

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

POČÁTEČNÍ A OKRAJOVÉ ÚLOHY S HYSTEREZNÍ SMYČKOU

Vedoucí práce:
doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.

Autor:
Eva Brabcová

Plzeň 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne

.....

Eva Brabcová

Poděkování

Ráda bych upřímně poděkovala své vedoucí doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za návrh tématu práce, za rady a připomínky při jejím zpracování a předně za velice vstřícný přístup.

Abstrakt

Práce je zaměřena na počáteční a okrajové úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici s hysterezí a na studium vlastností jejich řešení. Nejprve je představen jev hystereze a několik matematických modelů systémů s hysterezí, poté zkoumáme vybrané počáteční a okrajové úlohy. V případě počátečních úloh se věnujeme především omezenosti řešení v závislosti na parametrech úlohy a u okrajových úloh množině hodnot parametrů, pro které mají úlohy netriviální řešení. Hlavní výsledky práce se týkají úloh se symetrickou a s nesymetrickou hysterezní smyčkou, u nichž zobecníme a rozšíříme teorii známou pro speciální případy. Součástí práce jsou rovněž numerické experimenty ze softwarů Matlab a Mathematica, které teoretickým výsledkům zcela odpovídají.

Klíčová slova: hystereze, počáteční úloha, okrajová úloha, omezené řešení, Fučíkovo spektrum, zobecněné spektrum

Abstract

This thesis is devoted to initial and boundary value problems for ordinary differential equation with hysteresis and to the study of properties of their solutions. First, hysteresis phenomenon and several mathematical models of systems with hysteresis are introduced, then chosen initial and boundary value problems are investigated. In the case of initial value problems the thesis primarily focuses on bounded solutions depending on problem parameters, and in the case of boundary value problems we focus on the set of the values of parameters for which the studied problems have nontrivial solutions. The main results concern the problems with symmetric and asymmetric hysteresis loop and they generalize and extend the theory known for special cases. The thesis also contains numerical experiments from software packages Matlab and Mathematica, which correspond to the theoretical results.

Keywords: hysteresis, initial value problem, boundary value problem, bounded solutions, Fučík spectrum, generalized spectrum

Předmluva

V tomto textu se věnujeme matematické teorii systémů s hysterezí, tj. oblasti nelineární analýzy. Zkoumáme počáteční a okrajové úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici obsahující hysterezní člen, skok s hysterezí. Text je rozdělen do tří celků.

Jelikož je teorie obyčejných diferenciálních rovnic úzce spjata s pojmem matematického modelování a hystereze se objevuje u mnoha reálných dějů, první část je zaměřena na systémy s hysterezí a jejich matematické modely. Tato kapitola je úvodem a zároveň motivací ke studiu úloh, jimž se věnujeme v kapitolách dalších.

Druhou kapitolou jsou počáteční úlohy s hysterezní smyčkou. Je vybrána výchozí počáteční úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s hysterezním členem na pravé straně, která modeluje systém se záporným tlumením. Přestože se jedná o úlohu zahrnující záporný tlumící koeficient, nalézáme mezní hodnoty parametrů úlohy, pro něž je její řešení omezené na intervalu $[0, +\infty)$. Teoretické výsledky rovněž doplňujeme o numerické experimenty.

Třetí kapitolu tvoří okrajové úlohy s hysterezní smyčkou. Stěžejní okrajová úloha obsahuje diferenciální rovnici druhého řádu s hysterezním členem charakterizujícím vratnou sílu systému. V této části se zajímáme zejména o spektrální vlastnosti úlohy. Určujeme množinu hodnot parametrů, pro niž má úloha netriviální řešení, a ukazujeme souvislost s tzv. Fučíkovým spektrem. Závěrem kapitoly je opět porovnání teoretických výsledků s numerickými experimenty.

Obsah

Předmluva	ix
1 Motivace	1
1.1 Systémy s hysterezí	1
1.2 Modely kyvadla	7
1.2.1 Nelineární diferenciální rovnice	7
1.2.2 Lineární diferenciální rovnice	10
1.2.3 Diferenciální rovnice se skokem	13
2 Počáteční úlohy s hysterezní smyčkou	17
2.1 Úloha se symetrickou hysterezní smyčkou	20
2.1.1 Numerické experimenty	32
2.2 Úloha s nesymetrickou hysterezní smyčkou	34
2.2.1 Numerické experimenty	38
3 Okrajové úlohy s hysterezní smyčkou	45
3.1 Lineární úloha	46
3.1.1 Bodové spektrum	47
3.2 Úloha s jednoduchým skokem	48
3.2.1 Fučíkovo spektrum	49
3.3 Úloha se skokem s hysterezí	53
3.3.1 Zobecněné spektrum	54
3.3.2 Úloha se symetrickou hysterezní smyčkou – případ 1	54
3.3.3 Úloha se symetrickou hysterezní smyčkou – případ 2	60
3.3.4 Úloha s nesymetrickou hysterezní smyčkou – případ 1	65
3.3.5 Numerické experimenty	80
Literatura	83
A Počáteční úlohy se skokem	85
B Spektra	97

Kapitola 1

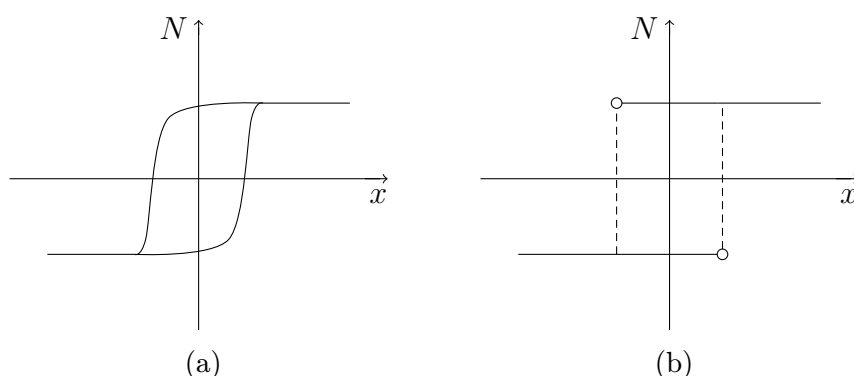
Motivace

V této kapitole uvedeme několik reálných systémů a jejich matematických modelů. Matematickým modelem rozumíme matematickou úlohu, v našem případě počáteční, příp. okrajovou, úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici, jejíž řešení popisuje chování daného systému. Nejprve se věnujeme obecně systémům (a modelům) s hysterezí a poté zejména modelům kyvadla spjatých s diferenciálními rovnicemi druhého řádu, z nichž vybrané (diferenciální rovnice se skokem) zkoumáme i v rámci dalších kapitol.

1.1 Systémy s hysterezí

Hystereze je jev, který se objevuje v mnoha systémech. Označuje takové chování systému, kdy výstupní veličina N nezávisí jen na vstupní veličině x , ale i na předchozím stavu systému, v důsledku čehož může pro tentýž vstup výstupní veličina nabývat dvou různých hodnot. Pokud ovšem pro vstup známe i předchozí stav systému, potom je výstupní hodnota dána jednoznačně.

Grafem závislosti $N(x)$ je *hysterezní smyčka* a její tvar může být různý (viz obr. 1.1a, 1.1b).



Obrázek 1.1: (a), (b) Možné tvary hysterezní smyčky.

V mechanice hysterezní smyčka ilustruje chování materiálů s pamětí při opakovaném namáhání (tlakem či tahem), pokud se jedná o elastické deformace materiálu (viz [1, s. 17]). Veličina N má v tomto případě význam mechanického napětí a veličina x poměrného délkového prodloužení. Při zatížení se materiál okamžitě deformuje, ale po odstranění zatížení se deformace vytrácí postupně až po určité době, tzn. se zpožděním (viz obr. 1.1a).

V elektromagnetismu představuje hysterezní smyčka závislost magnetické indukce N feromagnetického materiálu na intenzitě magnetického pole x při plynulé opakované změně intenzity magnetického pole od stavu kladného nasycení po stav opačně orientovaného nasycení (viz [2]). Pokud vložíme feromagnetický materiál (např. železo) do magnetického pole, dojde k jeho zmagnetování, které by vydrželo i po jeho vyjmutí z magnetického pole. Použije-li se magnetické pole opačného směru, při pozvolném snižování intenzity x proto nedochází ke snižování magnetické indukce N ve stejné míře a průběh není dán stejnou křivkou (viz obr. 1.1a), v systému se projevuje opět zpoždění. Hysterezní smyčka má pro každý materiál odlišný tvar. Čím větší je plocha uvnitř hysterezní smyčky, tím je materiál považován za magneticky tvrdší. Obsah této plochy je přímo úměrný tzv. hysterezním ztrátám, které jsou příčinou nežádoucího zahřívání feromagnetických látek při jejich střídavém magnetování (např. zahřívání ocelových jader transformátorů). Magneticky tvrdé materiály s téměř pravoúhlým průběhem hysterezní smyčky jsou ovšem vhodné k výrobě médií pro magnetický záznam dat, využívají se např. jako záznamové vrstvy pevných disků.

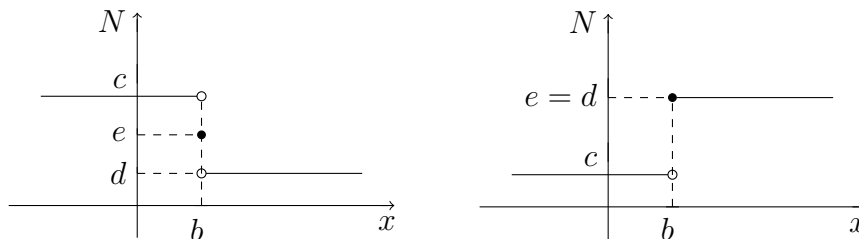
V ekonomických interpretacích hysterezní smyčky je N mírou nezaměstnanosti (příp. jinou veličinou charakterizující ekonomický systém) a x vládními zásahy (v podobě minimálních mezd, podpory v nezaměstnanosti, jednání s odbory apod.) ovlivňující daný ekonomický systém (viz [3] či [1, s. 667]). Negativní vládní zásah vede k růstu míry nezaměstnanosti. Odeznění důsledků způsobených zásahem nějakou dobu trvá, a proto použije-li vláda kladný zásah, v systému se opět projeví zpoždění a další průběh není dán stejnou křivkou (viz obr. 1.1a).

Vzhledem k různým tvarům hysterezní smyčky lze i odpovídající hysterezní člen v modelech systémů s hysterezí zavést odlišně (spojitý hysterezní člen viz [4], [5]). Jelikož se i v následujících kapitolách zaměříme na nespojitý po částech konstantní člen, skok s hysterezí (a s ním související jednoduchý skok), věnujeme nyní ještě pozornost významu hystereze v elektrotechnice a v kybernetice.

V elektrotechnice se hystereze využívá ve Schmittově klopném obvodu k úpravě tvaru impulzů (viz [6, s. 231]). Hystereze je zde žádoucím jevem, neboť zabraňuje vzniku příliš častých kmitů výstupního signálu. Hysterezní smyčka ilustruje závislost výstupního signálu N na vstupním signálu x , přičemž změna výstupního signálu probíhá skokově jako důsledek překlopení Schmittova klopného obvodu po dosažení spínací nebo rozepínací prahové hodnoty (viz obr. 1.1b).

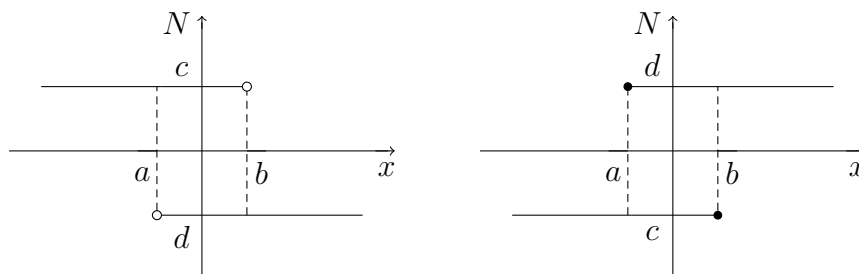
V kybernetice se hystereze objevuje u dvoustavových nespojitých regulátorů (viz [7, s. 158]). Hysterezní smyčka zobrazuje závislost stavu regulátoru N na vstupních hodnotách regulované veličiny x (viz obr. 1.1b) a hystereze zde zabraňuje příliš častému spínání regulátoru okolo ideální hodnoty veličiny x . Zavedeme pojem jednoduchý skok a skok s hysterezí a ukážeme vše na konkrétních úlohách.

Jednoduchý skok (viz obr. 1.2) je funkce $N = N(x)$ s definičním oborem $D_N = \mathbb{R}$, která je nespojitá v jediném bode $b \in D_N$, kde b je bod nespojitosti I. druhu. Oborem hodnot H_N je množina $\{c, d, e\}$, v níž $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}$ a $c \neq d$, a N nabývá na intervalu $(-\infty, b)$ hodnoty c , na intervalu $(b, +\infty)$ hodnoty d a v bodě b platí $N(b) = e$.



Obrázek 1.2: Názorná schémata jednoduchého skoku.

Skok s hysterezí (viz obr. 1.3) je mnohoznačné zobrazení množiny \mathbb{R} na množinu $\{c, d\} \subset \mathbb{R}$, v níž $c \neq d$. Dvě hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ určují šíři hysterezní smyčky – velikost hystereze. Hodnotám x , $x < a$ je jednoznačně přiřazen prvek c , hodnotám $x > b$ je jednoznačně přiřazen prvek d . Pro všechna $x \in (a, b)$ může N nabývat dvou hodnot, přiřazení hodnoty c nebo d závisí na předchozím stavu. Dokud platí $x < b$, přiřazujeme x hodnotu c , a naopak dokud platí $x > a$, přiřazujeme x hodnotu d . Pro $x = a$ může být N dáno jednoznačně jako $N(a) = c$ nebo dvojnásobně se závislostí na předchozím stavu. Stejně tak pro $x = b$ může být jednoznačně $N(b) = d$ nebo $N(b)$ dvojnásobně a závislé na předchozím stavu.



Obrázek 1.3: Názorná schémata skoku s hysterezí.

Věnujme se počátečním úlohám pro diferenciální rovnici

$$u' = N(u), \tag{1.1}$$

v níž $N(u)$ představuje buď jednoduchý skok nebo skok s hysterezí.

Nejprve pro jednoduchost uvedeme počáteční úlohu

$$\begin{cases} u' = N(u), & N(u) = \begin{cases} 2, & u < 0, \\ 1, & u \geq 0, \end{cases} \\ u(0) = -2, \end{cases} \tag{1.2}$$

kde $u = u(t)$ je hledaná funkce, $t \in [0, T]$, $T > 0$ je libovolné, $u(0) = -2$ je počáteční podmínka a $N(u)$ představuje jednoduchý skok.

U úloh s nespojitými vstupními daty nelze očekávat existenci klasického řešení, tj. řešení, které by bylo spojitě diferencovatelné až do řádu rovnice a splňovalo ji v každém bodě. Proto se v těchto případech omezíme na hledání *zobecněných řešení*, která jsou třídy $\mathcal{C}^{n-1}([0, T])$, kde $T > 0$ a n je řád rovnice, a splňují rovnici skoro všude.

Zobecněné řešení diferenciální rovnice (1.1) můžeme formálně zapsat v implicitním tvaru

$$u(t) = N(u)t + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

tj. zobecněným řešením úlohy (1.2) rozumíme spojitou funkci danou po částech vztahem

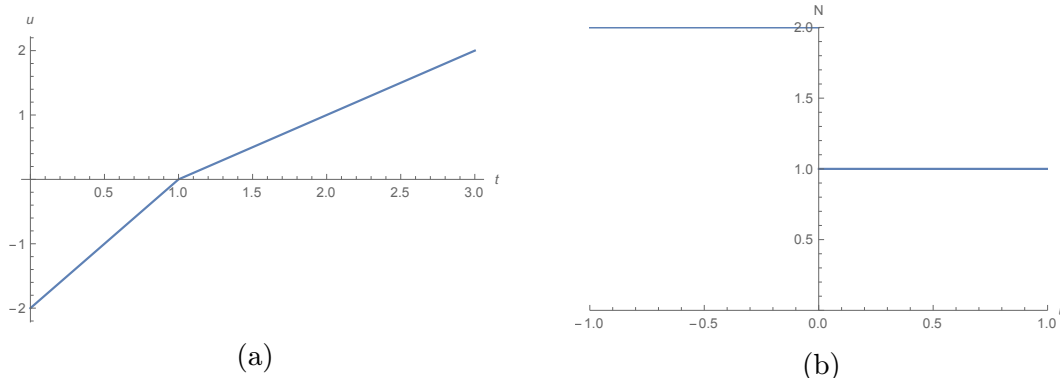
$$u(t) = \begin{cases} 2t + C, & u < 0, \\ t + C, & u \geq 0, \end{cases}$$

kde konstanta C závisí na počáteční podmínce $u(0) = -2$, respektive na každé hodnotě $u(\tau)$ a každém čase $\tau \in [0, T]$, ve kterém se přepíná $N(u)$.

Pro $T > 1$ je řešením úlohy (1.2) přímo funkce

$$u(t) = \begin{cases} 2t - 2, & t \in [0, 1), \\ t - 1, & t \in [1, T]. \end{cases}$$

Uvedeme graf řešení úlohy (1.2) a graf jednoduchého skoku $N(u)$ z úlohy (1.2) (viz obr. 1.4).



Obrázek 1.4: (a) Graf řešení úlohy (1.2), (b) jednoduchý skok (Mathematica).

Zajímavějším příkladem počáteční úlohy s jednoduchým skokem je

$$\begin{cases} u' = N(u), & N(u) = \begin{cases} 1, & u < 0, \\ -1, & u \geq 0, \end{cases} \\ u(0) = -2, \end{cases} \quad (1.3)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, a $N(u)$ je jednoduchý skok.

Úloha (1.3) modeluje regulaci veličiny u , závislé na čase t , dvoustavovým nespojitým regulátorem $N(u)$. V praxi jsou častěji používány spojité regulátory (např. PI-regulátor nebo PID-regulátor), nespojitý regulátor je základní druh regulátoru, vhodný pro jednoduché aplikace. Příkladem regulátoru může být termostat, kterým lze ovládat vytápění nebo klimatizaci místností, udržovat nastavenou teplotu elektrické žehličky, plotýnky elektrického vařiče nebo teplotu pájky.

Zobecněným řešením úlohy (1.3) je spojitá funkce daná po částech vztahem

$$u(t) = \begin{cases} t + C, & u < 0, \\ -t + C, & u \geq 0, \end{cases}$$

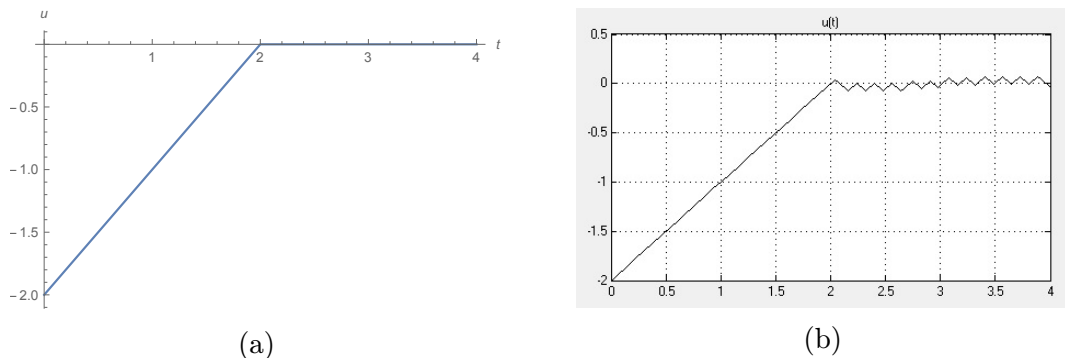
kde konstanta C závisí na počáteční podmínce a mění se v každém čase $\tau \in [0, T]$, ve kterém se přepíná $N(u)$.

Pro $T > 2$ je řešením úlohy (1.3) na intervalu $[0, 2)$ funkce

$$u(t) = t - 2$$

a na intervalu $[2, T]$ řešení (v zobecněném smyslu v našem pojetí) neexistuje.

Uvedeme grafy řešení úlohy (1.3) získané v softwarech Mathematica a Matlab (viz obr. 1.5). V Mathematice používáme standardní příkazy „NDSolve“ a „WhenEvent“ a v Matlabu připravené nespojité přepínače v nadstavbě Simulink.



Obrázek 1.5: Graf řešení úlohy (1.3) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab.

Graf vykreslený v Mathematice znázorňuje ve skutečnosti řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} u' = N(u), & N(u) = \begin{cases} 1, & u < 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u > 0, \end{cases} \\ u(0) = -2, \end{cases} \quad (1.4)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ a $N(u)$ je jednoduchý skok.

Řešením úlohy (1.4) je pro $T > 2$ funkce

$$u(t) = \begin{cases} t - 2, & t \in [0, 2), \\ 0, & t \in [2, T]. \end{cases}$$

Nicméně skutečnému chování systému s dvoustavovým regulátorem více odpovídá graf řešení vykreslený softwarem Matlab.

Představme si, že je regulátorem $N(u)$ termostat a veličinou u teplota v místnosti. V úloze (1.3) je požadovanou teplotou v místnosti 0°C , pokud je teplota v místnosti nižší, zapne se topení ($N(u) = 1$) a teplota se začne zvyšovat, a pokud vyšší nebo nulová, topení se vypne ($N(u) = -1$) a teplota začne klesat. Termostat má nastavenou tzv. periodu vzorkování, která určuje, jak často se změří aktuální stav teploty u a vyhodnotí situace a tedy i $N(u)$. Ve skutečnosti proto může být výsledná teplota v místnosti v průběhu času taková, jak je zobrazeno softwarem Matlab. Aby se regulátor okolo ideální hodnoty u nespínal příliš často, je možné jej nahradit regulátorem s hysterezí.

Příkladem počáteční úlohy se skokem s hysterezí je

$$\begin{cases} u' = N(u), & N(u) = \begin{cases} 3, & u < 2, \\ -0.5, & u > 1, \end{cases} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ a $N(u)$ je skok s hysterezí.

Úloha (1.5) modeluje regulaci veličiny u , závislé na čase t , dvoustavovým nespojitým regulátorem $N(u)$ s hysterezí.

Zobecněným řešením úlohy (1.5) nyní rozumíme funkci

$$u(t) = \begin{cases} 3t + C, & u < 2, \\ -0.5t + C, & u > 1, \end{cases}$$

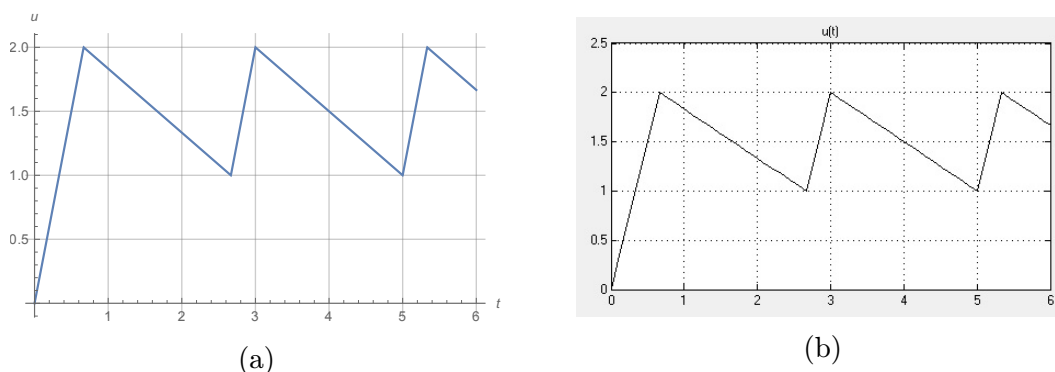
kde konstanta C závisí na počáteční podmínce a mění se v každém čase, ve kterém se přepíná $N(u)$.

Konkrétně pro $T = 6$ je řešením úlohy (1.5) funkce

$$u(t) = \begin{cases} 3t, & t \in [0, \frac{2}{3}), \\ -0.5t + \frac{7}{3}, & t \in [\frac{2}{3}, \frac{8}{3}), \\ 3t - 7, & t \in [\frac{8}{3}, 3), \\ -0.5t + \frac{7}{2}, & t \in [3, 5), \\ 3t - 14, & t \in [5, \frac{16}{3}), \\ -0.5t + \frac{14}{3}, & t \in [\frac{16}{3}, 6]. \end{cases}$$

Uvedeme grafy řešení úlohy (1.5) v softwarech Mathematica a Matlab (viz obr. 1.6).

Veličinou u v úloze (1.5) může být např. výška hladiny kapaliny v nádrži, kterou se regulátor s hysterezí snaží udržovat v rozmezí 1 až 2dm. Regulátor funguje následovně. Čerpadlo se sepne ($N(u) = 3$), jestliže je hladina kapaliny pod hodnotou 1dm, a vypne ($N(u) = -0.5$) až v případě, kdy je hladina nad 2dm. Jestliže je hladina kapaliny mezi 1 a 2dm, regulátor udržuje předchozí stav.



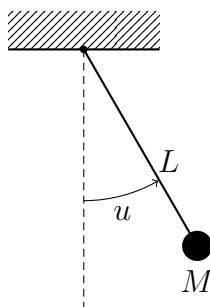
Obrázek 1.6: Graf řešení úlohy (1.5) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab.

1.2 Modely kyvadla

Jedním ze základních matematických modelů je model kyvadla. Jako první představíme standardní model kyvadla a poté uvažujeme jeho různé modifikace. V následujících podkapitolách uvádíme nelineární úlohu, úlohu zahrnující speciální teorii relativity, úlohu pro lineární diferenciální rovnici, úlohu s jednoduchým skokem a úlohu se skokem s hysterezí.

1.2.1 Nelineární diferenciální rovnice

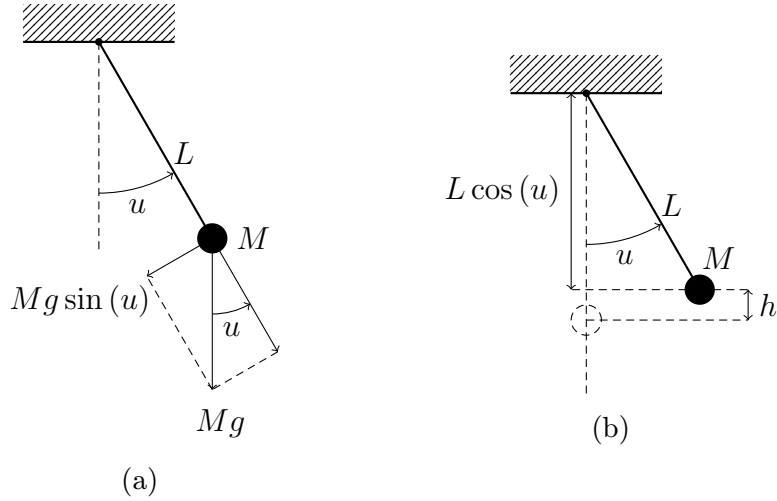
Rovinným matematickým kyvadlem (viz obr. 1.7) nazýváme myšlený model hmotného bodu o hmotnosti M zavěšeného na nehmotném závěsu stálé délky L pohybujícího se v rovině v homogenním gravitačním poli podle pohybových zákonů.



Obrázek 1.7: Model rovinného matematického kyvadla.

Předpokládáme, že tření i odporová síla prostředí jsou nulové a jedinou příčinou pohybu je tíha hmotného bodu. Chceme-li popsat okamžitou výchylku u hmotného bodu ze stabilní rovnovážné polohy jako funkci času $u = u(t)$, můžeme vyjít z druhého Newtonova zákona nebo ze zákona zachování energie (viz obr. 1.8).

Podle druhého Newtonova zákona platí rovnováha sil působících na hmotný bod. Uvažujeme rychlost hmotného bodu zanedbatelně malou vzhledem k rychlosti světla, a tedy v čase konstantní hmotnost M . Protože složka tíhové síly, která



Obrázek 1.8: Ilustrace k odvození rovnice kyvadla (a) z Newtonova zákona, (b) ze zákona zachování energie.

způsobuje pohyb hmotného bodu, má velikost $Mg \sin(u)$, dostaneme rovnost

$$Ms'' = -Mg \sin(u), \quad (1.6)$$

v níž g je tíhové zrychlení a $s'' = s''(t)$ je zrychlení hmotného bodu.

Dráha $s(t)$, kterou hmotný bod urazí za čas t , je rovna délce oblouku odpovídajícího výchylce $u(t)$ v čase t . Pro zrychlení hmotného bodu proto platí

$$s''(t) = (Lu(t))'' = Lu''(t).$$

Dosazením $s'' = Lu''$ do rovnosti (1.6), dostaneme

$$MLu'' = -Mg \sin(u).$$

Předpokládáme nenulovou hmotnost M a nenulovou délku L , označíme $\Omega^2 := \frac{g}{L}$ a úpravou získáme

$$u'' + \Omega^2 \sin(u) = 0. \quad (1.7)$$

Vyjdeme-li ze zákona zachování energie, potom podle tzv. energetické věty platí

$$E_k + E_p = K, \quad (1.8)$$

kde E_k je kinetická energie hmotného bodu, E_p potenciální energie hmotného bodu a K je konstanta. Uvažujeme-li opět malé rychlosti hmotného bodu vzhledem k rychlosti světla, potom pro kinetickou a potenciální energii platí

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2,$$

$$E_p = Mgh,$$

kde $v = v(t)$ je rychlost hmotného bodu a $h = h(t)$ je výška hmotného bodu v čase t nad úrovní hmotného bodu ve stabilní rovnovážné poloze, v níž je potenciální energie nulová. Pro rychlost v a výšku h platí

$$\begin{aligned}v &= Lu', \\h &= L - L \cos(u).\end{aligned}$$

Dosazením těchto vztahů do rovnosti (1.8) dostaneme

$$\frac{1}{2}ML^2(u')^2 + MgL(1 - \cos(u)) = K$$

a následnou derivací získáme

$$ML^2u'u'' + MgL \sin(u)u' = 0.$$

Předpokládáme-li nenulové hodnoty M , L , u' a označíme-li $\Omega^2 := \frac{g}{L}$, úpravou dospějeme opět k rovnosti (1.7).

V obou případech se dostáváme k hledání řešení $u = u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$ nelineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$u'' + \Omega^2 \sin(u) = 0.$$

Pokus o řešení vede na výpočet tzv. eliptického integrálu prvního druhu (viz [8, s. 66]), nebudeme se proto zabývat předpisem funkce u .

Zvolme $\Omega^2 := 1$ a uvažujme počáteční úlohu

$$\begin{cases}u'' + \sin(u) = 0, \\u(0) = u_{01}, \\u'(0) = u_{02},\end{cases} \quad (1.9)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ a $u_{01} \in \mathbb{R}$, $u_{02} \in \mathbb{R}$. Hodnota u_{01} má význam počáteční výchylky a hodnota u_{02} počáteční úhlové rychlosti hmotného bodu.

Úlohu (1.9) lze transformací $y_1(t) = u(t)$, $y_2(t) = u'(t)$ ekvivalentně převést na počáteční úlohu pro soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases}y_1' = y_2, \\y_2' = -\sin(y_1), \\y_1(0) = u_{01}, \\y_2(0) = u_{02}.\end{cases} \quad (1.10)$$

Označíme $\mathbf{y} := (y_1, y_2)^T$ a $\mathbf{f} := (y_2, -\sin(y_1))^T$. Funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je spojitá na $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ a lipschitzovská na $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ v proměnné \mathbf{y} s konstantou $L = 1$, tj.

$$\forall (t, \mathbf{u}), (t, \mathbf{v}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

neboť použijeme-li např. maximovou vektorovou normu, dostaneme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| &= \left\| \begin{pmatrix} u_2 - v_2 \\ \sin(u_1) - \sin(v_1) \end{pmatrix} \right\| = \max\{|u_2 - v_2|, |\sin(u_1) - \sin(v_1)|\} = \\ &= \max\left\{|u_2 - v_2|, \left|2 \sin\left(\frac{u_1 - v_1}{2}\right) \cos\left(\frac{u_1 + v_1}{2}\right)\right|\right\} \leq \\ &\leq \max\left\{|u_2 - v_2|, \left|2 \sin\left(\frac{u_1 - v_1}{2}\right)\right|\right\} \leq \max\left\{|u_2 - v_2|, 2 \frac{|u_1 - v_1|}{2}\right\} = \\ &= \max\{|u_2 - v_2|, |u_1 - v_1|\} = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Díky globální větě o existenci řešení počáteční úlohy pro soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu (viz [9, s. 217]) existuje právě jedno řešení úlohy (1.10) a díky ekvivalenci úloh (1.10) a (1.9) (věta o ekvivalenci úloh viz [8, s. 55]) existuje také právě jedno řešení úlohy (1.9).

Pokud bychom ovšem uvažovali, že se hmotný bod kyvadla pohybuje rychlostí blízké rychlosti světla ve vakuu V_c , potom má smysl v odvození modelu zahrnout speciální teorii relativity. Analogickými postupy se dostaneme k hledání řešení $u = u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$ nelineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$u'' + \Omega^2 \sqrt{1 - \frac{(Lu')^2}{V_c^2}} \sin(u) = 0.$$

Reálnější fyzikální děj, který je s touto diferenciální rovnicí spojen, je pohyb nabitě částice po kružnici v elektrostatickém či magnetickém poli.

Zvolme $\Omega^2 := 1$, $L := 1$ a konstantu $V_c := 3$ a uvažujme počáteční úlohu

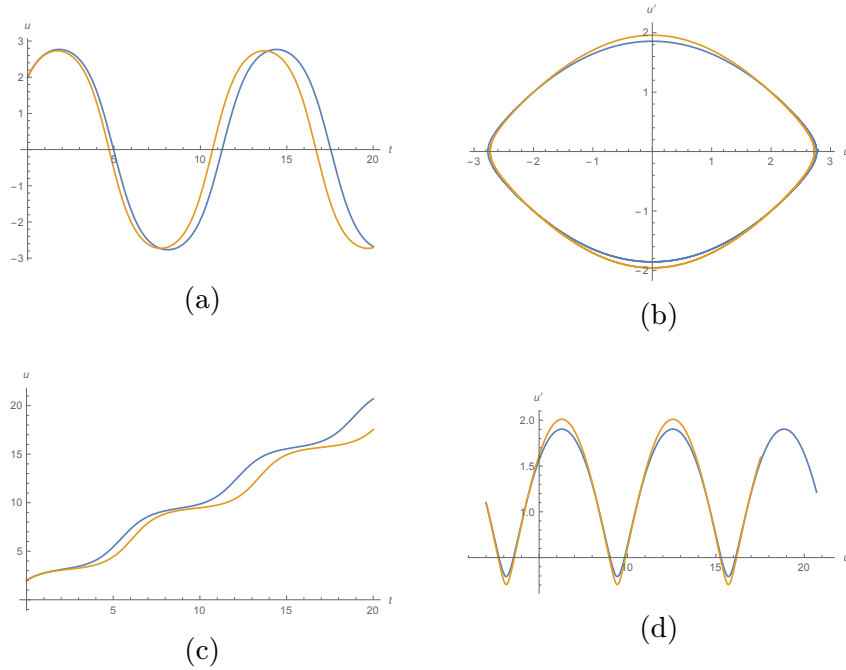
$$\begin{cases} u'' + \sqrt{1 - \frac{(u')^2}{9}} \sin(u) = 0, \\ u(0) = u_{01}, \\ u'(0) = u_{02}, \end{cases} \quad (1.11)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ a $u_{01} \in \mathbb{R}$, $u_{02} \in \mathbb{R}$. Stejným způsobem jako u úlohy (1.9) lze ukázat také existenci jednoznačného řešení počáteční úlohy (1.11).

Uvedeme grafy řešení úloh (1.9) a (1.11) a fázové portréty pro počáteční podmínky $u_{01} = 2$, $u_{02} = 1$ (viz obr. 1.9a, 1.9b) a $u_{01} = 5$, $u_{02} = 1.1$ (viz obr. 1.9c, 1.9d).

1.2.2 Lineární diferenciální rovnice

Základní tvar lineární diferenciální rovnice získáme procesem linearizace, pokud v rovnici (1.7) nahradíme člen $\sin u$ jeho Taylorovým rozvojem prvního stupně v bodě nula, tedy členem u . Pro výchylky $|u| < 0.0843$ se tak dopouštíme absolutní chyby menší než 10^{-4} . Ve stupňové míře hraniční výchylce odpovídá necelých 5° , proto je úloha pro lineární diferenciální rovnici spojena s modelem matematického kyvadla s maximální výchylkou do $\pm 5^\circ$, přičemž uvažované rychlosti hmotného bodu jsou opět zanedbatelně malé vzhledem k rychlosti světla.



Obrázek 1.9: Grafy řešení úlohy (1.11) (modrá) a úlohy (1.9) (oranžová) a příslušné fázové portréty pro (a), (b) $u_{01} = 2$, $u_{02} = 1$, (c), (d) $u_{01} = 2$, $u_{02} = 1.1$.

Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} u'' + \Omega^2 u = 0, \\ u(0) = u_{01}, \\ u'(0) = u_{02}, \end{cases} \quad (1.12)$$

kde $\Omega \neq 0$, $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ a $u_{01} \in \mathbb{R}$, $u_{02} \in \mathbb{R}$. I zde bychom mohli ukázat existenci jednoznačného řešení počáteční úlohy (1.12), v tomto případě jsme ovšem také schopni nalézt analytický předpis pro řešení.

Obecné řešení rovnice $u'' + \Omega^2 u = 0$ předpokládáme ve tvaru $u = e^{zt}$, kde $z \in \mathbb{C}$ najdeme pomocí charakteristické rovnice $z^2 + \Omega^2 = 0$. Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $z_1 = \Omega i$, $z_2 = -\Omega i$ a fundamentálním systémem je $\{e^{i\Omega t}, e^{-i\Omega t}\}$. Je-li řešením diferenciální rovnice komplexní funkce, potom jsou řešením také reálná a imaginární část této funkce (viz [8, s. 95]), díky čemuž můžeme získat reálný fundamentální systém $\{\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)\}$ a obecné řešení zapsat ve tvaru $u(t) = C_1 \cos(\Omega t) + C_2 \sin(\Omega t)$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Dosazením obecného řešení do počátečních podmínek úlohy (1.12) získáme řešení úlohy (1.12)

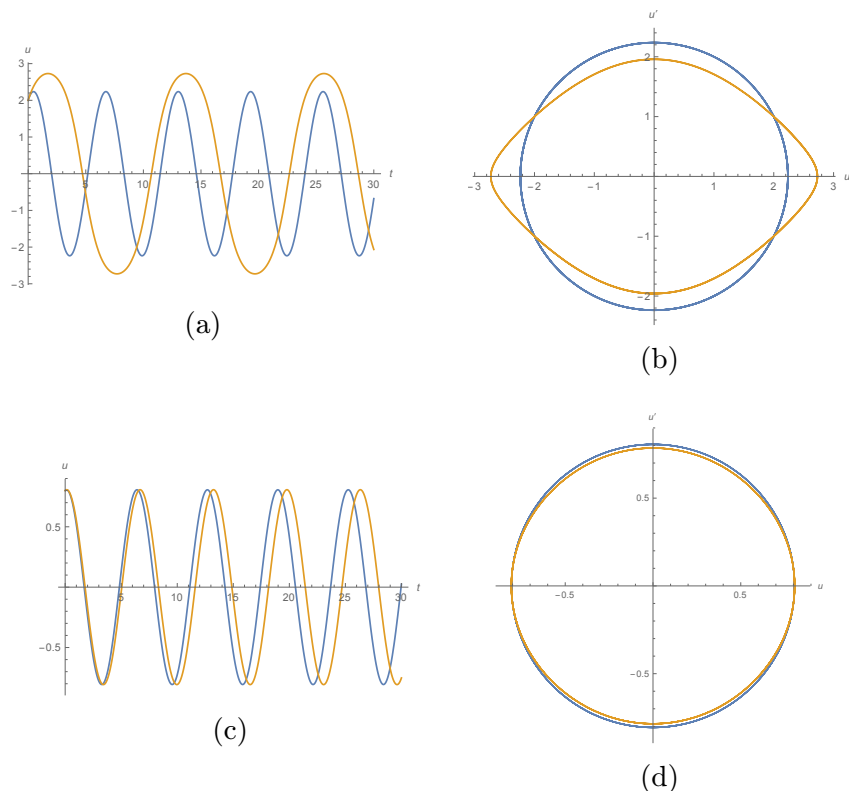
$$u(t) = u_{01} \cos(\Omega t) + \frac{u_{02}}{\Omega} \sin(\Omega t),$$

které lze přepsat do tvaru

$$u(t) = D \sin(\Omega t + \delta),$$

kde $D = \sqrt{u_{01}^2 + \left(\frac{u_{02}}{\Omega}\right)^2}$, $\text{tg } \delta = \frac{u_{01}\Omega}{u_{02}}$ pro $u_{02} \neq 0$ a $\delta = \frac{\pi}{2}$ pro $u_{02} = 0$. Konstanta D má význam maximální amplitudy kmitavého pohybu popsaného řešením u , δ je fázový posun a Ω úhlová frekvence.

Následují grafy řešení $u(t)$ úlohy (1.12) a fázové portréty pro $\Omega = 1$ a počáteční podmínky $u_{01} = 2, u_{02} = 1$ (viz obr. 1.10a, 1.10b) a $u_{01} = 0.8, u_{02} = 0.1$ (viz obr. 1.10c, 1.10d).



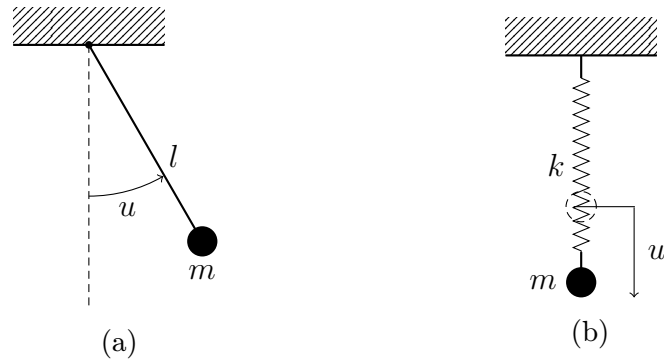
Obrázek 1.10: Grafy řešení úlohy (1.12) (modrá) a úlohy (1.9) (oranžová) a příslušné fázové portréty pro (a), (b) $u_{01} = 2, u_{02} = 1$, (c), (d) $u_{01} = 0.8, u_{02} = 0.1$.

Obecný tvar lineární diferenciální rovnice druhého řádu je

$$u'' + \kappa u' + \lambda u = f, \quad (1.13)$$

kde $u = u(t)$ má význam okamžitá výchylka hmotného bodu z rovnovážné polohy, konstanta κ charakterizuje velikost tlumící síly, konstanta λ charakterizuje velikost vratné síly a $f = f(t)$ je funkce budící síly. Řešení rovnice (1.13) může vedle pohybu hmotného bodu kyvadla popisovat např. také pohyb hmotného bodu vázaného pružinou k rámu (viz obr. 1.11), pokud se u pružiny jedná o elastickou deformaci materiálu (deformace po odlehčení mizí a tvar pružiny se po odstranění působící síly vrací do původního stavu).

Pro oba modely je $\kappa = \frac{K_b}{M}$ a $\lambda = \Omega_0^2$, kde K_b je koeficient tlumení, M hmotnost hmotného bodu a Ω_0 vlastní kruhová frekvence (kruhová frekvence netlumeného oscilátoru). U pružinového oscilátoru je $\lambda = \frac{K_p}{M}$, kde K_p je tuhost pružiny, a pro matematické kyvadlo platí $\lambda = \frac{g}{L}$, kde g je tíhové zrychlení a L délka závěsu.



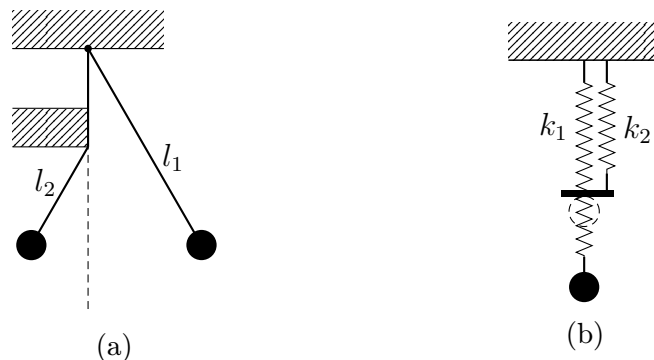
Obrázek 1.11: (a) Model kyvadla, (b) model pružinového oscilátoru.

1.2.3 Diferenciální rovnice se skokem

Jeden z možných tvarů diferenciální rovnice se skokem získáme ze základního tvaru lineární diferenciální rovnice, pokud nahradíme člen Ω^2 členem $N(u)$, který představuje jednoduchý skok nebo skok s hysterezí. Dostaneme diferenciální rovnici

$$u'' + N(u)u = 0. \quad (1.14)$$

Úloha pro diferenciální rovnici (1.14) je spojena s modelem kyvadla nebo také s modelem pružinového oscilátoru, v nichž jsou uvažovány stejné předpoklady jako v kapitole 1.2.2, s přidáním zarážky (viz obr. 1.12). Jedná se o úlohu, jejíž řešení popisuje pohyb hmotného bodu oscilátoru s nulovým tlumením i nulovou budící silou a s proměnlivou velikostí vratné síly v průběhu času podle přepínání $N(u)$. Změně vratné síly u kyvadla odpovídá změna délky závěsu, způsobená zarážkou v modelu, a u pružinového oscilátoru změna tuhosti pružiny. Pro jednoduchý skok nastává změna vratné síly vždy v jedné poloze, pro skok s hysterezí si lze představit, že změny vratné síly probíhají se zpožděním.



Obrázek 1.12: (a) Model kyvadla se zarážkou, (b) model pružinového oscilátoru se zarážkou.

Úloha pro diferenciální rovnici (1.14), v níž je člen $N(u)u$ definován na intervalu $(-\infty, +\infty)$ jako spojitá reálná funkce, je speciálním případem úlohy s tzv. skákající nelinearitou. Studiu úloh se skákajícími nelinearitami se věnovali již

v 70. letech 20. století např. A. Ambrosetti a G. Prodi či český matematik S. Fučík (viz [10]) a tento typ úloh nachází uplatnění v modelech visutých mostů (viz [11]).

Zobecněné řešení diferenciální rovnice (1.14) lze formálně zapsat implicitním vztahem

$$u(t) = C_1 \cos(\sqrt{N(u)}t) + C_2 \sin(\sqrt{N(u)}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Počáteční úlohou s jednoduchým skokem pro diferenciální rovnici (1.14) je např.

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} 0.25, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ 4, & u < 0, \end{cases} \\ u(0) = 0.1, \\ u'(0) = 1, \end{cases} \quad (1.16)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ a $N(u)$ je jednoduchý skok. V úloze (1.16) nastává změna vratné síly v rovnovážné poloze $u(t) = 0$.

Řešení počáteční úlohy (1.16) lze získat ze vztahu (1.15) určením konstant C_1 a C_2 , které závisí na počátečních podmínkách a mění se v každém čase, ve kterém se přepíná $N(u)$.

Příkladem úlohy se skokem s hysterezí, která obsahuje diferenciální rovnici (1.14), může být úloha

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} 0.25, & u > -0.4, \\ 4, & u < 0.4, \end{cases} \\ u(0) = 0.1, \\ u'(0) = 1, \end{cases} \quad (1.17)$$

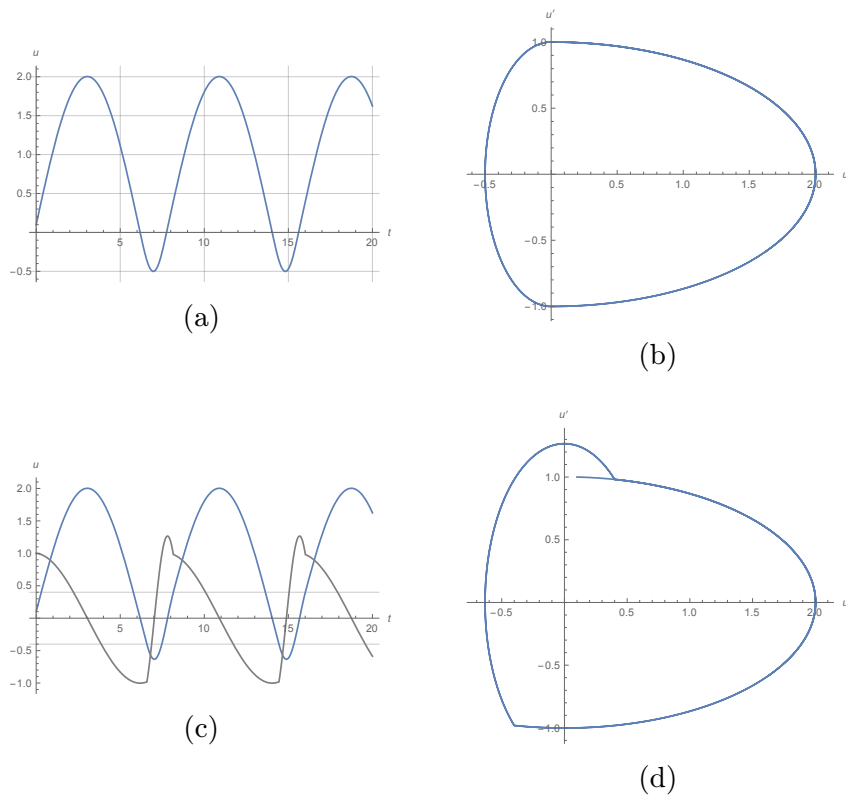
kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ a $N(u)$ je skok s hysterezí. V úloze (1.17) nastává změna vratné síly při pohybu v jednom směru až v poloze $u(t) = 0.4$ a při pohybu zpět v druhém směru až v poloze $u(t) = -0.4$.

Jelikož je skok s hysterezí $N(u)$ mnohoznačné zobrazení a hodnota $N(u(0))$ není jednoznačně dána, nemusí být dáno jednoznačně ani řešení úlohy (1.17).

Řešení úlohy (1.17) lze získat ze vztahu (1.15) určením konstant C_1 a C_2 , které závisí na počátečních podmínkách, na hodnotě $N(u(0))$ a mění se v každém čase, v němž se přepíná $N(u)$.

Uvedeme grafy řešení úloh (1.16) a (1.17) pro $N(u(0)) = 0.25$ (viz obr. 1.13).

Vyjdeme-li z obecného tvaru lineární diferenciální rovnice (1.13), můžeme po částech konstantním členem $N(u)$ nahradit vedle konstanty λ také konstantu κ či pravou stranu rovnice f a obdržet tak obdobně, skokově v závislosti na hodnotě řešení, přepínanou velikost tlumící síly či budící síly.



Obrázek 1.13: (a), (b) Graf řešení $u(t)$ úlohy (1.16) a fázový portrét a (c), (d) graf řešení $u(t)$ (modrá) a derivace řešení $u'(t)$ (šedá) úlohy (1.17) a fázový portrét pro $N(u(0)) = 0.25$.

Druhým příkladem úlohy se skokem s hysterezí, kterou uvedeme a která je také spjata s modelem kyvadla (příp. s modelem pružinového oscilátoru), je úloha

$$\begin{cases} u'' - 2\mu u' + u = N(u), & N(u) = \begin{cases} a, & u \geq -a, \\ -a, & u \leq a, \end{cases} \\ u(0) = a, \\ u'(0) = p, \end{cases} \quad (1.18)$$

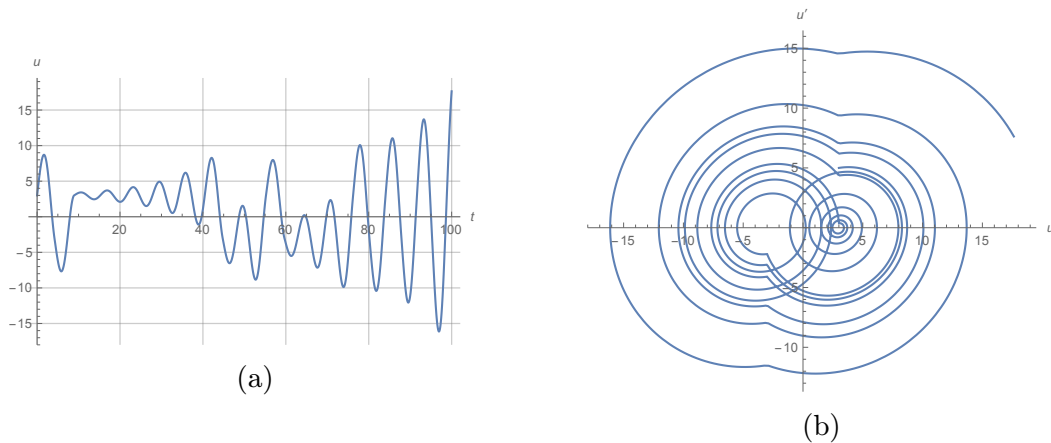
kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, $\mu \in (0, 1)$ je parametr, $N(u)$ je skok s hysterezí se symetrickou smyčkou, $a > 0$ a $p > 0$. Jedná se o úlohu, jejíž řešení popisuje pohyb hmotného bodu kyvadla, na nějž jsou kladeny stejné požadavky jako v kapitole 1.2.2, s vratnou silou o velikosti 1, s tzv. záporným tlumením a s proměnlivou budící silou v průběhu času podle přepínání $N(u)$. Úloha může být interpretována jako model kyvadla v proměnlivém fyzikálním poli se záporným tlumením.

Reálnější uplatnění má úloha (1.18) jako model systémů založených na kontrole a synchronizaci chaotických oscilací. Nachází využití v komunikačních systémech, jako je kódování, komprese a přenos informací (viz [12]).

Zobecněné řešení diferenciální rovnice z úlohy (1.18) formálně zapíšeme ve tvaru

$$u(t) = e^{\mu t} \left(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t) \right) + N(u), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Následuje graf řešení úlohy (1.18) pro $a = 3$, $\mu = 0.08$, $p = 5$, $N(u(0)) = 3$ (viz obr. 1.14).



Obrázek 1.14: (a) Graf řešení $u(t)$ pro $t \in [0, 100]$ úlohy (1.18) pro $a = 3$, $\mu = 0.08$, $p = 5$, $N(u(0)) = 3$, (b) fázový portrét.

Přehled řešených počátečních úloh se skokem je uveden v příloze (viz A).

Obecně na úlohy s nespojitými nebo mnohoznačnými daty a jejich řešitelnost je zaměřena tzv. teorie Filippovových systémů (viz [13] nebo [14]). V dalším textu se věnujeme výhradně problémům, u kterých nástrojů této teorie není zapotřebí využít, a proto se jimi nebudeme detailněji zabývat.

V následujících kapitolách se věnujeme úlohám typu (1.16), (1.17) a (1.18).

Kapitola 2

Počáteční úlohy s hysterezní smyčkou

Počáteční úlohou pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s hysterezí

$$F(t, u, u', u'') = 0, \quad (2.1)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ a $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení s hysterezí, rozumějme úlohu najít jedenkrát spojitě diferencovatelnou funkci $u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje diferenciální rovnici (2.1) pro skoro všechna $t \in [t_1, t_2]$ a zároveň pro daná čísla $u_{01} \in \mathbb{R}$, $u_{02} \in \mathbb{R}$ a pro $t_0 \in [t_1, t_2]$ splňuje počáteční podmínky $u(t_0) = u_{01}$, $u'(t_0) = u_{02}$. Tedy hledíme na intervalu $[t_1, t_2]$ zobecněné řešení úlohy

$$\begin{cases} F(t, u, u', u'') = 0, \\ u(t_0) = u_{01}, \\ u'(t_0) = u_{02}. \end{cases}$$

V následujícím textu se zaměříme zejména na počáteční úlohu

$$\begin{cases} u'' - 2\mu u' + u = N(u), & N(u) = \begin{cases} d, & u \geq -a, \\ -c, & u \leq b, \end{cases} \\ u(0) = b, \\ u'(0) = p, \end{cases} \quad (2.2)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ je libovolné, $\mu \in (0, 1)$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $p > 0$ a $N(u)$ představuje skok s hysterezí. To znamená, že pro všechna $u \in [-a, b]$ může N nabývat dvou hodnot, ovšem přiřazení hodnoty $-c$ nebo d závisí na předchozím stavu. Dokud platí $u \leq b$, přiřazujeme u hodnotu $-c$, a naopak dokud platí $x \geq -a$, přiřazujeme u hodnotu d .

Věta 2.1. *Pro libovolné $\mu \in (0, 1)$ a pevně dané hodnoty a, b, c, d, p existuje právě jedno zobecněné řešení počáteční úlohy (2.2).*

Důkaz. Jelikož je v úloze (2.2) první počáteční podmínkou $u(0) = b$, hodnota $N(u(0))$ není dána jednoznačně.

1. Nejprve uvažujme $N(u(0)) = d$.

- (a) Pokud na intervalu $[0, T]$ neexistuje bod přepnutí τ , pro který platí $u(\tau) = -a$, potom se rovnice z úlohy (2.2) zjednoduší na diferenciální rovnici $u'' - 2\mu u' + u = d$. Z věty o globální existenci a jednoznačnosti pro počáteční úlohu (viz [8, s. 73]) plyne existence právě jednoho řešení takovéto počáteční úlohy, neboť členy -2μ a d jsou spojité (konstantní) funkce.
- (b) Nechť na intervalu $[0, T]$ existuje libovolný počet $J \in \mathbb{N}$ bodů přepnutí τ_1, \dots, τ_J , pro něž platí $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_J$ a zároveň

$$u(\tau_j) = \begin{cases} -a, & j \text{ liché,} \\ b, & j \text{ sudé,} \end{cases}$$

pro všechna $j = 1, \dots, J$. Pokud označíme $\tau_0 = 0$ a $\tau_{J+1} = T$, potom se pro všechna $j = 1, \dots, J + 1$ rovnice z úlohy (2.2) zjednoduší na podintervalech $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ pro j liché na rovnici $u'' - 2\mu u' + u = d$ a na podintervalech $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ pro j sudé na rovnici $u'' - 2\mu u' + u = -c$. Podmínky na spojitost a hladkost zobecněného řešení u úlohy (2.2) zaručují jednoznačnost hodnot $u(\tau_j)$ a $u'(\tau_j)$ pro všechna $j = 1, \dots, J$ a členy -2μ , d , $-c$ jsou spojité (konstantní) funkce. Z věty o globální existenci a jednoznačnosti pro počáteční úlohu (viz [8, s. 73]) proto plyne existence právě jednoho řešení příslušných úloh na podintervalech $[\tau_{j-1}, \tau_j]$, kde $j = 1, \dots, J + 1$, z čehož plyne i existence právě jednoho zobecněného řešení úlohy (2.2) na celém intervalu $[0, T]$.

2. Nyní uvažujme $N(u(0)) = -c$. Pro libovolné $T > 0$ je vždy prvním bodem přepnutí na intervalu $[0, T]$ bod $\tau_0 = 0$, neboť druhou počáteční podmínkou v úloze (2.2) je $u'(0) = p > 0$, tj. průběh řešení je dán zcela stejně jako výše.

□

Jelikož je zobecněné řešení úlohy (2.2) nezávislé na počátečním stavu $N(u(0))$, budeme pro jednoduchost uvažovat $N(u(0)) = d$.

Zobecněné řešení počáteční úlohy (2.2) má na jednotlivých podintervalech odlišný předpis, jenž lze vždy získat určením konstant z obecného řešení lineárních diferenciálních rovnic $u'' - 2\mu u' + u = d$ a $u'' - 2\mu u' + u = -c$.

Obecné řešení diferenciálních rovnic $u'' - 2\mu u' + u = d$ a $u'' - 2\mu u' + u = -c$ je součtem obecného řešení u_H homogenní rovnice $u'' - 2\mu u' + u = 0$ a partikulárního řešení u_P příslušné nehomogenní rovnice. Řešení homogenní rovnice předpokládáme ve tvaru $u = e^{zt}$, kde $z \in \mathbb{C}$ najdeme pomocí charakteristické rovnice $z^2 - 2\mu z + 1 = 0$. Pro $\mu \in (0, 1)$ jsou kořeny charakteristické rovnice komplexně sdružená čísla s kladnou reálnou částí

$$z_{1,2} = \mu \pm i\nu, \quad \nu := \sqrt{1 - \mu^2}.$$

Fundamentálním systémem je $\{e^{\mu t + i\nu t}, e^{\mu t - i\nu t}\}$. Je-li řešením diferenciální rovnice komplexní funkce, potom jsou řešením také reálná a imaginární část této funkce (viz [8, s. 95]), díky čemuž získáme reálný fundamentální systém ve tvaru $\{e^{\mu t} \cos(\nu t), e^{\mu t} \sin(\nu t)\}$ a obecné řešení homogenní rovnice zapíšeme ve tvaru $u_H = e^{\mu t}(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t))$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení získáme např. metodou odhadu. Odhadem $u_P = K$, $K \in \mathbb{R}$, dospějeme k partikulárnímu řešení $u_P = d$ rovnice $u'' - 2\mu u' + u = d$ a k partikulárnímu řešení $u_P = -c$ rovnice $u'' - 2\mu u' + u = -c$.

Zobecněné řešení diferenciální rovnice s hysterezí $u'' - 2\mu u' + u = N(u)$ formálně zapíšeme v implicitním tvaru

$$u(t) = e^{\mu t} \left(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t) \right) + N(u), \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad C_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

jenž chápeme následujícím způsobem:

$$u(t) = \begin{cases} e^{\mu t} \left(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t) \right) + d, & u(t) \geq -a, \\ e^{\mu t} \left(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t) \right) - c, & u(t) \leq b, \end{cases}$$

pro

$$N(u) = \begin{cases} d, & u \geq -a, \\ -c, & u \leq b. \end{cases}$$

Řešením počáteční úlohy (2.2) je funkce daná po částech. Její předpisy na jednotlivých podintervalech lze získat ze zobecněného řešení (2.3) určením konstant C_1 a C_2 , které závisí na počátečních podmínkách a mění se v každém čase, v němž se přepíná $N(u)$.

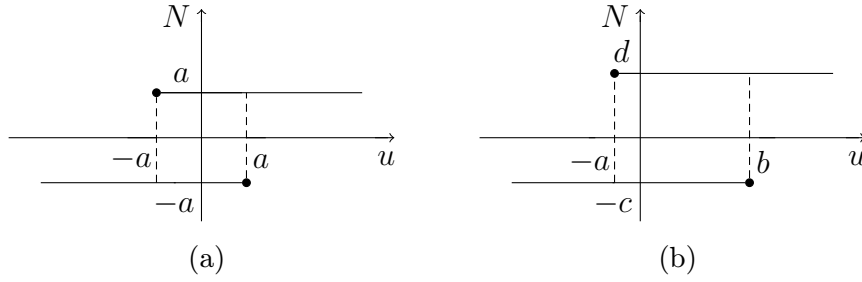
Pro derivaci $u'(t)$ platí

$$u'(t) = e^{\mu t} \left((\mu C_1 + \nu C_2) \cos(\nu t) + (\mu C_2 - \nu C_1) \sin(\nu t) \right), \quad (2.4)$$

kde hodnoty C_1, C_2 se opět na podintervalech liší.

V následující části ukážeme, jak volba parametru μ ovlivňuje omezenost řešení počáteční úlohy (2.2) pro $T \rightarrow \infty$, a uvedeme několik příkladů s numericky získanými výsledky.

Nejprve se věnujeme úloze se symetrickou hysterezní smyčkou, v níž uvažujeme $a = b = c = d$ (viz obr. 2.1a), poté úloze s nesymetrickou smyčkou (viz obr. 2.1b). V obou případech vycházíme z tzv. „Andronov's point transformation method“ (viz [12], [15]). Z literatury jsou již známé výsledky pro počáteční úlohu (2.2), v níž $a = b = c = d = 1$ a $N(u(0)) = 1$. My se proto pokusíme o zobecnění teorie a v případě úlohy se symetrickou hysterezní smyčkou o dokázání existence a jednoznačnosti odvozených mezních hodnot.



Obrázek 2.1: Názorné schéma skoku s hysterezí, (a) symetrická hysterezní smyčka, (b) nesymetrická hysterezní smyčka.

2.1 Úloha se symetrickou hysterezní smyčkou

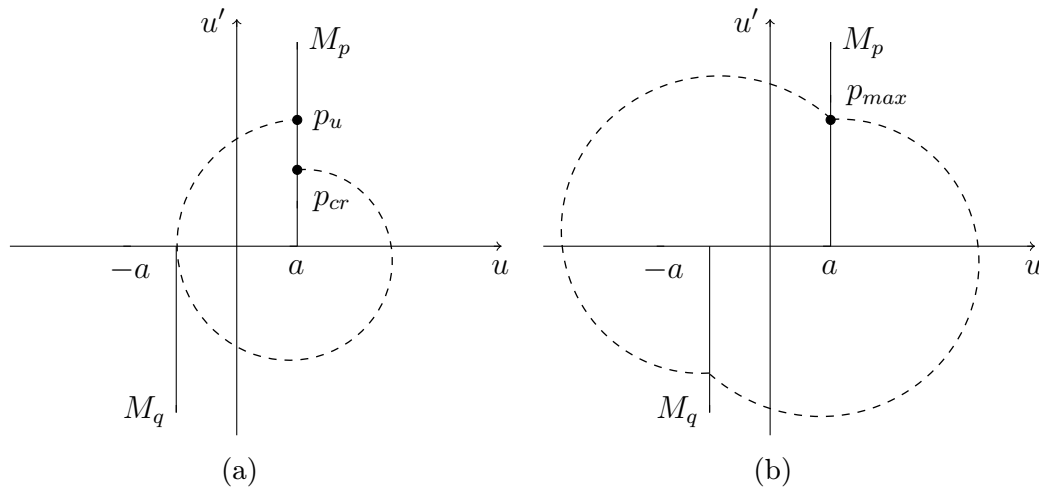
Uvažujeme počáteční úlohu

$$\begin{cases} u'' - 2\mu u' + u = N(u), & N(u) = \begin{cases} a, & u \geq -a, \\ -a, & u \leq a, \end{cases} \\ u(0) = a, \\ u'(0) = p, \\ N(u(0)) = a. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ve fázovém portrétu definujeme polopřímky

$$\begin{aligned} M_p &= \{(u, u') = (a, p), u \in \mathbb{R}\}, \\ M_q &= \{(u, u') = (-a, -q), u \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

kde $p > 0$, $q > 0$ (viz obr. 2.2).



Obrázek 2.2: (a), (b) Polopřímky M_q , M_p a body zvolené na M_p .

Označíme p_{cr} hodnotu p , pro kterou platí, že trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu vycházející z bodu (a, p_{cr}) prochází bodem $(-a, 0)$ a je tvořená pouze jednou smyčkou (viz obr. 2.2a).

Věta 2.2. Pro libovolné $\mu \in (0, 1)$ existuje právě jedno $p_{cr} > 0$ dané vztahem

$$p_{cr} = -2ae^{-\frac{\mu}{\nu}\omega_1} \frac{\nu}{\sin(\omega_1)}, \quad (2.6)$$

kde $\omega_1 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ splňuje

$$0 = \cos(\omega_1) + \frac{\mu}{\nu} \sin(\omega_1). \quad (2.7)$$

Důkaz. Trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu vycházející z bodu (a, p_{cr}) končící v bodě $(-a, 0)$ je dána jedním předpisem (2.3), v němž je $N(u) = a$ (nedochází k přepnutí $N(u)$), a předpisem (2.4) a musí platit

$$u(0) = a, \quad u'(0) = p_{cr}, \quad u(\tau_1) = -a, \quad u'(\tau_1) = 0, \quad N(u) = a,$$

kde $\tau_1 \in (\frac{3\pi}{2\nu}, \frac{2\pi}{\nu})$.

Dosazením předpisů (2.3), (2.4) do vztahů $u(0) = a$, $u'(0) = p_{cr}$, získáme

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 &= \frac{p_{cr}}{\nu} \end{aligned}$$

a po dosazení do vztahů $u(\tau_1) = -a$, $u'(\tau_1) = 0$, obdržíme

$$\begin{aligned} 0 &= e^{\mu\tau_1} \frac{p_{cr}}{\nu} \sin(\nu\tau_1) + 2a, \\ 0 &= e^{\mu\tau_1} \left(p_{cr} \cos(\nu\tau_1) + \mu \frac{p_{cr}}{\nu} \sin(\nu\tau_1) \right). \end{aligned}$$

Označíme $\omega_1 := \nu\tau_1$, $\omega_1 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, a protože $p_{cr} \neq 0$, $e^{\mu\tau_1} \neq 0$, dostáváme

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_1} \frac{p_{cr}}{\nu} \sin(\omega_1) + 2a \quad (2.8)$$

a rovnost (2.7).

Protože $\sin(\omega_1)$ a $\cos(\omega_1)$ jsou na intervalu $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ nenulové, úpravou vztahu (2.7) dostaneme

$$\operatorname{tg}(\omega_1) = -\frac{\nu}{\mu},$$

kde

$$-\frac{\nu}{\mu} = -\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} = -\sqrt{\frac{1}{\mu^2} - 1}.$$

Protože $\mu \in (0, 1)$, platí $-\frac{\nu}{\mu} < 0$ a existuje právě jedno $\omega_1 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ splňující rovnost (2.7).

Úpravou vztahu (2.8) dostaneme jednoznačné vyjádření (2.6), hledanou hodnotu p_{cr} tedy získáme z (2.6) a (2.7). Ve vztahu (2.6) je $a > 0$ a pro $\omega_1 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ platí $\sin(\omega_1) < 0$, tedy $p_{cr} > 0$. \square

Poznámka. Hodnotu ω_1 hledáme pouze na intervalu $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ (tedy $\tau_1 \in (\frac{3\pi}{2\nu}, \frac{2\pi}{\nu})$). Trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portréту musí být tvořena jednou smyčkou, tj. $\omega_1 < 2\pi$. Hodnoty $\omega_1 \in (0, \pi)$ nemá smysl uvažovat, neboť v tomto případě

$$u(\tau_1) = e^{\mu \frac{\pi}{\nu}} \left(\frac{p_{cr}}{\nu} \sin(\omega_1) \right) + a > a,$$

tedy podmínka $u(\tau_1) = -a$ by nemohla být splněna. Pro $\omega_1 \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ nelze splnit rovnost (2.7).

Lemma 2.3. *Funkce $\omega_1(\mu)$ je na intervalu $(0, 1)$ ostře rostoucí a spojitá a platí $\lim_{\mu \rightarrow 0+} \omega_1 = \frac{3}{2}\pi$, $\lim_{\mu \rightarrow 1-} \omega_1 = 2\pi$.*

Důkaz. Úpravou vztahu (2.7) jsme získali

$$\operatorname{tg}(\omega_1) = -\frac{\nu}{\mu},$$

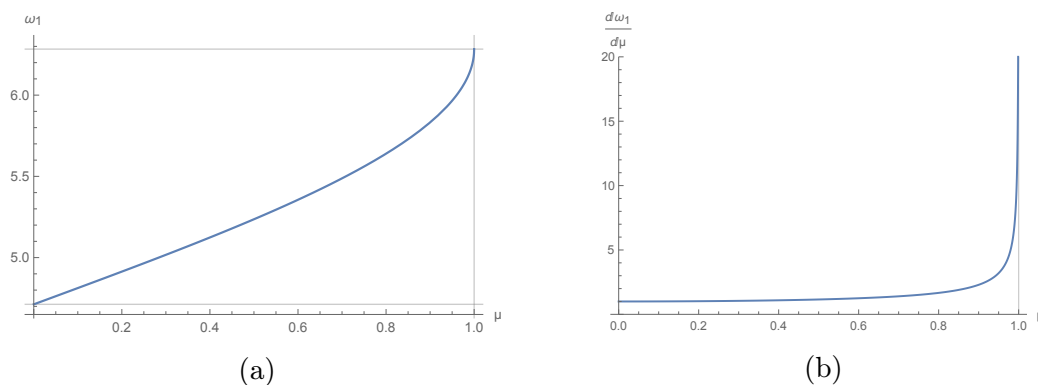
kde $\omega_1 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ a $\nu = \sqrt{1 - \mu^2}$. Tedy

$$\omega_1(\mu) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right) + 2\pi,$$

což je pro $\mu \in (0, 1)$ spojitá funkce. Pro $\omega_1'(\mu)$ bychom na intervalu $(0, 1)$ dostali

$$\omega_1'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} = \frac{1}{\nu} > 0,$$

tj. $\omega_1(\mu)$ je na intervalu $(0, 1)$ ostře rostoucí funkce (viz obr. 2.3).



Obrázek 2.3: (a) Graf $\omega_1(\mu)$, (b) graf $\omega_1'(\mu)$.

Pro $\mu \rightarrow 0+$ a $\mu \rightarrow 1-$ dostaneme

$$\lim_{\mu \rightarrow 0+} \operatorname{tg}(\omega_1) = \lim_{\mu \rightarrow 0+} -\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} = \lim_{\mu \rightarrow 0+} -\frac{\sqrt{\frac{1}{\mu^2} - 1}}{1} = -\infty \Rightarrow \lim_{\mu \rightarrow 0+} \omega_1 = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 1-} \operatorname{tg}(\omega_1) = \lim_{\mu \rightarrow 1-} -\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} = 0 \Rightarrow \lim_{\mu \rightarrow 1-} \omega_1 = 2\pi.$$

□

Označíme p_u hodnotu p , pro kterou platí, že trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu vycházející z bodu (a, p_{cr}) prochází na konci první smyčky bodem (a, p_u) (viz obr. 2.2a).

Věta 2.4. *Pro libovolné $\mu \in (0, 1)$ existuje jednoznačně určené $p_u > 0$ dané vztahem*

$$p_u = p_{cr} e^{\frac{2\pi\mu}{\nu}}. \quad (2.9)$$

Důkaz. Trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu vycházející z bodu (a, p_{cr}) končí v bodě (a, p_u) je opět dána jedním předpisem (2.3), v němž je $N(u) = a$ (nedochází k přepnutí $N(u)$), a předpisem (2.4). Z předpisů (2.3), (2.4) a vztahů pro p_{cr} máme $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{p_{cr}}{\nu}$. Aby trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu vycházející z bodu $(u(0), u'(0)) = (a, p_{cr})$ procházela bodem $(u(\tau), u'(\tau)) = (a, p_u)$ na konci první smyčky, musí být $\tau = \frac{2\pi}{\nu}$:

$$u(\tau) = u\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) = e^{\mu\frac{2\pi}{\nu}} \left(0 + \frac{p_{cr}}{\nu} \sin(2\pi)\right) + a = a.$$

Potom pro $p_u = u'(\tau)$ dostaneme

$$u'(\tau) = u'\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) = e^{\mu\frac{2\pi}{\nu}} \left(p_{cr} \cos(2\pi) + \mu\frac{p_{cr}}{\nu} \sin(2\pi)\right) = e^{\frac{2\pi\mu}{\nu}} p_{cr}.$$

Pro hodnotu p_u tedy platí (2.9). Jelikož pro libovolné $\mu \in (0, 1)$ je $p_{cr} > 0$ určeno jednoznačně, existuje také právě jedno $p_u > 0$. \square

Lemma 2.5. *Funkce $p_u(\mu)$ je na intervalu $(0, 1)$ ostře rostoucí a spojitá a platí*
 $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} p_u = 2a$, $\lim_{\mu \rightarrow 1^-} p_u = 2ae$.

Důkaz. Pro p_{cr} jsme obdrželi vztah (2.6), ve kterém $\omega_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\nu}{\mu}\right) + 2\pi$ a $\nu = \sqrt{1 - \mu^2}$. Pro $p_u(\mu)$ tedy z (2.6) a (2.9) dostaneme

$$p_u(\mu) = p_{cr} e^{\frac{2\pi\mu}{\nu}} = -2ae^{-\frac{\mu}{\nu}\omega_1} \frac{\nu}{\sin(\omega_1)} e^{\frac{2\pi\mu}{\nu}} = -2ae^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \omega_1)} \frac{\nu}{\sin(\omega_1)}.$$

Protože $\omega_1 \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, pro $\sin(\omega_1)$ platí

$$\sin(\omega_1) = -\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2(\omega_1)}{1 + \operatorname{tg}^2(\omega_1)}} = -\sqrt{\frac{\frac{\nu^2}{\mu^2}}{1 + \frac{\nu^2}{\mu^2}}} = -\sqrt{\frac{\nu^2}{\mu^2 + \nu^2}} = -\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + 1 - \mu^2}} = -\nu,$$

tedy

$$p_u(\mu) = 2ae^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \omega_1)},$$

což je pro $\mu \in (0, 1)$ spojitá funkce (viz lemma 2.3).

Dále platí

$$\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \omega_1) = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu}\right)$$

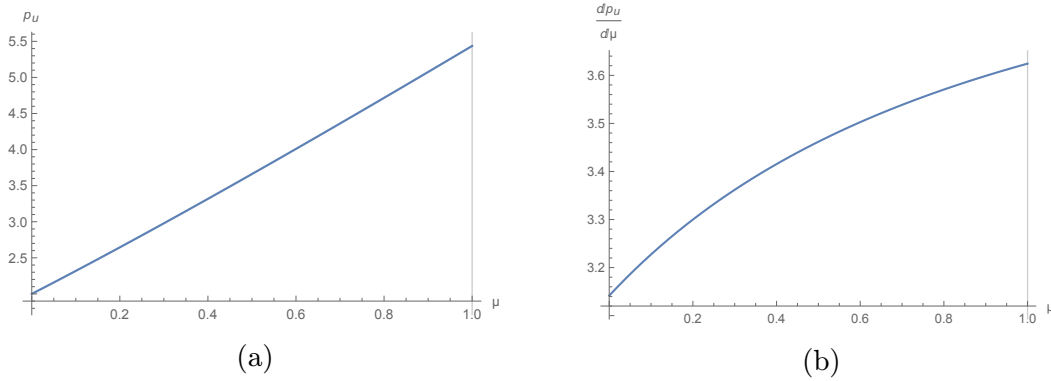
a pro $p'_u(\mu)$ bychom dostali

$$p'_u(\mu) = \frac{2ae^{\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)}}{(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right) - \mu\sqrt{1-\mu^2} \right).$$

Označíme

$$y_1(\mu) := \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right) - \mu\sqrt{1-\mu^2}.$$

Pro derivaci funkce $y_1(\mu)$ na intervalu $(0, 1)$ platí $y'_1(\mu) = -2\sqrt{1-\mu^2} < 0$, tzn. $y_1(\mu)$ je na intervalu $(0, 1)$ ostře klesající. Jelikož je $y_1(\mu)$ na intervalu $(0, 1)$ spojitá, ostře klesající a $\lim_{\mu \rightarrow 1} y_1 = 0$, platí $y_1(\mu) > 0$. A protože $a > 0$, pro $p'_u(\mu)$ na intervalu $(0, 1)$ dostaneme $p'_u(\mu) > 0$, tj. $p_u(\mu)$ je na intervalu $(0, 1)$ ostře rostoucí funkce (viz obr. 2.4).



Obrázek 2.4: (a) Graf $p_u(\mu)$ pro $a = 1$, (b) graf $p'_u(\mu)$ pro $a = 1$.

Pro $\mu \rightarrow 0+$ dostaneme

$$\lim_{\mu \rightarrow 0+} p_u = \lim_{\mu \rightarrow 0+} 2ae^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \omega_1)} = 2a,$$

neboť pro $\mu \rightarrow 0+$ platí $\nu \rightarrow 1$ a $\omega_1 \rightarrow \frac{3}{2}\pi$.

Pro $\mu \rightarrow 1-$ dostaneme

$$\lim_{\mu \rightarrow 1-} p_u = \lim_{\mu \rightarrow 1-} 2ae^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \omega_1)} = \lim_{\mu \rightarrow 1-} 2ae^{\frac{\mu}{\nu} \operatorname{arctg}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)} = 2ae.$$

□

Označíme p_{max} hodnotu p , pro kterou platí, že trajektorie řešení úlohy (2.5) začínající v bodě (a, p_{max}) tvoří ve fázovém portréту uzavřený cyklus s jednou smyčkou (viz obr. 2.2b).

Věta 2.6. Pro libovolné $\mu \in (0, 1)$ existuje právě jedno $p_{max} > 0$ dané vztahem

$$p_{max} = -2ae^{-\frac{\mu}{\nu}\omega_2} \frac{\nu}{\sin(\omega_2)}, \quad (2.10)$$

kde $\omega_2 \in (\pi, 2\pi)$ splňuje

$$-1 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_2} \left(\cos(\omega_2) + \frac{\mu}{\nu} \sin(\omega_2) \right). \quad (2.11)$$

Důkaz. Kvůli zápornému tlumení mohou uzavřený cyklus s jednou smyčkou tvořit pouze trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu začínající v bodě (a, p) , $p > p_{cr}$, které prochází nějakým bodem $(-a, -q)$. Řešení úlohy (2.5) je v tomto případě dáno dvěma předpisy (2.3), v nichž nejprve $N(u) = a$, poté $N(u) = -a$ (dochází k jednomu přepnutí $N(u)$). Při odvození vztahů pro p_{max} ovšem můžeme využít symetrie systému. Pro řešení úlohy (2.5) musí nejprve platit

$$u(0) = a, \quad u'(0) = p, \quad u(\tau_2) = -a, \quad u'(\tau_2) = -q, \quad N(u) = a,$$

kde $\tau_2 \in \left(\frac{\pi}{\nu}, \frac{2\pi}{\nu}\right)$.

Dosazením předpisů (2.3), (2.4) do vztahů $u(0) = a$, $u'(0) = p$ získáme

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 &= \frac{p}{\nu} \end{aligned}$$

a dosazením do vztahů $u(\tau_2) = -a$, $u'(\tau_2) = -q$ dostaneme

$$\begin{aligned} -a &= e^{\mu\tau_2} \left(C_1 \cos(\nu\tau_2) + C_2 \sin(\nu\tau_2) \right) + a, \\ -q &= e^{\mu\tau_2} \left((\mu C_1 + \nu C_2) \cos(\nu\tau_2) + (\mu C_2 - \nu C_1) \sin(\nu\tau_2) \right). \end{aligned}$$

Pokud označíme $\omega_2 := \nu\tau_2$, tj. $\omega_2 \in (\pi, 2\pi)$, dostaneme

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_2} \frac{p}{\nu} \sin(\omega_2) + 2a, \quad (2.12)$$

$$-q = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_2} \left(p \cos(\omega_2) + \frac{\mu p}{\nu} \sin(\omega_2) \right). \quad (2.13)$$

Díky symetrii systému určíme p_{max} z rovnic (2.12), (2.13) položením $p_{max} = p = q$. Protože $p_{max} \neq 0$, dostáváme

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_2} \frac{p_{max}}{\nu} \sin(\omega_2) + 2a \quad (2.14)$$

a vztah (2.11). Úpravou předpisu (2.11) získáme

$$-e^{-\frac{\mu}{\nu}\omega_2} = \cos(\omega_2) + \frac{\mu}{\nu} \sin(\omega_2),$$

tj.

$$-e^{-\frac{\mu}{\nu}\omega_2} = D \sin(\omega_2 + \delta),$$

kde

$$D = \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\nu^2}}, \quad \operatorname{tg}(\delta) = \frac{\nu}{\mu}.$$

Platí

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{\nu}{\mu} = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} > 0 \Rightarrow \delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

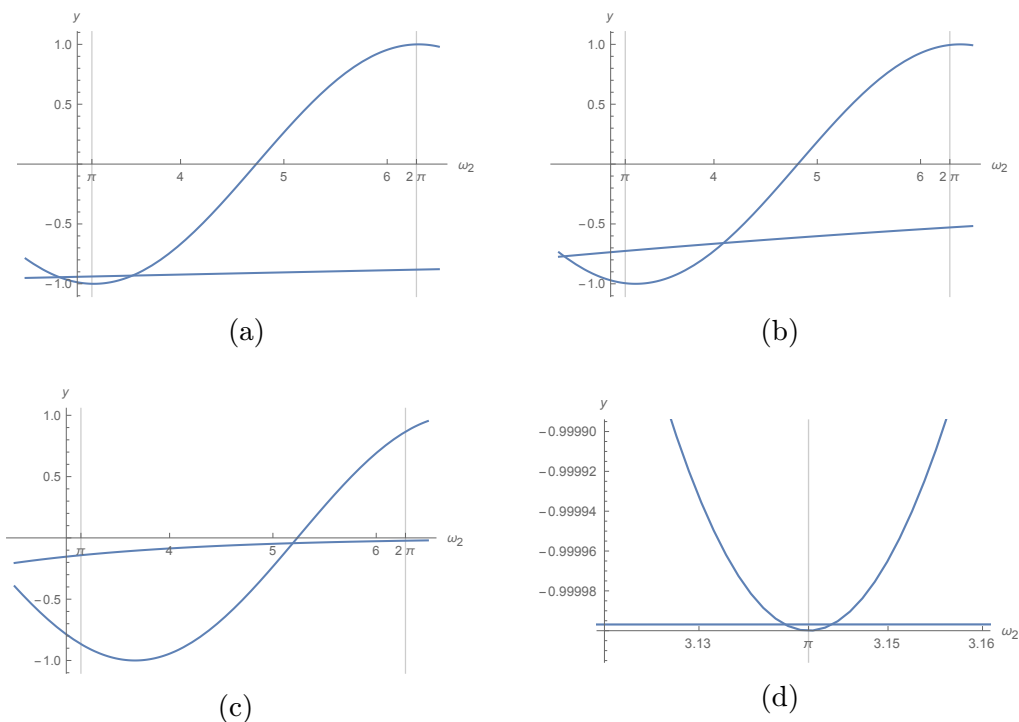
$$D = \frac{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} > 1 \Rightarrow D \in (1, +\infty).$$

Označíme

$$y_2(\omega_2) := -\frac{1}{D}e^{-\frac{\mu}{\nu}\omega_2},$$

$$y_3(\omega_2) := \sin(\omega_2 + \delta).$$

Funkce y_2, y_3 spojitě závisí na ω_2 i na parametru μ a funkce y_2 je symetrická podle osy $\omega_2 = \frac{3}{2}\pi - \delta$. Vzájemná poloha křivek $y_2(\omega_2)$ a $y_3(\omega_2)$ v závislosti na parametru μ je zobrazena na obr. 2.5.



Obrázek 2.5: Grafy $y_2(\omega_2), y_3(\omega_2)$ (a) pro $\mu = 0.02$, (b) pro $\mu = 0.1$, (c) pro $\mu = 0.5$, (d) přibližné grafy $y_2(\omega_2), y_3(\omega_2)$ pro $\mu = 0.000001$.

Pro $\mu \rightarrow 1^-$ je $\lim_{\mu \rightarrow 1^-} \delta = 0$ a funkce $y_3(\omega_2)$ se blíží k funkci $y_3(\omega_2) = \sin(\omega_2)$, zatímco $\lim_{\mu \rightarrow 1^-} -\frac{\mu}{\nu}\omega_2 = -\infty$ a $\lim_{\mu \rightarrow 1^-} D = +\infty$, funkce $y_2(\omega_2)$ se na intervalu $(\pi, 2\pi)$ blíží ke konstantní funkci $y_2(\omega_2) = 0$.

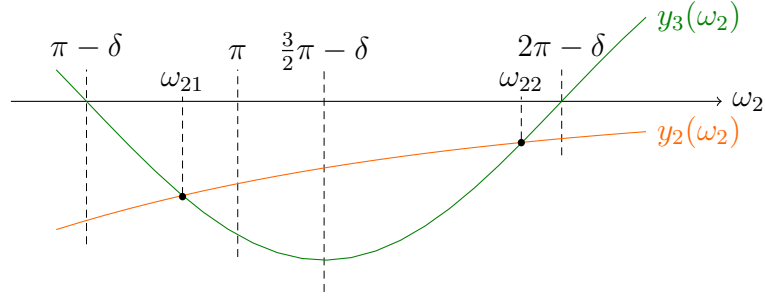
Pro $\mu \rightarrow 0^+$ je $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \delta = \frac{\pi}{2}$ a funkce $y_3(\omega_2)$ se blíží k funkci $y_3(\omega_2) = \sin(\omega_2 + \frac{\pi}{2})$, která je symetrická podle osy $\omega_2 = \pi$, $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} -\frac{\mu}{\nu}\omega_2 = 0$ a $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} D = 1$, funkce $y_2(\omega_2)$ se blíží ke konstantní funkci $y_2(\omega_2) = -1$.

Pro libovolné $\mu \in (0, 1)$ existují na intervalu $(\pi - \delta, 2\pi - \delta)$ dva průsečíky

$$\omega_{21} \in \left(\pi - \delta, \frac{3}{2}\pi - \delta \right) =: I_1,$$

$$\omega_{22} \in \left(\frac{3}{2}\pi - \delta, 2\pi - \delta \right) =: I_2,$$

křivek $y_2(\omega_2)$, $y_3(\omega_2)$ (viz obr. 2.6).



Obrázek 2.6: Křivky $y_2(\omega_2)$, $y_3(\omega_2)$ na intervalu $(\pi - \delta, 2\pi - \delta)$.

Ukážeme, že pro všechna $\mu \in (0, 1)$ platí $\omega_{21} < \pi$.

Pro libovolné μ je funkce $y_2(\omega_2)$ spojitá a ostře rostoucí na I_1 , funkce $y_3(\omega_2)$ je spojitá a ostře klesající na I_1 a platí

$$y_2(\pi - \delta) < y_3(\pi - \delta) = 0,$$

$$y_2\left(\frac{3}{2}\pi - \delta\right) > y_3\left(\frac{3}{2}\pi - \delta\right) = -1.$$

Pro $\omega_2 = \pi$ dostaneme

$$y_2(\pi) = -\frac{1}{D}e^{-\frac{\mu}{\nu}\pi} = -\sqrt{\frac{\nu^2}{\mu^2 + \nu^2}}e^{-\frac{\mu}{\nu}\pi},$$

$$y_3(\pi) = \sin(\pi + \delta) = -\sin(\delta) = -\sqrt{\frac{\text{tg}^2(\delta)}{1 + \text{tg}^2(\delta)}} = -\sqrt{\frac{\frac{\nu^2}{\mu^2}}{1 + \frac{\nu^2}{\mu^2}}} = -\sqrt{\frac{\nu^2}{\mu^2 + \nu^2}}.$$

Protože pro všechna $\mu \in (0, 1)$ je $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} > 0$, platí $-e^{-\frac{\mu}{\nu}\pi} > -1$, tedy $y_2(\pi) > y_3(\pi)$ a tudíž $\omega_{21} < \pi$.

Na intervalu $(\pi, 2\pi)$ existuje pro každé $\mu \in (0, 1)$ jediný průsečík (ω_{22}) křivek $y_2(\omega_2)$, $y_3(\omega_2)$, tedy pro rovnici (2.11) existuje právě jedno řešení $\omega_2 \in (\pi, 2\pi)$.

Úpravou vztahu (2.14) dostaneme (2.10), kde $a > 0$ a pro $\omega_2 \in (\pi, 2\pi)$ je $\sin(\omega_2) < 0$, tedy $p_{max} > 0$. \square

Poznámka. Hodnotu ω_2 hledáme pouze na intervalu $(\pi, 2\pi)$ (tedy $\tau_2 \in (\frac{\pi}{\nu}, \frac{2\pi}{\nu})$). Trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portréту musí být tvořena jednou smyčkou, tj. $\omega_2 < 2\pi$. Hodnoty $\omega_2 \in (0, \pi]$ nemá smysl uvažovat, neboť v tomto

případě

$$u(\tau_2) = e^{\mu \frac{\pi}{\nu}} \left(\frac{p_{cr}}{\nu} \sin(\omega_2) \right) + a \geq a,$$

tedy podmínka $u(\tau_2) = -a$ by nemohla být splněna.

Lemma 2.7. *Funkce $\omega_2(\mu)$ je na intervalu $(0, 1)$ ostře rostoucí a spojitá a platí*
 $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \omega_2 = \pi$, $\lim_{\mu \rightarrow 1^-} \omega_2 = 2\pi$.

Důkaz. Úpravou vztahu (2.11) jsme získali

$$-\frac{1}{D} e^{-\frac{\mu}{\nu} \omega_2} = \sin(\omega_2 + \delta),$$

kde $D = \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\nu^2}}$, $\text{tg}(\delta) = \frac{\nu}{\mu}$, $\omega_2 \in (\pi, 2\pi)$. Pro rostoucí $\mu \in (0, 1)$ se průsečík křivek $y_2(\omega_2) = -\frac{1}{D} e^{-\frac{\mu}{\nu} \omega_2}$ a $y_3(\omega_2) = \sin(\omega_2 + \delta)$ spojitě posouvá doprava nahoru, protože $y_2(\omega_2)$ se blíží ke konstantní funkci $y_2(\omega_2) = 0$ a $y_3(\omega_2)$ se posouvá doprava, tedy $\omega_2(\mu)$ je ostře rostoucí, spojitá funkce (viz obr. 2.5).

Pro $\mu \rightarrow 0^+$ dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} D &= \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\nu^2}} = 1, & \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \delta &= \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{arctg} \left(\frac{\nu}{\mu} \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \omega_2 &= \pi, \end{aligned}$$

a pro $\mu \rightarrow 1^-$ dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 1^-} D &= \lim_{\mu \rightarrow 1^-} \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\nu^2}} = +\infty, & \lim_{\mu \rightarrow 1^-} \delta &= \lim_{\mu \rightarrow 1^-} \text{arctg} \left(\frac{\nu}{\mu} \right) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \lim_{\mu \rightarrow 1^-} \omega_2 &= 2\pi. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.8. *Funkce $p_{max}(\mu)$ je na intervalu $(0, 1)$ spojitá, $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} p_{max} = +\infty$ a*
 $\lim_{\mu \rightarrow 1^-} p_{max} = 0$.

Důkaz. Pro p_{max} jsme obdrželi vztah (2.10), kde $\omega_2 \in (\pi, 2\pi)$ a $\omega_2(\mu)$ je spojitá funkce, tedy i $p_{max}(\mu)$ je spojitá funkce.

Pro $\mu \rightarrow 0^+$ dostaneme

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} p_{max} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} -2ae^{-\frac{\mu}{\nu} \omega_2} \frac{\nu}{\sin(\omega_2)} = +\infty,$$

neboť pro $\mu \rightarrow 0^+$ platí $\nu \rightarrow 1$ a $\omega_2 \rightarrow \pi^+$.

Pro $\mu \rightarrow 1^-$ dostaneme

$$\lim_{\mu \rightarrow 1^-} p_{max} = \lim_{\mu \rightarrow 1^-} -2ae^{-\frac{\mu}{\nu} \omega_2} \frac{\nu}{\sin(\omega_2)} = 0.$$

□

Lemma 2.9. *Funkce $p_{max}(\mu)$ je ostře klesající na intervalu $(0, \mu_1)$, kde μ_1 je hodnota $\mu \in (0, 1)$, pro kterou je $\omega_2(\mu_1) = \frac{3}{2}\pi$.*

Důkaz. Pro $p_{max}(\mu)$ platí

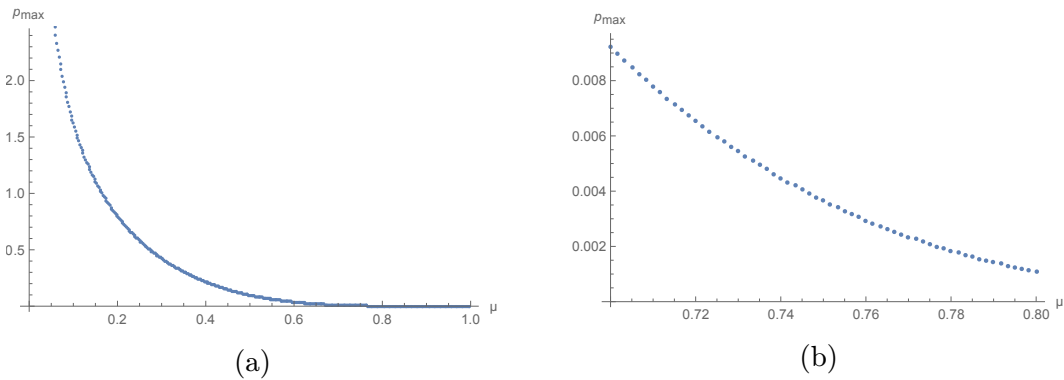
$$p_{max} = -2ae^{-\frac{\mu}{\nu}\omega_2} \frac{\nu}{\sin(\omega_2)},$$

kde $\omega_2(\mu)$ je ostře rostoucí spojitá funkce, ν je ostře klesající, tedy $e^{-\frac{\mu}{\nu}\omega_2}$ je ostře klesající a $-\frac{1}{\sin(\omega_2)}$ je ostře klesající na intervalu $\omega_2 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Pro $\omega_2 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, což odpovídá $\mu \in (0, \mu_1)$, je funkce $p_{max}(\mu)$ ostře klesající. \square

V tuto chvíli nejsme schopni rozhodnout o monotonii $p_{max}(\mu)$ na intervalu $(\mu_1, 1)$, proto vyslovíme následující hypotézu.

Hypotéza 2.10. *Funkce $p_{max}(\mu)$ je ostře klesající na intervalu $(0, 1)$.*

Pro některá $\mu \in (0, 1)$ jsme provedli numerický výpočet ω_2 a p_{max} a hodnoty vynesli do grafu funkce $p_{max}(\mu)$ (viz obr. 2.7).



Obrázek 2.7: (a), (b) Graf $p_{max}(\mu)$ pro $a = 1$.

Věta 2.11. *Existuje mezní hodnota μ_{max} taková, že pro libovolné $\mu < \mu_{max}$ zůstávají trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu začínající v bodě (a, p) , $p < p_{max}$ omezené pro $T \rightarrow +\infty$.*

Důkaz. Pro libovolné $\mu \in (0, 1)$ existuje vždy jednoznačně určené p_{cr} , p_u a p_{max} . Z lemmat 2.5, 2.8 máme, že jsou funkce $p_u(\mu)$ a $p_{max}(\mu)$ na intervalu $(0, 1)$ spojitě.

Jelikož zároveň platí

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} p_u &= 2a < \lim_{\mu \rightarrow 0^+} p_{max} = +\infty, \\ \lim_{\mu \rightarrow 1^-} p_u &= 2ae > \lim_{\mu \rightarrow 1^-} p_{max} = 0, \end{aligned}$$

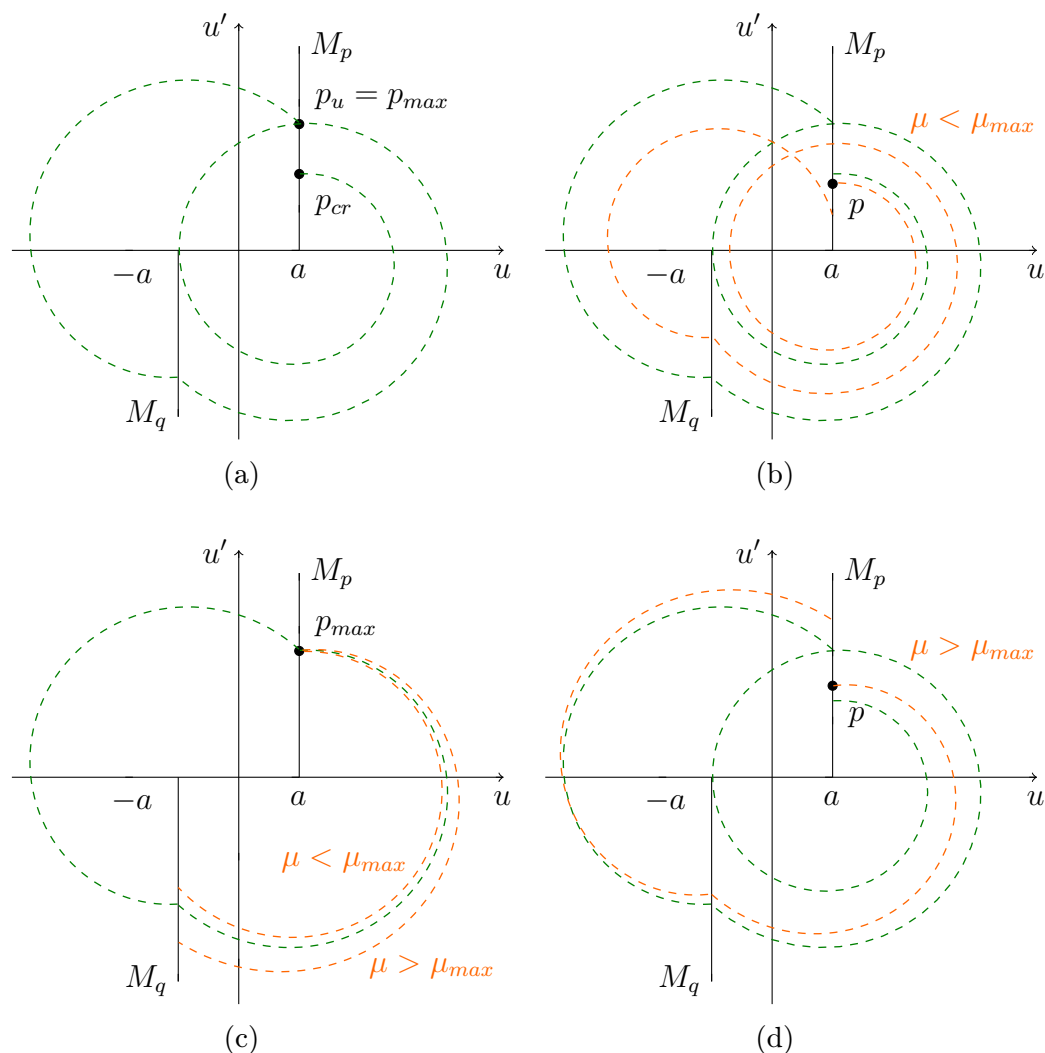
na intervalu $(0, 1)$ existuje hodnota μ_{max} , pro kterou $p_u = p_{max}$.

Pokud ve vztazích (2.6), (2.7), (2.9), (2.10), (2.11) položíme $p_u = p_{max}$, získáme soustavu pěti rovnic o pěti neznámých $\mu := \mu_{max}$, p_{max} , p_{cr} , ω_1 , ω_2 .

Hodnota p_{max} je potom nejvyšší možná hodnota dosažitelná z bodu (a, p_{cr}) bez přepnutí hysterezní smyčky a zároveň hodnota pro jeden uzavřený cyklus (viz obr. 2.8a). Díky symetrii systému se proto pro libovolné $\mu < \mu_{max}$ nelze z bodu (a, p) , $p \leq p_{max}$ dostat do bodu $(-a, -p)$, $-p < -p_{max}$ a tedy ani do bodu (a, p) , $p > p_{max}$ (viz obr. 2.8b).

Pro libovolné $\mu < \mu_{max}$ proto zůstávají trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu začínající v bodě (a, p) , $p \leq p_{max}$ omezené pro $T \rightarrow +\infty$. \square

Důsledek 2.12. *Existuje mezní hodnota μ_{max} taková, že pro libovolné $p, p > 0$, a $\mu > \mu_{max}$ je řešení počáteční úlohy (2.5) pro $T \rightarrow \infty$ je neomezené (ilustrace neomezeného chování viz obr. 2.8c, 2.8d).*



Obrázek 2.8: Trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu začínající (a) v bodě (a, p_{max}) pro $\mu = \mu_{max}$, (b) v bodě (a, p) , $p < p_{max}$ pro $\mu < \mu_{max}$, (c) v bodě (a, p_{max}) pro $\mu < \mu_{max}$ a $\mu > \mu_{max}$, (d) v bodě (a, p) , $p < p_{max}$ pro $\mu > \mu_{max}$.

Věta 2.13. *Existuje právě jedna mezní hodnota $\mu_{max} \in (0, \mu_1)$, kde μ_1 je hodnota $\mu \in (0, 1)$, která odpovídá $\omega_2 = \frac{3}{2}\pi$.*

Důkaz. Platí

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_1} p_u > 2a,$$

neboť pro všechny $\mu \in (0, 1)$ je $p_u(\mu) > 2a$ (viz lemma 2.5), a

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_1} p_{max} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_1} 2a \left(e^{-\frac{\mu}{\nu} \omega_2 \nu} \right) < 2a.$$

Protože jsou funkce $p_u(\mu)$ a $p_{max}(\mu)$ na intervalu $(0, \mu_1)$ spojité a ostře monotónní a zároveň platí

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0+} p_u &= 2a < \lim_{\mu \rightarrow 0+} p_{max} = +\infty, \\ \lim_{\mu \rightarrow \mu_1} p_u &> 2a > \lim_{\mu \rightarrow \mu_1} p_{max}, \end{aligned}$$

existuje právě jedna mezní hodnota $\mu_{max} \in (0, \mu_1)$. □

Poznámka. Pokud platí hypotéza 2.10, potom jsou funkce $p_u(\mu)$ a $p_{max}(\mu)$ na intervalu $(0, 1)$ navíc ostře monotónní a existuje právě jedna mezní hodnota μ_{max} na celém intervalu $(0, 1)$.

Věta 2.14. *Pro pevně zvolené $\mu < \mu_{max}$ lze nalézt hodnotu p , pro kterou trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portréту začínající v bodě (a, p) tvoří uzavřený cyklus s počtem smyček $m + 1$.*

Důkaz. Takovouto hodnotu p můžeme najít z rovnic (2.12), (2.13) a z rovnice

$$p = q e^{\frac{2\pi m \mu}{\nu}}, \tag{2.15}$$

kde $m \in \mathbb{N}_0$. V odvození rovnosti (2.15) opět využíváme symetrie systému. Pokud pro q platí $u(0) = a$, $u'(0) = q$, z předpisů (2.3), (2.4) a těchto vztahů pro q dostaneme $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{q}{\nu}$. Jestliže $\tau = \frac{2\pi m}{\nu}$, $m \in \mathbb{N}_0$, potom je splněno $u(\tau) = a$:

$$u(\tau) = u\left(\frac{2\pi m}{\nu}\right) = e^{\mu \frac{2\pi m}{\nu}} \left(0 + \frac{q}{\nu} \sin(2\pi m)\right) + a = a$$

a pro $u'(\tau) = p$ dostaneme

$$u'(\tau) = u'\left(\frac{2\pi m}{\nu}\right) = e^{\mu \frac{2\pi m}{\nu}} \left(q \cos(2\pi m) + \mu \frac{q}{\nu} \sin(2\pi m)\right) = e^{\frac{2\pi m \mu}{\nu}} q.$$

□

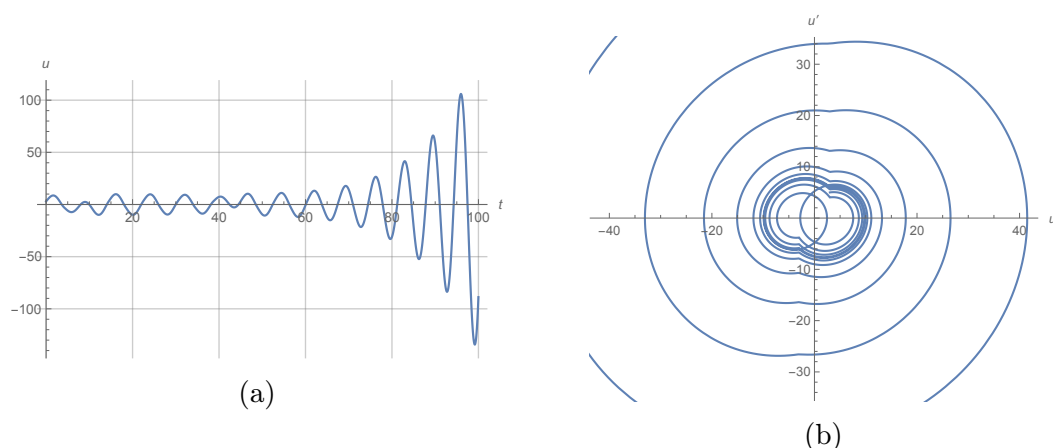
Poznámka. Pro $m = 0$ získáme uzavřený cyklus s jednou smyčkou, pro $\mu = \mu_{max}$ a $m = 0$ tedy bude $p = p_{max}$.

2.1.1 Numerické experimenty

Pro počáteční úlohu (2.5) pro $a = 3$ jsme v softwaru Matlab numericky (použitím standardního příkazu „fsolve“) vyřešili soustavu rovnic (2.6), (2.7), (2.9), (2.10), (2.11), v níž $p_u = p_{max}$. Dospěli jsme k výsledkům

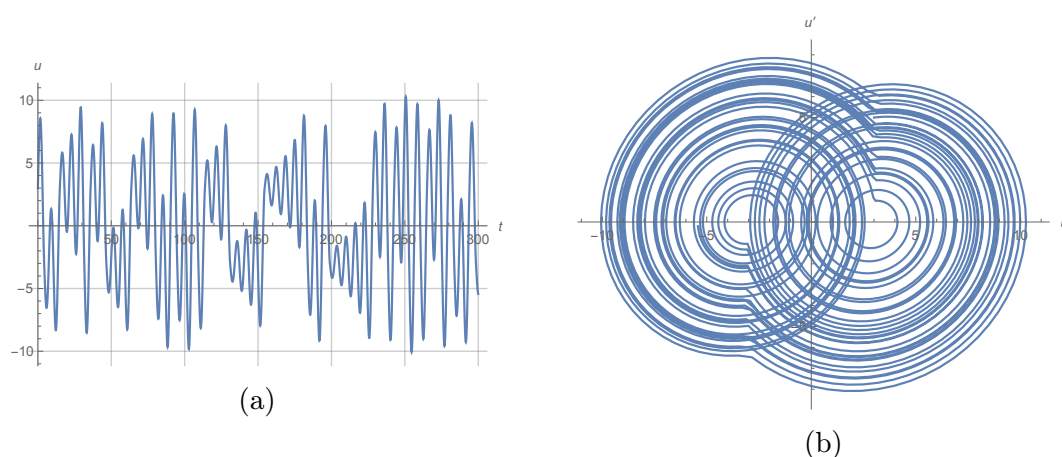
$$\mu_{max} = 0.0674, \quad p_{cr} = 4.3453, \quad p_{max} = 6.6409, \quad \omega_1 = 4.7798, \quad \omega_2 = 3.9065.$$

Pro $\mu = 0.075 > \mu_{max}$, $p = 5 < p_{max}$ jsou pro $T \rightarrow +\infty$ trajektorie řešení úlohy (2.5) ve fázovém portrétu i řešení úlohy (2.5) neomezené (viz obr. 2.9).



Obrázek 2.9: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (2.5) pro $a = 3$, $\mu = 0.075$, $p = 5$, (b) fázový portrét.

Zatímco pro $\mu = 0.065 < \mu_{max}$, $p = 5 < p_{max}$ zůstávají trajektorie omezené pro $T \rightarrow +\infty$ (viz obr. 2.10).



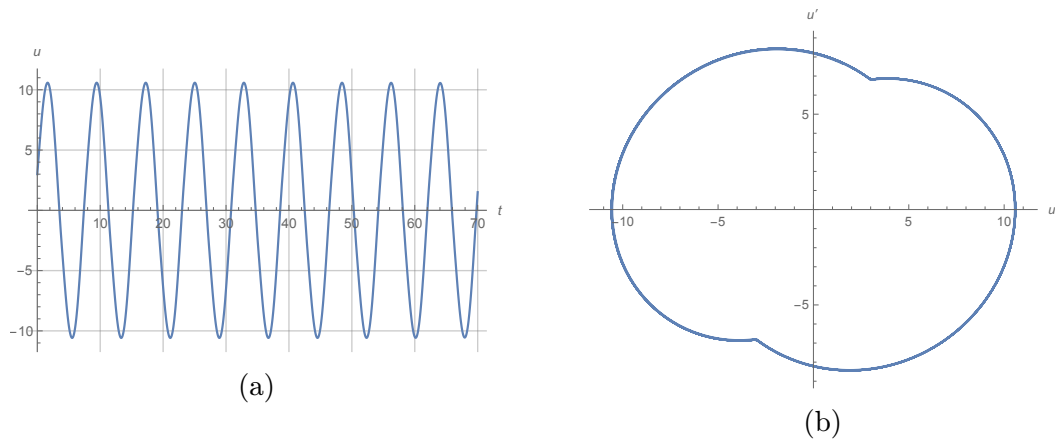
Obrázek 2.10: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (2.5) pro $a = 3$, $\mu = 0.065$, $p = 5$, (b) fázový portrét.

Pro $\mu = 0.065$ jsme našli hodnoty p pro uzavřené cykly s počtem smyček $m + 1$ uvedené v následující tabulce (viz tab. 2.1).

m	0	1	2	3	4
p	6.8169	5.0692	4.6527	4.5024	4.441353458694686

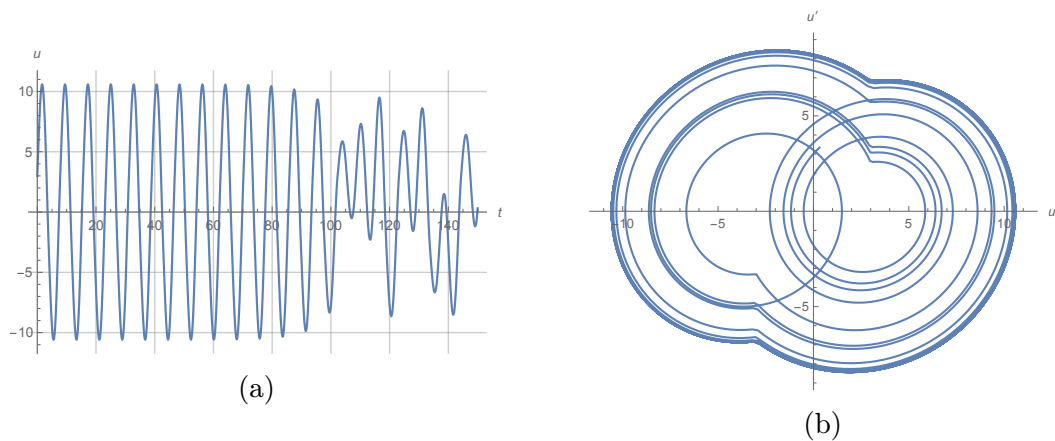
Tabulka 2.1: Hodnoty p pro uzavřené cykly pro $\mu = 0.065$.

Volbou $\mu = 0.065$, $p = 6.8169$ dostaneme uzavřený cyklus s jednou smyčkou (viz obr. 2.11).



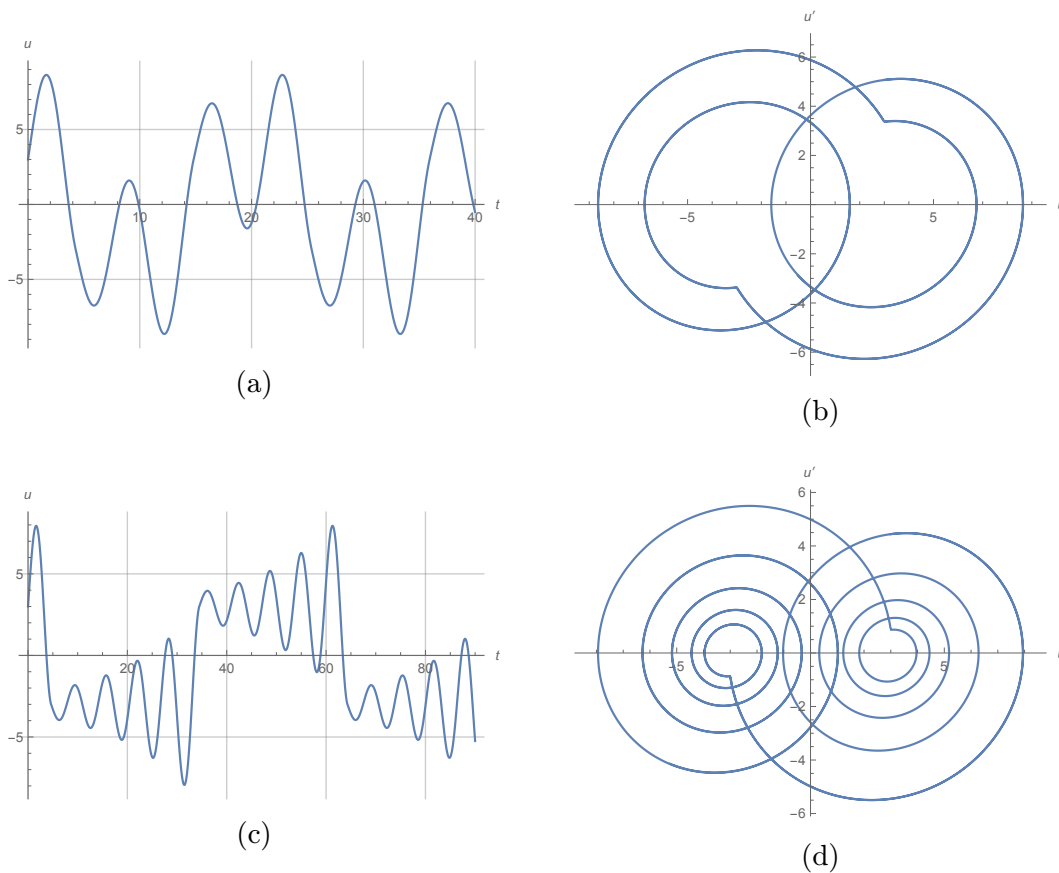
Obrázek 2.11: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (2.5) pro $a = 3$, $\mu = 0.065$, $p = 6.8169$, (b) fázový portrét.

Kvůli zápornému tlumení je systém silně nestabilní a i malá odchylka od přesné hodnoty výrazně ovlivní průběh řešení (viz obr. 2.12).



Obrázek 2.12: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (2.5) pro $a = 3$, $\mu = 0.065$, $p = 6.8169$ a $t \in [0, 150]$, (b) fázový portrét.

Jestliže zvolíme $\mu = 0.065$, $p = 5.0692$, získáme uzavřený cyklus se dvěma smyčkami, pro $\mu = 0.065$, $p = 4.441353458694686$ (opět z důvodu silné nestability systému je nutné zadat přesnější hodnotu p), dostaneme uzavřený cyklus s pěti smyčkami (viz obr. 2.13).



Obrázek 2.13: (a), (b) Uzavřený cyklus se dvěma smyčkami, (c), (d) uzavřený cyklus s pěti smyčkami.

2.2 Úloha s nesymetrickou hysterezní smyčkou

Nyní uvažujeme úlohu

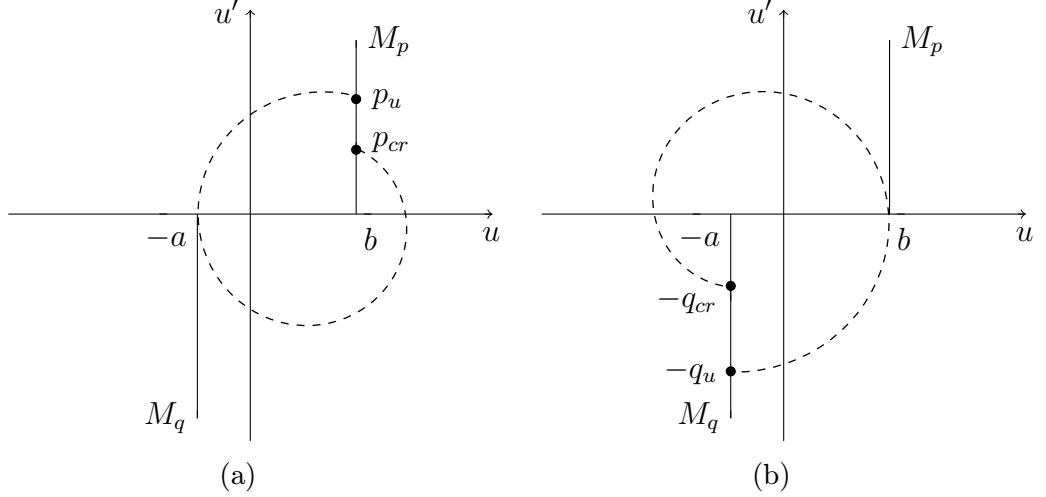
$$\begin{cases} u'' - 2\mu u' + u = N(u), & N(u) = \begin{cases} d, & u > -a, \\ -c, & u < b, \end{cases} \\ u(0) = b, \\ u'(0) = p, \\ N(u(0)) = d \end{cases} \quad (2.16)$$

a použijeme podobné úvahy jako v předchozím případě symetrické hysterezní smyčky. Nebudeme ovšem zkoumat existenci (ani jednoznačnost) řešení rovnic.

Ve fázovém portrétu definujeme polopřímky

$$\begin{aligned} M_p &= \{(u, u') = (b, p), u \in \mathbb{R}\}, \\ M_q &= \{(u, u') = (-a, -q), u \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

kde $p > 0$, $q > 0$ (viz obr. 2.14).



Obrázek 2.14: (a), (b) Polopřímky M_q , M_p a některé na nich zvolené body.

Označíme p_{cr} hodnotu p , pro kterou platí, že trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu vycházející z bodu (b, p_{cr}) prochází bodem $(-a, 0)$ a je tvořena pouze jednou smyčkou (viz obr. 2.14a), tedy pro řešení úlohy (2.16) platí

$$u(0) = b, \quad u'(0) = p_{cr}, \quad u(\tau_1) = -a, \quad u'(\tau_1) = 0, \quad N(u) = d,$$

kde $\tau_1 \in (0, \frac{2\pi}{\nu})$. Z předpisů (2.3), (2.4) a z těchto vztahů dostaneme pro p_{cr}

$$\begin{aligned} C_1 &= b - d, \\ C_2 &= \frac{p_{cr} - \mu(b - d)}{\nu}, \\ 0 &= e^{\mu\tau_1} \left((b - d) \cos(\nu\tau_1) + \frac{p_{cr} - \mu(b - d)}{\nu} \sin(\nu\tau_1) \right) + d + a, \\ 0 &= e^{\mu\tau_1} \left(\left(\mu(b - d)\nu + p_{cr} - \mu(b - d) \right) \cos(\nu\tau_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu p_{cr} - \mu^2 b + \mu^2 d - \nu^2 b + \nu^2 d}{\nu} \sin(\nu\tau_1) \right). \end{aligned}$$

Označíme $\omega_1 := \nu\tau_1$, a protože $e^{\mu\tau_1} \neq 0$, dostáváme

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_1} \left((b - d) \cos(\omega_1) + \frac{p_{cr} - \mu(b - d)}{\nu} \sin(\omega_1) \right) + d + a, \quad (2.17)$$

$$0 = p_{cr} \cos(\omega_1) + \frac{(a - b)(\mu^2 + \nu^2) + \mu p_{cr}}{\nu} \sin(\omega_1), \quad (2.18)$$

kde $\omega_1 \in (0, 2\pi)$.

Dále označíme p_u hodnotu p , pro kterou platí, že trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu vycházející z bodu (b, p_{cr}) prochází na konci první smyčky bodem (b, p_u) (viz obr. 2.14a), tedy pro řešení úlohy (2.16) platí

$$u(0) = b, \quad u'(0) = p_{cr}, \quad u(\tau_2) = b, \quad u'(\tau_2) = p_u, \quad N(u) = d,$$

kde $\tau_2 \in (\frac{\pi}{\nu}, \frac{3\pi}{\nu})$.

Pro p_u obdržíme vztahy

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_2} \left((b-d) \cos(\omega_2) + \frac{p_{cr} - \mu(b-d)}{\nu} \sin(\omega_2) \right) + d - b, \quad (2.19)$$

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_2} \left(p_{cr} \cos(\omega_2) + \frac{(d-b)(\mu^2 + \nu^2) + \mu p_{cr}}{\nu} \sin(\omega_2) \right) - p_u, \quad (2.20)$$

kde $\omega_2 := \nu\tau_2$ a $\omega_2 \in (\pi, 3\pi)$.

Označíme p_{max} hodnotu p , pro kterou trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu vycházející z bodu (b, p_{max}) , procházející bodem $(-a, -q_{max})$, tvoří uzavřený cyklus s jednou smyčkou. Nyní již symetrie systému nelze využít, řešení úlohy (2.16) je dáno dvěma předpisy (2.3), v nichž nejprve $N(u) = d$, poté $N(u) = -c$ (dochází k jednomu přepnutí $N(u)$). Pro řešení úlohy (2.16) tedy musí např. platit

$$\begin{aligned} u(0) = b, \quad u'(0) = p_{max}, \quad u(\tau_3) = -a, \quad u'(\tau_3) = -q_{max}, \quad N(u) = d, \\ u(0) = -a, \quad u'(0) = -q_{max}, \quad u(\tau_4) = b, \quad u'(\tau_4) = p_{max}, \quad N(u) = -c, \end{aligned}$$

kde $\tau_3 \in (0, \frac{2\pi}{\nu})$ a $\tau_4 \in (0, \frac{2\pi}{\nu})$. Dostaneme

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_3} \left((b-d) \cos(\omega_3) + \frac{p_{max} - \mu(b-d)}{\nu} \sin(\omega_3) \right) + d + a, \quad (2.21)$$

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_3} \left(p_{max} \cos(\omega_3) + \frac{(d-b)(\mu^2 + \nu^2) + \mu p_{max}}{\nu} \sin(\omega_3) \right) + q_{max}, \quad (2.22)$$

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_4} \left((c-a) \cos(\omega_4) + \frac{-q_{max} - \mu(c-a)}{\nu} \sin(\omega_4) \right) - c - b, \quad (2.23)$$

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_4} \left(-q_{max} \cos(\omega_4) + \frac{(a-c)(\mu^2 + \nu^2) - \mu q_{max}}{\nu} \sin(\omega_4) \right) - p_{max}, \quad (2.24)$$

kde $\omega_3 := \nu\tau_3$, $\omega_4 := \nu\tau_4$ a $\omega_3 \in (0, 2\pi)$, $\omega_4 \in (0, 2\pi)$.

Ze soustavy rovnic (2.17) – (2.24) položením $p_u = p_{max}$ můžeme získat mezní hodnotu $\mu := \mu_{1max}$ a hodnoty p_{cr} , p_{1max} , $-q_{1max}$, ω_1 , ω_2 , $\omega_3 := \omega_{13}$, $\omega_4 := \omega_{14}$.

Nyní vyjdeme z bodu na přímce M_q , místo M_p . Označíme $-q_{cr}$ hodnotu q , pro kterou trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu vycházející z bodu $(-a, -q_{cr})$ prochází bodem $(b, 0)$ a je tvořená pouze jednou smyčkou (viz obr. 2.14b), tedy

$$u(0) = -a, \quad u'(0) = -q_{cr}, \quad u(\tau_5) = b, \quad u'(\tau_5) = 0, \quad N(u) = -c,$$

kde $\tau_5 \in (0, \frac{2\pi}{\nu})$. Pro $-q_{cr}$ získáme vtahy

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_5} \left((c-a) \cos(\omega_5) + \frac{-q_{cr} - \mu(c-a)}{\nu} \sin(\omega_5) \right) - c - b, \quad (2.25)$$

$$0 = -q_{cr} \cos(\omega_5) + \frac{(a-c)(\mu^2 + \nu^2) - \mu q_{cr}}{\nu} \sin(\omega_5), \quad (2.26)$$

kde $\omega_5 := \nu\tau_5$ a $\omega_5 \in (0, 2\pi)$.

Označíme $-q_u$ hodnotu q , pro kterou trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu vycházející z bodu $(-a, -q_{cr})$ prochází na konci první smyčky bodem $(-a, -q_u)$ (viz obr. 2.14b), tedy

$$u(0) = -a, \quad u'(0) = -q_{cr}, \quad u(\tau_6) = -a, \quad u'(\tau_6) = -q_u, \quad N(u) = -c,$$

kde $\tau_6 \in (\frac{\pi}{\nu}, \frac{3\pi}{\nu})$.

Pro $-q_u$ obdržíme

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_6} \left((c-a) \cos(\omega_6) + \frac{-q_{cr} - \mu(c-a)}{\nu} \sin(\omega_6) \right) - c + a, \quad (2.27)$$

$$0 = e^{\frac{\mu}{\nu}\omega_6} \left(-q_{cr} \cos(\omega_6) + \frac{(a-c)(\mu^2 + \nu^2) - \mu q_{cr}}{\nu} \sin(\omega_6) \right) + q_u, \quad (2.28)$$

kde $\omega_6 := \nu\tau_6$ a $\omega_6 \in (\pi, 3\pi)$.

Ze soustavy rovnic (2.21) – (2.28) můžeme položením $q_u = q_{max}$ získat mezní hodnotu $\mu := \mu_{2max}$ a hodnoty $-q_{cr}$, p_{2max} , $-q_{2max}$, ω_5 , ω_6 , $\omega_3 := \omega_{23}$, $\omega_4 := \omega_{24}$.

Věta 2.15. *Jestliže existuje řešení μ_{1max} soustavy rovnic (2.17) – (2.24), v nichž $p_u = p_{max}$, a řešení μ_{2max} soustavy rovnic (2.21) – (2.28), v nichž $q_u = q_{max}$, potom existují mezní hodnoty μ_{max} a p_{max} takové, že pro libovolné $\mu < \mu_{max}$ zůstávají trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu začínající v bodě (b, p) , $p < p_{max}$ omezené pro $T \rightarrow +\infty$.*

Důkaz. Maximální hodnotou μ_{max} označíme minimum z množiny $\{\mu_{1max}, \mu_{2max}\}$. Jestliže je $\mu_{max} = \mu_{1max}$, potom označíme $p_{max} := p_{1max}$. Jestliže je $\mu_{max} = \mu_{2max}$, potom označíme $p_{max} := p_{2max}$.

V případě, že $\mu_{max} = \mu_{1max}$, je p_{1max} nejvyšší hodnotou dosažitelnou z bodu (b, p) bez přepnutí hysterezní smyčky a současně hodnotou pro jeden uzavřený cyklus. Z bodu (b, p) se proto nelze dostat do bodu $(-a, -q)$, $-q < -q_{1max}$. A protože $\mu_{1max} \leq \mu_{2max}$, zároveň není možné dostat se z bodu $(-a, -q)$, $-q > -q_{1max}$ do (b, p) , $p > p_{1max}$. Pro $\mu_{max} = \mu_{2max}$ vše platí podobně. \square

Důsledek 2.16. *Jestliže existují řešení μ_{1max} a μ_{2max} příslušných soustav, potom existuje mezní hodnota μ_{max} taková, že pro libovolné p , $p > 0$, a $\mu > \mu_{max}$ je řešení počáteční úlohy (2.16) pro $T \rightarrow \infty$ je neomezené.*

Kvůli nesymetrické hysterezní smyčce pro $p < p_{max}$ neplatí vztah (2.9). Trajektorie řešení úlohy (2.16) se ve fázovém portrétu rozvíjí okolo rovnovážných bodů $(\bar{u}, \bar{u}') = (N(u), 0)$, tzn. okolo bodu $(d, 0)$ nebo bodu $(-c, 0)$, a k přepnutí dochází na polopřímkách M_p, M_q , pro $u = b$ nebo $u = -a$, proto obecně $\omega_2 \neq 2\pi$, $\omega_6 \neq 2\pi$.

Pro pevně zvolené μ můžeme z rovnic (2.21) – (2.24) nalézt počáteční hodnotu p_{max} pro uzavřený cyklus s jednou smyčkou a z rovnic (2.17) – (2.20) počáteční hodnotu p_{cr} , pro kterou se řešení v prvním cyklu pouze dotkne přepínací hodnoty (bez přepnutí $N(u)$).

2.2.1 Numerické experimenty

Jako první uvedeme výsledky pro počáteční úlohu (2.16) pro $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ a $d = 4$.

V softwaru Matlab jsme našli řešení soustavy rovnic (2.17) – (2.24), v níž $p_u = p_{max}$. Výsledky jsou následující.

$$\begin{array}{llll} \mu_{1max} = 0.0488, & p_{cr} = 3.3333, & p_{1max} = 5.4054, & q_{1max} = 5.3817, \\ \omega_1 = 5.4721, & \omega_2 = 4.5033, & \omega_{13} = 4.2601, & \omega_{14} = 6.4992, \\ \mu_{2max} = 0.0547, & q_{cr} = 3.0452, & p_{2max} = 4.8227, & q_{2max} = 4.8212, \\ \omega_5 = 5.3315, & \omega_6 = 4.6098, & \omega_{23} = 4.3583, & \omega_{24} = 6.4627. \end{array}$$

Pro hodnotu μ_{1max} platí $\mu_{1max} = \min\{\mu_{1max}, \mu_{2max}\}$.

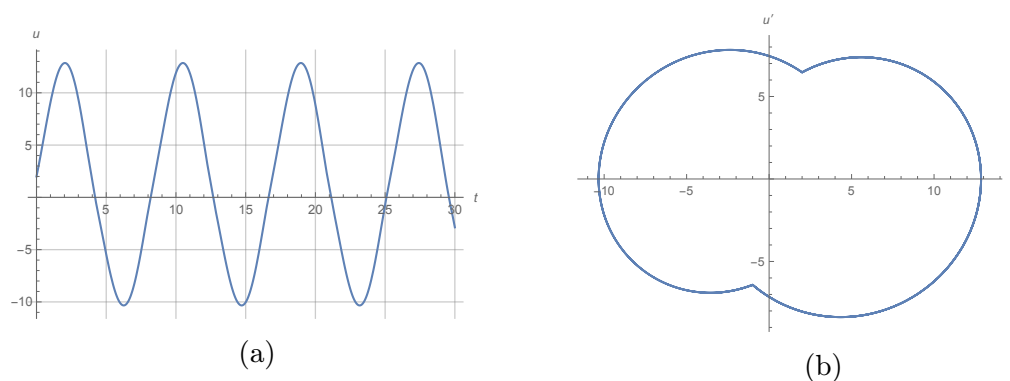
Zvolíme-li pevně $\mu = 0.04 < \mu_{1max}$, získáme ze soustavy rovnic (2.17) – (2.20)

$$p_{cr} = 3.4417, \quad p_u = 4.7567, \quad \omega_1 = 5.2685, \quad \omega_4 = 6.4075,$$

a ze soustavy rovnic (2.21) – (2.24)

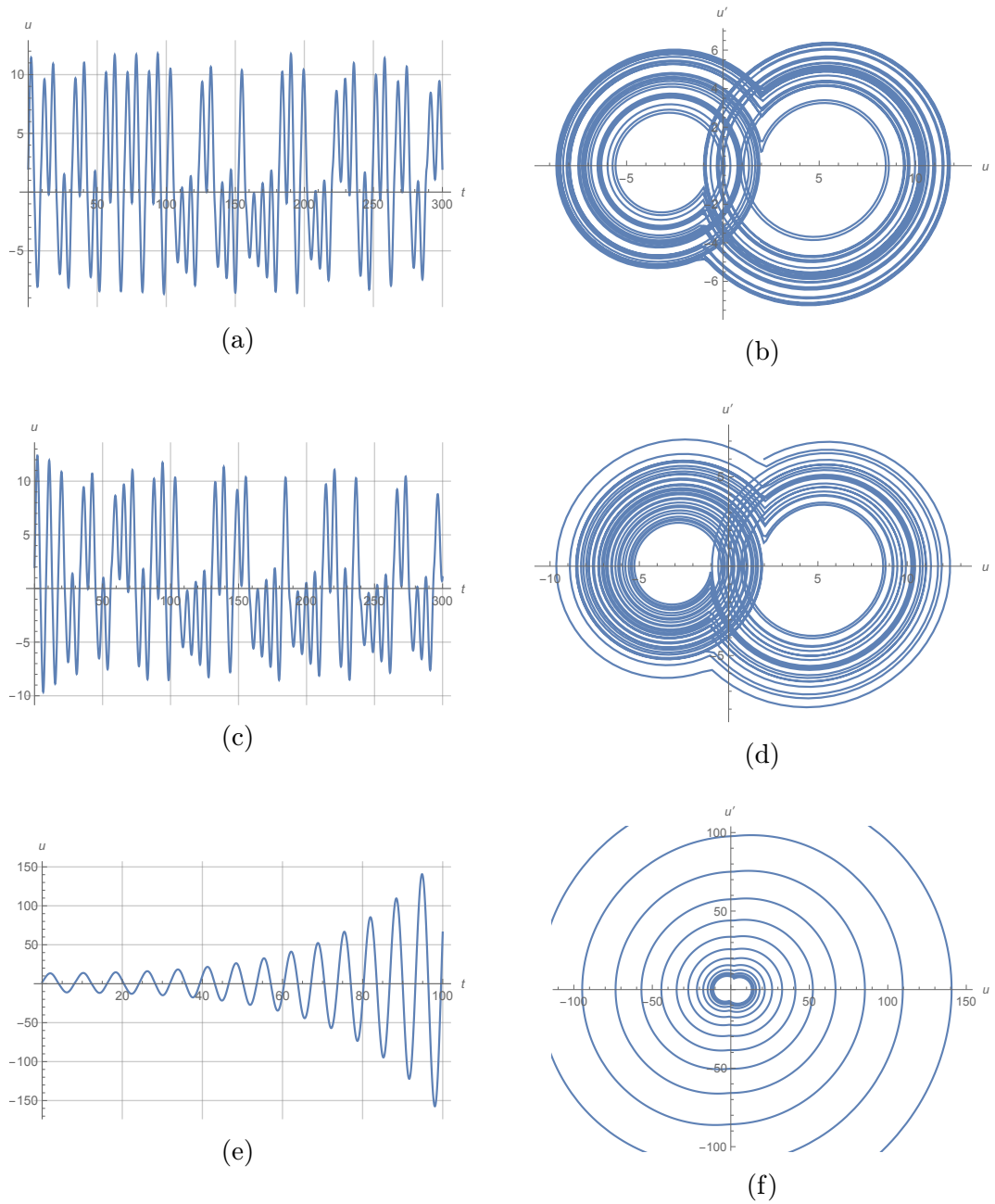
$$p_{max} = 6.4643, \quad q_{max} = 6.4156, \quad \omega_3 = 4.3394, \quad \omega_4 = 4.1133.$$

Pokud tedy zvolíme $\mu = 0.04$, $p = 6.4643$ trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu tvoří uzavřený cyklus s jednou smyčkou (viz obr. 2.15).



Obrázek 2.15: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (2.16) pro $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $\mu = 0.04$, $p = 6.4643$, (b) fázový portrét.

Pro $\mu = 0.04$, $p = 5$ i pro $\mu = 0.04$, $p = 6$ zůstává řešení omezené pro $T \rightarrow +\infty$, zatímco pro $\mu = 0.04$, $p = 7$ řešení pro $T \rightarrow +\infty$ omezené nezůstane (viz obr. 2.16).

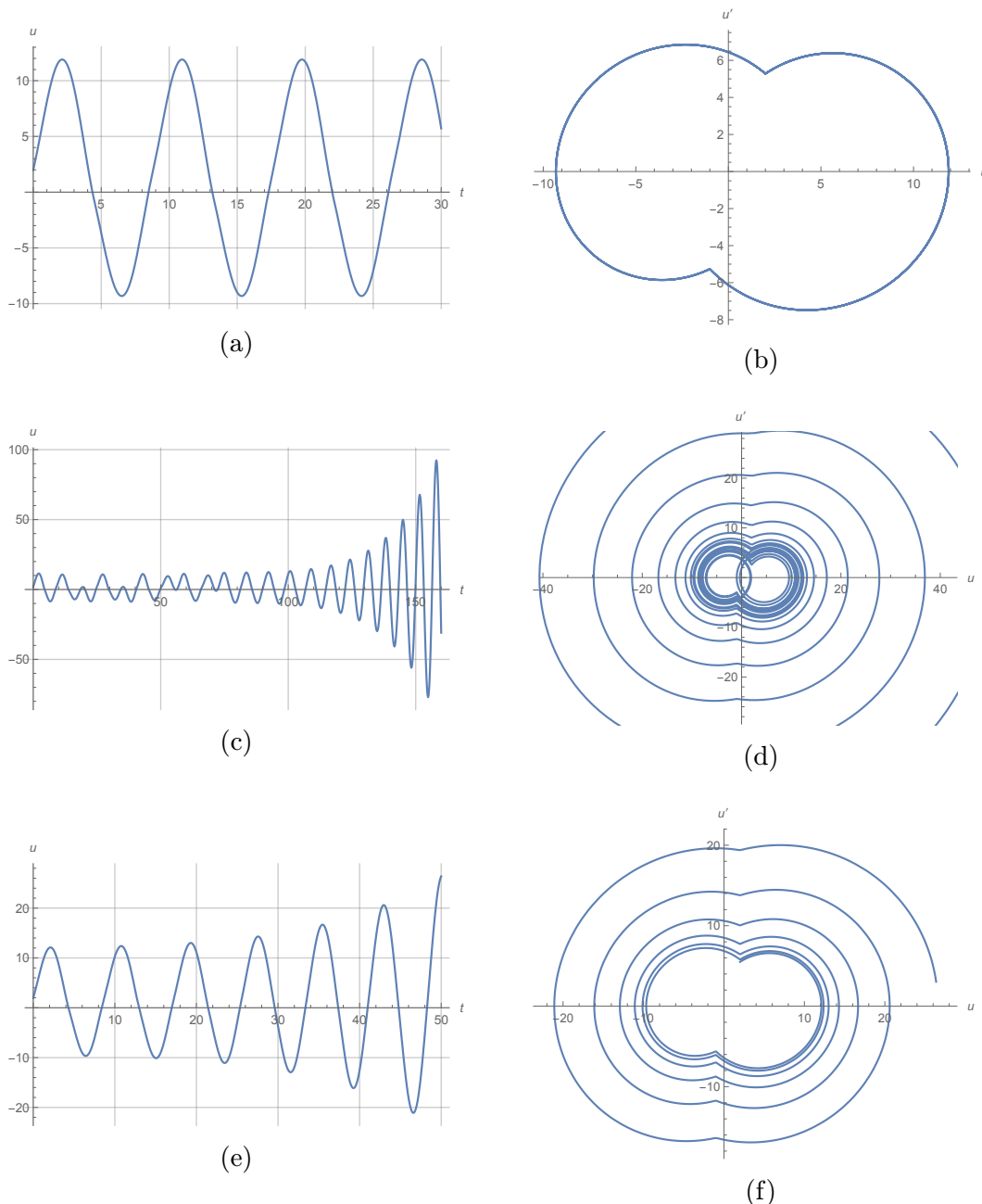


Obrázek 2.16: Grafy řešení $u(t)$ úlohy (2.16) pro $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ a (a) pro $\mu = 0.04$, $p = 5$, (b) pro $\mu = 0.04$, $p = 6$, (e) pro $\mu = 0.04$, $p = 7$, (b), (d), (f) příslušné fázové portréty.

Pro zvolené $\mu = 0.05$, $\mu_{1max} < \mu < \mu_{2max}$ obdržíme

$$p_{max} = 5.2813, \quad q_{max} = 5.2616, \quad \omega_3 = 4.5249, \quad \omega_4 = 4.2799.$$

Položením $\mu = 0.05$, $p = 5.2813$ získáme uzavřený cyklus s jednou smyčkou (viz obr. 2.17). Pro $\mu = 0.05$, $p = 4.8$ se trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu zdají zpočátku omezené (protože $\mu < \mu_{2max}$), ale nejsou omezené pro $T \rightarrow +\infty$ (protože $\mu_{1max} < \mu$) a pro $\mu = 0.05$, $p = 5.5$ se trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu rozvíjí stále více již od začátku (viz obr. 2.17).

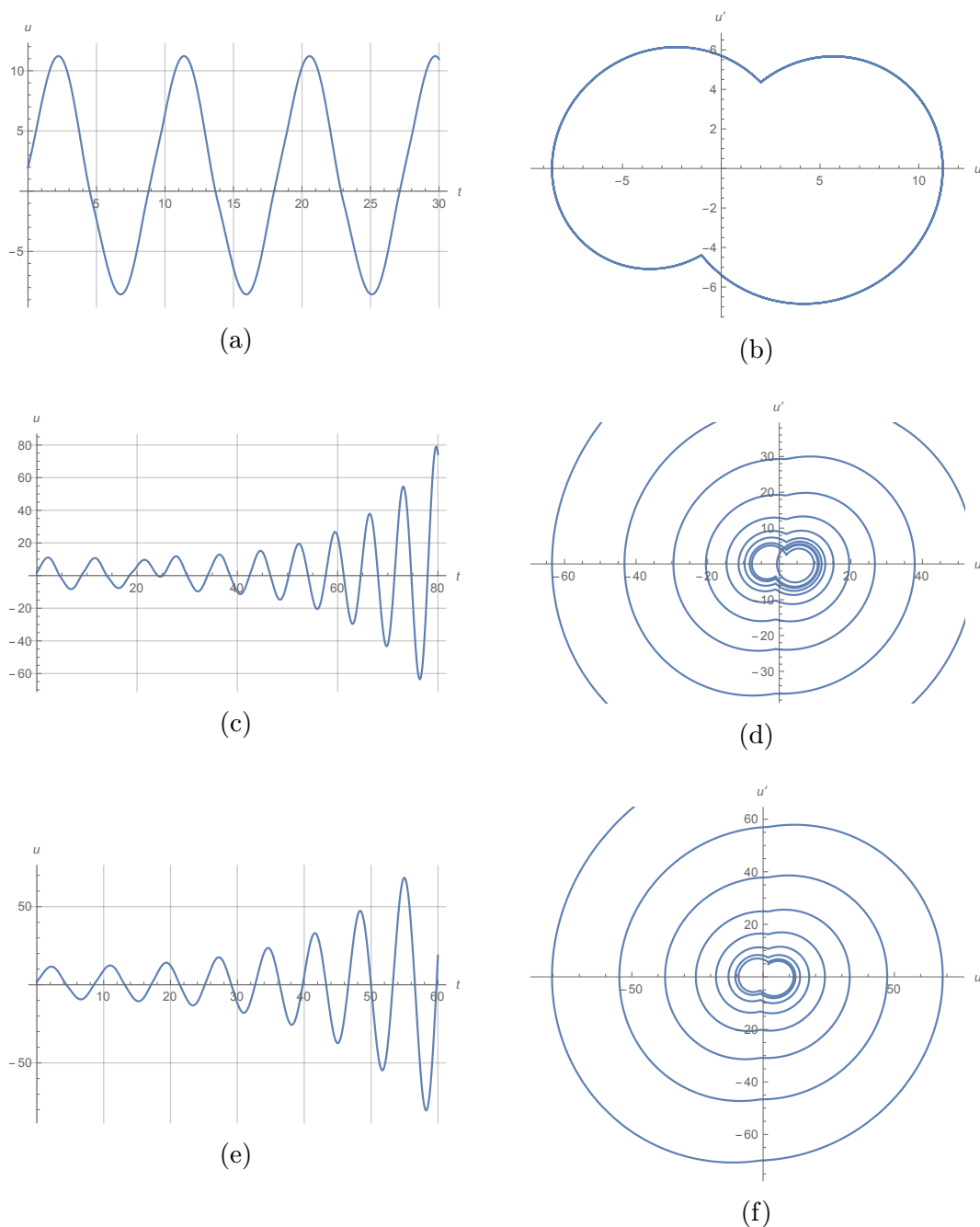


Obrázek 2.17: Grafy řešení $u(t)$ úlohy (2.16) pro $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ a (a) pro $\mu = 0.05$, $p = 5.2813$, (c) pro $\mu = 0.05$, $p = 4.8$, (e) pro $\mu = 0.05$, $p = 5.5$, (b), (d), (f) příslušné fázové portréty.

A pokud zvolíme $\mu = 0.06$, $\mu > \mu_{2max}$ dostaneme pro uzavřený cyklus s jednou smyčkou

$$p_{max} = 4.3577, \quad q_{max} = 4.3806, \quad \omega_3 = 4.7045, \quad \omega_4 = 4.4473.$$

Pro $\mu = 0.06$, $p = 4.3577$ získáme uzavřený cyklus s jednou smyčkou (viz obr. 2.18). Pro $\mu = 0.06$, $p = 4.2$ i pro $\mu = 0.06$, $p = 4.8$ jsou trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portrétu pro $T \rightarrow +\infty$ neomezené (viz obr. 2.18).



Obrázek 2.18: Graf řešení $u(t)$ úlohy (2.16) pro $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ a (a) pro $\mu = 0.06$, $p = 4.3577$, (c) pro $\mu = 0.06$, $p = 4.2$, (e) pro $\mu = 0.06$, $p = 4.8$, (b), (d), (f) příslušné fázové portréty.

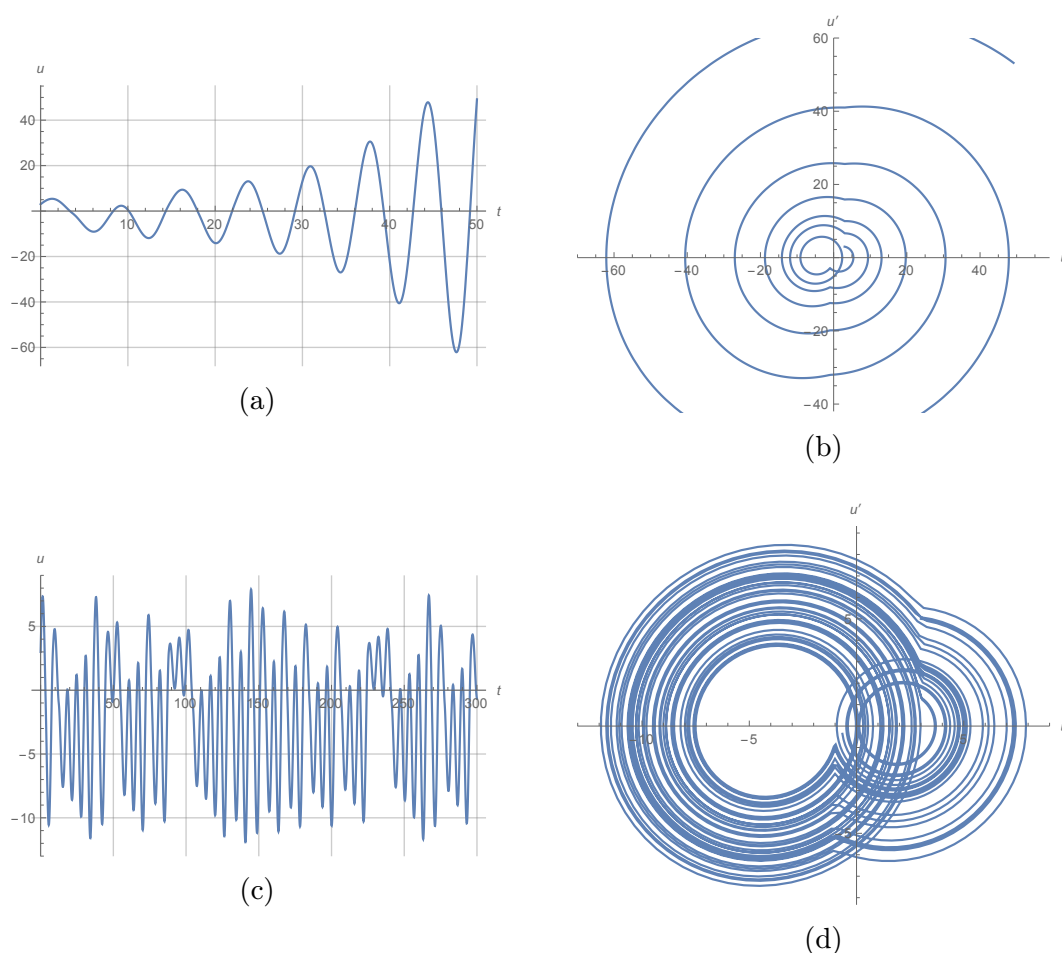
Jako druhé uvedeme výsledky pro počáteční úlohu (2.16) pro $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$ a $d = 2$.

Řešením soustavy rovnic (2.17) – (2.24), v níž $p_u = p_{max}$, je

$$\begin{array}{cccc} \mu_{1max} = 0.0814, & p_{cr} = 1.9424, & p_{1max} = 3.4048, & q_{1max} = 3.7886, \\ \omega_1 = 4.3022, & \omega_2 = 3.5510, & \omega_{13} = 4.9644, & \omega_{14} = 6.0829, \\ \mu_{2max} = 0.0459, & q_{cr} = 4.4458, & p_{2max} = 6.0446, & q_{2max} = 6.5901, \\ \omega_5 = 5.3374, & \omega_6 = 3.4114, & \omega_{23} = 4.4456, & \omega_{24} = 6.4432. \end{array}$$

Nyní platí $\mu_{2max} = \min\{\mu_{1max}, \mu_{2max}\}$.

V případě, že $\mu = 0.07$, $p = 3$ (tj. $\mu_{2max} < \mu < \mu_{1max}$, $p < p_{1max} < p_{2max}$), získáme neomezené trajektorie a například pro $\mu = 0.04$, $p = 3.4048$ ($\mu < \mu_{2max}$, $p_{1max} < p < p_{2max}$) omezené řešení pro $T \rightarrow +\infty$ (viz obr. 2.19).



Obrázek 2.19: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (2.16) pro $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 2$, $\mu = 0.07$, $p = 3$, (b) fázový portrét, (c) graf řešení $u(t)$ úlohy (2.16) pro $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 2$, $\mu = 0.04$, $p = 3.4048$, (d) fázový portrét.

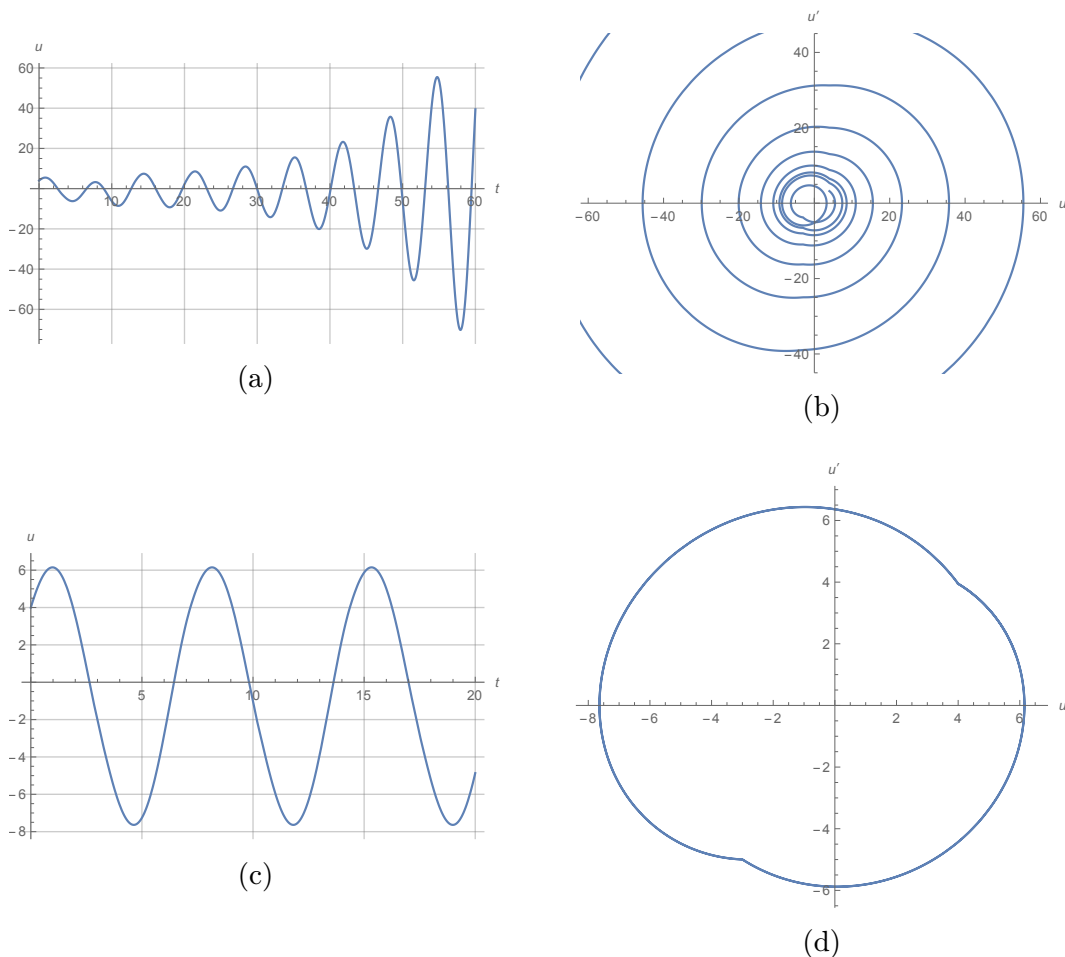
Posledním konkrétním příkladem může být počáteční úloha (2.16) pro $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$ a $d = 1$.

Výsledky jsou

$$\begin{array}{llll} \mu_{1max} = 0.08016, & p_{cr} = 0.7967, & p_{1max} = 3.9471, & q_{1max} = 4.9963, \\ \omega_1 = 3.4057, & \omega_2 = 3.1688, & \omega_{13} = 3.9871, & \omega_{14} = 5.5751, \\ \mu_{2max} = 0.0535, & q_{cr} = 4.6487, & p_{2max} = 5.7018, & q_{2max} = 6.5381, \\ \omega_5 = 4.5519, & \omega_6 = 3.2093, & \omega_{23} = 3.8278, & \omega_{24} = 6.2220. \end{array}$$

Tedy $\mu_{2max} = \min\{\mu_{1max}, \mu_{2max}\}$.

Pokud zvolíme $\mu = 0.07$, $p = 3.2$ ($\mu_{2max} < \mu < \mu_{1max}$, $p < p_{1max} < p_{2max}$), budou trajektorie řešení úlohy (2.16) ve fázovém portréту neomezené pro $T \rightarrow +\infty$, ale pro $\mu = \mu_{1max} = 0.08016$, $p = p_{1max} = 3.9471$ dostaneme uzavřený cyklus (viz obr. 2.20).



Obrázek 2.20: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (2.16) pro $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 1$, $\mu = 0.07$, $p = 3.2$, (b) fázový portrét, (c) graf řešení $u(t)$ úlohy (2.16) pro $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 1$, $\mu = 0.08016$, $p = 3.9471$, (d) fázový portrét.

Kapitola 3

Okrajové úlohy s hysterezní smyčkou

Okrajovou úlohou pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s hysterezí

$$F(t, u, u', u'') = 0, \quad (3.1)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ a $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení s hysterezí, rozumějme úlohu najít jedenkrát spojitě diferencovatelnou funkci $u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje diferenciální rovnici (3.1) pro skoro všechna $t \in [t_1, t_2]$ a zároveň pro daná čísla $u_{01} \in \mathbb{R}$, $u_{02} \in \mathbb{R}$ splňuje okrajové podmínky. Typickým příkladem okrajových podmínek jsou dvoubodové okrajové podmínky:

- Dirichletovy $u(t_1) = u_{01}$, $u(t_2) = u_{02}$,
- Neumannovy $u'(t_1) = u_{01}$, $u'(t_2) = u_{02}$,
- Newtonovy $K_1 u(t_1) + K_2 u'(t_1) = u_{01}$, $K_3 u(t_2) + K_4 u'(t_2) = u_{02}$, kde $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jiným typem okrajových podmínek může být následující příklad s integrální podmínkou: $u(t_1) = u_{01}$, $\int_{t_1}^{t_2} u(x) dx = u_{02}$.

Jestliže platí $u_{01} = u_{02} = 0$, potom nazýváme okrajové podmínky homogenní.

V následujícím textu se zaměříme zejména na okrajovou úlohou s homogenními Dirichletovými podmínkami

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} \alpha, & u \geq -|u'(0)|a, \\ \beta, & u \leq |u'(0)|b, \end{cases} \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, \pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ a $N(u)$ představuje skok s hysterezí (význam použití hodnot $|u'(0)|$ ve skoku s hysterezí bude zřejmý později). To znamená, že pro všechna $u \in [-|u'(0)|a, |u'(0)|b]$ může N nabývat dvou hodnot a přiřazení hodnoty α nebo β závisí na předchozím stavu. Dokud

platí $u \leq |u'(0)|b$, přiřazujeme u hodnotu β , a naopak dokud platí $x \geq -|u'(0)|a$, přiřazujeme u hodnotu α .

Pro pevně dané hodnoty a, b a libovolné α, β existuje vždy triviální řešení okrajové úlohy (3.2), pro některé hodnoty α, β ovšem existuje také její netriviální řešení. Nalezneme proto množinu všech dvojic (α, β) , pro která má úloha (3.2) netriviální řešení, a na závěr opět uvedeme několik příkladů s numericky získanými výsledky.

Jelikož teorií úloha (3.2) navazuje na lineární úlohu a úlohu s jednoduchým skokem, které jsou obě jejím speciálním (limitním) případem, zaměříme se nejprve na tyto dva typy úloh a až poté uvedeme úlohu (3.2). Výsledky pro lineární úlohu a úlohu s jednoduchým skokem jsou z literatury známé (viz [10], [16]), nové budou výsledky pro úlohu (3.2).

3.1 Lineární úloha

Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, \pi]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Úloha (3.3) je speciálním případem úlohy (3.2), v níž $\lambda = \alpha = \beta$.

Úloha (3.3) je lineární. Platí následující.

1. Pokud je u řešením úlohy (3.3), potom je také Au , $A \in \mathbb{R}$, řešením úlohy (3.3), neboť $(Au)'' + \lambda Au = A(u'' + \lambda u) = 0$ a $Au(0) = Au(\pi) = 0$.
2. Pokud jsou u a v řešením úlohy (3.3), potom je také součet $u + v$ řešením úlohy (3.3), neboť $(u + v)'' + \lambda(u + v) = (u'' + \lambda u) + (v'' + \lambda v) = 0$ a $u(0) + v(0) = u(\pi) + v(\pi) = 0$.

Nalezneme obecné řešení rovnice $u'' + \lambda u = 0$. Řešení předpokládáme ve tvaru $u = e^{zt}$, kde $z \in \mathbb{C}$ najdeme pomocí charakteristického polynomu $z^2 + \lambda = 0$. Rozlišujeme následující tři případy.

- Pro $\lambda < 0$ má charakteristický polynom dva reálné různé kořeny $z_1 = \sqrt{-\lambda}$, $z_2 = -\sqrt{-\lambda}$ a fundamentální systém je tvaru $\{e^{\sqrt{-\lambda}t}, e^{-\sqrt{-\lambda}t}\}$. Lineární kombinací

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt{-\lambda}t} + e^{-\sqrt{-\lambda}t}}{2} &= \cosh(\sqrt{-\lambda}t), \\ \frac{e^{\sqrt{-\lambda}t} - e^{-\sqrt{-\lambda}t}}{2} &= \sinh(\sqrt{-\lambda}t) \end{aligned}$$

získáme jiný fundamentální systém $\{\cosh(\sqrt{-\lambda}t), \sinh(\sqrt{-\lambda}t)\}$ a řešení zapíšeme jako $u(t) = C_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}t) + C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}t)$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

- Pro $\lambda = 0$ má charakteristický polynom jeden dvojnásobný reálný kořen $z = 0$, fundamentálním systémem je $\{1, t\}$ a řešení lze zapsat ve tvaru $u(t) = C_1 + C_2 t$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.
- Pro $\lambda > 0$ má charakteristický polynom dva komplexně sdružené kořeny $z_1 = \sqrt{\lambda}i$, $z_2 = -\sqrt{\lambda}i$ a fundamentálním systémem je $\{e^{\sqrt{\lambda}it}, e^{-\sqrt{\lambda}it}\}$. Je-li řešením rovnice komplexní funkce, potom jsou řešením také reálná a imaginární část této funkce (viz [8, s. 95]), díky čemuž můžeme získat reálný fundamentální systém $\{\cos(\sqrt{\lambda}t), \sin(\sqrt{\lambda}t)\}$ a řešení zapsat ve tvaru $u(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t)$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Obecné řešení diferenciální rovnice $u'' + \lambda u = 0$ je

$$u(t) = \begin{cases} C_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}t) + C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}t), & \lambda < 0, \\ C_1 + C_2 t, & \lambda = 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t), & \lambda > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

kde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

3.1.1 Bodové spektrum

Čísla λ , pro která má úloha (3.3) netriviální řešení, se nazývají *vlastní čísla*. Odpovídajícím netriviálním řešením se říká *vlastní funkce*. Množinu všech vlastních čísel nazýváme *bodové spektrum* a značíme jej σ .

Věta 3.1. *Vlastní čísla úlohy (3.3) jsou $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, a příslušné vlastní funkce mají tvar $u(t) = C_2 \sin(kt)$, $k \in \mathbb{N}$, $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bodové spektrum úlohy (3.3) je $\sigma = \{\lambda = k^2, k \in \mathbb{N}\}$.*

Důkaz. Pro stanovení vlastních čísel a vlastních funkcí úlohy (3.3) je třeba nalézt netriviální řešení okrajové úlohy (3.3). Pročež určíme konstanty C_1 , C_2 z obecného řešení (3.4) tak, aby byly splněny dané okrajové podmínky.

- Pro $\lambda < 0$ získáme dosazením obecného řešení (3.4) do okrajových podmínek soustavu dvou rovnic o dvou neznámých C_1 , C_2

$$\begin{aligned} C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0) &= 0, \\ C_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}\pi) + C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že konstanta C_1 je nulová, z druhé rovnice dostaneme také $C_2 = 0$. Okrajová úloha (3.3) má pro $\lambda < 0$ pouze triviální řešení $u(t) = 0$.

- Pro $\lambda = 0$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} C_1 + 0 &= 0, \\ C_1 + C_2 \pi &= 0, \end{aligned}$$

z které je zřejmé, že $C_1 = C_2 = 0$ a okrajová úloha (3.3) má pro $\lambda = 0$ opět pouze triviální řešení.

- Pro $\lambda > 0$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) &= 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne $C_1 = 0$, čímž se druhá rovnice zjednoduší na tvar

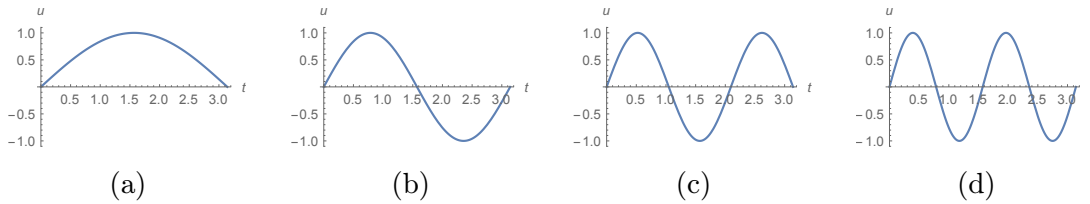
$$C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Tato rovnice je splněna, pokud i $C_2 = 0$, tím získáme triviální řešení, nebo pokud je $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, tedy $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi$, $\lambda = k^2$, kde $k \in \mathbb{N}$. Vlastní čísla mají proto tvar $\lambda = k^2$ (několik prvních vlastních čísel viz obr. 3.1) a příslušné vlastní funkce jsou $u(t) = C_2 \sin(kt)$, kde $k \in \mathbb{N}$, $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (několik vlastních funkcí viz obr. 3.2).

□



Obrázek 3.1: Bodové spektrum σ .



Obrázek 3.2: Vlastní funkce úlohy (3.3) (a) $u(t) = \sin(t)$, (b) $u(t) = \sin(2t)$, (c) $u(t) = \sin(3t)$, (d) $u(t) = \sin(4t)$.

3.2 Úloha s jednoduchým skokem

Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} \alpha, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ \beta, & u < 0, \end{cases} \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, \pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ a $N(u)$ představuje jednoduchý skok.

Speciálním limitním případem úlohy (3.2) pro $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ je úloha

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} \alpha, & u \geq 0, \\ \beta, & u \leq 0, \end{cases} \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

kde $u = u(t)$, $t \in [0, \pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ a $N(u)$ je skokem s hysterezí.

Díky požadavku na spojitost a hladkost (zobecněného) řešení úlohy (3.5) a úlohy (3.6) jsou řešení úloh (3.5) a (3.6) stejná, a proto lze považovat obě úlohy za ekvivalentní.

Úloha (3.5) (stejně jako úloha (3.6)) není lineární, ale je pozitivně homogenní. Pokud je u řešením úlohy (3.5), potom je také Au , $A > 0$, řešením úlohy (3.5), neboť v rovnici

$$(Au)'' + N(Au)Au = 0, \quad N(Au) = \begin{cases} \alpha, & Au > 0, \\ 0, & Au = 0, \\ \beta, & Au < 0, \end{cases}$$

lze konstantu A zkrátit, dostaneme

$$u'' + N(Au)u = 0, \quad N(Au) = N(u) = \begin{cases} \alpha, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ \beta, & u < 0 \end{cases}$$

a nulové okrajové podmínky zůstávají zachovány.

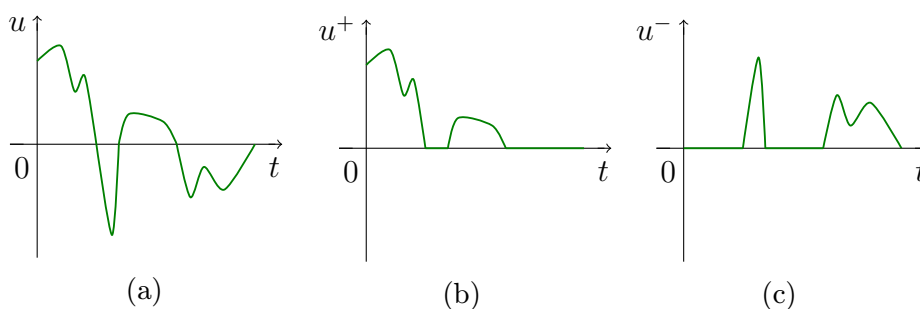
Diferenciální rovnici

$$u'' + N(u)u = 0, \quad N(u) = \begin{cases} \alpha, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ \beta, & u < 0, \end{cases}$$

lze napsat také ve tvaru

$$u'' + \alpha u^+ - \beta u^- = 0, \tag{3.7}$$

kde $u^+ := \max\{u, 0\}$ je kladnou částí funkce u , $u^- := \max\{-u, 0\}$ je zápornou částí funkce u a platí $u = u^+ - u^-$ (ukázka kladné a záporné části funkce viz obr. 3.3).



Obrázek 3.3: (a) Funkce u , (b) její kladná část u^+ , (c) její záporná část u^- .

3.2.1 Fučíkovo spektrum

Dvojice čísel $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pro kterou má úloha (3.5) netriviální řešení, se nazývá *Fučíkovo vlastní číslo*. Odpovídajícím netriviálním řešením se říká *Fučíkovy*

vlastní funkce. Množinu všech Fučíkových vlastních čísel nazýváme *Fučíkovo spektrum*, značíme jej Σ a systému křivek, ze kterého se Fučíkovo spektrum skládá, říkáme *Fučíkovy větve*.

Fučíkovým spektrem okrajové úlohy pro diferenciální rovnici (3.7) s homogenními Dirichletovými podmínkami se věnoval již S. Fučík (viz [10]) a např. s integrální podmínkou N. Sergejeva (viz [16]).

Věta 3.2. *Fučíkovo spektrum úlohy (3.5) je $\Sigma = \bigcup_{k=1}^3 M_k^\Sigma$, kde*

$$\begin{aligned} M_1^\Sigma &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ M_2^\Sigma &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n-1}{\sqrt{\beta}} = 1, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ M_3^\Sigma &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{n-1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1, n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Abychom našli předpis pro Fučíkovo spektrum, budeme postupovat následovně.

1. Nejprve uvažujme, že na intervalu $(0, \pi)$ funkce $u(t)$ nemění znaménko, neboli na intervalu $(0, \pi)$ není nulový bod.
 - (a) Pro $u(t) > 0$ se rovnice z úlohy (3.5) zjednoduší na rovnici $u'' + \alpha u = 0$. Obecné řešení takovéto rovnice známe. Okrajové podmínky lze splnit tak, abychom získali netriviální řešení, pouze pro $\alpha > 0$. Řešení má tvar $u(t) = C \sin(t)$, $C > 0$, a první Fučíkova větev je tvořena přímkou $\alpha = 1$ (Fučíkova vlastní čísla jsou tvaru $(1, \beta)$, kde $\beta \in \mathbb{R}$).
 - (b) Pokud je $u(t) < 0$, potom dostaneme rovnici $u'' + \beta u = 0$. První Fučíkova větev je tvořena také přímkou $\beta = 1$.
2. Uvažujme právě jeden nulový bod τ na intervalu $(0, \pi)$.

- (a) Nejprve proberme variantu, kdy řešení je na intervalu $(0, \tau)$ kladné a na intervalu (τ, π) záporné. Smysl má opět uvažovat pouze $\alpha > 0$ a $\beta > 0$. Řešení má na intervalu $(0, \tau)$ tvar $u_1(t) = C_1 \sin(\sqrt{\alpha}t)$, $C_1 > 0$, a na intervalu (τ, π) tvar $u_2(t) = -C_2 \sin(\sqrt{\beta}(t - \tau))$, $C_2 > 0$. V bodě napojení kladné a záporné půlvlny platí $u(\tau) = 0 = \lim_{t \rightarrow \tau^-} u_1(t) = \lim_{t \rightarrow \tau^+} u_2(t)$ a $u'(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} u_1'(t) = \lim_{t \rightarrow \tau^+} u_2'(t)$. Z podmínky $\lim_{t \rightarrow \tau^-} u_1(t) = 0$ dostaneme $\sqrt{\alpha}\tau = \pi$, $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ a z podmínky $\lim_{t \rightarrow \tau^+} u_2(t) = 0$ dostaneme $\sqrt{\beta}(\pi - \tau) = \pi$, $\tau = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$, čímž získáme předpis druhé Fučíkovy větve

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}},$$

neboli

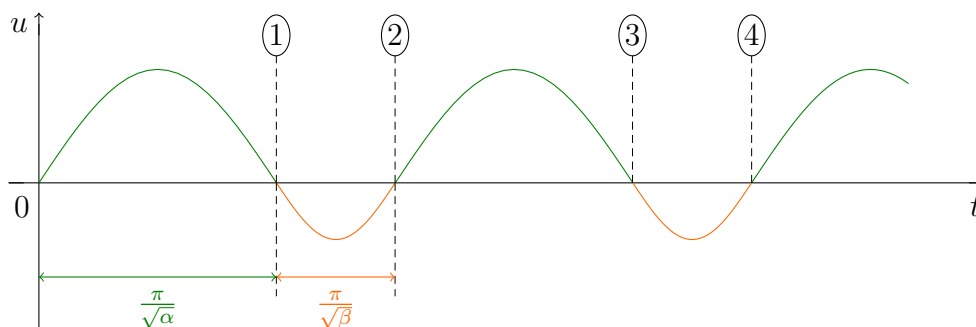
$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 1.$$

Z podmínek $u'(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} u'_1(t) = \lim_{t \rightarrow \tau^+} u'_2(t)$ dostaneme vztah pro konstanty $C_2 = C_1 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, který v místě napojení půlvln zajišťuje hladkost řešení.

(b) Uvažujme, že na intervalu $(0, \tau)$ máme záporné řešení a na intervalu (τ, π) řešení kladné. Provedeme-li postup analogicky, dostaneme tožný předpis.

3. Uvažujme více nulových bodů na intervalu $(0, \pi)$. Podle počtu kladných a záporných půlvln na tomto intervalu získáme další předpisy Fučíkových větví (viz obr. 3.4). Kladná půlvlna má délku $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$, záporná půlvlna má délku $\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$, interval je délky π a počet kladných a záporných půlvln se může lišit nejvýše o jednu, neboť po kladné půlvlně následuje vždy půlvlna záporná a naopak. Fučíkovým spektrem úlohy (3.5) je proto právě množina Σ (několik prvních Fučíkových větví viz obr. 3.5 či příloha B a několik Fučíkových vlastních funkcí viz obr. 3.6).

□



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} &= \pi & \Rightarrow \quad \alpha &= 1 \\ \textcircled{2} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} &= \pi & \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} &= 1 \\ \textcircled{3} \quad 2\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} &= \pi & \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} &= 1 \\ \textcircled{4} \quad 2\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + 2\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} &= \pi & \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} &= 1 \end{aligned}$$

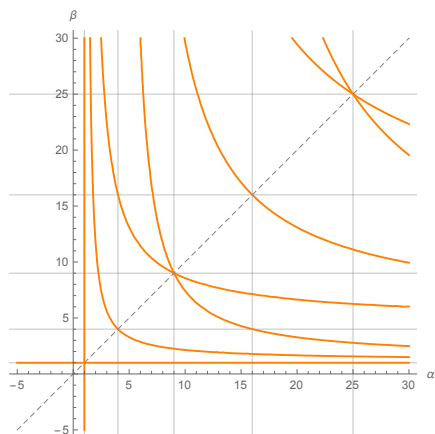
Obrázek 3.4: Ilustrace odvození několika předpisů Fučíkových větví podle počtu kladných a záporných půlvln na intervalu $(0, \pi)$.

Poznámka. Všimněme si následujícího.

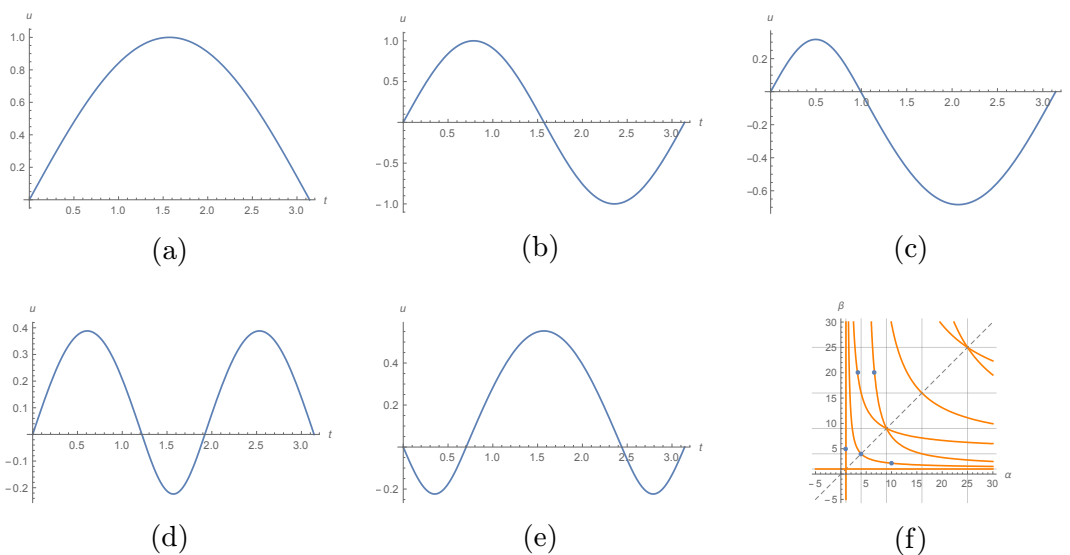
1. Všechny dvojice (λ, λ) , kde λ je vlastní číslo úlohy (3.3), patří do Fučíkova spektra Σ , neboť pro $\alpha = \beta$ se úloha (3.5) zredukuje na úlohu (3.3).
2. Nulové body na intervalu $(0, \pi)$ lze vyjádřit pomocí prvního nulového bodu. Např. uvažujeme-li právě dva nulové body $\tau_1 < \tau_2$ na intervalu $(0, \pi)$ a řešení na intervalu $(0, \tau_1)$ kladné, potom platí $\tau_2 = \tau_1 + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$.

3. Z předpisu Fučikova spektra Σ lze získat asymptoty jednotlivých Fučikových větví. Asymptotami Fučikových větví rozumíme systém přímek $\alpha = \alpha_\infty(n)$, $\beta = \beta_\infty(n)$, $n \in \mathbb{N}$, kde $\alpha_\infty(n) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \Sigma$, $\beta_\infty(n) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Sigma$.

Asymptotami n -té větve, jejíž předpis je obsažen v množině M_1^Σ , jsou přímky $\alpha = n^2$, $\beta = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Asymptotami n -té větve z množiny M_2^Σ jsou přímky $\alpha = n^2$, $\beta = (n-1)^2$ a n -té větve z množiny M_3^Σ jsou přímky $\alpha = (n-1)^2$, $\beta = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.



Obrázek 3.5: Fučikovo spektrum Σ .



Obrázek 3.6: (a) – (e) Některé Fučikovy vlastní funkce a (f) odpovídající Fučikova vlastní čísla zvýrazněná ve Fučikově spektru Σ .

3.3 Úloha se skokem s hysterezí

Úloha (3.2) je, stejně jako úlohy (3.5) a (3.3), pozitivně homogenní. Pokud je u řešením úlohy (3.2), potom je také Au , $A > 0$, řešením úlohy (3.2).

V rovnici

$$(Au)'' + N(Au)Au = 0, \quad N(Au) = \begin{cases} \alpha, & Au \geq -|Au'(0)|a, \\ \beta, & Au \leq |Au'(0)|b, \end{cases}$$

lze konstantu A zkrátit

$$u'' + N(Au)u = 0, \quad N(Au) = \begin{cases} \alpha, & u \geq -|u'(0)|a, \\ \beta, & u \leq |u'(0)|b, \end{cases}$$

pro hysterezní smyčku dostaneme

$$N(Au) = N(u)$$

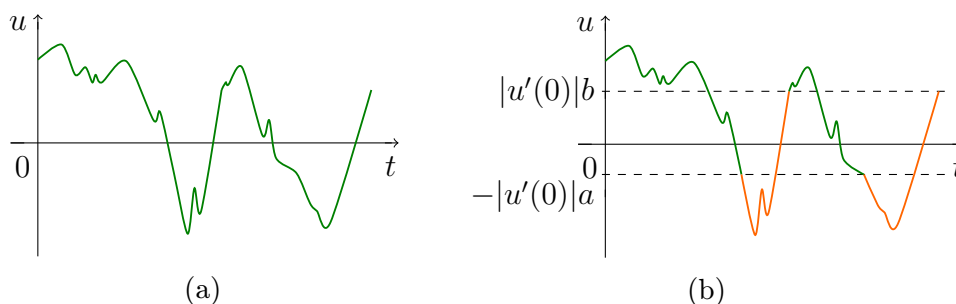
a nulové okrajové podmínky zůstávají zachovány.

Budeme se opět zabývat pouze netriviálním řešením úlohy, tedy neuvažujeme $u'(0) = 0$, neboť z věty o jednoznačnosti (viz [8, s. 73]) pro počáteční úlohu 2. řádu plyne, že řešením úlohy (3.2) pro $u'(0) = 0$ je pouze triviální řešení. Proto platí $|u'(0)|a > 0$ a $|u'(0)|b > 0$.

Jelikož každý kladný násobek řešení úlohy (3.2) je rovněž řešením úlohy (3.2), zvolíme $|u'(0)| := 1$ a rovnice s hysterezní smyčkou se zjednoduší na tvar

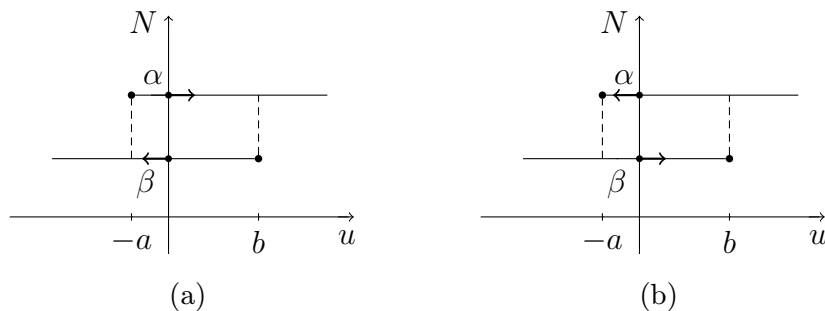
$$u'' + N(u)u = 0, \quad N(u) = \begin{cases} \alpha, & u \geq -a, \\ \beta, & u \leq b. \end{cases}$$

Máme-li funkci u , potom α -částí funkce u rozumíme ty části funkce u , kde se realizuje člen α hysterezní smyčky $N(u)$ a β -částí rozumíme části funkce u , kde se realizuje člen β hysterezní smyčky $N(u)$ (ukázka α -částí a β -částí funkce viz obr. 3.7).



Obrázek 3.7: (a) Funkce u , (b) její α -část (zelená) a β -část (oranžová).

Hysterezní smyčka $N(u)$ je mnohoznačné zobrazení a hodnota $N(u(0))$ není jednoznačně dána, rozlišíme proto dva případy. V případě 1 pro $u'(0) = +1$ zvolíme $N(u(0)) := \alpha$ a pro $u'(0) = -1$ zvolíme $N(u(0)) := \beta$ (viz obr. 3.8a). Naopak v případě 2 pro $u'(0) = +1$ zvolíme $N(u(0)) := \beta$ a pro $u'(0) = -1$ zvolíme $N(u(0)) := \alpha$ (viz obr. 3.8b).



Obrázek 3.8: Názorné schéma počátečního stavu u hysterezní smyčky (a) v případě 1, (b) v případě 2.

V následujícím textu nejprve ukážeme rozdíly mezi případy 1 a 2 na úloze se symetrickou hysterezní smyčkou, v níž uvažujeme $a = b$, a poté uvedeme 1. případ úlohy s nesymetrickou smyčkou (2. případ je analogický).

3.3.1 Zobecněné spektrum

Dvojici čísel $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pro kterou má úloha (3.2) netriviální řešení, nazýváme *zobecněné vlastní číslo* a odpovídající netriviální řešení *zobecněné vlastní funkce*. Množině všech zobecněných vlastních čísel říkáme *zobecněné spektrum* a označme jej S .

3.3.2 Úloha se symetrickou hysterezní smyčkou – případ 1

Prvním případem úlohy se symetrickou smyčkou rozumíme úlohu

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} \alpha, & u \geq -a, \\ \beta, & u \leq a, \end{cases} \\ u(0) = u(\pi) = 0, \\ |u'(0)| = 1, \\ N(u(0)) = \begin{cases} \alpha, & u'(0) = +1, \\ \beta, & u'(0) = -1. \end{cases} \end{cases} \quad (3.8)$$

Věta 3.3. *Zobecněným spektrem úlohy (3.8) je $S_1 = \bigcup_{k=1}^6 M_k^{S_1}$, kde*

$$M_1^{S_1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} : \right. \\ \left. \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin(a\sqrt{\alpha}) + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\alpha}{\beta}}}\right) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_2^{S_1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n-1}{\sqrt{\beta}} = 1, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_3^{S_1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \geq \frac{1}{a^2} : \alpha = k^2, k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_4^{S_1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{a^2} : \right. \\ \left. \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\beta}{\alpha}}}\right) + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin(a\sqrt{\beta}) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_5^{S_1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{a^2} : \frac{n-1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_6^{S_1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta \geq \frac{1}{a^2} : \beta = k^2, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz. Důkaz ukážeme pouze pro $u'(0) = 1$, tedy $N(u(0)) = \alpha$, neboť pro $u'(0) = -1$ bychom postupovali analogicky.

1. Nejprve uvažujme, že na intervalu $(0, \pi)$ je funkce $u(t) \geq 0$, tedy není zde ani bod přepnutí. Rovnice z úlohy (3.8) se zjednoduší na rovnici $u'' + \alpha u = 0$. Smysl má uvažovat pouze $\alpha > 0$. Řešení má tvar $u(t) = \sin(t)$ a první větev je tvořena přímkou $\alpha = 1$.
2. Uvažujme právě jeden bod přepnutí τ na intervalu $(0, \pi)$. Smysl má opět uvažovat pouze $\alpha > 0$ a $\beta > 0$. Z podmínek $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ dostaneme na intervalu $[0, \tau]$ tvar řešení $u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha}t)$ a z podmínky $u(\pi) = 0$ tvar řešení $u_2(t) = C \sin(\sqrt{\beta}(t - \pi))$, $C > 0$ na intervalu $[\tau, \pi]$. Má-li dojít na intervalu $(0, \pi)$ k přepnutí, musí být amplituda řešení u_1 větší než hodnota a , tj. musí platit $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} > a$, $\alpha < \frac{1}{a^2}$. V bodě napojení α -části a β -části vlny platí $u_1(\tau) = u_2(\tau) = -a$ a $u_1'(\tau) = u_2'(\tau)$. Z podmínky $u_1(\tau) = -a$ dostaneme

$$\sin(\sqrt{\alpha}\tau) = -a\sqrt{\alpha},$$

kde $\sqrt{\alpha}\tau \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, tedy

$$\sqrt{\alpha}\tau = -\arcsin(-a\sqrt{\alpha}) + \pi, \\ \tau = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (\pi + \arcsin(a\sqrt{\alpha})).$$

A z podmínky $u_2(\tau) = -a$ dostaneme

$$\sin(\sqrt{\beta}(\tau - \pi)) = -\frac{a}{C},$$

kde $\sqrt{\beta}(\tau - \pi) \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$, tedy

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta}(\tau - \pi) &= -\arcsin\left(-\frac{a}{C}\right) - \pi, \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(-\pi + \arcsin\left(\frac{a}{C}\right)\right) + \pi.\end{aligned}$$

Dohromady získáme předpis druhé větve

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\pi + \arcsin(a\sqrt{\alpha})\right) + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\pi - \arcsin\left(\frac{a}{C}\right)\right) = \pi.$$

Z podmínky $u_1'(\tau) = u_2'(\tau)$ dostaneme vztah pro konstantu C , který v místě napojení částí vln zajišťuje hladkost řešení. Dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\cos(\sqrt{\alpha}\tau) &= C\sqrt{\beta}\cos(\sqrt{\beta}(\tau - \pi)), \\ \cos(\pi + \arcsin(a\sqrt{\alpha})) &= C\sqrt{\beta}\cos\left(-\pi + \arcsin\left(\frac{a}{C}\right)\right), \\ -\cos(\arcsin(a\sqrt{\alpha})) &= -C\sqrt{\beta}\cos\left(\arcsin\left(\frac{a}{C}\right)\right).\end{aligned}$$

Protože platí $\cos^2(\gamma) = 1 - \sin^2(\gamma)$, vztah se zjednoduší na

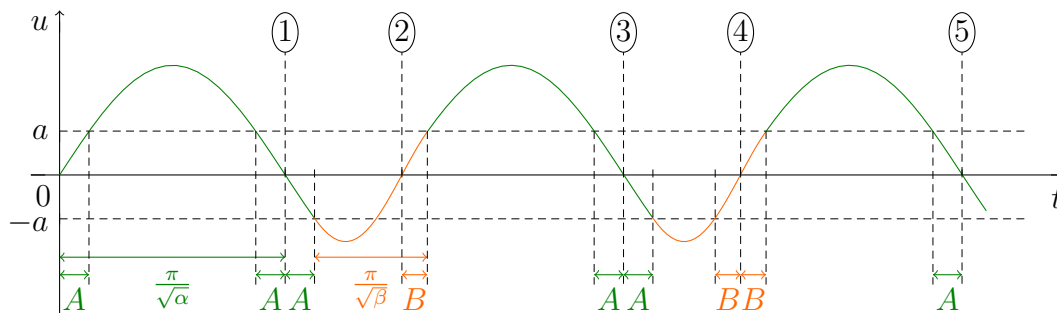
$$\begin{aligned}1 - \sin^2(\arcsin(a\sqrt{\alpha})) &= C^2\beta\left(1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{a}{C}\right)\right)\right), \\ 1 - a^2\alpha &= C^2\beta\left(1 - \frac{a^2}{C^2}\right), \\ C &= \sqrt{a^2 + \frac{1 - a^2\alpha}{\beta}},\end{aligned}$$

neboť uvažujeme $\alpha < \frac{1}{a^2}$ a $C > 0$. Evidentně pro amplitudu C také platí $C > a$, platí $C > a$ právě tehdy když platí $\alpha < \frac{1}{a^2}$.

3. Uvažujme více bodů přepnutí na intervalu $(0, \pi)$. V místech, kde $u(t) = a$ a kde $u(t) = -a$, se díky symetrii systému zachovává stále stejná velikost derivace řešení. Z věty o jednoznačnosti (viz [8, s. 73]) pro počáteční úlohu 2. řádu plyne, že opakující se části řešení jsou na podintervalech stejné. Další předpisy větví proto získáme, sečteme-li délky α -částí a β -částí vln na intervalu $(0, \pi)$ a dáme-li tento součet do rovnosti s délkou intervalu π (viz obr. 3.9).
4. Uvažujme, že na intervalu $(0, \pi)$ funkce $u(t)$ mění znaménko, ale není zde žádný bod přepnutí. Taková situace nastává pro $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \leq a$, $\alpha \geq \frac{1}{a^2}$. Rovnice z úlohy (3.9) se opět zjednoduší na rovnici $u'' + \alpha u = 0$. V oblasti, kde $\alpha \geq \frac{1}{a^2}$, je řešením úlohy (3.9) $u(t) = \frac{1}{k} \sin(kt)$, $k \in \mathbb{N}$ a větve mají tvar $\alpha = k^2$.

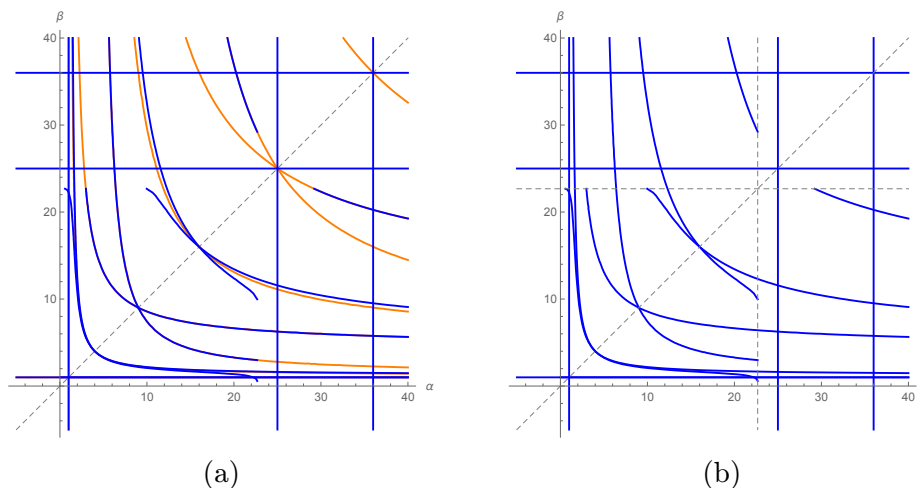
Pokud dáme všechny předpisy dohromady, dostaneme právě spektrum S_1 (spektrum S_1 viz obr. 3.10 a příloha B a zobecněné vlastní funkce viz obr. 3.11).

□



$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} &= \pi \Rightarrow \alpha = 1 & A &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin(a\sqrt{\alpha}) \\
 \textcircled{2} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + A + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - B &= \pi & B &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \\
 \textcircled{3} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + A + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - B + B + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + A &= \pi \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 1 \\
 \textcircled{4} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - B &= \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + A + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} - B = \pi \\
 \textcircled{5} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + A + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} - B + B + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + A &= \pi \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} = 1
 \end{aligned}$$

Obrázek 3.9: Ilustrace odvození několika předpisů větví podle α -částí a β -částí vln na intervalu $(0, \pi)$.



Obrázek 3.10: (a), (b) Zobecněné spektrum S_1 pro $a = 0.21$ (modrá) a Fučíkovo spektrum Σ (oranžová).

Poznámka. Všimněme si následujícího.

1. Pro množiny $M_2^{S_1}$, $M_5^{S_1}$ zobecněného spektra S_1 a M_2^Σ , M_3^Σ Fučíkova spektra Σ platí

$$M_2^{S_1} \subset M_2^\Sigma, \quad M_5^{S_1} \subset M_3^\Sigma$$

(řešení odpovídající stejnému bodu zobecněného spektra S_1 a Fučíkova spektra Σ viz obr. 3.12).

2. Body přepnutí na intervalu $(0, \pi)$ lze vyjádřit pomocí prvního bodu přepnutí. Např. uvažujeme-li právě dva body přepnutí $\tau_1 < \tau_2$ na intervalu $(0, \pi)$ a řešení na intervalu $(0, \tau_1)$ kladné, potom platí $\tau_2 = \tau_1 + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$.
3. Z předpisu zobecněného spektra S_1 lze získat asymptoty jednotlivých větví. Asymptotou n -té větve, jejíž předpis je obsažen v množině $M_1^{S_1}$, je přímka $\alpha = \alpha_\infty$, kde $\frac{n\pi}{\sqrt{\alpha_\infty}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_\infty}} \arcsin(a\sqrt{\alpha_\infty}) = \pi$, přičemž $\alpha_\infty \in \left(n^2, \frac{(2n+1)^2}{4}\right)$ a $n \in \mathbb{N}$. Asymptotou n -té větve, jejíž předpis je obsažen v množině $M_2^{S_1}$, je přímka $\alpha = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Množiny $M_1^{S_1}$, $M_2^{S_1}$, $M_4^{S_1}$, $M_5^{S_1}$, které tvoří zobecněné spektrum S_1 , popisují konečný počet větví. Pro $a \geq 1$ pro tyto množiny platí

$$M_1^{S_1} = M_2^{S_1} = M_4^{S_1} = M_5^{S_1} = \emptyset.$$

Věta 3.4. *Pro Fučíkovo spektrum Σ úlohy (3.5) a zobecněné spektrum S_1 úlohy (3.8) platí*

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_1 = \Sigma.$$

Důkaz. Pokud $a \rightarrow 0$, potom

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} = +\infty$$

a pro větve zobecněného spektra S_1 dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} M_1^{S_1} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin(a\sqrt{\alpha}) + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\alpha}{\beta}}}\right) = \right. \\ &= \pi \left. \right\} = \left\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi \right\} = \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\}, \end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} M_2^{S_1} = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n-1}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\} = \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n-1}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\},$$

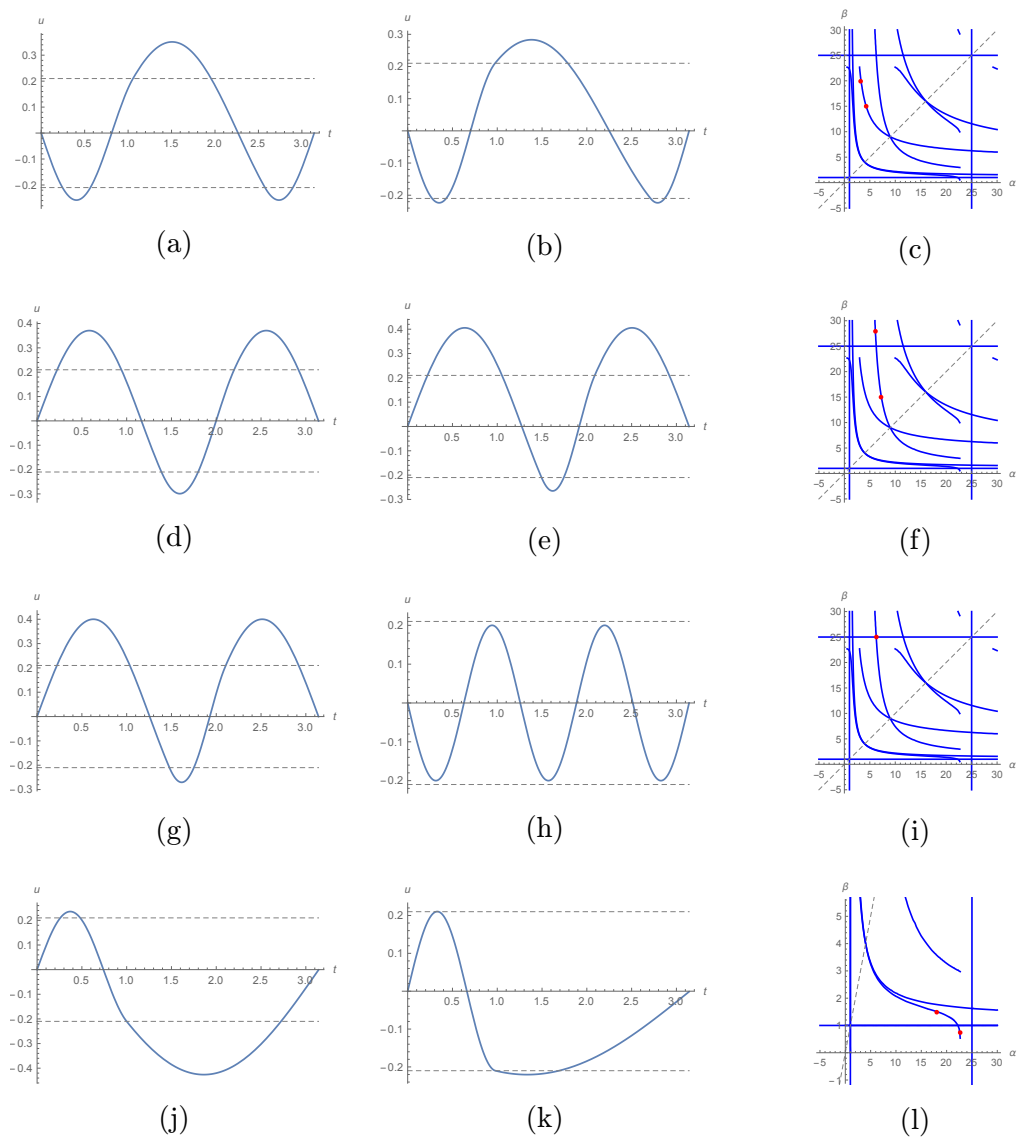
$$\lim_{a \rightarrow 0} M_3^{S_1} = \emptyset,$$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} M_4^{S_1} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\beta}{\alpha}}}\right) + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin(a\sqrt{\beta}) = \right. \\ &= \pi \left. \right\} = \left\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi \right\} = \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\}, \end{aligned}$$

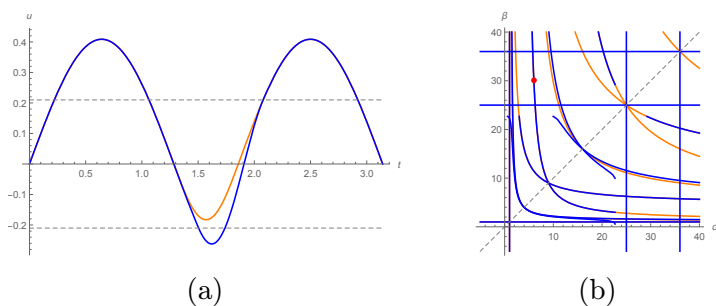
$$\lim_{a \rightarrow 0} M_5^{S_1} = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{n-1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\} = \left\{ \frac{n-1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\},$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} M_6^{S_1} = \emptyset.$$

Neboli platí $\lim_{a \rightarrow 0} S_1 = \Sigma$. □



Obrázek 3.11: (a) – (l) Některé zobecněné vlastní funkce a odpovídající zobecněná vlastní čísla zvýrazněná v zobecněném spektru S_1 pro $a = 0.21$.



Obrázek 3.12: (a), (b) Řešení $u(t)$ odpovídající stejnému bodu (α, β) zobecněného spektra S_1 (modrá) a Fučíkova spektra Σ (oranžová) pro $u'(0) = 1$ a $a = 0.21$.

3.3.3 Úloha se symetrickou hysterezní smyčkou – případ 2

Nyní řešme úlohu

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} \alpha, & u \geq -a, \\ \beta, & u \leq a, \end{cases} \\ u(0) = u(\pi) = 0, \\ |u'(0)| = 1, \\ N(u(0)) = \begin{cases} \beta, & u'(0) = +1, \\ \alpha, & u'(0) = -1. \end{cases} \end{cases} \quad (3.9)$$

Věta 3.5. *Zobecněné spektrum úlohy (3.9) je $S_2 = \bigcup_{k=1}^8 M_k^{S_2}$, kde*

$$\begin{aligned} M_1^{S_2} &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \leq 0 : \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\alpha}{\beta}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \operatorname{argsinh} (a\sqrt{-\alpha}) = \pi \right\}, \\ M_2^{S_2} &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \alpha < \frac{1}{a^2} : \right. \\ &\quad \left. \frac{(n-1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin(a\sqrt{\alpha}) + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\alpha}{\beta}}} \right) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ M_3^{S_2} &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \alpha < \frac{1}{a^2} : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ M_4^{S_2} &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \geq \frac{1}{a^2} : \alpha = k^2, k \in \mathbb{N} \right\}, \\ M_5^{S_2} &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta \leq 0 : \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\beta}{\alpha}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \operatorname{argsinh} (a\sqrt{-\beta}) = \pi \right\}, \\ M_6^{S_2} &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \beta < \frac{1}{a^2} : \right. \\ &\quad \left. \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\beta}{\alpha}}} \right) + \frac{(n-1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin(a\sqrt{\beta}) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ M_7^{S_2} &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \beta < \frac{1}{a^2} : \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ M_8^{S_2} &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta \geq \frac{1}{a^2} : \beta = k^2, k \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz ukážeme pouze pro $u'(0) = 1$, tedy $N(u(0)) = \beta$, neboť pro $u'(0) = -1$ bychom postupovali analogicky.

1. Uvažujme právě jeden bod přepnutí τ na intervalu $(0, \pi)$. Musí tedy platit $\beta < \frac{1}{a^2}$. Smysl má nyní uvažovat i záporné β a $\alpha > 0$. Z podmínky $u(\pi) = 0$ dostaneme na intervalu $[\tau, \pi]$ tvar řešení $u_2(t) = -C \sin(\sqrt{\alpha}(t - \pi))$, $C > 0$, a z podmínek $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ dostaneme na intervalu $[0, \tau]$ tvar řešení $u_1(t)$.

- (a) Pro $\beta < 0$ je $u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sinh(\sqrt{-\beta}t)$. Z podmínek $u_1(\tau) = u_2(\tau) = a$ dostaneme předpis první větve v oblasti, kde $\beta < 0$, $\alpha > 0$,

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C}\right) + \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \operatorname{argsinh}\left(a\sqrt{-\beta}\right) = \pi$$

a z podmínky $u'_1(\tau) = u'_2(\tau)$ získáme vztah pro konstantu C

$$C = \sqrt{a^2 + \frac{1 - a^2\beta}{\alpha}}.$$

- (b) Pro $\beta = 0$ je $u_1(t) = t$. Z podmínek $u_1(\tau) = u_2(\tau) = a$ a $u'_1(\tau) = u'_2(\tau)$ dostáváme

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C}\right) + a = \pi,$$

kde

$$C = \sqrt{a^2 + \frac{1}{\alpha}}.$$

- (c) Pro $0 < \beta < \frac{1}{a^2}$ je $u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\beta}t)$ a předpis pro první větev v této oblasti vyjde

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin(a\sqrt{\beta}) + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C}\right) = \pi,$$

kde

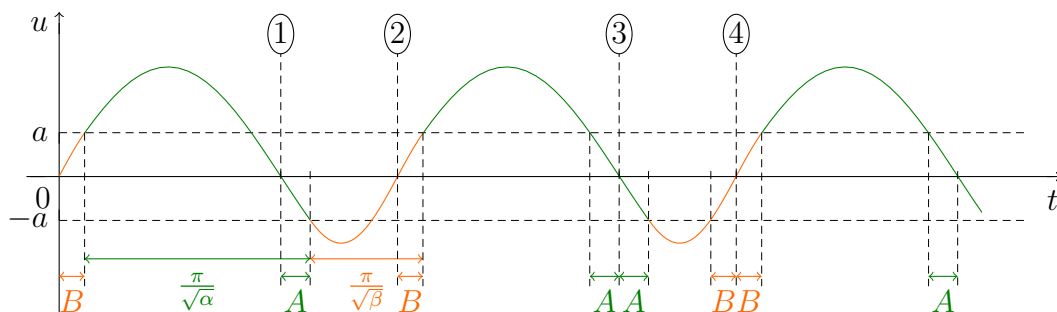
$$C = \sqrt{a^2 + \frac{1 - a^2\beta}{\alpha}}.$$

Výrazy pro C mají ve všech třech případech smysl, neboť uvažujeme $\beta < \frac{1}{a^2}$, $\alpha > 0$ a $C > 0$. Evidentně pro amplitudu C také platí $C > a$.

2. Uvažujme více bodů přepnutí na intervalu $(0, \pi)$. Smysl má uvažovat jen $\beta > 0$, $\alpha > 0$, a proto předpisy dalších větví získáme analogicky jako v úloze (3.8) (viz obr. 3.13).
3. Uvažujme, že na intervalu $(0, \pi)$ funkce $u(t)$ mění znaménko, ale není zde žádný bod přepnutí, což nastává pro $\beta \geq \frac{1}{a^2}$. Řešením v této oblasti je $u(t) = \frac{1}{k} \sin(kt)$, $k \in \mathbb{N}$ a větve mají tvar $\beta = k^2$.

Pokud dáme všechny předpisy dohromady, dostaneme právě spektrum S_2 (spektrum S_2 viz obr. 3.14 a příloha B a zobecněné vlastní funkce viz obr. 3.15).

□



$$\textcircled{1} \quad B + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - A = \pi$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C}\right)$$

$$\textcircled{2} \quad B + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - B = \pi$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin(a\sqrt{\beta})$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} + B - A = \pi$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi$$

Obrázek 3.13: Ilustrace odvození několika předpisů větví podle α -části a β -části vln na intervalu $(0, \pi)$.

Poznámka. Všimněme si následujícího.

1. Pro množiny $M_3^{S_2}$, $M_7^{S_2}$ zobecněného spektra S_2 a M_1^Σ Fučíkova spektra Σ platí

$$M_3^{S_2} \subset M_1^\Sigma, \quad M_7^{S_2} \subset M_1^\Sigma$$

(řešení odpovídající stejnému bodu zobecněného spektra S_2 a Fučíkova spektra Σ viz obr. 3.16).

2. Pro $a \geq 1$ pro množiny, které tvoří zobecněné spektrum S_2 , platí

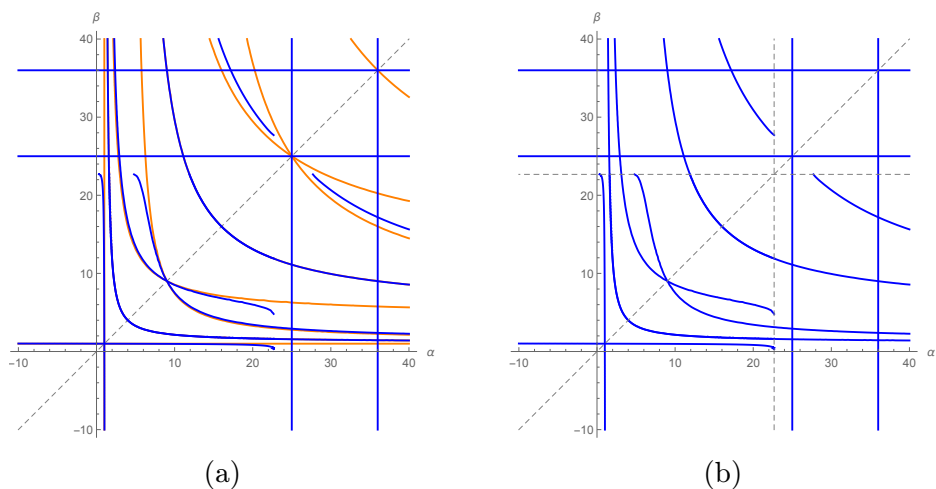
$$M_2^{S_2} = M_3^{S_2} = M_6^{S_2} = M_7^{S_2} = \emptyset.$$

Věta 3.6. Pro Fučíkovo spektrum Σ úlohy (3.5) a zobecněné spektrum S_2 úlohy (3.9) platí

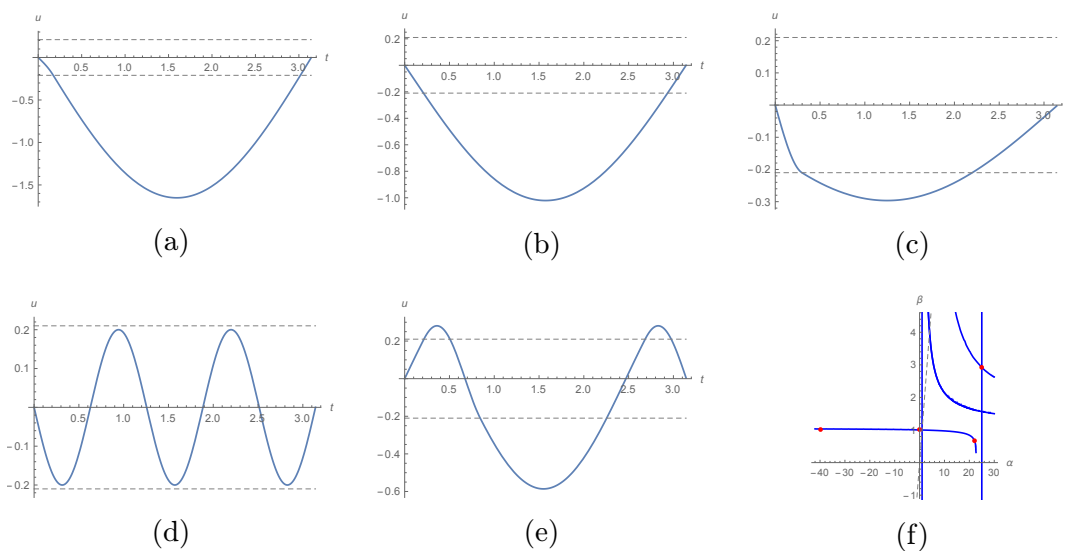
$$\lim_{a \rightarrow 0} S_2 = \Sigma.$$

Důkaz. Pokud $a \rightarrow 0$, potom

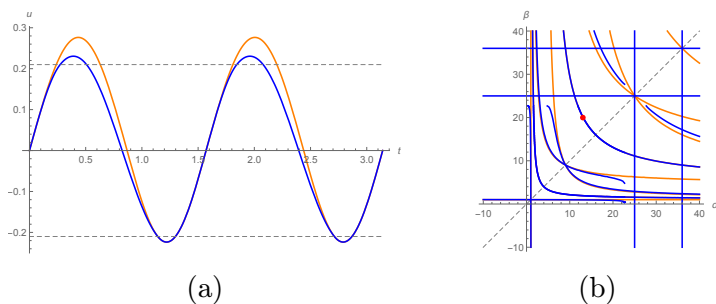
$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} = +\infty$$



Obrázek 3.14: (a), (b) Zobecněné spektrum S_2 pro $a = 0.21$ (modrá) a Fučíkovo spektrum Σ (oranžová).



Obrázek 3.15: (a) – (f) Některé zobecněné vlastní funkce a odpovídající zobecněná vlastní čísla zvýrazněná v zobecněném spektru S_2 pro $a = 0.21$.



Obrázek 3.16: (a), (b) Řešení $u(t)$ odpovídající stejnému bodu (α, β) zobecněného spektra S_2 (modrá) a Fučíkova spektra Σ (oranžová) pro $u'(0) = 1$ a $a = 0.21$.

a pro větve zobecněného spektra S_2 dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} M_1^{S_2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\alpha}{\beta}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \operatorname{argsinh}(a\sqrt{-\alpha}) = \pi \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi \right\} = \{\beta = 1\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} M_2^{S_2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{(n-1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin(a\sqrt{\alpha}) + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\alpha}{\beta}}} \right) = \right. \\ &= \left. \pi \right\} = \left\{ \frac{(n-1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi \right\} = \left\{ \frac{(n-1)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\},\end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} M_3^{S_2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\} = \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\},$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} M_4^{S_2} = \emptyset,$$

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} M_5^{S_2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\beta}{\alpha}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \operatorname{argsinh}(a\sqrt{-\beta}) = \pi \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = \pi \right\} = \{\alpha = 1\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} M_6^{S_2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\beta}{\alpha}}} \right) + \frac{(n-1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin(a\sqrt{\beta}) = \pi \right\} = \left\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(n-1)\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi \right\} = \\ &= \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n-1}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\},\end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} M_7^{S_2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\} = \left\{ \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n}{\sqrt{\beta}} = 1 \right\},$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} M_8^{S_2} = \emptyset.$$

Neboli platí $\lim_{a \rightarrow 0} S_2 = \Sigma$. □

3.3.4 Úloha s nesymetrickou hysterezní smyčkou – případ 1

Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} \alpha, & u \geq -a, \\ \beta, & u \leq b, \end{cases} \\ u(0) = u(\pi) = 0, \\ |u'(0)| = 1, \\ N(u(0)) = \begin{cases} \alpha, & u'(0) = +1, \\ \beta, & u'(0) = -1, \end{cases} \end{cases} \quad (3.10)$$

kde $0 < a < b$. Pro $b < a$ bychom získali obdobné výsledky a volbou $a = b$ bychom dostali úlohu se symetrickou hysterezní smyčkou – případ 1.

Věta 3.7. *Zobecněným spektrem úlohy (3.10) je $S_3 = \bigcup_{k=1}^{14} M_k^{S_3}$, kde*

$$M_1^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} : \alpha = 1 \right\},$$

$$M_2^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_2 > b : \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C_1}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{C_2}\right) = \pi \right\},$$

$$M_3^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_{2n} > b : \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{a}{C_{2l-1}}\right) - \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l+1}}\right) \right) + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^n -\arcsin\left(\frac{a}{C_{2l}}\right) + \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) \right) = \pi, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\},$$

$$M_4^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_{2n} \leq b : \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \arcsin\left(\frac{a}{C_{2l-1}}\right) - \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l+1}}\right) \right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} -\arcsin\left(\frac{a}{C_{2l}}\right) + \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) \right) = \pi, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\},$$

$$M_5^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_2 \leq b : \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C_1}\right) + \frac{k\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{C_2}\right) = \pi, k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_6^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_{2n+2} \leq b : \right. \\ \left. \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l-1}} \right) - \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l+1}} \right) \right) + \frac{(n+k)\pi}{\sqrt{\beta}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} - \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) + \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) \right) = \pi, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \right\}, \\ M_7^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \geq \frac{1}{a^2} : \alpha = k^2, k \in \mathbb{N} \right\},$$

kde pro všechny $n \in \mathbb{N}$ je

$$C_{2n-1} = \sqrt{\frac{1 + (n-1)(a^2 - b^2)(\beta - \alpha)}{\alpha}}, \\ C_{2n} = \sqrt{\frac{1 + (na^2 - (n-1)b^2)(\beta - \alpha)}{\beta}},$$

a dále

$$M_8^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2} : \beta = 1 \right\},$$

$$M_9^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2} : \right. \\ \left. \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{b}{C_2} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{b}{C_1} \right) = \pi, \right\},$$

$$M_{10}^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2} \wedge C_{2n+1} > b : \right. \\ \left. \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^n - \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) + \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) \right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l-1}} \right) - \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l+1}} \right) \right) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_{11}^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2} \wedge C_{2n+1} > b : \right. \\ \left. \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} - \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) + \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) \right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l-1}} \right) - \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l+1}} \right) \right) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_{12}^{S_3} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2}, \wedge C_{2n+1} \leq b : \right. \\ \left. \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^n - \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) + \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) \right) + \frac{(n+k)\pi}{\sqrt{\beta}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l-1}} \right) - \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l+1}} \right) \right) = \pi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N} \Big\}, \\
M_{13}^{S_3} & = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \beta < \frac{1}{b^2}, \quad \wedge \quad C_{2n+3} \leq b : \right. \\
& \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} - \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) + \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) \right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l-1}} \right) - \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l+1}} \right) \right) = \pi, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \\
M_{14}^{S_3} & = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \beta \geq \frac{1}{b^2} : \beta = k^2, \quad k \in \mathbb{N} \right\},
\end{aligned}$$

kde pro všechny $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
C_{2n-1} & = \sqrt{\frac{1 + (n-1)(b^2 - a^2)(\alpha - \beta)}{\beta}}, \\
C_{2n} & = \sqrt{\frac{1 + (nb^2 - (n-1)a^2)(\alpha - \beta)}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz ukážeme nejprve pro $u'(0) = -1$, tedy $N(u(0)) = \beta$, poté pro $u'(0) = 1$.

1. Nejprve uvažujme, že na intervalu $(0, \pi)$ je funkce $u(t) \leq 0$, tedy není zde ani bod přepnutí. Rovnice z úlohy (3.10) se zjednoduší na rovnici $u'' + \beta u = 0$. Okrajové podmínky lze splnit tak, abychom získali netriviální řešení, pouze pro $\beta > 0$. Řešení má tvar $u(t) = \sin(t)$ a první větev je tvořena přímkou $\beta = 1$.
2. Uvažujme právě jeden bod přepnutí τ na intervalu $(0, \pi)$. Význam má opět uvažovat pouze $\beta > 0$ a $\alpha > 0$. Stejně jako v případě symetrické smyčky dostaneme z podmínek $u(0) = u(\pi) = 0$, $u'(0) = 1$ na intervalu $[0, \tau]$ tvar řešení $u_1(t) = -C_1 \sin(\sqrt{\beta}t)$, kde $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} > 0$, a na intervalu $[\tau, \pi]$ tvar řešení $u_2(t) = -C_2 \sin(\sqrt{\alpha}(t - \pi))$, kde $C_2 > 0$. Aby došlo na intervalu $(0, \pi)$ k přepnutí, musí platit $C_1 > b$, tj. $\beta < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{a^2}$.

Z podmínek $u_1(\tau) = u_2(\tau) = b$ obdržíme předpis pro druhou větev

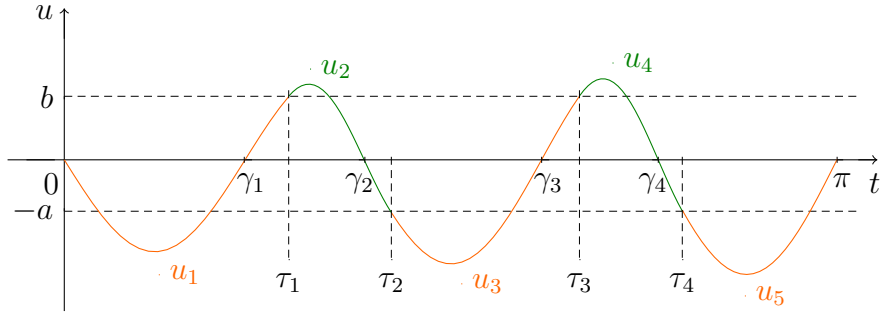
$$\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{b}{C_1} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{b}{C_2} \right) = \pi$$

a z podmínky $u'_1(\tau) = u'_2(\tau)$ získáme vztah $C_2 = \sqrt{b^2 + \frac{1-b^2\beta}{\alpha}} = \sqrt{\frac{1+b^2(\alpha-\beta)}{\alpha}}$.

Všimněme si, že pro C_2 platí $C_2 > b$ právě tehdy, když platí $C_1 > b$, a je-li $C_2 > b$, potom je také $C_2 > a$.

3. Uvažujme více bodů přepnutí τ_J , $J > 1$, $J \in \mathbb{N}$ na intervalu $(0, \pi)$. Smysl má opět uvažovat pouze $\beta > 0$ a $\alpha > 0$. Řešení na intervalu $[0, \tau_1]$ je tvaru $u_1(t) = -C_1 \sin(\sqrt{\beta}t)$, kde $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} > 0$ získáme z podmínek

$u(0) = 0, u'(0) = 1$. Na intervalech $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ zapíšeme řešení pro $j = 2n - 1$, $j \leq J$, $n \in \mathbb{N}$ ve tvaru $u_{2n}(t) = -C_{2n} \sin(\sqrt{\alpha}(t - \gamma_{2n}))$, kde $C_{2n} > 0$, a pro $j = 2n \leq J$, $n \in \mathbb{N}$ ve tvaru $u_{2n+1}(t) = C_{2n+1} \sin(\sqrt{\beta}(t - \gamma_{2n+1}))$, kde $C_{2n+1} > 0$, přičemž γ_{j+1} je nulovým bodem na intervalu $(\tau_j, \tau_{j+1}]$. Pro $j = J$ je $\tau_{J+1} = \gamma_{J+1} = \pi$ (viz obr. 3.17).



Obrázek 3.17: Ilustrace řešení $u(t)$ na intervalu $[0, \pi]$ pro počet přepnutí $J = 4$ (α -části vln zeleně, β -části vln oranžově).

V tomto nesymetrickém případě se v místech, kde $u(t) = b$ a kde $u(t) = -a$, stále stejná velikost derivace řešení nezachovává, což znamená, že části řešení na podintervalech nejsou stejné.

Uvažujeme-li počet přepnutí J , potom z podmínek na spojitost a hladkost řešení v bodech napojení α -částí a β -částí vln dostaneme vztahy pro konstanty

$$C_{2n-1} = \sqrt{\frac{1 + (n-1)(b^2 - a^2)(\alpha - \beta)}{\beta}}, \quad (3.11)$$

$$C_{2n} = \sqrt{\frac{1 + (nb^2 - (n-1)a^2)(\alpha - \beta)}{\alpha}}, \quad (3.12)$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $2n - 1 \leq J + 1$, $2n \leq J + 1$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Hodnotu $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ získáme z podmínek $u(0) = 0, u'(0) = -1$. Hodnotu C_2 získáme z podmínek $u_2(\tau_1) = b$ a $u'_1(\tau_1) = u'_2(\tau_1)$ umocněním a sečtením rovnic

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{\alpha}\tau_2 + \gamma_2) &= -\frac{b}{C_2}, \\ \cos(\sqrt{\alpha}\tau_2 + \gamma_2) &= \frac{\cos(\sqrt{\beta}\tau_1)}{C_2\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

Po úpravě obdržíme

$$C_2 = \sqrt{b^2 + \frac{1 - b^2\beta}{\alpha}} = \sqrt{\frac{1 + b^2(\alpha - \beta)}{\alpha}}.$$

Jelikož předpokládáme, že došlo k přepnutí, musí opět platit $C_1 > b$ a předpis pro C_2 má smysl.

Předpokládejme, že vztahy platí pro C_{2n-3} , C_{2n-2} . Vztah pro C_{2n-1} získáme z podmínek $u_{2n-1}(\tau_{2n-2}) = u_{2n-2}(\tau_{2n-2}) = -a$ a $u'_{2n-2}(\tau_{2n-2}) = u'_{2n-1}(\tau_{2n-2})$ a vztah pro C_{2n} zcela analogicky z podmínek $u_{2n}(\tau_{2n-1}) = u_{2n-1}(\tau_{2n-1}) = b$ a $u'_{2n-1}(\tau_{2n-1}) = u'_{2n}(\tau_{2n-1})$.

Pro C_{2n-1} umocněním a sečtením rovnic

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{\alpha}(\tau_{2n-2} - \gamma_{2n-2})) &= \frac{a}{C_{2n-2}}, \\ \cos(\sqrt{\alpha}(\tau_{2n-2} - \gamma_{2n-2})) &= \frac{C_{2n-1}\sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}(\tau_{2n-2} - \gamma_{2n-1}))}{-C_{2n-2}\sqrt{\alpha}}\end{aligned}$$

získáme

$$1 = \frac{a^2}{C_{2n-2}^2} + \frac{C_{2n-1}^2 \beta \cos^2(\sqrt{\beta}(\tau_{2n-2} - \gamma_{2n-1}))}{C_{2n-2}^2 \alpha} \quad (3.13)$$

a z rovnice

$$\sin(\sqrt{\beta}(\tau_{2n-2} - \gamma_{2n-1})) = -\frac{a}{C_{2n-1}}$$

dostaneme

$$\sqrt{\beta}(\tau_{2n-2} - \gamma_{2n-1}) = -\arcsin\left(-\frac{a}{C_{2n-1}}\right) - \pi. \quad (3.14)$$

Dosazením (3.14) do (3.13) dostaneme

$$\left(1 - \frac{a^2}{C_{2n-2}^2}\right) C_{2n-2}^2 \alpha = C_{2n-1}^2 \beta \left(1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{a}{C_{2n-1}}\right) - \pi\right)\right).$$

Načej úpravou $\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{a}{C_{2n-1}}\right) - \pi\right) = \frac{a^2}{C_{2n-1}^2}$ a vyjádřením C_{2n-1} obdržíme

$$C_{2n-1} = \sqrt{\frac{C_{2n-2}^2 \alpha - a^2(\alpha - \beta)}{\beta}}.$$

Jelikož platí $C_{2n-2}^2 \alpha = 1 + ((n-1)b^2 - (n-2)a^2)(\alpha - \beta)$, pro C_{2n-1} dostáváme (3.11). Pro C_{2n} analogickým postupem získáme vztah (3.12). Tím jsou rovnosti (3.11), (3.12) dokázány.

Podmínkami pro přepínání mezi α -částmi a β -částmi vln na intervalu $[0, \pi]$ je $C_{2n-1} > b$ a $C_{2n} > a$. Ze vztahů (3.11), (3.12) plyne

$$C_{2n-1} > b \Leftrightarrow C_{2n} > b \Leftrightarrow \beta < \frac{1 + \alpha(n-1)(b^2 - a^2)}{nb^2 - (n-1)a^2},$$

přičemž je-li $C_{2n} > b$, potom platí také $C_{2n} > a$.

Protože $a \neq b$, pro $\alpha > \beta$ platí

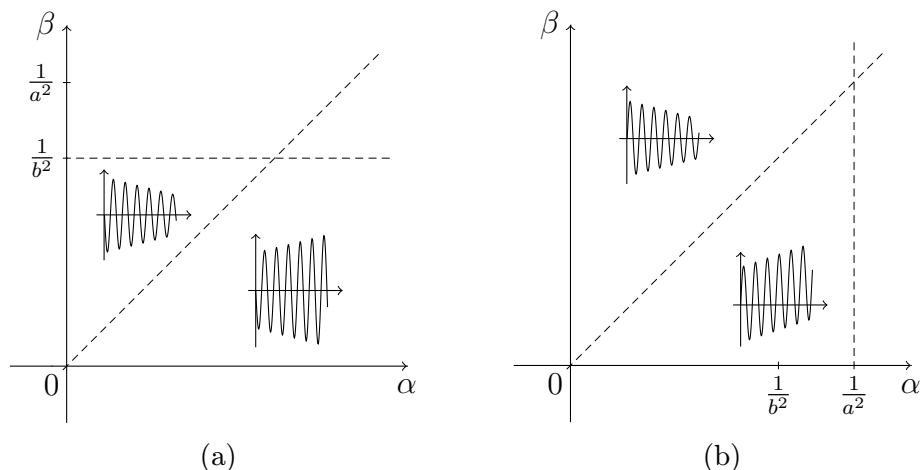
$$b < C_1 < C_3 < C_5 < \dots \quad \wedge \quad b < C_2 < C_4 < C_6 < \dots,$$

tj. pro $\alpha > \beta$ se amplituda řešení s rostoucím t zvětšuje.

Zatímco pro $\beta > \alpha$ platí

$$b < C_1 \quad \wedge \quad b < C_2 \quad \wedge \quad \dots < C_5 < C_3 < C_1 \quad \wedge \quad \dots < C_6 < C_4 < C_2,$$

tj. pro $\beta > \alpha$ se amplituda řešení zmenšuje (viz obr. 3.18a).



Obrázek 3.18: Názorné schéma rozdělení roviny $\alpha\beta$ pro řešení, pro které platí (a) $u'(0) = -1$, (b) $u'(0) = 1$.

Výrazy pod odmocninou ve vztazích pro C_{2n-1} a C_{2n} jsou kladné. Triviálně to platí pro C_1 a C_2 (viz výše) a pro $n \neq 1$ máme

$$\frac{1 + (n-1)(b^2 - a^2)(\alpha - \beta)}{\beta} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \alpha + \frac{1}{(n-1)(b^2 - a^2)},$$

$$\frac{1 + (nb^2 - (n-1)a^2)(\alpha - \beta)}{\alpha} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \alpha + \frac{1}{nb^2 - (n-1)a^2}.$$

Z podmínky pro $(2n-1)$ -ní a $2n$ -té přepnutí dostáváme

$$\beta < \alpha \frac{(n-1)(b^2 - a^2)}{nb^2 - (n-1)a^2} + \frac{1}{nb^2 - (n-1)a^2}$$

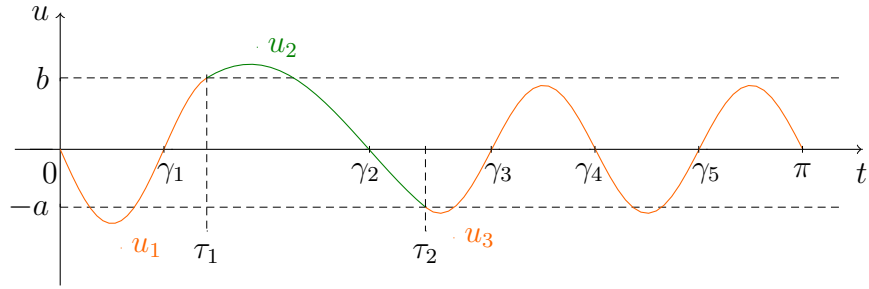
a zároveň platí

$$0 < \frac{(n-1)(b^2 - a^2)}{nb^2 - (n-1)a^2} < 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{nb^2 - (n-1)a^2} < \frac{1}{(n-1)(b^2 - a^2)}.$$

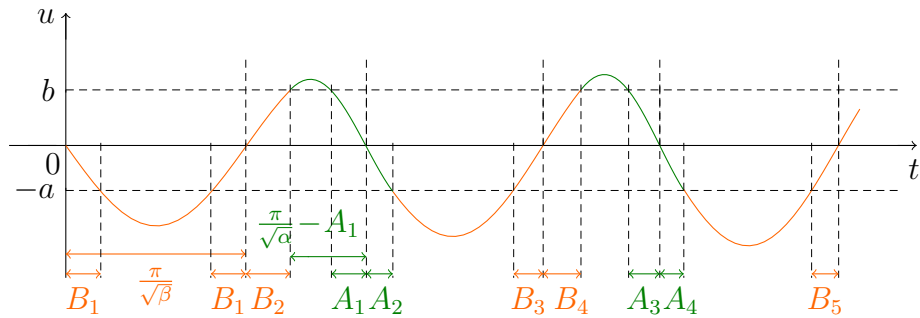
Odtud tedy plyne, že výrazy pro C_{2n-1} a C_{2n} , dané vztahy (3.11), (3.12), mají smysl.

Pokud pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ platí $C_{2m+1} \leq b$, potom přestává docházet k přepínání mezi α -částmi a β -částmi vln a řešení na intervalu $[\tau_{2m}, \pi]$ je dáno tvarem $u_{2m+1}(t) = (-1)^{k+1} C_{2m+1} \sin(\sqrt{\beta}(t - \pi))$, kde $k \in \mathbb{N}$ odpovídá počtu nulových bodů na intervalu $(\tau_{2m}, \pi]$ a $C_{2m+1} > 0$ (viz obr. 3.19).

V obou případech předpisy dalších větví získáme, sečteme-li délky α -částí a β -částí vln na intervalu $(0, \pi)$ a dáme-li tento součet do rovnosti s délkou intervalu π (viz obr. 3.20).

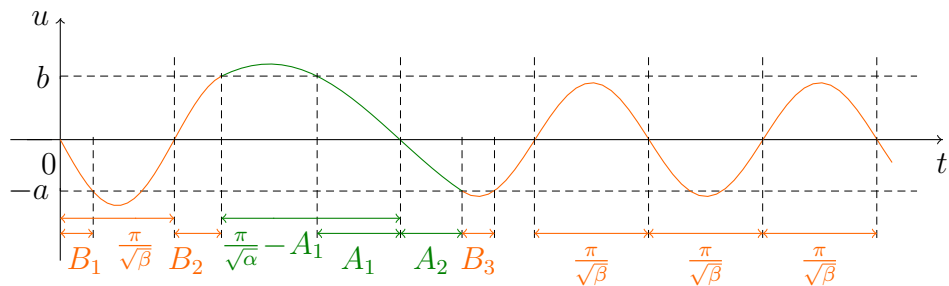


Obrázek 3.19: Ilustrace řešení $u(t)$ na intervalu $[0, \pi]$ pro $C_3 < b$, tj. $m = 1$, a $k = 4$ (α -části vln zeleně, β -části vln oranžově).



$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{b}{C_2}\right) & B_1 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{C_1}\right) \\
 A_2 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C_2}\right) & B_2 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{b}{C_1}\right) \\
 A_3 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{b}{C_4}\right) & B_3 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{C_3}\right) \\
 A_4 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C_4}\right) & B_4 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{b}{C_3}\right) \\
 & & B_5 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{C_5}\right)
 \end{aligned}$$

(a)



$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{b}{C_2}\right) & B_1 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{C_1}\right) \\
 A_2 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C_2}\right) & B_2 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{b}{C_1}\right) \\
 & & B_3 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{C_3}\right)
 \end{aligned}$$

(b)

Obrázek 3.20: Ilustrace odvození několika předpisů větví podle α -částí a β -částí vln na intervalu $(0, \pi)$ (a) pro řešení se zvětšující se amplitudou, (b) pro řešení, pro něj je $C_3 \leq b$.

4. Uvažujme, že na intervalu $(0, \pi)$ funkce $u(t)$ mění znaménko, ale není zde žádný bod přepnutí, což nastává pro $\beta \geq \frac{1}{b^2}$. V této oblasti je řešením $u(t) = \frac{1}{k} \sin(kt)$, $k \in \mathbb{N}$ a větve mají tvar $\beta = k^2$.

Nyní stručněji ukážeme postup pro $u'(0) = 1$, tedy $N(u(0)) = \alpha$.

1. Uvažujme-li, že na intervalu $(0, \pi)$ je funkce $u(t) \geq 0$, tedy není zde ani bod přepnutí, získáme řešení úlohy (3.10) ve tvaru $u(t) = \sin(t)$ a předpis první větve $\alpha = 1$.
2. Uvažujme-li právě jeden bod přepnutí τ na intervalu $(0, \pi)$, zaměříme se opět pouze na $\beta > 0$, $\alpha > 0$. Dostaneme na intervalu $[0, \tau]$ tvar řešení $u_1(t) = C_1 \sin(\sqrt{\alpha}t)$, kde $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} > a$ (aby došlo na intervalu $(0, \pi)$ k přepnutí), a na intervalu $[\tau, \pi]$ tvar řešení $u_2(t) = C_2 \sin(\sqrt{\beta}(t - \tau))$, kde $C_2 = \sqrt{a^2 + \frac{1-a^2\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{1+a^2(\beta-\alpha)}{\beta}} > 0$. Předpis pro druhou větev je

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{a}{C_1}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{a}{C_2}\right) = \pi.$$

Pro C_2 opět dostaneme $C_2 > a$ právě tehdy, když platí $C_1 > a$.

3. Uvažujme více bodů přepnutí τ_j , $J > 1$, $J \in \mathbb{N}$ na intervalu $(0, \pi)$, zaměříme se pouze na $\beta > 0$, $\alpha > 0$. Řešení lze zapsat na intervalu $[0, \tau_1]$ ve tvaru $u_1(t) = C_1 \sin(\sqrt{\alpha}t)$, $C_1 > 0$, a na intervalech $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ pro $j = 2n - 1 \leq J$, $n \in \mathbb{N}$ ve tvaru $u_{2n}(t) = C_{2n} \sin(\sqrt{\beta}(t - \gamma_{2n}))$, $C_{2n} > 0$, a pro $j = 2n \leq J$, $n \in \mathbb{N}$ ve tvaru $u_{2n+1}(t) = -C_{2n+1} \sin(\sqrt{\alpha}(t - \gamma_{2n+1}))$, kde $C_{2n+1} > 0$, přičemž přičemž γ_{j+1} je nulovým bodem na intervalu $(\tau_j, \tau_{j+1}]$. Pro $j = J$ je $\tau_{J+1} = \gamma_{J+1} = \pi$.

I nyní se v místech, kde $u(t) = b$ a kde $u(t) = -a$, stále stejná velikost derivace řešení nezachovává a tedy části řešení na podintervalech nejsou stejné. Uvažujme-li počet přepnutí J , potom z podmínek na spojitost a hladkost řešení v bodech napojení α -částí a β -částí vln dostaneme vztahy pro konstanty

$$C_{2n-1} = \sqrt{\frac{1 + (n-1)(a^2 - b^2)(\beta - \alpha)}{\alpha}}, \quad (3.15)$$

$$C_{2n} = \sqrt{\frac{1 + (na^2 - (n-1)b^2)(\beta - \alpha)}{\beta}}, \quad (3.16)$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $2n - 1 \leq J + 1$, $2n \leq J + 1$.

Podmínkami pro přepínání mezi α -částmi a β -částmi vln na intervalu $[0, \pi]$ je $C_{2n-1} > a$ a $C_{2n} > b$. Úpravou vztahů (3.15), (3.16) dostaneme

$$C_1 > a \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \frac{1}{a^2}$$

a

$$C_{2n} > b \quad \Leftrightarrow \quad C_{2n+1} > b \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \frac{1 + \alpha((n-1)b^2 - na^2)}{n(b^2 - a^2)},$$

přičemž je-li $C_{2n+1} > b$, potom platí $C_{2n+1} > a$.

Pro $\alpha < \frac{1}{a^2}$ platí

$$b < C_1 \quad \wedge \quad b < C_2 \quad \wedge \quad \dots < C_6 < C_4 < C_2,$$

tj. v celé oblasti, kde $0 < \alpha < \frac{1}{a^2}$, se amplitudy β -částí vln zmenšují, a pro $\beta < \alpha < \frac{1}{a^2}$ platí

$$b < C_1 < C_3 < C_5 < \dots,$$

tj. pro $\beta < \alpha < \frac{1}{a^2}$ se zmenšují také amplitudy α -částí vln (viz obr. 3.18b).

Výrazy pod odmocninou ve vztazích pro C_{2n-1} a C_{2n} jsou kladné. Pro C_1 to platí triviálně, pro C_{2n+1} platí

$$\frac{1 + n(a^2 - b^2)(\beta - \alpha)}{\alpha} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \alpha + \frac{1}{n(b^2 - a^2)}.$$

Z podmínky pro $2n$ -té a $(2n + 1)$ -ní přepnutí dostaneme

$$\beta < \alpha \frac{(n-1)b^2 - na^2}{n(b^2 - a^2)} + \frac{1}{n(b^2 - a^2)}$$

a zároveň platí

$$\frac{(n-1)b^2 - na^2}{n(b^2 - a^2)} < 1.$$

V případě, že $na^2 - (n-1)b^2 > 0$, pro C_{2n} platí

$$\frac{1 + (na^2 - (n-1)b^2)(\beta - \alpha)}{\beta} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta + \frac{1}{na^2 - (n-1)b^2},$$

z podmínky pro $2n$ -té a $(2n + 1)$ -ní přepnutí obdržíme

$$\alpha < \beta \frac{n(b^2 - a^2)}{(n-1)b^2 - na^2} + \frac{1}{na^2 - (n-1)b^2}$$

a zároveň platí

$$\frac{n(b^2 - a^2)}{(n-1)b^2 - na^2} < 1.$$

Pro případ $na^2 - (n-1)b^2 < 0$ pro C_{2n} dostaneme

$$\frac{1 + (na^2 - (n-1)b^2)(\beta - \alpha)}{\beta} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \beta + \frac{1}{na^2 - (n-1)b^2},$$

z podmínky pro $2n$ -té a $(2n + 1)$ -ní přepnutí

$$\alpha > \beta \frac{n(b^2 - a^2)}{na^2 - (n-1)b^2} + \frac{1}{na^2 - (n-1)b^2}$$

a zároveň platí

$$\frac{n(b^2 - a^2)}{na^2 - (n-1)b^2} > 1.$$

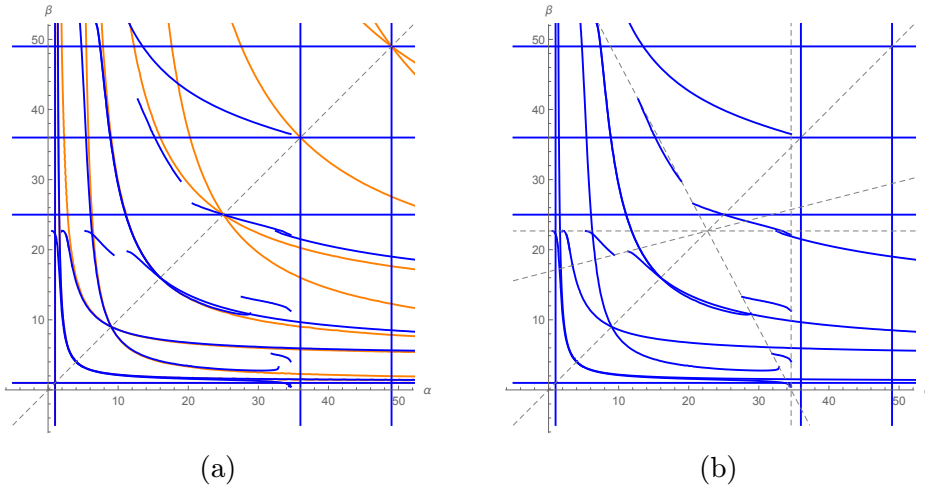
Tzn. výrazy pro C_{2n-1} a C_{2n} , dané vztahy (3.15), (3.16), mají smysl.

Jestliže pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ platí $C_{2m} \leq b$, potom přestává docházet k přepínání mezi α -částmi a β -částmi vln a řešení na intervalu $[\tau_{2m-1}, \pi]$ je dáno ve tvaru $u_{2m}(t) = (-1)^{k+1} C_{2m} \sin(\sqrt{\beta}(t - \pi))$, kde $k \in \mathbb{N}$ odpovídá počtu nulových bodů na intervalu $(\tau_{2m}, \pi]$ a $C_{2m} > 0$.

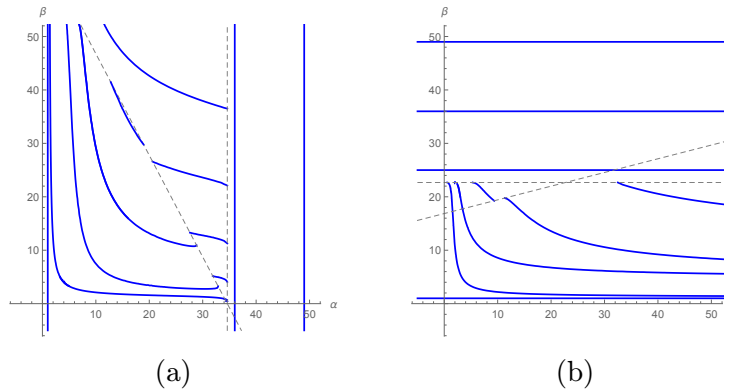
V obou případech předpisy dalších větví opět získáme, pokud sečteme délky α -částí a β -částí vln na intervalu $(0, \pi)$ a dáme tento součet do rovnosti s délkou intervalu π .

4. Uvažujeme-li, že na intervalu $(0, \pi)$ funkce $u(t)$ mění znaménko, ale není zde žádný bod přepnutí, získáme řešení úlohy (3.10) pro $\alpha \geq \frac{1}{a^2}$ ve tvaru $u(t) = \frac{1}{k} \sin(kt)$, $k \in \mathbb{N}$ a předpis větví $\alpha = k^2$.

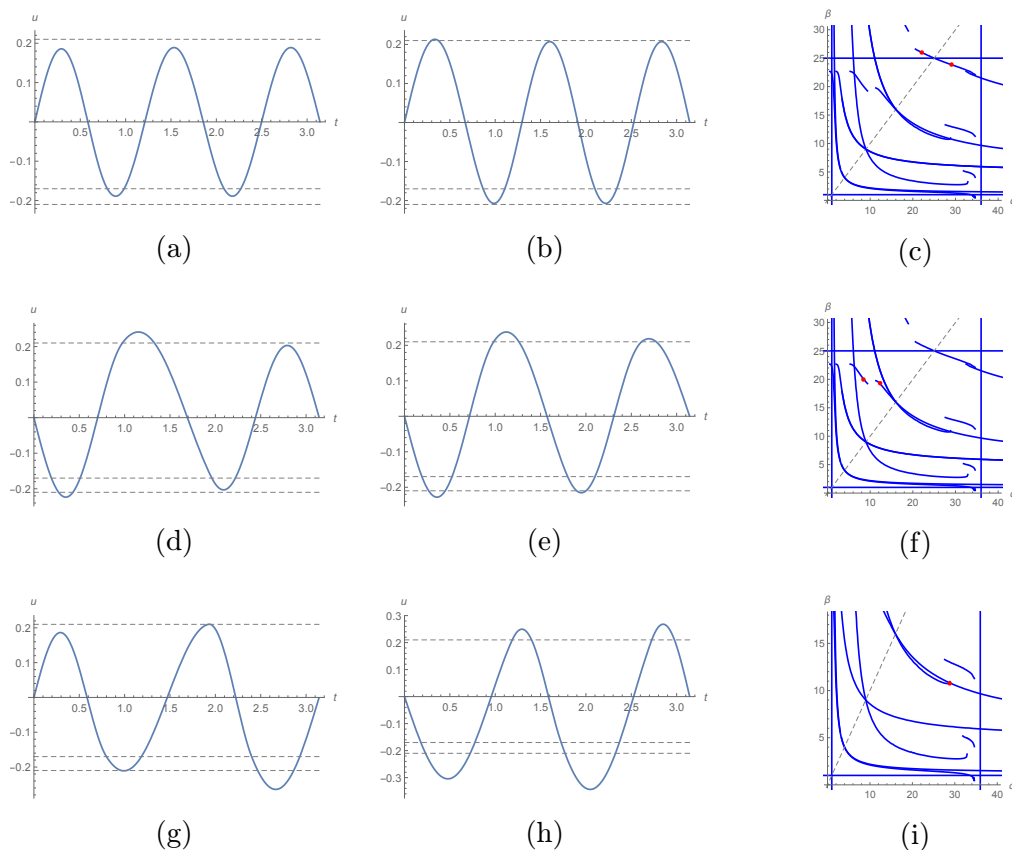
Všechny předpisy dohromady popisují spektrum S_3 (spektrum S_3 viz obr. 3.21, 3.22 a příloha B, všimněme si přímkou rozdělujících rovinu $\alpha\beta$, jež odpovídají podmínkám pro přepínání, a zobecněné vlastní funkce viz obr. 3.23). \square



Obrázek 3.21: (a), (b) Zobecněné spektrum S_3 pro $a = 0.17$, $b = 0.21$ (modrá) a Fučíkovo spektrum Σ (oranžová).



Obrázek 3.22: Množiny (a) $\bigcup_{k=1}^7 M_k^{S_3}$, (b) $\bigcup_{k=8}^{14} M_k^{S_3}$, které tvoří zobecněné spektrum S_3 pro $a = 0.17$, $b = 0.21$.



Obrázek 3.23: (a) – (i) Některé zobecněné vlastní funkce a odpovídající zobecněná vlastní čísla zvýrazněná v zobecněném spektru S_3 pro $a = 0.17$, $b = 0.21$.

Důsledek 3.8. *Zobecněným spektrem úlohy*

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} \alpha, & u \geq 0, \\ \beta, & u \leq b, \end{cases} \\ u(0) = u(\pi) = 0, \\ |u'(0)| = 1, \\ N(u(0)) = \begin{cases} \alpha, & u'(0) = +1, \\ \beta, & u'(0) = -1, \end{cases} \end{cases}$$

v níž $b > 0$, je $S_4 = \bigcup_{k=1}^{14} M_k^{S_4}$, kde

$$M_1^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} : \alpha = 1 \right\},$$

$$M_2^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_2 > b : \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi \right\},$$

$$M_3^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_{2n} > b : \right.$$

$$\left. \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l+1}}\right) + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_4^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_{2n} \leq b : \right. \\ \left. \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l+1}}\right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_5^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_2 \leq b : \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi, k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_6^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \frac{1}{a^2} \wedge C_{2n+2} \leq b : \right. \\ \left. \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l+1}}\right) + \frac{(n+k)\pi}{\sqrt{\beta}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) = \pi, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_7^{S_4} = \emptyset,$$

kde pro všechny $n \in \mathbb{N}$ je

$$C_{2n-1} = \sqrt{\frac{1 + (n-1)b^2(\alpha - \beta)}{\alpha}}, \\ C_{2n} = \sqrt{\frac{1 + (n-1)b^2(\alpha - \beta)}{\beta}},$$

a dále

$$M_8^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2} : \beta = 1 \right\},$$

$$M_9^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2} : \right. \\ \left. \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{b}{C_2}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin\left(\frac{b}{C_1}\right) = \pi, \right\},$$

$$M_{10}^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2} \wedge C_{2n+1} > b : \right. \\ \left. \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l-1}}\right) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_{11}^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2} \wedge C_{2n+1} > b : \right. \\ \left. \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l=1}^{n+1} \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l=1}^{n+1} \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l-1}}\right) = \pi, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_{12}^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta < \frac{1}{b^2}, \wedge C_{2n+1} \leq b : \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) + \frac{(n+k)\pi}{\sqrt{\beta}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l=1}^n \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l-1}}\right) = \pi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\},$$

$$M_{13}^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \beta < \frac{1}{b^2}, \quad \wedge \quad C_{2n+3} \leq b : \right.$$

$$\left. \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l=1}^{n+1} \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l}}\right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l=1}^{n+1} \arcsin\left(\frac{b}{C_{2l-1}}\right) = \pi, \quad n \in \mathbb{N} \right\},$$

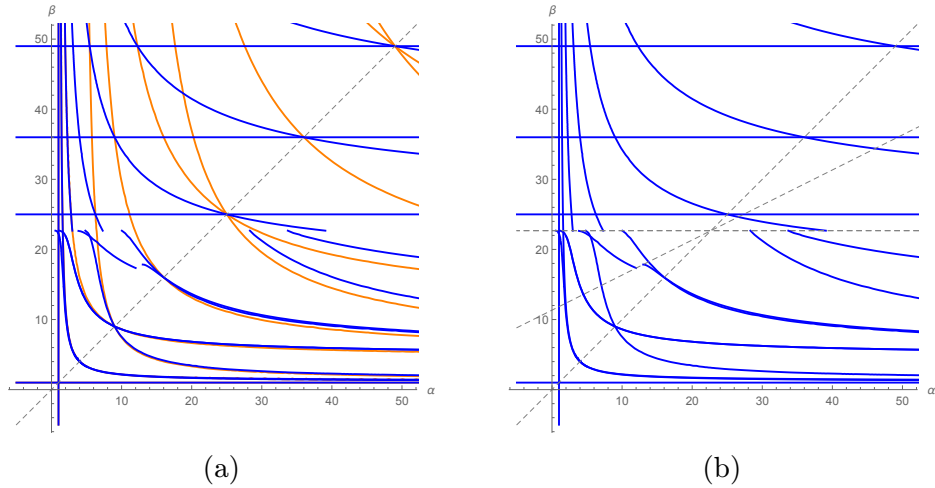
$$M_{14}^{S_4} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \beta \geq \frac{1}{b^2} : \beta = k^2, \quad k \in \mathbb{N} \right\},$$

kde pro všechny $n \in \mathbb{N}$ je

$$C_{2n-1} = \sqrt{\frac{1 + (n-1)b^2(\alpha - \beta)}{\beta}},$$

$$C_{2n} = \sqrt{\frac{1 + nb^2(\alpha - \beta)}{\alpha}}.$$

Důkaz. Zobecněné spektrum S_4 dostaneme ze zobecněného spektra S_3 limitním přechodem $a \rightarrow 0$, tj. $\lim_{a \rightarrow 0} S_3 = S_4$ (spektrum S_4 viz obr. 3.24, 3.25 a příloha B a zobecněné vlastní funkce viz obr. 3.26). \square



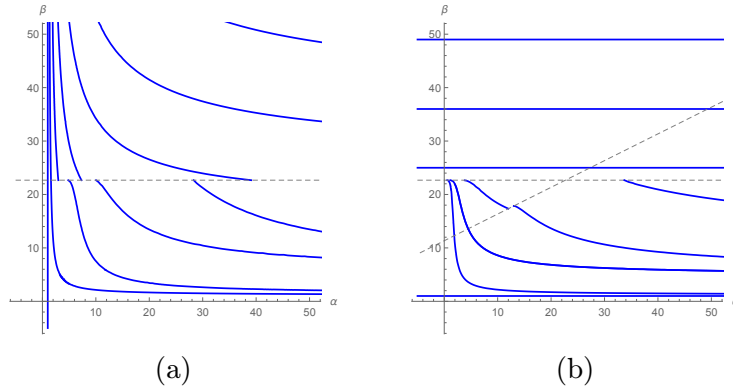
Obrázek 3.24: (a), (b) Zobecněné spektrum S_4 pro $b = 0.21$ (modrá) a Fučíkovo spektrum Σ (oranžová).

Poznámka. Pro množiny, které tvoří zobecněné spektrum S_3 , platí pro $a \geq 1$

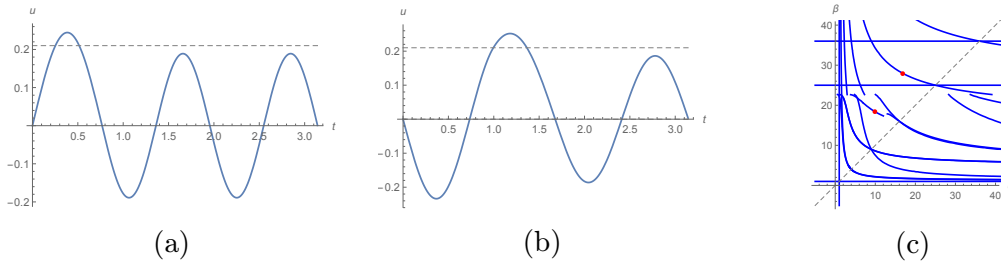
$$M_1^{S_3} = M_2^{S_3} = M_3^{S_3} = M_4^{S_3} = M_5^{S_3} = M_6^{S_3} = \emptyset$$

a pro $b \geq 1$

$$M_8^{S_3} = M_9^{S_3} = M_{10}^{S_3} = M_{11}^{S_3} = M_{12}^{S_3} = M_{13}^{S_3} = \emptyset.$$



Obrázek 3.25: Množiny (a) $\bigcup_{k=1}^7 M_k^{S_4}$, (b), $\bigcup_{k=8}^{14} M_k^{S_4}$, které tvoří zobecněné spektrum S_4 pro $b = 0.21$.



Obrázek 3.26: (a) – (c) Některé zobecněné vlastní funkce a odpovídající zobecněná vlastní čísla zvýrazněná v zobecněném spektru S_4 pro $b = 0.21$.

Věta 3.9. Pro zobecněné spektrum S_1 úlohy (3.2) a zobecněné spektrum S_3 úlohy (3.10) platí

$$\lim_{b \rightarrow a} S_3 = S_1.$$

Důkaz. Pokud $b \rightarrow a$, potom pro vztahy pro C_n , $n \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow a} \sqrt{\frac{1 + (n-1)(a^2 - b^2)(\beta - \alpha)}{\alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \\ \lim_{b \rightarrow a} \sqrt{\frac{1 + (na^2 - (n-1)b^2)(\beta - \alpha)}{\beta}} &= \sqrt{\frac{1 + a^2(\beta - \alpha)}{\beta}} = \sqrt{a^2 + \frac{1 - a^2\alpha}{\beta}}, \\ \lim_{b \rightarrow a} \sqrt{\frac{1 + (n-1)(b^2 - a^2)(\alpha - \beta)}{\beta}} &= \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \\ \lim_{b \rightarrow a} \sqrt{\frac{1 + (nb^2 - (n-1)a^2)(\alpha - \beta)}{\alpha}} &= \sqrt{\frac{1 + b^2(\alpha - \beta)}{\alpha}} = \sqrt{b^2 + \frac{1 - b^2\beta}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Díky čemuž pro větve zobecněného spektra S_3 dostaneme

$$\lim_{b \rightarrow a} M_1^{S_3} = \lim_{b \rightarrow a} \{\alpha = 1\} = \{\alpha = 1\},$$

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow a} M_2^{S_3} &= \lim_{b \rightarrow a} \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{a}{C_1} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{a}{C_2} \right) = \pi \right\} = \\
&= \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin (a\sqrt{\alpha}) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{a}{C_2} \right) = \pi \right\}, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_3^{S_3} &= \lim_{b \rightarrow a} \left\{ \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l-1}} \right) - \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l+1}} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^n - \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) + \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) \right) = \pi \right\} = \\
&= \left\{ \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi \right\}, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_4^{S_3} &= \lim_{b \rightarrow a} \left\{ \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l-1}} \right) - \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l+1}} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} - \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) + \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) \right) = \pi \right\} = \\
&= \left\{ \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin (a\sqrt{\alpha}) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{a}{C_2} \right) = \pi \right\}, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_5^{S_3} &= \emptyset, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_6^{S_3} &= \emptyset, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_7^{S_3} &= \lim_{b \rightarrow a} \{ \alpha = k^2 \} = \{ \alpha = k^2 \}, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_8^{S_3} &= \lim_{b \rightarrow a} \{ \beta = 1 \} = \{ \beta = 1 \}, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_9^{S_3} &= \lim_{b \rightarrow a} \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{b}{C_2} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin \left(\frac{b}{C_1} \right) = \pi, \right\} = \\
&= \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{b}{C_2} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin (a\sqrt{\beta}) = \pi, \right\}, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_{10}^{S_3} &= \lim_{b \rightarrow a} \left\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^n - \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) + \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l-1}} \right) - \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l+1}} \right) \right) = \pi \right\} = \\
&= \left\{ \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi \right\}, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_{11}^{S_3} &= \lim_{b \rightarrow a} \left\{ \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} - \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l}} \right) + \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l}} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \arcsin \left(\frac{b}{C_{2l-1}} \right) - \sum_{l=1}^n \arcsin \left(\frac{a}{C_{2l+1}} \right) \right) = \pi \right\} = \\
&= \left\{ \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\frac{a}{C_2} \right) + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arcsin (a\sqrt{\beta}) = \pi \right\}, \\
\lim_{b \rightarrow a} M_{12}^{S_3} &= \emptyset,
\end{aligned}$$

$$\lim_{b \rightarrow a} M_{13}^{S_3} = \emptyset,$$

$$\lim_{b \rightarrow a} M_{14}^{S_3} = \lim_{b \rightarrow a} \{\beta = k^2\} = \{\beta = k^2\},$$

tj. platí

$$\lim_{b \rightarrow a} \{M_1^{S_3} \cup M_3^{S_3}\} = M_2^{S_1},$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \{M_2^{S_3} \cup M_4^{S_3}\} = M_1^{S_1},$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \{M_5^{S_3} \cup M_6^{S_3}\} = \emptyset,$$

$$\lim_{b \rightarrow a} M_7^{S_3} = M_3^{S_1},$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \{M_8^{S_3} \cup M_{10}^{S_3}\} = M_5^{S_1},$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \{M_9^{S_3} \cup M_{11}^{S_3}\} = M_4^{S_1},$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \{M_{12}^{S_3} \cup M_{13}^{S_3}\} = \emptyset,$$

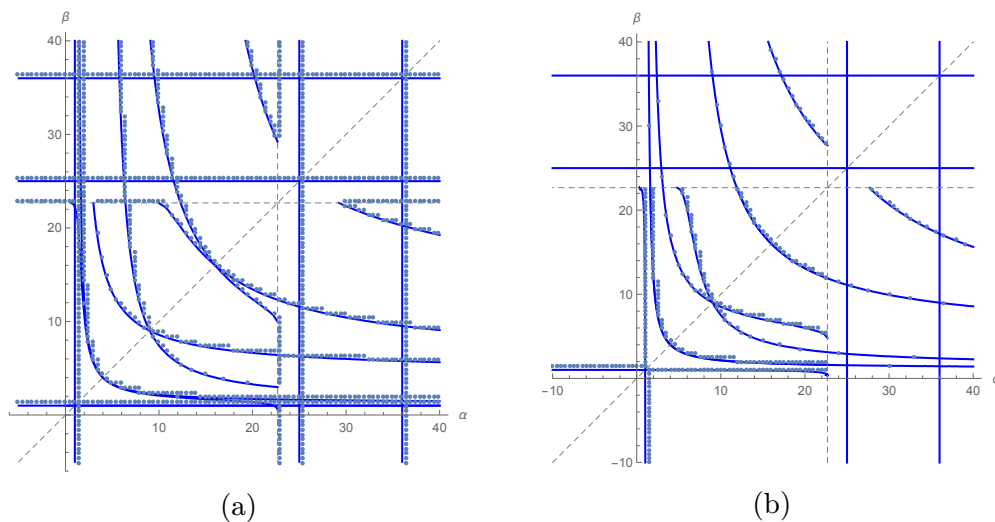
$$\lim_{b \rightarrow a} M_{14}^{S_3} = M_6^{S_1},$$

Neboli platí $\lim_{b \rightarrow a} S_3 = S_1$.

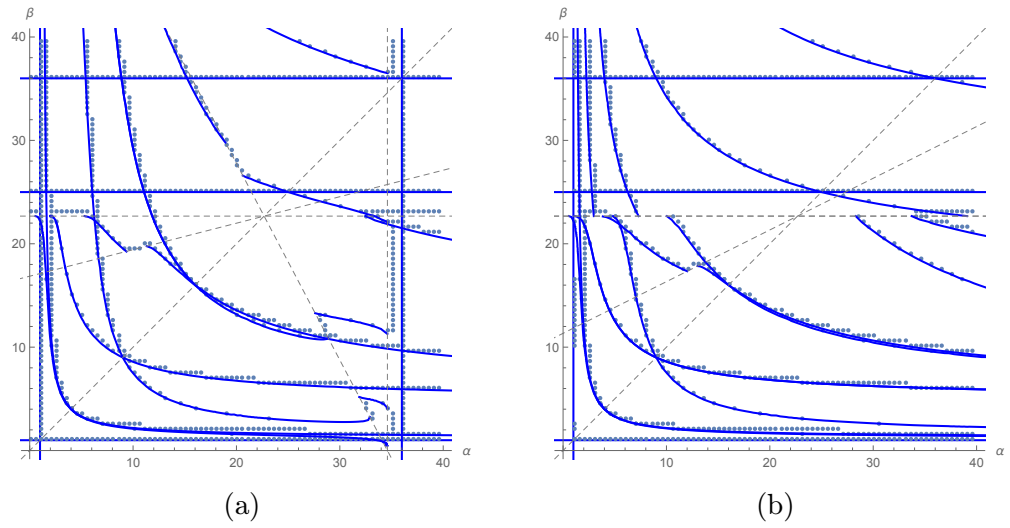
□

3.3.5 Numerické experimenty

Pro některé hodnoty α , β jsme s pomocí metody střelby (viz [17, s. 16]) provedli numerický výpočet zobecněných spekter a výsledky graficky porovnali s výsledky z teoretické části (viz obr. 3.27, 3.28).



Obrázek 3.27: (a) Zobecněné spektrum S_1 a (b) zobecněné spektrum S_2 pro $a = 0.21$.



Obrázek 3.28: (a) Zobecněné spektrum S_3 a (b) zobecněné spektrum S_4 pro $a = 0.17$, $b = 0.21$.

Literatura

- [1] BERTOTTI, Giorgio, MAYERGOYZ, Isaak D. *The Science of Hysteresis Vol. I.: Mathematical modeling and applications*. 1. vyd. Amsterdam: Elsevier, 2006. 712 s. ISBN 978-0-12-369431-7.
- [2] TAKÁCS, Jenő. *Mathematics of Hysteretic Phenomena: The $T(x)$ Model for the Description of Hysteresis*. 1. vyd. Weinheim: Wiley VCH, 2003. 161 s. ISBN 3-527-40401-5.
- [3] CROSS, Rod, GRINFELD, Michael a LAMBA, Harbir. Hysteresis and Economics. *IEEE Control Systems*, 2009, vol. 29, s. 30–43.
- [4] ACHO, Leonardo a VIDAL, Yolanda. Hysteresis modeling of a class of RC-OTA hysteretic-chaotic generators. *PhysCon*, 2011.
- [5] OH, JinHyoung a BERNSTEIN, Dennis S. Piecewise Linear Identification for the Rate-Independent and Rate-Dependent Duhem Hysteresis Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, vol. 52, no. 3, s. 576–582.
- [6] HOROWITZ, Paul a HILL, Winfield. *The Art of Electronics*. 2. vyd. Cambridge University Press, 1989. 1125 s. ISBN 978-0-521-37095-7.
- [7] BALÁTĚ, Jaroslav. *Automatické řízení*. 1. vyd. Praha: Ben – technická literatura, 2003. 664 s. ISBN 80-7300-020-2.
- [8] KUFNER, Alois. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 1. vyd. Plzeň: ZČU Plzeň, 1993. 159 s. ISBN 80-7082-106-X.
- [9] CODDINGTON, Earl A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. 1. vyd. New York: Dover, 1989. 304 s. ISBN 978-0-486-65942-9.
- [10] FUČÍK, Svatopluk. Boundary value problems with jumping nonlinearities. *Časopis pro pěstování matematiky*, 1976, vol. 101, s. 69–87.
- [11] DRÁBEK, Pavel, HOLUBOVÁ, Gabriela, MATAS, Aleš a NEČESAL, Petr. Nonlinear models of suspension bridges: discussion of the results. *Applications of Mathematics*, 2003, vol. 48, no. 6, s. 497–514.
- [12] MORENO, U. F., PERES, P. L. D. a BONATTI, I. S. Contributions to the analysis of second order piecewise linear systems with chaotic oscillations. *International Symposium on Circuits and Systems*, 2000, vol. 1, s. 715–718.

- [13] FILIPPOV, Aleksei Fedorovich. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1988. 314 s. ISBN 90-277-2699-X.
- [14] KRASNOSEL'SKIĀ, M. A. a POKROVSKIĀ, A. V. *Systems with hysteresis*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 428 s. ISBN 3-540-15543-0.
- [15] MORENO, U. F., PERES, P. L. D. a BONATTI, I. S. Analysis of piecewise-linear oscillators with hysteresis. *Transactions on Circuits and Systems*, 2003, vol. 50, no. 8, s. 1120–1124.
- [16] SERGEJEVA, Natalija. Fučík spectrum for the second order BVP with non-local boundary condition. *Nonlinear Anal., Model. Control*, 2007, vol. 12, s. 419–429.
- [17] MÍKA, Stanislav, PŘIKRYL, Petr. *Numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic: Okrajové úlohy*. 1. vyd. Plzeň: ZČU Plzeň, 1994. 124 s. ISBN 80-7082-159-0.

Příloha A

Počáteční úlohy se skokem

Diferenciální rovnice se skokem,
příslušné zobecněné řešení.

$$u' = N(u),$$
$$u(t) = N(u)t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$u' = N(u)u,$$
$$u(t) = Ce^{N(u)t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$u' = N(u)u + b,$$
$$u(t) = \frac{Ce^{N(u)t} - b}{N(u)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$u'' + cu = N(u),$$
$$u(t) = C_1 \cos(\sqrt{ct}) + C_2 \sin(\sqrt{ct}) + \frac{N(u)}{c}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$u'' + N(u)u = 0,$$
$$u(t) = C_1 \cos(\sqrt{N(u)t}) + C_2 \sin(\sqrt{N(u)t}), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$u'' - 2bu' + cu = N(u), \quad b^2 < c,$$
$$u(t) = e^{bt} \left(C_1 \cos(\sqrt{c - b^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{c - b^2}t) \right) + \frac{N(u)}{c}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$u'' - 2bu' + cu = N(u), \quad b^2 = c,$$
$$u(t) = (C_1 + C_2 t)e^{bt} + \frac{N(u)}{c}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$u'' - 2N(u)u' + cu = 0, \quad b^2 < c,$$
$$u(t) = e^{bt} \left(C_1 \cos(\sqrt{c - N^2(u)t}) + C_2 \sin(\sqrt{c - N^2(u)t}) \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$u'' + N(u)u' = 0,$$
$$u(t) = C_1 + C_2 e^{-N(u)t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tabulka A.1: Přehled diferenciálních rovnic se skokem a jejich zobecněných řešení.

Následuje seznam řešených počátečních úloh s vykreslenými grafy řešení.

$$\begin{cases} u' = N(u), & N(u) = \begin{cases} 1, & u < 0, \\ -1, & u \geq 0, \end{cases} \\ u(0) = -2. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{cases} u' = N(u), & N(u) = \begin{cases} 3, & u < 2, \\ -0.5, & u > 1, \end{cases} \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{cases} u' = N(u)u, & N(u) = \begin{cases} -3, & u > 0.5, \\ 0.7, & u < 3, \end{cases} \\ u(0) = 5. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{cases} u' = N(u)u, & N(u) = \begin{cases} -1, & u < -0.5, \\ 2, & u > -3, \end{cases} \\ u(0) = -4. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{cases} u' = N(u)u + 1, & N(u) = \begin{cases} -0.5, & u > -3, \\ 0.5, & u < 1, \end{cases} \\ u(0) = -4. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{cases} u'' + 4u = N(u), & N(u) = \begin{cases} 1.8, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ 1, & u < 0, \end{cases} \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{cases} u'' + 4u = N(u), & N(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ 1.8, & u < 0, \end{cases} \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{cases} u'' + 4u = N(u), & N(u) = \begin{cases} -1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -4, & u < 0, \end{cases} \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{cases} u'' + 4u = N(u), & N(u) = \begin{cases} -1, & u > -0.2, \\ -4, & u < 0.8, \end{cases} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 5. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{cases} u'' + 4u = N(u), & N(u) = \begin{cases} 1, & u < 0.8, \\ -4, & u > -0.2, \end{cases} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 5. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} 0.25, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ 4, & u < 0, \end{cases} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} 0.25, & u > -0.4, \\ 4, & u < 0.4, \end{cases} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

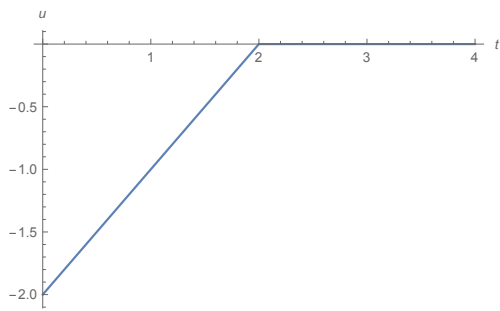
$$\begin{cases} u'' + N(u)u = 0, & N(u) = \begin{cases} 20, & u > -0.4, \\ 1, & u < 0.4, \end{cases} \\ u(0) = -0.5, \\ u'(0) = -0.5. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{cases} u'' - u' + 20u = N(u), & N(u) = \begin{cases} -3.5, & u < 2, \\ 34.6, & u > 0, \end{cases} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = -1. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

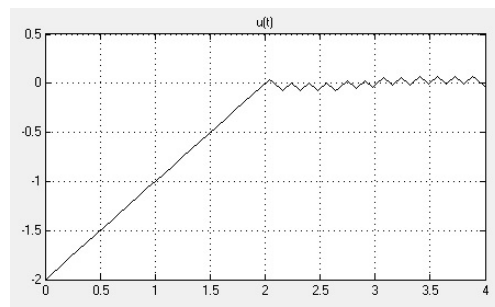
$$\begin{cases} u'' + 4u' + 4u = N(u), & N(u) = \begin{cases} 1, & u < 0.1, \\ -10, & u > -0.1, \end{cases} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{cases} u'' - 2N(u)u' + 20u = 0, & N(u) = \begin{cases} 1, & u < 2, \\ -1, & u > -1.5, \end{cases} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{cases} u'' + N(u)u' = 0, & N(u) = \begin{cases} 5, & u > 0.5, \\ -5, & u < 8. \end{cases} \\ u(0) = 5, \\ u'(0) = 2. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

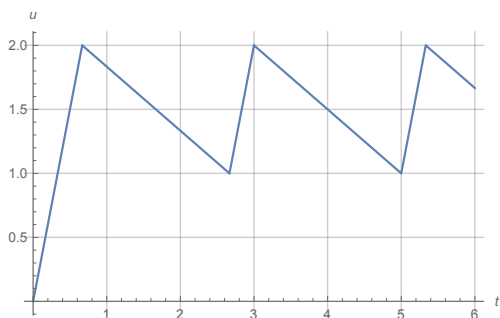


(a)

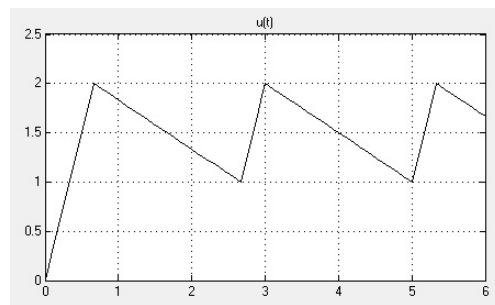


(b)

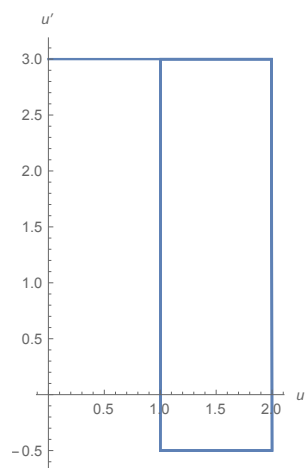
Obrázek A.1: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.1) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab.



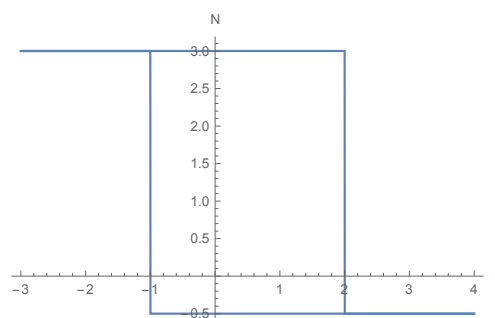
(a)



(b)

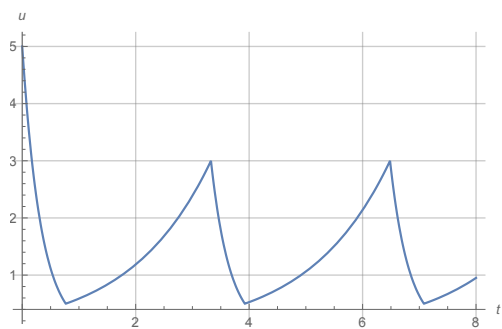


(c)

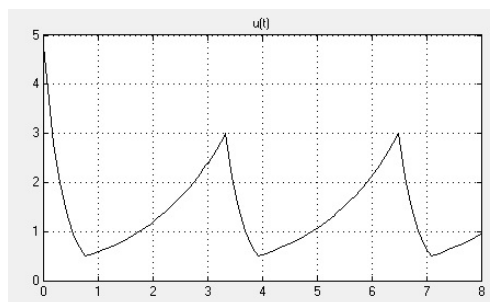


(d)

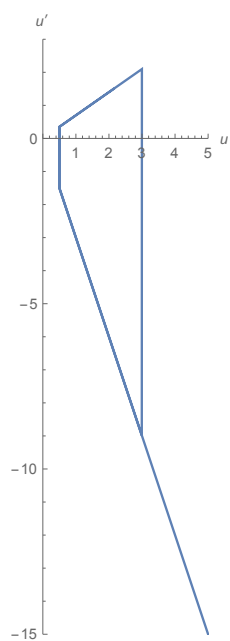
Obrázek A.2: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.2) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab, (c) fázový portrét, (d) hysterezní smyčka (Mathematica).



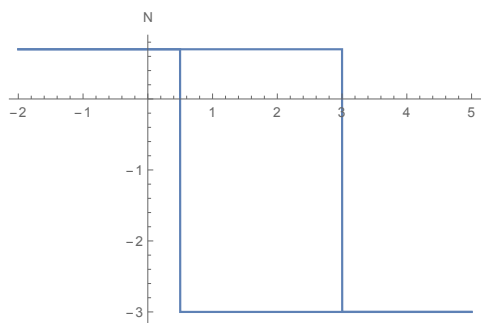
(a)



(b)

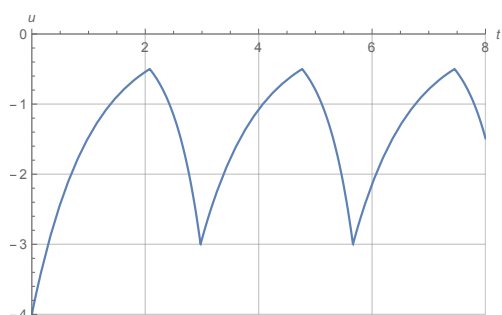


(c)

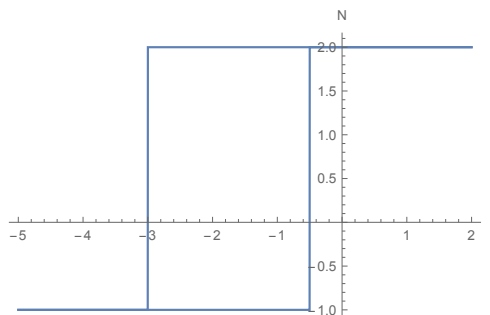


(d)

Obrázek A.3: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.3) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab, (c) fázový portrét, (d) hysterezní smyčka (Mathematica).

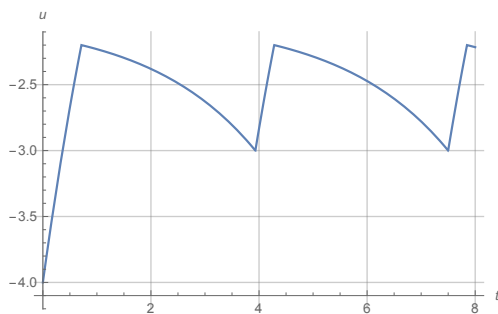


(a)

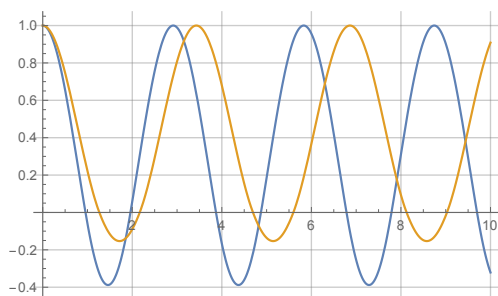


(b)

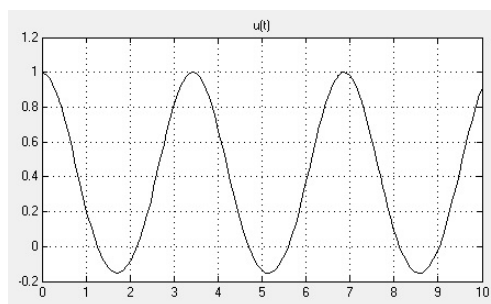
Obrázek A.4: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.4), (b) hysterezní smyčka (Mathematica).



Obrázek A.5: Graf řešení úlohy (A.5) (Mathematica).

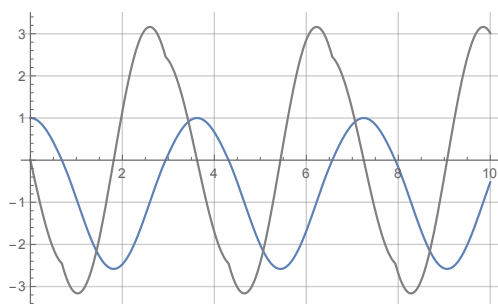


(a)

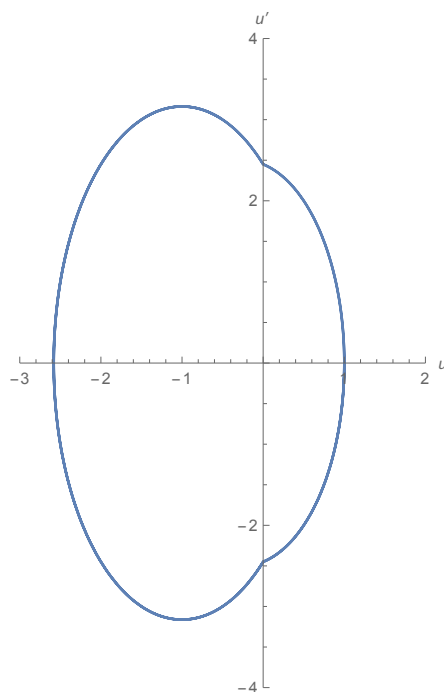


(b)

Obrázek A.6: (a) Grafy řešení $u(t)$ úlohy (A.6) (modrá) a úlohy (A.7) (oranžová) v softwaru Mathematica, (b) graf řešení úlohy (A.6) v softwaru Matlab.

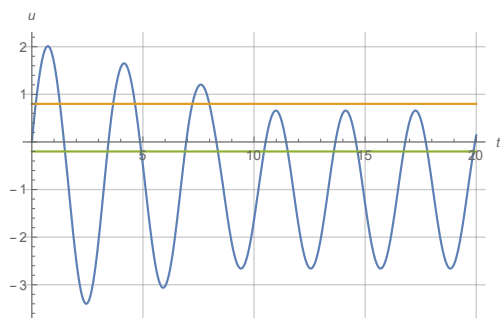


(a)

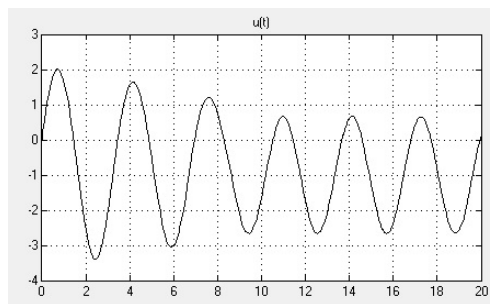


(b)

Obrázek A.7: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.8) (modrá) a derivace řešení $u'(t)$ (šedá), (b) fázový portrét (Mathematica).

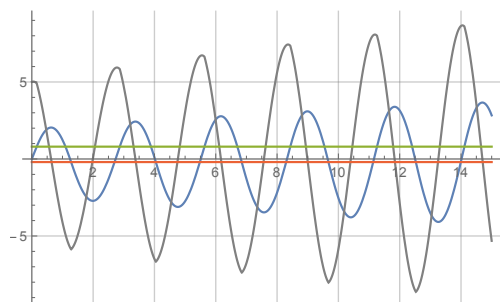


(a)

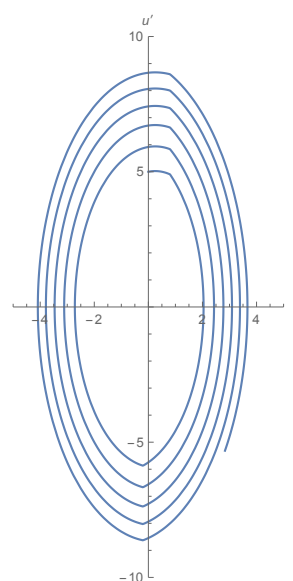


(b)

Obrázek A.8: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.9) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab.

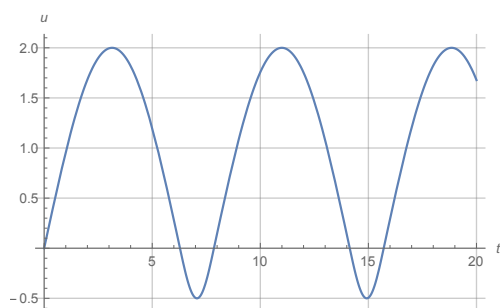


(a)

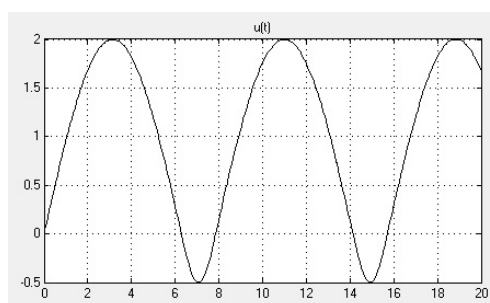


(b)

Obrázek A.9: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.10) (modrá) a derivace řešení $u'(t)$ (šedá), (b) fázový portrét (Mathematica).

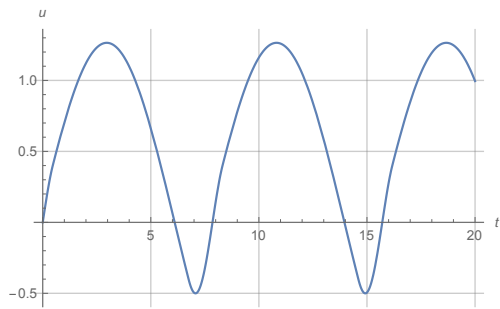


(a)

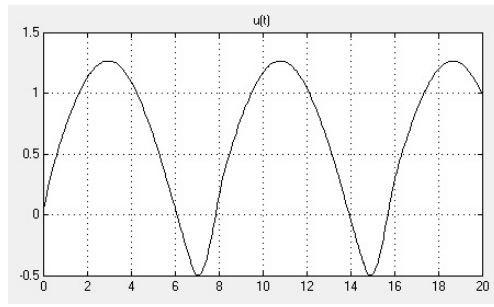


(b)

Obrázek A.10: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.11) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab.

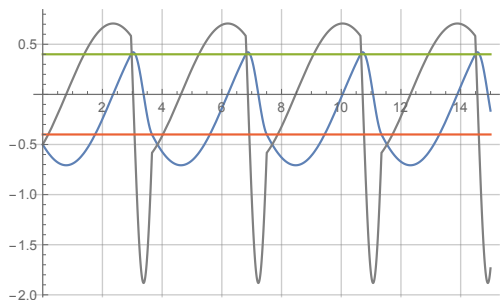


(a)

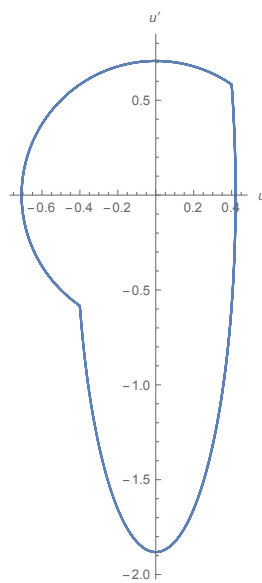


(b)

Obrázek A.11: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.12) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab.

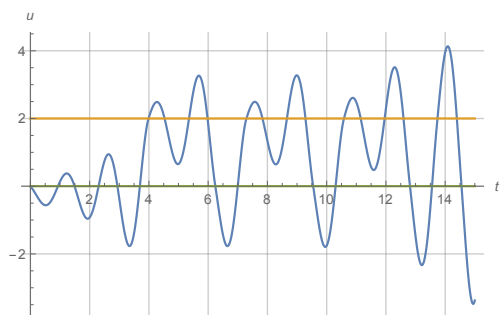


(a)

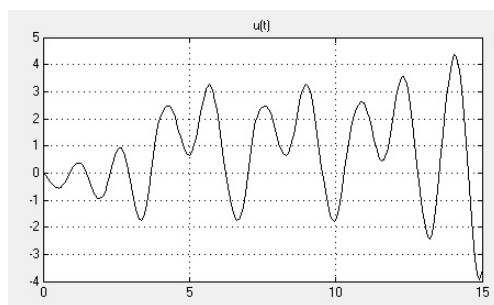


(b)

Obrázek A.12: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.13) (modrá) a derivace řešení $u'(t)$ (šedá), (b) fázový portrét (Mathematica).

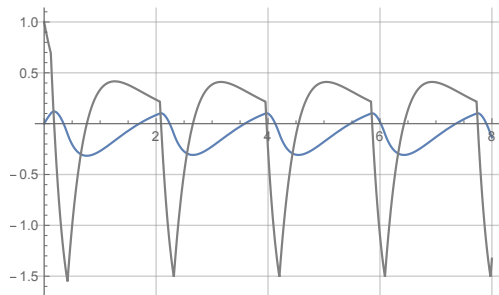


(a)

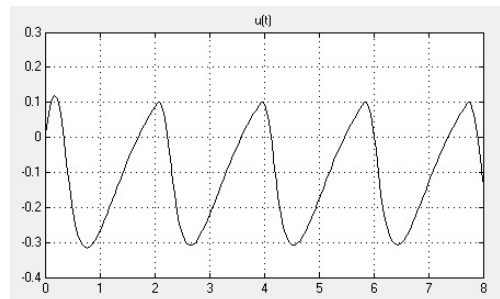


(b)

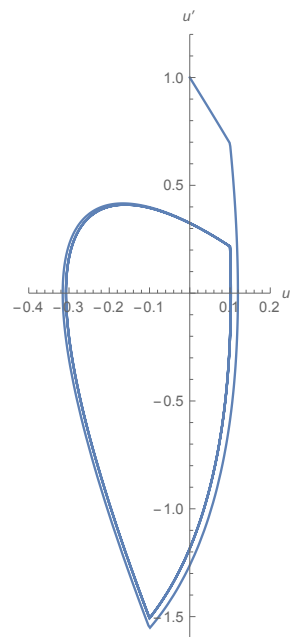
Obrázek A.13: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.14) v softwaru (a) Mathematica, (b) Matlab.



(a)

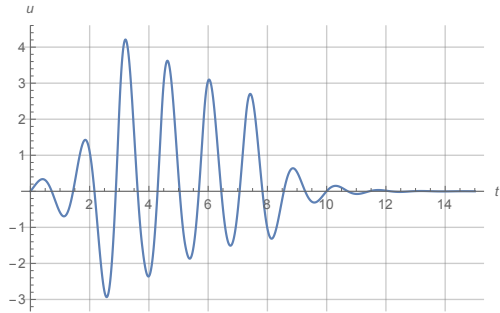


(b)

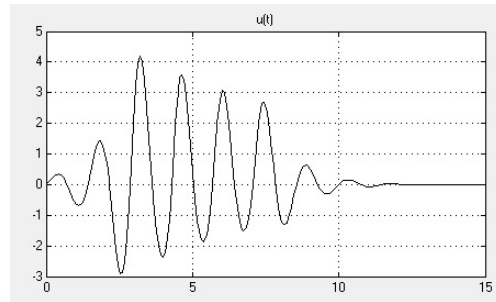


(c)

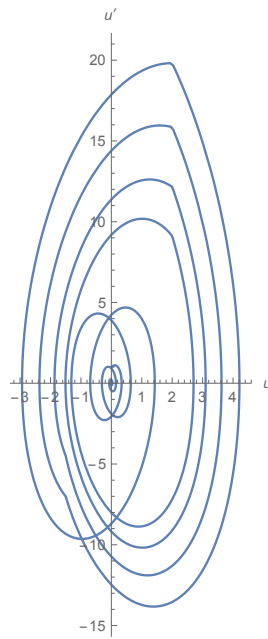
Obrázek A.14: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.15) (modrá) a derivace řešení $u'(t)$ (šedá) v softwaru Mathematica, (b) graf řešení $u(t)$ úlohy (A.15) v softwaru Matlab, (c) fázový portrét (Mathematica).



(a)

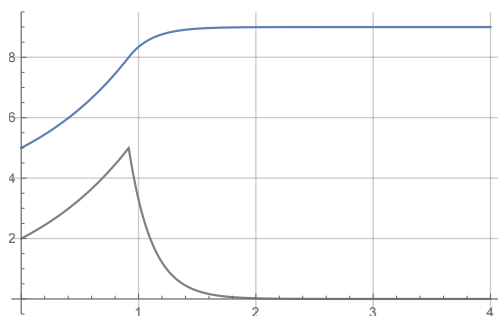


(b)

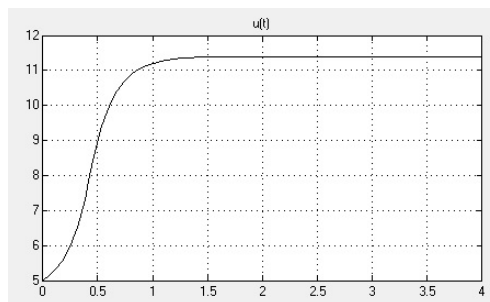


(c)

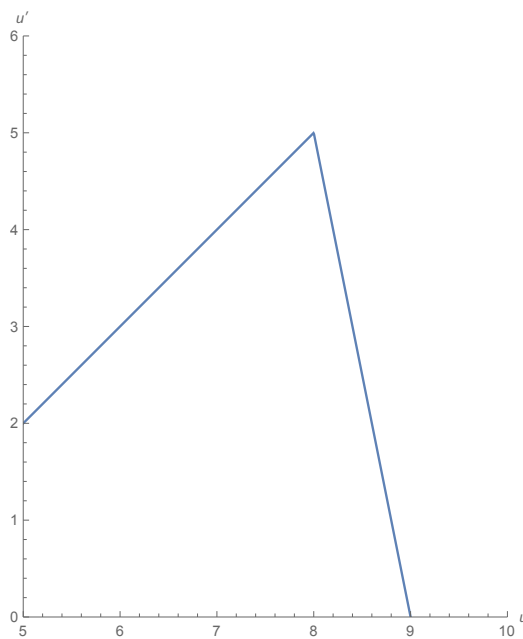
Obrázek A.15: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.16) (modrá) a derivace řešení $u'(t)$ (šedá) v softwaru Mathematica, (b) graf řešení $u(t)$ úlohy (A.16) v softwaru Matlab, (c) fázový portrét (Mathematica).



(a)



(b)

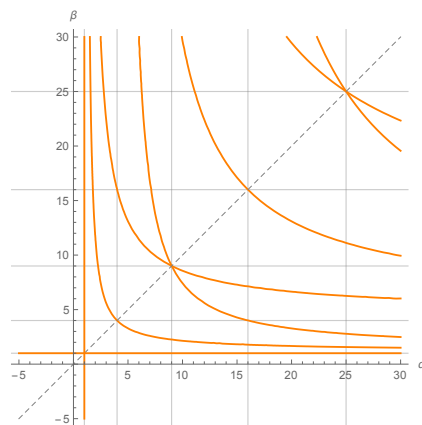


(c)

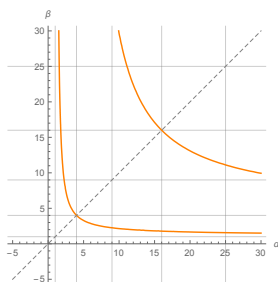
Obrázek A.16: (a) Graf řešení $u(t)$ úlohy (A.17) (modrá) a derivace řešení $u'(t)$ (šedá) v softwaru Mathematica, (b) graf řešení $u(t)$ úlohy (A.17) v softwaru Matlab, (c) fázový portrét (Mathematica).

Příloha B

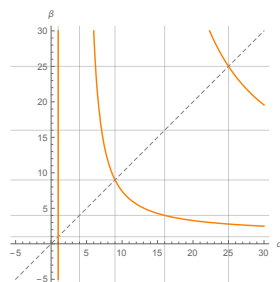
Spektra



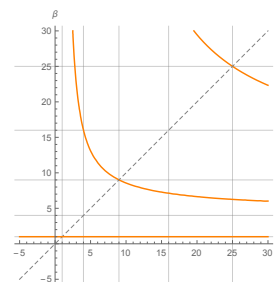
(a)



(b)

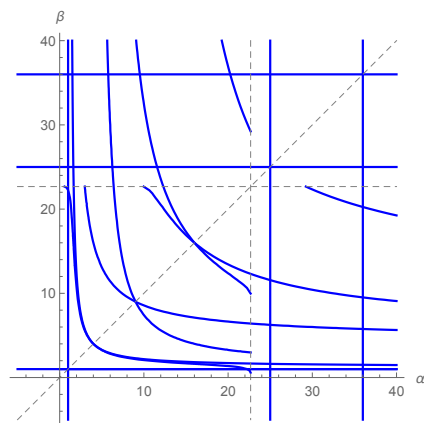


(c)

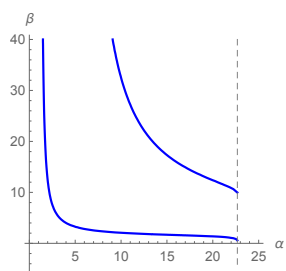


(d)

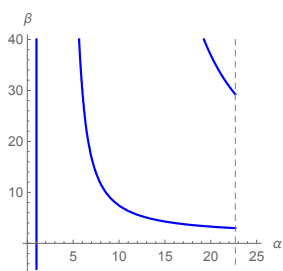
Obrázek B.1: (a) Fučíkovo spektrum Σ a množiny (b) M_1^Σ , (c) M_2^Σ , (d) M_3^Σ .



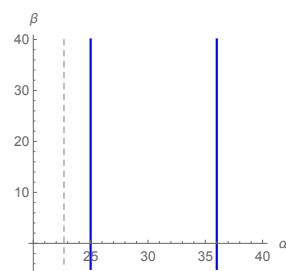
(a)



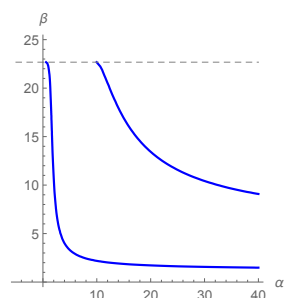
(b)



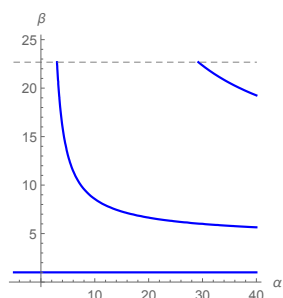
(c)



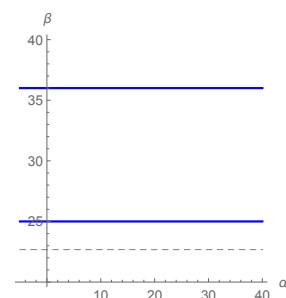
(d)



(e)

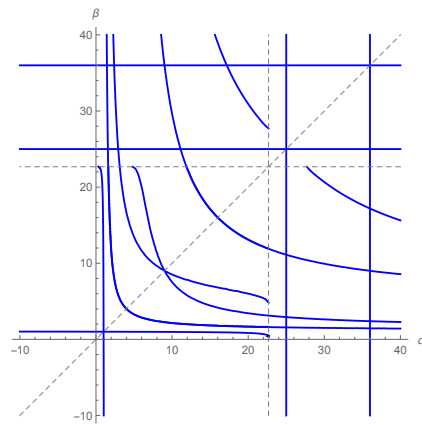


(f)

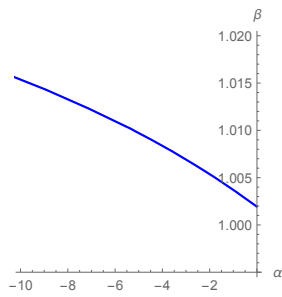


(g)

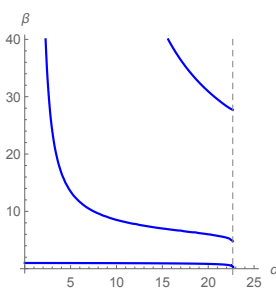
Obrázek B.2: (a) Zobecněné spektrum S_1 a množiny (b) $M_1^{S_1}$, (c) $M_2^{S_1}$, (d) $M_3^{S_1}$, (e) $M_4^{S_1}$, (f) $M_5^{S_1}$, (g) $M_6^{S_1}$ pro $a = 0.21$.



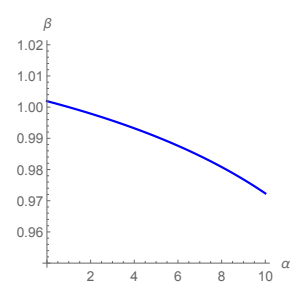
(a)



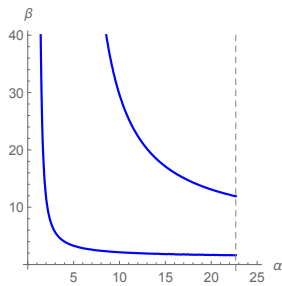
(b)



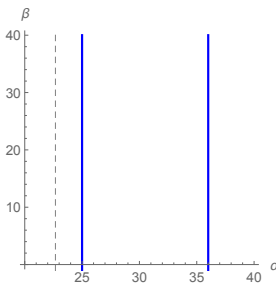
(c)



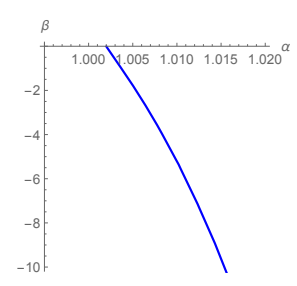
(d)



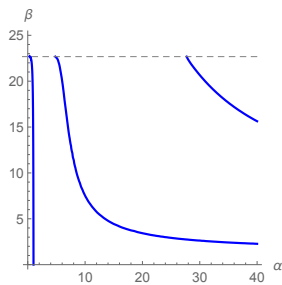
(e)



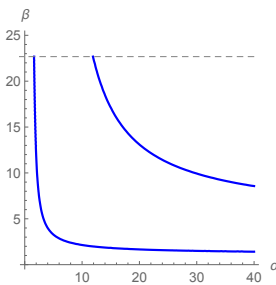
(f)



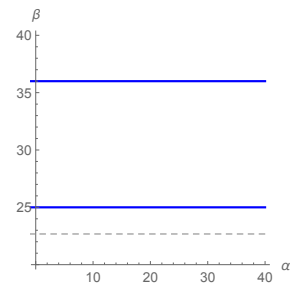
(g)



(h)

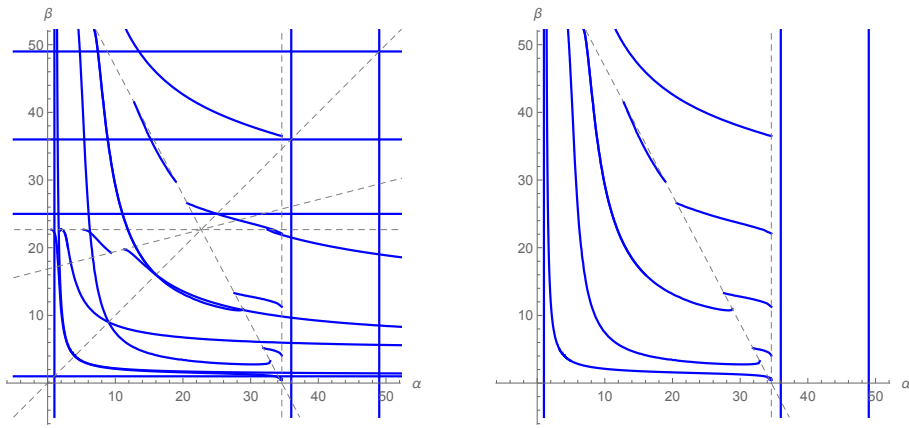


(i)



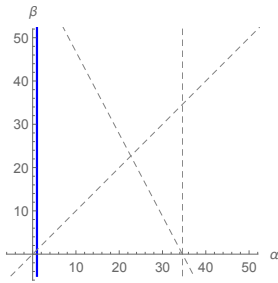
(j)

Obrázek B.3: (a) Zobecněné spektrum S_2 a množiny (b) $M_1^{S_2}$, (c), (d) $M_2^{S_2}$, (e) $M_3^{S_2}$, (f) $M_4^{S_2}$, (g) $M_5^{S_2}$, (h) $M_6^{S_2}$, (i) $M_7^{S_2}$, (j) $M_8^{S_2}$ pro $a = 0.21$.

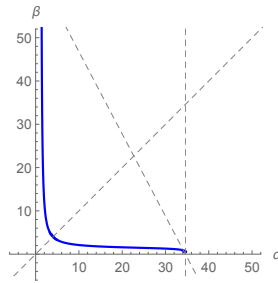


(a)

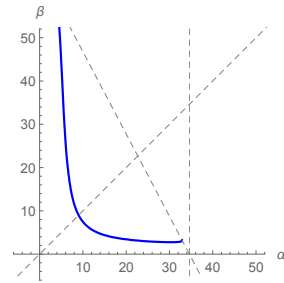
(b)



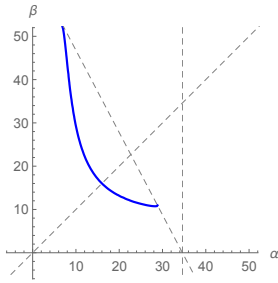
(c)



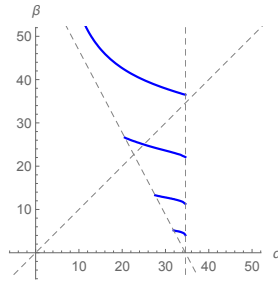
(d)



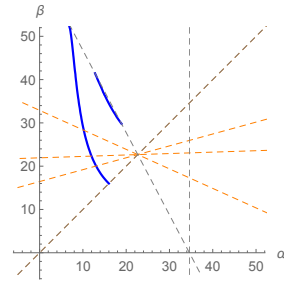
(e)



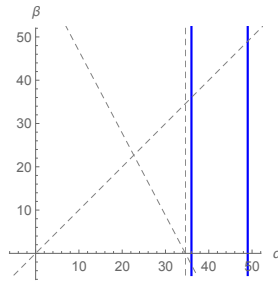
(f)



(g)

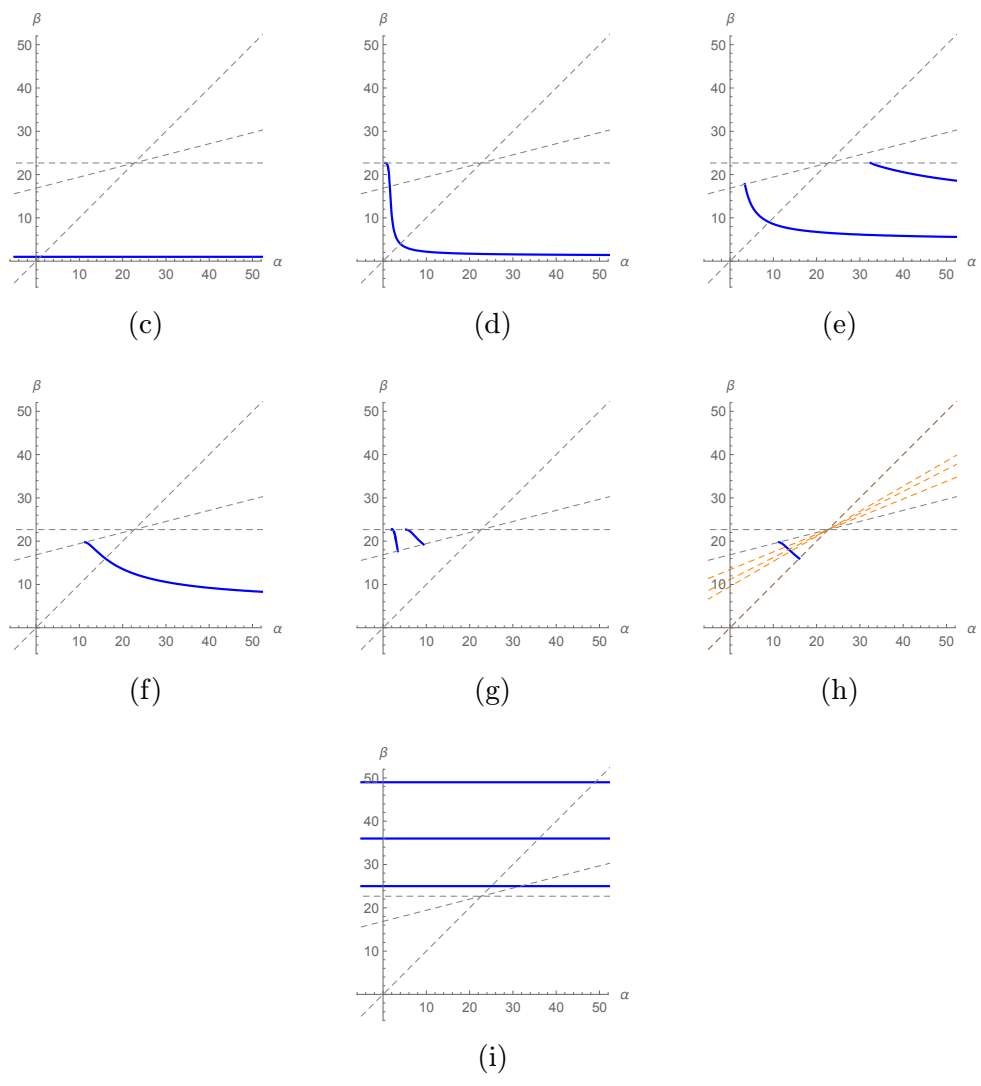
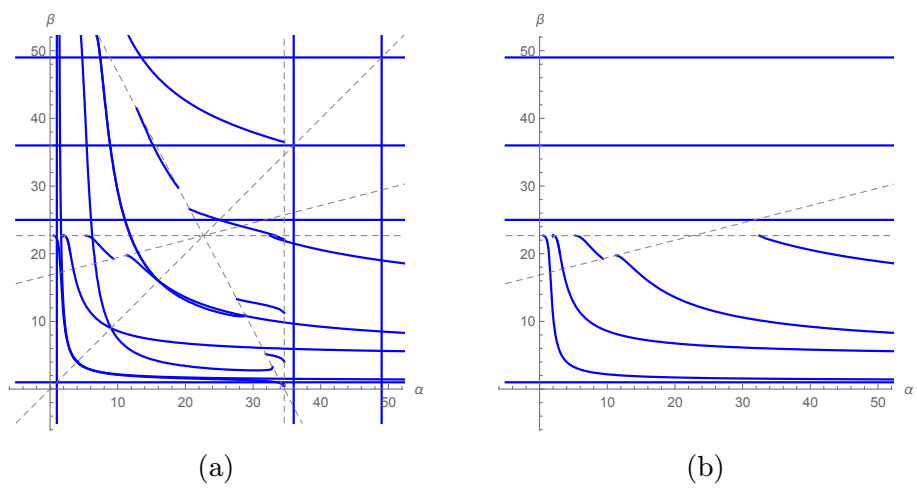


(h)

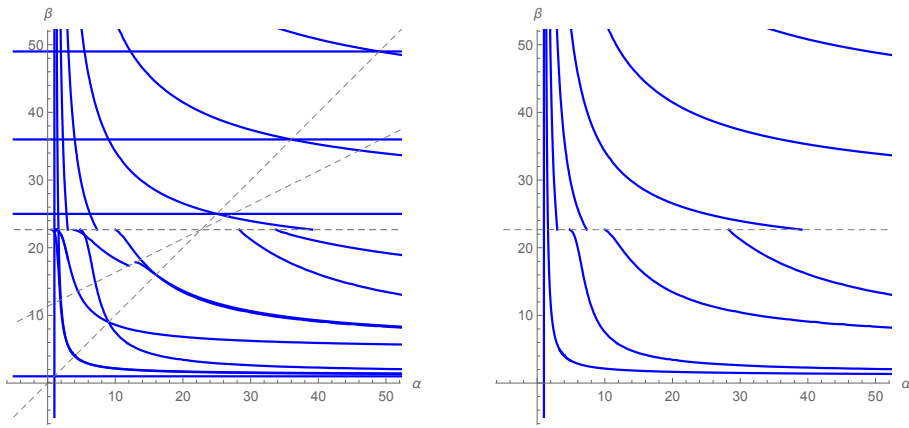


(i)

Obrázek B.4: (a) Zobecněné spektrum S_3 a množiny (b) $\bigcup_{k=1}^7 M_k^{S_3}$, (c) $M_1^{S_3}$, (d) $M_2^{S_3}$, (e) $M_3^{S_3}$, (f) $M_4^{S_3}$, (g) $M_5^{S_3}$, (h) $M_6^{S_3}$, (i) $M_7^{S_3}$ pro $a = 0.17$, $b = 0.21$.

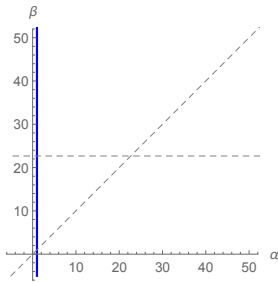


Obrázek B.5: (a) Zobecněné spektrum S_3 a množiny (b) $\bigcup_{k=8}^{14} M_k^{S_3}$, (c) $M_8^{S_3}$, (d) $M_9^{S_3}$, (e) $M_{10}^{S_3}$, (f) $M_{11}^{S_3}$, (g) $M_{12}^{S_3}$, (h) $M_{13}^{S_3}$, (i) $M_{14}^{S_3}$ pro $a = 0.17$, $b = 0.21$.

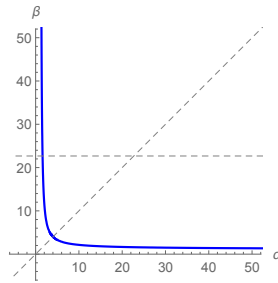


(a)

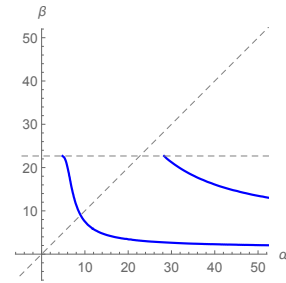
(b)



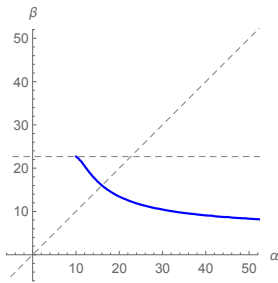
(c)



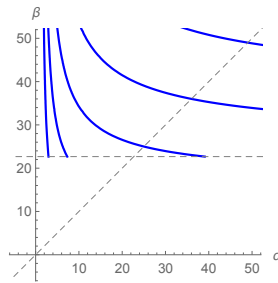
(d)



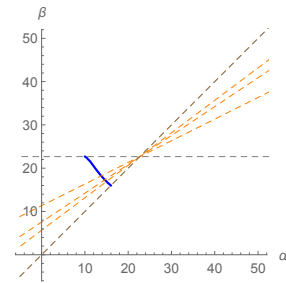
(e)



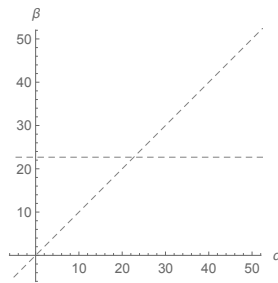
(f)



(g)

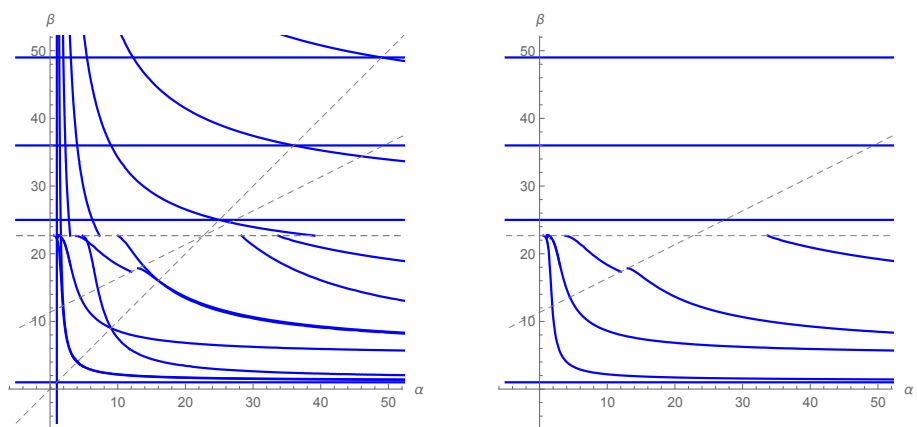


(h)



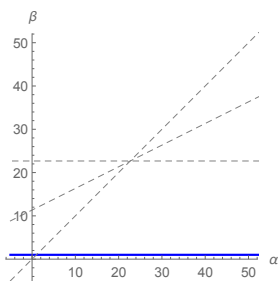
(i)

Obrázek B.6: (a) Zobecněné spektrum S_4 a množiny (b) $\bigcup_{k=1}^7 M_k^{S_4}$, (c) $M_1^{S_4}$, (d) $M_2^{S_4}$, (e) $M_3^{S_4}$, (f) $M_4^{S_4}$, (g) $M_5^{S_4}$, (h) $M_6^{S_4}$, (i) $M_7^{S_4}$ pro $b = 0.21$.

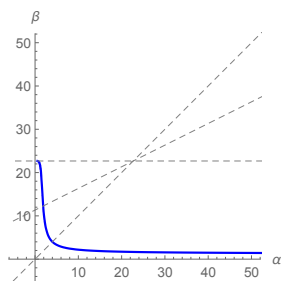


(a)

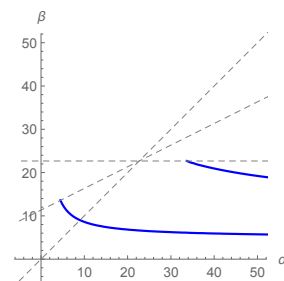
(b)



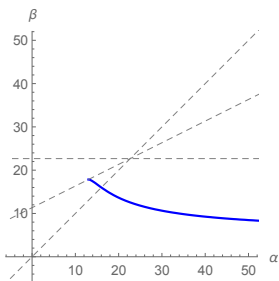
(c)



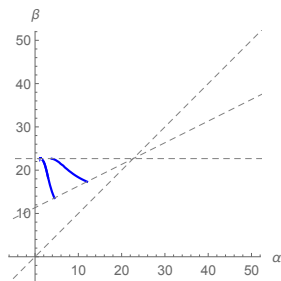
(d)



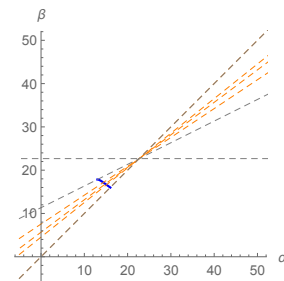
(e)



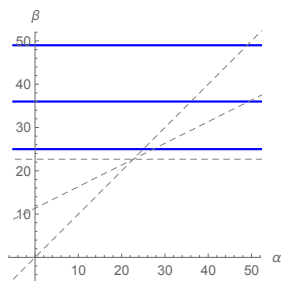
(f)



(g)



(h)



(i)

Obrázek B.7: (a) Zobecněné spektrum S_3 a množiny (b) $\bigcup_{k=8}^{14} M_k^{S_4}$, (c) $M_8^{S_4}$, (d) $M_9^{S_4}$, (e) $M_{10}^{S_4}$, (f) $M_{11}^{S_4}$, (g) $M_{12}^{S_4}$, (h) $M_{13}^{S_4}$, (i) $M_{14}^{S_4}$ pro $b = 0.21$.

