel manipulators and topological diagrams. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 43, č. 6, 2008: s. 754 – 770, ISSN 0094-114X, doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.05.005.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X07001073>
- [146] Wang, Z.; Ji, S.; Sun, J.; aj.: A Methodology for Determining the Maximal Regular-shaped Dexterous Workspace of the PMs. In *Mechatronics and Automation, 2007. ICMA 2007. International Conference on*, Aug 2007, s. 827–832, doi:10.1109/ICMA.2007.4303652.
- [147] Wang, Z.; Ji, S.; Sun, J.; aj.: A Methodology for Determining the Reachable and Dexterous Workspace of Parallel Manipulators. In *Mechatronics and Automation, 2007. ICMA 2007. International Conference on*, Aug 2007, s. 2871–2876, doi:10.1109/ICMA.2007.4304015.
- [148] Wang, Z.; Ji, S.; Wan, Y.; aj.: Optimal Design of Parallel Robots for the Prescribed Regular Dexterous Workspace. In *Automation and Logistics, 2007 IEEE International Conference on*, Aug 2007, s. 563–568, doi:10.1109/ICAL.2007.4338628.
- [149] Wang, Z.; Wang, G.; Ji, S.; aj.: Optimal design of a linear Delta robot for the prescribed cuboid dexterous workspace. In *Robotics and Biomimetics, 2007. ROBIO 2007. IEEE International Conference on*, Dec 2007, s. 2183–2188, doi:10.1109/ROBIO.2007.4522508.
- [150] Wells, D.: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. A Penguin original, Penguin Adult, 1997, ISBN 9780140261493.
URL https://books.google.cz/books?id=kQRPkTkk_VIC
- [151] Yun, Y.; Wnag, L.; Guan, L.: Dimensional synthesis of a 3-DOF parallel manipulator. In *Systems, Man and Cybernetics, 2004 IEEE International Conference on*, ročník 6, Oct 2004, ISSN 1062-922X, s. 5317–5323 vol.6, doi:10.1109/ICSMC.2004.1401039.
- [152] Zargarbashi, S.; Khan, W.; Angeles, J.: The Jacobian condition number as a dexterity index in 6R machining robots. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, ročník 28, č. 6, 2012: s. 694 – 699, ISSN 0736-5845, doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.rcim.2012.04.004.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736584512000427>