Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

# Dynamické chování rotorů turbodmychadel

## DISERTAČNÍ PRÁCE

Autor: Ing. Zdeňka Rendlová
Školitel: prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc.
Konzultant: Ing. Michal Hajžman, Ph.D.
Obor: Aplikovaná mechanika

University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences
Department of Mechanics

# Dynamical Behavior of Turbocharger Rotors

## THESIS

Author: Ing. Zdeňka Rendlová
Supervisor: prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc.
Consultant: Ing. Michal Hajžman, Ph.D.
Study field: Applied Mechanics

# Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení tuto disertační práci zpracovanou v rámci doktorského studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem disertační práci zpracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, které jsou uvedeny na konci práce.

V Plzni, 30. září 2016 Zdeňka Rendlová

# Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému školiteli, prof. Ing. Vladimíru Zemanovi, DrSc., za příkladné vedení, vstřícnost, nemalé množství odborných rad a provedené korektury.

Dále děkuji své rodině za podporu, bez níž by tato práce nemohla vzniknout, a v neposlední řadě všem kolegům, kteří se podíleli na zkvalitnění této práce.

Zdeňka Rendlová

# Abstrakt

Disertační práce je zaměřena na problematiku matematického modelování a dynamické analýzy rychloběžných rotorů uložených na ložiskách s plovoucími pouzdry. V práci je přiblížen současný stav řešené problematiky a podrobně popsána metodika modelování subsystému rotor-ložiska. Odvozený matematický model rotoru založený na principu metody konečných prvků respektuje vliv gyroskopických účinků a vliv působení okolního prostředí. Model ložiskových vazeb vychází z klasické teorie hydrodynamického mazání. Odvozený matematický popis zahrnující působení vazbových sil byl využit jako výchozí pro využití nástrojů sloužících k provedení dynamické analýzy. Pro analýzu byly využity dva výpočtové modely - časově nezávislý linearizovaný model a nelineání model popisující chování v časové oblasti. Uvedené postupy byly implementovány ve výpočtovém systému MATLAB a následně využity pro dynamickou analýzu sériově vyráběného rotoru turbodmychadla. Získané numerické výsledky byly následně porovnány s experimentálně získanými daty, konkrétně byla trajektorie pohybu středu čepu ložiska, resp. středu plovoucího pouzdra v ložisku, rychlosti rotace plovoucích pouzder a trajektorie uzlů hřídele v pozichích odpovídajících měřícím bodům.



# Abstract

This dissertation thesis is focused on the mathematical modeling and dynamical nalaysis of high-speed rotating machines supported by floating ring bearings. The state of the art is described and the methodology of modelling of rotor-bearing system is described in detail. the gyroscopic effects and are respected by the derived mathematical description based on finite element method. The mathematical model of bearing supports is based on the classical theory of hydrodynamic lubrication. The mathematical model involving bearing forces is used as the default description for further analysis. Two computational models are used - the time- indenpendent linearized model and the non-linear model decribing time- dependent behavior. The described procedures were implemented in computational system MATLAB and used for dynamical analysis of the mass-produces turbocharger rotor. The computed numerical results were compared with experimental data, namely trajectories of shaft nodes corresponding to measuring points and journal geometric centers. Furthermore, the rotational speeds of floating rings were monitored and compared with results of numerical simulations.

# Obsah

**Seznam použitých symbolů** **3**

**Úvod** **5**

**1 Modelování rotorových subsystémů a ložiskových vazeb** **13**

1.1 Model hřídelových prvků . . . . . 14
1.2 Matematický model hřídele . . . . . 20
1.3 Model kotouče . . . . . 21
1.4 Modelování ložiskové vazby . . . . . 23
1.4.1 Model radiálního hydrodynamického ložiska se souhlasně rotujícími povrchy . . . . . 23
1.4.2 Ložiska s plovoucími pouzdry . . . . . 31
1.5 Model rotoru . . . . . 35

**2 Využití odvozených modelů v dynamické analýze** **37**

2.1 Modální vlastnosti a posouzení stability . . . . . 37
2.1.1 Problém vlastních hodnot . . . . . 38
2.1.2 Stabilita soustavy . . . . . 39
2.2 Vynucené kmitání . . . . . 40
2.2.1 Sestavení vektoru buzení nevyvážeností . . . . . 40
2.2.2 Ustálené harmonicky buzené kmitání . . . . . 42
2.2.3 Vynucené kmitání soustav buzených vlivem nelineárních sil . 44
2.3 Využití kondenzace . . . . . 45

**3 Citlivostní analýza** **47**

3.1 Citlivost vlastních frekvencí a vlastních tvarů nerotující nevázané konzervativní soustavy . . . . . 47
3.2 Citlivost vlastních čísel a vlastních tvarů rotující nekonzervativní soustavy . . . . . 50
3.3 Stanovení citlivosti veličin numericky . . . . . 51

**4 Experimentální měření** **53**

**5 Programová realizace a aplikace** **56**

5.1 Model rotoru turbodmychadla . . . . . 56

5.2 Analýza rotoru založená na linearizovaném modelu . . . . . 58

5.2.1 Modální analýza . . . . . 59

5.2.2 Ustálená odezva na nevyváženost . . . . . 61

5.2.3 Citlivostní analýza . . . . . 63

5.3 Modelování rotoru turbodmychadla v časové oblasti . . . . . 66

5.3.1 Trajektorie středu čepů a středů plovoucích pouzder . . . . . 67

5.3.2 Trajektorie měřících bodů . . . . . 72

5.3.3 Rychlosti rotace plovoucích pouzder . . . . . 73

5.4 Shrnutí získaných výsledků . . . . . 74

**Závěr** **75**

**Seznam použité literatury** **78**

**Publikace autora spojené s tématem práce** **84**

**Seznam obrázků** **85**

**Seznam tabulek** **88**

**A Pomocné matice pro modelování hřídelových prvků** **A-1**

**B Matice vnitřního tlumení v pevném systému souřadnic** **B-1**

**C Odvození koeficientů tuhosti a tlumení olejového filmu pro linearizovaný model uložení** **C-1**

**D Parametry subsystému rotor-ložiska** **D-1**

# Seznam použitých symbolů

| | |
|---|---|
| $A$, $A(x)$ | plocha průřezu |
| $b$, $b_j$ | koeficient tlumení |
| $e$ | excentricita |
| $E_k, E_k^{(e)}$ | kinetická energie systému, konečného prvku $e$ |
| $E_p, E_p^{(e)}$ | potenciální energie systému, konečného prvku $e$ |
| $F$ | síla |
| $h$ | tloušťka vrstvičky olejového filmu |
| i | imaginární jednotka |
| $I, I_0$ | moment setrvačnosti kotouče k příčné ose, k ose symetrie |
| $J, J_\eta, J_\zeta$ | kvadratické momenty průřezu |
| $m$ | hmotnost |
| $n$ | počet stupňů volnosti systému |
| $p$ | tlak vyvolaný v olejovém filmu |
| $p_\nu$ | participační faktor $\nu$-tého módu |
| $q$ | síla generovaná v mazivu vztažená na jednotku délky |
| $q_\nu$ | zobecněná souřadnice |
| $R, R_E^{(e)}, R_I^{(e)}$ | Rayleighova disipační funkce systému, vnějšího a vnitřního tlumení konečného prvku $e$ |
| $t$ | čas |
| $u, u(x,t)$ | podélná výchylka uzlu, průřezu hřídele |
| $v, v(x,t)$ | příčná výchylka ve směru osy y, Y tělesa, průřezu hřídele |
| $w, w(x,t)$ | příčná výchylka ve směru osy z, Z tělesa, průřezu hřídele |
| $\mathbf{A}$ | systémová matice |
| $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_j$ | matice tlumení |
| $\mathbf{e}$ | jednotkový vektor |
| $\mathbf{E}$ | jednotková matice |
| $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ | vektor zobecněných sil |
| $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^{(e)}$ | matice gyroskopických účinků systému, konečného prvku $e$ |

| | |
|---|---|
| $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}^{(e)}$ | matice tuhosti systému, konečného prvku $e$ |
| $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^{(e)}$ | matice hmotnosti tělesa, konečného prvku $e$ |
| $\mathbf{N}$ | matice systému ve stavovém prostoru |
| $\mathbf{p}\,(t)$ | vektor buzení ve stavovém prostoru |
| $\mathbf{P}$ | matice systému ve stavovém prostoru |
| $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{(e)}$ | vektor zobecněných souřadnic systému (tělesa), konečného prvku $e$ |
| $\mathbf{q}_{xyz}$, $\mathbf{q}_{XYZ}$ | vektor zobecněných souřaadnic v rotujícím, pevném systému souřadnic |
| $\mathbf{q}_\nu$ | pravostranný vlastní vektor v prostoru dimenze $n$ |
| $\mathbf{r}_\nu$ | levostranný vlastní vektor v prostoru dimenze $n$ |
| $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}\,(t)$ | transformační matice, mezi pevným a rotujícím systémem souřadnic |
| $\mathbf{u}_\nu$ | pravostranný vlastní vektor ve stavovém prostoru |
| $\mathbf{U}$ | modální matice pravostranných vlastních vektorů ve stavovém prostoru |
| $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\,(x,t)$ | rychlost středu hmotnosti tělesa, elementu hřídele $e$ |
| $\mathbf{v}_\nu$ | pravostranný vlastní vektor v prostoru dimenze $n$ |
| $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_j$ | modální matice systému, subsystému $j$ |
| $\mathbf{w}_\nu$ | levostranný vlastní vektor ve stavovém prostoru |
| $\mathbf{W}$ | modální matice levostranných vlastních vektorů ve stavovém prostoru |
| $\alpha_\nu$ | reálná část komplexního vlastního čísla $\lambda_\nu$ |
| $\beta_\nu$ | imaginární část komplexního vlastního čísla $\lambda_\nu$ |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | vektor přetvoření |
| $\vartheta, \vartheta\,(x,t)$ | Eulerův úhel precese tělesa, průřezu hřídele |
| $\eta, \eta_j$ | dynamická viskozita maziva |
| $\boldsymbol{\Theta}\,(x)$ | kvadratická bázová funkce |
| $\kappa_i$ | smykový parametr |
| $\lambda_\nu$ | vlastní číslo příslušné $\nu$-tému vlastnímu vektoru |
| $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_j$ | spektrální matice systému, subsystému $j$ |
| $\varrho$ | hustota materiálu |
| $\varphi, \varphi\,(x,t)$ | torzní natočení tělesa, průřezu hřídele |
| $\boldsymbol{\Phi}\,(x)$ | kubická bázová funkce |
| $\psi, \psi\,(x,t)$ | Eulerův úhel nutace tělesa, průřezu hřídele |
| $\boldsymbol{\Psi}\,(x)$ | lineární bázová funkce |
| $\omega, \omega_0$ | úhlová rychlost rotace |
| $\Omega, \Omega_\nu$ | úhlová rychlost otáčení průhybové čáry, vlastní frekvence |
| $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\,(x,t)$ | vektor úhlové rychlosti tělesa, elementu hřídele |

# Úvod

Technický pokrok je neodmyslitelně spojen se zvyšováním výkonu strojů při zachování požadavků na spolehlivost, bezpečnost a ekonomičnost provozu. Aby mohlo být zařízení vyrobeno a následně uvedeno do provozu, je nutno popsat jeho chování, a to i za nestandardních podmínek. Proto je potřeba sestavit, i v případě velmi rozsáhlých systémů, výpočtový model zkoumaného systému, který bude s dostatečnou přesností vystihovat jeho reálné vlastnosti a popisovat jeho chování. Existuje celá řada metod využívaných za účelem sestavení dostatečně přesného popisu systémů rozličného charakteru. Z pohledu matematiky tyto metody vedou k sestavení nelineárních diferenciálních rovnic, jejichž řešení je zpravidla prováděno numericky.

S ohledem na tématiku předkládané disertační práce, jež je cílena na analýzu dynamického chování rotoru turbodmychadla, je práce rozčleněna do pěti kapitol. V úvodní části práce je přiblížen současný stav studované problematiky a vytyčeny cíle předkládané disertační práce. V první kapitole je popsána metodika modelování jednotlivých součástí rozsáhlých rotujících systémů a vazeb, jimiž jsou provázány. Ve druhé a třetí kapitole jsou přiblíženy postupy, pomocí kterých lze analyzovat chování systému, zjišťovat významnost vlivu některých parametrů, případně zohlednit pouze jeho významné charakteristiky. Čtvrtá kapitola přibližuje provedené experimentální měření. V páté kapitole je nastíněna programová realizace navrženého postupu, aplikace na konkrétní turbodmychadlo a porovnání numerických výsledků s experimentálními daty. V závěru jsou shrnuty získané poznatky a uvedeny výhledy pro další práci.

## Přehled o současném stavu problematiky

Mezi nepostradatelné části mnoha zařízení užívaných v technické praxi patří rotační stroje, jejichž rotující součásti, rotory, lze z hlediska kinematiky charakterizovat jako tělesa otáčející se kolem osy rotace, jež může být volná nebo pevná. Rotory otáčející se kolem pevné osy rotace lze jednoduše popsat jako hřídele osazené hmotnými oběžnými koly připojené k základu pomocí ložiskových vazeb. Naproti tomu rotory otáčející se

kolem volné osy rotace jsou obvykle soustavy vzájemně provázaných těles nezanedbatelné hmotnosti rotující kolem osy rotace bez potřeby vazby k základu. Jako příklad lze uvést nebeská tělesa. Přestože se zdánlivě jedná o mechanické systémy s odlišným chováním, zejména z hlediska velikosti výchylek, lze je popisovat pomocí téhož přístupu [31].

Z hlediska konstrukce je základní součástí rotoru hřídel, u něhož velmi často převládá jeho podélný rozměr nad příčnými rozměry průřezu. Hřídele jsou velmi často osazeny dalšími součástmi, např. ozubenými koly, spojkami nebo olopatkovanými disky, které lze souhrnně nazývat kotouče. V ideálním případě je hmota rotoru rovnoměrně rozložena kolem osy rotace a jeho pohyb je určen pouze elastickými vlastnostmi materiálu, z něhož je rotor vyroben, a silami generovanými v uložení. V důsledku nehomogenity materiálu, přítomnosti výrobních tolerancí, nepřesnosti montáže, změny provozních parametrů nebo charakteristik doprovodných procesů může dojít ke změně rozložení hmotnosti kolem osy rotace. Tento jev je v literatuře popisován jako nevyváženost [73]. Přítomnost nevyváženosti zpravidla ústí ve změny dynamického chování (např. nárůst amplitud vibrací, nežádoucí intenzita akustických projevů nebo změna charakteristik přestupu tepla), které negativně ovlivňují provoz rotujících systémů zejména v důsledku existence odstředivé síly generované při rotačním pohybu. Tyto síly mohou zapříčinit poškození součástí stroje nebo jeho havárii. Proto je za účelem zajištění dlouhodobého a bezproblémového provozu prováděna korekce nevyváženosti, zpravidla připojením nebo odvrtáním korekčních hmot v potřebném počtu vyvažovacích rovin [63, 55]. Dokonalé vyvážení rotujícího stroje je z důvodu omezené citlivosti vyvažovacích strojů nereálné. Proto se s ohledem na charakter rotoru zpravidla přistupuje k jeho zařazení do tzv. tolerančního pásma, jemuž odpovídá povolená zbytková nevyváženost neohrožující provoz zařízení [29, 27]. Proces vyvažování je komplikován i dalšími vlivy a charakteristikami zařízení, např. nesoudržností materiálu, zkroucením nebo ohybem hřídele.

Všechny součásti rotujících strojů jsou vzájemně propojeny pomocí vazeb, jejichž charakter je obecně nelineární v důsledku jejich konstrukčního řešení. Pokud se jedná o vazby mezi rotorovými subsystémy, jsou zpravidla využívány vazby zubové, ve speciálních případech však i jiné typy vazeb, např. řemenové převodovky nebo spojky. Zubové vazby jsou realizovány prostřednictvím ozubených kol, připojených na hřídele, s nejrůznějšími typy ozubení. Nejčastěji se jedná o čelní kola s přímými nebo šikmými zuby. Jestliže se jedná o vazby mezi rotorovým a statorovým subsystémem, jsou využívány vazby ložiskové. Z hlediska charakteru sil, které jsou ložiska schopna přenášet, případně vyrovnávat, jsou využívána ložiska radiální, v nichž jsou generovány síly ve směru kolmém na osu rotace rotoru, a ložiska axiální, vyrovnávající síly

působící ve směru osy rotace a zabraňující pohybu rotoru v axiálním směru. Mezi nejčastěji užívané typy ložiskových vazeb patří ložiska valivá a kluzná.

Valivá ložiska jsou realizována pomocí valivých elementů (nejčastěji kuliček, válečků nebo kuželů) sestavených do prstence, umístěných mezi vnější a vnitřní kroužek, pohybujících se za přítomnosti maziva zabraňujícího kontaktu povrchů součástí. Na jejich správnou funkci má vliv kvalita povrchů elementu, jejich rozmístění po obvodu ložiska, velikost ložiskové vůle, velikost tření nebo přesnost výroby [18]. Narozdíl od valivých ložisek je úkolem kluzných ložisek zajistit pohyb rotoru vůči statoru jen díky přítomnosti maziva, které proudí v oblasti vymezené vnitřním povrchem skříně ložiska, jakožto součásti statoru, a vnějším povrchem čepu ložiska, jakožto části hřídele rotoru. V mazivu, kterým je obvykle olej, vzduch nebo jiná tekutina, jsou v důsledku rotačního pohybu čepu v prostoru skříně ložiska generovány síly, závislé na geometrických parametrech (např. tloušťka vrstvy maziva), provozních parametrech (např. vstupní tlak maziva do prostoru ložiska, objemový průtok maziva) a uvažovaných vlastnostech maziva [67, 48], které významně ovlivňují funkci ložiska [75].

Popis dynamického chování a stanovení charakteristik rotujícího systému je podmíněn sestavením výpočtového modelu, který vystihuje fyzikální i materiálové vlastnosti analyzovaného systému. U jednodušších materiálových modelů jsou respektovány pouze elastické vlastnosti materiálu, přestože modelované systémy vykazují přítomnost disipativních sil, projevujících se např. snížením amplitud kmitání [6]. Přestože je prokázáno, že dominantním zdrojem tlumení jsou vazby mezi součástmi systému [7], v některých případech je nutno zahrnout vliv materiálového tlumení. V dostupné literatuře je často popisováno jako viskózní [13], ve speciálních případech dokonce jako proporcionální [5]. Pokud je funkcí i jiných parametrů než pouze rychlostí, je označováno jako neviskózní [4, 8, 9], ve speciálních případech jako exponenciální [65] nebo hysterézní [30]. Z hlediska struktury celku existuje celá řada postupů založených na principu diskretizace spojitého systému pomocí vzájemně provázaných diskretizačních bodů, kterým jsou přiřazeny parametry spojitého systému. S počtem diskretizačních bodů úzce souvisí přesnost výpočtového modelu. Se zvyšujícím se počtem diskretizačních bodů se zvyšuje přesnost diskretizace, ale rovněž narůstá výpočtová náročnost. Proto jsou přijímány zjednodušující předpoklady (např. malé posuvy a úhly natočení, rotace konstantní úhlovou rychlostí), jejichž vhodnost je potřeba pečlivě zvážit. Zavedení nevhodného předpokladu může významně negativně ovlivnit prováděnou analýzu. Např. u rotorů otáčejících se kolem volné osy rotace je vhodné nahradit předpoklad malých posuvů a úhlů natočení, jenž nelze v praxi zajistit, předpokladem na konstatní moment hybnosti [31]. Jako další příklady přijímaných zjednodušujících předpokladů lze uvést zanedbání vlivu zkosů (Rayleighova teorie),

zanedbání kinetické energie od ohybu spolu se zkosy (Bernoulliova-Rayleighova teorie) nebo v případě ložiskových vazeb je požadována konstantní teplota maziva nebo dynamická viskozita maziva v celém jeho objemu [78].

Matematický popis rotorů se odvíjí od stanovení jejich charakteristik vzhledem k celku. Pokud je hmotnost hřídele vzhledem k hmotnosti celého rotoru zanedbatelná, lze hmotnost celku koncentrovat do jediného kotouče. V případě jeho centrického umístění vzhledem k tuhým nebo identickým ložiskům, tedy v případě tzv. Lavalova rotoru, lze popsat jeho chování v souladu s [29, 22], tedy sledovat jeho pohyb pouze v rovině kolmé na nedeformovanou osu rotace. V případě, že nelze hmotu hřídele vzhledem k celku zanedbat, pak je potřeba ji do modelu zahrnout. V případě jednodušších výpočtových modelů ji lze přibližně zahrnout např. pomocí náhrady každé části hřídele soustředěnou hmotností v předem zvolené pozici při respektování elastických a modálních vlastností nahrazovaného systému. Např. v [39] je každá část hřídele nahrazena nehmotnou tyčí, která je na svém pravém konci opatřena soustředěnou hmotností, a vazby mezi soustředěnými hmotami jsou modelovány podle tzv. Myklestadtovy metody přenosových matic. Komplexnější modely jsou sestavovány např. pomocí metody konečných prvků (MKP), jejíž princip je pro potřeby diskretizace hřídelů popsán v nemalém počtu publikací, např. [66, 22, 78]. Spočívá v rozčlenění kontinua, v tomto případě hřídele, na konečné prvky, jejichž popis je sestaven s uvažováním přesně definovaných vlastností bez ohledu na jejich pozici v celku. Po využití znalosti vzájemných vazeb mezi prvky lze získat matematický popis celku. Další hojně užívanou metodou je metoda hraničních prvků (MHP). Nachází své využití v případech, kdy není potřeba získávat informace o vnitřních bodech diskretizované oblasti. Přestože je její význam často diskutován, v případě rozsáhlých oblastí poskytuje poměrně přesné výsledky [19, 50].

Modelování ložiskových vazeb je mnohem komplikovanější než tomu je v případě modelování rotujících součástí. Cílem je určit síly generované v ložiskové vazbě na základě znalosti geometrických vlastností vazby a charakteristik maziva. Vzhledem k charakteru ložiskových vazeb lze konstatovat, že se jedná o komponenty silně nelineárního charakteru [35, 68], jejichž vlastnosti jsou významně určovány rychlostí rotace čepu. Jejich skutečné provozní charakteristiky jsou získávány za provozu využitím nejrůznějších diagnostických metod [41], např. na základě charakteru dynamické odezvy [35]. Vzhledem k užívaným metodám diskretizace, které byly diskutovány výše, jsou zpravidla síly generované v ložiskových vazbách soustředěny do jediného bodu odpovídajícího uzlu diskretizace. V případě malých výchylek čepu ze statické rovnovážné polohy je přistupováno i přes nelineární charakter vazbových sil k linearizaci jejich matematického popisu, kdy je využíváno vztahu mezi změnami ložiskových sil

určených jako součet složek tuhostních, úměrných výchylkám, a tlumicích, úměrných rychlostem. Koeficienty úměrnosti jsou vyjadřovány pomocí matice tuhosti a matice tlumení [22, 45], jejichž elementy jsou rovněž závislé na rychlosti rotace čepu v ložisku.

Modelování valivých ložisek je založeno na znalosti geometrických a materiálových charakteristik valivého ložiska. Např. v [49] je předpokládáno rovnoměrné rozmístění valivých elementů po obvodu ložiska a je zanedbán vliv teplotní roztažnosti elementů, popř. prstenců i nerovnost jejich povrchů, mezi nimiž jsou generovány vratné síly popisované pomocí Herzovy teorie kontaktu [44], určené deformacemi a výchylkami dílčích valivých elementů.

Síly generované ve vrstvě maziva, jejíž existencí je podmíněna správná funkce kluzných ložisek, jsou určeny rozložením tlaku napříč mazivem. V souladu se zákonem zachování hmotnosti i zákonem zachování hybnosti [38] lze získat popis rozložení tlaku několika způsoby. V mnoha publikacích je jeho hodnota určována na základě řešení Reynoldsovy rovnice, ve tvaru zohledňujícím přijaté předpoklady, analyticky [14, 44] nebo numericky, např. metodou konečných diferencí [67, 54]. Rozložení tlaku v mazivu lze také získat řešením systému Navier-Stokesových rovnic [14, 1], což je rovněž postup využívaný komerčními softwary. Z důvodu složitosti a nemalé výpočtové náročnosti analýzy je pro modelování proudění maziva přijímána celá řada předpokladů, od kterých se odvíjí volba výpočtového modelu. Na základě hodnoty Reynoldsova čísla je posuzován charakter proudění maziva [68], tj. zda se jedná o laminární [10] nebo turbulentní [45]. S tím souvisí i uvažování vlivu setrvačných sil v mazivu, jež má význam pouze u turbulentně nebo rychle proudícího maziva [40]. Dalším zjednodušením je uvažování konstantní teploty v celém objemu maziva. Tento předpoklad se ale v nemalém počtu případů jeví jako nevhodný, jelikož za provozu stroje je v mazivu generováno teplo, které ovlivňuje únosnost ložisek [64, 38] a jehož přestup do okolí je nutno řešit. V některých případech je potřeba zahrnout do výpočtového modelu i vliv poddajnosti skříně, popř. čepu, ložiska, v jejímž důsledku dochází ke změně geometrie vazby, a tedy i ke změně rozložení tlaku v mazivu [36, 42].

Na základě přijatých předpokladů a s využitím postupů pro sestavování matematických modelů jsou získávány netriviální matematické formulace vystihující fyzikální podstatu fungování rotujících součástí provázaných s ostatními prvky pomocí vazeb. Zpravidla se jedná o nelineární diferenciální rovnice, jejichž řešení je velmi citlivé na volbu počátečních podmínek [72]. Za tímto účelem je posuzována stabilita užitého matematického modelu. U linearizovaných systémů obvykle na základě hodnot vlastních čísel [22], u nelineárních systémů pak na základě sledování kvalitativních změn charakteristik systému proměnných v čase [51]. S ohledem na popis modelovaných systémů je často studována citlivost matematického modelu na hodnotu zvolených

parametrů systému, případně jsou zaváděny bezrozměrové parametry, pomocí kterých je popis upravován [41, 10].

Velmi zajímavým odvětvím rotorové dynamiky je oblast analýzy rotorů s hřídeli uloženými na hydrodynamických ložiskách s plovoucími pouzdry. Z hlediska konstrukce se jedná o speciální prvky vyznačující se dvěma olejovými filmy oddělenými plovoucím pouzdrem. Oproti klasickým radiálním ložiskům se vyznačují silně nelineárními charakteristikami, a tedy i mnohem komplexnějším a komplikovanějším dynamickým chováním rotoru jako celku [61, 69], které může ústit dokonce v nestabilní chování [80] nebo v nežádoucí akustické projevy [16, 59]. Z praktického hlediska je tento typ uložení vyhledáván z důvodu jeho dobrých tlumicích vlastností, relativně nízké pořizovací ceny díky jednoduchosti výroby, nízkým třecím ztrátám v uložení a vyšší odolnosti vůči samobuzenému kmitání ve srovnání s klasickými radiálními ložisky [17, 57, 56, 32, 76]. Tento konstrukční prvek je hojně využíván u pohonů, konkrétně u těch osazených turbodmychadly za účelem zvýšení jejich účinnosti. Jedná se o rychlé rotující systémy široce užívané v letectví, námořnictví, kolejových vozidlech i osobních automobilech [2] zejména z důvodu zvýšení účinnosti pohonu a dosažení nižších hodnot emisí ve výfukových plynech [25, 15, 32]. Jejich účinnost závisí podle [2] na schopnosti transformovat energii výfukových plynů na mechanickou energii, a tu dále na práci kompresoru. Mimo to je účinnost také významně ovlivněna mechanickými třecími ztrátami v ložiskách [25].

Většina publikací věnovaných studiu dynamických charakteristik a chování rotorů turbodmychadel, např. [28, 3], vychází z experimentálních poznatků zaměřených na provozní charakteristiky. Jedná se o poměrně malé lehké rotory rotující vysokou rychlostí, obvykle přes 100 000 otáček za minutu vystavené vysokým teplotám [70, 32]. Z hlediska konstrukce se zpravidla jedná o rotory tvořené hřídelem kruhového průřezu, na jehož koncích jsou pevně centricky nasazena hmotná oběžná kola, turbinové a kompresorové. Jejich vzájemná poloha je zajištěna distanční vložkou a utahovací maticí z vnější strany kompresorového kola. Obvykle jsou tyto rotory uloženy na hydrodynamických ložiskách, z nichž dvě jsou radiální a jedno radiaxiální, umístěných mezi oběžnými koly. V radiálních ložiskách s volnými plovoucími pouzdry dochází k rotaci plovoucího pouzdra zlomkem rychlosti rotace hřídele [56]. Zpravidla se tato rychlost pohybuje v rozmezí 15-40 % rychlosti rotace hřídele [2, 57, 16]. Mimo to, u turbodmychadel užívaných v lokomotivách nebo námořnictví rotujících pomaleji je diskutována vhodnost jejich uložení prostřednictvím valivých ložisek [11, 24]. Dynamické chování subsystému rotor-ložiska je významně komplikováno pohyblivým uložením skříně turbodmychadla [77] a agresivními provozními podmínkami určenými technickými parametry (např. vstupní teplotou spalin nebo tlakem vstřikovaného maziva

do ložisek) a charakterem doprovodných procesů, např. vibroakustickými jevy [3]. Například v důsledku nedokonalého spalování paliva může dojít ke kumulaci nečistot v mezilopatkovém prostoru, a tedy k nárůstu výrobou vnesené nevyváženosti, která rovněž ovlivňuje dynamickou odezvu rotoru turbodmychadla, konkrétně nárůst amplitudy vibrací [32], případně jeho akustické projevy za provozu [56, 53].

Rotory turbodmychadel jsou často modelovány pomocí metody soustředěných hmotností nosníkovými prvky [58] nebo metodou konečných prvků [23, 11] s respektováním gyroskopických účinků a poddajnosti hřídele, případně s využitím komerčních softwarů [20]. Účinek ložiskových podpor je nahrazen silami generovanými na olejových filmech, určenými řešením Reynoldsovy rovnice analyticky [60], případně metodou konečných diferencí nebo numericky v komerčním softwaru. Plovoucí pouzdra jsou často modelována jako tuhá tělesa [56]. Pro modelování dalších vlivů vnášených ostatními součástmi pohonové soustavy je potřeba nejen postihnout podstatu vazeb mezi jednotlivými subsystémy, ale i jejich charakter.

V dostupné literatuře se autoři často omezují na studium ustálené odezvy rotoru turbodmychadla na nevyváženost a posuzování stability pouze v okolí statické rovovážné polohy [62, 60], což úzce souvisí s linearizací matematického popisu a se stanovením tuhostních a tlumicích charakteristik olejového filmu [69, 32, 46]. Protože bylo prokázáno, že parametry ložisek ovlivňují chování subsystému rotor-ložiska byl studován vliv velikosti a poměru ložiskových vůlí, délek kluzných ploch nebo teplot maziva [80]. V případě publikací věnovaných nelineárním modelům se autoři zaměřují především na projevy nestabilního chování olejových filmů v ložiskách [61, 80, 58] a na charakter orbitů v souvislosti s rychlostí rotace za neměnných provozních parametrů [47, 71]. Chování turbodmychadel je vyšetřeno numerickým řešením systému obyčejných diferenciálních rovnic, pomocí kterých je dynamické chování subsystému rotor-ložiska obvykle popsáno.

## Cíle dizertační práce

V předkládané dizertační práci jsou přiblíženy možnosti modelování rotorů tvořených poddajnými hřídeli osazenými tuhými kotouči uloženými na hydrodynamických ložiskách s plovoucími pouzdry. Na základě nabytých znalostí si práce klade následující cíle:

- shrnout metodiku a možnosti využití existujícího linearizovaného modelu ložiskové vazby mezi rotorem a statorem v případě poddajného rotoru uloženého na hydrodynamických ložiskách s plovoucími pouzdry;

- navrhnout metodiku modelování ložiskové vazby odpovídající ložisku s plovoucím pouzdrem využitelnou v nelineární oblasti s ohledem na charakteristiky získané využitím linearizovaného modelu ložiskových vazeb;
- teoreticky zpracovat, zalgoritmizovat a ověřit funkčnost a robustnost použitých algoritmů, zpracovat programové vybavení;
- využít vyvinuté programové vybavení pro sestavení výpočtového modelu konkrétního turbodmychadla a pro analýzu systému rotor-ložiska a získané numerické výsledky následně porovnat s experimentálními daty.

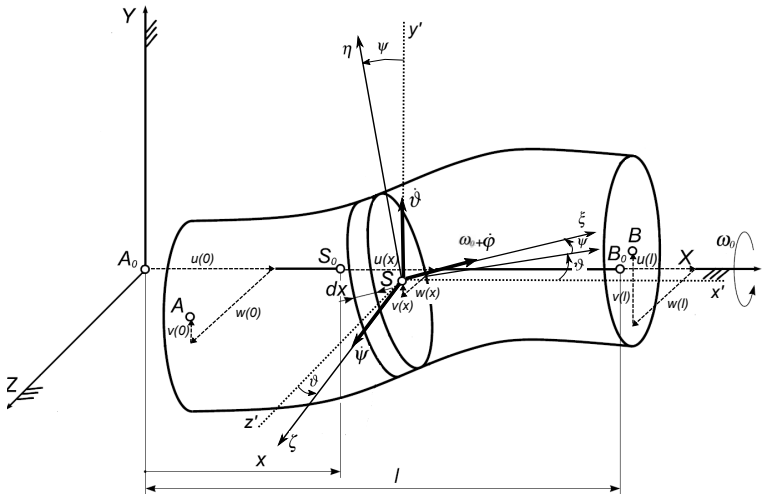
# Kapitola 1

# Modelování rotorových subsystémů a ložiskových vazeb

Základními komponentami rotujících soustav jsou hřídele, na nichž jsou nasazeny nejrůznější disky ozubených kol, kotouče spojek, olopatkovaná kola nebo oběžná kola ventilátorů, souhrnně označovány kotouče. Hřídele osazené kotouči jsou připojeny ke statoru pomocí tzv. ložiskových vazeb, realizovaných nejčastěji pomocí kluzných nebo valivých ložisek. U hřídelů ve většině případů převládá jejich délka nad příčnými rozměry průřezu, proto je lze považovat za jednorozměrná příčně nestlačitelná kontinua. K jejich modelování se nejčastěji využívá metoda konečných prvků, pro jejíž aplikaci je potřeba provést rozčlenění na jednotlivé konečné prvky s respektováním změn příčných rozměrů hřídele, umístění kotoučů a ložiskových vazeb. S ohledem na charakter modelované soustavy a její členení je nutno vhodně zvolit systém souřadnic, ve kterém bude soustava modelována [22]. Obecně lze říci, že v případě rozměrných kotoučů nebo při vysokofrekvenčním buzení je nutno kotouče považovat za poddajná tělesa a je nutno soustavu popisovat v rotujícím souřadnicovém systému $xyz$. Naproti tomu u soustav s ozubenými převody lze kotouče uvažovat jako tuhá tělesa a kmitání těchto soustav je výhodné popsat v pevném systému souřadnic $XYZ$. Vhodným nástrojem pro formulaci matematického popisu rotujících systémů jsou Lagrangeovy rovnice v maticovém tvaru uvedené např. v [66]. S ohledem na další aplikaci bude dále popsáno pouze modelování v pevném systému souřadnic $XYZ$.

## 1.1 Model hřídelových prvků

Uvažujme hřídelový prvek $e$ délky $l$ na obrázku 1.1 jako jednorozměrné kontinuum konající obecný prostorový pohyb, jehož průřez splňuje podmínku $J_\eta(x) = J_\zeta(x) = J$ a $D_{\eta\zeta}(x) = 0$.




Obrázek 1.1: Geometrie hřídelového prvku v pevném systému souřadnic.

Deformace hřídelového prvku lze v libovolném místě $x$ v čase $t$ v pevném souřadnicovém systému $XYZ$ s počátkem $A_0$ popsat pomocí podélné výchylky $u(x,t)$ a příčných výchylek $v(x,t)$, $w(x,t)$ středu průřezu a Eulerovými úhly $\vartheta(x,t)$, $\psi(x,t)$ natočení roviny řezu a úhlem $\varphi(x,t)$ torzního natočení. Pro stručnost dalšího zápisu je argument $t$ vypuštěn. Současně platí Bernoulliova-Navierova hypotéza, tzn. že rovina řezu $\eta$, $\zeta$ i po deformaci zůstává kolmá na deformovanou osu otáčení hřídele. Předpokládejme, že se hřídel rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí $\omega_0$ kolem osy $\xi$, která je kolmá na rovinu řezu. Protože element hřídelového prvku o délce $dx$ ve vzdálenosti $x$ od počátku koná obecný prostorový pohyb, lze provést základní rozklad tohoto pohybu v jeho středu hmotnosti $S$ na unášivý posuvný pohyb rychlostí

$$\mathbf{v}_S(x) = [\dot{u}(x)\ ,\ \dot{v}(x)\ ,\ \dot{w}(x)]^T \tag{1.1}$$

a na relativní sférický pohyb okamžitou úhlovou rychlostí

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \dot{\vec{\vartheta}}(x) + \dot{\vec{\psi}}(x) + \dot{\vec{\varphi}}(x)\ . \tag{1.2}$$

V souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$ lze vektor okamžité úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ vyjádřit ve tvaru

$$\omega = \left[\omega_0 + \dot{\varphi}(x) + \dot{\vartheta}(x)\sin\psi(x)\ ,\ \dot{\vartheta}(x)\cos\psi(x)\ ,\ \dot{\psi}(x)\right]^T\ . \tag{1.3}$$

Kinetickou energii hřídelového prvku $e$ lze v souladu s uvedeným rozkladem pohybu vyjádřit jako součet kinetické energie unášivého posuvu a kinetické energie relativního sférického pohybu, tedy

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2}\int_0^l \left[A\left(x\right)\mathbf{v}_S^T\left(x\right)\mathbf{v}_S\left(x\right) + \omega^T\left(x\right)\mathbf{J}\left(x\right)\omega\left(x\right)\right]\varrho dx\ , \tag{1.4}$$

kde $A\left(x\right)$ představuje plochu průřezu prvku $e$, $\varrho$ hustotu materiálu, z něhož je vyroben diskretizovaný hřídel, $\mathbf{J}\left(x\right) = \mathrm{diag}\left(J_p\left(x\right), J\left(x\right), J\left(x\right)\right)$ je diagonální matice určená polárním momentem průřezu $J_p\left(x\right)$ a kvadratickým momentem průřezu $J\left(x\right)$.

Pokud má hřídelový prvek charakter homogenního izotropního kontinua, lze jeho potenciální (deformační) energii vyjádřit ve tvaru

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2}\int_0^l \int_{(A)} \left[E\varepsilon_x^2 + G\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2\right)\right] dAdx\,, \tag{1.5}$$

kde vystupují materiálové konstanty $E$, $G$ představující moduly pružnosti v tahu a ve smyku.

Pokud respektujeme předpoklad malých úhlů natočení $\psi$, $\vartheta$ a zanedbáme součin $\dot{\vartheta}\psi$ oproti rychlosti torzního natočení $\dot{\varphi}$, lze formulovat aproximační vztahy mezi deformacemi a zobecněnými posuvy uzlů [22]

$$\begin{aligned} u\left(x\right) &= \mathbf{\Psi}\left(x\right)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_3^{(e)}\,, \quad \varphi\left(x\right) = \mathbf{\Psi}\left(x\right)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_4^{(e)}\,, \\ v\left(x\right) &= \mathbf{\Phi}\left(x\right)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1^{(e)}\,, \quad \vartheta\left(x\right) = -\mathbf{\Phi}'\left(x\right)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2\,, \\ w\left(x\right) &= \mathbf{\Phi}\left(x\right)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2^{(e)}\,, \quad \psi\left(x\right) = \mathbf{\Phi}'\left(x\right)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1^{(e)}\,, \end{aligned} \tag{1.6}$$

kde vystupují vektory aproximačních polynomů

$$\mathbf{\Phi}\left(x\right) = \left[1\,,\, x\,,\, x^2\,,\, x^3\right]\ , \quad \mathbf{\Phi}'\left(x\right) = \left[0\,,1\,,\, 2x\ ,3x^2\right]\ , \quad \mathbf{\Psi}\left(x\right) = \left[1\,,\, x\right] \tag{1.7}$$

a matice $\mathbf{S}_j$ ( j=1, 2, 3, 4)

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}\ , \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}\ , \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}\,. \tag{1.8}$$

Vektory $\mathbf{q}_i^{(e)}$ (i = 1, 2, 3, 4) představují vektory posuvů a natočení rovin řezů v koncových bodech hřídelového prvku v pevném systému souřadnic $XYZ$

$$\mathbf{q}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} v\,(0) \\ \psi\,(0) \\ v\,(l) \\ \psi\,(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} w\,(0) \\ \vartheta\,(0) \\ w\,(l) \\ \vartheta\,(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3^{(e)} = \begin{bmatrix} u\,(0) \\ u\,(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4^{(e)} = \begin{bmatrix} \varphi\,(0) \\ \varphi\,(l) \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

V případě malých natočení $\psi$, $\vartheta$ odpovídají vztahům (1.6) následující prodloužení a zkosy

$$\begin{aligned} \varepsilon_X &= \frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \psi}{\partial x} + z\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\,, \quad \varepsilon_Y = 0\,, \quad \varepsilon_Z = 0\,, \\ \gamma_{XY} &= \frac{\partial v}{\partial x} - z\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi\,, \quad \gamma_{XZ} = \frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vartheta\,, \quad \gamma_{YZ} = 0\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Při zanedbatelné deplanaci profilu a s uvažováním definičních vztahů průřezových veličin uvedených v [22] lze výrazy pro kinetickou energii (1.4) a deformační energii (1.5) s ohledem na vyjádření rychlostí (1.1), (1.2), poměrných prodloužení a zkosů (1.10) a závislostí (1.6) dále upravit, podrobněji v [A5]. S ohledem na podobu vektoru zobecněných souřadnic hřídelového prvku

$$\mathbf{q}^{(e)} = \left[\mathbf{q}_1^{(e)T}, \mathbf{q}_2^{(e)T}, \mathbf{q}_3^{(e)T}, \mathbf{q}_4^{(e)T}\right]^T \tag{1.11}$$

lze po využití podmínky ekvivalence levých stran Lagrangeových rovnic se standardním maticovým tvarem rotující struktury získat popis kmitání hřídelového prvku $e$ v maticovém tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}}\right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{M}^{(e)}\ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{G}^{(e)}\dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)}\,, \tag{1.12}$$

kde matice hmotnosti $\mathbf{M}^{(e)}$, matice gyroskopických účinků $\mathbf{G}^{(e)}$, matice tuhosti $\mathbf{K}^{(e)}$ hřídelového prvku $e$ mají blokový charakter

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{2,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{3,3}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{4,4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_{1,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{2,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{3,3}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{4,4}^{(e)} \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Jednotlivé bloky lze vyjádřit v podobě

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1,1}^{(e)} &= \mathbf{S}_1^{-T} \left(\varrho A \mathbf{I}_{\Phi} + \varrho J \mathbf{I}_{\Phi'}\right) \mathbf{S}_1^{-1}, \quad \mathbf{M}_{2,2}^{(e)} = \mathbf{S}_2^{-T} \left(\varrho A \mathbf{I}_{\Phi} + \varrho J \mathbf{I}_{\Phi'}\right) \mathbf{S}_2^{-1}, \\ \mathbf{M}_{3,3}^{(e)} &= \mathbf{S}_3^{-T} \left(\varrho A \mathbf{I}_{\Psi}\right) \mathbf{S}_3^{-1}, \quad \mathbf{M}_{4,4}^{(e)} = \mathbf{S}_3^{-T} \left(2\varrho J \mathbf{I}_{\Psi}\right) \mathbf{S}_3^{-1}, \quad \mathbf{G}_{1,2}^{(e)} = 2\mathbf{S}_1^{-T} \left(\varrho J \mathbf{I}_{\Phi'}\right) \mathbf{S}_2^{-1}, \\ \mathbf{G}_{2,1}^{(e)} &= -2\mathbf{S}_2^{-T} \left(\varrho J \mathbf{I}_{\Phi'}\right) \mathbf{S}_1^{-1}, \mathbf{K}_{1,1}^{(e)} = \mathbf{S}_1^{-T} \left(EJ \mathbf{I}_{\Phi''}\right) \mathbf{S}_1^{-1}, \ \mathbf{K}_{2,2}^{(e)} = \mathbf{S}_2^{-T} \left(EJ \mathbf{I}_{\Phi''}\right) \mathbf{S}_2^{-1}, \\ \mathbf{K}_{3,3}^{(e)} &= \mathbf{S}_3^{-T} \left(EA \mathbf{I}_{\Psi'}\right) \mathbf{S}_3^{-1}, \quad \mathbf{K}_{4,4}^{(e)} = \mathbf{S}_3^{-T} \left(2GJ \mathbf{I}_{\Psi'}\right) \mathbf{S}_3^{-1}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Pomocné matice $\mathbf{I}_j$ $(j = \Phi,\, \Phi',\, \Phi'', \Psi,\, \Psi')$ jsou uvedeny v dodatku A .

### Vliv tlumicích účinků

V případě, že chceme matematický popis hřídelového prvku $e$ rozšířit o vliv tlumicích účinků, je třeba zohlednit nejen odpor prostředí obklopujícího hřídelový prvek (tzv. vnější tlumení), ale i disipaci energie, k níž dochází v důsledku deformace materiálu (tzv. vnitřní tlumení). Oba typy tlumení lze považovat za úměrné rychlostem deformace [22]. Zatímco vnější tlumení je výhodné modelovat v pevném systému souřadnic $XYZ$, vnitřní tlumení zase v rotujícím systému souřadnic $xyz$.

Předpokládejme, že vnější tlumení je důsledkem působení sil působících kolmo na povrch hřídelového prvku proti směru jeho absolutní rychlosti. Pak lze odpovídající Rayleighovu disipační funkci vyjádřit ve tvaru

$$R_E^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ b_{EY} \dot{v}^2 (x) + b_{EZ} \dot{w}^2 (x) \right] dx, \tag{1.15}$$

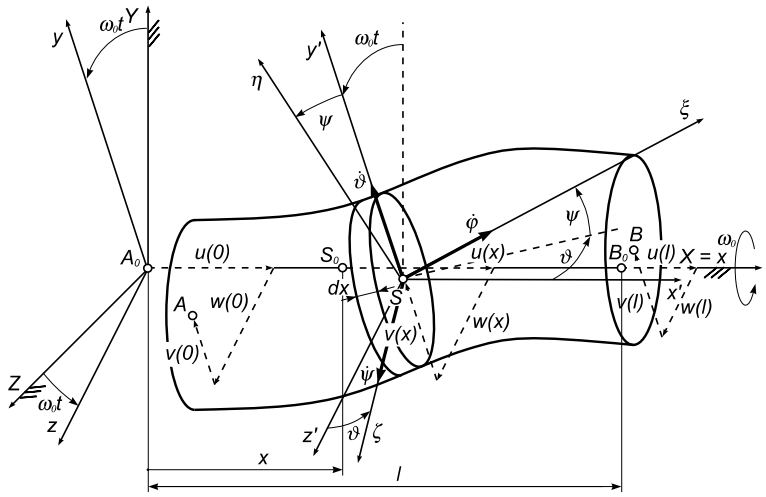
kde $b_{EY}$, $b_{EZ}$ jsou koeficienty vnějšího viskózního tlumení ve směru pevných souřadnicových os $Y$, $Z$ vztažené na jednotkovou délku hřídele. Využitím aproximačních

vztahů (1.6) lze výraz (1.15) dále upravit [A5]. Po využití identity plynoucí z Lagrangeových rovnic získat v čase konstatní matici vnějšího tlumení ve tvaru

$$\mathbf{B}_E^{(e)} = \begin{bmatrix} b_{EY}\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_\Phi\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b_{EZ}\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_\Phi\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{1.16}$$

kde vystupují matice $\mathbf{S}_{1,2}$ ve tvaru (1.8) a pomocná matice $\mathbf{I}_\Phi$ uvedená v dodatku A.

Pro modelování vnitřního tlumení Kelvin-Voightovým materiálovým modelem lze normálové napětí od normálových tlumicích sil vyjádřit ve tvaru $\sigma = b_\sigma E\dot{\varepsilon}_x$ a smyková napětí od tlumicích sil při zkrucování hřídele $\tau_{xy} = b_\tau G\dot{\gamma}_{xy}$ a $\tau_{xz} = b_\tau G\dot{\gamma}_{xz}$, kde $b_\sigma$ a $b_\tau$ představují koeficienty proporcionálního materiálového tlumení a $\gamma_{xy}$, $\gamma_{xz}$ jsou zkosy vyjádřené v rotujícím systému souřadnic $xyz$, viz obrázek 1.2.




Obrázek 1.2: Schéma konečného prvku $e$ popsaného v rotujícím systému souřadnic.

Rayleighova disipační funkce odpovídá záporně vzaté polovině výkonu vnitřních disipačních sil [29]

$$R_I^{(e)} = \frac{1}{2}\int_0^l \int_{(A)} \left[b_\sigma E\dot{\varepsilon}_x^2 + b_\tau G\left(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2\right)\right] dA dx\,. \tag{1.17}$$

Analogickým postupem lze v rotujícím prostoru souřadnic $xyz$ odvodit matici vnitřního tlumení

$$\mathbf{B}_I^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I,1,1}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{I,2,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{I,3,3}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{I,4,4}^{(e)} \end{bmatrix} . \tag{1.18}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{I,1,1} &= b_\sigma E J \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{\Phi''} \mathbf{S}_1^{-1} , \quad \mathbf{B}_{I,2,2} = b_\sigma E J \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_{\Phi''} \mathbf{S}_2^{-1} \\ \mathbf{B}_{I,3,3} &= b_\sigma E A \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{\Psi'} \mathbf{S}_3^{-1} , \quad \mathbf{B}_{I,4,4} = b_\tau 2 G J \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{\Psi'} \mathbf{S}_3^{-1} . \end{aligned} \tag{1.19}$$

S ohledem na skutečnost, že popis hřídelového prvku s uvažováním všech uvedených vlivů je potřeba vyjádřit v jediném systému souřadnic, lze vztah pro přechod z pevného do rotujícího systému souřadnic a naopak vyjádřit jako

$$\mathbf{q}_{XYZ}^{(e)} = \mathbf{T}(t)\, \mathbf{q}_{xyz}^{(e)} , \qquad \dot{\mathbf{q}}_{XYZ}^{(e)}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\, \mathbf{q}_{xyz}^{(e)} + \mathbf{T}(t)\, \dot{\mathbf{q}}_{xyz}^{(e)} , \tag{1.20}$$

kde

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} C\mathbf{E}_4 & -S\mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ S\mathbf{D} & C\mathbf{E}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

a $C = \cos \omega t$, $S = \sin \omega t$, $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(1\,, -1\,, 1\,, -1)$. Vektor tlumicích sil odpovídajících vnitřnímu tlumení vyjádřený v rotujícím systému souřadnic $xyz$ lze podle obrázku 1.2 zapsat s využitím transformačních vztahů (1.20) ve tvaru

$$\mathbf{f}_{I,xyz}^{(e)} = -\mathbf{B}_I^{(e)} \dot{\mathbf{q}}_{xyz}^{(e)} = -\mathbf{B}_I^{(e)} \left[ \mathbf{T}^T(t)\, \dot{\mathbf{q}}_{XYZ}^{(e)} + \dot{\mathbf{T}}^T(t)\, \mathbf{q}_{XYZ}^{(e)} \right] . \tag{1.22}$$

Po transformaci vektoru tlumicích sil (1.22) z rotujícího systému souřadnic $xyz$ do pevného systému souřadni $XYZ$ lze získat vztah

$$\mathbf{f}_{I,XYZ}^{(e)} = \mathbf{T}(t)\, \mathbf{f}_{I,xyz}^{(e)} = -\underbrace{\mathbf{T}(t)\, \mathbf{B}_I^{(e)} \mathbf{T}^T(t)}_{\tilde{\mathbf{B}}_I^{(e)}(t)} \dot{\mathbf{q}}_{XYZ}^{(e)} - \underbrace{\mathbf{T}(t)\, \mathbf{B}_I^{(e)} \dot{\mathbf{T}}^T(t)}_{\tilde{\mathbf{K}}_I^{(e)}(t)} \mathbf{q}_{XYZ}^{(e)} . \tag{1.23}$$

V případě, že je respektováno vnitřní tlumení, čemuž odpovídá $b_\sigma \neq 0$ , $b_\tau \neq 0$, lze dokázat, že vnitřní tlumení za podmínek $J_\eta = J_\zeta = J$ , $D_{\eta\zeta} = 0$ generuje v pev-

ném systému souřadnic symetrickou v čase konstantní disipační matici $\tilde{\mathbf{B}}_I^{(e)} = \mathbf{B}_I^{(e)}$ a antisymetrickou v čase rovněž konstantní cirkulační matici $\tilde{\mathbf{K}}_I^{(e)} = \omega_0 \mathbf{C}_I^{(e)}$, kde

$$\mathbf{C}_I^{(e)} = b_\sigma EJ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} . \tag{1.24}$$

Podrobně je důkaz proveden analogicky k [A8] v dodatku B.

## 1.2 Matematický model hřídele

Jestliže je hřídel rozčleněn pomocí $m$ uzlů na $m-1$ konečných prvků, je potřeba modely jednotlivých prvků vzájemně provázat a sestavit model celého hřídele. Proto je výhodné provést přeskupení vektoru zobecněných souřadnic (1.11) do tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{(e)}(t) = \; & [u(0,t)\,,\, v(0,t)\; w(0,t)\,,\, \varphi(0,t)\,,\, \vartheta(0,t)\,,\, \psi(0,t)\,, \\ & u(l,t)\,,\, v(l,t)\,,\, w(l,t)\,,\, \varphi(l,t)\,,\, \vartheta(l,t)\,,\, \psi(l,t)]^T\,, \end{aligned} \tag{1.25}$$

pomocí transformačního vztahu

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \mathbf{P}\mathbf{q}_{(e)}(t)\,, \tag{1.26}$$

kde $\mathbf{P}$ je permutační matice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{1.27}$$

Transformované matice hřídelových prvků odpovídajících vektoru zobecněných souřadnic ve tvaru (1.25) lze získat jako

$$\mathbf{X}_e = \mathbf{P}^T \mathbf{X}^{(e)} \mathbf{P} \,. \tag{1.28}$$

Pro sestavení modelu celého hřídele je výhodné zavést vektor výchylek jednotlivých uzlů hřídele ve tvaru

$$\mathbf{q}\,(t) = [\ldots u_i\,(t)\,,\ v_i\,(t)\,,\ w_i\,(t)\,,\ \varphi_i\,(t)\,,\ \vartheta_i\,(t)\,,\ \psi_i\,(t)\ldots]^T \,. \tag{1.29}$$

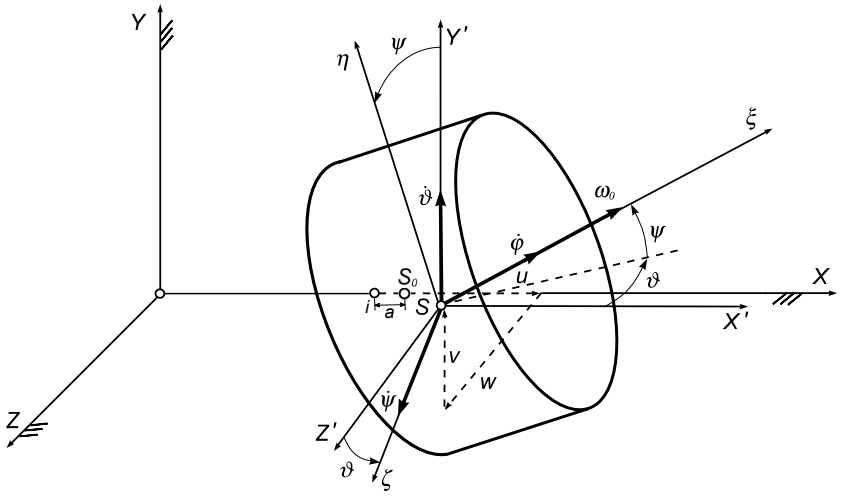
Pohybová rovnice popisující hřídel v pevném systému souřadnic $XYZ$ má tvar

$$\mathbf{M}_E \ddot{\mathbf{q}}\,(t) + [\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I + \omega_0 \mathbf{G}_E]\,\dot{\mathbf{q}}\,(t) + [\mathbf{K}_S + \omega_0 \mathbf{C}_I]\,\mathbf{q}\,(t) = \mathbf{0}\,. \tag{1.30}$$

Příslušné matice jsou blokově diagonální a lze je získat „sumací“ matic popisujících jednotlivé prvky $\mathbf{X} = \sum_e \mathrm{diag}\,[\mathbf{0}, \mathbf{X}_e, \mathbf{0}]$.

## 1.3 Model kotouče

Předpokládejme, že tuhý kotouč přestavuje rotačně symetrické těleso se středem hmotnosti $S$ na ose rotace o hmotnosti $m$, které je centricky kolmo a pevně nasazeno na hřídel v uzlu $i$ podle obrázku 1.3. Jeho kmitavý pohyb je popsán stejně jako pohyb hřídelového prvku třemi posuvy ve směru souřadnicových os a třemi úhly natočení kolem nich.




Obrázek 1.3: Pevně nasazený kotouč.

Kinetická energie kotouče je dána výrazem

$$E_k^{(k)} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_s^T \mathbf{v}_s + \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{I} \omega \,, \tag{1.31}$$

kde $m$ je hmotnost kotouče a $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\,(I_0\,, I\,, I)$ je diagonální matice setrvačnosti kotouče vyjádřená v souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$. Protože úhly $\vartheta$, $\psi$ natočení roviny řezu $\eta$, $\zeta$ hřídele v uzlu $i$ jsou malé, pak lze rychlost středu hmotnosti $S$ kotouče, označenou $\mathbf{v}_s$, v pevném souřadnicovém systému $XYZ$ vyjádřit jako

$$\mathbf{v}_s = \left[ \quad \dot{u}\,, \quad \dot{v} + a\dot{\psi}\,, \quad \dot{w} - a\dot{\vartheta} \quad \right]^T , \tag{1.32}$$

kde $a$ je vzdálenost středu hmotnosti kotouče od uzlu $i$. Vektor okamžité úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ v souřadnicích $\xi$,$\eta$,$\zeta$ má tvar analogický k (1.3), tedy

$$\boldsymbol{\omega} = \left[ \quad \omega_0 + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\sin\psi\,, \quad \dot{\vartheta}\cos\psi\,, \quad \dot{\psi} \quad \right]^T . \tag{1.33}$$

Dosadíme-li složky vektorů (1.32) a (1.33) do rovnice pro kinetickou energii (1.31), dostaneme

$$E_k^{(k)} = \frac{1}{2} m \left[ \dot{u}^2 + \left( \dot{v} + a\dot{\psi} \right)^2 + \left( \dot{w} - a\dot{\vartheta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ I_0 \left( \omega_0 + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\sin\psi \right)^2 + I\dot{\vartheta}^2\cos^2\psi + I\dot{\psi}^2 \right] . \tag{1.34}$$

Předpokládáme-li, že úhly $\vartheta$, $\psi$ jsou malé a rychlost $\dot{\varphi} \ll \omega_0$, pak rovnice popisující kinetickou energii disku lze zapsat jako

$$E_k^{(k)} = \frac{1}{2} m \left[ \dot{u}^2 + \left( \dot{v} + a\dot{\psi} \right)^2 + \left( \dot{w} - a\dot{\vartheta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ I_0 \left( \omega_0 + \dot{\varphi} \right)^2 + 2 I_0 \omega_0 \dot{\vartheta}\psi + I \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \right) \right] . \tag{1.35}$$

Matice hmotnosti a gyroskopických účinků kotouče vyplývají z ekvivalence

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_i + \omega_0 \mathbf{G}_k \dot{\mathbf{q}}_i \,, \tag{1.36}$$

kde $\mathbf{q}_i = [\, u\, v\, w\, \varphi\, \vartheta\, \psi \,]^T$ je vektor zobecněných souřadnic v uzlu $i$ odpovídající subvektoru v (1.29). Pak mají matice hmotnosti $\mathbf{M}_k$ a matice gyroskopických účinků kotouče $\mathbf{G}_k$ tvar

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & ma \\ 0 & 0 & m & 0 & -ma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ma & 0 & I + ma^2 & 0 \\ 0 & ma & 0 & 0 & 0 & I + ma^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{1.37}$$

#### Vliv tlumicích účinků

Stejně jako hřídelové prvky jsou i kotouče vystaveny účinkům sil vyvolaných okolním prostředím a deformací materiálu, z něhož je kotouč vyroben. V případě tuhého kotouče je jeho chování ovlivněno pouze vnějšími silami, kterým je vystaven, tedy vnějším tlumením. Předpokládáme, že tlumicí síly působí kolmo na povrch disku pouze v rovině $Y$, $Z$. Na základě Rayleighovy disipační funkce sestavené obdobným postupem jako u hřídelového prvku $e$, lze získat pro vektor zobecněných souřadnic $\mathbf{q}_i$ matici vnějšího tlumení kotouče $\mathbf{B}_{Ek}$ ve tvaru

$$\mathbf{B}_{Ek} = \mathrm{diag}\,(0, b_{EkY}, b_{EkZ}, 0, 0, 0)\ , \tag{1.38}$$

kde $b_{EkY}$, $b_{EkZ}$ jsou koeficienty vnějšího tlumení. Pokud je model rotujícího hřídele sestaven v rotujícím systému souřadnic $xyz$, stejně jako v případě hřídelového prvku lze matici vnějšího tlumení disku $\mathbf{B}_{Ek}$ ve tvaru (1.38) transformovat pomocí relace (1.20) do rotujícího systému souřadnic $xyz$.

## 1.4 Modelování ložiskové vazby

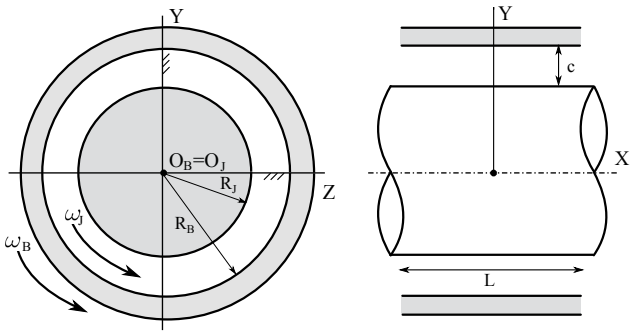
Většina rotujících systémů je uložena na kluzných nebo valivých ložiskách [22], přičemž charakter ložiskových vazeb je zpravidla silně nelineární. Z důvodu složitosti problematiky modelování je přijímána řada zjednodušujících předpokladů, např. respektování předpokladů nestlačitelnosti maziva apod.

### 1.4.1 Model radiálního hydrodynamického ložiska se souhlasně rotujícími povrchy

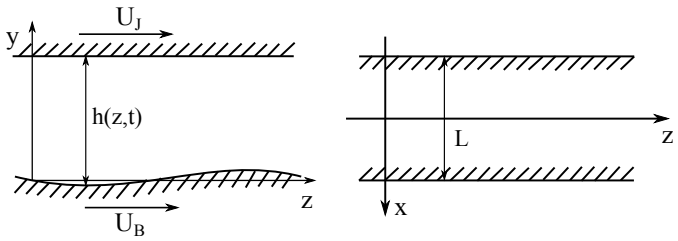
Proudění maziva v ložiskové mezeře hydrodynamických ložisek se řídí předpoklady přijímanými v souladu s klasickou teorií hydrodynamického mazání, jež jsou uvedeny např. v [44]. Uvažujme ložisko kruhového průřezu znázorněné na obrázku 1.4. Rozvineme-li olejový film po obvodu ložiska v rovině symetrie ložiska $Y$, $Z$ kolmé na osu rotace $X$ v souladu s obrázkem 1.4, lze podle obrázku 1.5 odvodit podmínky rovnováhy elementu tekutiny uvedené např. v [78]. Z těchto podmínek rovnováhy lze získat vztahy pro druhé derivace rychlostí v obvodovém a axiálním směru ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\,, \tag{1.39}$$

kde $p$ je tlak generovaný v mazivu a $\eta$ je dynamická viskozita maziva. Integrací lze získat vztahy pro rychlosti proudění maziva ve tvaru polynomů




Obrázek 1.4: Schéma hydrodynamického ložiska kruhového průřezu s čepem v centrální poloze.




Obrázek 1.5: Rozvinutý olejový film.

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2\,, \quad w = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}y^2 + C_3 y + C_4\,, \tag{1.40}$$

přičemž integrační konstanty plynou z okrajových podmínek platných na hranici olejového filmu. Na vnitřním povrchu skříně (B) uvažujme rychlosti $u = U_B$, $w = 0$, vnějším povrchu čepu (J) pak $u = U_J$, $w = 0$, viz obrázek 1.5. Po dosazení do vztahů (1.40) lze získat hodnoty integračních konstant

$$C_1 = \frac{U_J - U_B}{h} - \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h\,, \quad C_2 = U_B\,, \quad C_3 = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}h\,, \quad C_4 = 0\,. \tag{1.41}$$

Výrazy (1.40) určující rychlost proudění maziva lze s uvažováním (1.41) zapsat jako

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 - hy\right) + \frac{U_J - U_B}{h}y + U_B\,, \quad w = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\left(y^2 - hy\right)\,. \tag{1.42}$$

Navíc musí být splněna podmínka spojitosti toku elementárním objemem, konkrétně

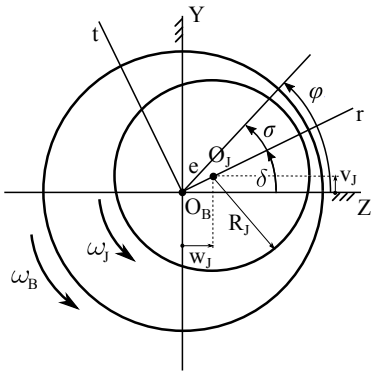
$$\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x}dx\,dz\,dt + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z}dz\,dx\,dt + \frac{\partial h}{\partial t}dt\,dx\,dz = 0\,, \tag{1.43}$$

kde vystupují hmotnostní průtoky elementárním objemem ve tvaru

$$\dot{Q}_x = \int_0^h u\,dy\,, \quad \dot{Q}_z = \int_0^h w\,dy\,. \tag{1.44}$$

S ohledem na integrační konstanty (1.41) lze tyto průtoky zapsat ve tvaru

$$\dot{Q}_x = -\frac{1}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h^3 + \frac{U_J + U_B}{2h}\,, \quad \dot{Q}_z = -\frac{1}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial z}h^3\,. \tag{1.45}$$




Obrázek 1.6: Schéma ložiska s čepem v excentrické poloze.

V důsledku silového působení dojde k vychýlení čepu z centrální polohy o vzdálenost $e\,(t) = \overline{O_B O_J}$ označovanou excentricita, viz obrázek 1.6. Vzhledem ke geometrii vazby lze tloušťku vrstvy maziva popsat vztahem

$$h\,(\varphi, t) = h_0\,(\varphi) - e\,(t)\cos\left(\varphi - \delta\,(t)\right)\,. \tag{1.46}$$

Její derivace podle času má tvar

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\dot{e}\,(t)\cos\left(\varphi - \delta\,(t)\right) - e\,(t)\sin\left(\varphi - \delta\,(t)\right)\dot{\delta}\,(t)\,. \tag{1.47}$$

Vypustíme-li z důvodu zjednodušení dalšího zápisu argument $t$ vyjadřující závislost použitých veličin na čase, lze po dosazení vztahů (1.45) a (1.47) upravit podmínku kontinuity toku (1.43) do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h^3 + \frac{U_J + U_B}{2}h\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial z}h^3\right) = \\ = \dot{e}\cos\left(\varphi - \delta\right) + e\,\dot{\delta}\sin\left(\varphi - \delta\right)\,.\end{aligned} \tag{1.48}$$

S ohledem na kruhový tvar pánve ložiska lze provést tranformaci souřadnic $X = R_B \cdot \varphi$. Pak lze i změnu tloušťky olejového filmu v závislosti na poloze $x$ vyjádřit jako parciální derivaci vztahu (1.46), tedy

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial \left(R_B \varphi\right)} = \frac{1}{R_B} \frac{\partial h}{\partial \varphi} = \frac{1}{R_B} \left[ \frac{\partial h_0}{\partial \varphi} + e \sin\left(\varphi - \delta\right) \right] , \tag{1.49}$$

a následně upravit i rovnici (1.48) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_B^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{1}{12\eta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} h^3 \right) + \frac{U_J + U_B}{2R_B} \left[ \frac{\partial h_0}{\partial \varphi} + e \sin\left(\varphi - \delta\right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} h^3 \right) = \\ = \dot{e} \cos\left(\varphi - \delta\right) + e\, \dot{\delta} \sin\left(\varphi - \delta\right) . \end{aligned} \tag{1.50}$$

Pokud navíc předpokládáme, že $R_J \approx R_B$, lze obvodové rychlosti na vymezujících površích zapsat ve tvaru $U_J = R_B \cdot \omega_J$, $U_B = R_B \cdot \omega_B$ a rovnici (1.50) dále upravit do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_B^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial h}{\partial \varphi} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial z} h^3 \right) = 6\eta \left(\omega_J + \omega_B\right) \frac{\partial h_0}{\partial \varphi} - \\ -12\, \eta\, \dot{e} \cos\left(\varphi - \delta\right) + 6\, \eta\, e \sin\left(\varphi - \delta\right) \left[ \left(\omega_J + \omega_B\right) - 2\dot{\delta} \right] , \end{aligned} \tag{1.51}$$

v literatuře označovaného Reynoldsova rovnice. Odvozená rovnice (1.51) popisuje rozložení tlaku v mazivu radiálního hydrodynamického ložiska s rotujícími povrchy.

V případě, že modelované hydrodynamické ložisko lze považovat za krátké, lze rovněž předpokládat, že pro změny tlaku platí následující relace $\frac{\partial p}{\partial \varphi} \ll \frac{\partial p}{\partial z}$, a tedy i $\frac{\partial p}{\partial \varphi} \approx 0$. Pro geometrii znázorněnou na obrázku 1.4 platí, že nominální tloušťka olejového filmu je určena předpisem $h_0 = R_B - R_J$ a je rovna tzv. ložiskové vůli označované $c$. Vztah (1.46) popisující tloušťku olejového filmu lze upravit do tvaru

$$h\left(\varphi, t\right) = c - e \cos\left(\varphi - \delta\right) . \tag{1.52}$$

S ohledem na výše uvedená zjednodušení přejde Reynoldsova rovnice (1.51) do tvaru

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{6\eta}{h^3} A\left(\varphi, t\right) , \tag{1.53}$$

kde

$$A\left(\varphi,t\right)=\left[e\sin\left(\varphi-\delta\right)\left[\left(\omega_J+\omega_B\right)-2\dot{\delta}\right]-2\dot{e}\cos\left(\varphi-\delta\right)\right]\,. \tag{1.54}$$

Po provedení integrace získáme rozložení tlaku v mazivu ve tvaru

$$p\left(\varphi,z,t\right)=\frac{6\eta z^2}{2h^3}A\left(\varphi,t\right)+C_5z+C_6 \tag{1.55}$$

s integračními konstantami plynoucími z okrajových podmínek pro rozložení tlaku

$$\frac{\partial p}{\partial z}\left(z=0\right)=C_5=0\,,\quad p\left(z=\pm\frac{L}{2}\right)=\frac{3\eta}{h^3}\left(\frac{L}{2}\right)^2A\left(\varphi,t\right)+C_6=0\,. \tag{1.56}$$

Jejich dosazením do výrazu (1.55) získáme popis rozložení tlaku ve tvaru

$$p\left(\varphi,z,t\right)=\frac{3\eta}{h^3}\left(z^2-\frac{L^2}{4}\right)A\left(\varphi,t\right)\,. \tag{1.57}$$

Ze znalosti funkce (1.57) lze určit sílu generovanou v mazivu vztaženou na jednotku délky

$$q\left(\varphi,t\right)=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}p\left(\varphi,z,t\right)dz=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{3\eta}{h^3}\left(z^2-\frac{L^2}{4}\right)A\left(\varphi,t\right)dz=-\frac{\eta L^3}{2h^3}A\left(\varphi,t\right)\,. \tag{1.58}$$

Zavedeme-li tzv. poměrnou excentricitu $\varepsilon=\frac{e}{c}$ a označíme-li $\omega=\omega_J+\omega_B$ a $\sigma=\varphi-\delta$, lze výraz (1.54) zapsat jako

$$A\left(\sigma,t\right)=c\left[\varepsilon\sin\sigma\left(\omega-2\dot{\delta}\right)-2\dot{\varepsilon}\cos\sigma\right]\,. \tag{1.59}$$

Po dosazení vztahů (1.52) a (1.59) lze výraz (1.58) dále upravit do tvaru

$$q\left(\sigma,t\right)=\frac{\eta L^3\omega}{2c^2}\frac{\varepsilon\sin\sigma\left(\frac{2\dot{\delta}}{\omega}-1\right)+\frac{2\dot{\varepsilon}}{\omega}\cos\sigma}{\left[1-\varepsilon\cos\sigma\right]^3}\,. \tag{1.60}$$

Skutečná síla generovaná ve vrstvě maziva je v rotujícím systému souřadnic určena radiální a tečnou složkou, které lze v souladu s obrázkem 1.6 stanovit jako

$$F_r=\int_{\pi}^{2\pi}q\left(\sigma,t\right)\cos\sigma R_B\,d\sigma\,,\quad F_t=\int_{\pi}^{2\pi}q\left(\sigma,t\right)\sin\sigma R_B\,d\sigma\,. \tag{1.61}$$

Po dosazení (1.60) a další úpravě lze složky síly vyjádřit jako

$$F_r = \frac{\eta L^3 \omega R_B}{2c^2} \left[ \varepsilon \left( \frac{2\dot{\delta}}{\omega} - 1 \right) \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin\sigma\cos\sigma}{\left[1-\varepsilon\cos\sigma\right]^3} d\sigma}_{I_1} + \frac{2\dot{\varepsilon}}{\omega} \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos^2\sigma}{\left[1-\varepsilon\cos\sigma\right]^3} d\sigma}_{I_2} \right] , \quad (1.62)$$

$$F_t = \frac{\eta L^3 \omega R_B}{2c^2} \left[ \varepsilon \left( \frac{2\dot{\delta}}{\omega} - 1 \right) \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin^2\sigma}{\left[1-\varepsilon\cos\sigma\right]^3} d\sigma}_{I_3} + \frac{2\dot{\varepsilon}}{\omega} \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin\sigma\cos\sigma}{\left[1-\varepsilon\cos\sigma\right]^3} d\sigma}_{I_1} \right] . \quad (1.63)$$

Protože elementární integrály ve vymezeném rozsahu nabývají hodnot

$$I_1 = -\frac{2\varepsilon}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} , \quad I_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1+2\varepsilon^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{5}{2}}} , \quad I_3 = \frac{\pi}{2\left(1-\varepsilon\right)^{\frac{3}{2}}} , \quad (1.64)$$

lze vztahy (1.62), (1.63) zjednodušit do tvaru

$$F_r = \frac{\eta L^3 \omega R_B}{2c^2} \left[ \varepsilon \left( \frac{-2\dot{\delta}}{\omega} + 1 \right) \frac{2\varepsilon}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} + \frac{2\dot{\varepsilon}}{\omega} \frac{\pi}{2} \frac{1+2\varepsilon^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right] , \quad (1.65)$$

$$F_t = \frac{\eta L^3 \omega R_B}{2c^2} \left[ \varepsilon \left( \frac{2\dot{\delta}}{\omega} - 1 \right) \frac{\pi}{2\left(1-\varepsilon\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\dot{\varepsilon}}{\omega} \frac{2\varepsilon}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \right] . \quad (1.66)$$

Zapíšeme-li složky síly generované v mazivu ve tvaru součinu

$$F_r = F_R \cdot f_r \left( \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\delta} \right) , \qquad F_t = F_R \cdot f_t \left( \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\delta} \right) , \quad (1.67)$$

kde má tzv. referenční síla $F_R$ po provedení zpětné substituce $\omega = \omega_J + \omega_B$ tvar

$$F_R = \frac{\eta L^3 \left(\omega_J + \omega_B\right) R_B}{2c^2} \quad (1.68)$$

a $f_r$, $f_t$ jsou časově proměnné bezrozměrové funkce závislé na vzájemné poloze středů čepu a pánve ložiska. Transformujeme-li složky ložiskové síly v souladu s obrázkem 1.6 z rotujícího do pevného systému souřadnic pomocí vztahů

$$F_Y = F_r \sin\delta + F_t \cos\delta , \quad F_Z = F_r \cos\delta - F_t \sin\delta , \quad (1.69)$$

lze vyjádřit vektor ložiskových sil generovaných v mazivu jako

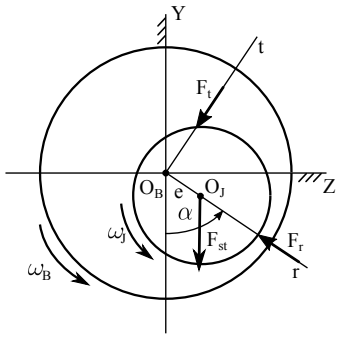
$$\mathbf{f}_B = -\begin{bmatrix} F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} = -\mathbf{T} \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} , \quad (1.70)$$

kde $\mathbf{T}$ je transformační matice, vyjadřující vzájemnou polohu pevného a rotujícího systému souřadnic získaná na základě vztahů (1.69), ve tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin\delta & \cos\delta \\ \cos\delta & -\sin\delta \end{bmatrix} . \tag{1.71}$$

**Linearizovaný matematický model ložiskových sil**

Pro účely sestavení linearizovaného matematického modelu popisujícího malé výchylky ze statické rovnovážné polohy je nutno nalézt konfiguraci, v níž nastává rovnováha mezi statickým zatížením čepu ložiska a silami generovanými v mazivu, tj. $\sqrt{F_r^2 + F_t^2} = F_{st}$, viz obrázek 1.7.




Obrázek 1.7: Čep ložiska ve statické rovnovážné poloze.

Po dosazení vztahů (1.65), (1.66) s uvažováním $\dot{\varepsilon} = \dot{\delta} = 0$ lze stanovit odpovídající velikost poměrné excentricity $\varepsilon$ čepu v prostoru pánve ložiska řešením nelineární rovnice

$$\frac{\pi\varepsilon}{2\left(1-\varepsilon^2\right)^2}\sqrt{1-\varepsilon^2+\left(\frac{4\varepsilon}{\pi}\right)^2} = \frac{F_{st}}{F_R} . \tag{1.72}$$

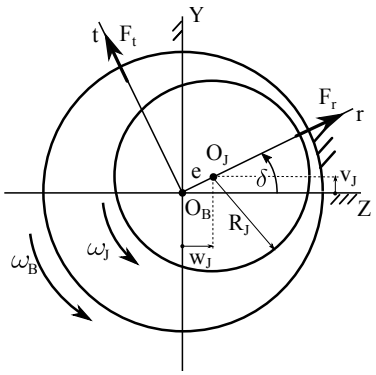
Statická rovnovážná poloha je určena úhlem $\alpha$ natočení průvodiče spojujícího střed pánve ložiska $O_B$ a střed čepu $O_J$ podle obrázku 1.7. Zapíšeme-li podmínky silové rovnováhy v rotujícím systému souřadnic

$$F_{st}\cos\alpha - F_r = 0 , \quad -F_{st}\sin\alpha - F_t = 0 , \tag{1.73}$$

pak úhel $\alpha$ vyplývá z řešení rovnice

$$\tan\alpha = -\frac{F_t}{F_r} = \frac{\pi}{4\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2} . \tag{1.74}$$

V blízkém okolí statické rovnovážné polohy, určené řešením rovnic (1.72), (1.74), lze ložiskové síly linearizovat.




Obrázek 1.8: Čep ložiska v obecné poloze.

Transformujeme-li složky ložiskové síly v souladu s obrázkem 1.8 z rotujícího do pevného systému souřadnic pomocí vztahů (1.69) lze vyjádřit vliv malé změny polohy určené výchylkou středu čepu $k$ ve směru osy pevného systému souřadnic, resp. rychlosti $\dot{k}$ v témž směru na změnu složky síly jako

$$\frac{\partial F_j}{\partial \dot{k}} = \frac{\partial F_j}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{k}} + \frac{\partial F_j}{\partial \dot{\delta}} \frac{\dot{\delta}}{\partial \dot{k}}, \quad \frac{\partial F_j}{\partial k} = \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} + \frac{\partial F_j}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial k}. \tag{1.75}$$

kde $j = Y, Z$, $k = v_J, w_J$. Koeficienty $k_{jk} = \frac{\partial F_j}{\partial k}$ jsou koeficienty tuhosti olejového filmu a $b_{jk} = \frac{\partial F_j}{\partial \dot{k}}$ jsou koeficienty tlumení olejového filmu. Ty lze pomocí relace platné mezi statickým zatížením $F_{st}$ a amplitudou ložiskové síly $F_R$ ve tvaru (1.68) zapsat ve tvaru

$$k_{jk} = \kappa_{jk} \frac{F_{st}}{c}, \quad b_{jk} = \beta_{jk} \frac{F_{st}}{c\,(\omega_J + \omega_B)}. \tag{1.76}$$

Zavedeme-li substituci

$$A(\varepsilon) = \frac{4}{\sqrt{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^3}}, \tag{1.77}$$

lze podle [44] koeficienty tuhosti zapsat ve tvaru

$$\kappa_{YY} = \frac{\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4}{1 - \varepsilon^2} \cdot A(\varepsilon), \tag{1.78}$$

$$\kappa_{YZ} = -\frac{\pi}{4} \frac{\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \cdot A(\varepsilon), \tag{1.79}$$

$$\kappa_{ZY} = \frac{\pi}{4}\frac{\pi^2(1-2\varepsilon^2)-(16-\pi^2)\varepsilon^4}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot A(\varepsilon)\,, \tag{1.80}$$

$$\kappa_{ZZ} = [2\pi^2+(16-\pi^2)\varepsilon^2]\cdot A(\varepsilon)\,, \tag{1.81}$$

a koeficienty tlumení jako

$$\beta_{YY} = \frac{\pi}{2}\frac{\pi^2+2(24-\pi^2)\varepsilon^2+\pi^2\varepsilon^4}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot A(\varepsilon)\,, \tag{1.82}$$

$$\beta_{YZ} = \beta_{ZY} = -2[\pi^2+2(\pi^2-8)\varepsilon^2]\cdot A(\varepsilon)\,, \tag{1.83}$$

$$\beta_{ZZ} = \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon}[\pi^2+2(\pi^2-8)\varepsilon^2]\cdot A(\varepsilon)\,. \tag{1.84}$$

Konkrétní odvození koeficientů matic tuhosti a tlumení olejového filmu je uvedeno v dodatku C. Při uvažování malých výchylek středu čepu ze statické rovnovážné polohy lze změnu vektoru ložiskových sil generovaných v mazivu souhrnně zapsat pomocí matic tuhosti a tlumení jako

$$\mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} \Delta F_Y \\ \Delta F_Z \end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_{YY} & k_{YZ} \\ k_{ZY} & k_{ZZ} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_B}\underbrace{\begin{bmatrix} v_J \\ w_J \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_B} - \underbrace{\begin{bmatrix} b_{YY} & b_{YZ} \\ b_{ZY} & b_{ZZ} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_B}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_J \\ \dot{w}_J \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}_B}, \tag{1.85}$$

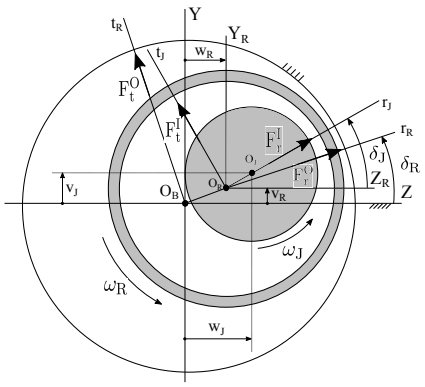
kde $\mathbf{q}_B$ je vektor výchylek středu čepu ze statické rovnovážné polohy.

### 1.4.2 Ložiska s plovoucími pouzdry

Ložiska s plovoucími pouzdry se vyznačují dvěma olejovými filmy, vnějším (O) vymezeným pánví ložiska (B) a vnějším povrchem plovoucího pouzdra (R) a vnitřním (I) vymezeným vnitřním povrchem plovoucího pouzdra a povrchem čepu (J), viz obrázek 1.9.

Zavedeme-li rotující systémy souřadnic s osami $r_J$, $t_J$ se středem $O_R$ a $r_R$, $t_R$ se středem $O_B$, lze v souladu s kapitolou 1.4.1 odvodit hydrodynamické síly generované v mazivu. Označme rychlost rotace čepu ložiska $\omega_J$, rychlost rotace plovoucího pouzdra $\omega_R$ a rychlost rotace pánve ložiska $\omega_B$ považujme za nulovou. Pak lze analogicky k (1.67) zapsat radiální a tečné složky sil generovaných v obou olejových filmech jako

$$F_r^x = F_R^x\cdot f_r^x\left(\varepsilon_x,\dot{\varepsilon}_x,\dot{\delta}_x\right), \qquad F_t^x = F_R^x\cdot f_t^x\left(\varepsilon_x,\dot{\varepsilon}_x,\dot{\delta}_x\right), \quad x = I,\,O\,. \tag{1.86}$$




Obrázek 1.9: Schéma ložiska s plovoucím pouzdrem a čepem v excentrické poloze.

Referenční síla $F_R^x$ má tvar

$$F_R^x = \frac{\eta\left(T_x\right)\omega_x}{2}\left(\frac{R_x}{c_x}\right)^2\left(\frac{L_x^3}{R_x}\right). \tag{1.87}$$

Bezrozměrové funkce

$$f_r^x = \left[\varepsilon_x\left(\frac{-2\dot{\delta}_x}{\omega_x}+1\right)\frac{2\varepsilon_x}{\left(1-\varepsilon_x^2\right)^2}+\frac{2\dot{\varepsilon}_x}{\omega_x}\frac{\pi}{2}\frac{1+2\varepsilon_x^2}{\left(1-\varepsilon_x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right], \tag{1.88}$$

$$f_t^x = \left[\varepsilon\left(\frac{2\dot{\delta}_x}{\omega_x}-1\right)\frac{\pi}{2\left(1-\varepsilon_x\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\dot{\varepsilon}_x}{\omega_x}\frac{2\varepsilon_x}{\left(1-\varepsilon_x^2\right)^2}\right] \tag{1.89}$$

jsou určeny poměrnou excentricitou $\varepsilon_x$, její časovou derivací $\dot{\varepsilon}_x$ a časovou změnou úhlu $\dot{\delta}_x$, sevřeného osou $Z$ a spojnicí středů odpovídajících vymezujících povrchů, střední rychlostí $\omega_x$ odpovídající rychlosti proudění maziva, viz obrázek 1.9.

Pro výpočet síly $F^I$ generované ve vnitřním olejovém filmu definujme radiální směr $r_J$ pomocí spojnice středů $\overline{O_R O_J}$. Příslušná poměrná excentricita $\varepsilon_I$ a časová změna úhlu natočení $\delta_I$ mají tvar

$$\varepsilon_I = \frac{\sqrt{\left(v_J-v_R\right)^2+\left(w_J-w_R\right)^2}}{c_I}, \quad \dot{\delta}_I = \frac{\left(w_J-w_R\right)\left(\dot{v}_J-\dot{v}_R\right)-\left(v_J-v_R\right)\left(\dot{w}_j-\dot{w}_R\right)}{\left(v_J-v_R\right)^2+\left(w_J-w_R\right)^2}, \tag{1.90}$$

kde $v_J, w_J$ jsou příčné výchylky středů čepu a $v_R, w_R$ jsou příčné výchylky středu plovoucího pouzdra. Analogicky pro sílu $F^O$ generovanou ve vnějším olejovém filmu

definujme radiální směr $r_R$ pomocí spojnici středů $\overline{O_R O_B}$ a odpovídající poměrnou excentricitu $\varepsilon_O$ a časovou změnu úhlu natočení $\delta_O$ jako

$$\varepsilon_O = \frac{\sqrt{v_R^2 + w_R^2}}{c_O}\,, \quad \dot{\delta}_O = \frac{w_R \dot{v}_R - v_R \dot{w}_R}{v_R^2 + w_R^2}\,. \tag{1.91}$$

Po provedení časových derivací vztahů (1.90), (1.91) a dosazení do vztahů (1.86) spolu s geometrickými parametry a parametry maziva lze určit ložiskové síly v příslušných rotujících systémech souřadnic. Jejich složky lze transformovat do pevného systému souřadnic analogicky k (1.69) pomocí vztahů

$$F_Y^x = F_r^x \sin\delta_x + F_t^x \cos\delta_x\,, \quad F_Z^x = F_r^x \cos\delta_x - F_t^x \sin\delta_x\,, \quad x = I,\, O\,. \tag{1.92}$$

Zavedeme-li vektor zobecněných souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{q}_B = [\quad v_J\,,\, w_J\,,\, v_R\,,\, w_R \quad]^T\,, \tag{1.93}$$

kde $v_J$, $w_J$ jsou výchylky středu čepu z centrální polohy a $v_R$, $w_R$ jsou výchyky středu plovoucího pouzdra z centrální polohy, lze zapsat vektor ložiskových sil vyjádřený v pevném systému souřadnic $XYZ$ ve tvaru

$$\mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} -F_Y^I \\ -F_Z^I \\ F_Y^I - F_Y^O \\ F_Y^I - F_Z^O \end{bmatrix}\,. \tag{1.94}$$

Stanovení rychlosti rotace plovoucího pouzdra $\omega_R$ lze provést na základě sestavení momentové podmínky rovnováhy plovoucího pouzdra k jeho geometrickému středu v souladu s obrázkem 1.9, konkrétně

$$-I_R \dot{\omega}_R + M_I - M_O = 0\,, \tag{1.95}$$

kde $I_R$ je moment setrvačnosti plovoucího pouzdra k ose rotace procházející středem hmotnosti. $M_x$ jsou podle [52] třecí momenty generované na povrchu plovoucího pouzdra ve tvaru

$$M_x = R_x \int_{(A)} \tau_x dA_x \approx \frac{2\pi\eta_x R_x^3 L_x \bar{\omega}_x}{c_x \sqrt{1-\varepsilon_x^2}}\,, \quad x = I,\, O\,, \tag{1.96}$$

kde $\bar{\omega}_x$ je relativní rychlost rotace. Po dosazení (1.96) do (1.95) získáme

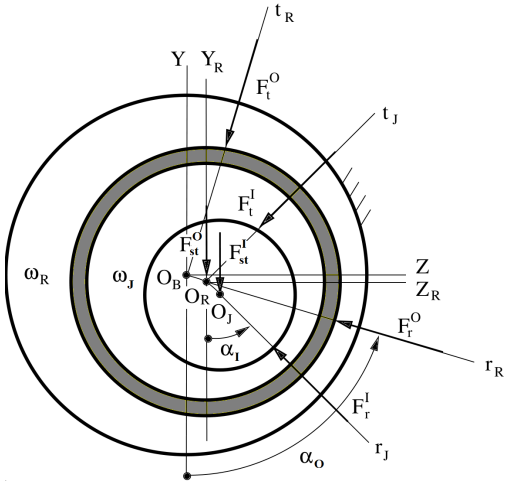
$$-I_R\dot{\omega}_R + 2\pi\left(\eta_I \frac{R_I^3 L_I\,(\omega_J - \omega_R)}{c_I\sqrt{1-\varepsilon_I^2}} - \eta_O \frac{R_O^3 L_O \omega_R}{c_O\sqrt{1-\varepsilon_O^2}}\right) = 0\,. \tag{1.97}$$

Pokud přijmeme předpoklad rovnoměrné rotace čepu ložiska, pak lze přibližně předpokládat rovněž rovnoměrnou rotaci plovoucího pouzdra v prostoru pánve ložiska, a tedy $I_R\dot{\omega}_R \approx 0$. Pokud navíc vyjádříme rychlost rotace plovoucího pouzdra jako násobek rychlosti rotace čepu ložiska, tedy $\omega_R = RSR \cdot \omega_J$, lze velikost násobku označovaného Ring Speed Ratio vyjádřit ve tvaru

$$RSR = \frac{1}{1 + \frac{\eta_O}{\eta_I}\left(\frac{R_O}{R_I}\right)^3 \frac{L_O}{L_I}\frac{c_I\sqrt{1-\varepsilon_I^2}}{c_O\sqrt{1-\varepsilon_O^2}}}\,. \tag{1.98}$$

### Linearizovaný model ložiska s plovoucími pouzdry

Pro sestavení linearizovaného modelu ložiska je nutné nalézt nejen statickou rovnovážnou polohu čepu v prostoru plovoucího pouzdra, ale i plovoucího pouzdra v prostoru pánve ložiska,viz obrázek 1.10.




Obrázek 1.10: Schéma ložiska s plovoucím pouzdrem a čepem v excentrické poloze.

To odpovídá řešení soustavy rovnic

$$\frac{\pi\varepsilon_x}{2\,(1-\varepsilon_x^2)^2}\sqrt{1-\varepsilon_x^2+\left(\frac{4\varepsilon_x}{\pi}\right)^2} = \frac{F_{st}^x}{F_R^x}\,, \quad \tan\alpha_x = -\frac{F_t^x}{F_r^x} = \frac{\pi}{4\varepsilon_x}\sqrt{1-\varepsilon_x^2}\,, \quad x = I, O\,, \tag{1.99}$$

formálně odpovídajících vztahům (1.72), (1.74). $F_{st}^x$ odpovídá statickému zatížení, konkrétně $F_{st}^I$ je rovno statickému zatížení přenášeného čepem ložiska, $F_{st}^O$ je rovno

statickému zatížení zvětšenému o vlastní tíhu plovoucího pouzdra $m_R g$. V souladu s předchozí částí lze provést v blízkém okolí statické rovnovážné polohy linearizaci ložiskových sil a stanovit koeficienty matic tuhosti a tlumení olejových filmů na základě vztahů (1.75).

Pro malé výchylky ze statické rovnovážné polohy, jež jsou zahrnuty ve vektoru výchylek středu plovoucího pouzdra $\mathbf{q}_O$ a vektoru výchylek středu čepu $\mathbf{q}_I$, lze vektor linearizovaných ložiskových sil dílčích filmů zapsat ve tvaru

$$\mathbf{f}_B^x = -\mathbf{K}^x \mathbf{q}_x - \mathbf{B}^x \dot{\mathbf{q}}_x, \,, \quad x = I, O\,. \tag{1.100}$$

Matice tuhosti $\mathbf{K}^x$ a tlumení $\mathbf{B}^x$ olejového filmu odpovídají maticím ve vektoru (1.85). Jejich koeficienty lze snadno získat po dosazení $\varepsilon_I$, resp. $\varepsilon_O$ do vztahů (1.76) pomocí (1.77)-(1.84).
Respektujeme-li tvar vektoru zobecněných souřadnic (1.93) i v případě malých výchylek ze statické rovnovážné polohy, lze zapsat vektor ložiskových sil v blokové podobě

$$\mathbf{f}_B = -\mathbf{K}_B \mathbf{q}_B - \mathbf{B}_B \dot{\mathbf{q}}_B \tag{1.101}$$

s celkovými maticemi tuhosti a tlumení ve tvaru

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^I & -\mathbf{X}^{\mathbf{I}} \\ \mathbf{X}^I & \mathbf{X}^I + \mathbf{X}^O \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{B}, \mathbf{K}\,. \tag{1.102}$$

## 1.5 Model rotoru

Matematický popis izolovaného dokonale vyváženého hřídele je určen v pevném systému souřadnic $XYZ$ rovnicí (1.30), tedy

$$\mathbf{M}_E^{XYZ} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \left[ \underbrace{\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I(t)}_{\mathbf{B}_E^{XYZ}} + \omega_0 \mathbf{G}_E^{XYZ} \right] \dot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{[\mathbf{K}_S + \mathbf{K}_I(t)]}_{\mathbf{K}_E^{XYZ}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}\,, \tag{1.103}$$

kde $\mathbf{X}_E^{XYZ}$, $(\mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{K})$ jsou matice popisující hřídel ve zvoleném systému souřadnic. Stejně tak lze popsat tuhý kotouč v pevném systému souřadnic $XYZ$ pomocí matic (1.37), (1.38), a následně z těchto matic lokalizovaných v souladu s vektorem zobecněných souřadnic (1.29) sestavit celkové matice hmotnosti $\mathbf{M}_K^{XYZ}$, vnějšího tlumení $\mathbf{B}_K^{XYZ}$ a gyroskopických účinků $\mathbf{G}_K^{XYZ}$ obsahující příspěvky všech těles uvažovaných jako kotouče do celkových matic matic izolovaného rotoru

$$\left[\mathbf{M}_E^{XYZ} + \mathbf{M}_K^{XYZ}\right] \ddot{\mathbf{q}}\left(t\right) + \left[\mathbf{B}_E^{XYZ} + \mathbf{B}_K^{XYZ} + \omega_0 \left(\mathbf{G}_K^{XYZ} + \mathbf{G}_E^{XYZ}\right)\right] \dot{\mathbf{q}}\left(t\right) + \\ + \mathbf{K}_E^{XYZ} \mathbf{q}\left(t\right) = \mathbf{0}\,. \tag{1.104}$$

Pokud jsou zanedbány hmotnostní parametry maziva, lze příspěvky ložiskových podpor matematicky popsat pomocí bloků $\mathbf{X}^I$, $\mathbf{X}^O$ ve tvaru (1.102) lokalizovaných v souladu s vektorem

$$\mathbf{q}_L\left(t\right) = \left[\mathbf{q}^T\left(t\right)\ \mathbf{q}_R^T\left(t\right)\right]^T\,, \tag{1.105}$$

který je rozšířen o vektor $\mathbf{q}_R\left(t\right)$ souřadnic odpovídajících výchylkám středů plovoucích pouzder. V případě dvou ložisek má tvar $\mathbf{q}_R\left(t\right) = \left[v_R^1\,,\, w_R^1\,,\, v_R^2\,,\, w_R^2\right]^T$.

Matematický model hřídele diskretizovaného do $m$ uzlů osazeného tuhými kotouči vystaveného působení nejen vazbových sil generovaných např. ve dvou ložiskách s plovoucími pouzdry, ale i dalších vnějších sil, lze zapsat pomocí maticové rovnice, kterou lze po vypuštení horních indexů zapsat v souhrnném tvaru

$$\mathbf{M}_\Sigma \ddot{\mathbf{q}}_L\left(t\right) + \left(\mathbf{B}_\Sigma + \omega_0 \mathbf{G}_\Sigma\right) \dot{\mathbf{q}}_L\left(t\right) + \mathbf{K}_\Sigma \mathbf{q}_L\left(t\right) = \mathbf{f}\left(t\right)\,, \tag{1.106}$$

kde jednotlivé matice $\mathbf{X}_\Sigma$ ($\mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{G}, \mathbf{K}$) řádu $6m + 4$ odpovídají výsledným maticím blokového charakteru, zahrnujícím jednotlivé příspěvky od hřídele, kotoučů a ložisek. Vektor $\mathbf{f}\left(t\right)$ je vektor buzení vyjádřený v daném systému souřadnic.

# Kapitola 2

# Využití odvozených modelů v dynamické analýze

Pro stanovení charakteru rotujícího systému je nutno stanovit její modální vlastnosti, tedy vlastní čísla a vlastní vektory. Na základě získaných vlastních čísel lze posoudit stabilitu soustavy a následně popsat její chování za provozu i za nestandardních podmínek. Obecně je pohyb složený z pohybu určeného počátečními podmínkami a pohybu vyvolaného buzením. Pokud je do matematického modelu zahrnut vliv tlumení, dochází při splnění podmínek stability k utlumení jak kmitů generovaných v důsledku nenulových počátečních podmínek, tak přechodových kmitů vyvolaných periodickými (harmonickými) budícími silami. Po jejich utlumení lze popsat pohyb jako ustálené vynucené kmitání. V případě rozsáhlých matematických modelů je provedení analýzy náročnou úlohou, zejména z hlediska výpočtového času a přesnosti numerických simulací. Proto je potřeba přistoupit k redukci počtu stupňů volnosti. Vhodným nástrojem je podle [33] metoda modální syntézy, rozvíjená na pracovišti Katedry mechaniky.

## 2.1 Modální vlastnosti a posouzení stability

Stanovení modálních vlastností soustavy vychází z matematického popisu systému ve tvaru (1.106) s nulovou pravou stranou. Této rovnici odpovídá problém vlastních hodnot, jehož řešením lze získat vlastní čísla $\lambda_\nu$ a jim odpovídající vlastní vektory $\mathbf{v}_\nu$. Jelikož v praxi je potřeba zajistit bezpečný provoz zařízení a předvídat jeho chování, je nutné posoudit stabilitu modelovaného systému.

### 2.1.1 Problém vlastních hodnot

Řešení problému vlastních hodnot vychází z pohybové rovnice (1.106) pro nulovou pravou stranu, tedy při vypuštění indexu $L$ ve tvaru

$$\mathbf{M}_\Sigma \ddot{\mathbf{q}}\,(t) + \underbrace{(\mathbf{B}_\Sigma + \mathbf{G}_\Sigma)}_{\mathbf{B}_C} \dot{\mathbf{q}}\,(t) + \mathbf{K}_\Sigma \mathbf{q}\,(t) = \mathbf{0}\,. \tag{2.1}$$

Tu lze rozšířením o identitu $\mathbf{M}_\Sigma \dot{\mathbf{q}}\,(t) - \mathbf{M}_\Sigma \dot{\mathbf{q}}\,(t) = \mathbf{0}$ převést z konfiguračního prostoru dimenze $n$ definovaného pomocí vektoru zobecněných souřadnic ve tvaru (1.105) do tzv. stavového prostoru dimenze $2n$ definovaného stavovým vektorem $\mathbf{u}\,(t)$. Matematický popis (2.1) přejde do podoby

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}\,(t) + \mathbf{P}\mathbf{u}\,(t) = \mathbf{0}\,, \tag{2.2}$$

kde

$$\mathbf{u}\,(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}\,(t) \\ \mathbf{q}\,(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_\Sigma \\ \mathbf{M}_\Sigma & \mathbf{B}_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_\Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\Sigma \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Výhodou matematického popisu (2.2) vyjádřeného ve stavovém prostoru je, že zachovává symetrické rozložení matic $\mathbf{M}_\Sigma$, $\mathbf{B}_C$, $\mathbf{K}_\Sigma$ modelu (2.1). Pokud výše uvedené modely (2.1), resp. (2.2) obsahují alespoň jednu nesymetrickou matici, je potřeba sestavit tzv. adjungované modely k modelům (2.1), resp. (2.2), ve tvaru

$$\mathbf{M}_\Sigma \ddot{\mathbf{r}}\,(t) + \mathbf{B}_C^T \dot{\mathbf{r}}\,(t) + \mathbf{K}_\Sigma^T \mathbf{r}\,(t) = \mathbf{0}\,, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{w}}\,(t) + \mathbf{P}^T \mathbf{w}\,(t) = \mathbf{0}\,, \tag{2.4}$$

kde $\mathbf{r}\,(t)$, resp. $\mathbf{w}\,(t)$ je tzv. levostranný vektor v konfiguračním prostoru dimenze $n$, resp. stavovém prostoru dimenze $2n$. Příslušné matice mají tvar

$$\mathbf{w}\,(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}\,(t) \\ \mathbf{r}\,(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_\Sigma \\ \mathbf{M}_\Sigma & \mathbf{B}_C^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_\Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\Sigma^T \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Pokud jsou matice popisující soustavu symetrické, pak jsou adjungované modely (2.4) totožné s modely původními a nemá význam je zavádět. Pohybovým rovnicím (2.1), (2.2), resp. (2.4) vyhovuje rešení v exponenciálním tvaru, tedy

$$\mathbf{x}\,(t) = \mathbf{x}e^{\lambda t} \quad \text{pro} \quad \mathbf{x} = \mathbf{q},\, \mathbf{u},\, \mathbf{r},\, \mathbf{w}\,. \tag{2.6}$$

Pokud jsou pohybové rovnice splněny v libovolném časovém okamžiku, platí

$$\begin{gathered}\left(\lambda^2\mathbf{M}_\Sigma + \lambda\mathbf{B}_C + \mathbf{K}_\Sigma\right)\mathbf{q} = \mathbf{0}\,, \qquad (\lambda\mathbf{N} + \mathbf{P})\,\mathbf{u} = \mathbf{0}\,, \\ \text{resp.} \\ \left(\lambda^2\mathbf{M}_\Sigma + \lambda\mathbf{B}_C^T + \mathbf{K}_\Sigma^T\right)\mathbf{r} = \mathbf{0}\,, \qquad \left(\lambda\mathbf{N}^T + \mathbf{P}^T\right)\mathbf{w} = \mathbf{0}\,.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Všechny rovnice v (2.7) lze souhrnně označit jako tzv. problém vlastních hodnot. Netriviálním řešením pro nulový determinant celkové matice v závorce lze získat vlastní čísla $\lambda_\nu$, která mohou být po dvojicích komplexně sdružená nebo reálná [66], matematicky

$$\lambda_\nu = -\alpha_\nu \pm \mathtt{i}\beta_\nu\,, \quad \text{resp.} \quad \lambda_\nu = -\alpha_\nu\,. \tag{2.8}$$

Každému vlastnímu číslu $\lambda_\nu$ odpovídá pravostranný vlastní vektor $\mathbf{q}_\nu$, resp. $\mathbf{u}_\nu$ a levostranný vlastní vektor $\mathbf{r}_\nu$, resp. $\mathbf{w}_\nu$. Protože vlastní vektory splňují maticově vyjádřené homogenní rovnice (2.7), je nutno vlastní vektory normovat. Jelikož vlastní vektory splňují podmínky biortonormality, je ve stavovém prostoru vhodné využít podmínku normy s váhovou maticí $\mathbf{N}$ ve tvaru

$$\mathbf{W}^T\mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{E}\,, \qquad \mathbf{W}^T\mathbf{P}\mathbf{U} = -\mathbf{\Lambda}\,, \tag{2.9}$$

kde $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_\nu]$ je modální matice pravostranných vlastních vektorů, $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_\nu]$ je modální matice levostranných vlastních vektorů, $\mathbf{E}$ je jednotková matice a $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\,(\lambda_\nu)$ je spektrální matice. Tyto matice jsou řádu $2n$ a jsou provázány s modálními maticemi $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_\nu] \in C^{n,2n}$, $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_\nu] \in C^{n,2n}$ pomocí vztahů

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}\,, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}\,. \tag{2.10}$$

Vlastní vektory obsažené ve výše uvedených modálních maticích jsou obecně komplexní, lineárně nezávislé a tvoří bázi Euklidovského prostoru [79].

### 2.1.2 Stabilita soustavy

Jednou ze základních vlastností mechanické soustavy je její stabilita, popř. nestabilita. Tento pojem lze definovat pomocí různých kritérií. Obecně lze říci, že se jedná o charakteristiku, která nezávisí na okamžitém stavu soustavy ani na vnějších silách, kterým je vystavena. U lineárních soustav je stabilita jednoznačně určena v celém stavovém prostoru. Naproti tomu u nelineárních soustav není jejich pohyb jednoznačně

určen. O tom, který z možných pohybů nastane, rozhoduje nejen volba počátečních podmínek, ale i rušivé vlivy působící na soustavu během pohybu. Stabilitu pohybu lze obecně definovat jako schopnost soustavy vrátit se do původního, popř. ustáleného stavu po skončení působení rušivých faktorů.

Pro posouzení stability soustavy se využívá tzv. kritérium stability, kterých existuje celá řada, např. [29], [22]. Zde se omezíme na určování stability na základě analýzy vlastních čísel $\lambda_\nu$ ve tvaru (2.8), získaných řešením problému vlastních hodnot (2.7). Vlastní čísla jsou obecně čísly komplexními a lze je rozložit na reálnou a imaginární část. Jejich reálná část $Re\{\lambda_\nu\} = -\alpha_\nu$ má význam útlumu a imaginární část $Im\{\lambda_\nu\} = \beta_\nu$ je úhlová frekvence tlumeného kmitání. Stabilita pohybu soustavy je určena hodnotami reálných částí vlastních čísel. Mohou nastat tři situace, a to

- reálné části všech vlastních čísel jsou záporné, tedy $\alpha_\nu > 0$, pak je soustava asymptoticky stabilní;
- alespoň jedno reálné vlastní číslo nebo pár komplexně sdružených vlastních čísel má nulovou reálnou část, tedy $\alpha_\nu = 0$, pak se jedná o systém na mezi stability;
- alespoň jedno reálné vlastní číslo nebo pár komplexně sdružených vlastních čísel má kladnou reálnou část, tedy $\alpha_\nu < 0$, pak se jedná o nestabilní systém.

## 2.2 Vynucené kmitání

Existuje celá řada budících silových účinků, které jsou zdrojem vynuceného kmitání. Jako příklad lze uvést silové účinky vyvolané nevyvážeností v důsledku nepřesností výroby a montáže, které nejsou v idealizovaném případě uvažovány. V některých případech je vhodné soustavu budit pomocí známých nevývažků umístěných ve zvolených vyvažovacích rovinách. Ve výše uvedeném případě se sestavuje vektor buzení. Pokud je uvažováno pouze buzení nevyvážeností, jedná se o harmonické buzení, které lze řešit zavedením vektoru komplexních amplitud. Pokud do modelu zahrneme vliv nelinearit, je nutno úlohu řešit numericky.

### 2.2.1 Sestavení vektoru buzení nevyvážeností

Uvažujme, že je $j$-tý nevývažek o hmotnosti $m_j$ umístěn na poloměru $e_j$ pod úhlem průvodiče $\alpha_j$ v rovině kolmé na osu rotace, která prochází $i$-tým uzlem. Pokud rotor pomalu nabíhá na provozní rychlost $\omega$, lze zanedbat tečnou složku zrychlení. Uvažujme tedy jen dostředivé zrychlení, kterému odpovídá odstředivá síla vyvolaná nevývažkem. V případě, že lze pohyb libovolného uzlu hřídele popsat pomocí vektoru

zobecněných posuvů ve tvaru (1.25), lze buzení nevývažkem s úhlem průvodiče $\alpha_j$ v čase $t = 0$ kótovaným od osy $Y$ ve smyslu otáčení zahrnout do matematického modelu prostřednictvím vektoru buzení ve tvaru

$$\mathbf{f}_j(t) = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ m_j e_j \cos(\omega t + \alpha_j) \\ -m_j e_j \sin(\omega t + \alpha_j) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

S využitím platných goniometrických vztahů jej lze upravit do složeného tvaru

$$\mathbf{f}_j(t) = \omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ m_j e_j \cos\alpha_j \\ -m_j e_j \sin\alpha_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{jc}} \cos\omega t + \omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -m_j e_j \sin\alpha_j \\ -m_j e_j \cos\alpha_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{js}} \sin\omega t\,, \tag{2.12}$$

kde $\mathbf{f}_{jc}$, $\mathbf{f}_{js}$ jsou vektory amplitud složek buzení a $\omega$ budící frekvence.

V případě, že dochází k buzení rotoru v důsledku dynamické nevyváženosti kotouče o hmotnosti $m$ způsobené jeho excentrickým uložením s excentricitou $e$ a úhlem průvodiče $\alpha = 0$ a šikmým nasazením s malým úhlem $\gamma$ vzhledem k ose rotace $\xi$, je vlivem rotace generována odstředivá síla $O = me\omega^2$ a na ní kolmá setrvačná dvojice $M^D \doteq (I - I_0)\gamma\omega^2$, kde $I_0$ a $I$ jsou momenty setrvačnosti kotouče k ose symetrie a příčným osám. S ohledem na podobu vektoru zobecněných souřadnic (1.25), lze na příslušnou pozici ve vektoru buzení zahnout tyto vlivy pomocí subvektoru buzení ve tvaru

$$\mathbf{f}_k(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ me\omega^2 \cos(\omega t) \\ -me\omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \\ -(I - I_0)\gamma\omega^2 \sin\omega t \\ (I - I_0)\gamma\omega^2 \cos\omega t \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Pomocí subvektorů buzení (2.11), resp. (2.13) lze sestavit vektory buzení ve tvaru

$$\mathbf{f}\,(t) = \left[\ \ldots\,, \mathbf{0}^T\,, \mathbf{f}_i^T\,(t)\ , \mathbf{0}^T\,, \ldots\ \right]^T \quad \text{pro} \quad i = j,\, k\,. \tag{2.14}$$

### 2.2.2 Ustálené harmonicky buzené kmitání

Matematický model ustáleného harmonicky buzeného kmitání rotoru lze vyjádřit úpravou pravé strany pohybové rovnice (1.106) do tvaru odpovídajícího výrazu (2.12), tedy

$$\mathbf{M}_\Sigma \ddot{q}\,(t) + \mathbf{B}_C \dot{\mathbf{q}}\,(t) + \mathbf{K}_\Sigma \mathbf{q}\,(t) = \mathbf{f}_c \cos\omega t + \mathbf{f}_s \sin\omega t\,, \tag{2.15}$$

kde $\mathbf{f}_c = [\mathbf{f}_{jc}]$, $\mathbf{f}_s = [\mathbf{f}_{js}]$ jsou vektory amplitud složek buzení. Protože ustálené kmitání je plně popsáno partikulárním řešením, lze jej vyjádřit ve formálně stejném tvaru jako vektor buzení, tedy jako součet sinové a kosinové složky

$$\mathbf{q}\,(t) = \mathbf{q}_c \cos\omega t + \mathbf{q}_s \sin\omega t\,. \tag{2.16}$$

Toto řešení vyhovuje pohybové rovnici (2.15). Porovnáním sinových a kosinových složek obou stran pohybové rovnice získáme dvě rovnice ve tvaru

$$\left(\mathbf{K}_\Sigma - \omega^2 \mathbf{M}_\Sigma\right) \mathbf{q}_c + \omega \mathbf{B}_C \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_c\,, \quad -\omega \mathbf{B}_C \mathbf{q}_c + \left(\mathbf{K}_\Sigma - \omega^2 \mathbf{M}_\Sigma\right) \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_s\,, \tag{2.17}$$

ze kterých lze určit vektory amplitud $\mathbf{q}_c$, $\mathbf{q}_s$ složek řešení (2.16). Pro případ harmonického buzení je výhodné zavést vektory komplexních amplitud buzení $\tilde{\mathbf{f}}$, resp. výchylek $\tilde{\mathbf{q}}$ ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_c - \mathtt{i}\mathbf{f}_s = \left[\tilde{F}_j\right]\,, \quad \text{resp.} \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_c - \mathtt{i}\mathbf{q}_s = [\tilde{q}_j]\,, \tag{2.18}$$

které splňují následující podmínky

$$\mathbf{f}\,(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{\mathbf{f}} e^{i\omega t}\}\,, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{q}\,(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{\mathbf{q}} e^{i\omega t}\}\,. \tag{2.19}$$

Po jednoduché úpravě lze na základě definičních vztahů (2.18) a rovnic (2.17) odvodit rovnici plně popisující ustálené kmitání ve tvaru

$$\left(\mathbf{K}_\Sigma - \omega^2 \mathbf{M}_\Sigma + \mathtt{i}\omega \mathbf{B}_C\right) \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{f}}. \tag{2.20}$$

Skutečný pohyb je pak popsán reálnou složkou vektoru komplexních výchylek $\tilde{\mathbf{q}} e^{i\omega t}$. Definujeme-li matici dynamické tuhosti $\mathbf{Z}\,(\omega)$

$$\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{K}_\Sigma - \omega^2 \mathbf{M} + \mathtt{i}\omega \mathbf{B}_\Sigma \,, \tag{2.21}$$

lze vektor komplexních amplitud výchylek určit z (2.20) jako

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Z}^{-1}(\omega)\, \tilde{\mathbf{f}} \,, \tag{2.22}$$

kde $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{Z}^{-1}(\omega)$ je matice dynamické poddajnosti, jejíž prvky $g_{ij}$ na pozici $i$ odpovídající indexu řádky a $j$ odpovídající indexu sloupce mají význam frekvenčního přenosu mezi komplexní amplitudou ustálené výchylky $\tilde{q}_i$ a komplexní amplitudou harmonicky proměnné budící síly $\tilde{F}_j$ působící ve směru zobecněné souřadnice $q_j$. Při analýze vynuceného kmitání je cílem stanovit maximální výchylku vybraného uzlu při dané rychlosti otáčení $\omega$, což je znázorňováno pomocí amplitudové charakteristiky.

U silně nekonzervativních soustav je výhodné převést matematický model buzeného systému (2.15) do stavového prostoru určeného vektorem $\mathbf{u}(t)$ a maticemi $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ ve tvaru (2.3), tedy

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \,, \tag{2.23}$$

kde $\mathbf{p}(t) = \left[\mathbf{0}^T, \mathbf{f}^T(t)\right]^T$ představuje vektor buzení ve stavovém prostoru. V případě ustálených harmonicky buzených kmitů lze komplexní vektor zobecněných souřadnic vyjádřit ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \sum_{\nu=1}^{2n} \tilde{\mathbf{q}}_\nu e^{i\omega t} = \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\mathbf{q}_\nu \mathbf{r}_\nu^T \tilde{\mathbf{f}}}{\mathtt{i}\omega - \lambda_\nu} e^{i\omega t} \,, \tag{2.24}$$

kde $\mathbf{q}_\nu$ je pravostranný a $\mathbf{r}_\nu$ levostranný vlastní vektor $\nu$-tého módu přiřazeného vlastnímu číslu $\lambda_\nu$. Podle [22] poskytuje ustálená odezva významnou informaci o míře projevu rezonančních stavů. Intenzitu projevu lze stanovit na základě hodnot tzv. participačních faktorů jednotlivých módů představovaných výrazy

$$p_\nu(\omega) = \left| \frac{\mathbf{r}_\nu^T \tilde{\mathbf{f}}}{\mathtt{i}\omega - \lambda_\nu} \right| \,, \qquad \nu = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, 2n \,, \tag{2.25}$$

jejichž podoba vychází z definice komplexních výchylek (2.24).

### 2.2.3 Vynucené kmitání soustav buzených vlivem nelineárních sil

Vynucené kmitání soustav s nelineárními vazbovými silami, lze matematicky popsat pomocí rovnice (2.15) s upravenými maticemi $\mathbf{B}_C$ a $\mathbf{K}_\Sigma$, v nichž je vypuštěn příspěvek ložiskových sil, a pravou stranou vyjádřenou ve tvaru

$$\mathbf{f}\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_V + \mathbf{f}_H \tag{2.26}$$

kde $\mathbf{f}_A$ je vektor vnějších sil působících na rotorovou soustavu, $\mathbf{f}_V$ je vektor zobecněných vazbových sil působích na rotorovou soustavu v místech mimo ložiska, $\mathbf{f}_H$ je vektor nelineárních hydraulických sil, popř. momentů, jimiž působí vrstvička maziva na čep hřídele a stacionární části ložisek.

Jednou z možných variant řešení je převedení matematického popisu rotorové soustavy stejně jako v případě ustálených harmonicky buzených kmitů do stavového prostoru s vektorem buzení $\mathbf{p}\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$, který obsahuje nelineární složky vazbových sil a budící síly. Přenásobením rovnosti (2.23) maticí $\mathbf{N}^{-1}$ zleva lze pohybovou rovnici upravit do podoby

$$\dot{\mathbf{u}}\left(t\right) - \mathbf{A}\mathbf{u}\left(t\right) = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{p}\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) , \tag{2.27}$$

kde $\mathbf{A} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}$ je tzv. systémová matice lineární části modelu. Z matematického hlediska představuje výraz (2.27) soustavu $2n$ vzájemně provázaných nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s nenulovou pravou stranou, jejíž řešení lze získat numericky. U soustav s mnoha stupni volnosti je výhodné odvodit matici $\mathbf{N}^{-1}$ v blokové podobě z rovnosti

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1,1} & \mathbf{D}_{1,2} \\ \mathbf{D}_{2,1} & \mathbf{D}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{E}_n \end{bmatrix} . \tag{2.28}$$

Po blokovém roznásobení a porovnání odpovídajících si bloků lze odvodit matici $\mathbf{N}^{-1}$ a systémovou matici $\mathbf{A}$ ve tvaru

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_C\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_C & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_\Sigma \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} . \tag{2.29}$$

Odezvu systému popsaného pohybovou rovnicí (2.27) lze získat numericky případně pomocí některé z metod přímé numerické integrace. Některé z nich, např. metoda centrovaného zrychlení, jsou podrobně popsány např. v [26].

## 2.3 Využití kondenzace

Po provedení diskretizace modelovaného systému a sestavení odpovídajícího výpočtového modelu např. pomocí metody konečných prvků je často výhodné přistoupit k redukci počtu stupňů volnosti, a to z několika důvodů. Nejčastěji z důvodu zpřesnění numerických simulací a snížení výpočtové náročnosti simulací. Snížení počtu stupňů volnosti matematického modelu lze provést pomocí nemalého počtu postupů. Některé z nich jsou podrobně popsány např. v [37].

Předpokládejme, že modelovaný rotující systém je popsán pohybovou rovnicí ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_s(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_s(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_s(t) = \mathbf{f}_I + \mathbf{f}_E\,, \tag{2.30}$$

kde $\mathbf{f}_I$ je vektor vazbových sil působících na rotor a $\mathbf{f}_E$ vektor vnějších budících sil. Vektor $\mathbf{q}_s(t)$ je vektor zobecněných souřadnic složený z výchylek všech uzlů rotujícího systému obsažených v modelu. Matice $\mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$ jsou se staveny na základě příspěvků hřídelových prvků a kotoučů a jsou řádu $n$.

Pro snížení počtu stupňů volnosti lze využít obdélníkovou transformační matici. Jestliže požadujeme současně respektovat charakteristiky původního (plného) modelu vyjádřeného pohybovou rovnicí (2.30), je výhodné využít přístup modální redukce. Tento přístup je založený na přibližné zachování vybraných vlastních frekvencí a jim odpovídajících vlastních vektorů, odpovídajících nevázané nerotující přidružené konzervativní soustavě popsané pohybovou rovnicí ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_s(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_s(t) = \mathbf{0}\,. \tag{2.31}$$

Protože pohybové rovnici (2.31) vyhovuje řešení v exponenciálním tvaru $\mathbf{q}_s(t) = \mathbf{v}e^{i\Omega t}$, lze pomocí dříve zmiňovaného postupu získat odpovídající problém vlastních hodnot

$$\left(-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,. \tag{2.32}$$

Jeho řešením lze získat vlastní frekvence $\Omega_\nu$, $\nu = 1\,,\,\ldots\,,\,n$, a jim odpovídající normované vlastní vektory $\mathbf{v}_\nu$. Sestavíme-li spektrální matici $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\left[\Omega_\nu^2\right]$ a sdružíme-li normované vlastní vektory do tzv. modální matice $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_\nu]$, jsou splněny podmínky ortogonality a normy ve tvaru

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{E}_n\,, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}_n\,. \tag{2.33}$$

Po znormování vlastních vektorů lze sestavit obdélníkovou tranformační matici na základě výběru $m$, $m < n$ respektovaných vlastních tvarů. Tato matice je označovaná redukovaná modální matice $\mathbf{V}_r = [\mathbf{v}_i]$, $i = 1, \ldots, m$. Odpovídající transformaci vektoru zobecněných souřadnic, kterou lze označit jako tzv. neúplnou modální transformaci, lze provést pomocí vztahu

$$\mathbf{q}_s(t) = \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) , \tag{2.34}$$

kde $\mathbf{x}_r(t)$ je tzv. vektor modálních souřadnic. Po využití tohoto transformačního vztahu a pronásobení pohybové rovnice maticí $\mathbf{V}_r^T$ zleva lze získat redukovaný matematický model rotujícího systému řádu $m$ ve tvaru

$$\underbrace{\mathbf{V}_r^T \mathbf{M} \mathbf{V}_r}_{\mathbf{E}_m} \ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{V}_r^T \mathbf{B} \mathbf{V}_r \dot{\mathbf{x}}_r + \underbrace{\mathbf{V}_r^T \mathbf{K} \mathbf{V}_r}_{\Lambda_m} \mathbf{x}_r = \mathbf{V}_r^T (\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_E) . \tag{2.35}$$

Po transformaci počátečních podmínek do modálních souřadnic lze pohybovou rovnici řešit např. pomocí metod numerické integrace. Získáme tak průběh vektoru modálních souřadnic $\mathbf{x}_r$ v časové oblasti. Jeho zpětnou transformací přejdeme zpět k vektoru zobecněných souřadnic $\mathbf{q}_s$.

V případě rozsáhlých systémů lze po provedení dekompozice na diskrétní subsystémy provést redukci počtu stupňů u každého dílčího subsystému za předpokladu respektování vzájemných vazeb mezi subsystémy. Podrobněji je uvedený postup popsán např. v [33].

# Kapitola 3

# Citlivostní analýza

Sestavené výpočtové modely a jejich programová realizace umožňují dynamickou analýzu popisovaných soustav pro různé hodnoty vybraných parametrů. Na základě provedených výpočtů lze jednotlivé varianty vzájemně porovnat, nalézt nejvhodnější kombinaci parametrů a stanovit vliv vybraných veličin na změnu zvolených parametrů. Za tímto účelem jsou voleny tzv. návrhové parametry a výpočet citlivosti na změnu návrhových parametrů je prováděn pomocí derivací příslušných veličin. Zatímco v případě lineárních a linearizovaných soustav jsou využívány analyticky odvozené derivace, u nelineárních systémů je získání derivace záležitostí numerickou [22]. Analytické vyjádření derivace má svou přednost ve větší přesnosti a zkrácení výpočtového času. Naproti tomu numerické řešení využívá vyjádření derivace pomocí konečné diference, jejíž hodnota může být značně závislá na volbě její velikosti [34]. S ohledem na odvozený výpočtový model, který je nelineárního charakteru, uvedený v kapitole 2, a nástroje pro dynamickou analýzu, popsané v kapitole 3, bude v této kapitole popsáno pouze analytické odvození stanovení citlivosti vlastních čísel a vlastních vektorů nerotující konzervativní soustavy na změnu návrhových parametrů. Pro zjednodušení dalšího zápisu při odvození definujme tzv. vektor návrhových parametrů

$$\mathbf{p} = [p_j]^T \quad j = 1, \ldots m \ , \tag{3.1}$$

obsahující veškeré uvažované návrhové parametry.

## 3.1 Citlivost vlastních frekvencí a vlastních tvarů nerotující nevázané konzervativní soustavy

Předpokládejme, že rotující systém je popsán pohybovou rovnicí (1.106). Přidružené konzervativní soustavě odpovídá popis ve tvaru (2.31) a problém vlastních hodnot

(2.32), jehož řešení lze zapsat maticově pomocí modální matice $\mathbf{V}$ a spektrální matice $\mathbf{\Lambda}$, viz výše. Zavedeme-li substituci $\Omega_\nu^2 = \lambda_\nu$, lze výraz (2.32) pro $\nu$-tý mód upravit do tvaru

$$(-\lambda_\nu \mathbf{M} + \mathbf{K})\,\mathbf{v}_\nu = \mathbf{0}\,. \tag{3.2}$$

Podmínky ortogonality a normy rozepsat jako

$$\mathbf{v}_\mu^T \mathbf{M} \mathbf{v}_\nu = \delta_{\mu\nu}\,, \quad \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{K} \mathbf{v}_\nu = \delta_{\mu\nu}\lambda_\nu\,, \tag{3.3}$$

maticově

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E}\,, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}\,, \tag{3.4}$$

kde $\delta_{\mu\nu}$ je Kroneckerův symbol.

Stanovení citlivosti vlastních čísel a vlastních vektorů je založeno na znalosti jejich derivací podle návrhového parametru $p_j$. Ty lze získat parciální derivací vztahu (3.2) podle návrhového parametru $p_j$, tedy

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j}\right) \mathbf{v}_\nu + (-\lambda_\nu \mathbf{M} + \mathbf{K})\,\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial p_j} - \frac{\partial \lambda_\nu}{\partial p_j} \mathbf{M} \mathbf{v}_\nu = \mathbf{0}\,. \tag{3.5}$$

Přenásobením odvozené derivace problému vlastních hodnot (3.5) vlastním tvarem $\mathbf{v}_\nu^T$ zleva získáme

$$\mathbf{v}_\nu^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j}\right) \mathbf{v}_\nu + \mathbf{v}_\nu^T\,(-\lambda_\nu \mathbf{M} + \mathbf{K})\,\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial p_j} - \frac{\partial \lambda_\nu}{\partial p_j} \mathbf{v}_\nu^T \mathbf{M} \mathbf{v}_\nu = 0\,. \tag{3.6}$$

Protože matice $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ jsou symetrické, platí rovněž, že $\mathbf{v}_\nu^T\,(-\lambda_\nu \mathbf{M} + \mathbf{K}) = \mathbf{0}^T$, a tedy lze po využití podmínek normy (3.3) vyjádřit citlivost vlastního čísla $\lambda_\nu$, resp. vlastní frekvence $\Omega_\nu$ na změnu parametru $p_j$ jako

$$\frac{\partial \lambda_\nu}{\partial p_j} = \mathbf{v}_\nu^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j}\right) \mathbf{v}_\nu\,, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_j} = \frac{1}{2\Omega_\nu} \mathbf{v}_\nu^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \Omega_\nu^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j}\right) \mathbf{v}_\nu\,. \tag{3.7}$$

Pro stanovení citlivosti vlastního vektoru $\mathbf{v}_\nu$ na změnu parametru $p_j$ využijeme faktu, že vlastní vektory tvoří bázi prostoru dané dimenze. Proto musí platit, že i vektor $\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial p_j}$ lze vyjádřit pomocí jejich lineární kombinace, tedy

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu k} \mathbf{v}_k \,. \tag{3.8}$$

Po vynásobení rovnice (3.5) vlastním vektorem $\mathbf{v}_\mu^T$ zleva, využití vztahu (3.8) a podmínek ortonormality (3.3) získáme

$$\mathbf{v}_\mu^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_\nu + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_\mu^T \left( -\lambda_\nu \mathbf{M} + \mathbf{K} \right) a_{\nu k} \mathbf{v}_k}_{a_{\nu\mu}(-\lambda_\nu + \lambda_\mu)} - \frac{\partial \lambda_\nu}{\partial p_j} \underbrace{\mathbf{v}_\mu^T \mathbf{M} \mathbf{v}_\nu}_{\delta_{\mu\nu}} = 0 \,. \tag{3.9}$$

Po využití zápisu (3.8) a podmínek ortonormality (3.3) lze rovnici (3.9) upravit do tvaru

$$\mathbf{v}_\mu^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_\nu = a_{\nu\mu} \left( \lambda_\nu - \lambda_\mu \right) \,, \tag{3.10}$$

a tedy lze získat koeficienty lineární kombinace pro nenásobná vlastní čísla ($\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$)

$$a_{\nu\mu} = \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda_\mu} \mathbf{v}_\mu^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_\nu \,. \tag{3.11}$$

Zderivujeme-li podmínku ortonormality (3.3) podle parametru $p_j$, pak po aplikaci zápisu pro lineární kombinaci vlastních vektorů (3.8) získáme vztah

$$a_{\mu\nu} + \mathbf{v}_\nu^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \mathbf{v}_\nu + a_{\nu\mu} = 0 \,, \tag{3.12}$$

z něhož lze pro $\mu = \nu$ získat koeficienty lineární kombinace pro násobná vlastní čísla ($\lambda_\mu = \lambda_\nu$) ve tvaru

$$a_{\nu\nu} = -\frac{1}{2} \mathbf{v}_\nu^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \mathbf{v}_\nu \,. \tag{3.13}$$

Dosazením koeficientů linearní kombinace (3.12), (3.13) do vztahu (3.8) lze získat vztah pro výpočet citlivosti vlastního vektoru na změnu parametru $p_j$ respektující násobnost vlastních čísel

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial p_j} = \sum_{\mu=1\,,\nu\neq\mu}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda_\mu} \mathbf{v}_\mu^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_\nu \mathbf{v}_\mu - \frac{1}{2} \mathbf{v}_\nu^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \mathbf{v}_\nu \mathbf{v}_\nu \,. \tag{3.14}$$

## 3.2 Citlivost vlastních čísel a vlastních tvarů rotující nekonzervativní soustavy

Pro odvození analytických výrazů pro stanovení citlivosti rotujícího nekonzervativního systému na změnu parametru $p_j$ lze využít obdobný postup jako v předchozí části. Matematickým modelům (2.2) a (2.4), popisujícím takovýto systém, odpovídají problémy vlastních hodnot (2.7) a podmínky biorotnormality (2.9). Po zderivování problému vlastních hodnot odpovídajícího pohybové rovnici (2.2) podle parametru $p_j$ získáme

$$\left(\frac{\partial\lambda_\nu}{\partial p_j}\mathbf{N}+\lambda_\nu\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial p_j}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial p_j}\right)\mathbf{u}_\nu+\left(\lambda_\nu\mathbf{N}+\mathbf{P}\right)\frac{\partial\mathbf{u}_\nu}{\partial p_j}=0\,. \tag{3.15}$$

Po vynásobení tohoto vztahu transponovaným levostranným vlastním vektorem $\mathbf{w}_\mu^{\mathbf{T}}$ získáme

$$\mathbf{w}_\mu^T\left(\lambda_\nu\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial p_j}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial p_j}\right)\mathbf{u}_\nu+\frac{\partial\lambda_\nu}{\partial p_j}\mathbf{w}_\mu^T\mathbf{N}\mathbf{u}_\nu+\mathbf{w}_\mu^T\left(\lambda_\nu\mathbf{N}+\mathbf{P}\right)\frac{\partial\mathbf{u}_\nu}{\partial p_j}=0\,. \tag{3.16}$$

Postupem analogickým k předchozí kapitole 4.1 lze získat vztah popisující citlivost vlastního čísla $\lambda_\nu$ na změnu parametru $p_j$ ve tvaru

$$\frac{\partial\lambda_\nu}{\partial p_j}=-\mathbf{w}_\nu^T\left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial p_j}+\lambda_\nu\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial p_j}\right)\mathbf{u}_\nu\,. \tag{3.17}$$

Pokud lze navíc vlastní číslo $\lambda_\nu$ vyjádřit v komplexním tvaru (2.8), lze stanovit citlivost reálné části $\alpha_\nu$, resp. imaginární části $\beta_\nu$ na změnu parametru $p_j$ samostatně, protože

$$\frac{\partial\lambda_\nu}{\partial p_j}=-\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial p_j}\pm i\frac{\partial\beta_\nu}{\partial p_j}\,. \tag{3.18}$$

Citlivost $\nu$-tého vlastního vektoru na změnu parametru $p_j$ lze rovněž odvodit. Protože matice $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ jsou v případě rotujícího nekonzervativního systému nesymetrické, je nutno vyjádřit citlivost pravostranného vektoru $\mathbf{u}_\nu$, resp. levostranného vektoru $\mathbf{w}_\nu$ na změnu parametru $p_j$. Provedením příslušných derivací, jejich rozepsáním pro $\nu$-tý mód a přenásobením zleva vektorem $\mathbf{w}_\mu^T$, resp. $\mathbf{u}_\mu^T$ lze získat výrazy

$$\mathbf{w}_\mu^T\left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial p_j}+\lambda_\nu\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial p_j}\right)\mathbf{u}_\nu+\mathbf{w}_\mu^T\left(\mathbf{P}+\lambda_\nu\mathbf{N}\right)\frac{\partial\mathbf{u}_\nu}{\partial p_j}=0\,, \tag{3.19}$$

resp.

$$\mathbf{u}_\mu^T \left( \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial p_j} + \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial p_j} \right) \mathbf{w}_\nu + \mathbf{u}_\mu^T \left( \mathbf{P}^T + \lambda_\nu \mathbf{N}^T \right) \frac{\partial \mathbf{w}_\nu}{\partial p_j} = 0 \,. \tag{3.20}$$

Pokud parciální derivace $\frac{\partial \mathbf{u}_\nu}{\partial p_j}$, $\frac{\partial \mathbf{w}_\nu}{\partial p_j}$ vyjádříme ve tvaru lineární kombinace vlastních vektorů, lze postupem analogickým k předchozí kapitole 4.1 získat výraz popisující citlivost pravostranného, resp. levostanného vlastního vektoru na změnu parametru $p_j$ ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\nu}{\partial p_J} = \sum_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{2n} \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} \mathbf{w}_\mu^T \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_j} + \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial p_j} \right) \mathbf{u}_\nu \mathbf{u}_\mu - \frac{1}{2} \mathbf{w}_\nu^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial p_j} \mathbf{u}_\nu \mathbf{u}_\nu \,, \tag{3.21}$$

resp.

$$\frac{\partial \mathbf{w}_\nu}{\partial p_J} = \sum_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{2n} \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} \mathbf{u}_\mu^T \left( \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial p_j} + \lambda_\nu \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial p_j} \right) \mathbf{w}_\nu \mathbf{w}_\mu - \frac{1}{2} \mathbf{u}_\nu^T \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial p_j} \mathbf{w}_\nu \mathbf{w}_\nu \,. \tag{3.22}$$

## 3.3 Stanovení citlivosti veličin numericky

V případě nelineárních systémů je výhodné přistoupit ke stanovení citlivosti matematického popisu na změnu parametru $p_j$ numericky. Pro odvození využijeme tvar vektoru návrhových parametrů (3.1), které mohou být fyzikálně odlišného charakteru. Definujme vektor $\mathbf{p}_0$ obsahující počáteční hodnoty návrhových parametrů a vektor změny parametru $\Delta \mathbf{p}_j$ ve tvaru

$$\Delta \mathbf{p}_j = [0 \,, \ldots \,, 0 \,, \Delta p_j \,, 0 \,, \ldots \,, 0]^T \,. \tag{3.23}$$

Pak lze změnu sledované veličiny $f_\nu$ vyvolanou malou změnou $\Delta p_j$ vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje

$$\Delta f_\nu = f_\nu \left( \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}_j \right) - f_\nu \left( \mathbf{p}_0 \right) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_\nu \left( \mathbf{p}_0 \right)}{\partial \mathbf{p}_j} \Delta \mathbf{p}_j \,. \tag{3.24}$$

Pokud změnu sledované veličiny (3.24) vztáhneme k její původní hodnotě určené vektorem počátečních hodnot návrhových parametrů $f_\nu \left( \mathbf{p}_0 \right)$, lze získat vztah

$$\frac{\Delta f_\nu}{f \left( \mathbf{p}_0 \right)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_\nu \left( \mathbf{p}_0 \right)}{\partial \mathbf{p}_j} \frac{p_{j,0}}{f_\nu \left( \mathbf{p}_0 \right)} \frac{\Delta \mathbf{p}_j}{p_{j,0}} \,, \tag{3.25}$$

kde

$$\Delta \bar{f}_{\nu}^{j} = \frac{\partial f_{\nu}\left(\mathbf{p}_0\right)}{\partial p_j} \frac{p_{j,0}}{f_{\nu}\left(\mathbf{p}_0\right)} \tag{3.26}$$

je tzv. relativní citlivost na změnu parametru $p_j$. Pro účely numerické analýzy lze parciální derivaci nahradit konečnou diferencí ve tvaru

$$\frac{\partial f_{\nu}\left(\mathbf{p}_0\right)}{\partial p_j} = \frac{f_{\nu}\left(\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}_j\right) - f_{\nu}\left(\mathbf{p}_0\right)}{\Delta p_j}\,, \tag{3.27}$$

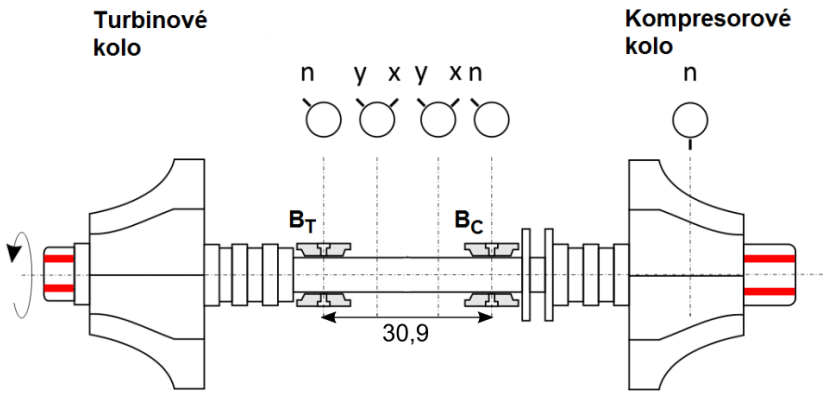
kde z hlediska relevantnosti získaných výsledků hraje významnou roli zvolená velikost změny $\Delta p_j$.

# Kapitola 4

# Experimentální měření

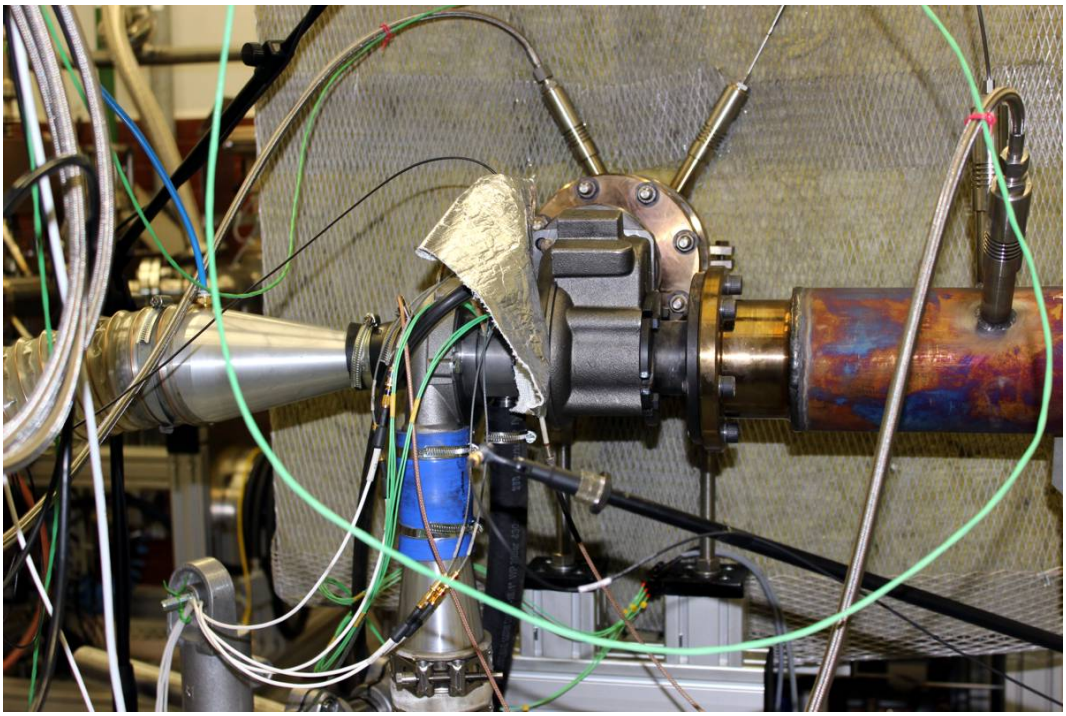
Za účelem verifikace sestaveného matematického modelu rotoru turbodmychadla uloženého na ložiskách s plovoucími pouzdry byla na pracovišti centra excelence NTIS-Nové technologie pro informační společnost, výzkumného programu P3, ve spolupráci s ČZ, a.s. navržena metodika měření akustických a vibračních veličin rotorů turbodmychadel [A2]. Experimentální měření bylo realizováno v dynamické zkušebně ČZ, a.s. ve Strakonicích v souladu se sestaveným plánem měření [A3]. Experimentálnímu měření byl podroben rotor turbodmychadla řady C1, sériově vyráběný v ČZ a.s. Během měření byla zaznamenávána vibrační odezva na nevyváženost ve vybraných pozicích a rychlost rotace plovoucích pouzder v ložiskách při ustálených provozních otáčkách i při řízených nájezdech na provozní otáčky a řízených doběžích. Získané výstupy byly zpracovány a byly uvedeny ve výzkumné zprávě [A1].

Během provedených experimentů byl pohon turbiny rotoru turbodmychadla zajištěn plynovým hořákem, který vháněl do skříně vzduch o volitelné teplotě a tlaku. Za účelem analýzy vlivu teploty vzduchu byly zvoleny dvě varianty provozních podmínek, a to pohon teplým vzduchem (T), jehož parametry jsou blízké provozním charakteristikám spalin poháněných turbodmychadlo za běžného provozu, a studeným vzduchem (S). Za účelem experimentálního meření byl sériově vyráběný rotor spolu s ložiskovou skříní geometricky modifikován. Na základě požadavku na možnost vnášení umělé nevyváženosti realizované pomocí přesně definovaných nevývažků byla upravena utahovací matice na straně kompresorového kola a následně vyvrtány axiální závitové otvory do turbinového kola a utahovací matice. Upravená geometrie rotoru, odpovídající rozložení hmotnosti, a poloha rotoru v ložiskové skříni jsou znázorněny na obrázku 4.1. Do upravené ložiskové skříně byly vyvrtány prostupy za účelem osazení skříně potřebnými snímači otáček a polohy.



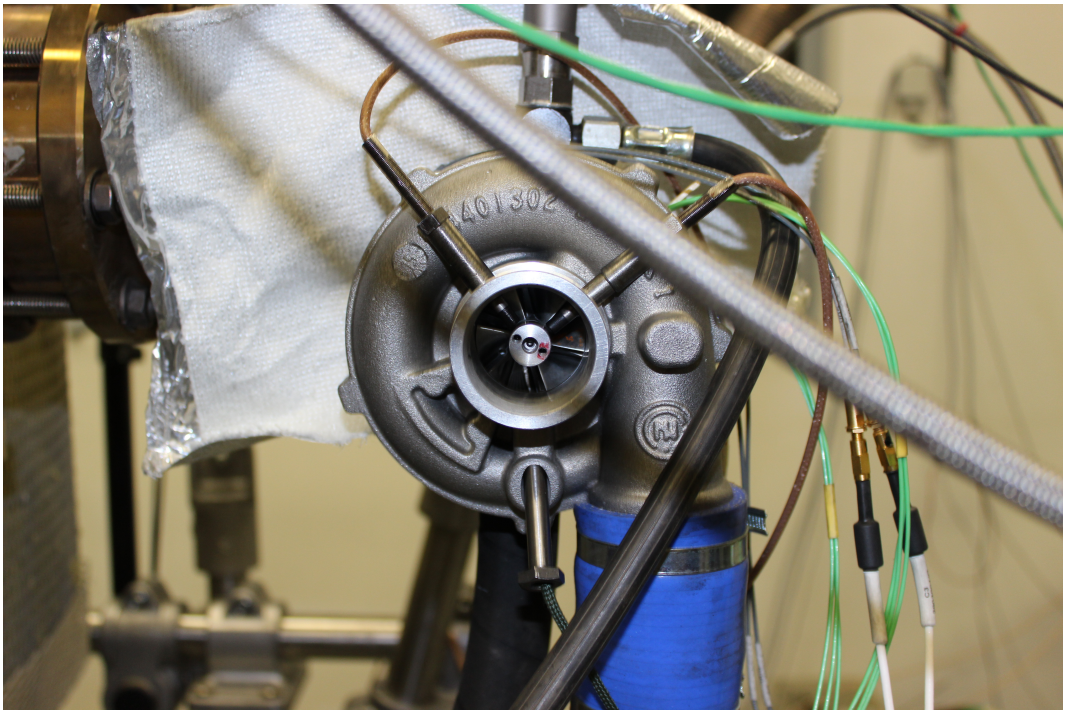

Obrázek 4.1: Schéma experimentálního rotoru turbodmychadla s axiálními závity a s vyznačenou polohou snímačů.

Na obrázcích 4.2 a 4.3 je pro ilustraci ukázána konfigurace měřicí techniky využitá v dynamické zkušebně při experimentálním měření.



Obrázek 4.2: Upravená skříň turbodmychadla osazená měřící technikou.

V tabulce 4.1 jsou uvedeny kombinace vnesených nevývah realizovaných prostřednictvím přesně definovaných nevývažků vložených do axiálních závitových otvorů. Podrobněji je provedené měření spolu s popisem využitého přístrojového vybavení a jeho nastavení popsáno ve výzkumné zprávě [A1].



Obrázek 4.3: Pohled na turbodmychadlo v ložiskové skříni- ze strany kompresorového kola.

| Varianta | Strana T [g · mm] | Strana C [g · mm] | úhel [°] |
|---|---|---|---|
| N1 | $2.1 \cdot 10^{-}7$ | - | - |
| N2 | - | $2.0 \cdot 10^{-}7$ | - |
| N3 | $2.1 \cdot 10^{-}7$ | $2.0 \cdot 10^{-}7$ | 135 |

Tabulka 4.1: Kombinace uměle vnesených nevývah.

# Kapitola 5

# Programová realizace a aplikace

Metodika modelování a provedení dynamické analýzy, popsaná teoreticky v předchozích kapitolách práce, byla algoritmizována ve výpočtovém systému MATLAB. Výpočtový program byl testován na rotoru turbodmychadla, jehož parametry a provozní podmínky jsou uvedeny v [A4]. Odvozená metodika byla využita pro dynamickou analýzu sériově vyráběného rotoru turbodmychadla a získané výsledky byly porovnány s experimentálně získanými daty naměřenými za podmínek uvedených ve zprávě [A1].

## 5.1 Model rotoru turbodmychadla

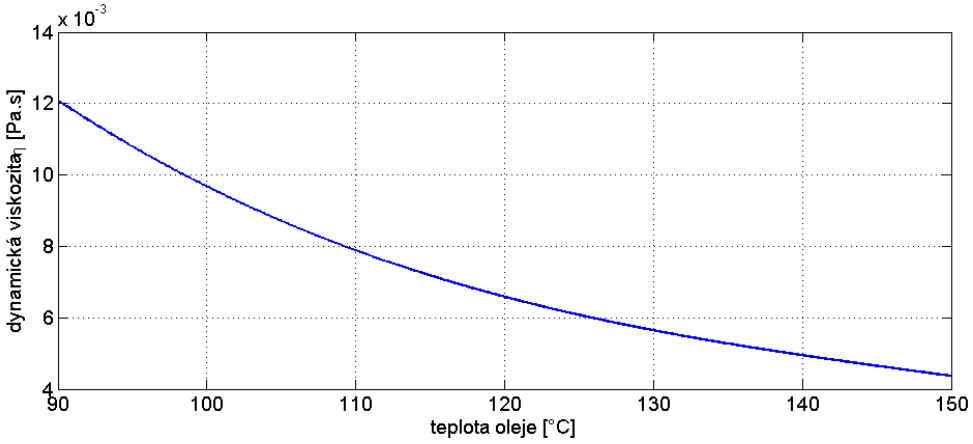
Jedná se o rotor složený z hřídele kruhového průřezu osazeného na koncích turbinovým kolem, dmychadlovým kolem a utahovací maticí. V ložiskové skříni, uvažované pro účely modelování jako tuhý nehybný rám, je rotor uložen pomocí dvou ložiskových vazeb $B_T$, $B_C$ reprezentujících ložiska s plovoucími pouzdry, viz obrázek D.1.

Hřídel rotoru byl pro účely modelování rozčleněn pomocí 11 uzlů na 10 konečných prvků, jejichž parametry jsou uvedeny v dodatku D. V uzlu č. 1 je na hřídel pevně nasazeno turbninové kolo, v uzlu č. 9 je nasazeno kompresorové kolo a v uzlu č. 11 uzahovací matice. Poloha ložiskových vazeb odpovídá uzlu č. 3 (ložisko $B_T$) a uzlu č. 6 (ložisko $B_T$). Bylo modelováno pouze ohybové kmitání rotoru, tj. rotor byl popsán pomocí 44 stupňů volnosti. Obě plovoucí pouzdra byla modelována jako tuhá tělesa. Jejich pohyb byl popsán pouze pomocí příčných výchylek jejich středů hmotnosti, kterým odpovídají 4 stupně volnosti. Výpočtový model subsystému rotor-ložiska byl sestaven na základě charakteristik jednotlivých součástí, jež jsou uvedeny v kapitole 1. Souřadnice odpovídající podélným výchylkám a torznímu natočení nebyly pro účely modelování uvažovány.

Za účelem přiblížení modálních vlastností výpočtového modelu vlastnostem reálného rotoru turbomychadla bylo v souladu s [A7] do výpočtového modelu zahrnuto

zpevnění hřídele pod kompresorovým kolem $\delta = 1,35$. Ve výpočtovém modelu bylo zpevnění realizováno prostřednictvím zesílení vnějšího průměru odpovídajících hřídelových prvků podle vztahu $\mathrm{D}^* = \delta \cdot \mathrm{D}$, konkrétně $D_8 = D_9 = 7,695\,\mathrm{mm}$. Přidaná hmota byla současně odebrána na vnitřním průměru kompresorového kola. Tomu odpovídají následující upravené parametry kompresorového kola, konkrétně hmotnost $m_k^* = 32,31\,\mathrm{g}$, moment setrvačnosti k ose rotace $I_{0,k}^* = 7,29 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$ a moment setrvačnosti k příčným osám $I_k^* = 3,94 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$. V důsledku odebrání hmoty kompresorového kola dojde k posunutí jeho těžiště o vzdálenost $s = 1,858\,\mathrm{mm}$ směrem k turbinovému kolu nasazenému na hřídel v uzlu č. 1. Při respektování požadavku centrického nasazení kompresorového kola na hřídel tomu odpovídá změna délek hřídelových prvků $l_8 = 11,641\,\mathrm{mm}$, $l_9 = 15,358\,\mathrm{mm}$. Uvedená úprava zachovává původní rozložení hmotnosti rotoru znázorněné na obrázku D.1.

Modelování ložiskových vazeb je založeno na znalosti geometrických parametrů jednotlivých ložisek, které byly určeny na základě provedené mikrometráže, a charakteristik maziva, jímž byl olej Castrol 10W30. Geometrické parametry ložisek lze nalézt v dodatku D. Charakteristiky maziva jsou v modelu reprezentovány dynamickou viskozotou, která je funkcí teploty. Hodnoty dynamické viskozity byly získány interpolací ze známých hodnot polynomem třetího stupně. Získaná závislost dynamické vazkosti na teplotě je znázorněna na obrázku 5.1.




Obrázek 5.1: Závislost dynamické viskozity maziva na teplotě.

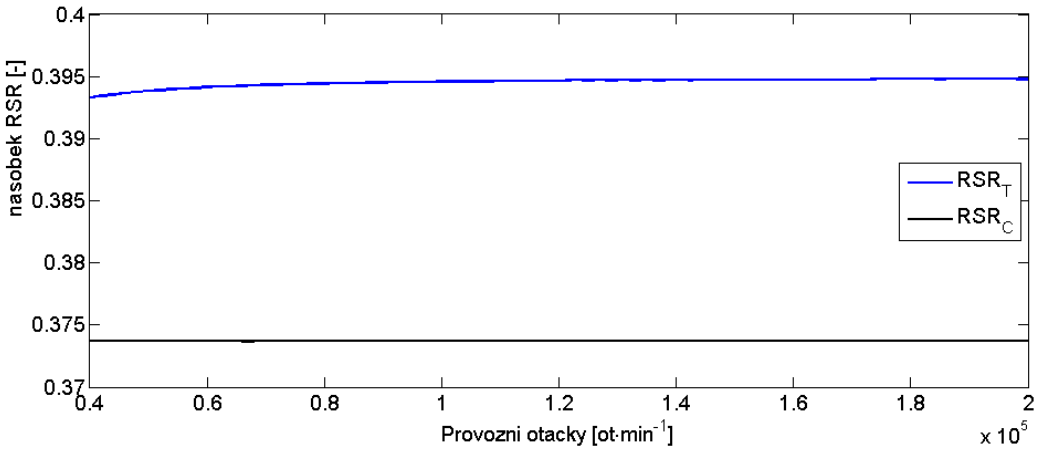
Vzhledem ke konstrukčnímu řešení zásobení ložisek mazivem nebylo možno během experimentu měřit teploty maziva v dílčích olejových filmech, proto byla pro účely stanovení teplot odpovídajících referenčnímu stavu využita práce [43], kde bylo zjištěno rozložení teploty na vnitřním povrchu skříně turbodmychadla. Jako referenční stav byly pro ložisko na straně turbiny ($\mathrm{B_T}$) zvoleny teploty maziva $T_I^T = 130\,^oC$,

$T_O^T = 120\,^oC$. Pro ložisko na straně kompresoru ($B_C$) byly uvažovány teploty maziva $T_I^C = 110\,^oC$, $T_O^C = 100\,^oC$.

Subsystém rotor-ložiska, který je reprezentován rotorem turbodmychadla uloženým na ložiskách s plovoucími pouzdry, byl analyzován v postupných krocích. Nejprve byla provedena analýza linearizovaného systému. Byly sledovány hodnoty vlastních čísel a jim odpovídají vlastní tvary, posuzována stabilita a ustálená odezva na nevyváženost. Rovněž byla provedena citlivostní analýza odvozeného výpočtového modelu na změnu parametrů. Dále bylo přistoupeno k modelování v časové oblasti. Byl sestaven plný model subsystému rotor-ložiska a následně snížen počtu stupňů volnosti. Získané numerické výsledky byly následně porovnány s experimentálně získanými hodnotami.

## 5.2 Analýza rotoru založená na linearizovaném modelu

V prvním kroku byl sestaven linearizovaný výpočtový model subsystému rotor-ložiska. Jeho analýza byla prováděna ve zvoleném rozsahu provozních otáček $n \in \langle 40000, 200000 \rangle$ [ot $\cdot$ min$^{-1}$]. V jednotlivých krocích byly považovány hodnoty provozních otáček za konstantní. Následně byly stanoveny dynamické charakteristiky modelu. Linearizovaný model ložiskových sil předpokládá podle kapitoly 1 znalost statického zatížení, které je přenášeno uložením. Na základě znalosti geometrie rotoru a polohy ložiskových podpor bylo určeno statické zatížení přenášené vnitřními olejovými filmy, konkrétně pro ložisko $B_T$ je hodnota statického zatížení $F_{st}^{I,T} = 1,998\,\mathrm{N}$ a pro ložisko $B_C$ je hodnota statického zatížení $F_{st}^{I,C} = 0,336\,\mathrm{N}$. Vnější olejové filmy jsou navíc vystaveny vlivu tíhových sil od plovoucích pouzder, tedy $F_{st}^{O,T} = 2,054\,\mathrm{N}$ a $F_{st}^{O,C} = 0,393\,\mathrm{N}$. Pro definovaný nominální stav byly ve stanoveném rozsahu otáček stanoveny charakteristiky ložiskových podpor v souladu s kapitolou 2. Pro malé výchylky ze statické rovnovážné polohy byly vypočítány poměrné excentricity odpovídající výchylkám středů čepů, resp. středů plovoucích pouzder ze statických rovnovážných poloh. Významným parametrem ložisek s plovoucími pouzdry jsou rychlosti rotace plovoucích pouzder. Jejich velikosti byly stanoveny jako násobek rychlosti rotace čepu ložiska. Zavislosti velikosti těchto násobků na otáčkách rotoru byly pro jednotlivá ložiska znázorněny na obrázku 5.2. Získané křivky mají ve sledovaném rozsahu otáček téměř konstantí průběh, přičemž plovoucí pouzdro ložiska $B_T$ vykazuje rychlost rotace přibližně 39 % rychlosti rotace čepu hřídele. Plovoucí pouzdro ložiska $B_C$ hodnu o málo nižší, přibližně 37 %.



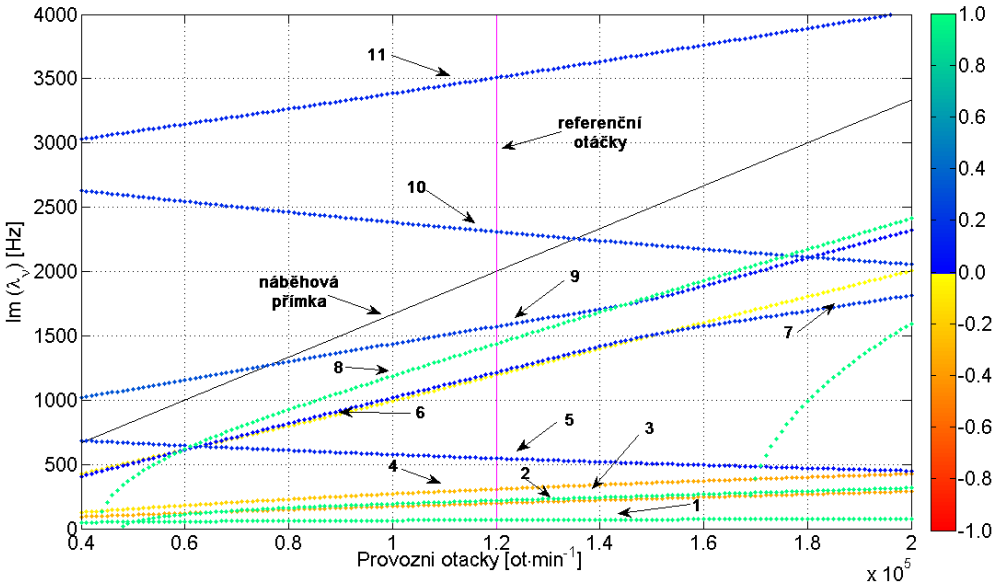

Obrázek 5.2: Závislosti násobků rychlosti rotace plovoucích pouzder RSR pro ložisko $B_T$ na turbinové straně (modře) a pro ložisko $B_C$ na kompresorové straně (černě) na provozních otáčkách rotoru.

### 5.2.1 Modální analýza

Prvním krokem při studování dynamických vlastností subsystému rotor-ložiska byla analýza vlastních čísel a jim odpovídajících vlastních tvarů. Tento postup byl prováděn v dílčích krocích. V první fázi byla provedena modální analýza volného nerotujícího rotoru turbodmychadla uvolněného od rámu v ložiskových vazbách. V dalších krocích byl zkoumán vliv zahrnutí gyroskopických účinků a charakteristik uložení. Řešením poblému vlastních hodnot byly získány hodnoty vlastních čísel pro konkrétní provozní otáčky. Hodnoty imaginárních částí vypočítaných vlastních čísel jsou vyneseny do Campbellova diagramu na obrázku 5.3. Větve diagramu jsou znázorněny barevně na základě hodnoty poměrného modálního útlumu odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_\nu$ ve tvaru (2.8), tedy

$$D_\nu = \frac{\alpha_\nu}{|-\alpha_\nu \pm \mathrm{i}\beta_\nu|}\,. \tag{5.1}$$

Kladné hodnoty $D_\nu$ odpovídají stabilním tvarům kmitu (v diagramu jsou znázorněny pomocí zele-modré části škály). Vlastní tvary, jimž odpovídají hodnoty poměrného modálního útlumu blízké jedné lze považovat za přetlumené (v diagramu jsou znázorněny zeleně). Záporné hodnoty poměrného útlumu indikují nestabilní tvary kmitu a jsou znázorněny pomocí žluto-červené části škály. Pořadí vlastních čísel bylo určeno podle velikosti imaginárních částí při otáčkách $n = 120000\,[\mathrm{ot}\cdot\mathrm{min}^{-1}]$. Na základě grafického znázornění a vypočítaných vlastních čísel lze říci, že nestabilní charakter vykazují tvary kmitání v subsynchronní oblasti diagramu. Konkrétně se jedná o tvary




Obrázek 5.3: Campbellův diagram odpovídající nominálnímu stavu.

odpovídající vlastním číslům 2, 4 a 6. Jako přetlumené lze označit vlastní tvary odpovídající vlastním číslům 1, 3 a 8.

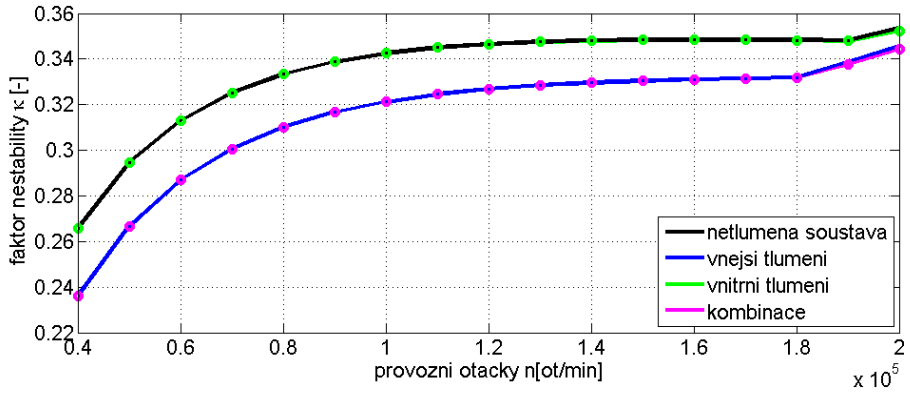
Dalšími vlivy, o které lze rozšířit sestavený matematický model, jsou tlumicí účinky reprezentované vnitřním (materiálovým) tlumením a vnějším tlumením. Vnější tlumení bylo zahrnuto prostřednictvím koeficientů vnějšího tlumení hřídele $b_{EY} = b_{EZ} = 50\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, turbinového kola $b^T_{EY} = b^T_{EZ} = 10\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ a kompresorového kola $b^C_{EY} = b^C_{EZ} = 3\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Vnitřní tlumení bylo zahrnuto do výpočtového modelu prostřednictvím koeficientu vnitřního tlumení hřídele $b_I = 10^{-6}\,\mathrm{s}$. Vliv zahrnutých tlumicích účinků na vypočítané modální vlastnosti byl prezentován pomocí údajů uvedených v tabulce 5.1, kde byl pro vybrané otáčky ve zvoleném pracovním rozsahu uveden počet reálných vlastních čísel (Re), počet párů komplexně sdružených vlastních čísel s kladnou reálnou částí ($\Sigma$) a odpovídající typ nestability (S). Na základě grafického znázornění vypočítaných vlastních čísel lze říci, že nestabilní charakter vykazují tvary kmitání v oblasti diagramu po náběhovou přímkou (tzv. subsynchronní složky). Ve sledovaném rozsahu provozních otáček je generována pouze nestabilita typu flutter (F). Míra nestability je posouzena na základě hodnoty tzv. stabilizačního faktoru, který je definován pro vlastní číslo $\lambda_\nu$ jako

$$\kappa = \max\left(\frac{Re\,(\lambda_\nu)}{Im\,(\lambda_\nu)}\right) . \tag{5.2}$$

| provozní | Netlumený systém | | Vnější tlumení | | Vnitřní tlumení | | Kombinace | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| otáčky | Re | Σ/S | Re | Σ/S | Re | Σ/S | Re | Σ/S |
| 40000 | 6 | 6/F | 6 | 6/F | 20 | 6/F | 20 | 6/F |
| 60000 | 2 | 6/F | 2 | 6/F | 8 | 6/F | 8 | 6/F |
| 80000 | 2 | 6/F | 2 | 6/F | 8 | 6/F | 8 | 6/F |
| 100000 | 2 | 6/F | 2 | 6/F | 8 | 6/F | 8 | 6/F |
| 120000 | 2 | 6/F | 2 | 6/F | 2 | 6/F | 2 | 6/F |
| 140000 | 2 | 6/F | 2 | 6/F | 2 | 6/F | 2 | 6/F |
| 160000 | 0 | 6/F | 0 | 6/F | 2 | 6/F | 2 | 6/F |
| 180000 | 0 | 6/F | 0 | 6/F | 2 | 6/F | 2 | 6/F |
| 200000 | 0 | 6/F | 0 | 6/F | 2 | 6/F | 2 | 6/F |

Tabulka 5.1: Charakter vypočítaných vlastních čísel z hlediska stability.

Závislosti vypočítaných faktorů nestability na provozních otáčkách jsou pro jednotlivé varianty tlumicích účinků jsou vyneseny do obrázku 5.4. Na základě vynesených křivek lze říci, že zahrnutí tlumicích účinků do výpočtového modelu má ve sledovaném rozsahu otáček pozitivní dopad na stabilitu systému. Jako významnější se jevil v provedených výpočtech vliv vnějšího tlumení. Vliv vnitřního tlumení byl ve sledovaném rozsahu pracovních otáček zanedbatelný. Vzhledem k dominantnosti vlivu tlumení olejových filmů ložisek byl v dalších výpočtech modelován pouze subsystém rotor-ložiska bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení hřídele a vnějšího tlumení kol.

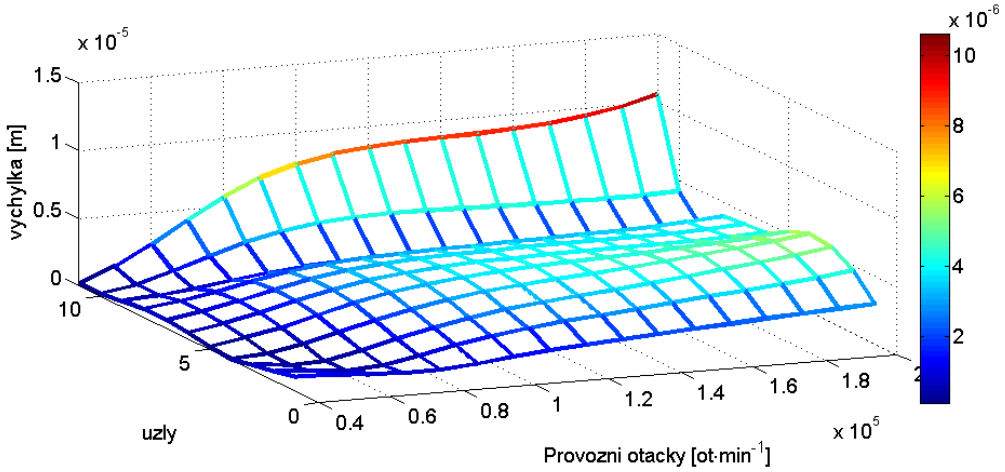



Obrázek 5.4: Závislost faktorů nestability na provozních otáčkách pro netlumený systém, systém s vnějším tlumením, systém s vnitřním tlumením a s kombinací vnějšího a vnitřního tlumení.

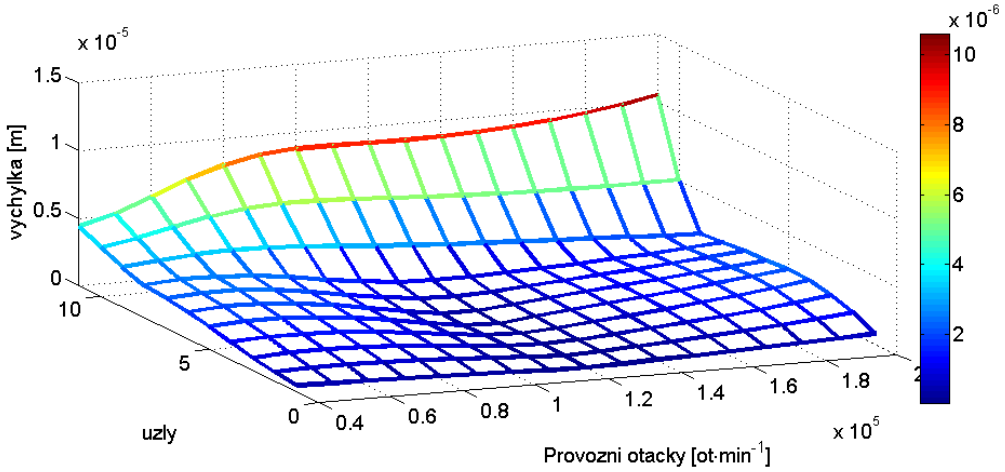
### 5.2.2 Ustálená odezva na nevyváženost

Zásadním parametrem, který významně ovlivňuje dynamickou odezvu rotoru turbodmychadla, je nevyváženost rotoru. Během výzkumu byl studován vliv celé

řady kombinací nevývah [A1]. V této kapitole jsou uvedeny výsledky získané pro kombinace nevývah uvedené v tabulce 4.1, které byly za účelem studia vlivu nevyváženosti uměle vneseny do subsystému rotor-ložiska při experimentálním měření. Získané výsledky znázorňují velikost radiálních výchylek uzlů hřídele ze statické rovnovážné polohy v závislosti na otáčkách.

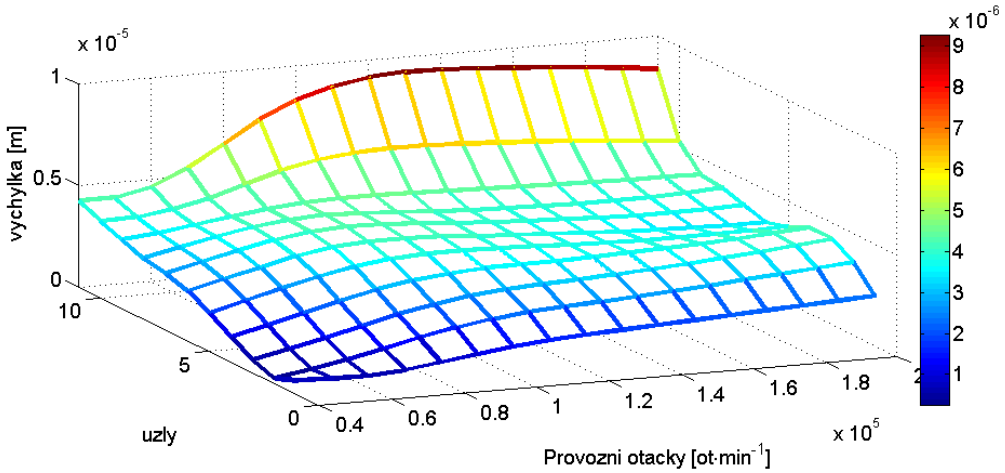



Obrázek 5.5: Ustálená odezva na buzení nevyvážeností vnesenou na stranu turbinového kola ($\Delta u_T = 0,2\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}$).




Obrázek 5.6: Ustálená odezva na buzení nevyvážeností vnesenou na stranu kompresorového kola ($\Delta u_C = 0,21\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}$).

Ze získaných odezev na nevyváženost lze říci, že definovaná nevyváženost při modelovaných provozních podmínkách generuje významný nárůst amplitud zejména v případě kombinace nevývah, viz obrázek 5.7. Při přiblížení a detailním studiu získaných odezev lze říci, že ve všech vyobrazených případech vykazuje maximální výchylky uzel č. 11, v němž je na hřídel nasazena měřicí matice.

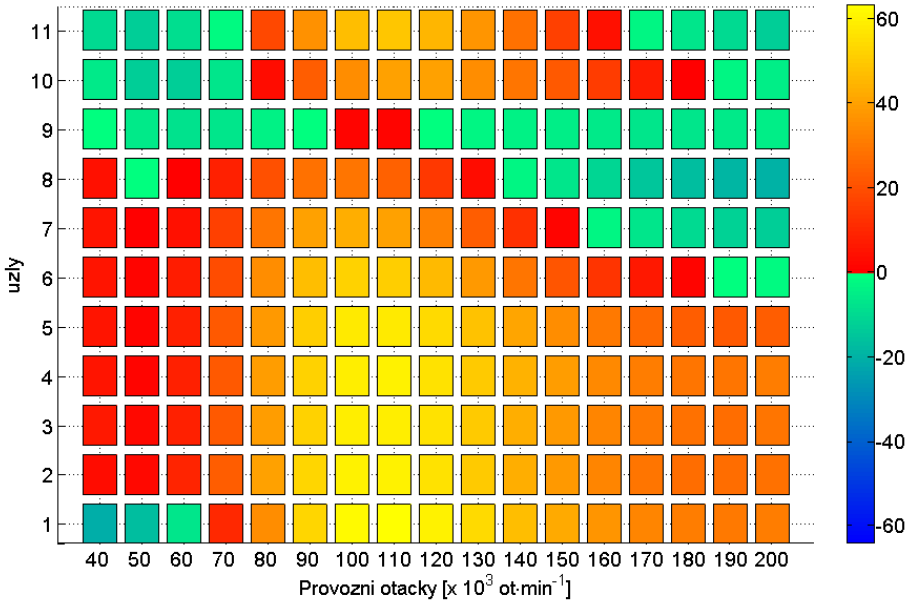



Obrázek 5.7: Ustálená odezva na buzení nevyvážeností vnesenou na stranu turbinového i kompresorového kola ($\Delta u_T = 0,2\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}$, $\Delta u_C = 0,21\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}$, $\alpha = 135^{\mathrm{o}}$).

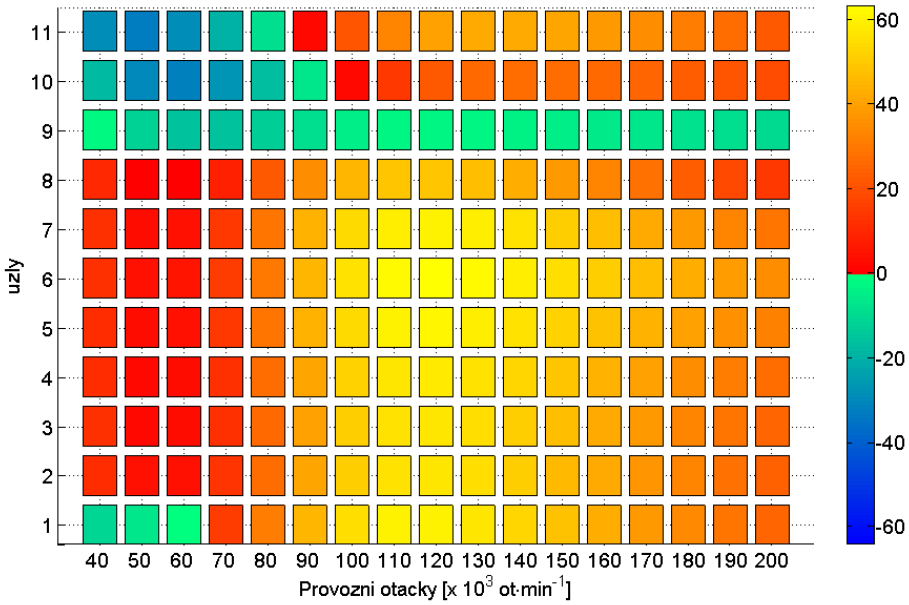
### 5.2.3 Citlivostní analýza

Z důvodu porozumění dynamickému chování subsystému rotor-ložiska pro případ rotoru turbodmychadla uloženého na hydrodynamických ložiskách s plovoucími pouzdry byla studována citlivost sestaveného matematického modelu rotoru na změnu vybraných návrhových parametrů. S ohledem na tvar matematického modelu rotoru a význam ustálené odezvy vyvolané nevyvážeností byla vyšetřována citlivost ustálené odezvy na změnu parametrů. Byly sledovány citlivosti ustálené odezvy systému na změnu geometrických parametrů ložiskových vazeb (především ložiskových vůlí) a charakteristik maziva (především teploty maziva a jeho dynamické viskozity). Narozdíl od stanovení citlivosti linearizovaného matematického modelu na změnu geometrických parametrů rotoru bylo nutno u vazeb přistoupit ke stanovení citlivosti numericky z důvodu výpočtu tuhostních a tlumicích koeficientů vazby na základě řešení nelineární rovnice (1.99).

Na obrázcích 5.8 - 5.11 jsou vykresleny relativní citlivosti ustálené odezvy na nevyváženost, reprezentovanou kombinací nevývah N3 v tabulce 5.1, jednotlivých diskretizačních uzlů hřídele vyvolané nevyvážeností na změnu ložiskových vůlí pro změnu $\Delta = 10^{-8}\,\mathrm{m}$, která vzhledem k parametrům uvedeným v dodatku D odpovídá přibližně 0,1 % nominálního stavu. Kladná část škály odpovídá nárůstu ustálené odezvy se vzrůstem návrhových parametrů, naopak záporné hodnoty odpovídají jejímu snížení v daném uzlu. Na základě provedené numerické analýzy lze říci, že nárůst vnitřních vůlí v obou ložiskách má za následek nárůst ustálených výchylek uzlů 1-8 téměř v celém rozsahu sledovaných provozních otáček. Významnější nárůst byl pro danou změnu ložiskových vůlí zaznamenán pro případ nárůstu hodnot vnějších vůlí.

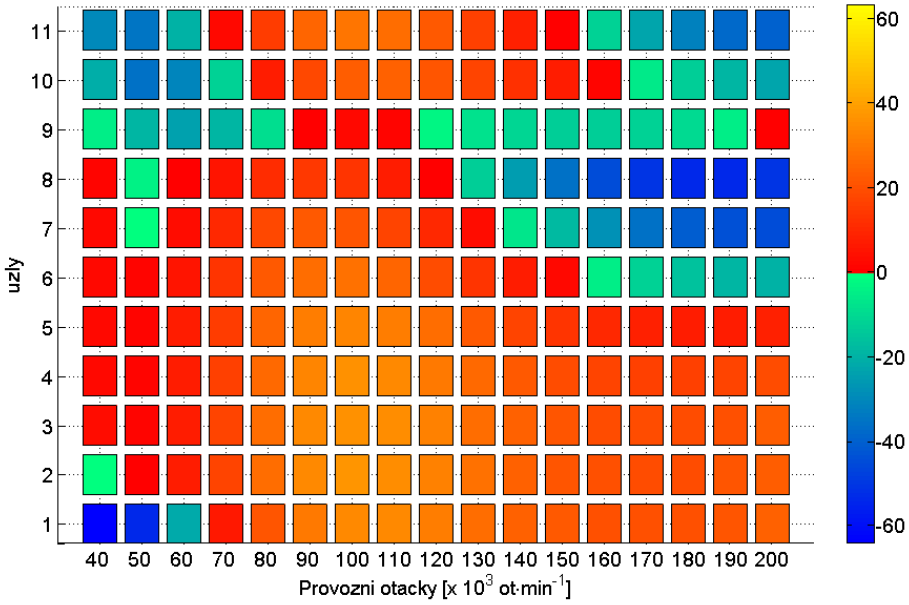



Obrázek 5.8: Citlivost ustálené odezvy na změnu vnitřní ložiskové vůle ložiska na straně turbiny ($B_T$) při buzení nevyvážeností $\Delta u_T$, $\Delta u_C$ - bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení.

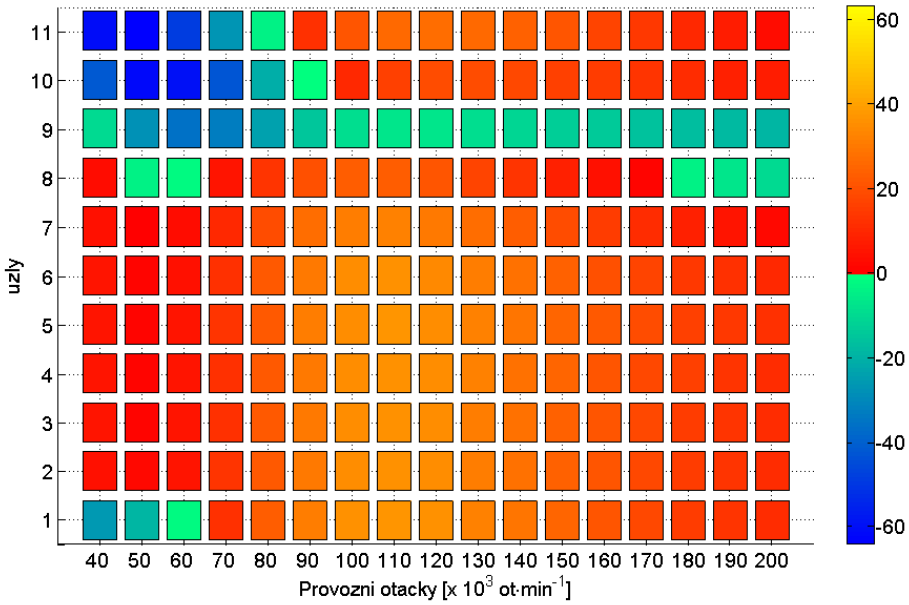



Obrázek 5.9: Citlivost ustálené odezvy na změnu vnitřní ložiskové vůle ložiska na straně kompresoru ($B_C$) $\Delta u_T$, $\Delta u_C$ - bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení.

Pozitivní vliv lze zaznamenat pouze u kompresorového kola umístěného v uzlu č. 9, kde se projevil pokles ustálených výchylek.




Obrázek 5.10: Citlivost ustálené odezvy na změnu vnější ložiskové vůle ložiska na straně turbiny ($B_T$) při buzení nevyvážeností $\Delta u_T$, $\Delta u_C$ - bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení.




Obrázek 5.11: Citlivost ustálené odezvy na změnu vnější ložiskové vůle ložiska na straně kompresoru ($B_C$) při buzení nevyvážeností $\Delta u_T$, $\Delta u_C$ - bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení.

## 5.3 Modelování rotoru turbodmychadla v časové oblasti

Na základě metodiky modelování rotujícího systému zahrnujícího vlivy uložení a dalších budících sil, jež je popsána v kapitolách 2 a 3, byl sestaven výpočtový model rotoru turbodmychadla uloženého na ložiskách s plovoucími pouzdry, který byl vystaven vlivu nevyváženosti. Sestavený vektor výchylek obsahuje 44 souřadnic odpovídajících příčným výchylkám diskretizačních uzlů hřídele a 4 souřadnice popisující příčné výchlyk plovoucích pouzder z centrální polohy, určené spojnicí geometrických středů pánví ložisek. Následně byl sestaven vektor buzení nelineárních sil, formálně odpovídající výrazu (3.26), který zahrnuje vektor statického zatížení $\mathbf{f}_{st}$, jehož nenulové prvky, na pozicích odpovídajících výchylkám ve směru osy Y, odpovídají záporně vzatým vlastním tíhám jednotlivých hřídelových prvků a tuhých kotoučů, které jsou koncentrovány do těchto uzlů. Vektor ložiskových sil $\mathbf{f}_L$ obsahuje nenulové prvky odpovídající silám generovaným ve vnitřních olejových filmech obou ložisek na poziích 9, 10 a 21, 22. Další nenulové prvky jsou alokovány na pozicích 45, 46 a 47, 48 a odpovídají silám působícím na plovoucí pouzdra. Nevyváženost je do výpočtového modelu zahrnuta prostřednictvím složek ostředivých sil zahrnutých do vektoru $\mathbf{f}_{nev}$. Jeho nenulové složky jsou na pozicích 1-4 (odpovídají statické nevyváženosti na straně turbinového kola) a 41-44 (odpovídají statické nevyváženosti na straně kompresorového kola).

Počáteční podmínky byly stanoveny pro zvolené pracovní otáčky na základě dat získaných z linearizovaného modelu. Vektor počátečních výchylek byl určen na základě znalosti matic tuhosti rotoru a ložiskových podpor ze vztahu

$$\left(\mathbf{K} + \mathbf{K}_B\left(\omega\right)\right)\mathbf{q}\left(0\right) = \mathbf{f}_{st}\,. \tag{5.3}$$

Vektor počátečních rychlostí $\dot{\mathbf{q}}\left(0\right)$ je považován za nulový. Pro takto určené počáteční podmínky bylo numerické řešení implementováno ve výpočtovém systému MATLAB. Pro numerické řešení byly využita dostupná knihovní funkce `ode15s`. Časový interval, ve kterém byl řešen časový průběh chování rotoru turbodmychadla, byl volen s ohledem na hodnotu provozních otáček, odpovídají 100 periodám pohybu. Samotná hodnota provozních otáček byla nastavena s ohledem na provedený experiment jako konstantní, odpovídala tzv. ustáleným stavům při 120000 ot/min a 140000 ot/min při pohonu teplým i studeným vzduchem. Do provedených výpočtů byly zahrnuty odstředivé síly odpovídající uměle vneseným nevývahám, uvedeným v tabulce 5.1.

Numerické řešení odpovídajícího systému obyčejných diferenciálních rovnic se však jevilo jako problematické, jelikož pro rozličné varianty nastavení numerického řešiče nebylo možno dosáhnout uspokojivých výsledků. Důvodem byla značná časová nároč-

nost výpočtu v řádu desítek hodin pro čas simulace odpovídající 1s reálného pohybu rotoru. Na základě tohoto bylo za účelem zkrácení výpočtového času přistoupeno ke snížení počtu stupňů volnosti výpočtového modelu.

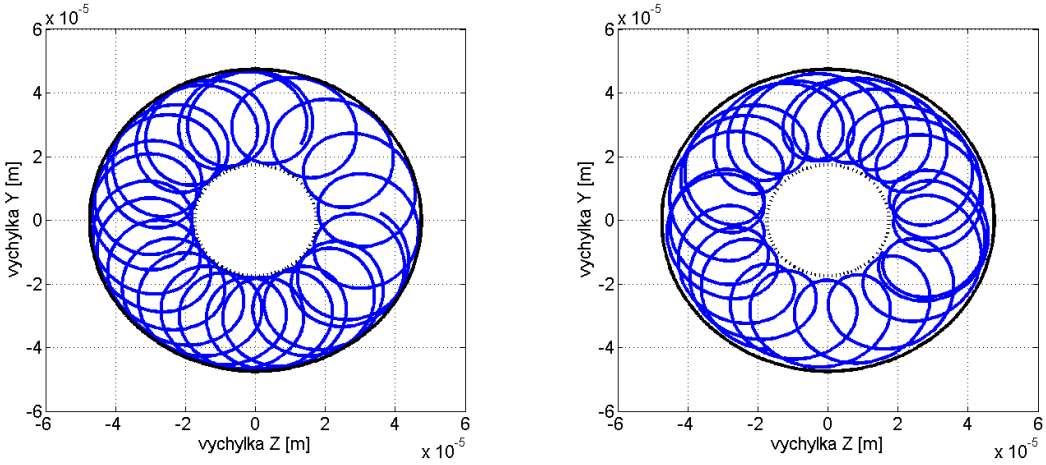
Byly určeny modální charakteristiky přidružené konzervativní soustavy a zvolen počet $m$ , $m < n$ respektovaných modálních souřadnic hřídele rotoru. S ohledem na tuto úpravu byl počet stupňů volnosti původního (plného) modelu snížen na $m + 4$. V důsledku provedení neúplné modální transformace pomocí neúplné modální matice tak došlo k minimalizace vlivu frekvenčně vysokých tvarů kmitu. Současně byly transformovány počáteční podmínky nezbytné pro řešení úlohy v časové oblasti. Během výzkumu bylo otestováno nemalé množství variant úrovně kondenzace. S ohledem na to byly zvoleny hodnoty určující počet respektovaných vlastních tvarů, které poskytovaly uspojivé výsledky v přijatelném výpočtovém čase. Konkrétně byly zvoleny hodnoty $m_1 = 30$ a $m_2 = 8$. Tyto hodnoty byly využity pro studium a sledování charakteristik získaných numerickým řešením. V následující části práce byly studovány následující charakteristiky:

- trajektorie středů čepů ložisek;
- trajektorie středů plovoucích pouzder;
- rychlosti rotace plovoucích pouzder;
- trajektorie měřících bodů odpovídajích svou polohou uzlům 4, 5 diskretizace.

Získané numerické výsledky byly prezentovány pro kombinaci nevývah N3, specifikovanou v tabulce 5.1. Rychlosti rotace plovoucích pouzder a trajektorie měřících bodů získané simulací byly porovnány s experimentálně získanými daty.

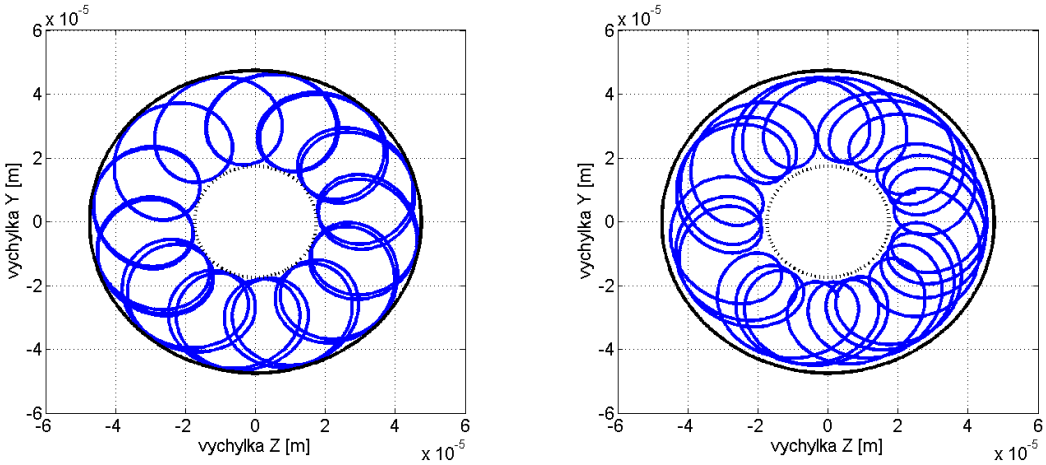
### 5.3.1 Trajektorie středu čepů a středů plovoucích pouzder

Na obrázcích 5.12 – 5.15 jsou modře znázorněny trajektorie středů čepů v prostoru pánve ložiska pro zvolené provozní otáčky $120\,000\,\mathrm{ot} \cdot \mathrm{min}^{-1}$, $140\,000\,\mathrm{ot} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ a úrovně kondenzace $m_1 = 30$ a $m_2 = 8$. Prostor je vymezen vnější hranicí určenou součtem vnější a vnitřní ložiskové vůle $c_O + c_I$ a vnitřní hranicí určenou jejich rozdílem $c_O - c_I$. Hranice pohybu jsou vykresleny černě. Konkrétní velikosti ložiskových vůlí jsou uvedeny v dodatku D.



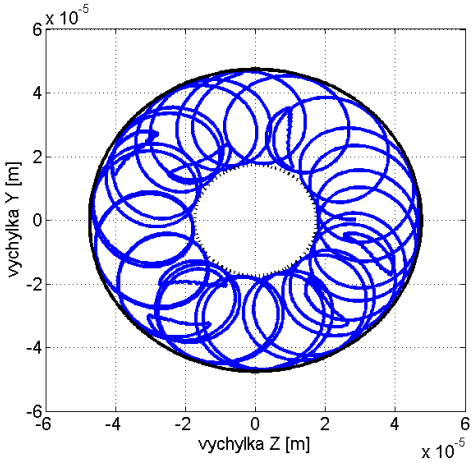

(a) čep ložiska $B_T$ (b) čep ložiska $B_C$

Obrázek 5.12: Trajektorie středů čepu ložisek v prostoru vymezeném vůlemi pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$.

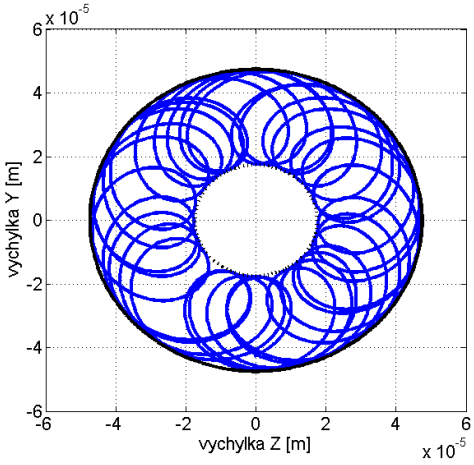



(a) čep ložiska $B_T$ (b) čep ložiska $B_C$

Obrázek 5.13: Trajektorie středů čepu ložisek v prostoru vymezeném vůlemi pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$.

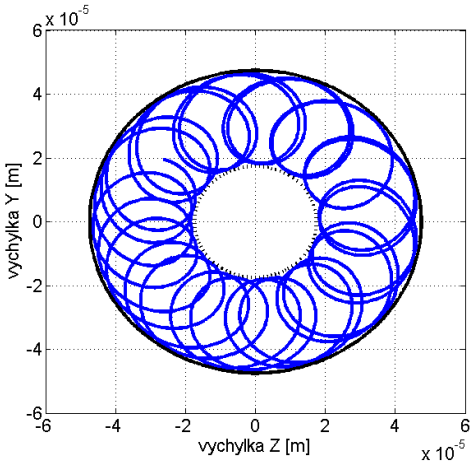



(a) čep ložiska $B_T$

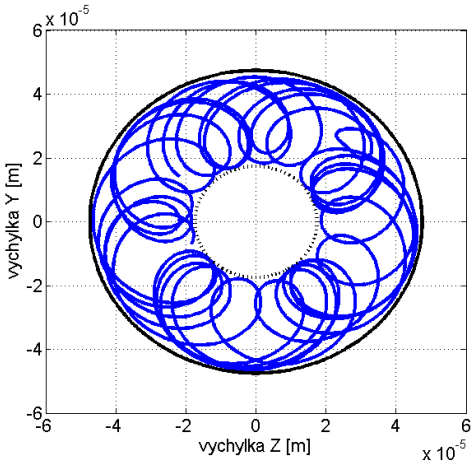



(b) čep ložiska $B_C$

Obrázek 5.14: Trajektorie středů čepu ložisek v prostoru vymezeném vůlemi pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$.



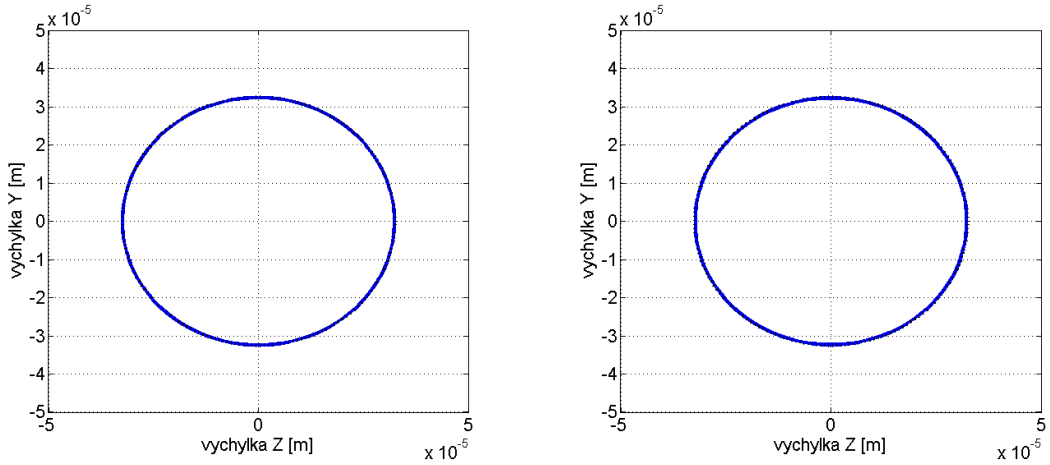

(a) čep ložiska $B_T$




(b) čep ložiska $B_C$

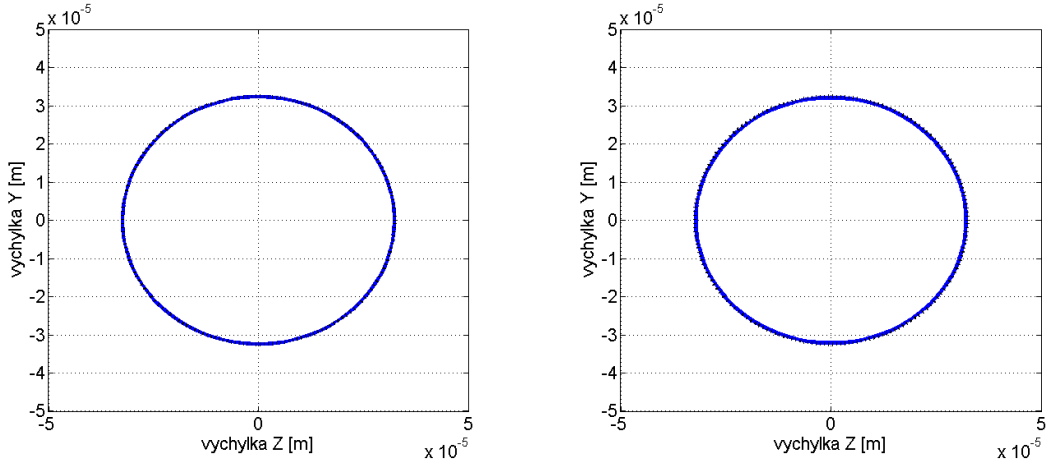
Obrázek 5.15: Trajektorie středů čepu ložisek v prostoru vymezeném vůlemi pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$.

Dále jsou na obrázcích 5.16 a 5.17 modře znázorněny trajektorie geometrických středů plovoucích pouzder v prostoru pánve ložiska. Prostor je vymezen pouze vnější hranicí určenou vnější ložiskovou vůlí $c_O$, znázorněnou černě .



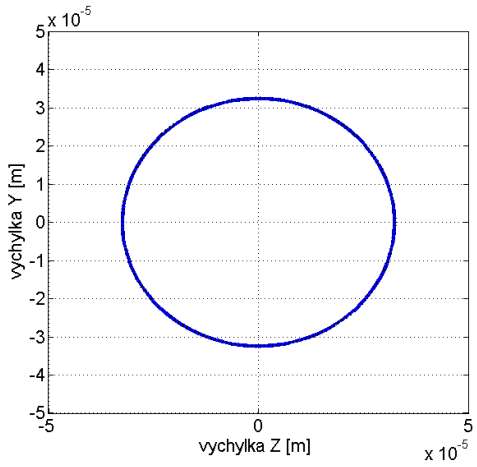

(a) střed pouzdra $B_T$ (b) střed pouzdra $B_C$

Obrázek 5.16: Trajektorie středů plovoucích pouzder v prostoru vymezeném vůlemi pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$.

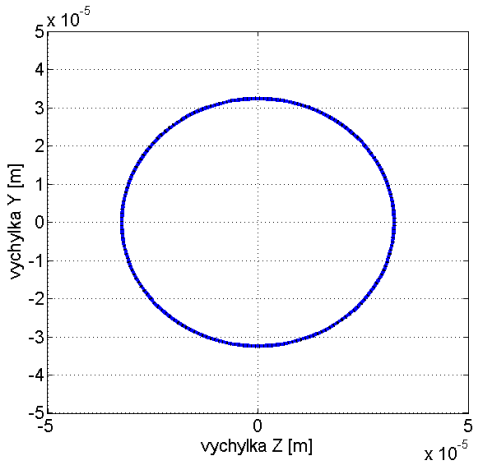



(a) střed pouzdra $B_T$ (b) střed pouzdra $B_C$

Obrázek 5.17: Trajektorie středů plovoucích pouzder v prostoru vymezeném vůlemi pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$.

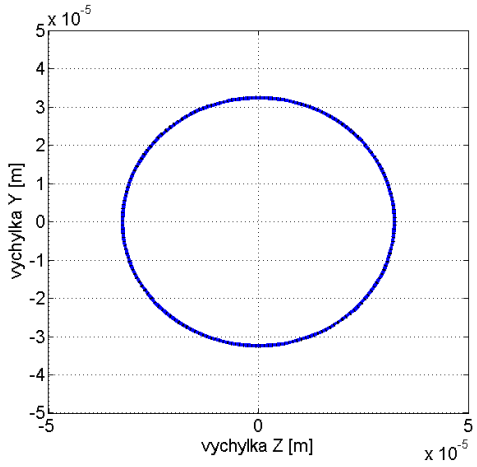



(a) čep ložiska $B_T$

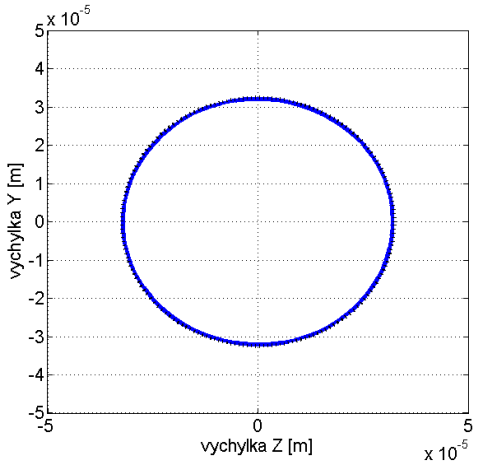



(b) čep ložiska $B_C$

Obrázek 5.18: Trajektorie středů plovoucích pouzder v prostoru vymezeném vůlemi pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$.




(a) čep ložiska $B_T$



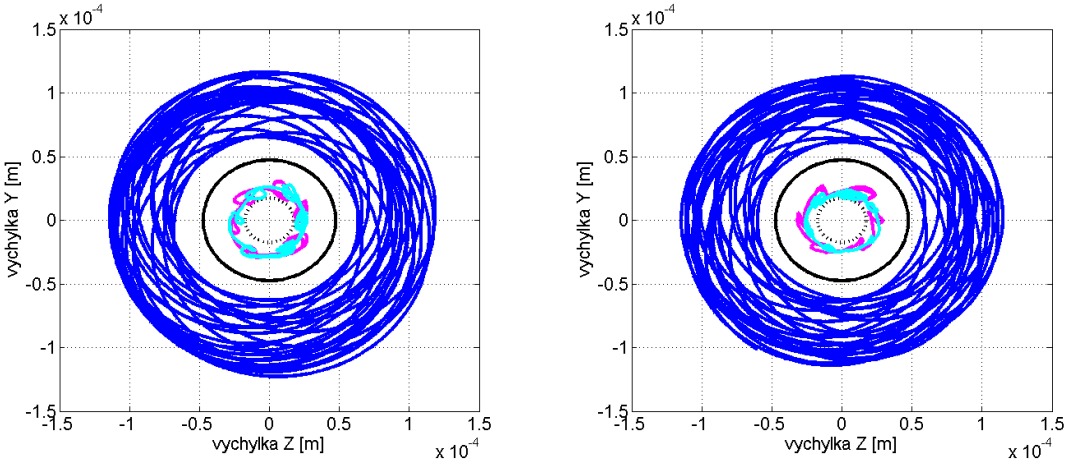

(b) čep ložiska $B_C$

Obrázek 5.19: Trajektorie středů plovoucích pouzder v prostoru vymezeném vůlemi pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$.

Získané orbity jsou porovnatelné z hlediska charakterů časových průběhů výchylek. V případě ložiska $B_T$ čep vyčerpá 97 % vymezené vůle pro obě úrovně kondenzace $m_1 = 30$, $m_2 = 8$. V případě ložiska $B_C$ čep vyčerpá 92 % vymezené vůle pro $m_1 = 30$, resp. 87 % vymezené vůle pro $m_2 = 8$. V případě středů plovoucích pouzder dochází k vyčerpání 99% ložiskové vůle pro obě ložiska v případě obou úrovní kondenzace.

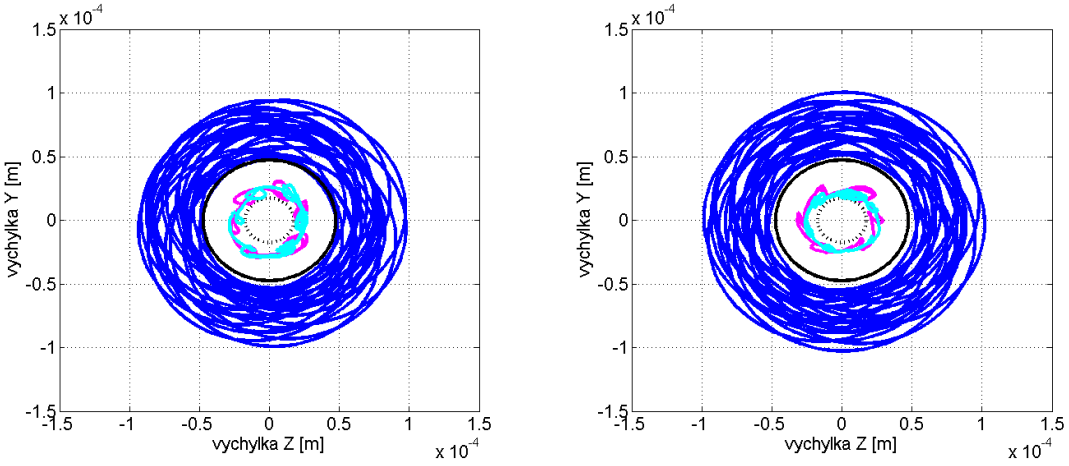
### 5.3.2 Trajektorie měřících bodů

Trajektorie měřících bodů získané numerickou simulací znázorněné na obrázcích 5.20 a 5.23 tmavě modrou čarou, které svou pozicí odpovídají poloze diskretizačních uzlů 4 a 5 hřídele, byly porovnány s experimentálními výsledky pro pohon teplým vzduchem znázorněnými růžově a pro pohon studeným vzduchem znázorněnými světle modře. Z obrázků je patrné, že amplitudy uzlů 4 a 5 získané numerickým řešením jsou násobně větší než amplitudy výchylek získané experimentálně.



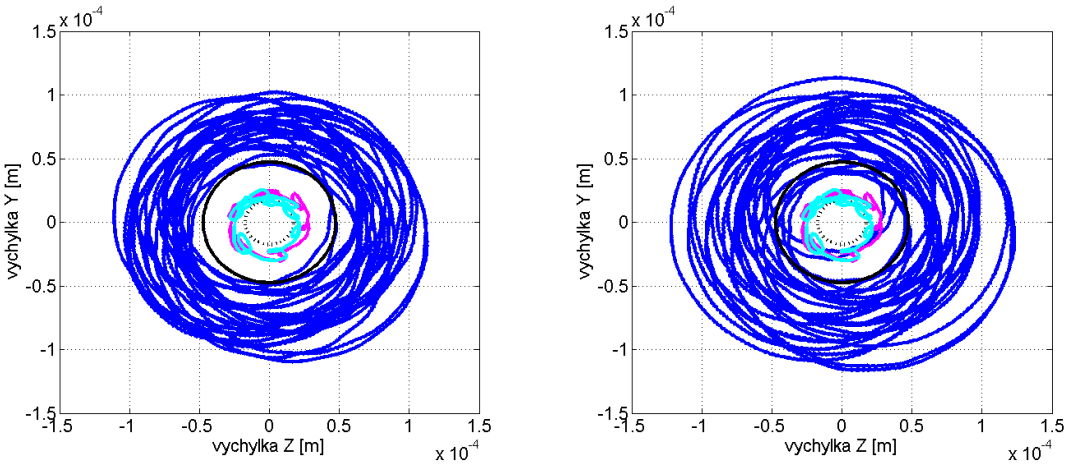

(a) měřící bod - uzel 4 (b) měřící bod - uzel 5

Obrázek 5.20: Trajektorie uzlů odpovídajících svou polohou měřícím bodům pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$.



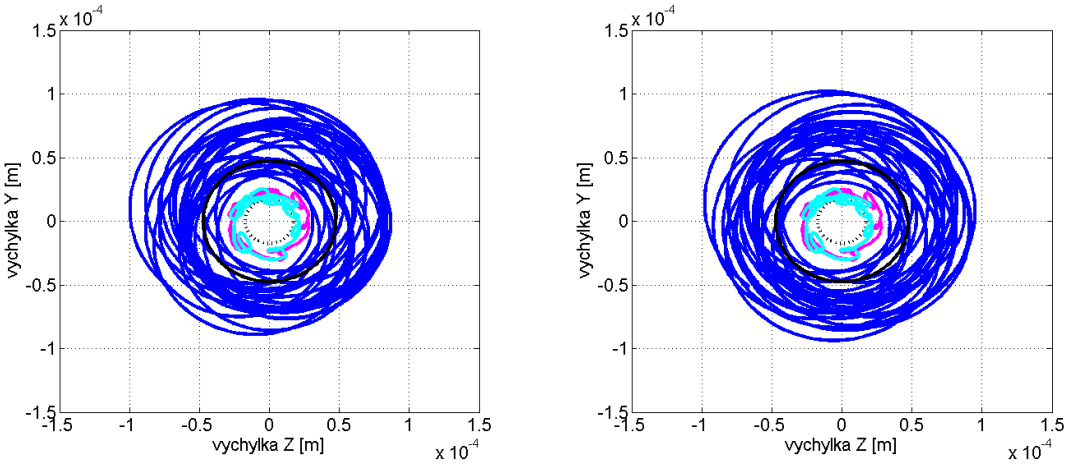

(a) měřící bod - uzel 4 (b) měřící bod - uzel 5

Obrázek 5.21: Trajektorie uzlů odpovídajících svou polohou měřícím bodům pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$.




(a) měřící bod - uzel 4 (b) měřící bod - uzel 5

Obrázek 5.22: Trajektorie uzlů odpovídajících svou polohou měřícím bodům pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$.




(a) měřící bod - uzel 4 (b) měřící bod - uzel 5

Obrázek 5.23: Trajektorie uzlů odpovídajících svou polohou měřícím bodům pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$.

Získané výsledky ukazují, že zanedbání většího počtu frekvenčně vysokých tvarů kmitu mělo pozitivní dopad na velikost vypočítaných amlitud výchylek měřících bodů.

### 5.3.3 Rychlosti rotace plovoucích pouzder

V tabulce 5.2 jsou uvedeny hodnoty násobků rychlosti rotace plovoucích pouzder (RSR) získané při experimentálním měření pro pohon teplým (T) i studeným (S) vzduchem. Hodnoty byly získány zprůměrováním naměřených hodnot v celém měřicím intervalu 30 s. Současně jsou zde uvedeny hodnoty získané pomocí numerických

simulací. Ty byly získány rovněž zprůměrováním hodnot odpovídajících posledním 25 periodám pohybu čepu. Hodnoty parametru RSR získané numerickým modelováním pro 120000 ot/min jsou blízké hodnotám získaným experimentálně. Shoda experimentálních dat s numerickými výsledky se v tomto ohledu dá považovat za dobrou.

| | | $\Delta u_T$ | $\Delta u_C$ | $\Delta u_T$+$\Delta u_C$ |
|---|---|---|---|---|
| Plovoucí pouzdro $B_T$ | T | 0,1648 | 0,1512 | 0,1455 |
| | S | 0,1602 | 0,1503 | 0,1453 |
| | $m_1$ | 0.1547 | 0.1430 | 0.1387 |
| | $m_2$ | 0,0893 | 0.0967 | 0,0893 |
| Plovoucí pouzdro $B_C$ | T | 0,1356 | 0,1098 | 0,1263 |
| | S | 0,1452 | 0,1230 | 0,1241 |
| | $m_1$ | 0,1254 | 0,1028 | 0.0957 |
| | $m_2$ | 0.1065 | 0,063 | 0.0757 |

Tabulka 5.2: Zprůměrované parametry RSR ložisek pro 120000 ot/min získané experimentálně a výpočtově pro úroveň kondenzace $m_1 = 30$ a $m_2 = 8$.

| | | $\Delta u_T$ | $\Delta u_C$ | $\Delta u_T$+$\Delta u_C$ |
|---|---|---|---|---|
| Plovoucí pouzdro $B_T$ | T | 0,1515 | 0,1403 | 0,1491 |
| | S | 0,1542 | 0,1361 | 0,1495 |
| | $m_1$ | 0.1247 | 0.1123 | 0.1352 |
| | $m_2$ | 0.0924 | 0.0892 | 0.1135 |
| Plovoucí pouzdro $B_C$ | T | 0,0570 | 0,1038 | 0,0769 |
| | S | 0,0725 | 0,1224 | 0,1038 |
| | $m_1$ | 0.0647 | 0.1133 | 0.987 |
| | $m_2$ | 0.0456 | 0.1246 | 0.1042 |

Tabulka 5.3: Zprůměrované parametry RSR ložisek pro 140000 ot/min získané experimentálně a výpočtově pro úroveň kondenzace $m_1 = 30$ a $m_2 = 8$.

## 5.4 Shrnutí získaných výsledků

Na základě odvozeného matematického modelu byla provedena dynamická analýza sériově vyráběného rotoru turbodmychadla uloženého na ložiskách s plovoucími pouzdry. Nejprve byla provedena analýza založená na linearizovaném modelu subsystému rotor- ložiska ve zvoleném rozsahu provozních otáček. Z provedených výpočtů byly získány informace o modálních vlastnostech subsystému rotor-ložiska, charakteru vlastních čísel a stabilitních vlastnostech v závislosti na otáčkách rotoru. Dále byla studována dynamická odezva na definovanou uměle vnesenou nevyváženost. Získané výsledky byly porovnány s Campbellovým diagramem. Dále byla stanovena citlivost

ustálené odezvy využitého matematického modelu na změnu provozních parametrů. Z hlediska možnosti predikce rychlosti rotace plovoucích pouzder se linearizovaný model jevil jako nevhodný. Numericky vypočítané hodnoty (39,5 % pro ložisko $B_T$ a 37 % pro ložisko $B_C$) jsou významně větší než experimentálně naměřené hodnoty uvedené v tabulkách 5.2 a 5.3.

V případě nelinárního modelu, popisujícího dynamické chování subsystému rotor-ložiska v časové oblasti, byly studovány trajektorie pohybu středů čepů, resp. středů plovoucích pouzder, trajektorie pohybu měřících bodů a rychlosti rotace plovoucích pouzder. Pro plný matematický model však nebylo dosaženo relevantních výsledků. Z důvodu velké výpočtové náročnosti bylo přistoupeno ke snížení počtu stupňů volnosti pomocí tzv. neúplné modální transformace. Pro vyhodnocení výsledků byly vybrány numerické výsledky odpovídající $120000\,\mathrm{ot}\cdot\mathrm{min}^{-1}$ kombinaci nevývah na straně turbinového i kompresorového kola (viz varianta N3 v tabulce 2.1) a počty uvažovaných vlastních tvarů volného nerotujícího rotoru $m_1 = 30$ a $m_2 = 8$. Trajektorie čepů ložisek a středů plovoucích pouzder získané numericky jsou pro vybrané úrovně kondenzace a zvolené provozní otáčky porovnatelné. Trajektorie měřících bodů získané numericky dosahovaly vyšších amplitud než hodnoty získané během experimentálního měření. Výsledky bližší experimentálním datům poskytovaly výpočty respektující $m_2 = 8$ frekvenčně nejnižších tvarů kmitu volného nerotujícího rotoru. Naproti tomu numerické simulace pro $m_1 = 30$ vykazovaly lepší shodu s experimentálním měřením při vyhodnocení získaných rychlostí plovoucích pouzder. Odchylky výsledků numerické simulace od experimentálních dat mohou být zapříčiněny mnoha vlivy, kterými jsou např.

- zbytková nevyváženost rotoru po nasazení kompresorového kola na hřídel a další výrobní nepřesnosti;
- teplotní roztažnost rotoru turbodmychadla a ložiskové skříně vlivem spalin, které rotor pohánějí;
- nepřesný odhad teplot maziva v jednotlivých olejových filmech;
- degradace oleje v důsledku působení vysokých teplot;
- zanedbání vlivu sil působících na rotor v důsledku proudícího vzduchu poháněcího rotor.

# Závěr

Předložená disertační práce se zabývá problematikou modelování a dynamické analýzy rotorů turbodmychadel uložených na hydrodynamických ložiskách s plovoucími pouzdry. V rámci této práce byla prezentována metodika modelování subsystému rotor-ložiska a nástroje, pomocí kterých lze provést jeho analýzu. Matematický model rotoru je sestaven pomocí metody konečných prvků na základě znalosti jeho geometrických parametrů získaných mikrometráží a materiálových charakteristik. Model ložiskové vazby reprezentující ložisko s plovoucím pouzdrem respektuje předpoklady klasické teorie hydrodynamického mazání, přičemž plovoucí pouzdro je modelováno jako tuhé těleso. Parametry maziva jsou odvozeny na základě znalosti provozních podmínek získaných při experimentálním měření.

Sestavený výpočtový model, využívající vstupní data odpovídající reálnému subsystému rotor-ložiska, byl využit pro analýzu dynamického chování. V případě linearizovaného modelu byly sledovány stabilitní charakteristiky založené na znalosti vlastních čísel vypočítaných řešením problému vlastních hodnot, dynamická odezva vybraných uzlů modelu na uměle vnesenou nevyváženost a byla provedena analýza citlivosti modelu na změnu zvolených parametrů, konkrétně ložiskových vůlí . U nelineárního modelu, popisujícího chování subsystému rotor-ložiska v časové oblasti, byly sledovány trajektorie pohybu středů čepů ložisek, trajektorie středů plovoucích pouzder a rychlosti rotace plovoucích pouzder. S experimentálně získanými daty byly porovnány rychlosti rotace plovoucích pouzder v ložiskách a charaktery orbitů středů čepů v místech osazených čidly. Z důvodu příliš velké výpočtové náročnosti bylo u tohoto modelu přistoupeno ke snížení počtu stupňů volnosti metodou tzv. modální redukce pro dvě hodnoty $m_1 = 30$, $m_2 = 8$ počtu respektovaných frekvenčně nejnižších vlastních tvarů kmitu volného nerotujícího netlumeného rotoru.
Cíle disertační práce vytyčené v tezích disertační práce byly naplněny, konkrétně:

- byla navržena metodika pro sestavení nelineárního výpočtového modelu rotoru turbodmychadla uloženého na ložiskách s plovoucími pouzdry, který umožňuje řešit přechodové kmitání rotoru turbodmychadla;

- byl navržen postup, pomocí kterého je možno snížit počet stupňů volnosti výpočtového modelu, a tedy i výpočtovou náročnost při řešení přechodového kmitání v časové oblasti;
- navržené postupy byly zalgoritmizovány ve výpočtovém systému MATLAB za účelem možnosti opakovaných analýz a provedení parametrických studií;
- na základě sestaveného linearizovaného i nelineárního popisu subsystému rotor-ložiska byl analyzován vliv vybraných parametrů na jeho chování a získané numerické výsledky byly porovnány s experimentálně získanými daty.

Vytvořené programové vybavení lze dále rozšířit o další vlivy, jimž je rotor turbodmychadla vystaven. S ohledem na získané výsledky a vyvozené závěry plynoucí z provedené dynamické analýzy subsystému rotor-ložiska lze řešenou problematiku dále rozvíjet a postupovat několika směry:

- zpřesnění metodiky modelování ložiskové vazby, která reprezentuje ložisko s plovoucím pouzdrem;
- rozšíření sestaveného matematického modelu o zahrnutí vlivu axiálního ložiska;
- uvažování vlivu pohyblivého uložení ložiskové skříně a jejího buzení;
- odvození metodiky modelování o analýzu akustických projevů spojených s rotorovými vibracemi.

# Seznam literatury


[1] Chen, P. Y. P. a Hahn, E. J. "Use of computational fluid dynamics in hydrodynamic lubrication". In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 212.6 (1998), s. 427–436.

[2] Chen, W. J. "Rotordynamics and bearing design of turbochargers". In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 29 (2012), s. 77–89. ISSN: 0888–3270. DOI: 10.1016/j.ymssp.2011.07.025.

[3] Adamkiewicz, A. a Kuropatnicki, M. "Studies on the influence of rotor unit unbalance on the operational parameters of a turbocharger of the NAPIER C-045 type". In: *Zeszyty Naukowe/Akademia ...* 34.106 (2013), s. 12–18.

[4] Adhikari, S. "Eigenrelations for nonviscously damped systems". In: *AIAA journal* 39.8 (2001), s. 1624–1630.

[5] Adhikari, S. "Damping modelling using generalized proportional damping". In: *Journal of Sound and Vibration* 293.1 (2006), s. 156–170.

[6] Adhikari, S. a Phani, A. S. "Experimental identification of generalized proportional viscous damping matrix". In: *Journal of Vibration and Acoustics* 131.1 (2009), s. 1–12.

[7] Adhikari, S. a Woodhouse, J. "Identification of damping: part 1, viscous damping". In: *Journal of Sound and Vibration* 243.1 (2001), s. 43–61.

[8] Adhikari, S. a Woodhouse, J. "Identification of damping: part 2, non-viscous damping". In: *Journal of Sound and Vibration* 243.1 (2001), s. 63–88.

[9] Adhikari, S. a Woodhouse, J. "Quantification of non-viscous damping in discrete linear systems". In: *Journal of Sound and Vibration* 260.3 (2003), s. 499–518.

[10] Adiletta, G., Guido, A. R. a Rossi, C. "Chaotic motions of a rigid rotor in short journal bearings". In: *Nonlinear Dynamics* 10.3 (1996), s. 251–269.

[11] Ashtekar, A., Tian, L. a Lancaster, C. *An analytical Investigation of Turbocharger Rotor-Bearing Dynamics with Rolling Element Bearings and Squeeze Film Dampers.* [online]. Naposledy navštíveno 7.10.2015. URL: http://www.cumminsturbotechnologies.com/CTT/CTTContent/CTTUS/SiteContent/en/BinaryAsset/PDFs/Downloads/Rolling_element_bearing_and_squeeze_film_damper_dynamics.pdf.

[12] Balda, M. "Prediction of damage cumulation in vibrating rotors". In: *Proceedings of the 5th International IFToMM Conference on Rotor Dynamics.* 1998, s. 7–10.

[13] Bandstra, J. P. "Comparison of equivalent viscous damping and nonlinear damping in discrete and continuous vibrating systems". In: *Journal of Vibration and Acoustics* 105.3 (1983), s. 382–392.

[14] Bannwart, A. C., Cavalca, K. L. a Daniel, G. B. "Hydrodynamic bearings modeling with alternate motion". In: *Mechanics Research Communications* 37.6 (2010), s. 590–597.

[15] Bayomi, N. N. a Abd El-Maksoud, Rafea M. "Two operating modes for turbocharger system". In: *Energy Conversion and Management* 58 (2012), s. 59–65. ISSN: 0196–8904. DOI: 10.1016/j.enconman.2012.01.003.

[16] Bonello, P. "Transient modal analysis of the non-linear dynamics of a turbocharger on floating ring bearings". In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 223.1 (2009), s. 79–93.

[17] Boyaci, A., Seemann, W. a Proppe, C. "On the dynamics of a nonlinear rotor-floating ring bearing system". In: *PAMM* 4050006 (2007), s. 4050005–4050006.

[18] Brändlein, J. *Ball and roller bearings: theory, design and application.* Wiley, 1999.

[19] Brepta, R., Půst, L. a Turek, F. *Mechanické kmitání-technický průvodce 71.* Sobotáles, Praha, 1994.

[20] Busch, M. a Schweizer, B. "Coupled simulation of multibody and finite element systems: an efficient and robust semi-implicit coupling approach". In: *Archive of Applied Mechanics* 82.6 (2011), s. 723–741. ISSN: 0939–1533. DOI: 10.1007/s00419-011-0586-0.

[21] Byrtus, M. *Kmitání převodových ústrojí se silnými nelinearitami ve vazbách.* Disertační práce. Západočeská univerzita v Plzni. 2006.

[22] Byrtus, M., Hajžman, M. a Zeman, V. *Dynamika rotujících soustav.* Západočeská univerzita v Plzni, 2010.

[23] Dakel, M., Baguet, S. a Dufour, R. "Nonlinear dynamics of a support-excited flexible rotor with hydrodynamic journal bearings". In: *Journal of Sound and Vibration* 333.10 (2014), s. 2774–2799. ISSN: 0022–460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.12.021.

[24] Daniel, C. et al. "Numerical simulation of the dynamic behaviour of turbochargers undes consideration of full-floating-ring bearings and ball bearings". In: *11th international Conference on Vibration Problems* September (2013), s. 9–12.

[25] Deligant, M., Podevin, P. a Descombes, G. "Experimental identification of turbocharger mechanical friction losses". In: *Energy* 39.1 (2012), s. 388–394. ISSN: 0360–5442. DOI: 10.1016/j.energy.2011.12.049.

[26] Dupal, J. *Výpočtové metody mechaniky.* Západočeská univerzita v Plzni, 2006.

[27] Fox, R. L. *A practical guide to in-place balancing.*

[28] Fryščok, T. "Rotor dynamics of modern turbochargers". In: VII.2 (2012), s. 40–50. URL: http://pernerscontacts.upce.cz/26_2012/Fryscok.pdf.

[29] Gasch, R. a Pfützner, H. *Dynamika rotorů.* SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1980.

[30] Genta, G. a Amati, N. "Hysteretic damping in rotordynamics: An equivalent formulation". In: *Journal of Sound and Vibration* 329.22 (2010), s. 4772–4784.

[31] Genta, G., Delprete, C. a Brusa, E. "Some Considerations on the Basic Assumptions in Rotordynamics". In: *Journal of Sound and Vibration* 227.3 (1999), s. 611–645. ISSN: 0022–460X. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2354.

[32] Gordon Kirk, R. a Alsaeed, A. "Induced Unbalance as a Method for Improving the Dynamic Stability of High-Speed Turbochargers". In: *International Journal of Rotating Machinery* 2011 (2011), s. 1–9. ISSN: 1023–621X. DOI: 10.1155/2011/952869.

[33] Hajžman, M. *Modelování, dynamická analýza a optimalizace rozsáhlých rotujících systémů.* Disertační práce. Západočeská univerzita v Plzni. 2006.

[34] Hajžman, M. a Polach, P. "Sensitivity analysis of gearbox torsional vibrations". In: *Engineering Mechanics* 19.2/3 (2012), s. 77–86.

[35] Harsha, S. P., Sandeep, K. a Prakash, R. "The effect of speed of balanced rotor on nonlinear vibrations associated with ball bearings". In: *International Journal of Mechanical Sciences* 45.4 (2003), s. 725–740.

[36] Hili, M. A. et al. "Hydrodynamic and elastohydrodynamic studies of a cylindrical journal bearing". In: *Journal of Hydrodynamics, Ser. B* 22.2 (2010), s. 155–163.

[37] Hlaváč, Z. *Dynamická syntéza a optimalizace*. Západočeská univerzita v Plzni, 2006.

[38] Jang, J. Y. a Khonsari, M. M. "Design of bearings on the basis of thermohydrodynamic analysis". In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 218.5 (2004), s. 355–363.

[39] Jiang, P. L. a YU, L. "Dynamics of a rotor-bearing system equipped with a hydrodynamic thrust bearing". In: *Journal of sound and vibration* 227.4 (1999), s. 833–872.

[40] Kakoty, S. K. a Majumdar, B. C. "Effect of fluid inertia on the dynamic coefficients and stability of journal bearings". In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 214.3 (2000), s. 229–240.

[41] Kappaganthu, K. a Nataraj, C. "Nonlinear modeling and analysis of a rolling element bearing with a clearance". In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16.10 (2011), s. 4134–4145.

[42] Khonsari, M. M. a Hua, D. Y. "Generalized non-Newtonian elastohydrodynamic lubrication". In: *Tribology international* 26.6 (1993), s. 405–411.

[43] Kořán, M. *CFD analýza turbodmychadla*. Diplomová práce. ČVUT Praha. 2013.

[44] Krämer, E. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Springer-Verlag., 1993. ISBN: 978–0–387–55725-0.

[45] Lahmar, M., Haddad, A. a Nicolas, D. "An optimised short bearing theory for nonlinear dynamic analysis of turbulent journal bearings". In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 19.1 (2000), s. 151–177.

[46] Li, C.-H., Rohde, S., M. "On The Steady State and Dynamic Performance Characteristics of Floating Ring Bearings". In: *Journal of Lubrication Technology* 103 (1981), s. 389–397.

[47] Li, C.-H. "Dynamics of rotor bearing systems supported by floating ring bearings". In: *Journal of Tribology* 104 (1982), s. 469–476. ISSN: 0022–2305. DOI: 10.1115/1.3253258.

[48] Lin, J.-R. "Linear stability analysis of rotor-bearing system: couple stress fluid model". In: *Computers & Structures* 79.8 (2001), s. 801–809.

[49] Lioulios, A. N. a Antoniadis, I. A. "Effect of rotational speed fluctuations on the dynamic behaviour of rolling element bearings with radial clearances". In: *International journal of mechanical sciences* 48.8 (2006), s. 809–829.

[50] M., Fusek a R., Halama. *MKP a MHP*. 2011.

[51] Nayfeh, A. H. a Nayfeh, S. A. "On nonlinear modes of continuous systems". In: *Journal of Vibration and Acoustics* 116.1 (1994), s. 129–136.

[52] Nguyen-Schafer, H. *Rotordynamics of Automotive Turbochargers: Linear and Nonlinear Rotordynamics – Bearing Design – Rotor Balancing*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[53] Nguyen-Schafer, H. *Aero and vibroacoustics of automotive turbochargers*. Springer Science & Business Media, 2013.

[54] Rho, B.-H. a Kim, K.-W. "Acoustical properties of hydrodynamic journal bearings". In: *Tribology international* 36.1 (2003), s. 61–66.

[55] Rieger, N. F. *Balancing of rigid and flexible rotors*. Technická zpráva. DTIC Document, 1986.

[56] Robin, X. a Driot, N. *Investigation of turbocharger structure borne noise using multi-disciplinary strategy Turbocharger Rotor Dynamics Computation*. Studijní text.

[57] Rohde, S. M. a Ezzat, H. A. "Analysis of dynamically loaded floating-ring bearings for automotive applications". In: *Journal of Lubrication Technology* 102 (1980), s. 271–276.

[58] Schilder, F. et al. "Efficient computation of quasiperiodic oscillations in nonlinear systems with fast rotating parts". In: *Nonlinear Dynamics* 51.4 (2007), s. 529–539. ISSN: 0924–090X. DOI: 10.1007/s11071-007-9242-1.

[59] Schweizer, B. "Dynamics and stability of turbocharger rotors". In: *Archive of Applied Mechanics* 80.9 (2009), s. 1017–1043. ISSN: 0939–1533. DOI: 10.1007/s00419-009-0331-0.

[60] Schweizer, B. "Oil whirl, oil whip and whirl/whip synchronization occurring in rotor systems with full-floating ring bearings". In: *Nonlinear Dynamics* 57.4 (2009), s. 509–532. ISSN: 0924–090X. DOI: 10.1007/s11071-009-9466-3.

[61] Schweizer, B. "Total instability of turbocharger rotors—Physical explanation of the dynamic failure of rotors with full-floating ring bearings". In: *Journal of Sound and Vibration* 328.1-2 (2009), s. 156–190. ISSN: 0022–460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.03.028.

[62] San Andrés, L. et al. "Nonlinear rotordynamics of automotive turbochargers: predictions and comparisons to test data". In: *Journal of engineering for gas turbines and power* 129.2 (2007), s. 488–493.

[63] Shaw, A. L. *Balancing of rotors*. US Patent App. 13/751,810. 2013.

[64] Sheau-Ming, J., Cheng, W. et al. "Thermohydrodynamic analysis of finite-width journal bearings with non-Newtonian lubricants". In: *Wear* 171.1 (1994), s. 41–49.

[65] Sieber, J., Wagg, D. J. a Adhikari, S. "On the interaction of exponential non-viscous damping with symmetric nonlinearities". In: *Journal of Sound and Vibration* 314.1 (2008), s. 1–11.

[66] Slavík, J., Stejskal, V. a Zeman, V. *Základy dynamiky strojů*. ČVUT, 1997.

[67] Ståhl, J. a Jacobson, B. O. "Design functions for hydrodynamic bearings". In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 215.5 (2001), s. 405–416.

[68] Szeri, A. *Fluid film lubrication*. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 978–0–521–89823–2.

[69] Tian, L., Wang, W. J. a Peng, Z. J. "Dynamic behaviours of a full floating ring bearing supported turbocharger rotor with engine excitation". In: *Journal of Sound and Vibration* 330.20 (2011), s. 4851–4874. ISSN: 0022–460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.04.031.

[70] Tian, L., Wang, W. J. a Peng, Z. J. "Effects of bearing outer clearance on the dynamic behaviours of the full floating ring bearing supported turbocharger rotor". In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 31 (2012), s. 155–175. ISSN: 0888–3270. DOI: 10.1016/j.ymssp.2012.03.017.

[71] Tian, L., Wang, W. J. a Peng, Z. J. "Nonlinear effects of unbalance in the rotor-floating ring bearing system of turbochargers". In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 34.1-2 (2013), s. 298–320. ISSN: 0888–3270. DOI: 10.1016/j.ymssp.2012.07.017.

[72] Tiwari, R. a Chakravarthy, V. "Simultaneous identification of residual unbalances and bearing dynamic parameters from impulse responses of rotor–bearing systems". In: *Mechanical systems and signal processing* 20.7 (2006), s. 1590–1614.

[73] Tůma, J. a - Technická univerzita Ostrava. Strojní fakulta, Vysoká škola báňská. *Diagnostika strojů*. VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009. ISBN: 978-8–024–82116–0.

[74] Tůma, J. et al. "Active Vibration Control of Hydrodynamic Journal Bearings". In: *Vibration Problems ICOVP 2011*. Sv. 1. 2011, s. 425.

[75] Vinš, J. *Kluzná ložiska. 2. vyd.* Praha: Nakladatelství technické literatury SNTL, 1971.

[76] Wang, L. et al. "Effects of floating ring bearing manufacturing tolerance clearances on the dynamic characteristics for turbocharger". In: *Chinese Journal of Mechanical Engineering* 28.3 (2015), s. 530–540. ISSN: 1000–9345. DOI: 10.3901/CJME.2015.0319.034.

[77] Ying, G., Meng, G. a Jing, J. "Turbocharger rotor dynamics with foundation excitation". In: *Archive of Applied Mechanics* 79.4 (2008), s. 287–299. ISSN: 0939–1533. DOI: 10.1007/s00419-008-0228-3.

[78] Zapoměl, J. *Počítačové modelování příčného kmitání rotorů uložených v hydrodynamických ložisky'ach a sqeeze filmových tlumičích*. Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava, 2007.

[79] Zeman, V. *Kmitání mechanických soustav*. Západočeská univerzita v Plzni, 2006.

[80] Zhao, X., He, H. a Xu, S. "Influence of the floating-ring bearing parameters on stability of turbocharge rotor-bearing system". In: *Fluid Machinery and Fluid Mechanics* 4 (2009), s. 421–425.

# Publikace autora spojené s tématem práce


[A1] Byrtus, M., Smolík, L. a Rendlová, Z. *Měření vibro-akustické odezvy turbodmychadla vybuzené definovanou nevývahou rotoru turbodmychadla.* Technická zpráva. Západočeská univerzita v Plzni, 2015.

[A2] Byrtus, M. et al. *Návrh metodiky zjišťování vlivu nevyváženosti na akustické vlastnosti turbodmychadla.* Technická zpráva. Západočeská univerzita v Plzni, 2015.

[A3] Byrtus, M. et al. *Plán měření akustických a vibračních veličin turbodmychadla.* Technická zpráva. Západočeská univerzita v Plzni, 2015.

[A4] Hajžman, M. et al. *Analýza dynamického chování rotoru turbodmychadel s ohledem na uložení.* Technická zpráva. Západočeská univerzita v Plzni, 2013.

[A5] Rendlová, Z. *Vliv tlumicích účinků na dynamické chování rotujících systémů.* Teze disertační práce. Západočeská univerzita v Plzni. 2014.

[A6] Smolík, L., Rendlová, Z. a Byrtus, M. "An analysis of the influence of the titanium compressor wheel on dynamical properties of the particular turbocharger rotor". In: *Manufacturing Technology* 15.1 (2015), s. 93–99.

[A7] Zeman, V., Hlaváč, Z. a Z., Rendlová. *Modelování kmitání turbodmychadel.* Technická zpráva. Západočeská univerzita v Plzni, 2013.

[A8] Zeman, V. a Rendlová, Z. "Stability analysis of the rotor vibration with external and internal damping". In: *Modelling and Optimization of Physical Systems* 6.4 (2011), s. 393–423.

# Seznam obrázků


1.1 Geometrie hřídelového prvku v pevném systému souřadnic. . . . . 14
1.2 Schéma konečného prvku $e$ popsaného v rotujícím systému souřadnic. 18
1.3 Pevně nasazený kotouč. . . . . 21
1.4 Schéma hydrodynamického ložiska kruhového průřezu s čepem v centrální poloze. . . . . 24
1.5 Rozvinutý olejový film. . . . . 24
1.6 Schéma ložiska s čepem v excentrické poloze. . . . . 25
1.7 Čep ložiska ve statické rovnovážné poloze. . . . . 29
1.8 Čep ložiska v obecné poloze. . . . . 30
1.9 Schéma ložiska s plovoucím pouzdrem a čepem v excentrické poloze. . 32
1.10 Schéma ložiska s plovoucím pouzdrem a čepem v excentrické poloze. . 34

4.1 Schéma experimentálního rotoru turbodmychadla s axiálními závity a s vyznačenou polohou snímačů. . . . . 54
4.2 Upravená skříň turbodmychadla osazená měřící technikou. . . . . 54
4.3 Pohled na turbodmychadlo v ložiskové skříni- ze strany kompresorového kola. . . . . 55

5.1 Závislost dynamické viskozity maziva na teplotě. . . . . 57
5.2 Závislosti násobků rychlosti rotace plovoucích pouzder RSR pro ložisko $B_T$ na turbinové straně (modře) a pro ložisko $B_C$ na kompresorové straně (černě) na provozních otáčkách rotoru. . . . . 59
5.3 Campbellův diagram odpovídající nominálnímu stavu. . . . . 60
5.4 Závislost faktorů nestability na provozních otáčkách pro netlumený systém, systém s vnějším tlumením, systém s vnitřním tlumením a s kombinací vnějšího a vnitřního tlumení. . . . . 61
5.5 Ustálená odezva na buzení nevyvážeností vnesenou na stranu turbinového kola ($\Delta u_T = 0,2\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}$). . . . . 62
5.6 Ustálená odezva na buzení nevyvážeností vnesenou na stranu kompresorového kola ($\Delta u_C = 0,21\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}$). . . . . 62

5.7 Ustálená odezva na buzení nevyvážeností vnesenou na stranu turbinového i kompresorového kola ($\Delta u_T = 0,2\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}$, $\Delta u_C = 0,21\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}$, $\alpha = 135^{\mathrm{o}}$). . . . . 63
5.8 Citlivost ustálené odezvy na změnu vnitřní ložiskové vůle ložiska na straně turbiny ($\mathrm{B_T}$) při buzení nevyvážeností $\Delta u_T$, $\Delta u_C$ - bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení. . . . . 64
5.9 Citlivost ustálené odezvy na změnu vnitřní ložiskové vůle ložiska na straně kompresoru ($\mathrm{B_C}$) $\Delta u_T$, $\Delta u_C$ - bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení. . . . . 64
5.10 Citlivost ustálené odezvy na změnu vnější ložiskové vůle ložiska na straně turbiny ($\mathrm{B_T}$) při buzení nevyvážeností $\Delta u_T$, $\Delta u_C$ - bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení. . . . . 65
5.11 Citlivost ustálené odezvy na změnu vnější ložiskové vůle ložiska na straně kompresoru ($\mathrm{B_C}$) při buzení nevyvážeností $\Delta u_T$, $\Delta u_C$ - bez vlivu vnějšího a vnitřního tlumení. . . . . 65
5.12 Trajektorie středů čepu ložisek v prostoru vymezeném vůlemi pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$. . . . . 68
5.13 Trajektorie středů čepu ložisek v prostoru vymezeném vůlemi pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$. . . . . 68
5.14 Trajektorie středů čepu ložisek v prostoru vymezeném vůlemi pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$. . . . . 69
5.15 Trajektorie středů čepu ložisek v prostoru vymezeném vůlemi pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$. . . . . 69
5.16 Trajektorie středů plovoucích pouzder v prostoru vymezeném vůlemi pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$. . . . . 70
5.17 Trajektorie středů plovoucích pouzder v prostoru vymezeném vůlemi pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$. . . . . 70
5.18 Trajektorie středů plovoucích pouzder v prostoru vymezeném vůlemi pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$. . . . . 71
5.19 Trajektorie středů plovoucích pouzder v prostoru vymezeném vůlemi pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$. . . . . 71
5.20 Trajektorie uzlů odpovídajících svou polohou měřícím bodům pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$. . . . . 72
5.21 Trajektorie uzlů odpovídajících svou polohou měřícím bodům pro 120000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$. . . . . 72
5.22 Trajektorie uzlů odpovídajících svou polohou měřícím bodům pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_1 = 30$. . . . . 73

5.23 Trajektorie uzlů odpovídajících svou polohou měřícím bodům pro 140000 ot/min a úroveň kondenzace $m_2 = 8$. . . . . 73

C.1 Schéma zatížení ložiska. . . . . C-2

D.1 Diskretizace rotoru turbodmychadla. . . . . D-1

# Seznam tabulek


4.1 Kombinace uměle vnesených nevývah. . . . . 55

5.1 Charakter vypočítaných vlastních čísel z hlediska stability. . . . . 61
5.2 Zprůměrované parametry RSR ložisek pro 120000 ot/min získané experimentálně a výpočtově pro úroveň kondenzace $m_1 = 30$ a $m_2 = 8$. . 74
5.3 Zprůměrované parametry RSR ložisek pro 140000 ot/min získané experimentálně a výpočtově pro úroveň kondenzace $m_1 = 30$ a $m_2 = 8$. . 74

D.1 Parametry hřídelových prvků po diskretizaci rotoru turbodmychadla (D- vnější průměr, d- vnitřní průměr, l - délka prvku). . . . . D-1
D.2 Geometrické parametry ložisek získané mikrometráží. . . . . D-2
D.3 Parametry plovoucích pouzder. . . . . D-2

# Dodatek A

# Pomocné matice pro modelování hřídelových prvků

$$\mathbf{I}_{\Phi} = \int_0^l \mathbf{\Phi}^T(x)\,\mathbf{\Phi}(x)\,dx = l\begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} \\ & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} \\ & & \frac{l^4}{5} & \frac{l^5}{6} \\ \text{sym.} & & & \frac{l^6}{7} \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

$$\mathbf{I}_{\Phi'} = \int_0^l \mathbf{\Phi}'^T(x)\,\mathbf{\Phi}'(x)\,dx = l\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & l & l^2 \\ & & \frac{4}{3}l^2 & \frac{3}{2}l^3 \\ \text{sym.} & & & \frac{9}{5}l^4 \end{bmatrix}, \tag{A.2}$$

$$\mathbf{I}_{\Phi''} = \int_0^l \mathbf{\Phi}''^T(x)\,\mathbf{\Phi}''(x)\,dx = l\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 12l^2 \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

$$\mathbf{I}_{\Theta} = \int_0^l \mathbf{\Theta}^T(x)\,\mathbf{\Theta}(x)\,dx = l\begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \\ & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} \\ \text{sym.} & & \frac{l^4}{5} \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

$$\mathbf{I}_{\Theta'} = \int_0^l \mathbf{\Theta}'^T(x)\,\mathbf{\Theta}(x)\,dx = l\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & l & \frac{4}{3}l^2 \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

$$\mathbf{I}_{\Psi} = \int_0^l \mathbf{\Psi}^T(x)\,\mathbf{\Psi}(x)\,dx = l\begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix}, \tag{A.6}$$

$$\mathbf{I}_{\Psi'} = \int_0^l \mathbf{\Psi}'^T(x)\,\mathbf{\Psi}'(x)\,dx = l\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}, \tag{A.7}$$

# Dodatek B

# Matice vnitřního tlumení v pevném systému souřadnic

Uvažujme, že vektor sil generovaných vnitřním tlumením (1.22) transformujeme do pevného systému souřadnic $XYZ$ podle (1.23)

$$\mathbf{f}_{I,XYZ}^{(e)} = \mathbf{T}\left(t\right)\mathbf{f}_{I,xyz}^{(e)} = -\underbrace{\mathbf{T}\left(t\right)\mathbf{B}_{I}^{(e)}\mathbf{T}^{T}\left(t\right)}_{\tilde{\mathbf{B}}_{I}^{(e)}(t)}\dot{\mathbf{q}}_{XYZ}^{(e)} - \underbrace{\mathbf{T}\left(t\right)\mathbf{B}_{I}^{(e)}\dot{\mathbf{T}}^{T}\left(t\right)}_{\tilde{\mathbf{K}}_{I}^{(e)}(t)}\mathbf{q}_{XYZ}^{(e)}\,, \tag{B.1}$$

kde vystupuje časová derivace transformační matice (1.21) ve tvaru

$$\dot{\mathbf{T}}\left(t\right) = \omega_0 \begin{bmatrix} -S\mathbf{E}_4 & -C\mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C\mathbf{D} & -S\mathbf{E}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix}. \tag{B.2}$$

Po provedení maticového roznásobení lze získat matice $\tilde{\mathbf{B}}_{I}^{(e)}\left(t\right)$, $\tilde{\mathbf{K}}_{I}^{(e)}\left(t\right)$ blokového charakteru

$$\tilde{\mathbf{B}}_{I}^{(e)}\left(t\right) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{I,1,1}^{(e)} & \tilde{\mathbf{B}}_{I,1,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{I,2,1}^{(e)} & \tilde{\mathbf{B}}_{I,2,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{I,3,3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{I,4,4} \end{bmatrix}, \tag{B.3}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_I^{(e)}(t) = \omega_0 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{I,1,1}^{(e)} & \tilde{\mathbf{K}}_{I,1,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{I,2,1}^{(e)} & \tilde{\mathbf{K}}_{I,2,2}^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{B.4}$$

s bloky ve tvaru

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}}_{I,1,1}^{(e)} &= C^2\mathbf{E}_4\mathbf{B}_{I,1,1}\mathbf{E}_4 + S^2\mathbf{D}\mathbf{B}_{I,2,2}\mathbf{D}\,, && \text{(B.5)}\\
\tilde{\mathbf{B}}_{I,1,2}^{(e)} &= CS\mathbf{E}_4\mathbf{B}_{I,1,1}\mathbf{D} - CS\mathbf{D}\mathbf{B}_{I,2,2}\mathbf{E}_4\,, && \text{(B.6)}\\
\tilde{\mathbf{B}}_{I,2,1}^{(e)} &= CS\mathbf{D}\mathbf{B}_{I,1,1}\mathbf{E}_4 - CS\mathbf{E}_4\mathbf{B}_{I,2,2}\mathbf{D}\,, && \text{(B.7)}\\
\tilde{\mathbf{B}}_{I,2,2}^{(e)} &= S^2\mathbf{D}\mathbf{B}_{I,1,1}\mathbf{D} + C^2\mathbf{E}_4\mathbf{B}_{I,2,2}\mathbf{E}_4\,, && \text{(B.8)}\\
\tilde{\mathbf{K}}_{I,1,1}^{(e)} &= -CS\mathbf{E}_4\mathbf{B}_{I,1,1}\mathbf{E}_4 + CS\mathbf{D}\mathbf{B}_{I,2,2}\mathbf{D}\,, && \text{(B.9)}\\
\tilde{\mathbf{K}}_{I,1,2}^{(e)} &= C^2\mathbf{E}_4\mathbf{B}_{I,1,1}\mathbf{D} + S^2\mathbf{D}\mathbf{B}_{I,2,2}\mathbf{E}_4\,, && \text{(B.10)}\\
\tilde{\mathbf{K}}_{I,2,1}^{(e)} &= -S^2\mathbf{D}\mathbf{B}_{I,1,1}\mathbf{E}_4 - C^2\mathbf{E}_4\mathbf{B}_{I,2,2}\mathbf{D}\,, && \text{(B.11)}\\
\tilde{\mathbf{K}}_{I,2,2}^{(e)} &= CS\mathbf{D}\mathbf{B}_{I,1,1}\mathbf{D} - CS\mathbf{E}_4\mathbf{B}_{I,2,2}\mathbf{E}_4\,. && \text{(B.12)}
\end{aligned}$$

Po dosazení submatic $\mathbf{B}_{I,i,j}$ ve tvaru (1.19) lze jednotlivé bloky (B.5)- (B.12) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}}_{I,1,1}^{(e)}(t) &= C^2\mathbf{E}_4\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\right)\mathbf{E}_4 + S^2\mathbf{D}\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{D}\,, && \text{(B.13)}\\
\tilde{\mathbf{B}}_{I,1,2}^{(e)}(t) &= CS\mathbf{E}_4\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\right)\mathbf{D} - CS\mathbf{D}\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{E}_4\,, && \text{(B.14)}\\
\tilde{\mathbf{B}}_{I,2,1}^{(e)}(t) &= CS\mathbf{D}\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\right)\mathbf{E}_4 - CS\mathbf{E}_4\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{D}\,, && \text{(B.15)}\\
\tilde{\mathbf{B}}_{I,2,2}^{(e)}(t) &= S^2\mathbf{D}\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\right)\mathbf{D} + C^2\mathbf{E}_4\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{E}_4\,, && \text{(B.16)}\\
\tilde{\mathbf{K}}_{I,1,1}^{(e)}(t) &= -CS\mathbf{E}_4\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\right)\mathbf{E}_4 + CS\mathbf{D}\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{D}\,, && \text{(B.17)}\\
\tilde{\mathbf{K}}_{I,1,2}^{(e)}(t) &= C^2\mathbf{E}_4\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\right)\mathbf{D} + S^2\mathbf{D}\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{E}_4\,, && \text{(B.18)}\\
\tilde{\mathbf{K}}_{I,2,1}^{(e)}(t) &= -S^2\mathbf{D}\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\right)\mathbf{E}_4 - C^2\mathbf{E}_4\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{D}\,, && \text{(B.19)}\\
\tilde{\mathbf{K}}_{I,2,2}^{(e)}(t) &= CS\mathbf{D}\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\right)\mathbf{D} - CS\mathbf{E}_4\left(b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{E}_4\,. && \text{(B.20)}
\end{aligned}$$

Protože matice $\mathbf{D}$ je ortogonální matice, platí pro ni $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T$. Pomocí této matice lze vyjádřit i matici $\mathbf{S}_1 = \mathbf{D}\mathbf{S}_2$. Jednotlivé nenulové bloky (B.13)-(B.20) odvozených matic lze pak upravit do tvaru

$$\tilde{\mathbf{B}}_{I,1,1} = b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\,, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{I,2,2} = b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1}\,, \tag{B.21}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{I,1,2} = b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{D}\,, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{I,2,1} = -b_\sigma EJ\mathbf{D}\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\,, \tag{B.22}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{I,1,2} = \tilde{\mathbf{B}}_{I,2,1} = \mathbf{0}\,, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{I,1,1} = \tilde{\mathbf{K}}_{I,2,2} = \mathbf{0}\,. \tag{B.23}$$

Matice vyjadřující vliv vnitřního tlumení v pevném systému souřadnic $XYZ$ (B.3), (B.4) lze po provedených úpravách zapsat v konkrétním tvaru

$$\tilde{\mathbf{B}}_I^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b_\sigma EJ\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & b_\sigma EA\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{\Psi'}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b_\tau 2GJ\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{\Psi'}\mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \tag{B.24}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_I^{(e)}(t) = \omega_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & b_\sigma EJ\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -b_\sigma EJ\mathbf{D}\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{\Phi''}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{B.25}$$

Bloky matice (B.24) jsou výsledkem násobení konstant a symetrických matic, které nejsou závislé na čase. Lze tedy říci, že se jedná o symetrickou v čase konstantní matici. Naproti tomu matice (B.25) je zjevně antisymetrická matice, protože $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$. Prvky této matice jsou rovněž funkcí pouze geometrických parametrů.

# Dodatek C

# Odvození koeficientů tuhosti a tlumení olejového filmu pro linearizovaný model uložení

Označme sílu generovanou ve vrstvě maziva $\vec{F}$. Při uvažování malých výchylek ze statické rovnovážné polohy lze tuto sílu, které je vystaven čep ložiska, rozložit do směrů os pevného systému souřadnic $XYZ$

$$F_Y = F_{0Y} + \frac{\partial F_Y}{\partial Z}Z + \frac{\partial F_Y}{\partial Y}Y + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Z}}\dot{Z} + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}}\dot{Y} \doteq F_{0Y} + \Delta F_Y \,, \tag{C.1}$$

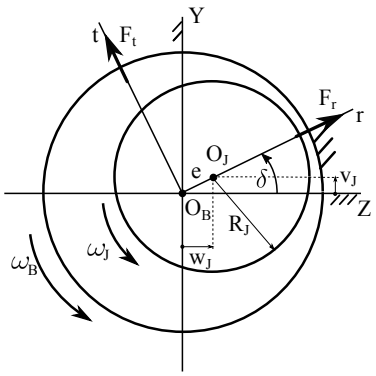
$$F_Z = F_{0Z} + \frac{\partial F_Z}{\partial Z}Z + \frac{\partial F_Z}{\partial Y}Y + \frac{\partial F_Z}{\partial \dot{Z}}\dot{Z} + \frac{\partial F_Z}{\partial \dot{Y}}\dot{Y} \doteq F_{0Z} + \Delta F_Z \,, \tag{C.2}$$

kde $\vec{F_0} = [F_{0Y}\,,\, F_{0Z}]^T$ je vektor statického zatížení a $\Delta\vec{F} = [\Delta F_Y\,,\, \Delta F_Z]^T$ je vektor změny složek vektoru síly v důsledku malé výchylky ze statické rovnovážné polohy. Stejně tak lze tuto sílu rozložit do radiálního a tečného směru. Složky síly lze vyjádřit ve tvaru korespondujícím s (1.65), (1.66), konkrétně

$$F_r = F_R\left(-\left(\frac{2\dot{\delta}}{\omega} - 1\right)\frac{2\varepsilon^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} + \pi\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\frac{1+2\varepsilon^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{5/2}}\right)\,, \tag{C.3}$$

$$F_t = F_R\left(\left(\frac{2\dot{\delta}}{\omega} - 1\right)\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\frac{4\varepsilon}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}\right)\,. \tag{C.4}$$

Respektujeme-li geometrii radiálního ložiska znázorněnou na obrázku C.1, lze stanovit vztah mezi složkami síly $\vec{F}$ v zakreslených systémech souřadnic jako




Obrázek C.1: Schéma zatížení ložiska.

$$F_Y = F_r \sin\delta + F_t \cos\delta\,, \quad F_Z = F_r \cos\delta - F_t \sin\delta\,, \tag{C.5}$$

přičemž úhel natočení $\delta$ vyjadřující vzájemnou polohu pevného systému souřadnic $XY$ a rotujícího systému souřadnic $r,t$.

Pro případ horizontálně podepřeného rotoru vystaveného pouze působení statického zatížení lze zanedbat složky sil (C.3), (C.4) úměrné složkám vektoru rychlosti, tj. $\dot{Y} = \dot{Z} = 0$ resp. $\dot{\varepsilon} = \dot{\delta} = 0$. Proto

$$F_r^s = F_R \cdot \frac{2\varepsilon^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}\,, \quad F_t^s = F_R \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}}\right)\,. \tag{C.6}$$

Tyto složky lze pomocí vztahů (C.5) promítnout do pevného systému souřadnic $XYZ$ a získat tak vztah pro určení úhlu natočení $\delta$

$$\tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{F_r}{F_t} = -\frac{4}{\pi}\frac{\varepsilon}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}}\,. \tag{C.7}$$

Na základě platných goniometrických vztahů lze vyjádřit i

$$\sin\delta = \frac{\tan\delta}{\sqrt{1+\tan^2\delta}} = \frac{-4\varepsilon}{\sqrt{\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2}}\,, \tag{C.8}$$

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta}} = \frac{\pi\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}}{\sqrt{\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2}}\,, \tag{C.9}$$

a následně i vztah mezi amplitudou statické zatěžující síly $F_O$ a amplitudou ložiskové síly $F_R$ ze vztahu (C.5)

$$F_R = \frac{2\left(1-\varepsilon^2\right)^2}{\varepsilon\sqrt{\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2}} F_O \,. \tag{C.10}$$

Dojde-li k malému vychýlení středu čepu $O_J$ ze statické rovnovážné polohy o vzdálenost $\Delta$, lze tento elementární pohyb rozložit na dílčí pohyby ve směru os systému souřadnic, které označíme $dY$, $dZ$. Tento pohyb lze rozložit i v rotujícím systému souřadnic jako

$$de = dZ\cos\delta + dY\sin\delta\,, \quad ed\delta = -dZ\sin\delta + dY\cos\delta\,. \tag{C.11}$$

Na základě tohoto rozkladu pohybu lze vyjádřit rovněž změny poměrné excentricity $\varepsilon$ v důsledku elementárních posuvů ve směru os systému souřadnic jako

$$d\varepsilon = \frac{1}{c}\cos\delta dZ\,, \quad d\varepsilon = \frac{1}{c}\sin\delta dY \tag{C.12}$$

a úhlu natočení $\delta$ jako

$$d\delta = -\frac{1}{e\varepsilon}\sin\delta dZ\,, \quad d\varepsilon = \frac{1}{e\varepsilon}\cos\delta dY\,. \tag{C.13}$$

Analogicky lze provázat i složky rychlosti a vyjádřit jejich změny v obou systémech souřadnic, tedy

$$d\dot{e} = d\dot{Z}\cos\delta + d\dot{Y}\sin\delta\,, \quad ed\dot{\delta} = -d\dot{Z}\sin\delta + d\dot{Y}\cos\delta\,. \tag{C.14}$$

V důsledku definovaného elementárního posuvu dochází ke změně složek ložiskové síly v souladu s (C.1) a (C.2). Odpovídající parciální derivace lze zapsat jako

$$\frac{\partial F_i}{\partial k} = \frac{\partial F_i}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k} + \frac{\partial F_i}{\partial\delta}\frac{\partial\delta}{\partial k}\,, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial F_i}{\partial\dot{k}} = \frac{\partial F_i}{\partial\dot{\varepsilon}}\frac{\partial\dot{\varepsilon}}{\partial\dot{k}} + \frac{\partial F_i}{\partial\dot{\delta}}\frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{k}}\,, \quad i = Y,Z,\; k = Y,Z\,. \tag{C.15}$$

Dosazením transformačních vztahů (C.5) za složky sil vystupující v parciálních derivacích $\frac{\partial F_i}{\partial\varepsilon}$, $\frac{\partial F_i}{\partial\dot{\varepsilon}}$, resp. $\frac{\partial F_i}{\partial\delta}$, $\frac{\partial F_i}{\partial\dot{\delta}}$ lze výrazy (C.15) zapsat pomocí radiální a tečné složky ložiskové síly. Změny poměrné excentricity $\varepsilon$, $\delta$ lze následně vyjádřit záměnou diferenciálů za parciální derivace ve výrazech (C.12), (C.13). Časové změny lze získat jejich zderivováním.

Po zjednodušení získaných vztahů lze vyjádřit parciální derivace odpovídající koeficientům tuhosti $k_{ik}$ ve tvaru

$$\frac{\partial F_Z}{\partial Z} = \frac{F_R}{c} \cdot \frac{\varepsilon \left[4\pi^2 + (32 - 2\pi^2)\,\varepsilon^2\right]}{(1-\varepsilon^2)^2 \left[\pi^2 (1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\right]}, \tag{C.16}$$

$$\frac{\partial F_Z}{\partial Y} = \frac{F_R}{c} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\pi^2 (1-2\varepsilon^2) + (\pi^2 - 16)\,\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^{5/2} \left[\pi^2 (1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\right]}, \tag{C.17}$$

$$\frac{\partial F_Y}{\partial Z} = \frac{F_R}{c} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{-\pi^2 + (-32 - pi^2)\,\varepsilon^2 + 2\,(\pi^2 - 16)\,\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^{5/2} \left[\pi^2 (1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\right]}, \tag{C.18}$$

$$\frac{\partial F_Y}{\partial Y} = \frac{F_R}{c} \cdot \frac{2\varepsilon \left[\pi^2 + (32 + \pi^2)\,\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\,2\varepsilon^4\right]}{(1-\varepsilon^2)^3 \left[\pi^2 (1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\right]}. \tag{C.19}$$

a koeficienty tlumení $b_{ik}$ ve tvaru

$$\frac{\partial F_Z}{\partial \dot{Z}} = \frac{F_R}{\omega c} \cdot \frac{\pi^3 (1+2\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2 \pi}{(1-2\varepsilon^2)^{3/2} \left[\pi^2 (1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\right]}, \tag{C.20}$$

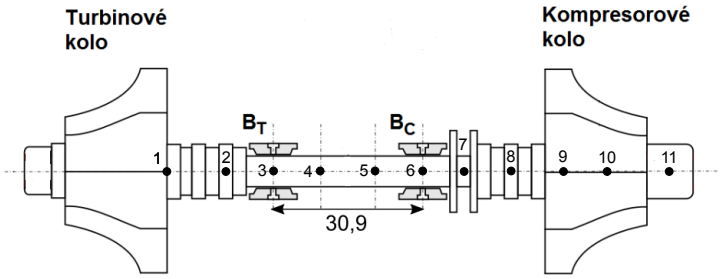
$$\frac{\partial F_Z}{\partial \dot{Y}} = \frac{F_R}{\omega c} \cdot \frac{4\varepsilon \left[16\varepsilon^2 - \pi^2 (1+2\varepsilon^2)\right]}{(1-\varepsilon^2)^2 \left[\pi^2 (1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\right]}, \tag{C.21}$$

$$\frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Z}} = \frac{F_R}{\omega c} \cdot \frac{4\varepsilon \left[16\varepsilon^2 - \pi^2 (1+2\varepsilon^2)\right]}{(1-\varepsilon^2)^2 \left[\pi^2 (1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\right]}, \tag{C.22}$$

$$\frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}} = \frac{F_R}{\omega c} \cdot \pi \frac{\pi^2 (1+\varepsilon^4) + 2\varepsilon^2 (24 - \pi^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2} \left[\pi^2 (1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\right]}. \tag{C.23}$$

# Dodatek D

# Parametry subsystému rotor-ložiska




Obrázek D.1: Diskretizace rotoru turbodmychadla.

| e | ⊘ D $[mm]$ | ⊘ d $[mm]$ | l $[mm]$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 12,701 | 0 | 10,365 |
| 2 | 8,723 | 0 | 8,035 |
| 3 | 8,723 | 0 | 9,95 |
| 4 | 8,723 | 0 | 11 |
| 5 | 8,16 | 0 | 9,95 |
| 6 | 8,16 | 0 | 6,773 |
| 7 | 5,7 | 0 | 5,655 |
| 8 | 5,7 | 0 | 13,5 |
| 9 | 5,7 | 0 | 13,5 |
| 10 | 7,314 | 0 | 13,941 |

| i | m $[g]$ | a $[mm]$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 144,26 | 12,393 | |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 12,17 | 3,488 | 0 |
| 9 | 36,76 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 2,8 | 0 | 0 |

Tabulka D.1: Parametry hřídelových prvků po diskretizaci rotoru turbodmychadla (D- vnější průměr, d- vnitřní průměr, l - délka prvku).

| parametr | značka | jednotky | strana T | strana C |
|---|---|---|---|---|
| průměr čepu | $D_J$ | $[mm]$ | 8,723 | 8,716 |
| vnitřní průměr pouzdra | $D_I$ | $[mm]$ | 8,749 | 8,751 |
| vnější průměr pouzdra | $D_O$ | $[mm]$ | 13,431 | 13,396 |
| vnitřní radiální vůle | $c_I$ | $[mm]$ | 0,013 | 0,0175 |
| vnější radiální vůle | $c_O$ | $[mm]$ | 0,0405 | 0,052 |
| šířka vnitřní kluzné plochy | $L_I$ | $[mm]$ | 7,6 | 7,6 |
| šířka vnější kluzné plochy | $L_I$ | $[mm]$ | 8,6 | 8,6 |

Tabulka D.2: Geometrické parametry ložisek získané mikrometráží.

| parametr | značka | jednotky | strana T | strana C |
|---|---|---|---|---|
| hmotnost plovoucího pouzdra | $m_k$ | $[g]$ | 5,8 | 5,8 |
| moment setrvačnosti k ose rotace | $I_{0,k}$ | $[kg \cdot m^2]$ | $1{,}827 \cdot 10^{-7}$ | $1{,}827 \cdot 10^{-7}$ |
| moment setrvačnosti k příčným osám | $I_k$ | $[kg \cdot m^2]$ | $1{,}359 \cdot 10^{-7}$ | $1{,}359 \cdot 10^{-7}$ |

Tabulka D.3: Parametry plovoucích pouzder.